**COLÉGIO PEDRO II**


Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Leonardo Nunes Valentim


# PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA ENVOLVENDO CONTEXTUALIZAÇÃO, MODELAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS


Rio de Janeiro

2021

Leonardo Nunes Valentim

# PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA ENVOLVENDO CONTEXTUALIZAÇÃO, MODELAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof$^a$. Dr$^a$. Marilis Bahr Karam Venceslau

Rio de Janeiro

2021

**COLÉGIO PEDRO II**

**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**

**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**

**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

V155 VALENTIM, Leonardo Nunes

Programação Linear no Ensino Médio: uma proposta envolvendo contextualização, modelagem e tecnologias digitais / Leonardo Nunes Valentim. - Rio de Janeiro, 2021.

111 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Marilis Bahr Karam Venceslau.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Programação linear. 3. Recursos computacionais. I. Venceslau, Marilis Bahr Karam. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Leonardo Nunes Valentim

PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO:
UMA PROPOSTA ENVOLVENDO CONTEXTUALIZAÇÃO, MODELAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ___/___/___.

Banca Examinadora:

---

Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Marilis Bahr Karam Venceslau (Orientadora)
Colégio Pedro II

---

Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Colégio Pedro II

---

Prof. Dr. Nelson Maculan Filho
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Helder Manoel Venceslau
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Rio de Janeiro

2021

Dedico esta monografia aos meus pais, minha família que me apoiaram em todos os momentos da minha vida, que estiveram ao meu lado, me ajudaram e nunca mediram esforços para me ajudar. Aos meus professores que me ensinaram que por mais que achamos que o nosso conhecimento já está bem profundo, estamos enganados pois o conhecimento é algo que está sempre se renovando. Obrigado por tudo!

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades de todo o curso.

A este Instituto, a seu corpo docente, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, formado na confiança no mérito e ética aqui presentes.

À minha querida Esposa Paula, à minha querida filha Luísa, e aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, como os amigos da turma do CP II, o meu muito obrigado.

Por fim, quero agradecer aos meus professores do PROFMAT que ajudaram muito em meu crescimento acadêmico, e em especial à minha orientadora, Professora Marilis Bahr Karam Venceslau, que me auxiliou desde a escolha do tema até a conclusão desta dissertação com muito carinho, paciência e dedicação.

*“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”*

*(Bertrand Russell)*

# RESUMO

VALENTIM, Leonardo Nunes. **Programação Linear no Ensino Médio: uma proposta envolvendo contextualização, modelagem e tecnologias digitais.** 2021. 111 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

A Programação Linear é uma ferramenta muito útil para a resolução de certos tipos de problemas que aparecem com frequência na indústria, economia, logística, geração de energia, área da saúde, etc. Tais problemas, como por exemplo o armazenamento e o transporte de vacinas contra a Covid-19 - que aflige a população mundial em tempos de uma pandemia causada por um coronavírus - são de relevância para o mundo globalizado no qual a humanidade está inserida e podem servir para despertar o interesse dos alunos e dar significado à Matemática praticada no Ensino Médio. Além disso, a prática da Programação Linear envolve trabalhar com resolução de problemas, modelagem matemática e raciocínio computacional. O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de introdução à Programação Linear no Ensino Médio utilizando modelagem e recursos computacionais, em particular, o uso do software de Geometria Dinâmica GeoGebra; da planilha EXCEL e de seu Solver embutido; e da ferramenta online PHPSimplex para a resolução de problemas de Programação Linear. A metodologia empregada é baseada na revisão bibliográfica do conteúdo de Programação Linear a ser desenvolvido neste trabalho e na apresentação das ferramentas digitais utilizadas. As atividades propostas são desenvolvidas de maneira a facilitar a compreensão do aluno e apresentam situações-problema sobre a Covid-19.



