Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Fábio Nogueira da Silva Costa

Programação Linear - conceitos básicos

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre(a) em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof(a). Gilcélia Regiane de Souza - UFSJ (Orientadora)

Prof(a). Marcelo oliveira Veloso - UFSJ (Coorientador)

Prof(a). Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni - UFSJ

Prof(a). Evelise Roman Corbalan Gois Freire - UFLA

Ouro Branco
Março 2022

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Campus Alto Paraopeba - CAP

Programação Linear - conceitos básicos

Fábio Nogueira da Silva Costa [1]
Gilcélia Regiane de Souza [2]
Marcelo Oliveira Veloso [3]

Resumo: A Programação Linear (PL) é uma ferramenta de otimização que auxilia uma tomada de decisão garantindo o gerenciamento de recursos de forma eficiente. Envolve problemas que apresentam características lineares e uma única função objetivo, podendo ser utilizada tanto para maximização quanto para minimização. O presente trabalho apresenta algumas maneiras de solucionar problemas de otimização com base em Programação Linear, dando ênfase em conceitos básicos para consolidação e entendimento do método. Destaca-se a importância de se compreender quando o problema apresenta solução ótima, a mesma se encontra em um dos vértices de um polígono convexo formado pelas restrições impostas ao problema. Além disso, a Programação Linear é um ótimo recurso para mostrar aos alunos do Ensino Médio que a matemática está em tudo e responder aqueles famosos questionamentos “para que estudar isso?”, “onde vou aplicar tais conceitos em minha vida?”etc, comumente enfrentados pelos professores. Alguns conteúdos necessários para o desenvolvimento de PL são vistos no Ensino Médio, sendo assim o professor poderá apresentar um determinado tema mostrando que o mesmo se aplica em PL, ou seja, na busca de maximizar lucros ou minimizar perdas. E isso por si só é uma grande motivação para o estudo do tema.

Palavras-chave: Programação Linear; Maximizar; Minimizar; Método Simplex

Abstract: Linear Programming (PL) is an optimization tool that helps decision making by ensuring efficient resource management. It involves problems that present linear characteristics and a single objective function, which can be used for both maximization and minimization. The present study presents some ways to solve optimization problems based on Linear Programming, emphasizing basic concepts for consolidation and understanding of the method. It is important to understand when the problem has an optimal solution, it is at one of the vertices of a convex polygon formed by the constraints. In addition, Linear Programming is a great resource to show high school students that mathematics is in everything and answer those famous questions “why should I study this”, “where will I apply these concepts in my life?”faced by teachers. Some contents necessary for the development of PL are seen in High School, so the teacher can present a certain theme showing that the same applies in PL, that is, in the search for maximizing profits or minimizing losses. And this is a great motivation for studying the topic.

Keywords: Linear Programming; Maximize; Minimize; Simplex method

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2019, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP), fabioncosta@gmail.com

[2]Professora Orientadora, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, gilcelia@ufsj.edu.br

[3]Professor Coorientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, veloso@ufsj.edu.br

1 Introdução

Alocar recursos escassos, visando o aumento de produtividade econômica por meio de processos e modelos que impactam na melhoria da eficiência, é interesse antigo da sociedade, e está ligado ao conceito de otimização [6].

A Pesquisa Operacional (PO), oriunda da Segunda Guerra Mundial, baseia-se no uso de técnicas, com embasamento lógico-científico, que auxiliam nessa tomada de decisão, tornando-a mais prática, garantido o gerenciamento de recursos de forma eficiente [11].

Na dédaca de 50, a Pesquisa Operacional passou a ser aplicada em organizações não militares, que passaram a apresentar operações mais complexas com a expansão econômica. Essa expansão econômica trouxe problemas que se assemelhavam aos tratados em questões militares. Com o desenvolvimento computacional, capaz de potencializar a capacidade de cálculo, as técnicas de PO tiveram seu uso alavancado [11].

A Programação Linear (PL) é uma das técnicas mais comuns de Pesquisa Operacional, e está entre os principais avanços científicos do século XX. Atualmente, os países industrializados a utilizam como ferramenta padrão de otimização em diversars áreas; transporte, dosagem, investimento, avaliação de recursos, compras, fluxo de redes, e em destaque, o setor industrial [1].

Problemas de programação linear buscam distribuir recursos de forma eficiente, com a finalidade de atender a um determinado objetivo, como maximização de lucros ou minimização de custos. Para tal, informações são fornecidas por meio de equações e inequações lineares que delimitam a utilização de cada um desses recursos [9].

A solução dos problemas em PO baseia-se em coleta de dados, formulação e análise do problema [11]. Os recursos podem ser distribuídos de formas variadas para uma tomada de decisão, devendo garantir que as restrições de um problema sejam satisfeitas [1].

Com informações coletadas, cria-se um modelo que represente o problema real estudado. Esse modelo deve ser de simples representação, apresentando complexidade apenas em aspectos relevantes a solução do problema [11]. As simplificações necessária para viabilizar a solução do problema, devem ser suficientes para garantir que as conclusões possam ser estendidas a realidade, de modo a não prejudicar a interpretação dos resultados [4].

Um problema de otimização é dito Programação Linear se satisfazer as seguintes propriedades [3]:

- Quando tiver uma única função objetivo, ou seja, uma única função que expresa o que se pretende encontrar na solução, seja maximização, seja minimização.
- Sempre que a variável de decisão aparecer tanto na função objetivo quanto nas funções restrições, deve-se aparecer somente como potências de expoente 1 e quando muito, multiplicada apenas por uma constante. Ou seja, deve-se garantir a linearidade.
- Nenhum termo da função objetivo ou de qualquer restrição pode conter produto de variáveis de decisão, pois isso compromete a linearidade.
- Os coeficientes das variáveis de decisão da função objetivo e de cada restrição são constantes.
- As variáveis de decisão assumem valores reais.

O presente trabalho será dividido em 7 seções, contando com essa primeira seção introdutória que apresenta a programação linear baseada em revisão bibliográfica. A seção 2 aborda a modelagem do problema de programação linear. Enquanto a seção 3 trabalha os diferentes modos de se encontrar uma solução para um problema, baseada em programação linear.

A seção 4 é destinada para demonstração de exemplos que ilustram tanto a modelagem abordada na seção 2 quanto a obtenção de resultados para o problema com os modos apresentados na seção 3. A seção 5 ilustra que ao se trabalhar com programação linear, estaremos sempre trabalhando com um plano convexo.

Na seção 6 trata-se da importância do conteúdo matemático proveniente do ensino médio, base de todo conteúdo para aplicação da programação linear. Por fim, a seção 7 é destinada a conclusão do trabalho.

As figuras presentes no trabalho são de autoria própria, com excessão da Figura 2, que apresenta a fonte de autoria na mesma.

2 Modelagem Matemática

O processo de modelagem consiste em formular um problema matemático à partir de um problema real definido. Após essa formulação, faz-se uma simulação do modelo e um teste de validação. Caso o resultado desse teste seja consistente o modelo estará apto a ser utilizado. Caso negativo, o modelo passa por uma reformulação, para que possa novamente ser testado e validado.

O processo de modelagem pode ser resumido por passos, como apresentado na Figura 1

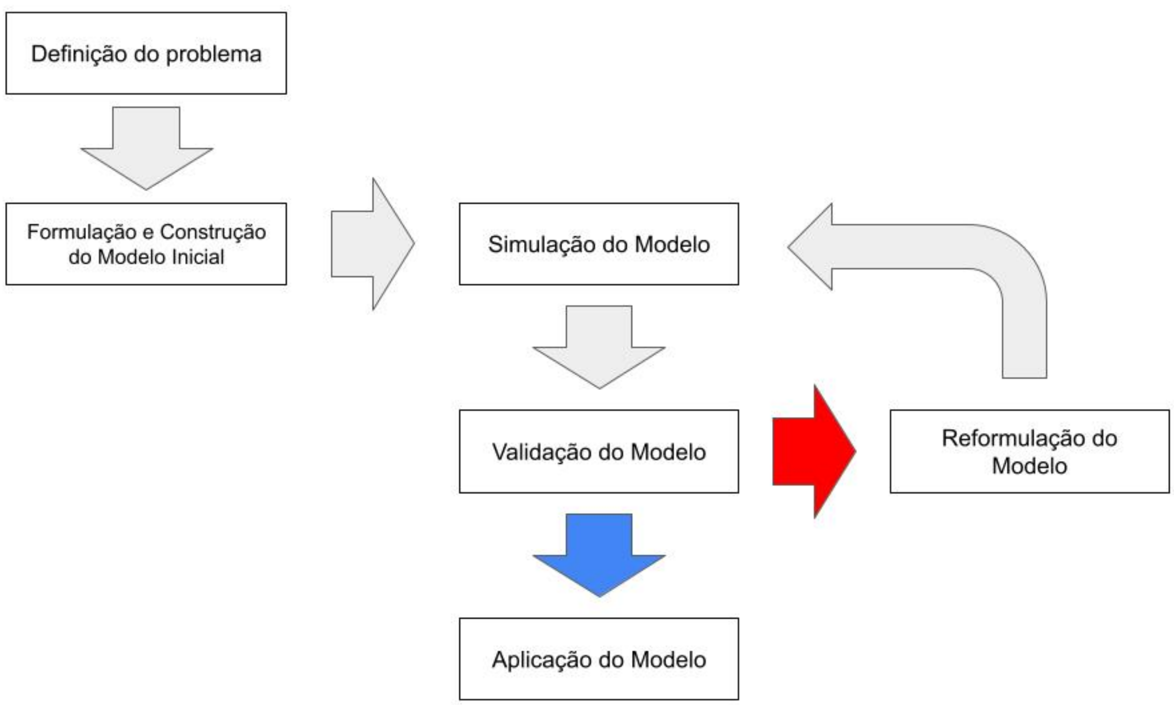


Figura 1: O processo de construção de modelos

Importante ressaltar que a natureza não fornece fórmulas e equações prontas, portanto, elas devem ser identificadas e criadas pelo elaborador do modelo, que deve adequá-las da forma pretendida, levando em consideração o conteúdo técnico e sua própria percepção[4].

A vantagem de se utilizar modelos matemáticos é a economia de tempo e dinheiro, além de diminuir possíveis impactos que poderiam ser causados se fossem testadas todas as possíveis soluções de uma estrutura real replicada [11].

Modelos matemáticos geralmente são representados por equações ou expressões matemáticas, sendo associada a cada decisão quantificável, uma variável do modelo. Uma função objetivo estrutura essas variáveis de modo a fornecer a eficácia procurada. Em programação linear, essa função e as variáveis são expressões lineares [4].

No exemplo 4.1, na seção 4.2 é demonstrado o processo de modelagem para um problema fictício de logística de autoria própria.

3 Metodologia

É realizada uma análise comparativa de possíveis métodos que podem ser utilizados para solucionar problemas de programação linear: gráfico, algébrico e computacional (através do método Simplex). Destacando que o resultado obtido é sempre o mesmo, independente do método escolhido.

O conteúdo trabalhado apresenta uma forte ligação com a base de conteúdos matemáticos provenientes do ensino médio, e por isso, o trabalho apresenta os principais conteúdos em um tópico a parte.

Para o desenvolvimento do trabalho foram utilizados recursos computacionais: LINDO 6.1 Educational e Geogebra. Ambos em versões disponíveis de forma gratuita.

O LINDO 6.1 Educational é uma ferramenta de resolução de problemas de otimização. É um programa leve e de fácil utilização, que pode ser baixado diretamente do site do desenvolvedor: https://www.lindo.com/lindoforms/downloadWayne.php.

O GEOGEBRA é um programa escrito em linguagem JAVA que combina conceitos matemáticos de geometria e álgebra. Pode ser baixado do site do desenvolvedor ou utilizado de forma online: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt

4 Solução

A resolução do problema de Programação Linear baseia-se em hipóteses que podem ser limitantes, como: proporcionalidade, aditividade, divisibilidade, certeza [9].

A proporcionalidade não permite que se leve em conta o fator de economia de produção em escala, por exemplo. Isso ocorre, pois considera-se o valor da função objetivo proporcional ao valor de cada variável de decisão que a compõe.

A aditividade considera que as variáveis de decisão são sempre independentes, impossibilitando considerar situações em que uma variável interfere no valor de outra.

A divisibilidade se deve ao fato de que as variáveis podem apresentar número fracionário, portanto, quando o modelo exige que as variáveis sejam sempre números inteiros, deve-se impor essa condição no modelo.

A certeza ocorre por considerar-se que os parâmetros dos modelos são sempre conhecidos e constantes, o que dificilmente é verificado em problemas reais. Por isso há a necessidade de fazer uma análise de sensibilidade dos resultados.

As soluções possuem a seguinte classificação [7], e podem ser representadas pela Figura 2.

- Solução: Qualquer especificação de valores, dentro do domínio da função-objetivo, Z, para as variáveis de decisão, independentemente de se tratar de uma escolha desejável ou permissível.

- Solução viável: Uma solução em que todas as restrições são satisfeitas.

- Solução ótima: Uma solução viável que tem o valor mais favorável da função-objetivo, Z, isto é, maximiza ou minimiza a função-objetivo, podendo ser única ou não.

