Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

Uma Introdução ao Estudo de Sistemas Dinâmicos no Ensino Médio

Lísian Caroline Lima Alves Cardoso

Orientador: Prof[a]. Dr[a]. Fabíola de Oliveira Pedreira

Feira de Santana-Bahia

Março - 2022

Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Uma Introdução ao Estudo de Sistemas Dinâmicos no Ensino Médio

Lísian Caroline Lima Alves Cardoso

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Fabíola de Oliveira Pedreira.

Feira de Santana-Bahia

Março - 2022

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

C264i Cardoso, Lísian Caroline Lima Alves
Uma introdução ao estudo de Sistemas Dinânmicos no Ensino Médio / Lísian Caroline Lima Alves Cardoso
67.: il.

Orientadora: Fabíola de Oliveira Pedreira
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana-UEFS, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022.

1. Composição de função - Matemática. 2. Atividades da sequência didática - Alunos do ensino médio. 3. Conjectura de Collatz - Matemática. I. Pedreira, Fabíola de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51

Tatiane Souza Santos - Bibliotecária CRB5/1634

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Lísian Caroline Lima Alves Cardoso do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos quatro dias do mês de março de dois mil e vinte e dois, às 10:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com/tkv-jdvi-jnr, da dissertação apresentada sob o título **"UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS NO ENSINO MÉDIO",** da discente **Lísian Caroline Lima Alves Cardoso**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS), Mariana Tavares de Aguiar (UFBA) e Elaine Ferreira Rocha (UNIVASF). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: Aprovada.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.
Feira de Santana, 04 de março de 2022.

Fabíola de Oliveira Pedreira

Prof.ª Dra.Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS)

Mariana Tavares

Prof.ª Dra. Mariana Tavares de Aguiar (UFBA)

Elaine Ferreira Rocha

Prof.ª Dra. Elaine Ferreira Rocha (UNIVASF)

Visto do Coordenador:

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida, pelo que me ensinaram e transmitiram, pelo apoio incondicional e incessante, pelo que sou.
Aos meus pais, meus irmãos, meu marido, meu filho, minha família e meus amigos.

Agradecimentos

Essa é uma etapa de grande importância em minha vida, a qual não teria sido possível sem a permissão de Deus, que me abençoa com saúde e que coloca, desde sempre, pessoas especiais e imprescindíveis, que tornam meus dias mais felizes e meus sonhos mais possíveis.

A começar pelos meus pais, Rose e Jairo, meus irmãos, Sandy, Lailla e Matheus, e minhas avós, Graça e Tereza, que tornam minha vida mais feliz simplesmente por saber que existem e que posso contar sempre, independentemente de estar próximo fisicamente.

Ao meu marido, Pascoal, por sua paciência incrível e por sua praticidade invejável, que me fez enxergar que desistir nunca é a melhor opção e me ensina de maneira magistral que é possível encarar a realidade. Obrigada por todo seu amor, sempre presente e tão significativo.

Ao meu filho, Victor, que é a minha inspiração diária para me tornar um ser humano melhor.

Aos meus amigos e aos colegas do PROFMAT, que tornaram a minha trajetória acadêmica e essa conquista mais especial, menos pesada e, principalmente, mais valiosa – obrigada por todos os conselhos, injeções de ânimo, risadas, horas de estudo e pelos sorrisos sempre cativantes, pois com vocês a caminhada até aqui foi mais alegre e especial.

E, finalmente, aos professores do Departamento de Matemática da UEFS que, através de dedicação incansável, tornaram o PROFMAT realidade ministrando aulas que nos instigaram a ser matemáticos e professores melhores. Agradeço em especial à Professora Drª. Fabiola Pedreira pela orientação nesse trabalho e, principalmente, pela paciência, dedicação, compreensão e sua importante atuação desde os anos de minha graduação.

"O bater das asas de uma borboleta num extremo do globo terrestre, pode provocar uma tormenta no outro extremo no espaço de tempo de semanas."
(Edward Lorenz)

Resumo

O presente trabalho realiza um estudo a introdução de Sistemas Dinâmicos Discretos (SDD), que são sistemas em que a evolução no tempo ocorre em passos discretos, em oposição ao tempo contínuo. Focaremos nos conceitos iniciais de iteração, órbitas, pontos fixos, pontos repulsores, pontos atratores, pontos periódicos, dentre outros. Nosso principal objetivo é mostrar que é possível trabalhar com conteúdo do ensino superior de maneira intuitiva com alunos do 1^o ano do Ensino Médio. Para tal sugerimos uma sequência didática com a teoria abordada com uma linguagem apropriada para alunos dessa etapa do ensino. Essa sequência que está baseada na BNCC, terá exemplos práticos, análises gráficas, situações-problemas. Além dos conceitos introdutórios da teoria de SDD, abordaremos também, a conjectura de Collatz, um problema de fácil compreensão e rico no conceito de órbitas periódicas. A sequência conta com sete atividades e, em algumas delas, sugerimos a utilização do Geogebra, um software gratuito de matemática dinâmica, pois facilitará a compreensão dos conteúdos de pontos fixos, pontos atratores e repulsores.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Composição de função, Iteração, Conjectura de Collatz, Sequência didática .

Abstract

The present work carries out a study on the introduction of discrete dynamical systems (SDD), which are systems in which time evolution occurs in discrete steps, as opposed to continuous time. We will focus on the initial concepts of iteration, orbits, fixed points, repulsor points, attracting points, periodic points, among others. Our main objective is to show that it is possible to work with higher education content in an intuitive way with students in the 1^o year of high school. To this, we suggest a didactic sequence with the theory addressed with an appropriate language for students at this stage of education. This sequence, which is based on the BNCC, will have practical examples, graphic analyses, problem situations. In addition to the introductory concepts of the SDD theory, we will also address the Collatz conjecture, an easy-to-understand problem rich in the concept of periodic orbits. The sequence has seven activities and, in some of them, we suggest the use of Geogebra, a free software of dynamic mathematics, as it will facilitate the understanding of the contents of fixed points, attracting and repulsor points.

Keywords: Dynamical Systems, Function Composition, Iteration, Collatz Conjecture, Didactic Sequence.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Os estudos em sistemas dinâmicos objetivam entender o comportamento, a longo prazo, de estados presentes em um sistema cuja evolução é dada por uma regra determinística, dependendo de apenas uma variável, apresentando comportamentos cheios de complexidade, podendo inclusive ser "caótico". Tais estudos são baseados em iterações de funções aliado a alguns conhecimentos de Cálculo Diferencial e Espaços Métricos.

Essa área vem apresentando um desenvolvimento significativo dentro da Matemática, principalmente a partir da segunda metade do século XX, com o desenvolvimento de computadores de grande porte.

Nesse trabalho, serão abordadas algumas noções iniciais da teoria dos sistemas dinâmicos, mais precisamente, sob o prisma do sistema dinâmico discreto de uma dimensão, que são sistemas em que a evolução no tempo ocorre em passos discretos, em oposição ao tempo contínuo. Para isso, apresentaremos algumas definições (como: órbita, pontos fixos e periódicos, dentre outras), exemplos, teoremas e representações gráficas com intuito de ver o comportamento do sistema.

Norteado pelo propósito do Mestrado Profissional, este trabalho tem por objetivo servir como um texto de apoio para os professores que atuam no ensino de Matemática da educação básica, buscando o aprimoramento do embasamento teórico sobre um tema da Matemática ainda pouco abordado nos cursos de licenciatura. Abordar conteúdo desse tipo é de suma importância, pois apresenta aos professores a oportunidade de expor a seus alunos teorias contemporâneas na pesquisa matemática, aguçando o seu interesse por esta disciplina.

A escolha da aplicação dessa teoria no Ensino médio deve-se ao fato de que, apesar de ser uma teoria complexa a sua parte inicial é desenvolvida a partir de conceitos bem simples que tornam possível a apreensão e aplicação destes conhecimentos utilizando alguns assuntos abordados na grade curricular do ensino médio, tais como: composição de funções, funções polinomiais e representações gráficas.

Assim, será apresentado um material com linguagem adequada para o público-alvo, utilizando como suporte uma sequência didática que visa direcionar a forma como o assunto pode ser ministrado na educação básica, contendo sugestões de atividades que utilizam os conceitos introdutórios dos sistemas dinâmicos discretos.

Para tal, daremos ênfase especial a exemplo mais simples, onde ocorre o comportamento dos sistemas dinâmicos discretos buscando correlacionar, quando possível, com modelos matemáticos presentes no cotidiano. Portanto, iremos nos deter aos conceitos iniciais de iteração de polinômios com uma variável real e de órbitas periódicas, como por exemplo o caso particular dos pontos fixos e o comportamento que outros pontos próximos a eles podem ter, bem como analisar como esses pontos fixos podem desempenhar um comportamento importante para observar outros pontos no sistema.

Também iremos trabalhar com um importante e interessante resultado que é a conjectura de Collatz, um problema de fácil compreensão na qual aparece uma órbita periódica e todos os outros pontos acabam sendo pré-periódicos, fato que possivelmente tornará o trabalho intrigante e mais atrativo para os alunos.

Com atividades desse tipo, onde são utilizados assuntos de matemática do ensino superior na educação básica, acreditamos que podemos ajudar alguns estudantes a superar o medo que possuem da Matemática, desmistificando a ideia equivocada de que a compreensão da matemática é para poucos, bem como estimulá-los a aprofundar os seus conhecimentos sobre essa disciplina e quem sabe até a ingressar no curso de licenciatura em matemática.

Dessa forma, o trabalho foi dividido em cinco capítulos. No primeiro, será realizada uma explanação geral dos sistemas dinâmicos, abordando um pouco da história e seu conceito; no segundo capítulo são apresentados os conceitos preliminares necessários para melhor compreensão das construções das ideias no estudo dos sistemas dinâmicos discretos; no terceiro são abordadas as noções iniciais dos sistemas dinâmicos discretos, como por exemplo as noções de iterações, órbita, ponto fixo, atrator, repulsor, pontos periódicos. A apresentação dos conceitos introdutórios apresentadas nos três primeiros capítulos são necessários para melhor entendimento, servindo como um alicerce teórico para aplicações vistas mais à frente.

No quarto capítulo enunciaremos a conjectura de Collatz, um problema aparentemente simples que tem por finalidade motivar o leitor e o público-alvo da sequência didática; por fim, no quinto capítulo será apresentada uma sequência didática para ser aplicada no Ensino Médio, mais precisamente, no primeiro ano, onde serão utilizados conceitos elementares de sistemas dinâmicos discretos a partir da relação com conteúdo pertencente à matriz curricular desse ano escolar.

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos

1.1 Um pouco da História dos Sistemas Dinâmicos

Ao longo da história observa-se a busca do homem para tentar entender o mundo que o cerca e buscar meios de prever acontecimentos, em especial, acontecimentos relacionados a fenômenos naturais e de ordem social. É nesse contexto que se iniciou o surgimento da teoria dos sistemas dinâmicos.

Ao analisar a história podemos perceber rudimentos desta teoria desde os trabalhos de Aristóteles (384-322 a.C.), todavia, foi somente a partir do século XVI que foram identificados os primeiros estudos da teoria dos sistemas dinâmicos, através dos trabalhos de Mecânica Celeste escritos por Johannes Kepler (1571-1628) e dos estudos de Isaac Newton (1643-1727) a partir da formalização da mecânica clássica e os estudos em torno das equações diferenciais, em meados do século XVII. Entretanto, ao longo dos séculos vários matemáticos contribuíram para a formação da teoria que temos hoje.

Um dos principais matemáticos que contribuiu significativamente para a teoria dos sistemas dinâmicos foi o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912), considerado um dos criadores dessa teoria, ele propôs, no final do século XIX, o estudo das soluções das equações diferenciais ordinárias (E.D.O) do ponto de vista qualitativo, conduzindo à compreensão do comportamento global das soluções desse tipo de equação.

Poincaré estudou o movimento dos planetas querendo entender, matematicamente, o que acontecia ao acrescentar um corpo de massa gravitacional a um sistema com dois corpos. Este problema ficou conhecido como Problema Restrito dos Três Corpos e consiste em determinar o movimento de três corpos com massa, dadas suas posições e velocidades iniciais e considerando que estes corpos interagem gravitacionalmente entre si.

Ao fazer esse estudo qualitativo, Poincaré descobriu que ao invés de existirem órbitas regulares e equilibradas ocorriam órbitas irregulares, desequilibradas e imprevisíveis. Tal estudo foi o precursor do que hoje chamamos de dinâmica caótica. A sua obra Les méthodes nouvelles de la Mecánique Céleste, composta por três volumes e publicada entre 1892 e 1899, apresenta muitos avanços que vão incorporar o estudo dos sistemas dinâmicos.