**Palavras-chave:** Programação Linear; Ensino Médio; Recursos Computacionais.

**ABSTRACT**

VALENTIM, Leonardo Nunes. **Linear programming in high school: a proposal involving contextualization, modeling and digital technologies.** 2021. 111 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

Linear Programming is a very useful tool for solving certain types of problems that frequently appear in industry, economics, logistics, power generation, health care, etc. Such problems, like the storage and transport of vaccines against Covid-19 - which afflicts the world population in times of a pandemic caused by a coronavirus - are of relevance to the globalized world in which humanity is inserted and can serve to motivate the interest of students and give meaning to mathematics practiced in high school. In addition, the practice of Linear Programming involves working with problem solving, mathematical modeling and computational resources. The objective of this work is to present a proposal for an introduction to Linear Programming in High School using digital modeling and technologies, in particular, the use of GeoGebra Dynamic Geometry software; the EXCEL spreadsheet and its built-in solver; and the PHPSimplex online tool for solving Linear Programming Problems. The methodology used is based on the bibliographic review of the Linear Programming content to be developed in this work and on the presentation of the digital tools used. The proposed activities are developed in order to facilitate the student's understanding and present problem situations about Covid-19.

**Keywords:** Linear Programming; High School; Computational Resources.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A Programação Linear é um dos ramos da Matemática que mais se desenvolveram nas últimas décadas desde a Segunda Guerra Mundial. Um dos fatores que propiciaram isso foi o advento dos computadores eletrônicos digitais, os quais têm a capacidade de processar um grande volume de cálculos matemáticos requeridos em problemas de Programação Linear típicos, muito mais rapidamente do que os seres humanos. Suas aplicações ocorrem em diversas áreas tais como: Economia; logística militar e industrial; planejamento agrícola; Medicina; etc. No contexto da Programação Linear, o termo programação não faz referência a computação, e sim a planejamento. Assim, a Programação Linear envolve o planejamento de atividades para obter um resultado, entre todas as alternativas viáveis, que melhor alcance um objetivo previamente determinado. Atualmente, é uma ferramenta-padrão empregada em vários setores da sociedade moderna.

Portanto, dada a relevância da Programação Linear no século XXI, parece natural que esta seja introduzida o mais cedo possível no programa de Matemática do Ensino Médio, já que seu estudo propicia o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, e que vão ao encontro das necessidades da vida contemporânea.

Há vários artigos e Dissertações de Mestrado que propõem atividades voltadas para o Ensino Médio utilizando o método gráfico e usando alguns recursos computacionais, por exemplo, Brasil (2018). Quanto aos livros didáticos do Ensino Médio, poucos citam a Programação Linear, e quando o fazem, dão apenas um exemplo, como Iezzi et al. (2017) que ilustra um problema de Programação Linear, resolvendo-o pelo método gráfico, como uma aplicação para desigualdades lineares.

Conceitos importantes como as igualdades e desigualdades lineares, as quais são a base da Programação Linear, são tratados na Geometria Analítica abordada no Ensino Médio. Além disso, a resolução de um Problema de Programação Linear requer a construção de modelos matemáticos e a busca por soluções, quer sejam através do método geométrico - utilizando softwares, ou não - ou do emprego de ferramentas digitais que utilizam o método Simplex para resolver algebricamente tal problema. Esta abordagem ocorre em livros do Ensino Superior como, por exemplo, em Taha (2008) e Belfiore e Fávero (2013).

Acrescente-se a isso o fato de que o método gráfico, além de dar uma ideia de como funciona o algoritmo Simplex, propicia uma conexão entre as representações algébrica e geométrica, papel este desempenhado pela Geometria Analítica.

Baseando-se nisso, este trabalho tem por objetivo principal apresentar uma proposta que introduz a Programação Linear no Ensino Médio de maneira a mantê-la em um nível elementar com conhecimentos matemáticos adquiridos neste segmento a fim de que o aluno reconheça o

Problema de Programação Linear; conheça as técnicas para obter suas soluções; saiba fazer uso de recursos computacionais para obtê-las; e tenha participação ativa e colaborativa durante o processo de aprendizagem.

Mais especificamente, almeja-se atingir os seguintes objetivos: introduzir problemas de Programação Linear no Ensino Médio como uma aplicação da Geometria Analítica e da Álgebra Linear; propiciar ao aluno a oportunidade de trabalhar com questões contextualizadas envolvendo situações-problema que surgem no combate à Covid-19; utilizar a modelagem matemática para construir modelos que representem fielmente as situações abordadas; resolver problemas de Programação Linear de duas variáveis através do método gráfico, utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra, o qual facilita a compreensão do algoritmo Simplex; utilizar ferramentas digitais tais como o PHPSimplex e o Solver do Excel para obter a solução de um problema de Programação Linear de maneira algébrica. E, por último, mas não menos importante, propor uma sequência didática de atividades de forma que o aluno tenha uma participação ativa nas mesmas.