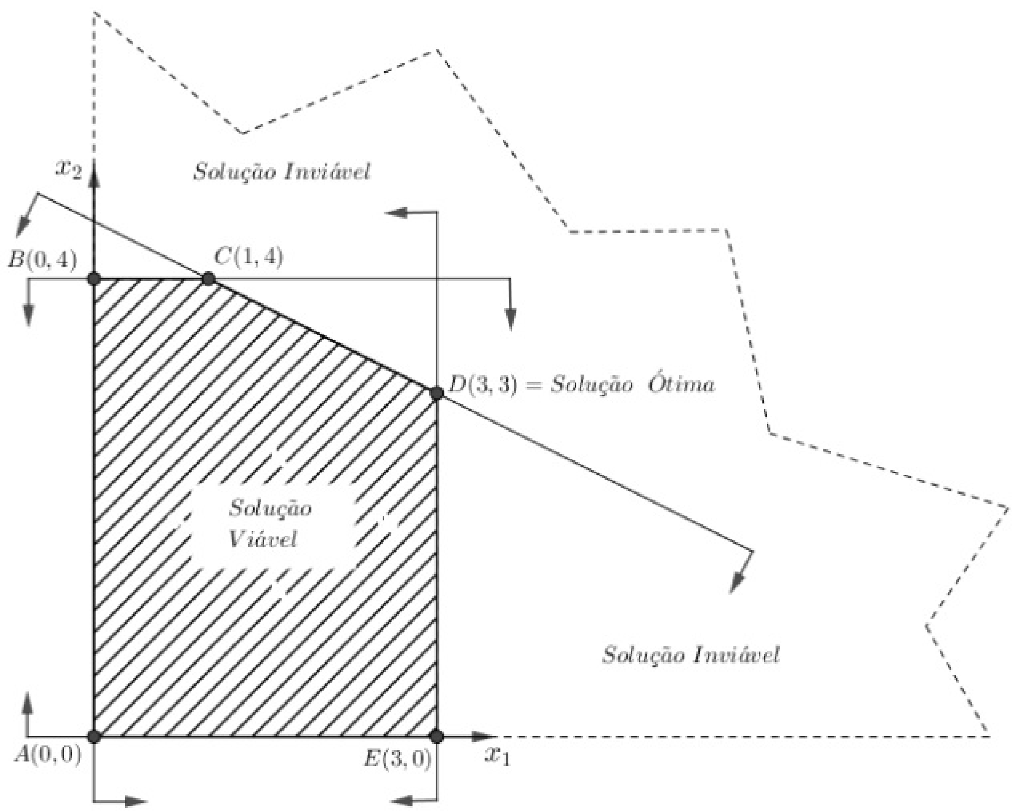


Figura 2: Classificação das soluções
Fonte: Maílto

4.1 Solução Gráfica

Sistemas com equações ou inequações lineares podem ser classificados como impossível, possível e determinado, ou possível e indeterminado, e então apresentarem solução pelo método gráfico [6].

O Método Gráfico soluciona problemas mais simples, com até duas variáveis, com relativa facilidade. Com mais variáveis o método passa a apresentar complexidade e se torna cada vez mais difícil de ser executado [11].

Em problemas envolvendo duas variáveis de decisão, o método gráfico pode ser utilizado para encontrar a solução ótima do problema de programação linear. Uma vez que restrições lineares definem um polígono convexo, conjunto de pontos viáveis. [1].

O ponto ótimo está em um dos vértices do polígono convexo, pontos de extremo. A região factível limitada é formada pelo polígono, e, graficamente, a solução, ponto ótimo, é um de seus vértices [2].

A utilização do método gráfico auxilia na demonstração de importantes conceitos, como:

- solução viável ou factível - consiste em todos os valores de uma variável que satisfaçam o sistema de inequação, busca-se encontrar o valor ótimo;

- solução inviável ou infactível - consiste em valores que não satisfaçam ao menos uma das inequações ;

- solução ótima - é a solução que apresenta o melhor valor para a função objetivo, ou seja, a otimização.

Os passos a seguir permitem empregar o método gráfico em problemas de Programação Linear de pequeno porte [10]:

- Representar cada restrição de maneira geométrica, como uma reta ou uma região;
- Marcar os pontos de intersecção entre as retas ou regiões e verificar o polígono que representa as soluções possíveis;
- Representar a função objetivo de maneira geométrica, através de uma reta;
- Encontrar o vetor gradiente, que fornece a direção de maior crescimento da função objetivo;
- Deslocar a reta representada pela função objetivo, paralelamente a si, na direção oposta ao vetor gradiente (em casos de minimização de z), até encontrar o ponto ótimo.

4.1.1 Tipos de gráficos

Nesta seção serão definidos, como exemplo, 6 tipos de regiões: infactível; factível limitada com solução ótima única ou infinitas soluções; factível ilimitada com solução ótima única, infinitas soluções, ou sem solução ótima.

Um problema de Programação Linear é infactível, quando as restrições forem conflitantes, ou seja, quando não existe um valor para determinada variável que atenda a todas as inequações ao mesmo tempo. Se acontecer de ao menos uma inequação não ser satisfeita, a regiâo factível é vazia, portanto, não apresenta solução ótima, sendo classificada como impossível. Na Figura 3 é apresentada uma situação em que valores internos ao polígono não podem satisfazer uma das inequações.

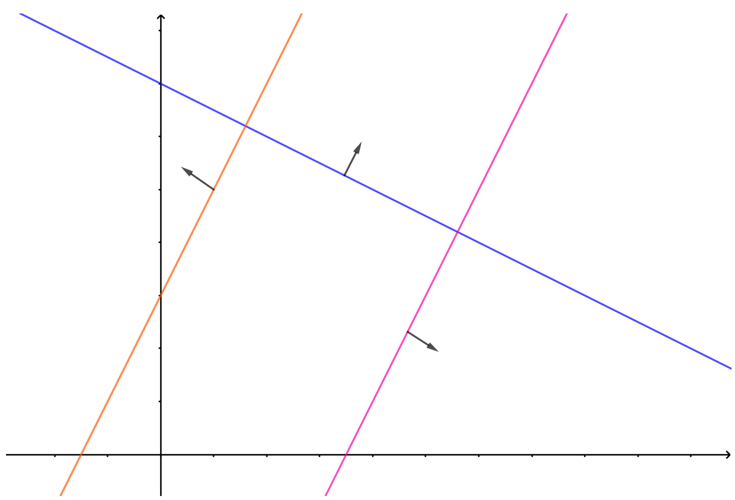


Figura 3: Sem solução ótima

O problema pode possuir região factível limitada, possuindo solução ótima única ou infinitas soluções ótimas. Nesse caso, ao menos uma solução ótima estará no vértice da região factível.

Na Figura 4 é apresentada uma região factível limitada com solução única, ou seja, os valores assumidos pelas variáveis atendem simultaneamente a todas as inequações do problema. E, como há apenas um ponto que retorna o valor máximo, tem-se solução ótima única.

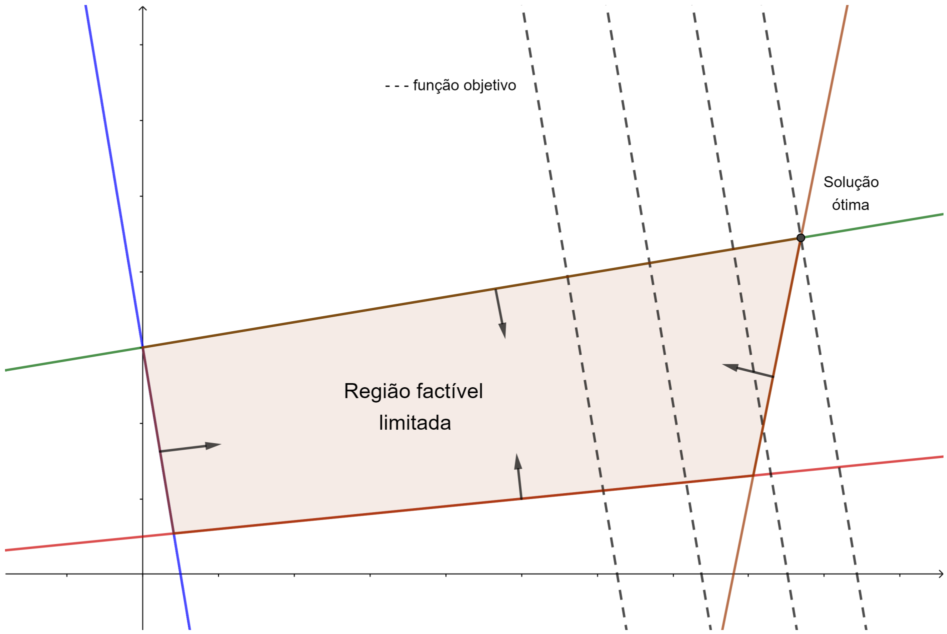


Figura 4: Região factível limitada com solução única

Na Figura 5 é apresentada uma região factível limitada com múltiplas soluções, ou seja, os valores assumidos pelas variáveis atendem simultaneamente a todas as inequações do problema. E, como múltiplos pontos retornam o valor mínimo, há um segmento de reta que caracteriza os possíveis valores de mínimo do problema, tem-se múltiplas soluções ótimas.

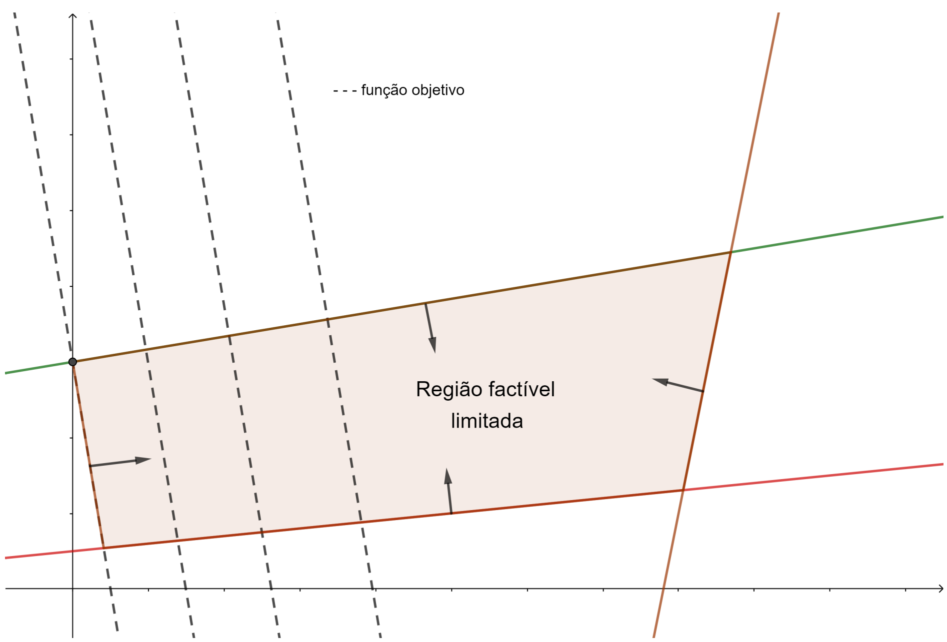


Figura 5: Região factível limitada com múltiplas soluções

Quando o problema possuir região factível ilimitada, ele pode não apresentar solução ótima, apresentar solução ótima única, ou ainda, múltiplas soluções, nesse caso, ao menos uma solução ótima estará no vértice da região factível.

Na Figura 6 é apresentada uma região factível ilimitada que devido a função objetivo buscar uma minimização foi possível encontrar uma solução ótima única.

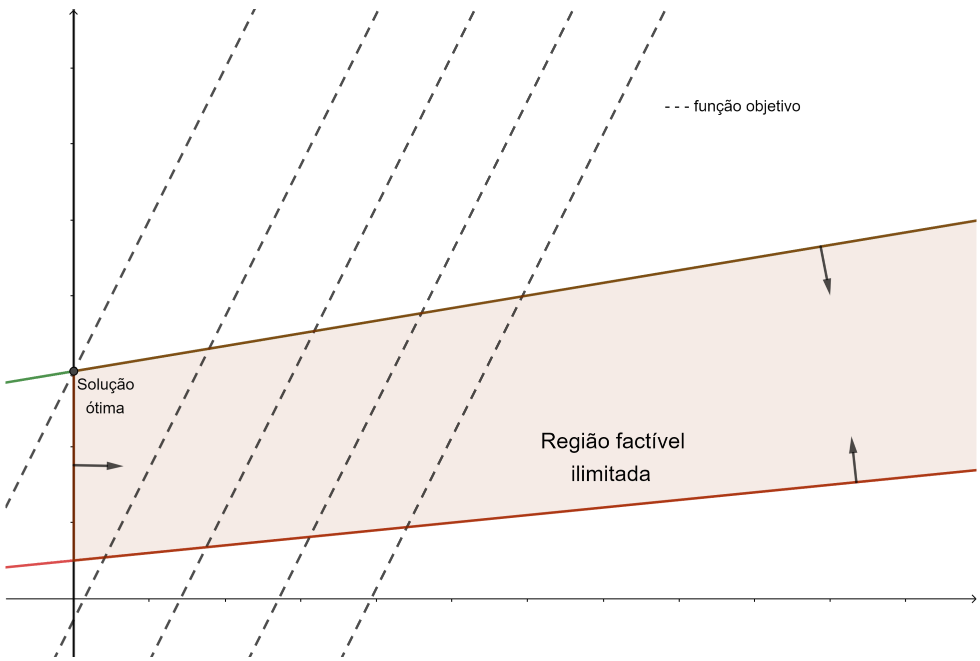


Figura 6: Região factível ilimitada com solução única

Enquanto na Figura 7 é apresentada uma região factível ilimitada que devido a função objetivo buscar uma maximização não foi possível encontrar uma solução ótima.

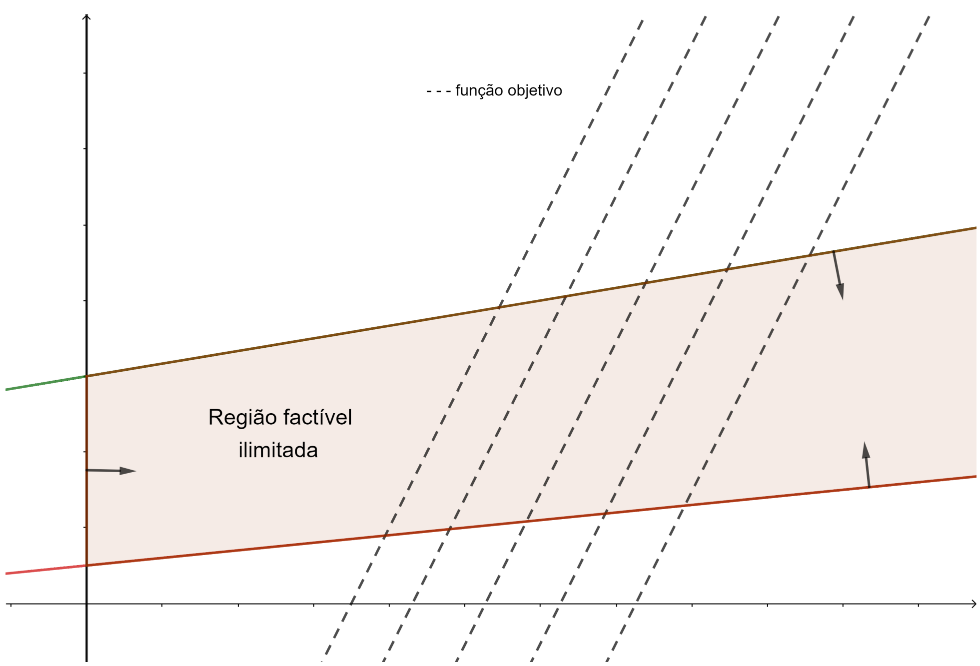


Figura 7: Região factível ilimitada com múltiplas soluções

Na Figura 8 é apresentada ainda uma situação em que foi possível encontrar infinitas soluções ótimas para otimização em uma região factível ilimitada. Isso foi possível pois, apesar da região factível ser ilimitada, esse fato ocorre apenas para valores cada vez maiores da função objetivo. Quando busca-se a minimização da função objetivo nesse caso, é possível encontrar solução ótima.