Em 1927 surge o primeiro livro publicado na área de sistemas dinâmicos, a obra Dynamical Systems, escrito pelo matemático americano George Birkhoff (1884-1944). Os anos entre 1950 e 1970 foram marcados por muitos avanços em relação aos estudos dos sistemas dinâmicos. Podemos citar os matemáticos Kolmogorov, Arnold e Moser que formularam o Teorema KAM (Teorema de Kolmogorov–Arnold–Moser) e o matemático americano Stephen Smale onde sua principal contribuição foi a ferradura de Smale.

O Teorema KAM explica como o comportamento caótico emerge ao perturbar um sistema originalmente integrável resolvendo parcialmente o problema dos pequenos divisores. Já os estudos de Smale mostraram ser possível compreender e analisar todo o comportamento imprevisível de determinados sistemas.

No Brasil, esses estudos contaram com a colaboração dos matemáticos Maurício Peixoto e Jacob Palis. Com seu trabalho em estabilidade estrutural, Peixoto consolida a teoria dos sistemas dinâmicos no país, já os estudos de Palis servem para modelar fenômenos evolutivos da natureza e de outras áreas. Atualmente, esta área tem sentido um forte desenvolvimento, principalmente devido a existência de um grupo de excelência trabalhando nesta área no Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, no Rio de Janeiro, e nos diversos cursos de pós-graduações nas universidades brasileiras.

1.2 Sistemas Dinâmicos

Um sistema é um conjunto ordenado de elementos que se encontram interligados e que interagem entre si, ou seja, é um conjunto de elementos interligados de modo a formarem um todo organizado. Na matemática temos vários exemplos de sistemas, entre eles estão os sistemas de equações lineares e não lineares e os sistemas dinâmicos.

No caso dos sistemas dinâmicos, o conceito surge da necessidade de se construir uma teoria que seja capaz de prever a evolução de fenômenos naturais e humanos que ocorrem nos mais diversos campos do conhecimento. Tem por objetivo entender o comportamento de um sistema ao longo do tempo cuja evolução é dada por uma regra determinística.

A sua importância se deve à capacidade de descrever, expressar e analisar fenômenos naturais e humanos que tem um comportamento complexo e, muitas vezes, imprevisível, o que ocorre em diversos ramos das Ciências, como por exemplo, no estudo dos gases, nos estudos dos movimentos dos corpos celestes, na dinâmica de uma população, no desmatamento de florestas e na meteorologia, dentre outros.

Dessa forma, podemos pensar um sistema dinâmico como uma lei que descreve o comportamento dos elementos em um certo ambiente. Matematicamente, expressamos essa lei através de uma função f, o ambiente como um certo conjunto X, e os elementos são os pontos x que pertencem ao conjunto X, ou seja, $f : X \to X$.

De acordo com a forma em que a passagem do tempo é considerada, classificamos os sistemas dinâmicos de duas formas: de maneira discreta (que será o enfoque deste trabalho) e de maneira contínua. Nos sistemas contínuos os valores são medidos sem interrupções e podem ser avaliados a qualquer instante, normalmente são descritos por um sistema de equações diferenciais. Já os sistemas discretos são descritos normalmente através de uma variável temporal que assume valores inteiros.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Para melhor compreensão das propriedades e definições inerentes ao estudo de sistemas dinâmicos discretos se faz necessário abordar e entender alguns conceitos, definições e teoremas que servirão como ferramentas matemáticas para demonstrações de teoremas do assunto abordado nesse trabalho. Parte dessa teoria pode ser encontrada, com maior profundidade, nos capítulos do livro texto da disciplina de MA22-Fundamentos de Cálculo, do PROFMAT do autor Antônio Caminha Muniz Neto.

2.1 Composição de Funções

Definição 2.1.1 *Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma função $f : X \to Y$ é uma lei que associa a cada elemento de X um único elemento de Y.*

A composta de funções é bastante utilizada no estudo do comportamento de um sistema dinâmico visto que isso significa iterar uma função, que é o conceito inicial dessa teoria.

Definição 2.1.2 *Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a função composta de f e g é a função $g \circ f : A \to C$, definida, para cada $x \in A$, por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemplo 2.1.1 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções dadas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^3$. Podemos então obter as seguintes composições das funções,*

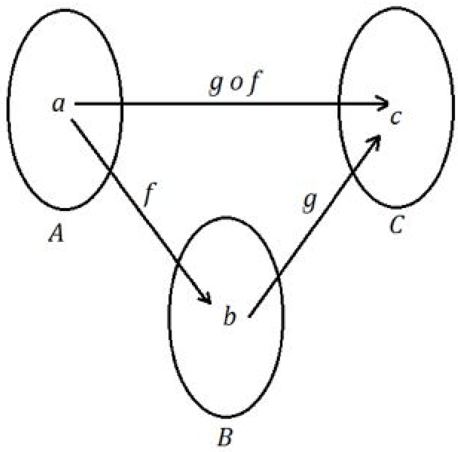


Figura 2.1: Representação da composição de função $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x)^3 = 8x^3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^3) = 2x^3$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2(2x) = 4x$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^3)^3 = x^9$$

Para o estudo dos sistemas dinâmicos discretos estaremos interessados apenas em compor uma função com ela própria, como veremos no Capítulo 3.

2.2 Teorema do Valor Intermediário

Definição 2.2.1 *Uma função f é contínua no ponto $x = a$ se existir o limite de $f(x)$ com x tendendo a a e esse limite for igual a $f(a)$. Além disso, dizemos que f é contínua em seu domínio, ou simplesmente contínua, se ela for contínua em todos os pontos do seu domínio.*

Apresentaremos agora algumas propriedades das funções contínuas.

Proposição 2.2.1 *1. Sejam f e g definidas no intervalo $[a, b]$. Se f e g são contínuas* *em um ponto x pertencente a $[a, b]$, então também são contínuas em x as funções: $f + g$, $f - g$, $f.g$ e f/g, desde que g seja não nula.*

2. *As funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, são contínuas em todos os pontos de seus domínios, os quais podem ser intervalos fechados, abertos, semi-abertos, ou infinitos.*

3. *Se f é contínua em $[a, b]$ então $Im(f) = [c, d]$. Além disso, se f admite inversa g, esta inversa g será contínua em $[c, d]$.*

Teorema 2.2.1 *(Teorema do valor Intermediário - TVI). Se f for contínua em $[a, b]$ e γ for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.*

Demonstração

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $f(a) < \gamma < f(b)$.

Considere a função $g(x) = f(x) - \gamma$, com $x \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, pelas propriedades de funções contínuas temos que g também o é. Além disso, $g(a) = f(a) - \gamma < 0$ e $g(b) = f(b) - \gamma > 0$. Pelo Teorema de Bolzano[1] , existe $c \in [a, b]$ tal que se $g(c) = 0$. Portanto, $f(c) - \gamma = 0$, donde $f(c) = \gamma$.

Uma importante consequência do Teorema do Valor Intermediário é o Teorema do Ponto Fixo, o qual vai garantir sobre certas condições a existência de um ponto que fica invariante sob a função.

Teorema 2.2.2 *(Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$ então existe $x \in [a, b]$ de modo que $f(x) = x$.*

Demonstração

Suponha $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$.

Como f é contínua em $[a, b]$, temos que h é contínua. Além disso, temos que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, sendo assim, $h(a) = f(a) - a \geq 0$ e $h(b) = f(b) - b \leq 0$. Logo, pelo TVI, existe $c \in [a, b]$ tal que se $h(c) = 0$ e portanto, $f(c) = c$.

Iremos ver no Capítulo 3 que esses pontos desempenham um papel importante para o estudo do sistema, o comportamento de pontos próximos a um ponto fixo podem ser determinados pela observação da derivada da função neste ponto. Sendo assim, faremos menção a derivada de uma função na próxima seção.

[1] Teorema de Bolzano: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários. Então, existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

2.3 Derivada de uma Função

Nessa seção abordaremos a definição da derivada a partir da existência do limite, bem como a sua interpretação geométrica, ou seja, a definição da reta tangente a uma curva.

Definição 2.3.1 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que f é derivável em um ponto $x_0 \in I$ se existir o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Neste caso, denotamos este limite por $f'(x_0)$.

Definição 2.3.2 *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável para todo ponto de I, dizemos que a função é derivável e a função $f' : I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor $f'(x)$ é a função derivada de f.*

A representação geométrica da derivada é bastante interessante e esta associada ao conceito de reta tangente a uma curva.

Definição 2.3.3 *A reta tangente ao gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P e tem coeficiente angular igual a $f'(x_0)$.*

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f em P é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2.4 Teorema do Valor Médio

Na Seção 3.6 do Capítulo 3, veremos uma relação entre a derivada de uma função num ponto e o comportamento do sistema, onde para isso é aplicado o Teorema do Valor Médio. Este teorema tem como base na sua demonstração o seguinte teorema.

Teorema 2.4.1 *(Teorema de Rölle). Se f for contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b), e $f(a) = f(b)$, então existirá pelo menos um c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*

Uma demonstração do Teorema 2.4.1 pode ser encontrada em [10], pág 161.

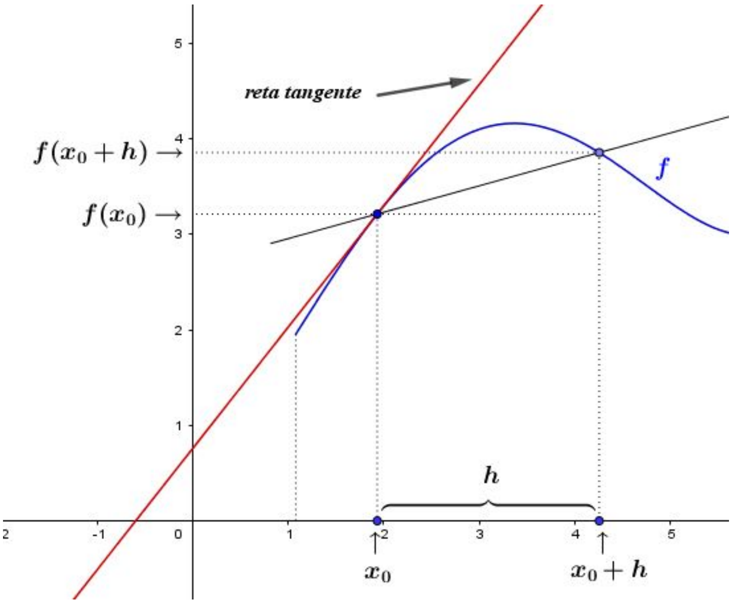


Figura 2.2: Representação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Teorema 2.4.2 *(Teorema do Valor Médio (Lagrange) - TVM). Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá c em (a, b) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Demonstração Seja f uma função definida em $[a, b]$. Considere a função s dada por

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

o gráfico da função s é a reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Considere agora a função g dada por $g(x) = f(x)–s(x)$, com $x \in [a, b]$.

Temos que g é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $g(a) = g(b)$. Assim, pelo teorema de Rôlle existe c em (a, b) tal que $g'(c) = 0$.

Além disso, $g'(x) = f'(x)–s'(x)$ e como $s'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, segue que $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

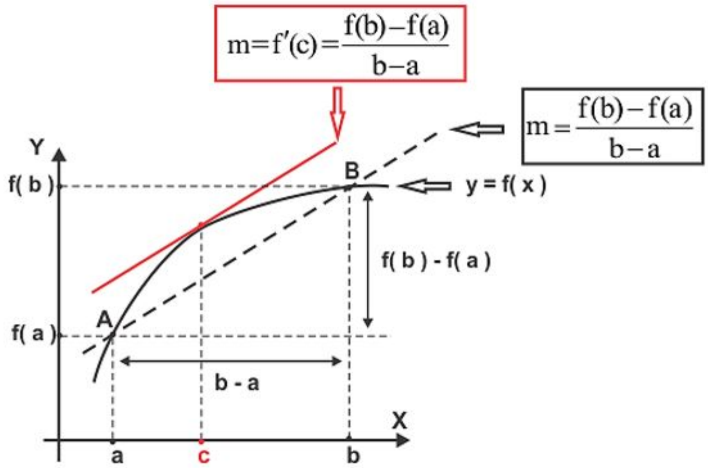
Logo,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

e portanto,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio afirma que existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ como indica a Figura 2.3.



Fonte:
https://engenhariaexercicios.com.br/calculo-a/derivada/teorema-do-valor-medio/.
Acessado 25/01/2022

Figura 2.3: Representação gráfica do Teorema do Valor Médio.

Capítulo 3

Sistemas Dinâmicos Discretos

Nos diversos ramos das Ciências verifica-se a importância dos sistemas dinâmicos discretos devido à sua capacidade de modelar fenômenos naturais e sociais que se comportam aparentemente de maneira que parecem imprevisíveis.

Dessa forma, podemos definir sistemas dinâmicos discretos como um conjunto de estados possíveis, juntamente com uma regra que determina o estado presente em termos do estado passado, cujo estado só muda durante os instantes $t_0, t_1, t_2, ...$, onde no intervalo de tempo entre dois desses instantes, o estado permanece constante.