Este trabalho faz, no Capítulo 2, um breve histórico sobre o surgimento e o desenvolvimento da Programação Linear. No Capítulo 3, são enunciados alguns conceitos importantes sobre desigualdades lineares e conjuntos convexos. No Capítulo 4, faz-se uma introdução à Programação Linear caracterizando um Problema de Programação Linear e a obtenção de sua solução através do método gráfico e de ferramentas digitais como o Solver do Excel e o PHPSimplex. No Capítulo 5, mostra-se o Algoritmo Simplex. No Capítulo 6, apresenta-se a proposta de atividades para o ensino médio. Por último, no Capítulo 7, serão feitas as Considerações Finais.

# 2 ASPECTOS HISTÓRICOS

A Programação Linear é uma das ferramentas da Pesquisa Operacional (PO). Embora o termo “pesquisa” possa remeter equivocadamente à ideia de um simples questionário, o entedimento adequado é o de que a Pesquisa Operacional (PO) seja uma série de técnicas com embasamento lógico-científico para tratar questões de gestão que auxiliam na tomada de decisão. Esta técnica foi muito utilizada durante a Segunda Guerra Mundial, quando os militares necessitavam mandar alimentos, munições e medicamentos para a área de manobra, por exemplo, e precisavam identificar como fazê-lo, levando somente o necessário a fim de economizar com a logística, porém sem perder a operacionalidade. Pensando nestes problemas, foi desenvolvida a Programação Linear, mas a partir desta descoberta, a Programação Linear está sendo usada na industria e na economia, por exemplo, visando sempre otimizar o lucro destas.

A Programação Linear nasceu como uma das ramificações da Programação Matemática, tendo uma ampla aplicabilidade em diversos problemas, tais como: o planejamento e execução da produção e distribuição de produtos, bem como na logística em operações militares.

Apesar do surgimento e avanço da Programação Linear ter ocorrido a partir do início dos anos 40 do século XX, já havia tentativas de otimizar uma função linear sujeita a restrições. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em seu trabalho sobre sistemas de inequações lineares, publicado em 1826, apresentou uma ideia visando à solução de um sistema de desigualdades lineares. Tal método consistia na eliminação de variáveis para resolução de sistema de inequações lineares, que é similar ao método de eliminação de Gauss para resolução de sistemas de equações lineares. Cerca de um século depois, Theodore S. Motzkin (1908-1970) redescobriu o artigo de Fourier do ano de 1826, intitulado “Solution d’une question particulière du calcul des inégalités. (Fourier, 1826)” (Figura 1), segundo Garzón (2014), e ficou conhecido como “Teorema de sanduíche” de Fourier-Motzkin (ver (MACULAN; FAMPA, 2006)):

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ , $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s \,\epsilon\, \mathbb{R}$. Então $\max\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\} \leq \min\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s\}$ se, e somente se, $\alpha_i \leq \beta_j$, para todo $i, j$ com $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$.

**Figura 1 – Calcul des Inequalites, Jean Baptiste Fourier, 1826**

SOLUTION D'UNE QUESTION PARTICULIÈRE

DU

CALCUL DES INÉGALITÉS.

*Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris*, p. 99; 1826.

La question suivante offre une application du calcul des inégalités linéaires. Cet exemple, très simple, est propre à donner une première notion des résultats de ce calcul et des constructions qui les représentent.

On propose de diviser l'unité en trois parties, qui peuvent être inégales, mais qui sont assujetties à cette condition que la plus grande des trois parties ne doit pas surpasser le produit de la plus petite par $1+r$; le nombre donné $r$ exprime la limite de l'inégalité. Si ce nombre était nul, les trois parties devraient être égales, et le problème aurait une seule solution. Lorsque la limite donnée a une valeur positive quelconque, la question est indéterminée; elle a une infinité de solutions.

Il est très facile d'exprimer par des inégalités toutes les conditions de la question, et de résoudre ces inégalités par l'application des règles générales. On arrive ainsi à la construction suivante, qui fait connaître distinctement toutes les solutions possibles, exprime leur caractère commun et mesure l'étendue de la question.