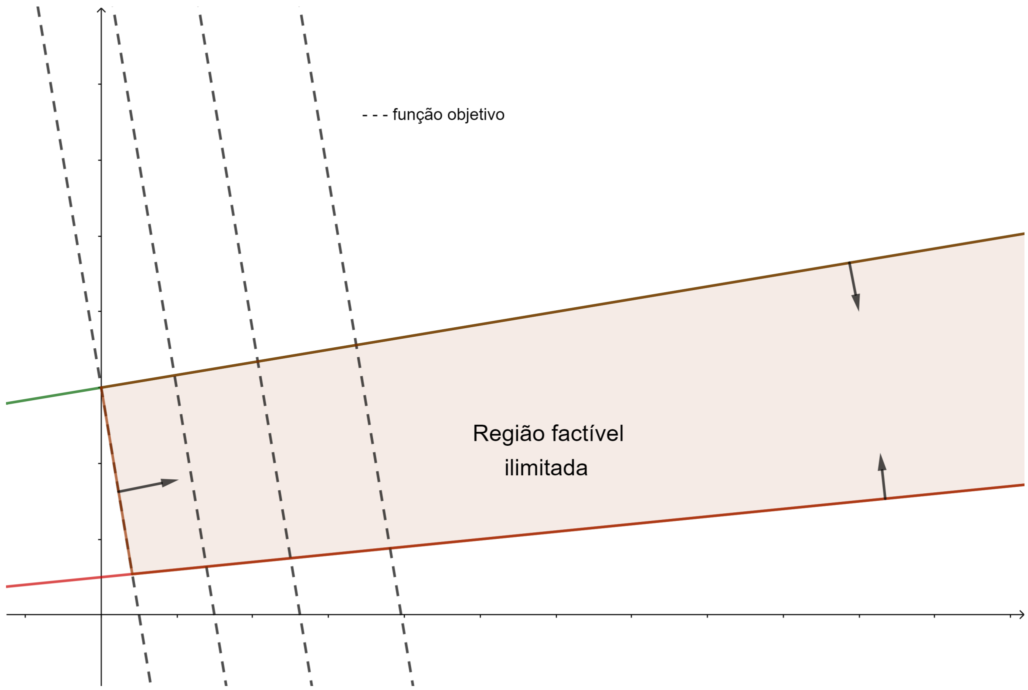


Figura 8: Região factível ilimitada sem solução ótima

As Figuras 2 a 8 apenas ilustram possíveis situações, não esgotando todas as possibilidades.

4.2 Solução Algébrica

Se o problema de Programação Linear apresentar um número finito de soluções, então ela ocorrerá em pelo menos um ponto extremo [8].

A solução algébrica se baseia em alguns teoremas, e, portanto, a compreensão desses é importante para que se possa entender o funcionamento do método.

Teorema 4.1 *O conjunto de todas as soluções viáveis do modelo de programação linear é um conjunto convexo.*

Demonstração: Considere o seguinte problema de Programação Linear

Maximizar Cx onde, Cx o conjunto formado por $Ax \geq b$ e $x \geq 0$. sujeito a

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Sendo C a região factível, vamos verificar que C é convexo. Ou seja, que qualquer ponto que pertença ao segmento de reta que ligue duas soluções viáveis do problema, também será uma solução viável do problema. Em termos algébricos:

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_2 \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

para $x_1 \neq x_2$

Sendo x_1 e x_2 soluções compatíveis, temos:

$$\begin{cases} Ax_1 \geq b \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \alpha A x_1 \geq \alpha b \tag{1}$$

$$\begin{cases} Ax_2 \geq b \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad (1-\alpha)Ax_2 \geq (1-\alpha)b \tag{2}$$

Poís, como $\alpha \geq 0$ e $(1-\alpha) \geq 0$, ao multiplicar os dois lados das inequações por α mantém-se os sinais das desigualdades.

Considerando o vetor:

$$\begin{cases} x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Sendo o vetor que determina o segmento de reta que liga duas soluções viáveis.

Deve-se provar que:

$$x \geq 0 \tag{4}$$

$$Ax \geq b \tag{5}$$

A Inequação (4) é demonstrada pelas relações:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Considerando (3) sabe-se que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ e portanto, podemos desenvolver (5):

$$Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2$$

Aplicando as relações de (1) e (2), tem-se:

$$\alpha A x_1 \geq \alpha b$$

e

$$(1-\alpha)Ax_2 \geq (1-\alpha)b$$

logo:

$$Ax \geq \alpha b + (1-\alpha)b$$

ou

$$Ax \geq b$$

De forma análoga, temos o resultado para as relações $Ax = b$ e $Ax \leq b$ $\square$

Teorema 4.2 *Um ponto é uma solução básica do problema, se e somente se é um ponto extremo.*

Sendo solução básica uma solução que satisfaça $Ax = b$, ou seja, é uma solução que satisfaça a equação que da origem a inequação. Ou ainda, é a solução obtida quando se fixa as variáveis não básicas sendo iguais a zero.

E ponto extremo definido como um dos vértices de um polígono. Em um conjunto convexo, o ponto extremo é um ponto que pertence a região delimitada pelo polígono mas não está no interior de nenhum segmento de reta contida nessa mesma região.

Demonstração: Considere o seguinte problema de Programação Linear

Minimizar Cx

sujeito a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

($\Rightarrow$) Se x é um ponto extremo da região factível, queremos demonstrar que x é solução básica factível do sistema $Ax = b$, $x \geq 0$.

Como x é ponto extremo, há n hiperplanos linearmente independentes ativos em x. $Ax = b$ fornece m hiperplanos ativos. Existe portanto, $p = n - m$ hiperplanos adicionais provenientes de restrições de não negatividade. Chamando p de $x_N = 0$, onde x_N é vetor vetor p de componentes, sendo N um conjunto de índices que indica quais são os componentes P. Portanto, o sistema $Ax = b$, $x_N = 0$ tem solução única:

$Ax = b \leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \leftrightarrow x_B = B^{-1}b$ e $x_N = 0$

Sendo N submatriz de A cujas colunas são variáveis são x_N. E, B submatriz formada pelo restante das colunas de A. Portanto, o ponto extremo $(x_B,\, x_N) \geq 0$, pois x é factível.

($\Leftarrow$) Se x for solução básica factível do sistema, queremos mostrar que x é ponto extremo. Ou seja: $x = (x_B, x_N)$ onde $A = (B, N)$ tal que $x_B = B^{-1}b \geq 0$ e $x_N = 0$ O que significa dizer que n hiperplanos são ativos em x, portanto, x é um ponto extremo. $\square$

Portanto, chegamos a conclusão de que os possíveis pontos analisados, se tratam da intersecção de planos. Mas como estamos tratando de um plano bidimensional, temos que esses pontos a serem analisados são os pontos que caracterizam encontro de retas. Pensando no conjunto convexo a ser analisado, esses encontros de retas caracterizam os vértices.

Obtêm-se, então, alguns resultados.

- A coleção de pontos extremos corresponde a de soluções básicas factíveis, sendo ambas não nulas quando a região factível for não nula;
- sendo a região factível não vazia, então existe solução ótima, se, e somente se, a função objetivo caminhar ao encontro de direções extremas da região factível. Caso contrário, o valor ótimo tenderá ao infinito;
- se uma solução ótima existir, também existirá um ponto extremo.

A resolução de problemas de Programação Linear por meio de solução algébrica pode ser baseada nos seguintes passos, desde que o problema apresente região factível limitada [12]:

- Encontre os pontos de intersecção das restrições;
- determine os pontos de intersecção viáveis para obtenção dos pontos extremos;
- avalie a função objetivo em cada ponto extremo;

- escolher o ponto extremo que otimize a função objetivo, seja para maximização ou minimização.

4.3 Método Simplex

O Método Simplex, publicado em 1951 por George Dantzig, é um algoritmo baseado em Álgebra Linear que busca a solução ótima de um problema de Programação Linear através de método iterativo [4].

O algoritmo trabalha a partir de uma solução viável do problema, normalmente de um ponto extremo, e a partir dessa, encontra novas soluções e as compara com a solução corrente, de modo a adotar sempre a de melhor valor, se mostrando um método simples e eficiente.

Geometricamente, o método consiste nas análises de valores dos pontos extremos da região factível. De modo, que ao final da iteração, o método retorna a solução ótima para o sistema. Isso é possível, pois como visto anteriormente, se existir a solução ótima do sistema, ela estará em um dos pontos extremos [6].

O algoritmo simplex está associado a programas computacionais e trabalha com a base matricial, de modo que se torne possível descrever a seguinte sequência de passos para a obtenção da solução do problema [4]:

1. Inversão da matriz básica m×m deduzida da matriz A, de restrições m×n.
2. Condições de mudança de variáveis de modo a garantir soluções com resultados melhores.
3. Regra de parada do algoritmo.

5 Exemplos de aplicação da Programação Linear

Dois exemplos serão trabalhados a seguir. O primeiro, com um número menor de variáveis e de menor complexidade, será desenvolvidos por cada um dos metódos, de modo a exemplificar cada um deles, ao mesmo tempo que deve servir de base comparativa. Posteriormente, será desenvolvido um exemplo com mais variáveis e um nível maior de complexidade, de modo a demonstrar a facilidade de se trabalhar com o método simplex, ou o método dual.

5.1 Problema genérico de maximização

O seguinte problema de otimização será resolvido por cada um dos métodos:

Maximizar

$$Z = 3x_1 + 7x_2 \tag{6}$$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 20 \tag{7}$$

$$2x_1 + 7x_2 \leq 49 \tag{8}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{9}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{10}$$

5.1.1 Resolução pelo Método Gráfico

Inicialmente, delimita-se o problema com base nas restrições apresentadas, e posteriormente, traça-se retas paralelas baseadas no vetor que representa a função objetivo. Como é um problema de maximização, o valor de Z, vai aumentando até que, à partir do valor encontrado, não seja mais possível encontrar uma solução factível.

O valor encontrado para Z, será o máximo da função objetivo. E o(s) ponto(s) de intersecção da reta que representa a função objetivo, com as retas que representam as restrições, será o ponto que as variáveis retornam o valor máximo quando substituídos na função objetivo, Z.

As Restrições (9) e (10) coincidem com os semieixos do plano cartesiano.

A reta referente a Restrição (7) é traçada no plano cartesiano, e está apresentada na Figura 9, juntamente com as Restrições (9) e (10).

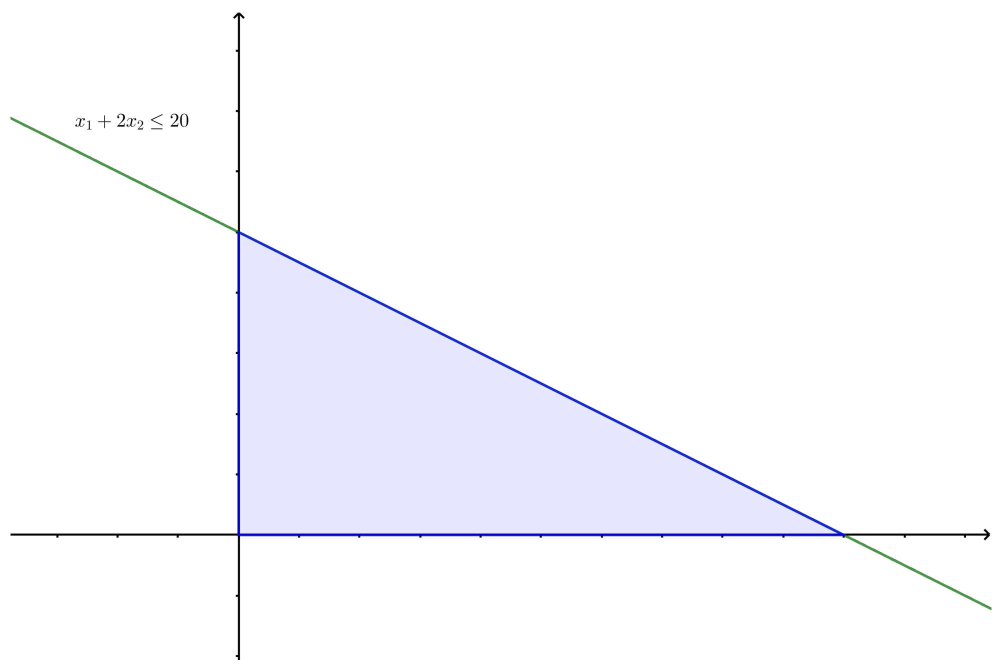


Figura 9: Restrições (7), (9) e (10)

A reta referente a Restrição (8) também é traçada no plano cartesiano e é apresentada na Figura 10, onde está apresentado o conjunto de todas as restrições.

Figura 10: Restrições (7), (8), (9) e (10)

Com a delimitação do problema traçada à partir das restrições, a função objetivo começa a ser trabalhada. Na solução em questão, inicialmente foi traçada a reta que representa $z = 0$, apresentada na Figura 11.