Assim, um sistema dinâmico discreto é determinado por uma função $f : X \to X$, onde o conjunto $X \subset \mathbb{R}$, é chamado espaço de fase.

A definição de um sistema dinâmico discreto (SDD) está atrelada a observação da passagem do tempo nestes sistemas, bem como o comportamento do sistema observado nessa passagem. Logo, nesse capítulo definiremos alguns conceitos iniciais de SDD que usaremos ao longo deste trabalho.

Para as definições a seguir, considere uma função contínua $f : X \to X$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Assumiremos também que f é de classe C^1 quando tomarmos a primeira derivada da função. Para n inteiro positivo, denote por f^n a composição de n funções iguais a f, isto é,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{n vezes}}$$

3.1 Iteração de uma função

Iterar significa repetir, em matemática essa "repetição"consiste em compor uma função com ela mesma várias vezes

$$f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f.$$

Dada uma aplicação contínua f, de um espaço topológico X nele mesmo, ou seja, $f : X \to X$, e um ponto $x \in X$, podemos nos perguntar quem é a imagem do ponto x, em seguida quem é a imagem de $f(x)$, a imagem de $f(f(x))$, e assim sucessivamente. Este processo é chamado de iteração da função f no ponto x.

Ao iterarmos uma função, é usual atribuirmos a este processo a ideia de tempo, como se cada iteração de f correspondesse à passagem de uma unidade de tempo. Sendo assim, temos um sistema em que o tempo evolui de forma discreta.

Dessa forma, se tivermos a função f, f^2 é a segunda iteração de f, f^3 é a terceira iteração de f, $\ldots$, f^n é a $n-$ésima iteração de f, ou seja, a $n-$ésima composição de f sobre ela mesma.

Vamos analisar alguns exemplos de funções para compreender o processo de iteração.

Exemplo 3.1.1 *Considere a função $f(x) = 2x$. Iterando essa função temos que,*

$$\begin{gathered} f(x) = 2x \\ f^2(x) = f(f(x)) = 2(2x) = 4x \\ f^3(x) = f(f(f(x)) = 2(4x) = 8x \\ \vdots \\ f^n(x) = 2^n x \end{gathered}$$

Exemplo 3.1.2 *Considere a função $f(x) = x^2$. Iterando essa função temos que,*

$$\begin{gathered} f(x) = x^2 \\ f^2(x) = f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4 \\ f^3(x) = f(f(f(x)) = (x^4)^2 = x^8 \end{gathered}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = x^{2^n}$$

Exemplo 3.1.3 *Considere a função $f(x) = x + 1$. Iterando essa função temos que,*

$$f(x) = x + 1$$
$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$
$$f^3(x) = f(f(f(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = x + n$$

Exemplo 3.1.4 *Se um cliente fez uma aplicação financeira no valor de $R\$500,00$ a uma taxa de 5% capitalizada anualmente. Sabe-se que ele:*

(1) não fez novos depósitos, permanecendo fixo o capital inicial;

(2) a taxa de capitalização não será revisada ao longo dos anos, permanecendo fixa.

Qual será o montante da aplicação financeira, sabendo que a aplicação durou n anos?

Resolução: Ao término do primeiro ano, percebe-se um aumento de 5% ao capital inicial $M_0 = R\$500,00$. O cliente obtém, então, o montante M_1, onde

$$M_1 = M_0 + 0,05M_0 = 1,05M_0$$

E assim $M_1 = R\$525,00$. Ao final de cada ano efetuamos a mesma operação, obtendo

$$M_2 = 1,05M_1$$

$$M_3 = 1,05M_2$$
$$\vdots$$
$$M_n = 1,05M_{n-1}$$

Dessa forma, observamos que é preciso ter o conhecimento do resultado anterior para encontrarmos o próximo. Assim, se f é a função que calcula a cada ano o valor da aplicação, isto é, $f(x) = 1,05x$ então para determinar o valor do montante do cliente *após n anos, teremos que determinar a $n-$ésima iteração que é dada por,*

$$M_n = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n}(M_0) = f^n(M_0) = (1,05)^n M_0.$$

3.2 Órbita

Um dos objetivos em SDD é entender a natureza de todas as órbitas e identificar o conjunto de órbitas que são periódicas e pré-periódicas. Assim, veremos nessa seção essas definições e alguns exemplos.

Definição 3.2.1 *Dado $x_0 \in X$, definimos a órbita (ou trajetória) de x_0 sobre f como sendo uma sequência de pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ onde x_0 é a origem da órbita, também chamada de condição inicial e*

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$$
$$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$$
$$\vdots$$

Exemplo 3.2.1 *Considere a função $f(x) = x^2 - 1$. Os primeiros pontos da órbita de $x_0 = 2$ são*

$$x_0 = 2$$
$$x_1 = f(x_0) = 2^2 - 1 = 3$$
$$x_2 == f^2(x_0) = 3^2 - 1 = 8$$
$$x_3 = f^3(x_0) = 8^2 - 1 = 63$$

Definição 3.2.2 *A órbita positiva de um ponto $x \in X$ é o conjunto de pontos*

$$\theta^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\} = \{f^n(x) : n \geq 0\}.$$

Se f é uma função invertível, podemos definir a órbita total de x como o conjunto

$$\theta(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

E a órbita negativa de x por

$$\theta^-(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots\} = \{f^{-n}(x) : n \geq 0\}.$$

É comum denominar a órbita positiva simplesmente por órbita, principalmente quando a função em questão não é invertível.

Exemplo 3.2.2 *Considere a função $f(x) = 2x$ e $x_0 = 3$. Então temos*

$$\begin{gathered}
x_0 = 3 \\
x_1 = f(x_0) = 2.3 = 6 \\
x_2 == f^2(x_0) = 2.6 = 12 \\
x_3 = f^3(x_0) = 2.12 = 24. \\
\vdots \\
x_n = f^n(x_0) = 2^n x_0
\end{gathered}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, a órbita positiva de 3 é $\theta^+(3) = \{3, 6, 12, 24, \dots\}$. Como a função f é uma função invertível podemos definir a órbita negativa de f, ou seja, $\theta^-(3) = \{3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots\}$.

Exemplo 3.2.3 *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$. Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que*

$$\begin{gathered}
x_1 = f(x_0) = 3x_0 \\
x_2 = f(f(x_0)) = f(3x_0) = 3^2 x_0 \\
x_3 = f^3(x_0) = f(x_2) = 3^3 x_0 \\
\vdots \\
x_n = f^n(x_0) = 3^n x_0
\end{gathered}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*. Assim,* $\theta^+(x_0) = \{x_0,\ 3x_0,\ \ldots,\ 3^n x_0,\ \ldots\}$ *e podemos observar que*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \begin{cases} +\infty & se\ x_0 > 0 \\ -\infty & se\ x_0 < 0. \\ 0 & se\ x_0 = 0 \end{cases}$$

.

Com isso verificamos que o comportamento da dinâmica pode depender do ponto inicial escolhido.

Exemplo 3.2.4 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{x}{3}$*. Fixado* $x_0 \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$\begin{gathered} x_1 = f(x_0) = \frac{x_0}{3} \\ x_2 = f(f(x_0)) = f(\frac{x_0}{3}) = \frac{x_0}{9} \\ x_3 = f^3(x_0) = f(x_2) = \frac{x_0}{3^3} \\ \vdots \\ x_n = f^n(x_0) = \frac{x_0}{3^n} \end{gathered}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*. Assim,* $\theta^+(x_0) = \{x_0,\ \frac{x_0}{3},\ \ldots,\ \frac{x_0^n}{3},\ \ldots\}$ *e o* $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$*,* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$*.*

Nesse exemplo o comportamento de todos os pontos é o mesmo, todos têm sua órbita convergindo para o zero. O objetivo básico é entender o comportamento de todas as órbitas do sistema, mas nem sempre é uma tarefa fácil obter isso como nos exemplos 3.2.3 e 3.2.4.

No entanto, algumas órbitas são especialmente simples e desempenham um papel central no estudo de todo o sistema como é o caso das órbitas periódicas.

3.3 Pontos Fixos

No Capítulo 2 vimos que o Teorema 2.2.2 faz menção a um ponto que fica invariante sob a função, este ponto nos dá um exemplo particular de uma órbita periódica.

Definição 3.3.1 *Quando sucessivas aplicações da função f não alteram um valor inicial, afirmamos que existe um ponto x onde o estado do sistema permanece constante. Assim, dizemos que x é um ponto fixo de f se $f(x) = x$. Denotamos por $Fix(f)$ o conjunto dos pontos fixos de f, isto é, $Fix(f) = \{x : f(x) = x\}$.*

Geometricamente o ponto fixo é dado pela intersecção do gráfico da função f com a reta $y = x$ (função identidade).

Exemplo 3.3.1 *Dada a função $f(x) = x$ temos que o ponto x em que $f(x) = x$ são todos os pontos, dessa forma, todo $x \in \mathbb{R}$ é ponto fixo para f.*

Exemplo 3.3.2 *Dada a função $f(x) = 2x$ temos que o único ponto fixo de f é $x = 0$, como podemos ver na Figura 3.1.*

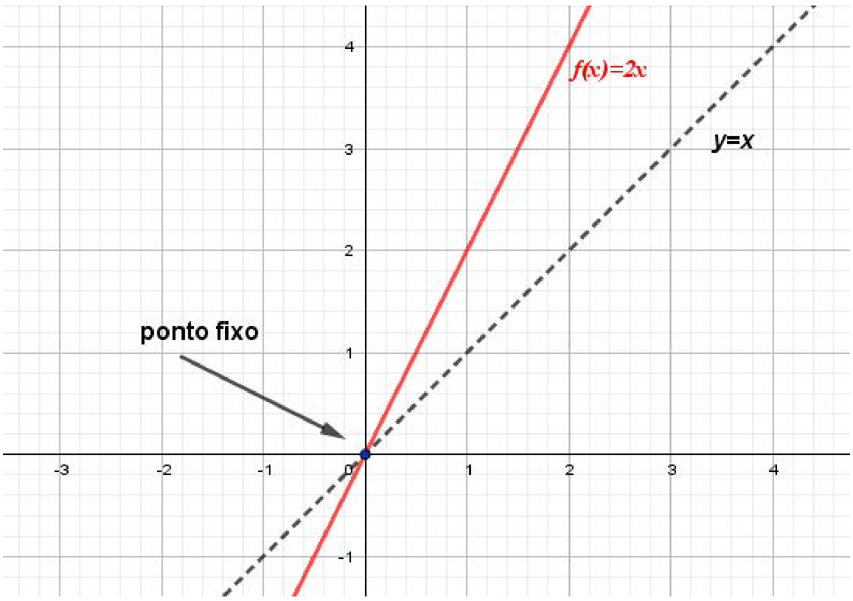


Figura 3.1: Representação gráfica do ponto fixo da função $f(x) = 2x$.

Exemplo 3.3.3 *Dada a função $f(x) = x^3$, os pontos fixos de f são $-1, 0$ e 1, ver Figura 3.2.*

Exemplo 3.3.4 *Seja a função $f(x) = x^2 - 1$ (Figura 3.3). Os pontos em que $f(x) = x$ são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Então os pontos fixos de f são $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.*

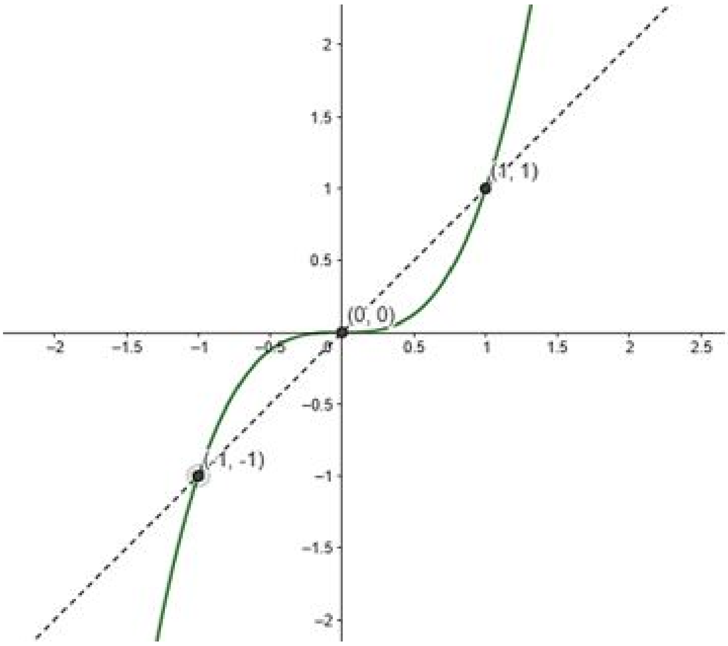


Figura 3.2: Representação gráfica dos pontos fixos da função $f(x) = x^3$.