La ligne $mm''$ représente la longueur de l'unité (*fig.* 1). Ayant formé le carré $mm'm''n$, on prolonge indéfiniment le côté $nm''$ et l'on prend

Fonte: Disponível em <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707/f223.image>.

Em 1942, Leonid Vitaliyevich Kantorovich criou um algoritimo para solucionar problema de transporte ótimo, apresentando exemplos para a aplicação da programação linear, tais como a distribuição de cargas através de veículos por diversas rotas para atender aos requistos e restrições de capacidade das rotas e, assim, diminuindo o custo total, porém tal trabalho somente se tornou amplamente conhecido por volta de 1950. Assim sendo, segundo Canavarro (2005), o problema de transporte ganhou representatividade na programação linear, pois havia a necessidade de otimizar o deslocamento, ou seja, tornar o transporte mais econômico enviando um bem disponível em quantidades limitadas de determinados locais para outros onde fossem necessários, atentando para a relação custo $\times$ benefício. Seguindo esta linha de raciocínio, o holandês Tjalling Charles Koopmans (1910-1985) utilizou esta teoria na alocação ótima de recursos em economia e notoriedade nesta área. Koopmans e Kantorovich partilharam o prêmio nobel de economia pela contribuição à teoria da utilização ótima de recursos na economia em 1975.

De acordo com Prado (2016), em 1945, Georger Stigler formulou o "problema da dieta" para resolver a seguinte questão: "Qual a alimentação seria a mais econômica considerando a necessidade mínima de alguns nutrientes para o corpo humano?". O desafio foi publicado no jornal *The New York Times* e ganhou repercussão nacional. A solução ótima foi uma dieta com custo de US$59,88 por ano, composta por farinha de trigo, fígado de porco e repolho. Stigler levou em conta apenas a circunstância econômica e, embora tal dieta não fosse viável, percebeu-se que a técnica utilizada para solucionar tal problema poderia ser utilizada em outras áreas, apesar de que nem sempre resultasse na solução ótima.

Em 1947, George Bernard Dantzig consolidou a programação linear através do Método Simplex, o primeiro algoritmo para a solução de problemas de Programação Linear. que era capaz de resolvê-los de forma prática. Embora a ideia por trás do método Simplex seja a mesma apresentada por Fourier em 1826 (MACULAN; FAMPA, 2006), os resultados teóricos e computacionais do método Simplex foram exibidos por Dantzig naquele ano. Ao longo dos anos, com a invenção e desenvolvimento dos computadores, a Programação Linear conseguiu se expandir (BERTSIMAS; TSITSIKLIS, 1997).

Atualmente a programação linear é utilizada em várias áreas da sociedade contemporânea tais como na Economia; na logística militar e industrial (TAHA, 2008); no planejamento agrícola (LOESCH; HEIN, 2009); na Medicina (HILLIER; LIEBERMAN, 2013); etc.

# 3 NOÇÕES BÁSICAS

## 3.1 Sistema de Equações Lineares: Método de Eliminação de Gauss Jordan

Considere um sistema de equações lineares na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ax_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ ax_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

De acordo com Boldrini et al. (1980), algumas operações podem ser feitas sem alterar o resultado das equações, que são elas:

- Multiplicar a equação por um escalar, diferente de zero;
- Criar uma nova equação através da soma/subtração de uma equação por outra; e
- Permutar equações.

Estas transformações acima, são a base do método de eliminação de Gauss. O método de eliminação de Gauss - Jordan consiste na solução do sistema de equações pela eliminação das variáveis etapa por etapa, podendo ser dada uma notação matricial ao sistema visando sempre através da eliminação das incógnitas chegar a matriz triangular (via método da eliminação de Gauss). Essas operações, transformações, formam um novo sistema, sistema este equivalente ao anterior o qual possui o mesmo conjunto solução do sistema de equações inicial. Tal sistema pode ser representado na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matriz das incógnitas, e

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matriz dos termos independentes, com $a_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, onde:

$$A.X = B.$$

A este sistema pode-se associar a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ ...\ a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ ...\ a_{2n} & b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ ...\ a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