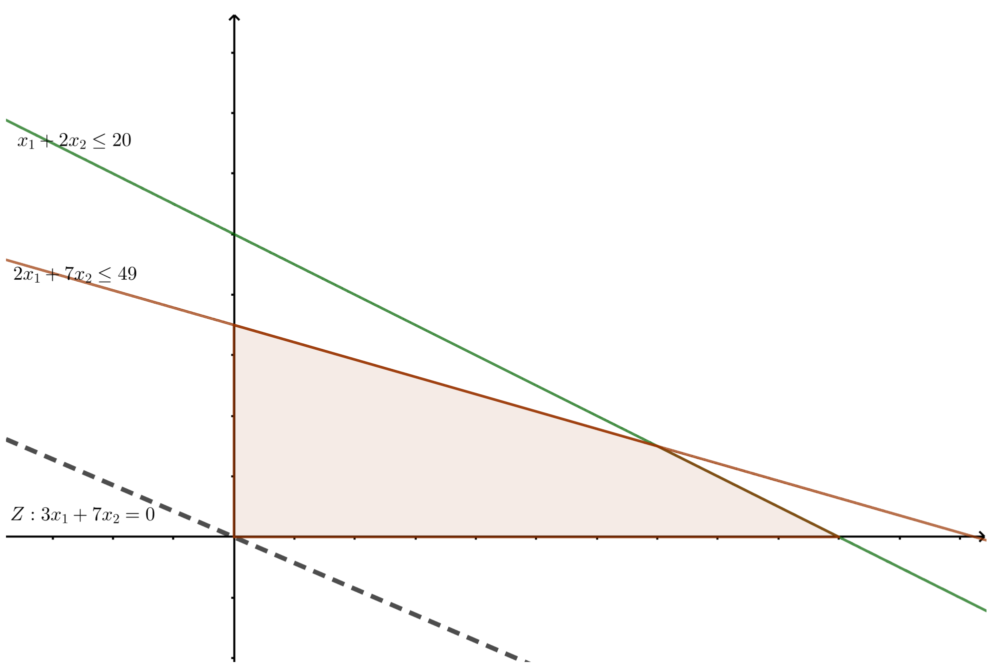


Figura 11: Função objetivo: Z = 0

Por fim, retas paralelas à reta que representa $z = 0$ são traçadas. No exemplo em questão, foram traçadas as retas referentes a $z = 21$, $z = 42$ e $z = 63$, conforme é apresentado na Figura 12.

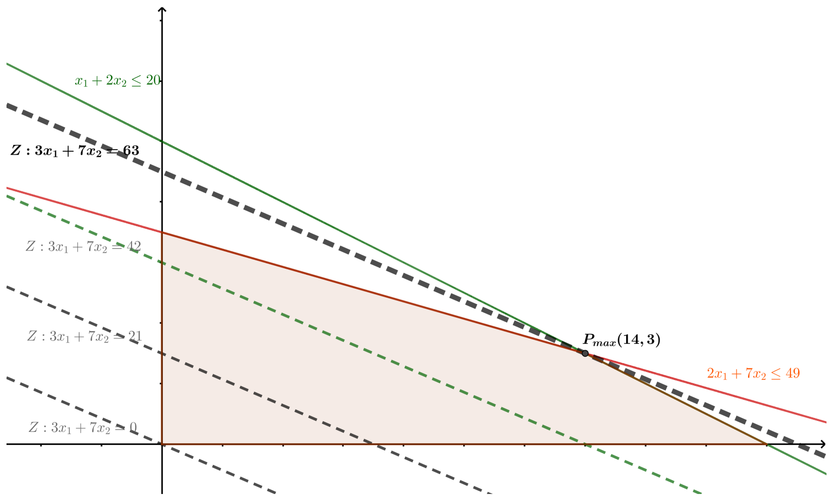


Figura 12: Maximização da função objetivo

Como pode ser observado pela Figura 12, $z = 63$ é o valor máximo para z que satisfaz as restrições do problema. Portanto, as variáveis que fornecem a maximização do problema são: $x_1 = 14$ e $x_2 = 3$.

5.1.2 Resolução pelo Método Algébrico

Para converter as inequações em equações, deve-se adicionar variáveis de folga y_1 e y_2, não negativas, de modo a garantir que os valores de x_1 e x_2 respeitem sempre os permitidos para a inequação inicial. Portanto, o problema pode ser reescrito da seguinte forma:

Maximar

$$Z = 3x_1 + 7x_2$$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 20 \tag{11}$$

$$2x_1 + 7x_2 + y_2 = 49 \tag{12}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

Considerando o problema com 4 variáveis, para determinar possíveis pontos de intersecção em um plano atribui-se valor 0 duas a duas variáveis. O que fornece 6 possíveis pontos de intersecção.

- atribuindo valor 0 as variáveis x_1 e x_2, de (11) e (12), obtemos:

$$\begin{cases} y_1 = 20 \\ y_2 = 49 \end{cases}$$

Portanto, o ponto A(0,0) é um ponto de intersecção viável.

- atribuindo valor 0 as variáveis x_1 e y_1, de (11) e (12), obtemos:

$$\begin{cases} 2x_2 = 20 \\ 7x_2 + y_2 = 49 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} x_2 = 10 \\ y_2 = -21 \end{cases}$$

Como y_2 é negativo, viola uma uma das restrições do problema, e portanto, o ponto de intersecção E(0,10) é inviável.

- atribuindo valor 0 as variáveis x_1 e y_2, de (11) e (12), obtemos:

$$\begin{cases} 2x_2 + y_1 = 20 \\ 7x_2 = 49 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

Portanto, o ponto B(0,7) é um ponto de intersecção viável.

- atribuindo valor 0 as variáveis y_1 e y_2, de (11) e (12), obtemos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 20 \\ 2x_1 + 7x_2 = 49 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = 14 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Portanto, o ponto C(14,3) é um ponto de intersecção viável.

- atribuindo valor 0 as variáveis y_1 e x_2, de (11) e (12), obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = 20 \\ 2x_1 + y_2 = 49 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = 20 \\ y_1 = 9 \end{cases}$$

Portanto, o ponto D(20,0) é um ponto de intersecção viável.

- atribuindo valor 0 as variáveis x_2 e y_2, de (11) e (12), obtemos:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 20 \\ 2x_1 = 49 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = 24,5 \\ y_1 = -4,5 \end{cases}$$

Como y_1 é negativo, viola uma uma das restrições do problema, e portanto, o ponto de intersecção E(24.5 , 0) é inviável.

Substituindo os pontos extremos viáveis na função objetivo, $Z = 3x_1 + 7x_2$, obtemos:

Ponto extremos	Valor da Função Objetivo
A(0,0)	0
B(0,7)	49
C(14,3)	63
D(20,0)	60

Logo, a solução ótima que maximiza o problema é $x_1 = 14$ e $x_2 = 3$. Obtendo para a função objetivo o valor de, $Z = 63$.

5.1.3 Resolução pelo Metódo Simplex

Execução manual do algoritmo

Utilizando Tableu, método que consiste em colocar as informações organizadas em tabela, e reescrevendo as equações, adicionando variáveis de folga y_1 e y_2, não negativas, temos:

Maximizar

$$Z = 3x_1 + 7x_2 + y_1 + y_2$$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + y_1 = 20 \tag{13}$$

$$2x_1 + 7x_2 + y_2 = 49 \tag{14}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

Portanto, o Tableu inicial é:

	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	0
Z	1	-3	-7	-1	-1	
y_1	0	1	2	1	0	20
y_2	0	2	7	0	1	49

O Tableu, pode ser trabalhado como uma matriz, e o objetivo é encontrar uma matriz identidade referente as três primeiras colunas, para então extrair desse Tableu os valores de cada uma das variáveis do problema. A última coluna da tabela pode ser vista como uma matriz solução.

Como $Z_j - c_j > 0$, deve-se escolher uma variável para entrar na base. Sendo $Z_3 - c_3$ a de maior valor, x_2 entra na base.

	Z	x_1	x_2	y_1	y_2		
Z	1	-3	-7	-1	-1	0	0
y_1	0	1	2	1	0	20	$\frac{20}{2}$
y_2	0	2	7	0	1	49	$\frac{49}{7}$

Como $\frac{49}{7} = 7$ é menor do que $\frac{20}{10} = 10$, a variável y_2 sai da base. Como o valor do pivô é 7, devemos igualá-lo a um, e posteriormente anular os demais componentes da respectiva coluna.

- atribuindo o valor 1 ao pivô 7 da terceira linha:

	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	
Z	1	-3	-7	-1	-1	0
y_1	0	1	2	1	0	20
y_2	0	$\frac{2}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	7

- anulando os demais componentes da respectiva coluna:

	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	
Z	1	-1	0	-1	0	49
y_1	0	$\frac{3}{7}$	0	1	$\frac{2}{7}$	6
x_2	0	$\frac{2}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	7

Como $z_1 - c_1 = 1$ é positivo, x_1 é candidata a entrar na base.

	Z	x_1	x_2	y_1	y_2		
Z	1	-1	0	-1	0	49	
y_1	0	$\frac{3}{7}$	0	1	$\frac{2}{7}$	6	$\frac{42}{3}$
x_2	0	$\frac{2}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	7	$\frac{49}{2}$

Como $\frac{42}{3} = 14$ é menor do que $\frac{49}{2} = 24,5$, a variável y_1 sai da base. Como o valor do pivô é $\frac{3}{7}$ devemos igualá-lo a um, e posteriormente anular os demais componentes da respectiva coluna.

- atribuindo o valor 1 ao pivô $\frac{3}{7}$ da segunda linha:

	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	
Z	1	-1	0	-1	0	49
y_1	0	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	14
x_2	0	$\frac{2}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	7

- anulando os demais componentes da respectiva coluna:

	Z	x_1	x_2	y_1	y_2	
Z	1	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	63
x_1	0	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	14
x_2	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3

Concluindo-se então que a solução ótima é:

$$Z = 63$$

$$x_1 = 14$$

$$x_2 = 3$$

Resolução computacional

O software LINDO 6.1 Educational foi utilizado para exemplificar a solução do problema pelo método computacional.

Em um primeiro momento, o modelo do problema é escrito na interface do programa, como apresentado na Figura 13.

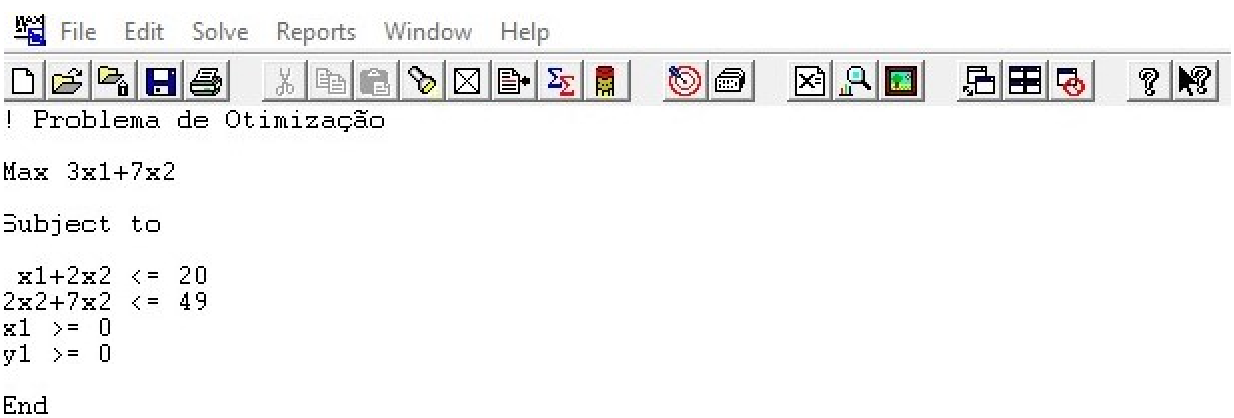
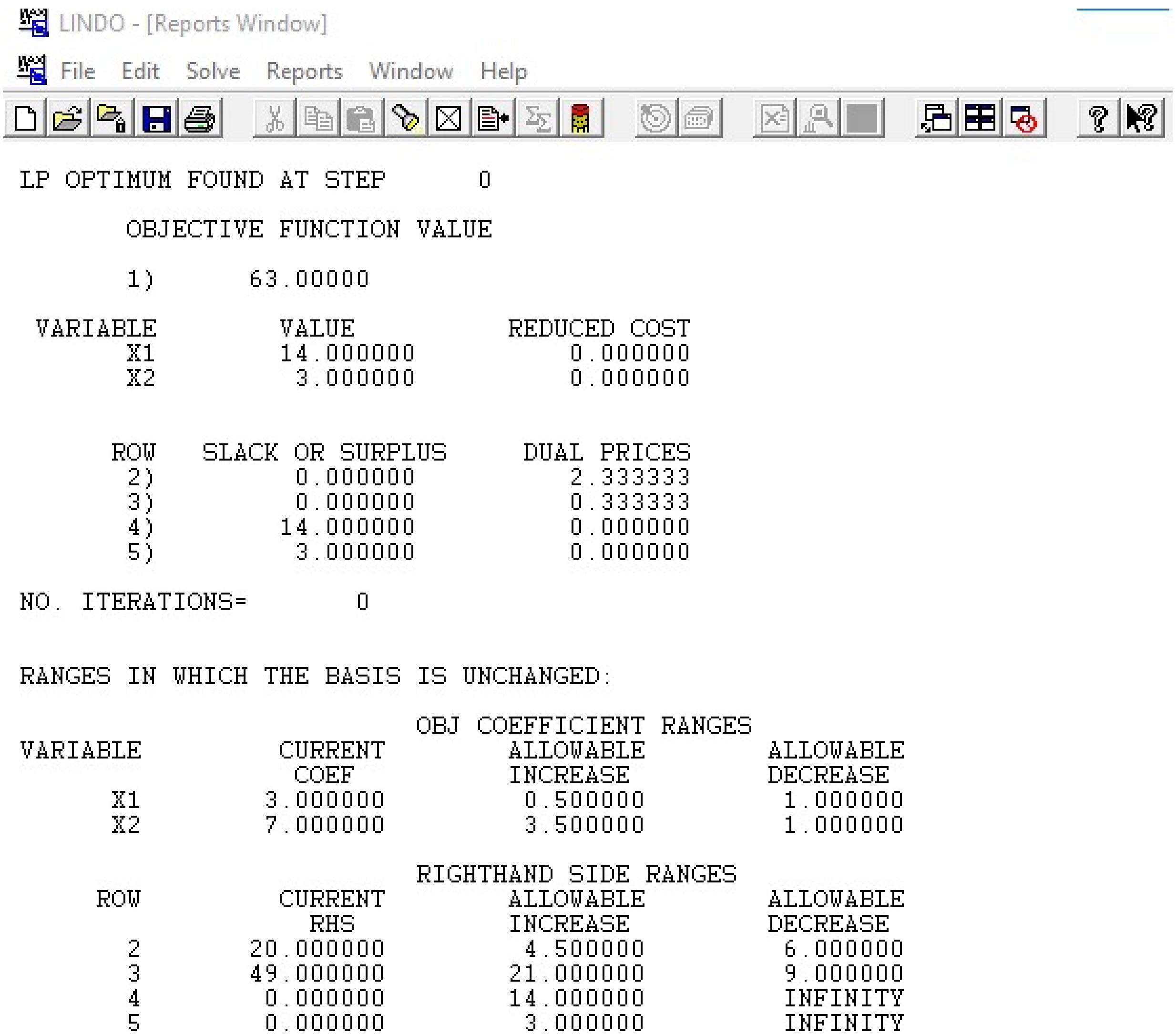


Figura 13: Lançamento problema no Lindo 6.1

Então, executa-se o comando de resolver no programa, e o mesmo fornece o resultado, como apresentado na Figura 14.