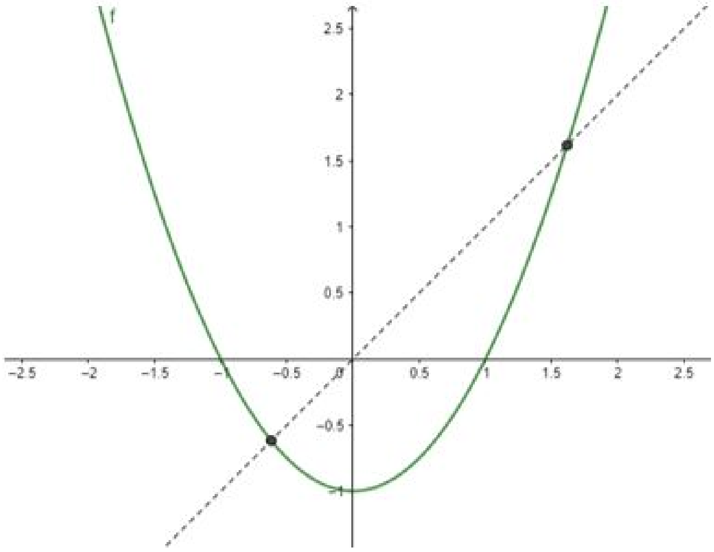


Figura 3.3: Representação gráfica dos pontos fixos da função $f(x) = x^2 - 1$.

3.4 Pontos Periódicos, Eventualmente Periódicos

Definição 3.4.1 *Se $f^n(x) = x$, para algum $n \geq 1$, dizemos que x é um ponto periódico. O menor inteiro positivo n tal que $f^n(x) = x$ é chamado de período de x. Denotamos por $Per_n(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de período n de f, isto é, $Per_n(f) = \{x : f^n(x) = x\}$.*

O conjunto de todos os iterados de um ponto periódico forma uma órbita periódica, ou seja, quando x é um ponto periódico de período n, temos $\theta^+(x) = \{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$.

Podemos observar que os pontos fixos são pontos periódicos de período 1. No Exemplo 3.3.1 vimos que a função $f(x) = x$, tem todo $x \in \mathbb{R}$ sendo ponto fixo para f, assim, $\theta^+(x) = \{x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $Fix(f) = \mathbb{R}$.

O exemplo acima é atípico em sistemas dinâmicos, a maioria das funções não tem este tipo de comportamento, os pontos periódicos tendem a ser espalhados na reta.

Exemplo 3.4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x$. Note que, neste caso, o único ponto fixo é a origem, mas, todos os outros pontos são periódicos de período 2, já que $f^2(x) = x$.*

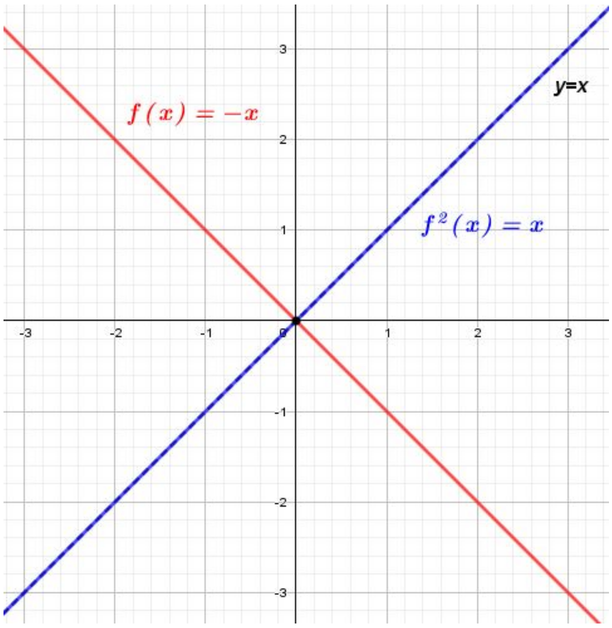


Figura 3.4: Representação gráfica do ponto fixo e periódicos da função $f(x) = -x$.

Exemplo 3.4.2 *A função $f(x) = x^3$ possui $-1, 0$ e 1 como pontos fixos de f (Exemplo 3.3.3) e nenhum outro ponto periódico.*

Exemplo 3.4.3 *A função $f(x) = x^2 - 2$ possui os pontos fixos -1 e 2 e para $f^2(x) = x$ temos $f^2(x) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x$, consequentemente $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$, que podemos reescrever após a fatoração como $(x^2 + x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$, e encontramos como solução $-1, 2, (-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2$. Logo, além de -1 e 2 serem pontos fixos, temos que $(-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2$ são pontos periódicos de período 2. Na Figura 3.5 podemos ver a representação gráfica das funções f e f^2, bem como a interseção com a reta $y = x$.*

Pontos fixos são pontos periódicos de período 1, já os pontos periódicos de f de período n são pontos fixos da função f^n . Existem ainda pontos que não são periódicos,

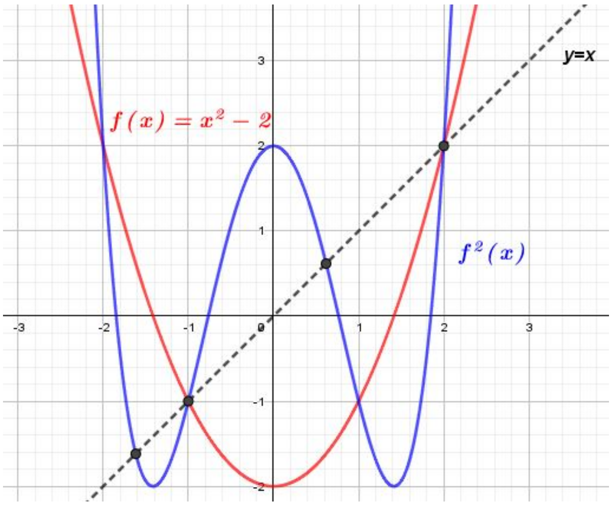


Figura 3.5: Representação gráfica dos pontos fixos e periódicos de período 2 da função $f(x) = x^2 - 2$.

mas que após um número finito de iterados é levado em uma órbita periódica, são os pontos eventualmente periódicos.

Definição 3.4.2 *Um ponto $p \in X$ é eventualmente periódico, ou pré-periódico, de período n, se p não é periódico, mas existe $m > 0$ tal que $x = f^m(p)$ é um ponto periódico de período n.*

Exemplo 3.4.4 *Seja a função $f(x) = x^2 - 1$ que tem pontos fixos iguais a $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Temos que para o ponto $x = 1$ é satisfeita a definição, pois $f(1) = 0$, $f^2(1) = -1$ e $f^3(1) = 0$ portanto 1 é um ponto eventualmente periódico e os pontos 0 e -1 são pontos periódicos de período 2.*

Exemplo 3.4.5 *Seja a função $f(x) = x^3 - x$ que tem pontos fixos iguais a $-\sqrt{2}, 0$ e $\sqrt{2}$. Temos que $x = -1$ e $x = 1$ são eventualmente periódicos, pois $f(-1) = f(1) = 0$.*

3.5 Representação Gráfica e Retrato de Fase

Em muitos momentos é interessante dar uma representação gráfica ao comportamento de órbitas de um sistema dinâmico. Para isso, tanto podemos olhar para o gráfico da função, como podemos fazer um esquema na reta indicando para onde as órbitas dos pontos do domínio da função estão "convergindo". Este último é chamado de retrato de fase de uma dinâmica f, e representa melhor o comportamento de todas as órbitas.

Isto posto, o retrato de fase é uma representação geométrica de todas as órbitas de um sistema dinâmico na reta real, ou seja, em uma dimensão.

No caso da representação gráfica, para fazer a representação da órbita de um determinado ponto x_0 de uma função f, seguimos os seguintes passos:

- Traçamos a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante, a reta $y = x$, com o gráfico da função f;
- Considere o ponto (x_0, x_0) na reta $y = x$;
- A partir desse ponto, traça-se uma reta vertical que intercepta o gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$;
- Partindo desse ponto, traça-se a reta horizontal que irá encontrar a reta $y = x$ no ponto $(f(x_0), f(x_0))$. E então a partir desse ponto agora traça-se novamente uma reta vertical que encontrará o gráfico de f no ponto de coordenadas $(f(x_0), f^2(x_0))$. Prosseguimos novamente para obter o ponto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ e assim sucessivamente.

Exemplo 3.5.1 *Na Figura 3.6 temos o gráfico da função $f(x) = x^2$ e a representação de órbitas de dois pontos. Sabemos que 0 e 1 são pontos fixos e podemos observar pelas órbitas traçadas que todos os pontos que estão no intervalo $(-1, 1)$ convergem para 0, e os pontos que são menores que -1 e maiores que 1 vão para ∞.*

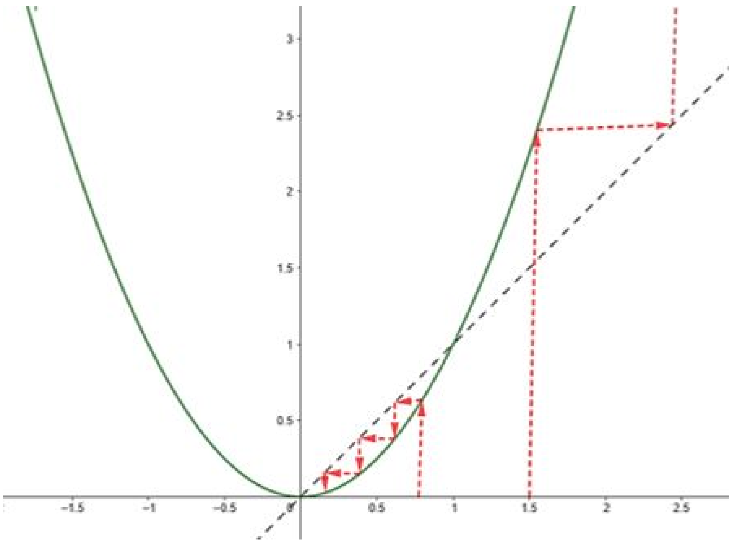


Figura 3.6: Representação gráfica de órbitas para a função $f(x) = x^2$.

O comportamento de todas as órbitas pode ser melhor visualizado no retrato de fase na Figura 3.7.

Exemplo 3.5.2 *A função $f(x) = 3x$ possui 0 como ponto fixo, como podemos visualizar na Figura 3.8 e os demais pontos se afastam de 0 por iterações de f.*

O comportamento das órbitas pode ser melhor visualizado na Figura 3.9.

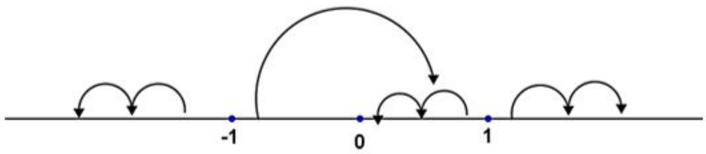


Figura 3.7: Representação gráfica do retrato de fase para a função $f(x) = x^2$.

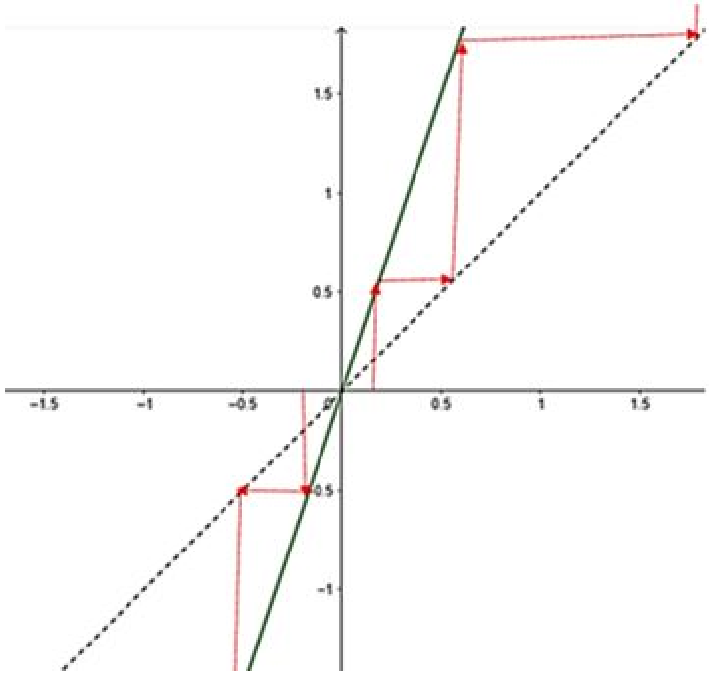


Figura 3.8: Representação gráfica de órbitas para a função $f(x) = 3x$.

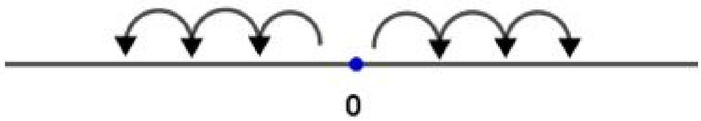


Figura 3.9: Representação gráfica do retrato de fase para a função $f(x) = 3x$.