**Exemplo**. Em uma lanchonete os valores do hamburguer $(x)$, do guaraná $(y)$, e do doce $(z)$ estão dispostos no sistema abaixo. Calcule estes valores.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 10 \\ -3x + y + 2z = -11 \\ 5x - 3y + 2z = 21 \end{cases}$$

**Resolução.** Nomeie as linhas do sistema da seguinte maneira:

$$\begin{matrix} Linha\,1\,(L\,1) \rightarrow \\ Linha\,2\,(L\,2) \rightarrow \\ Linha\,3\,(L\,3) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x + 3y - z = 10 \\ -3x + y + 2z = -11 \\ 5x - 3y + 2z = 21 \end{cases}$$

Etapa 1: Eliminando a incógnita $x$ da segunda e da terceira linhas

Ou seja, escolher uma linha como pivô, e esta linha servirá para eliminar a variável $x$ na linha 2 e na linha 3. A linha ideal para ser pivô é a linha que tem coeficiente unitário, caso não tenha, basta escolher uma destas linhas e multiplicar pelo inverso multiplicativo do coeficiente de

$x$, para este coeficiente se tornar unitário. Neste exemplo a primeira linha já possui o coeficiente de $x$ unitário, logo será a linha escolhida.

$$\begin{array}{r} Linha\,1\,(L\,1) \rightarrow \\ Linha\,2\,(L\,2) \rightarrow \\ Linha\,3\,(L\,3) \rightarrow \end{array} \begin{cases} x+3y-z=10 \\ -3x+y+2z=-11 \\ 5x-3y+2z=21 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ 3L\,1+L\,2 \\ 5L\,1-L\,3 \end{array} \begin{cases} x+3y-z=10 \\ 0x+10y-z=19 \\ 0x+18y-7z=29 \end{cases}$$

o qual é um sistema equivalente ao sistema inicial.

Etapa 2: Eliminando a incógnita $y$ da terceira Linha

$$\begin{cases} x+3y-z=10 \\ 0x+10y-z=19 \\ 0x+18y-7z=29 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{10}L\,2-\frac{1}{18}L\,3 \end{array} \begin{cases} x+3y-z=10 \\ 0x+10y-z=19 \\ 0x+0y+26z=26 \end{cases}$$

Etapa 3: Depois de ter feito as eliminações das incógnitas de acordo com as etapas 1 e 2, o sistema tem perfil de escada, e este método de Gauss-Jordan, por causa deste formato de resolução, alguns autores o definem como "método de escalonamento".

A partir da terceira linha, torna se possível encontrar o valor de $z$.

$$26z=26 \rightarrow z=1.$$

Passando para a linha 2, tem-se: $10y-z=19$, como $z=1$, tem-se: $y=2$.

E por fim, passando para a linha 1, tem-se: $x+3y-z=10$,como $z=1$, $y=2$, tem-se: $x=5$.

Logo o conjunto solução será: $(5;\ 2;\ 1)$.

## 3.2 Desigualdades Lineares

Pretende-se, nesta seção, estudar a representação geométrica de uma equação linear e de um sistema de equações lineares no $\mathbb{R}^n$, particularmente, no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$. Iniciar-se-á o estudo com desigualdades lineares no $\mathbb{R}^2$ devido ao fato que é mais fácil comprender os conceitos abordados no plano, bem como visualizar suas representações geométricas, para então generalizá-los no $\mathbb{R}^n$.

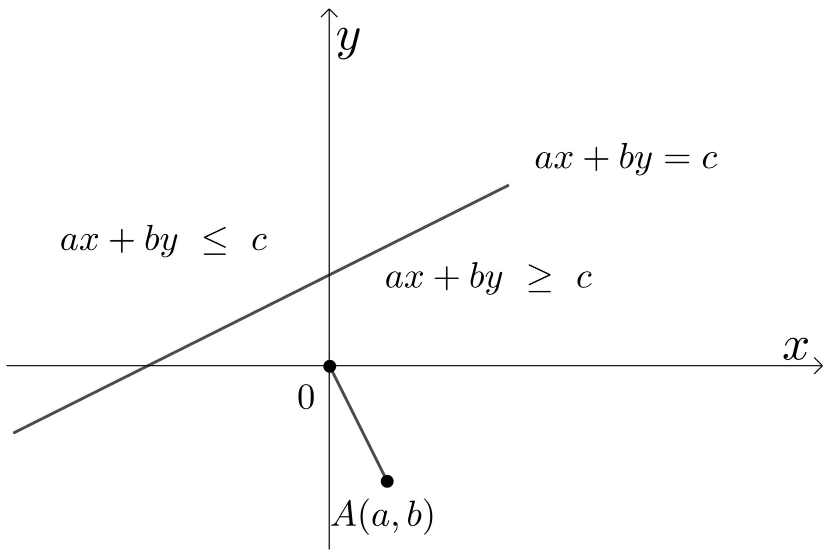
### 3.2.1 Desigualdades lineares no $\mathbb{R}^2$