Conforme observado pela Figura 14, as variáveis que retornam solução ótima são $x_1 = 14$ e $x_2 = 3$. Obtendo para a função objetivo o valor máximo, $Z = 63$.



```
LINDO - [Reports Window]
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      63.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1        14.000000          0.000000
       X2         3.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          2.333333
       3)         0.000000          0.333333
       4)        14.000000          0.000000
       5)         3.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       0


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      X1        3.000000         0.500000         1.000000
      X2        7.000000         3.500000         1.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE         DECREASE
       2       20.000000         4.500000         6.000000
       3       49.000000        21.000000         9.000000
       4        0.000000        14.000000         INFINITY
       5        0.000000         3.000000         INFINITY
```

Figura 14: Solução através do software Lindo 6.1

5.1.4 Resultado

Como esperado para todo problema, o resultado da otimização é o mesmo, independente do método de resolução. Portanto, a solução ótima do problema apresentado é:

$$Z = 63$$

$$x_1 = 14$$

$$x_2 = 3$$

5.2 Problema de minimização de custo de transporte

Desenvolveremos um problema, de autoria própria, com caráter mais prático e que apresente um maior número de variáveis, de forma a evidenciar a importância da utilização de software computacional na programação linear.

Exemplo 5.1 *Considere uma indústria que possua 4 fábricas em diferentes regiões e que deve transportar mercadorias para 9 centros comerciais (cc) localizados em diferentes regiões. Busca-se a minimização dos custos com a logística de fornecimento dos produtos dessa indústria. Sabe-se que cada uma das fábricas possui uma capacidade produtiva máxima e que o custo de transporte das mercadorias varia em cada uma das situações como demonstrado na tabela à seguir:*

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Demanda mínima
cc1	R$ 0,97/un	R$ 1,02/un	R$ 0,98/un	R$ 1,01/un	8500 un
cc2	R$ 0,99/un	R$ 1,00/un	R$ 0,97/un	R$ 1,03/un	9100 un
cc3	R$ 1,03/un	R$ 1,05/un	R$ 0,96/un	R$ 1,02/un	10200 un
cc4	R$ 0,95/un	R$ 1,07/un	R$ 0,97/un	R$ 1,01/un	9700 un
cc5	R$ 1,05/un	R$ 1,00/un	R$ 1,03/un	R$ 1,01/un	11300 un
cc6	R$ 1,10/un	R$ 1,12/un	R$ 1,09/un	R$ 1,07/un	15900 un
cc7	R$ 0,92/un	R$ 0,95/un	R$ 0,93/un	R$ 0,99/un	7200 un
cc8	R$ 0,97/un	R$ 1,03/un	R$ 0,95/un	R$ 1,01/un	9800 un
cc9	R$ 1,01/un	R$ 0,98/un	R$ 1,02/un	R$ 0,97/un	10000 un
Capacidade produtiva	22700 un	28200 un	27100 un	29400 un	

Da tabela, podemos identificar a demanda mínima que cada centro comercial necessita, o custo de transporte por unidade para o envio de mercadoria de cada fábrica para cada centro comercial. Podemos identificar ainda, a capacidade produtiva máxima de cada fábrica.

Para resolver o problema, necessita-se primeiramente modelar o problema, para posteriormente resolvê-lo.

5.2.1 Modelando o problema

Existem 36 diferentes rotas de transportes, saindo de 4 fábricas para chegar em 9 diferentes centros comerciais. De modo a facilitar a compreensão das váriaveis do problema, adotou-se o seguinte: $x_{i,j}$:quantidade de produtos transportados da fábrica "i"ao centro comercial "j". Portanto, como exemplo $x_{1,2}$ é a quantidade de produtos transportados da fábrica 1 para o centro comercial 2.

Após identificar as 36 váriaveis, pode-se perceber que a função objetivo, é a soma de cada uma das variáveis com seus respectivos coeficientes, portanto, temos a seguinte função objetivo z:

$z = 0.97x_{11} + 1.02x_{21} + 0.98x_{31} + 1.01x_{41} + 0.99x_{12} + 1.00x_{22} + 0.97x_{32} + 1.03x_{42} + 1.03x_{13} + 1.05x_{23} + 0.96x_{33} + 1.02x_{43} + 0.95x_{14} + 1.07x_{24} + 0.97x_{34} + 1.01x_{44} + 1.05x_{15} + 1.00x_{25} + 1.03x_{35} + 1.01x_{45} + 1.10x_{16} + 1.12x_{26} + 1.09x_{36} + 1.07x_{46} + 0.92x_{17} + 0.95x_{27} + 0.93x_{37} + 0.99x_{47} + 0.97x_{18} + 1.03x_{28} + 0.95x_{38} + 1.01x_{48} + 1.01x_{19} + 0.98x_{29} + 1.02x_{39} + 0.97x_{49}$

Além disso, deve-se garantir que a quantidade de produtos que sai de cada fábrica, não seja maior do que a capacidade produtiva da mesma, portanto, somando o que cada fábrica envia para todos os centros comerciais, deve-se obter uma quantidade no máximo igual a quantidade que ela pode produzir. Tem-se, portanto, as seguintes restrições em relação a capacidade produtiva:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} <= 22700$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} <= 28200$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} <= 27100$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} <= 29400$$

Deve-se atentar ainda que a quantidade de produtos transportada, assim como a quantidade produzida, devem sempre ser não negativas.

Por fim, deve-se garantir o atendimento da demanda mínima de cada centro comercial. Somando a quantidade de produtos que todas as fábricas enviam para o centro comercial deve-se obter, pelo menos, a quantidade mínima que ele necessita. Portanto, chega-se as seguintes restrições:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} >= 8500$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} >= 9100$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} >= 10200$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} >= 9700$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} >= 11300$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} >= 15900$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} >= 7200$$

$$x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} >= 9800$$

$$x_{19} + x_{29} + x_{39} + x_{49} >= 10000$$

Na Figura 15 é apresentada o lançamento da modelagem do problema no programa LINDO 6.1.

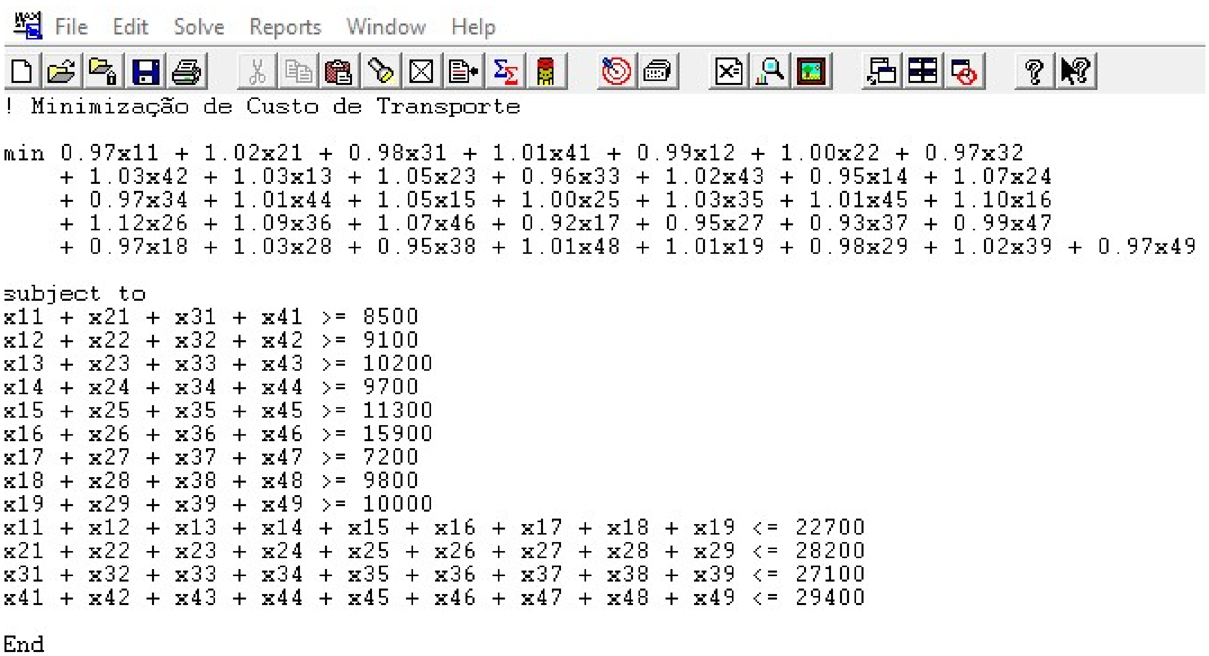


Figura 15: Lançamento da Modelagem no LINDO 6.1

5.2.2 Resolução do problema

Utiliza-se do método computacional, por meio do programa LINDO 6.1 para resolução do problema de otimização. O resultado encontrado pode ser visto na Figura 16:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP     11