Exemplo 3.5.3 *A função* $f(x) = \frac{x}{2}$ *possui* 0 *como ponto fixo, como podemos visualizar na Figura 3.10 e os demais pontos são atraídos pelo ponto fixo* 0*.*

O comportamento das órbitas pode ser melhor visualizado na Figura 3.11.

3.6 Relação entre a Derivada e a Dinâmica

Para alguns conceitos de sistemas dinâmicos, utilizaremos a noção do comportamento da derivada da função, visto que a derivada influencia diretamente na análise de alguns pontos no sistema dinâmico. Nessa seção vamos introduzir conceitos que utilizam a derivada como base, vale ressaltar que estamos considerando $f : X \to X$ de classe C^1, e X um

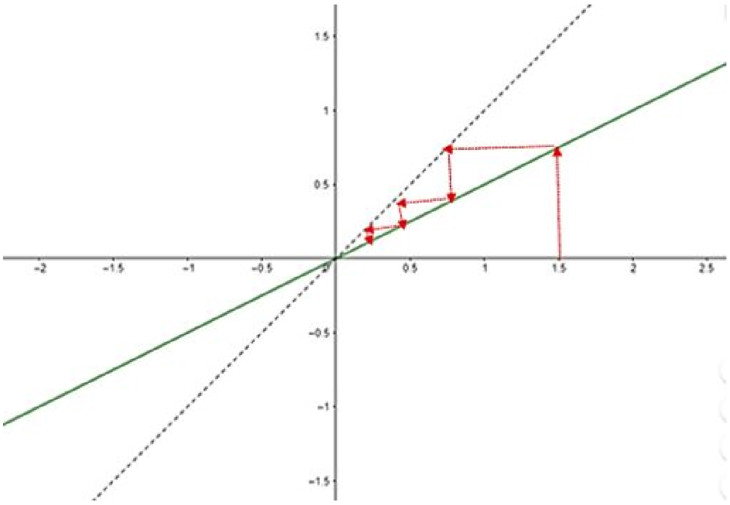


Figura 3.10: Representação gráfica de órbitas para a função $f(x) = \frac{x}{2}$.

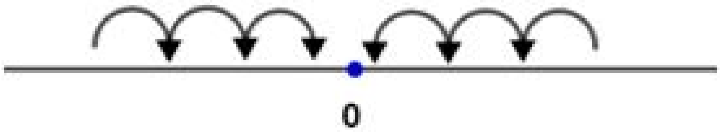


Figura 3.11: Representação gráfica do retrato de fase para a função $f(x) = \frac{x}{2}$.

subconjunto de $\mathbb{R}$.

Além disso, denotaremos por $V_\epsilon(p)$ a vizinhança do ponto p de raio ϵ. Ou seja,

$$V_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}; |x - p| < \epsilon\} = (p - \epsilon, p + \epsilon).$$

Definição 3.6.1 *Seja p um ponto fixo para f. O ponto p é chamado de ponto fixo atrator (ou poço) se existe uma vizinhança $V_\epsilon(p)$ de p, de modo que, se $x \in V_\epsilon(p)$, temos que $f^n(x) \in V_\epsilon(p)$ para todo n e, além disso, $f^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$. Nesse trabalho utilizaremos a denominação atrator.*

Teorema 3.6.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1.*

(a) *Suponha p um ponto fixo de f com $|f'(p)| < 1$. Então p é um ponto fixo atrator.*

(b) *Suponha p um ponto periódico de período n para f com $|(f^n)'(p)| < 1$. Então p é um ponto periódico atrator.*

Demonstração

(a) Pela continuidade de f' existe ϵ e $\lambda \in (0, 1)$, tais que $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in V_\epsilon(p)$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que para todo $x \in V_\epsilon(p)$ existe y entre x e p tal que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(y)||x - p| \leq \lambda|x - p| < |x - p|$$

Portanto, $f(x) \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$. Analogamente, segue que

$$|f^k(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|.$$

Para todo inteiro positivo k. Como $0 < \lambda < 1$, temos que $|f^k(x) - p| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Logo temos que p é um ponto atrator.

(b) Suponha que p é um ponto periódico de período n para f, e seja $h = f^n$. Temos

(i) $h(p) = p$,

(ii) $|h'(p)| < 1$.

Segue pelo item (a) que $h^k(x) \to p$, para x próximo de p, quando $k \to \infty$.

Observe que, pela continuidade de f^j, para todo $1 \leq j \leq n$, $|f^j(x) - f^j(p)| \to 0$ quando $j \to \infty$, mesmo para j não sendo múltiplo de n. Então p é um ponto periódico atrator.

Definição 3.6.2 *Seja p um ponto fixo para f. O ponto p é chamado de ponto fixo repulsor (ou fonte) se toda órbita (exceto de p) sair da vizinhança $V_\epsilon(p)$ sob iteração de f. Nesse trabalho utilizaremos a denominação repulsor.*

Teorema 3.6.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1.*

(a) *Suponha p um ponto fixo para f com $|f'(p)| > 1$. Então p é um ponto fixo repulsor.*

(b) *Suponha p um ponto periódico de período n para f com $|(f^n)'(p)| > 1$. Então p é um ponto periódico repulsor.*

Proposição 3.6.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Se p um ponto fixo para f com $|f'(p)| = 1$, nada pode ser afirmado.*

A demonstração do Teorema 3.6.2 e da Proposição 3.6.1 são similares à do Teorema 3.6.1 por isso omitiremos aqui.

Definição 3.6.3 *Seja p um ponto periódico de período n. O ponto p é dito hiperbólico se $|(f^n)'(p)| \neq 1$.*

Vimos pelos Teoremas 3.6.1 e 3.6.2 que se um ponto p é hiperbólico, então ele será atrator ou repulsor.

Exemplo 3.6.1 *A função $f(x) = x^2 - 2$, possui dois pontos fixos: -1 e 2. Note que $|f'(-1)| = 2$ e $|f'(2)| = 4$, como ambos são diferentes de 1, temos que -1 e 2 são pontos hiperbólicos, e como $|f'(-1)| > 1$ e $|f'(2)| > 1$ temos que -1 e 2 são pontos hiperbólicos repulsores.*

Exemplo 3.6.2 *A função $f(x) = \frac{x^2+x}{3}$, possui dois pontos fixos: 0 e 2. Note que $|f'(0)| = \frac{1}{3}$ e $|f'(2)| = \frac{5}{3}$, como ambos são diferentes de 1, temos que 0 e 2 são pontos hiperbólicos. E como $|f'(0)| < 1$ e $|f'(2)| > 1$ temos que 0 é um ponto hiperbólico atrator e 2 é um ponto hiperbólico repulsor.*

Portanto, o comportamento de pontos próximos a pontos periódicos hiperbólicos é regido pela derivada em cada ponto periódico. No entanto, isso não é verdade para pontos periódicos não hiperbólicos, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.6.3 *A função $f(x) = x^2 + x$, possui apenas o 0 como ponto fixo. Note que $|f'(0)| = 1$ portanto, não é um ponto fixo hiperbólico. Analisando o comportamento de pontos próximos ao ponto fixo 0, nota-se que 0 atrai fracamente uma vizinhança à sua esquerda e repele uma vizinhança à sua direita.*

Capítulo 4

Uma Aplicação dos Sistemas Dinâmicos

Nos capítulos anteriores apresentamos de maneira sucinta um pouco da teoria de SDD que, apesar de se basear em conceitos simples, torna-se cada vez mais complexa quando nos aprofundamos em sua teoria. Um bom exemplo é a Conjectura de Collatz ou também conhecido como o problema $3x + 1$.

Essa conjectura que aparentemente é um problema simples, já intrigou diversos estudiosos, tais como o matemático húngaro Paul Erdős, o programador Jason Davies, o matemático alemão Felix Bernd, dentre outros. Na atualidade é considerado um dos problemas mais intrigantes dos sistemas dinâmicos e da matemática, pois é considerado por muitos um dos buracos negros dessa área do conhecimento. Além disso, alguns estudiosos afirmam que a nossa sociedade ainda não está pronta para ele.

Essa conjectura pode ser expressa matematicamente através da seguinte função.

Considere $C : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ dada por

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ for par,} \\ 3x + 1 & \text{se } x \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

A origem do problema é obscura, no entanto a Conjectura de Collatz foi nomeada em homenagem ao matemático alemão Lother Collatz, visto que que foi o primeiro a escrever e à divulgar, na década de 1930. Ele conjecturou que se você começar com um número inteiro positivo e executar esse processo por tempo suficiente, todos os valores iniciais levarão a 1. E quando chegar a 1, aplicando novamente a função caimos em um ciclo repetitivo e infinito $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...$. Intrigante, não é?

Matemáticos acreditam que a solução dessa conjectura abrirá novos horizontes e desenvolverá novas e importantes técnicas na teoria dos números, na teoria dos sistemas dinâmicos e na computação. E como é um problema fácil de apresentar e entender, tem potencial de atrair jovens estudantes para se aprofundarem no mundo da matemática.

Vejamos alguns exemplos para ilustrar melhor a conjectura.

Exemplo 4.0.1 *Seja o conjunto de números naturais positivos* $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. *Pela Conjectura temos que:*

- *Se o número é par, divida-o por* 2*;*
- *Se for ímpar, multiplique-o por* 3 *e some* 1*.*

Depois aplique essas mesmas regras simples ao resultado.

1. *Para* $x = 10$ *temos, como* 10 *é par, dividimos por* 2, $10 : 2 = 5$, *que é ímpar, então aplicamos a segunda regra.*

$$5.3 = 15 + 1 = 16.$$

Como 16 *é par,*

$$16 : 2 = 8 \Rightarrow 8 : 2 = 4 \Rightarrow 4 : 2 = 2 \Rightarrow 2 : 2 = 1$$

Em seguida, vemos que dá 4 *e então continua se repetindo.*

2. *Para* $x = 19$ *que é ímpar, temos,* $19.3 = 57 + 1 = 58$ *que é par, dividimos por* 2, $58 : 2 = 29$, *que é ímpar, então aplicamos a segunda regra.*

$$29.3 = 87 + 1 = 88.$$

Como é par

$$88 : 2 = 44 : 2 = 22 : 2 = 11$$

$$11.3 + 1 = 34 : 2 = 17$$

$$17.3 + 1 = 52 : 2 = 26 : 2 = 13$$

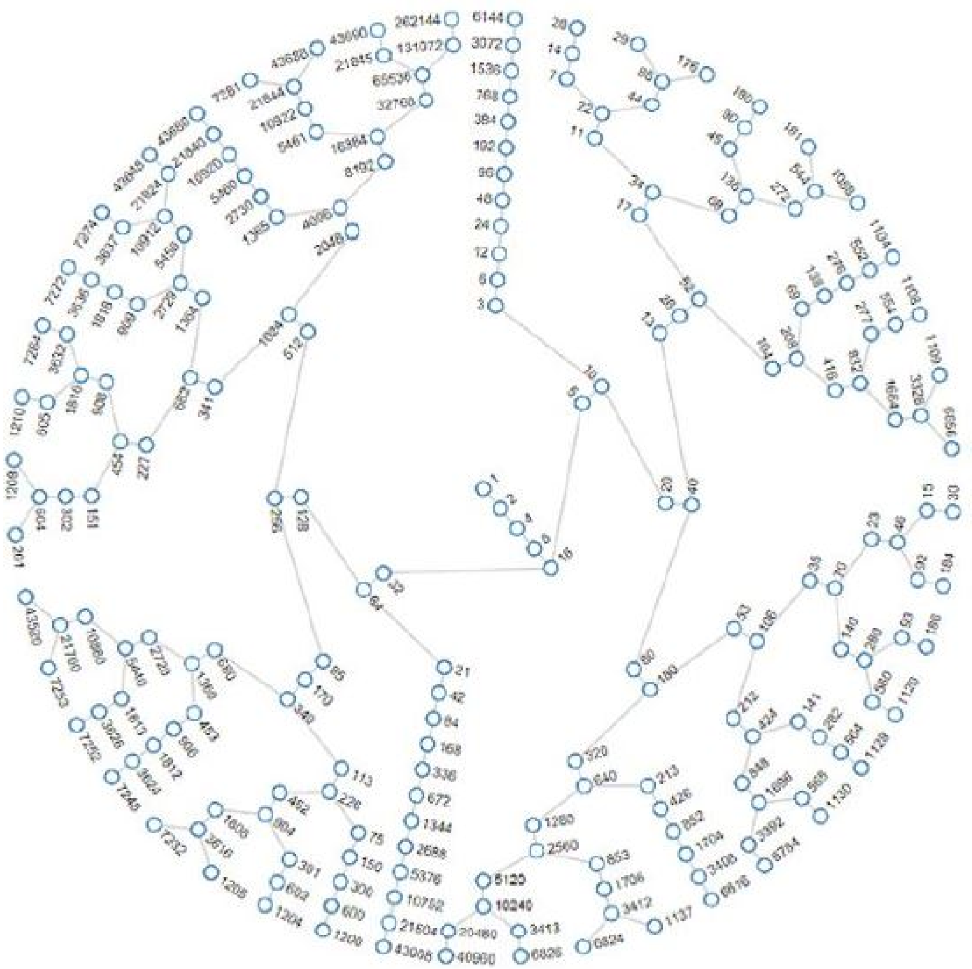
$$13.3 + 1 = 40 : 2 = 20 : 2 = 10 : 2 = 5$$

$$5.3 + 1 = 16 : 2 = 8 : 2 = 4 : 2 = 2 : 2 = 1$$

Em seguida, vemos que dá 4 *e então continua se repetindo.*

O que torna o problema intrigante é que não importa com qual número comece, eventualmente sempre chegará a 4, que se converte em 2 e depois em 1. Pelo menos é esse o caso com todos os números que foram testados, e já se tentou usar alguns quase absurdos.