Toda equação, no $\mathbb{R}^2$, do tipo $ax + by = c$, com $a, b, c$ números reais e $a$ e $b$ ambos não nulos, representa uma reta no plano. Segundo Lima (2014, p.66), "Toda reta decompõe o plano em duas regiões, os quais denominam-se semi-planos. Seja a reta $r$ dada pela equação $ax + by = c$, com $a, b, c$ números reais. Logo, por esta reta, ficam definidos os semi-planos $H^-$ e $H^+$ determinados por $ax + by \leqslant c$ e $ax + by \geqslant c$ , respectivamente."

$$H^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \leqslant c\} \, e \, H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \geqslant c\}.$$

Ainda de acordo com Lima (2014), para determinar qual dos semi-planos está sendo tratado basta definir uma função $\varphi$ de$\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$,definida por $\varphi(x, y) = ax+by$ . A reta $ax+by = c$ , é chamada a linha de nível $c$ desta função $\varphi$. Como $\varphi(0, 0) = a.0 + b.0 = 0$, logo a origem está no nível zero de $\varphi$. E tomando o ponto $A = (a, b)$, e $\varphi(a, b) = a^2 + b^2 > 0$ será um número positivo e igual a $c$. Logo, quando percorre-se o segmento de reta no sentido de $0 = (0, 0)$ para o ponto $A = (a, b)$, os níveis $c$ das retas $ax + by = c$ , sendo estes sempre perpendiculares a $0A$ e vão crescendo, assim sendo, é possível determinar qual o semi-plano desejado (Figura 2).

**Figura 2 – Semi-planos**

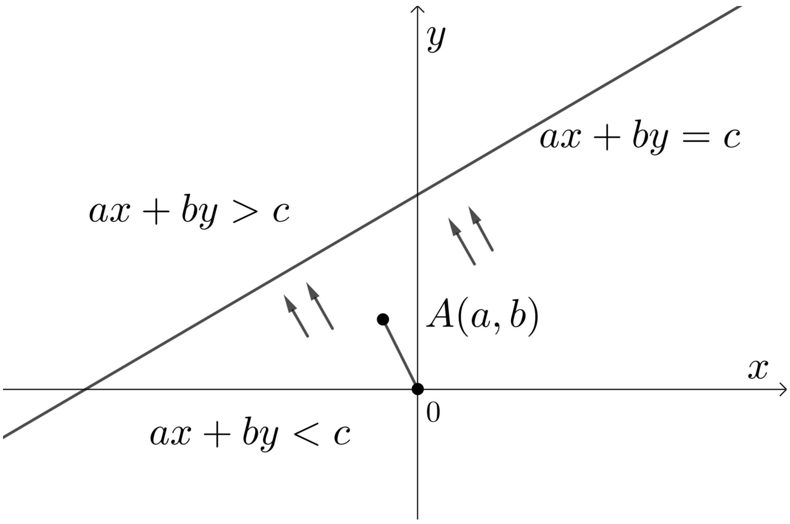



Fonte: O autor, 2021.

Como o segmento $OA$(sentido de $0$ para $A$) está crescendo em direção para baixo da reta, logo o semi-plano $ax + by \geq c$, ficará abaixo da reta.

Na Figura 3, mostra-se como ocorre o crescimento do segmento $0A$.

**Figura 3 – As setas indicam o crescimento da função $\varphi$**




Fonte: O autor, 2021.

Como o segmento $OA$(sentido de $0$ para $A$) está crescendo na direção superior da reta, logo o semi-plano $ax + by > c$ ficará acima da reta.

Outra forma de verificação do semi-plano desejado será pelo isolamento de $y$.