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      90167.00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X11       8500.000000          0.000000
      X21          0.000000          0.020000
      X31          0.000000          0.010000
      X41          0.000000          0.010000
      X12          0.000000          0.020000
      X22       2000.000000          0.000000
      X32       7100.000000          0.000000
      X42          0.000000          0.030000
      X13          0.000000          0.070000
      X23          0.000000          0.060000
      X33      10200.000000          0.000000
      X43          0.000000          0.030000
      X14       9700.000000          0.000000
      X24          0.000000          0.090000
      X34          0.000000          0.020000
      X44          0.000000          0.030000
      X15          0.000000          0.080000
      X25      11300.000000          0.000000
      X35          0.000000          0.060000
      X45          0.000000          0.010000
      X16          0.000000          0.060000
      X26          0.000000          0.050000
      X36          0.000000          0.050000
      X46      15900.000000          0.000000
      X17       4500.000000          0.000000
      X27       2700.000000          0.000000
      X37          0.000000          0.010000
      X47          0.000000          0.040000
      X18          0.000000          0.020000
      X28          0.000000          0.050000
      X38       9800.000000          0.000000
      X48          0.000000          0.030000
      X19          0.000000          0.070000
      X29          0.000000          0.010000
      X39          0.000000          0.080000
      X49      10000.000000          0.000000
```

Figura 16: Solução do exemplo 4.2

Portanto, a solução ótima do problema, que retorna o menor valor de transporte que atende as necessidades definidas, é R$ 90.167,00. O que significa que o menor gasto que se pode ter com o transporte na situação fornecida, é esse valor.

A solução fornece ainda algumas informações extras que podem ser utilizadas para uma futura análise. Como por exemplo, o modo como os centro comerciais são abastecidos:

- o centro comercial 1 é abastecido exclusivamente pela fábrica 1;
- o centro comercial 2 recebe 2000 produtos da fábrica 2 e 7100 da fábrica 3;
- o centro comercial 3 é abastecido exclusivamente pela fábrica 3;
- o centro comercial 4 é abastecido exclusivamente pela fábrica 1;
- o centro comercial 5 é abastecido exclusivamente pela fábrica 2;
- o centro comercial 6 é abastecido exclusivamente pela fábrica 4;
- o centro comercial 7 recebe 4500 produtos da fábrica 1 e 2700 da fábrica 3;
- o centro comercial 8 é abastecido exclusivamente pela fábrica 3;
- o centro comercial 9 é abastecido exclusivamente pela fábrica 4.

Pode-se analisar ainda, a quantidade global de que saiu de cada fábrica:

- a fábrica 1 distribuiu 22.700 produtos, portanto, toda sua produção;
- a fábrica 1 distribuiu 16.000 produtos, portanto, 12.200 produtos a menos do que sua capacidade produtiva;
- a fábrica 1 distribuiu 27.100 produtos, portanto, toda sua produção.
- a fábrica 1 distribuiu 25.900 produtos, portanto, 4.000 produtos a menos do que sua capacidade produtiva.

6 Curiosidade

A metodologia desenvolvida nesta seção tem como objetivo evidenciar que ao trabalhar com inequações lineares o conjunto de soluções do problema está contido em um conjunto convexo.

Lemabrando que conjunto convexo é uma região onde, para cada par de pontos pertencentes a essa região, qualquer ponto pertencente ao segmento de reta que os une, estará dentro dessa mesma região. Geometricamente, é representado por uma polígono em que uma reta que ligue dois pontos desse polígono estará interamente intrínseca a esse polígono.

Com auxílio do GEOGEBRA, utilizaremos algumas imagens para auxiliar nessa compreensão. Para tal, faremos uso de algumas equações:

$$y_1 = x + 3 \tag{15}$$

$$y_2 = -x + 7 \tag{16}$$

$$y_3 = 5x - 9 \tag{17}$$

$$y_4 = -\frac{1}{2}x + 4 \tag{18}$$

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Visando a aplicação em problemas de Programação Linear, o intuito é trabalhar com inequações e analisar as possíveis regiões viáveis. Para tal, a seguir serão representadas todas as possibilidades de inequações baseadas nas Esquações (15) a (18). E então, identificar que quando existe solução para o problema, ela está contida em um polígono convexo.

Considerando as Equações (15) a (18) todas como maior ou igual, temos:

$$y_1 \geq x + 3$$
$$y_2 \geq -x + 7$$
$$y_3 \geq 5x - 9$$
$$y_4 \geq -\frac{1}{2}x + 4$$

Como apresentado na Figura 17, a solução pertence a uma região ilimitada. Porém é possível detectar um polígono convexo se for feita uma análise com um valor máximo de y.

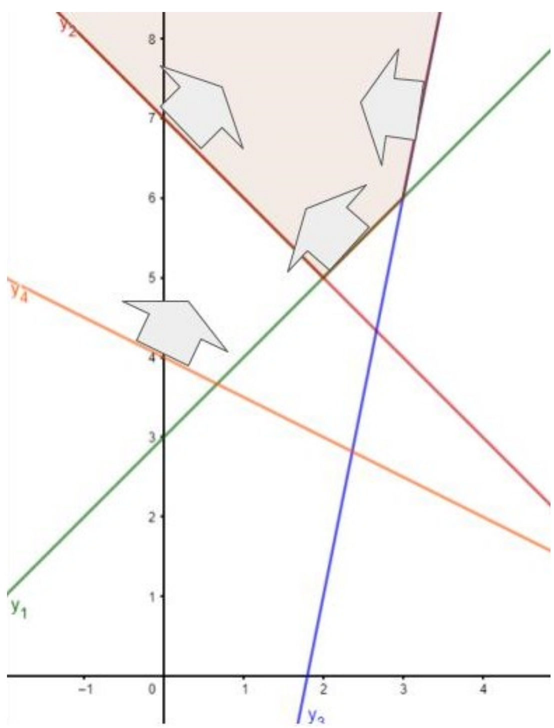


Figura 17: União das inequações - Representação gráfica

Considerando as Esquações (15), (16),(17) como maior ou igual, e a (18) como menor ou igual, temos:

$$y_1 \geq x + 3$$
$$y_2 \geq -x + 7$$
$$y_3 \geq 5x - 9$$
$$y_4 \leq -\frac{1}{2}x + 4$$

Como apresentado na Figura 18, não há região factível para a solução do problema.

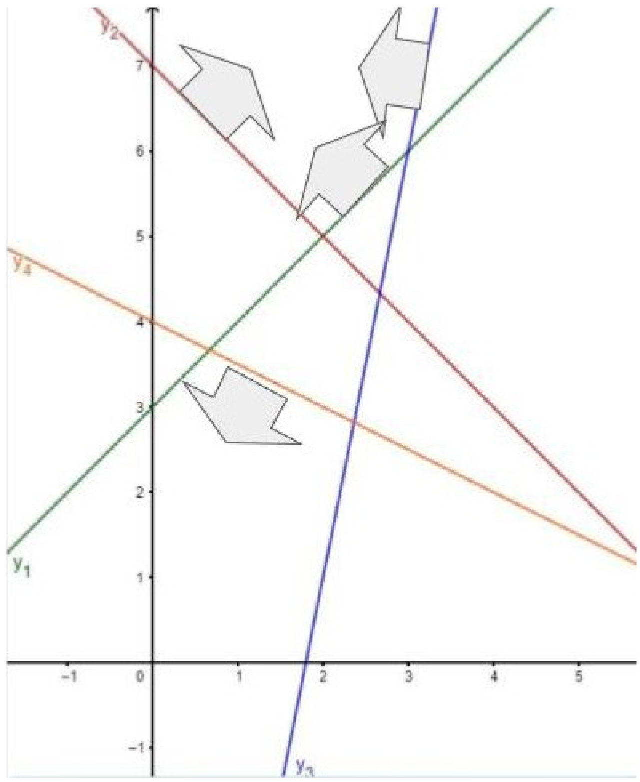


Figura 18: União das inequações - Representação gráfica

Considerando as Equações (15), (16),(18) como maior ou igual, e a (17) como menor ou igual, temos:

$$y_1 \geq x + 3$$
$$y_2 \geq -x + 7$$
$$y_3 \leq 5x - 9$$
$$y_4 \geq -\frac{1}{2}x + 4$$

Como apresentado na Figura 19, a solução pertence a uma região ilimitada. Porém é possível detectar um polígono convexo se for feita uma análise com um valor máximo de y.

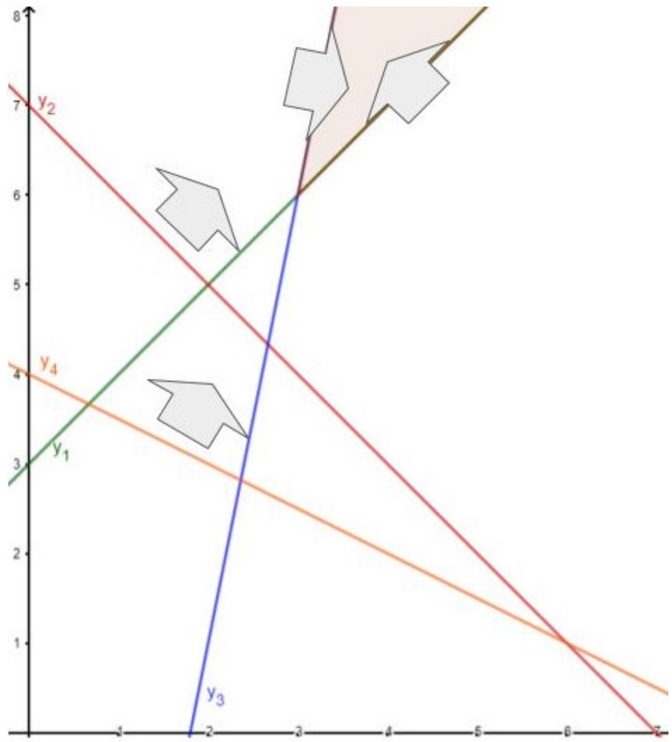


Figura 19: União das inequações - Representação gráfica

Considerando as Equações (15), (17), (18), como maior ou igual, assim como $x \geq 0$ e a (16) como menor ou igual, temos:

$$y_1 \geq x + 3$$
$$y_2 \leq -x + 7$$
$$y_3 \geq 5x - 9$$
$$y_4 \geq -\frac{1}{2}x + 4$$
$$x \geq 0$$

Como apresentado na Figura 20, a solução pertence a uma região factível limitada. onde é possível detectar um polígono convexo.

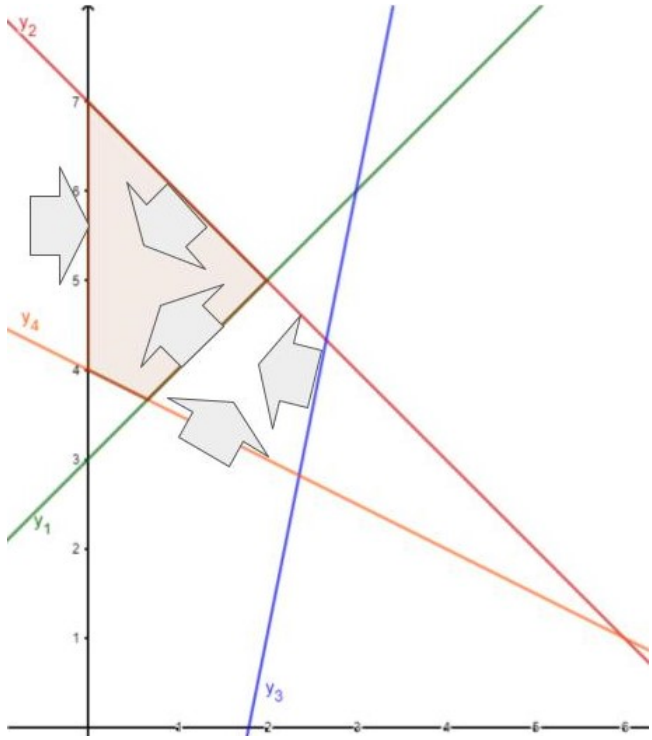


Figura 20: União das inequações - Representação gráfica

Considerando as Equações (16), (17), (18) como maior ou igual e a (15) como menor ou igual, temos:

$$y_1 \leq x + 3$$
$$y_2 \geq -x + 7$$
$$y_3 \geq 5x - 9$$
$$y_4 \geq -\frac{1}{2}x + 4$$

Como apresentado na Figura 21, a solução pertence a uma região limitada, onde é possível detectar um polígono convexo.

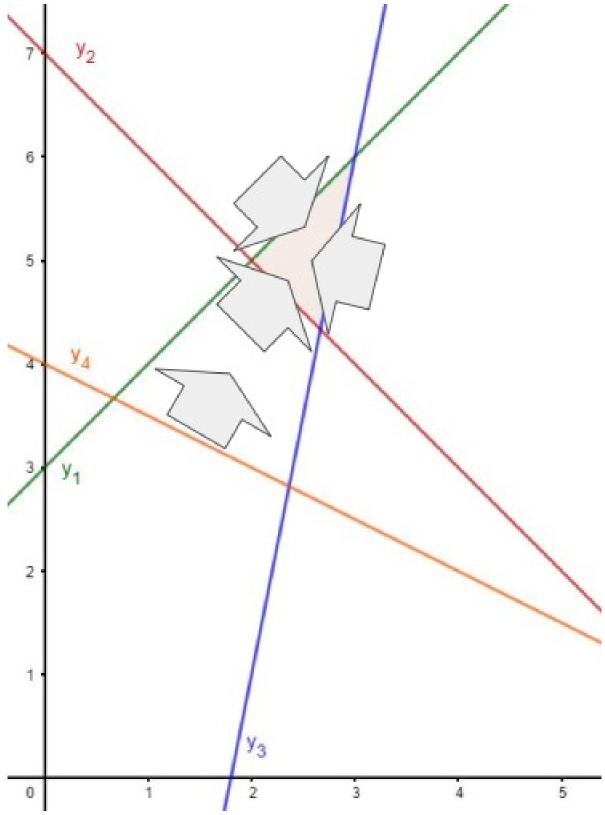


Figura 21: União das inequações - Representação gráfica

Atribuindo, de modo análogo, relações de maior ou igual e de menor ou igual, para as equações de modo a suprir todas as possibilidades, tem-se sempre um conjunto convexo quando a região factível.
Na Figura 22 são apresentados todos os conjuntos convexos possíveis com as equações dadas.