Supercomputadores fizeram o problema com números que vão até aproximadamente 5.764.607.500.000.000.000 e não encontraram nenhuma exceção. Todos eventualmente chegam a $2 : 2 = 1$. Todavia, como os números são infinitos, isso não prova que esse seja o caso para todos os números naturais. Observe o gráfico da conjectura de Collatz na Figura 4.1.



Fonte: https://www.bbc.com/portuguese/geral-36702054. Acessado dia 14/12/2021.

Figura 4.1: Gráfico da conjectura de Collatz.

Vejamos um outro exemplo.

Exemplo 4.0.2 *Determinar as iteradas de C no ponto $x = 27$.*

- *Como* 27 *é ímpar, obtemos* $C(27) = 82$*;*
- *Como* 82 *é par, obtemos* $C^2(27) = 41$*;*
- *Como* 41 *é ímpar, obtemos* $C^3(27) = 124$*;*
- *Como* 124 *é par, obtemos* $C^4(27) = 62$*;*
- *Como* 62 *é par, obtemos* $C^5(27) = 31$*;*
- *Como* 31 *é ímpar, obtemos* $C^6(27) = 3.31 + 1 = 94$*;*
- *Como* 94 *é par, obtemos* $C^7(27) = 47$*;*
- *Como* 47 *é ímpar, obtemos* $C^8(27) = 3.47 + 1 = 142$*;*
- *Como* 142 *é par, obtemos* $C^9(27) = 71$*;*
- *Como* 71 *é ímpar, obtemos* $C^{10}(27) = 214$*;*
- *Como* 214 *é par, obtemos* $C^{11}(27) = 107$*;*
- *Como* 107 *é ímpar, obtemos* $C^{12}(27) = 322$*;*

$$\vdots$$

- *Como* 4 *é par, obtemos* $C^{110}(27) = 2$*.*
- *Como* 2 *é par, obtemos* $C^{111}(27) = 1$*.*

Assim, independente do valor escolhido para x, o problema chega sempre a órbita periódica 4, 2, 1, mesmo que demore um número muito grande de iterados para isso acontecer. Esse comportamento é o que torna esse problema desafiador, surgindo inúmeros questionamentos a cerca dele.

Capítulo 5

Sequência Didática para o Ensino Médio

Se pararmos para analisar o mundo a nossa volta podemos observar que a Matemática está por toda parte: na arte, na arquitetura, na música, na natureza e em vários outros nichos da vida cotidiana, sendo uma ferramenta fundamental para diversas áreas do conhecimento como Economia, Física, Engenharia, Arquitetura e tantas outras, ou seja, compreender a Matemática é compreender o mundo que nos rodeia.

Todavia, quando paramos para analisar a Matemática em termos educacionais, grande parte dos alunos tem dificuldades com essa disciplina, como evidencia o resultado do Nível de Proficiência em Matemática no Brasil que foi avaliado em 2018 pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) no qual o resultado foi preocupante, pois o Brasil caiu no Ranking e está entre os 10 piores desempenhos de Matemática do mundo.

Neste cenário, o professor de Matemática da Educação Básica se depara diariamente com inúmeros desafios para o ensino dessa área do conhecimento, entre eles, o de fazer com que os alunos entendam o meio que os cercam através da Matemática, visto que muitos alunos não compreendem conceitos básicos da matemática que são importantes para desenvolver uma visão de mundo mais aguçada.

Tal situação é agravada no Ensino Médio, já que se observa que grande parte dos alunos dessa etapa apresentam dificuldades em abstrair conteúdos referentes ao estudo de funções e se sentem desconfortáveis com a linguagem algébrica. Diante desse cenário, a todo momento, surgem novas estratégias e metodologias como ferramentas que podem ser utilizadas para atingir um melhor aprendizado no ensino de Matemática, dentre elas, temos a Sequência Didática, que é o enfoque desse trabalho.

A sequência didática é uma estratégia educacional caracteriza pelo conjunto de atividades planejadas e interligadas para o ensino de um determinado conteúdo. As atividades são organizadas, elaboradas e desenvolvidas de forma sequencial, com o intuito de possibilitar que o discente aprenda e aperfeiçoe os conhecimentos a respeito do determinado assunto. Além disso, essa estratégia ajuda a melhorar a educação e a interação entre o professor e o aluno, e deste com os demais colegas, em relação aos assuntos propostos.

A utilização da sequência didática no ensino de conteúdos matemáticos visa despertar o interesse para a matemática e envolver o aluno nos processos matemáticos tirando o foco exclusivo na memorização e da busca pelo resultado, levando os problemas matemáticos a serem analisados por métodos científicos.

No caso dessa sequência didática o objetivo é discorrer sobre sistemas dinâmicos discretos, um assunto do Ensino Superior, apresentando uma abordagem, que pode ser inovadora no Ensino Médio, de uma forma simplificada, através de exemplos que mostre como os SDD aparecem no "mundo real", além de realizar as analises gráficas com o auxílio do software matemático gratuito, Geogebra.

Acreditamos que apresentar conteúdos de matemática de uma forma contextualizada e correlacionadas com as interpretações do mundo, não priorizando o formalismo exagerado e os mecanismos de memorização, pode tornar o processo de construção do conhecimento do aluno mais significativo e motivador.

Para alcançar o objetivo proposto, serão utilizadas algumas metodologias que servirão como suporte, tais como a modelagem matemática, a resolução de problemas e a análise gráfica. Vale salientar que essa proposta pode ser trabalhada de forma conjunta com os professores da área de Ciências da Natureza, colocando em prática a nova proposta para o Ensino Médio e está em consonância com as competências indicadas na Base Nacional Comum Curricular- BNCC.

5.1 Sequência Didática: Descrição

Tema: Introdução aos conceitos de Sistema Dinâmicos Discreto no Ensino Médio.

Público-alvo: Estudantes do 1^o ano do Ensino Médio. A escolha deve-se ao fato de que neste ano, os discentes têm o contato aprofundado com as funções polinomiais e a composição de função, mais precisamente, no segundo ciclo do ano letivo.

Objetivos:

- Apresentar sistemas dinâmicos de maneira intuitiva com exemplos de contextos reais, utilizando como ferramenta a modelagem matemática;

- Relacionar os conceitos do estudo da composição entre funções com as propriedades de iteração e o estudo inicial dos SDD;
- Construir computacionalmente os gráficos de funções e analisá-los a fim de estudar seu comportamento, por exemplo, determinando e classificando seus pontos fixos, atratores, repulsores, etc;
- Familiarizar os alunos com as representações algébricas e gráficas, instigá-los a reconhecer padrões e analisar diferentes situações;
- Apresentar atividades que busquem atender à demanda expressa na Base Nacional Comum Curricular.

Conteúdos: Sistemas Dinâmicos Discretos

- Composição de função;
- Iteração;
- Órbitas;
- Pontos Fixos;
- Pontos Atratores e repulsores;
- Conjectura Collatz.

Pré-requisitos:

- Funções: conceito;
- Composição de função (definição e as propriedades);
- Funções polinomiais (1^o e 2^o grau);
- Saber posicionar pontos no plano cartesiano;
- Ter uma noção intuitiva de crescimento, decrescimento;
- Saber comandos básicos do Geogebra.

Duração: 14 horas/aulas

Recursos:

- Calculadoras;
- Projetor de slides;
- Computadores;
- Software matemático: Geogebra.

Metodologia

- Modelagem Matemática;
- TIC's;
- Análise de problemas;
- Análise de tabelas e gráficos.

Avaliação:

- A avaliação ocorrerá de maneira processual de acordo com o processo das atividades.

Dificuldades previstas:

- Falta dos recursos tecnológicos na unidade escolar;
- Dificuldade e imaturidade dos alunos com relação aos conceitos matemáticos necessários.

5.2 Sugestões de Atividades da Sequência Didática

A sequência didática possui sete atividades, sendo que cada atividade terá a previsão de duas horas-aula, totalizando 14 horas-aula.

Atividade 01

Objetivos:

- Introduzir de forma intuitiva o conceito de sistemas dinâmicos discretos através de exemplo prático: crescimento populacional das bactérias;
- Identificar padrões, estimulando a capacidade investigativa;
- Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.

Duração: 2 horas/aulas

Considerações/sugestões para o professor:

- Dividir a sala em grupos com no máximo quatro estudantes e disponibilizar a atividade para ser respondida pelos grupos;
- Nesse momento a intervenção do professor deve ser mínima, deixando os alunos investigarem e deduzirem o conceito de SDD;
- Finalizar a atividade, com a correção e discursão sobre SDD e o crescimento da população das bactérias;
- É interessante nesse momento, o professor explanar sobre o contexto histórico e a definição dos sistemas dinâmicos.

Descrição da atividade:

Na aula de Biologia, o tema foi bactérias, que são seres procariontes e unicelulares, apresentam reprodução assexuada, que se dá por meio da divisão binária ou da formação de esporos. A divisão binária é um processo no qual a célula da bactéria duplica seu material genético e se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela. Esse processo geralmente ocorre a cada hora.

Biólogos populacionais estão interessados no comportamento a longo prazo da população de uma certa espécie ou coleção de espécies, e o exemplo do crescimento populacional das bactérias é muito pertinente para esse estudo. Dessa forma, a professora de Biologia passou um trabalho sobre o crescimento populacional das bactérias e forneceu uma bactéria para cada aluno.

Imagine que a bactéria fornecida pela professora depois de 24 horas tornou-se uma cultura de bactérias e que ela gostaria de saber qual o tamanho da população neste momento. O que você pensaria em fazer? Contá-las uma a uma? Uma tarefa bem complicada, não é mesmo? Existiria uma maneira mais rápida?

Para resolver problemas dessa magnitude, os matemáticos desenvolveram modelos matemáticos para descrever as flutuações da população. E será que podemos modelar o caso proposto pela professora de biologia? Sabendo quantas bactérias iniciou sua cultura, podemos aproximar uma resposta para esta pergunta com a ajuda da Matemática, por meio de um modelo matemático. Acredita?

Note que pela divisão binária as bactérias duplicam-se a cada instante de tempo (no nosso caso, a cada hora), ou seja, podemos descrever o número de bactérias observadas a cada hora, assim complete a tabela abaixo.

Tempo (t)	Número de bactéria (n)
0	n_0
1	
2	
3	
4	
...	
14	
...	
24	

- **E se fosse para t instantes, quantas bactérias iriam ter na cultura?**

  Resposta esperada: Para o instante t teremos $2^t.n_0$ bactérias na cultura, onde n_0 é a quantidade inicial de bactérias.

  Como você observou a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$ é uma regra que expressa que teremos um número duas vezes maior de bactérias a cada instante, onde $n \in \mathbb{N}$ é a quantidade de bactérias. Sendo assim, após t instantes teremos $f^t(n) = 2^t.n$.

- **Se a cultura tem uma população de 1000 bactérias, então depois de uma hora existirão quantas bactérias?**

  Resposta esperada:

  Existirão $f(1000) = 2.1000 = 2000$ bactérias.

- **Depois de duas horas?**

  Resposta esperada:

  Existirão $f(f(1000)) = 2.(2.1000) = 4000$ bactérias.

- **Depois de três horas?**

  Resposta esperada:

  Existirão $f(f(f(1000))) = 2(2.(2.1000)) = 8000$ bactérias e assim por diante.

Note que a população de uma hora depois está diretamente relacionada à população de uma hora antes. Tal situação tem as características de um ramo da matemática que surgiu da necessidade de se construir uma teoria que seja capaz de prever a evolução de fenômenos naturais e humanos que ocorrem nos mais diversos campos do conhecimento, como é o caso do exemplo acima: o crescimento das bactérias.

Esse ramo é os sistemas dinâmicos discretos que tem por objetivo entender o comportamento de um sistema ao longo do tempo cuja evolução é dada por uma regra determinística. A sua importância é devido à sua capacidade de descrever, expressar e analisar fenômenos naturais e humanos que tem um comportamento complexo e, muitas vezes, imprevisível de maneira caótica, em todos os ramos das Ciências, como por exemplo podemos citar os estudos dos gases, os estudos dos movimentos dos corpos celestes, a dinâmica de uma população, desmatamento de florestas, meteorologia, entre outros.