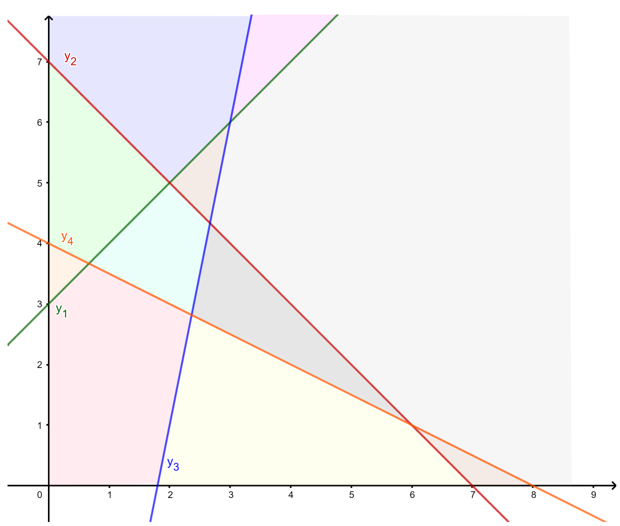


Figura 22: Representação conjuntos convexos

Ao realizar a análise da possibilidade de se construir um polígono não convexo delimitado por inequações lineares, percebe-se que para que o mesmo seja formado deveria descumprir a relação estabelecida em algum trecho da inequação.

Na Figura 23 é apresentado um polígono não convexo, na qual faremos uma análise de como a relação estabelecida pela inequação não é respeitada em alguns pontos para sua construção.

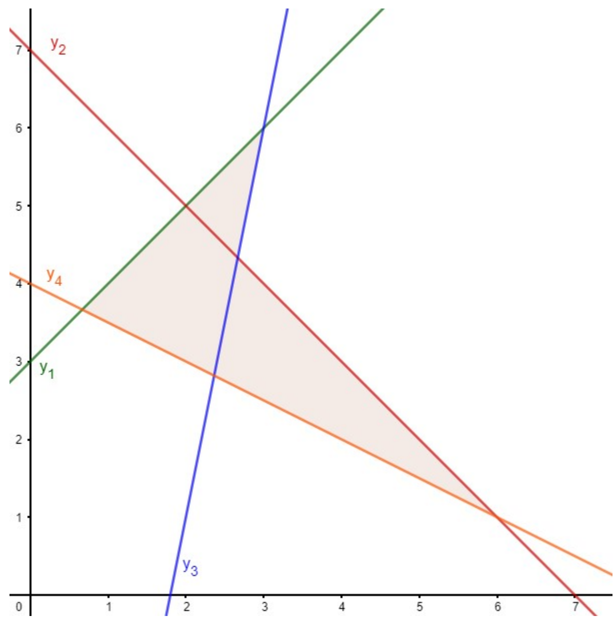


Figura 23: Representação polígono não convexo

Como apresentado na Figura 24, podemos perceber que os pontos P_1 e P_2 não podem respeitar ao mesmo tempo a relação estabelecida pela inequação y_3, enquanto o primeiro só é válido para relação maior ou igual, o segundo é válido para relação menor ou igual. Portanto, respeitando o que é definido pelas inequações lineares, não é possível construir o polígono não convexo representado na figura.

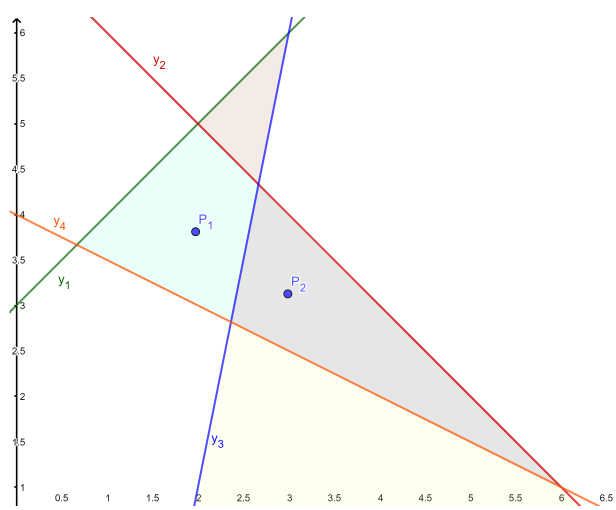


Figura 24: Polígono não convexo

Na Figura 25 é apresentada situação análoga, agora analisando em relação a inequação y_2. Os pontos P_1 e P_2 não podem respeitar ao mesmo tempo a relação estabelecida pela inequação y_2, enquanto o primeiro só é válido para relação menor ou igual, o segundo é válido para relação maior ou igual.

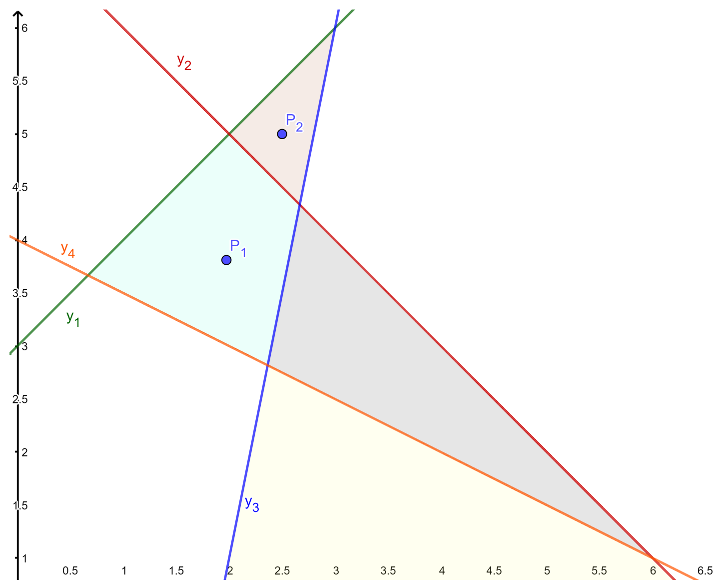


Figura 25: Polígono não convexo

Como representado na Figura 26, o polígono não convexo, em questão, para ser construído precisou descumprir simultaneamente as relações estabelecidas por duas inequações do problema.

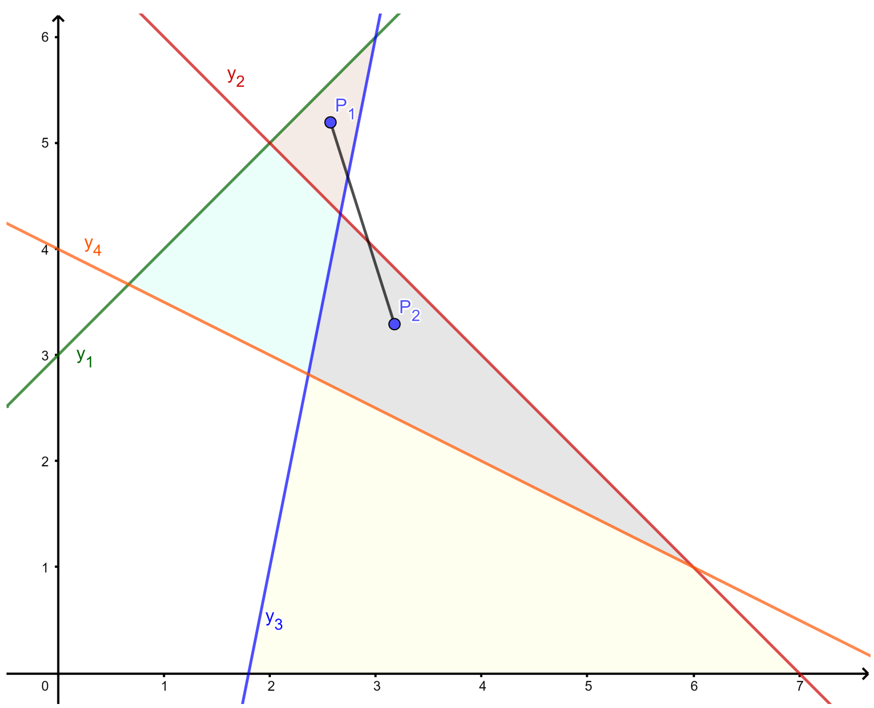


Figura 26: Polígono não convexo

Como as retas formadas pela representação gráfica de uma inequação linear, baseada em funções de primeiro grau, são segmentos infinitos, pode-se afirmar que não é possível construir um polígono não convexo respeitando as relação estabelecidas por essa inequações.

Para que o polígono seja não convexo, ele necessariamente precisa cruzar a linha de igualdade da equação que dá origem a inequação, e ao cruzar essa linha, ele passa de uma região de valores maiores que a igualdade para uma região de valores menores do que a igualdade, ou vice-versa.

Com isso, podemos enfatizar que um problema de Programação Linear, por ser formulado com inequações lineares, se apresentar solução factível, a mesma estará contida em um conjunto convexo.

Vale destacar a importância de compreender bem alguns conceitos matemáticos, baseados em conteúdo proveniente do Ensino Médio, que servem de base para a melhor entendimento da Programação Linear.

7 Base aplicável ao Ensino Médio

Considerando a vasta gama de matérias, provenientes do ensino médio, que são aplicadas ao longo do desenvolvimento de problemas de Programação Linear, destaca-se a importância de compreender bem alguns conceitos matemáticos que servem de base para um melhor entendimento dos métodos.

Nesta seção, pretende-se desenvolver dois assuntos que podem ser abordados pelos professores, no ensino médio, que possibilitam apontar para o aluno onde tais conteúdos podem ser aplicados no mundo real. Como exemplo, em casos de problemas de maximizar o lucro ou minimizar as perdas.

7.1 Equações de primeiro grau: Retas

Equação é uma sentença matemática que envolve uma ou mais incógnitas e contém uma igualdade. Ao resolvê-las, busca-se encontrar os valores que satisfazem a relação de igualdade das relações algébricas. E, quando essas equações são de primeiro grau, o conjunto de soluções forma uma reta no plano cartesiano.

Utilizando-se as equações (15) a (18) apresentadas na seção anterior, e com auxílio de imagens geradas no GEOGEBRA, busca-se compreender o comportamento dessas retas.

Na Figura 27 é apresentada a representação gráfica das equações no plano cartesiano.

Figura 27: Representação gráfica das Equações (15) a (18)

Pode-se perceber que a representação gráfica de todas as equações analisadas formaram retas no plano cartesiano. Isso se deve ao fato da linearidade das equações. Característica das equações de primeiro grau que analisaremos a seguir.

Devido a linearidade, todas as equações trabalhadas, de primeiro grau, são da forma: $y = ax+b$, e podemos extrair, portanto, algumas informações das representações gráficas dessas equações.

O valor associado a variável b, determina um deslocamento da reta, como exemplificado nas Figura 28.

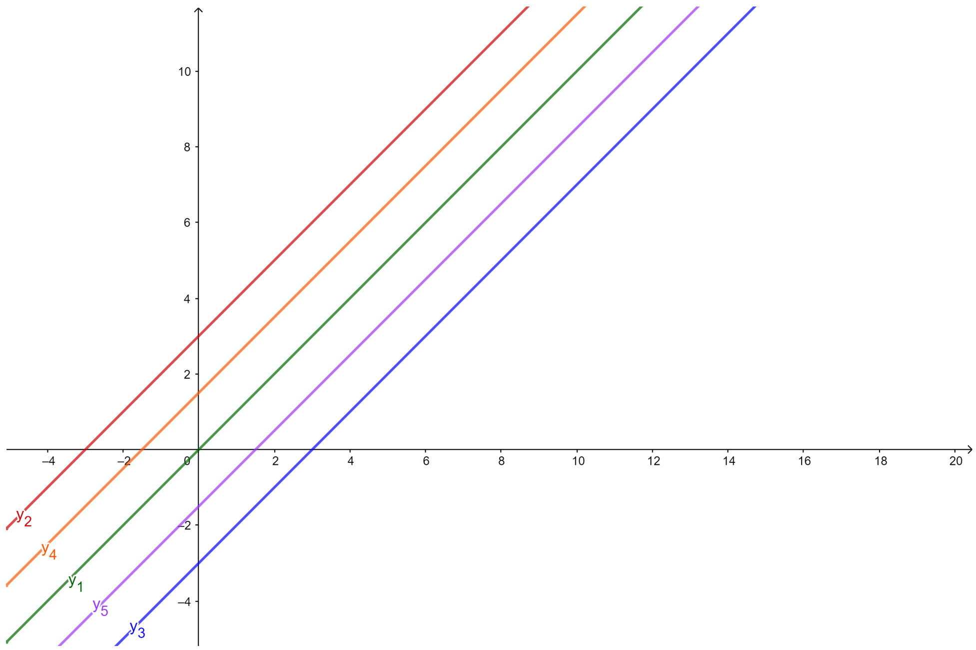


Figura 28: Representação gráfica das variações de b em $y = ax + b$

Pode-se perceber que o que diferencia as equações y_1, y_2, y_3, y_4, é o valor associado a variável b da equação característica de primeiro grau $y = ax + b$. O efeito gerado por esse fato, é uma translação da reta que representa graficamente a equação.

Podemos confirmar a validade de tal afirmação se analisarmos dados genéricos. Considere:

$$y_1 = x + b1$$

$$y_2 = x + b_2$$

Sendo $b_2 = b_1 + c$, onde c é uma constante real qualquer.
Ao atribuir um valor qualquer para x, nas duas equações simultaneamente, teremos que y_2 será sempre maior ou menor do que y_1 em um valor igual ao módulo de c. Como o valor de c é constante, a distância de y_2 para y_1 será sempre constante, e igual a c.

Por se tratar de equações características de primeiro grau, podemos extrair, ainda, a informação referente a variável a, que representa a proporção com que y varia em relação a x. Ou, em outras palavras, a inclinação da reta na representação gráfica. Como representado na Figura 29.

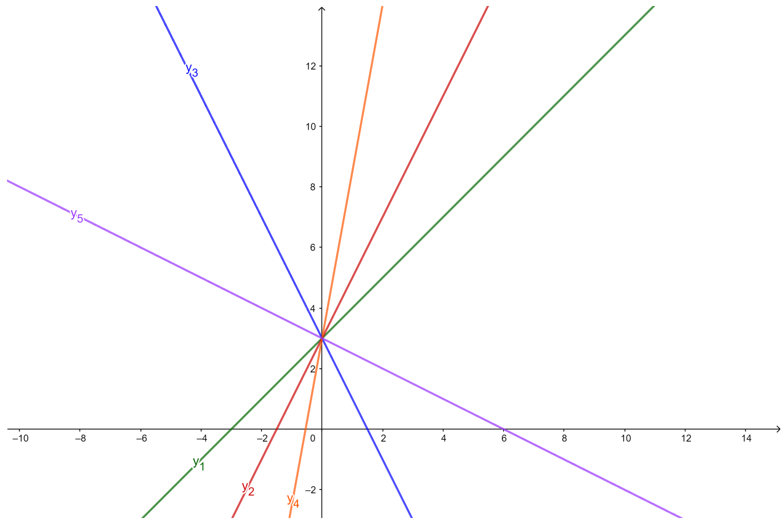


Figura 29: Representação gráfica das variações de a em $y = ax + b$

Pode-se perceber que o que diferencia as equações y_1, y_2, y_3, y_4, é o valor associado a variável a da equação característica de primeiro grau $y = ax + b$. O efeito gerado por esse fato, é uma rotação da reta em torno do eixo que representa graficamente a equação.

Vamos analisar separadamente as seguintes equações:

$$y_1 = x + 3 \tag{19}$$

$$y_2 = 2x + 3 \tag{20}$$

Na Equação (19), tem-se que para cada unidade de variação em x, y sofre uma variação com a mesma unidade. Como é apresentado na Figura 30.

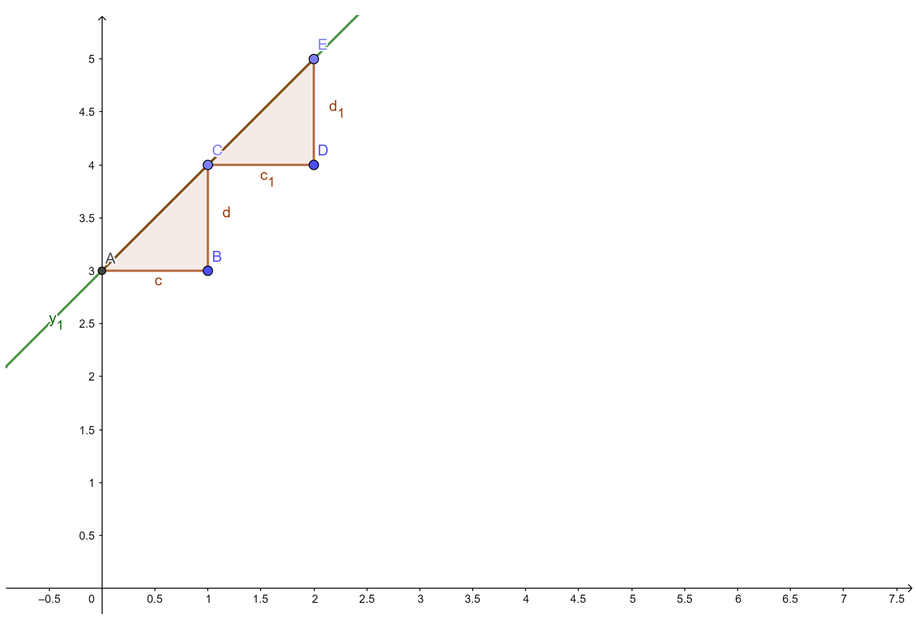


Figura 30: Representação gráfica das variações da Equação (19)

Na Equação (20), tem-se que para cada unidade de variação em x, y sofre uma variação de duas unidades. Como é apresentado na Figura 31.

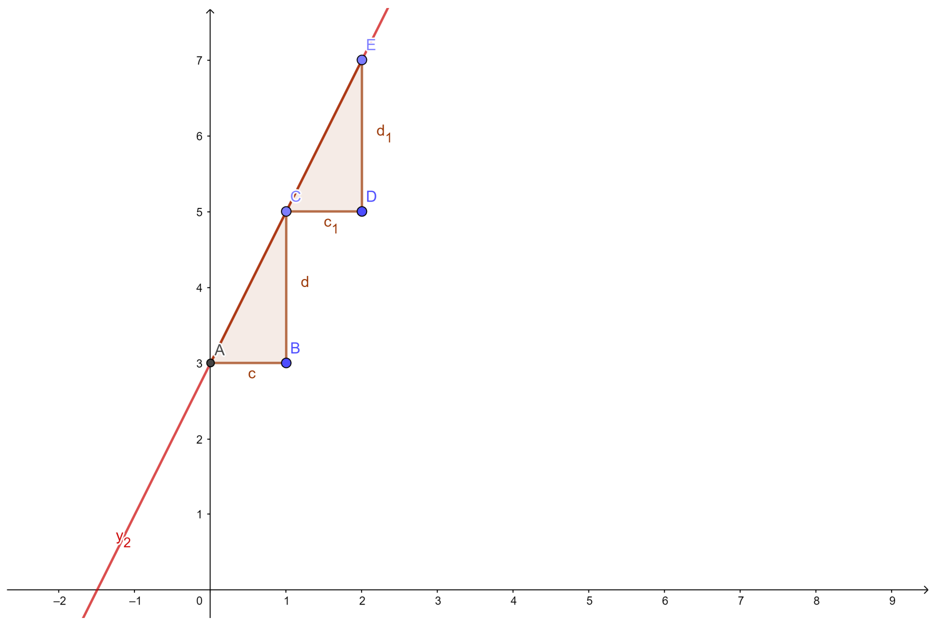


Figura 31: Representação gráfica das variações da Equação (20)

Podemos confirmar a validade de tal afirmação se analisarmos dados genéricos. Considere:

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

Sendo $x_2 = x_1 + c$, onde c é uma constante real qualquer, tem-se.

$$y_2 = a(x_1 + c) + b$$

fazendo a distributiva:

$$y_2 = ax_1 + ac + b$$

Sabendo que, $y_1 = ax_1 + b$, pode-se substituir, logo:

$$y_2 = y_1 + ac$$