De acordo com a forma em que a passagem do tempo é considerada, classificamos o sistema dinâmico de duas formas: de maneira discreta (que será o enfoque deste trabalho) e de maneira contínua.

Assim definimos um sistema dinâmico discreto como **um conjunto de estados possíveis**, juntamente com uma **regra que determina o estado presente em termos do estado passado**, cujo estado só muda durante os instantes $\{t_0, t_1, t_2, ...\}$, ou seja, **o sistema faz exame do estado atual com a entrada e atualiza a situação produzindo um estado novo com a saída**. Da origem do sistema, teremos em vista todas as informações necessárias assim que a regra for aplicada.

Fazendo uma comparação da definição anterior com o exemplo das bactérias, responda:

- **Qual o objetivo do exemplo com o estudo de Sistemas Dinâmicos?**

  Resposta esperada: O objetivo do exemplo é analisar a população de bactérias (um conjunto de estados possíveis).

- **Qual a regra que determina o estado presente em termos do estado passado?**

Resposta esperada:

A regra utilizada é determinada pela função $f(n) = 2n$. Além disso, para saber qual a população após dois tempos foi suficiente a composição $f(f(1000)) = 4000$, ou seja o seu estado atual (4000) é determinado pelo seu estado inicial (1000). Logo a regra determina o estado presente em termos do estado passado.

- **Qual seria a mudança do estado durante os instantes $\{t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, ...\}$?**

  Resposta esperada:

  Note que o estado do sistema só muda para os valores

  No instante $t_0 = 0 \rightarrow n_0 = 1000$

  No instante $t_1 = 1 \rightarrow n_1 = 2000$

  No instante $t_2 = 2 \rightarrow n_2 = 4000$

  No instante $t_3 = 3 \rightarrow n_3 = 8000 \ldots$

  Deste modo o sistema faz exame do estado atual com a entrada e atualiza a situação produzindo um estado novo com a saída.

Atividade 02

Objetivos:

- Apresentar o conceito de iteração de sistemas dinâmicos discretos com base no exemplo do crescimento populacional das bactérias e um exemplo prático usando calculadora;
- Investigar iteradas de pontos gerais;
- Identificar padrões, estimulando a capacidade investigativa;
- Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.

Duração: 2 horas/aulas

Considerações/sugestões para o professor:

- Essa atividade terá três momentos, ambos com o objetivo de apresentar o conceito de iteração de SDD, porém exemplos distintos;
- Nas partes 01 e 02 a intervenção do professor deve ser mínima, deixando os alunos investigarem e deduzirem o conceito de iteração;
- No momento do início da parte 03, sugerimos que faça o exemplo sugerido com os alunos no quadro e caso necessário exemplifique mais algumas funções;
- Finalizar a atividade, com a correção e explanação do conceito de iteração.

Descrição da atividade:

Parte 01: Iteração de função- crescimento populacional das bactérias.

A teoria dos sistemas dinâmicos discretos é regada de conceitos, definições que estão atreladas a observação da passagem do tempo nestes sistemas, bem como o comportamento do sistema observado nessa passagem. Com base na atividade 01 sobre o crescimento populacional das bactérias, considerando que no tempo inicial temos b bactérias na cultura, responda:

- **Para um instante depois, teremos quantas bactérias na cultura? Modele matematicamente essa situação.**

  Resposta esperada: O dobro da população, ou seja, $f(b) = 2b$;

- **Para dois instantes depois, teremos quantas bactérias na cultura? Modele matematicamente essa situação.**

  Resposta esperada:

  Para duas horas depois teremos $f(f(b)) = f^2(b) = 2.2b = 2^2b = 4b$.

- **Para três instantes depois, teremos quantas bactérias na cultura? Modele matematicamente essa situação.**

  Resposta esperada:

  Para três horas depois teremos $f(f(f(b))) = f^3(b) = 2.2.2b = 2^3b = 8b$.

- **E para os sucessivos instantes depois, ou seja, n instantes, teremos quantas bactérias na cultura? Modele matematicamente essa situação.**

  Resposta esperada:

  Sucessivamente para t horas depois teremos $f^t(b) = 2^tb$.

Note que para responder os questionamentos acima vocês foram compondo a função com ela mesma várias vezes: $f \circ ... \circ f \circ f$, em Sistemas Dinâmicos Discretos esse processo é denominado iteração.

Parte 02: Iteração de função- calculadora.

Agora com auxílio de uma calculadora científica:

- Digite qualquer número, registre-o:
- Aperte a tecla "exp". O que apareceu no visor da calculadora?
- Aperte mais uma vez a tecla "exp". O que apareceu no visor da calculadora?
- Aperte mais uma vez a tecla "exp". O que apareceu no visor da calculadora?
- Agora aperte sucessivamente a tecla "exp" e observe o que ocorre. Registre sua observação.

Este procedimento iterativo também é um exemplo de iteração em Sistemas Dinâmicos e a cada vez que você aperta a tecla "exp" você está realizando sucessivas iterações de $exp(x)$ que tende a ∞, independente do valor x escolhido.

Parte 03: Iteração de função - algébrica.

Vejamos agora um exemplo utilizando funções polinomiais:

Exemplo 5.2.1 *Seja a função $f(x) = 3x$. Iterando, temos que:*

$$
\begin{gathered}
f(x) = 3x \\
f(f(x)) = f^2(x) = 3(3x) = 3^2x = 9x \\
f(f(f(x))) = f^3(x) = 3(3^2x) = 3^3x = 27x \\
\vdots \\
f^n(x) = 3^nx
\end{gathered}
$$

Agora é a sua vez, itere as funções a seguir, conforme o exemplo:

a) $f(x) = 5x$

b) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = x^2$

Atividade 03

Objetivos:

- Consolidar o conceito de Sistema dinâmico discreto e de iteração através de exemplo de matemática financeira;
- Investigar iteradas de pontos;
- Identificar padrões, estimulando a capacidade investigativa;
- Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.

Duração: 2 horas/aulas

Considerações/sugestões para o professor:

- Essa atividade aborda mais um exemplo prático de iteração;
- Nesse momento a intervenção do professor deve ser mínima, deixando os alunos investigarem;
- Finalizar a atividade, com a correção e explanação do conceito de iteração.

Descrição da atividade:

Em janeiro de 2015, Maria fez uma aplicação financeira no valor de $R\$500,00$ a uma taxa de 5% capitalizada anualmente. Sabe-se que ela:

(1) não fez novos depósitos, permanecendo fixo o capital inicial e

(2) a taxa de capitalização não será revisada ao longo dos anos, permanecendo fixa.

Vamos analisar e descrever a evolução do saldo dessa aplicação na Tabela 01 abaixo:

ANO	SALDO DA APLICAÇÃO (R$)
JANEIRO 2015	500 reais
JANEIRO 2016	500 + 0,05.500= 525 reais
JANEIRO 2017	525 + 0,05.525= 551,25 reais
JANEIRO 2018	551,25 + 0,05.551,25≅ 578,80 reais
JANEIRO 2019	578,80 + 0,05.578,80≅ 607,75 reais
JANEIRO 2020	607,75 + 0,05.607,75 ≅ 638,10 reais
JANEIRO 2021	638,10 + 0,05.638,10 ≅ 670 reais
JANEIRO 2022	670 + 0,05.670 ≅ 703,50 reais

Figura 5.1: Tabela 01.

Agora se denotarmos o valor da aplicação sendo x reais como seria preenchida a Tabela 02 a seguir (não resolver possíveis potências)?

ANO	SALDO DA APLICAÇÃO
JANEIRO 2015	x
JANEIRO 2016	$x + (0,05)x = 1,05x$
JANEIRO 2017	$1,05x + (0,05)1,05x = 1,05x(1+ 0,05) = 1,05^2x$
JANEIRO 2018	$1,05^2x + (0,05)1,05^2x = 1,05^3 x$
JANEIRO 2019	$1,05^3x+(0,05)1,05^3x = 1,05^4x$
JANEIRO 2020	$1,05^4 + (0,05)1,05^4x=1,05^5x$
JANEIRO 2021	$1,05^5 + (0,05)1,05^5x = 1,05^6x$
JANEIRO 2022	$1,05^6 + (0,05)1,05^6x=1,05^7x$

Figura 5.2: Tabela 02.

Você conseguiu perceber que indutivamente vemos que no instante de tempo t o saldo da aplicação financeira depende exclusivamente do saldo no instante de tempo anterior $t–1$. Se denotarmos a situação acima por, x sendo o valor inicial da aplicação, após o tempo t, qual seria a função que modelaria essa situação?

Existe relação entre o exemplo populacional das bactérias e esse exemplo de matemática financeira? Justifique sua resposta?

Na Tabela 02, ao determinarmos o saldo da aplicação estamos fazendo iteração, dessa forma quem seria a iterada 4 da função?

Com essa situação é possível verificar que sistemas dinâmicos estão presentes em diversas áreas do conhecimento humano, em especial na Economia, onde a variável tempo pode não fluir continuamente, mas se apresentar de maneira discreta, ou seja, as grandezas envolvidas são medidas em instantes isolados (de hora em hora, mês em mês, etc.) formando deste modo uma sequência de valores que descrevem a evolução do fenômeno em estudo.

Dessa forma, temos que sistemas dinâmicos discretos são sistemas caracterizados por mudarem de estado no decorrer do tempo, ou seja, sistemas que evoluem segundo uma regra que relaciona o estado presente aos estados futuros.

Atividade 04

Objetivos:

- Interpretar e utilizar representações gráficas relacionada a funções e pontos fixos;
- Definir o conceito de ponto fixo geometricamente com auxílio do Geogebra, relacionando com a interseção entre o gráfico da função f e a reta $y = x$.

Duração: 2 horas/aulas

Considerações/sugestões para o professor:

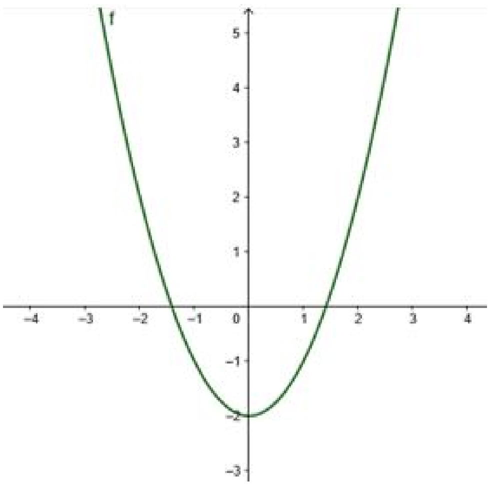
- Essa atividade deve ser iniciada com a construção no Geogebra do exemplo proposto na atividade, todavia o professor pode inserir outras funções para facilitar a intuição dos alunos do conceito de pontos fixos;
- Finalizar a atividade, com a correção e uma explanação do conceito geométrico de ponto fixo com auxílio do aplicativo gráfico.

Descrição da atividade:

As funções quadráticas possuem diversas aplicações na Matemática, na Física em diversas situações nos movimentos de corpos na área da Cinemática e Dinâmica, sendo uma função que modela várias situações, bastante presente no estudo de sistemas dinâmicos.

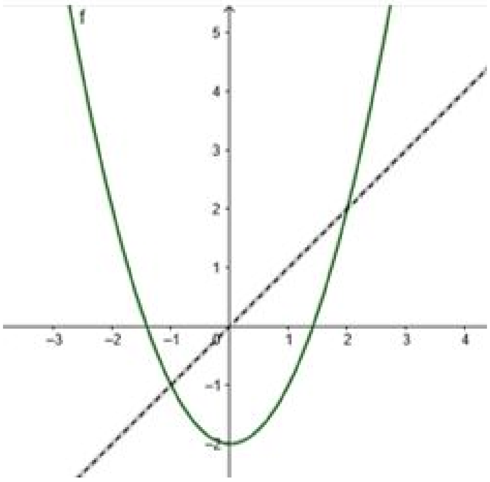
• Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 2$. Com auxílio do Geogebra construa o gráfico dessa função;

Construção esperada dos alunos.



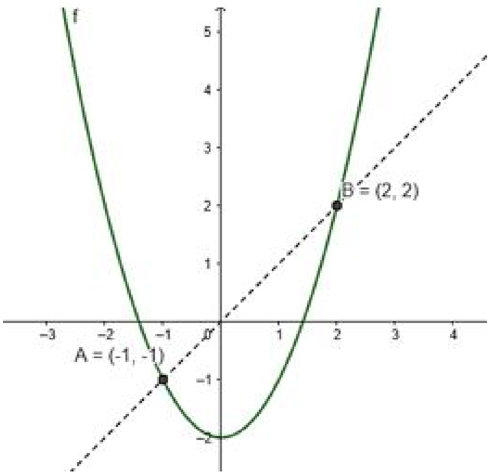
• Construa no mesmo plano o gráfico da função identidade $f(x) = x$, ou seja, a reta $y = x$;

Construção esperada dos alunos.