Portanto, modificar o valor de x em um valor c, modifica o valor de y em uma valor ac.

Concluindo, então, que independente do que for adotado como valor para a e b em uma equação de primeiro grau, tem-se sempre uma variação constante da incógnita y em relação a incógnita x. Portanto, pode-se afirmar que a representação gráfica de uma equação linear, será sempre uma reta.

7.2 Inequações

As restrições impostas aos problemas de otimização são representadas por inequações ,que assim como as equações, são uma sentenças matemáticas que envolvem uma ou mais incógnitas, porém, diferentemente, inequações são desigualdades. Quando uma inequação é de primeiro grau, seu conjunto solução se apresenta em forma de uma área delimitada pela reta no plano cartesiano.

Enquanto, graficamente, os resultados de uma equação de primeiro grau são todos os valores dispostos em uma reta, os resultados que satisfazem uma inequação de primeiro grau, são todos os valores que estão acima ou abaixo de uma reta, podendo incluir ou não os valores dispostos nessa reta.

Caso o resultado da inequação seja representado por uma expressão maior do que outra ($>$), graficamente a solução estará acima da reta. Se o resultado for representado por uma expressão menor do que outra ($<$), a solução estará abaixo da reta. Em casos que se busque relações de maior ou igual ($\geq$) e menor ou igual ($\leq$), os valores dispostos na reta são incluídos na solução.

Como a inequação de primeiro grau possui uma reta como elemento delimitador das soluções, a analise realizada na subseção anterior referente as propriedades da reta, também se aplica nessa subseção.

Utilizando como exemplo a seguinte equação de primeiro grau: $y = 2x - 3$, e o GEOGEBRA, será apresentada à seguir exemplo da solução gráfica de inequação de primeiro grau.

Na Figura 32 é apresentada a solução gráfica da equação, onde apenas os valores dispostos sobre a reta são solução para o problema.

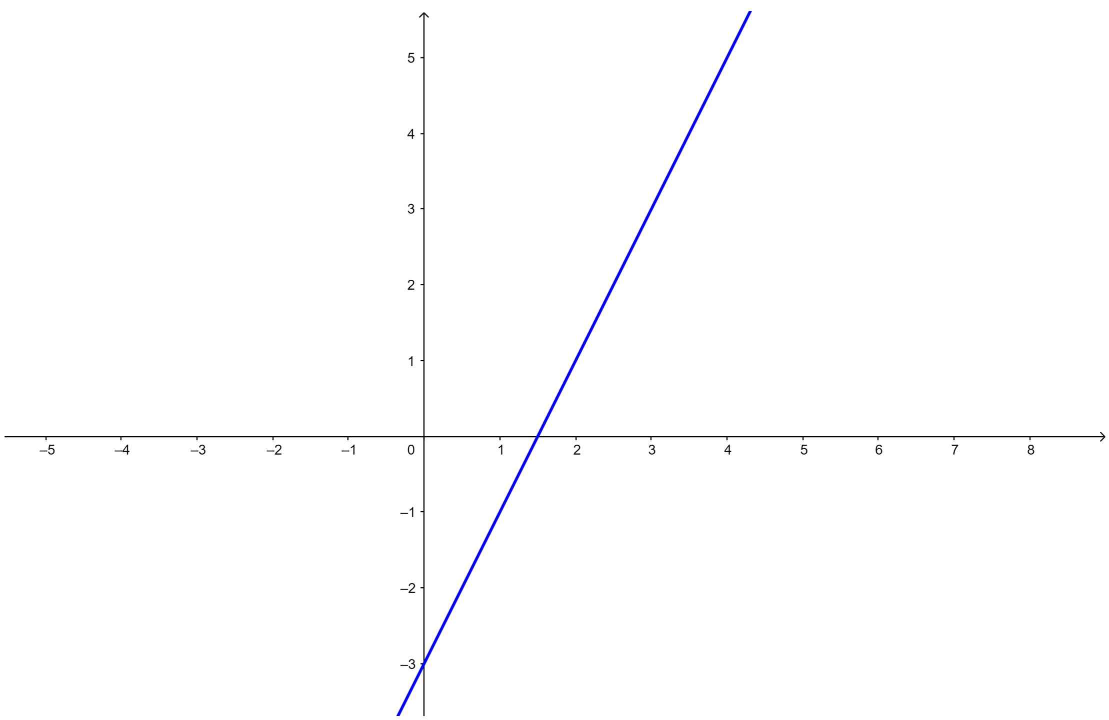


Figura 32: Representação gráfica equação y=2x-3

Caso a inequação seja baseada em uma expressão maior do que a outra, a equação $y = 2x - 3$ pode ser reescrita como: $y > 2x - 3$, e o resultado gráfico dessa inequação é apresentado na Figura 33. Nesse caso em questão, todos os valores acima da reta são solução para o problema.

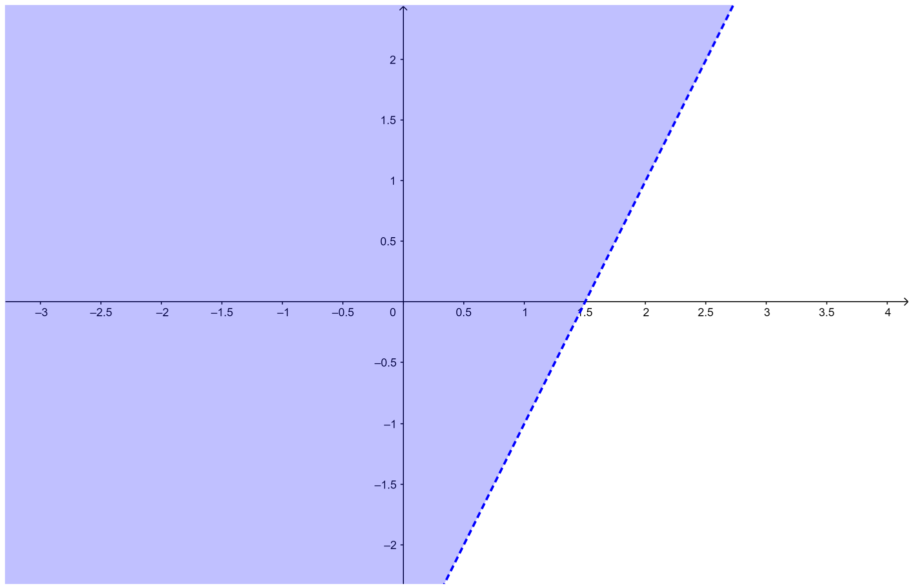


Figura 33: Inequação de primeiro grau (maior)

Caso a inequação seja baseada em uma expressão menor do que a outra, a equação $y = 2x - 3$ pode ser reescrita como: $y < 2x - 3$, e o resultado gráfico dessa inequação é apresentado na Figura34. Nesse caso em questão, todos os valores acima da reta são solução para o problema.

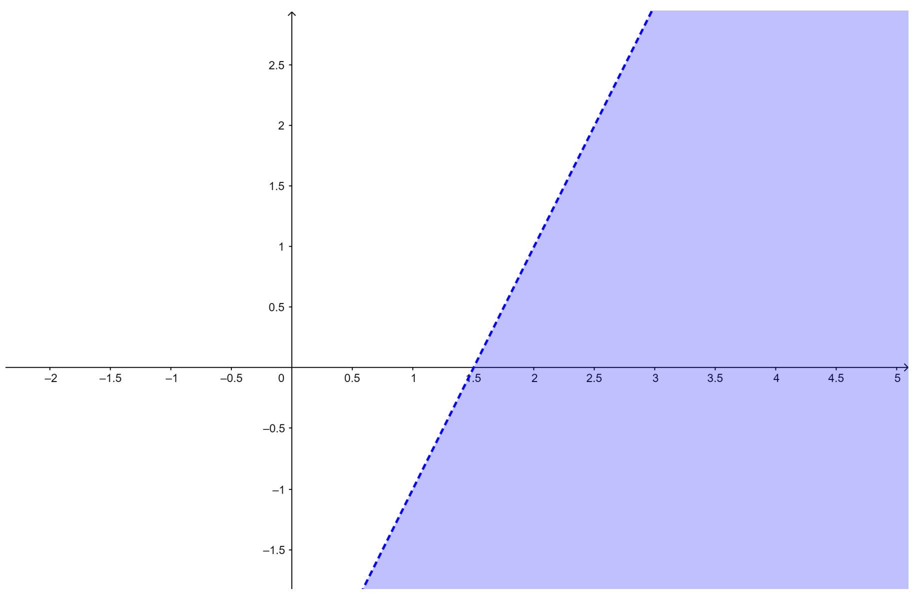


Figura 34: Inequação de primeiro grau (menor)

7.3 Sistemas Lineares

Os problemas de programação linear, envolvem um conjunto de inequações lineares que devem ser resolvidas simultaneamente, de modo que as variáveis independentes que atendam a uma das inequações, também solucionem as outras. Esse conjunto de inequações tem o nome de sistema linear. O sistema linear também pode ser formado por equações lineares, como as que dão origem às inequações.

Utilizando como exemplo as seguintes equações lineares:

$$x_1 + 2x_2 = 20 \tag{21}$$

$$2x_1 + 7x_2 = 49 \tag{22}$$

Têm se o seguinte sistema linear referente as equações (21) e (22):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 20 \\ 2x_1 + 7x_2 = 49 \end{cases}$$

A solução do sistema são os valores de x_1 e x_2 que satisfazem as duas equações:

$$\begin{cases} x_1 = 14 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Os sistemas lineares podem ser classificados quanto à solução como:

- Possível e determinado: quando admite solução única
- Possível e indeterminado: quando admite infinitas soluções.
- Impossível: quando não admite solução.

Portanto, é importante que se tenha conhecimento sobre equações de primeiro grau para balisarem o conhecimento das inequações e de sistemas lineares, que por sua vez servem de base para compreensão e estudo da programação linear.

8 Conclusão

A Programação Linear é uma ferramenta de otimização eficiente, que auxilia tomadas de decisões de forma objetiva.

Em um mundo globalizado, para lidar com a complexidade da expansão econômica, se faz necessário a utilização de métodos científicos.

A Programação Linear ao mesmo tempo que é considerada um dos principais avanços científicos do século XX, permite trabalhar de forma clara e objetiva conceitos matemáticos presentes em grades curriculares de matemática desde o ensino médio.

Foi apresentado, no presente trabalho, um estudo teórico a respeito da Programação Linear, abordando seus conceitos básicos. Apresentou-se desde a modelagem, até a obtenção do resultado de otimização.

Visando a importância do conteúdo base para resolução dos problemas, foi abordado em uma seção à parte o conteúdo referente as equações e inequações de primeiro grau. Assim como foi explorada em seção exclusiva a visualização gráfica que demonstra que a programação linear trabalha sempre com polígonos convexos.

Referências

[1] ALMEIDA, Mailton Rego. Programação linear: Uma aplicação ao problema de compras de um supermercado da cidade de Macaúbas-BA, Trabalho de Conclusão de curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia Vitória da Conquista, 2018

[2] BAZARAA, N.S.; JARVIS, J.J.; SHERALI, H.D. Linear Programming and Network Flow, 2.ed. New York, John Wiley & Sons, Singapore, 1990

[3] GIORDANO, F.R.; FOX, W. P.; HORTON, S. B. A first course in Mathematical Modeling, 5.ed. M. D. Brooks Cole, Boston, 2008.

[4] Goldbarg, Marco Cesar; Luna, Henrique Pacca L. OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA E PROGRAMAÇÃO LINEAR: Modelos e Algoritmos.2.ed. Elsevier Editora Ltda, Rio de Janeiro, 2005.

[5] HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. Introdução à pesquisa operacional. McGraw–Hill, São Paulo, 2006.

[6] Juliano S.; APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO, Dissertação, Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

[7] LACHTERMACHER, G. Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões, 1. ed. Pearson, São Paulo, 2009.

[8] MORETTI, Antônio Carlos. Programação Linear Material didático. Unicamp.

[9] PUCCINI, A. de L. Introdução a Programação Linear LTC, Rio de Janeiro, 1972.

[10] RABENSCHLAG, D. R. Pesquisa Operacional. Material didático. UFSM – Rio Grande do Sul, 2005.

[11] RODRIGUES, L.H.; AHLERT, F.; LACERDA, D. P.; CAMARGO; L.F.R.; Lima, P.N. Pesquisa operacional : programação linear passo a passo : do entendimento do problema à interpretação da solução . Editora Unisinos, São Leopoldo, 2014.

[12] SILVA, K. Modelagem matemática com Programação Linear: Uma Proposta de Trabalho no Ensino Médio, Dissertação, Mestrado em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2013.