• Clique no comando Interseção de Dois Objetos e clique no gráfico da função quadrática e da função identidade;

Construção esperada dos alunos.



Note que, nesse exemplo temos pontos de intersecção. Quais são eles?

A coordenada x, dos pontos dados pela intersecção de um gráfico de uma função qualquer com o gráfico da função identidade, em sistemas dinâmicos é chamado de ponto fixo da função. Assim, determine os pontos fixos das funções abaixo com o auxílio do Geogebra.

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^2 - 1$

e) $f(x) = x^2 + x$

f) $f(x) = x^3 - x$

Atividade 05

Objetivos:

- Interpretar e utilizar representações algébricas relacionada a funções e pontos fixos;
- Definir o conceito de ponto fixo algebricamente, resolvendo a equação $f(x) = x$.

Duração: 2 horas/aulas

Considerações/sugestões para o professor:

- Essa atividade deve ser iniciada correlacionando o conceito do ponto fixo geometricamente, visto na atividade anterior, com o conceito algébrico;
- Ao finalizar a atividade com uma explanação do conceito algébrico de ponto fixo;
- Para responder o último questionamento utilize o Geogebra e apresente uma função que não tenha ponto fixo, como por exemplo a função $f(x) = -x^2 - \frac{3}{2}$ ou até mesmo colocar no Geogebra a função $f(x) = -x^2 - c$ e ir variando o c (controle deslizante e fazer o estudo de quando terá ponto fixo e quando não terá. Posteriormente, apresentar de maneira simples o Teorema do ponto fixo.

Descrição da atividade:

Na atividade 04 vimos que a maneira geométrica de encontrar os pontos fixos, é determinando a intersecção do gráfico de uma função com a bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$. Dessa forma para calcularmos os pontos de intersecção entre duas funções, estamos simplesmente calculando os valores para x que satisfazem simultaneamente as duas funções.

Assim podemos encontrar todos os pontos fixos de uma função resolvendo a equação $f(x) = x$. Vejamos o exemplo da função quadrática $f(x) = x^2 - 2$.

Para determinar os pontos fixos temos que resolver a equação $f(x) = x$, ou seja, $x^2 - 2 = x$, vejamos:

$$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

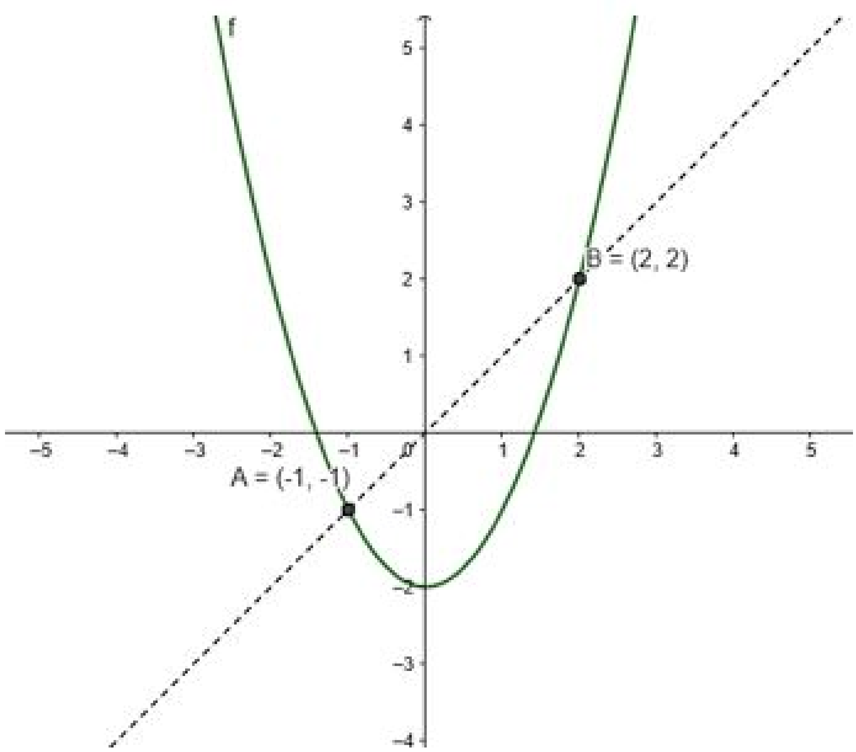
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-2)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2.1} \\
&= \frac{1 \pm 3}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow x' = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad \text{e} \qquad x'' = \frac{1-3}{2} = -1$$

Note que encontramos os mesmos pontos fixos que tínhamos encontrados utilizando o Geogebra, confirmando o resultado encontrado.



Agora determine algebricamente os Pontos Fixos de cada função que você determinou utilizando o Geogebra na atividade 04.

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^2 - 1$

$e)$ $f(x) = x^2 + x$

$f)$ $f(x) = x^3 - x$

- Em todas as funções você encontrou ponto fixo? Sempre existirá ponto fixo?

Atividade 06

Objetivos:

- Explorar o conceito de ponto fixo;
- Introduzir de forma intuitiva o conceito de ponto atrator e repulsor;
- Identificar padrões, estimulando a capacidade investigativa;
- Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.

Duração: 2 horas/aulas

Considerações/sugestões para o professor:

- Nesse momento a intervenção do professor deve ser mínima, deixando os alunos investigarem e deduzirem o conceito de ponto atrator e repulsor;
- No item 3 e 5 da parte 01, é interessante que o professor determine um ponto diferente para cada equipe e assim concluírem que irão se aproximando de zero;
- Analogamente, pode-se fazer no item 4 da parte 01 e assim concluírem que os pontos irão de afastar de 1;
- Após os alunos analisares os itens de 3 a 5 da parte 01 é o momento de o professor apresentar os conceitos de ponto atrator e ponto repulsor;
- Ao finalizar a atividade da parte 02, apresentar o conceito de ponto fixo neutro.

Descrição da atividade:

Parte 01: Introdução do conceito intuitivo de pontos atratores e repulsores.

1. Seja a função $f(x) = x^2$, construa seu gráfico no Geogebra e determine, se possível, o(s) ponto(s) fixo(s).
2. A função possui ponto(s) fixo(s)? Qual (ou quais)? Justifique sua resposta com argumentos matemáticos.
3. Agora calcule as iteradas (no mínimo cinco iteradas) de alguns pontos que estão localizados entre os pontos fixos, ou seja entre 0 e 1, como por exemplo: $x = 1/2, x = 1/3, x = 1/5$. O que podemos observar com as iteradas desses pontos em relação aos pontos fixos? São atraídos? Se repelem?

4. E se calcularmos as iteradas (no mínimo cinco iteradas) de pontos maiores que 1, como por exemplo: $x = 3/2, x = 6/5, x = 7/5, x = 8/5$. O que podemos observar com as iteradas desses pontos em relação aos pontos fixos? São atraídos? Se repelem?

5. E se calcularmos as iteradas (no mínimo cinco iteradas) de pontos menores que 0, como por exemplo: $x = -1/2, x = -1/5, x = -1/3, x = -3/5$. O que podemos observar com as iteradas desses pontos em relação aos pontos fixos? São atraídos? Se repelem?

Parte 02: Prática do conceito pontos atratores e repulsores.

Com auxílio do programa Geogebra, determine em cada item se tem ponto atrator ou repulsor.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 6$

b) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

c) $f(x) = 3x$

d) $f(x) = \frac{x}{2}$

Atividade 07

Objetivos:

- Introduzir de maneira intuitiva a Conjectura de Collatz;
- Identificar padrões, estimulando a capacidade investigativa;
- Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a Conjectura de Collatz e órbitas periódicas;
- Apresentar a Conjectura de Collatz.

Duração: 2 horas/aulas

Considerações/sugestões para o professor:

- No início da atividade a intervenção do professor deve ser mínima, deixando os alunos investigarem a conjectura de Collatz;
- Ao finalizar a atividade, após os alunos realizarem a atividade e verificarem que sempre chegará a 1 é o momento de apresentar a curiosa Conjectura de Collatz: O problema impossível mais simples do mundo com o objetivo de instigar e atrair os alunos para a matemática. Essa apresentação pode ser utilizando slides ou até mesmo pedir para os alunos pesquisarem;
- Apresentar o conceito de órbitas periódicas, podendo apresentar outros exemplos.

Descrição da atividade:

Considere os números inteiros positivos $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$. Escolha um desses números e calcule: (o ideal é cada equipe escolher um número diferente).

- Se o número for par, divida-o por 2;
- Se for ímpar, multiplique-o por 3 e depois some 1.

Depois aplique essas mesmas regras simples ao resultado e assim sucessivamente até 20 iteradas pelo menos.

Faça esse processo ao menos com mais dois números.

Após finalizar, responda:

1. O que você pode observar nos resultados de cada um dos exemplos?
2. Compare seus resultados com o de seus colegas, registre a comparação.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho exploramos os conceitos iniciais de sistemas dinâmicos discretos e algumas aplicações, sugerindo uma proposta de sequência didática, para alunos do 1^o ano do Ensino Médio. Nessa sequência, também apresentamos orientações e sugestões detalhadas para o professor, de modo que o docente interessado seja capaz de propor essas atividades diretamente em uma sala de aula e avaliar o nível de compreensão alcançado pelos alunos.

Inicialmente, pretendíamos não apenas sugerir, mas também aplicar em sala de aula, contudo devido ao cenário mundial e educacional de 2021, por conta da pandemia de Covid-19, não foi possível fazê-la. Porém, ao verificarmos as atividades propostas, fica evidente que é perfeitamente possível a utilização dessa teoria para desenvolver os conhecimentos e habilidades matemáticas dos alunos que participarão das atividades. Apesar de não ter sido possível fazer uma verificação empírica da eficácia das atividades, tal experiência pedagógica será desenvolvida, aplicada e avaliada no decorrer do atual ano letivo.

Por fim, após a verificação e avaliação dos resultados alcançados, pretendemos produzir um artigo capaz de complementar estes estudos, pois acreditamos na relevância e utilidade desse tipo de atividades para que os alunos desenvolvam seus conhecimentos, suas competências e suas habilidades matemáticas, aumentando assim potencialmente as possibilidades de despertar o interesse matemático dos alunos.

Esperamos com esse trabalho contribuir de maneira significativa para a formação dos profissionais que atuam no ensino médio e de seus alunos, uma vez que procuramos abordar, de forma didática, um importante ramo da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] Araújo, V.. *O Problema* $3x + 1$. Gazeta de Matemática, Lisboa, p. 38 - 44, 02 jan. 2004.

[2] BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: *Educação é a base*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

[3] Baraviera, A.T. e Branco, F. M.. *Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão*. Instituto de Matemática - UFRGS. Disponível em: ¡https://www.emis.de/journals/em/docs/coloquios/SU2.02.pdf¿.

[4] Cipolli, V.G.. *Sistemas Dinâmicos Discretos- análise de estabilidade*. Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira. 2012. 149 f. Dissertação(Mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2012.

[5] Devaney, R. L.. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2ª edição, ed. ABP, Colorado, US, 1989.

[6] Jesus, E.A. de. *Sistemas Dinâmicos Discretos*. Orientador: Telles Timóteo da Silva. 2016. 78 f. Dissertação(Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal de São João Del Rei. São João Del Rei, 2016.

[7] Lagarias, J.. *The* $3x + 1$ *Problem and Its Generalizations*. The American Mathematical Monthly, 1985.

[8] Lamas, E. P.. *Dinâmica Discreta Hiperbólica, Estabilidade e Caos*. Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2013.

[9] Maligeri, G. C. A. M.. *Equações Discretas no Ensino Médio: Modelos de Dinâmicas Populacionais*. Orientadora: Suzinei Aparecida Siqueira Marconato. 2013. 54 f. Dissertação(Mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2013.

[10] Muniz Neto, A. C.. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção PROFMAT, 15. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[11] Sarmento, C.F. S.. *Dinâmica de aplicações simples: proposta de abordagem para o Ensino Médio*. Orientador: Drª Marcia Pragana Dantas. 2015. 62 f. Dissertação(Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

[12] Viana, M.. *Sistemas Dinâmicos.* 2017*, vídeo (*53 *min).* Publicado pelo canal Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=12ibbpfDrHot=1341s acessado em 13/10/2021.

[13] Villate, J. E.. *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com o Maxima*. Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com o Maxima Disponível em: http://fisica.fe.up.pt/maxima/book/ sistdinam-1_2.pdf . Acessado em 01/11/2021.

[14] *Porque um problema simples é um dos buracos negros da matemática*. Revista BBC Brasil, 06/06/2016. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-36702054 acessado em 18/11/2021.

[15] https://www.abc.org.br/membro/jacob-palis-junior/ acessado em 30/09/2021.

[16] https://impa.br/pesquisa/sistemas-dinamicos-e-teoria-ergodica/ acessado em 22/09/2021.

[17] https://www.edocente.com.br/blog/escola/sequencia-didatica-para-educacao-basica/ acessado em 30/09/2021.