Se for, $y > ax + by$, será a parte superior a reta $ax + by = c$; $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$,

Se for, $y < ax + by$, será a parte inferior a reta $ax + by = c$;

Observando que na necessidade de multiplicar uma desigualdade por $(-1)$, o sinal desta será invertido, de maior para menor ou vice-versa.

**Exemplo 1**. Esboce o gráfico do conjunto das soluções de cada uma das desigualdades lineares a seguir.

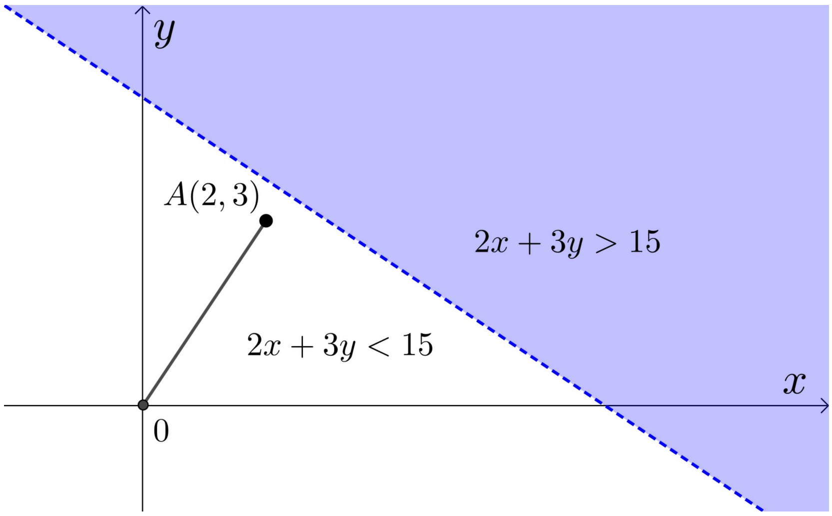
$a)2x + 3y > 15$

- Primeiro passo: Isolar o $y$.

$y > \frac{15-2x}{3}$; como o sinal da desigualdade continuou $(>)$, o semi-plano desejado será o superior a reta dada.

Outra forma de analisar seria de acordo com a função $\varphi$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$,pode-se perceber que o segmento $OA$ cresce no sentido superior da reta dada, logo $2x + 3y > 15$, ficará na parte superior a reta (Figura 4).

**Figura 4 – Exemplo (a), desigualdade linear**




Fonte: O autor, 2021.

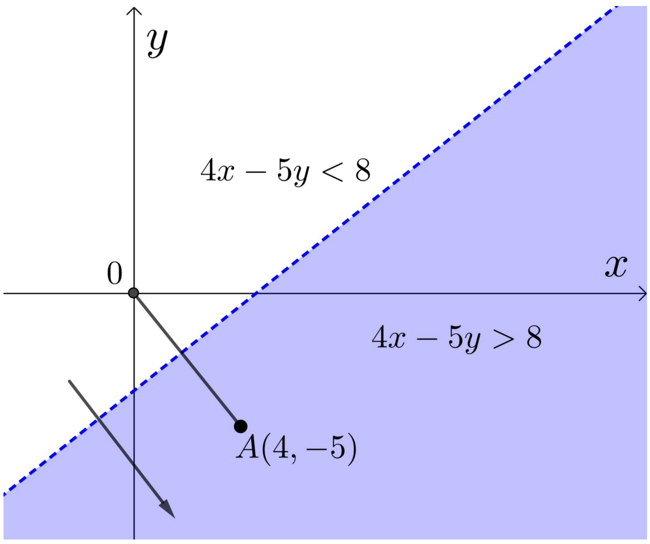
$b)4x-5y>8$

- Primeiro passo: Isolar o $y$.

$-5y>8-4x \implies -y>\frac{8-4x}{5}(-1) \implies y<\frac{-8+4x}{4}$; como o sinal da desigualdade inverteu para $(<)$, o semi-plano desejado será o inferior a reta dada.

Outra forma de analisar seria de acordo com a função $\varphi$ de$\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, pode-se perceber que o segmento $OA$ cresce no sentido inferior da reta dada, logo $4x-5y>8$, ficará na parte inferior a reta (Figura 5).

**Figura 5 – Exemplo (b), desigualdade linear**




Fonte: O autor, 2021.

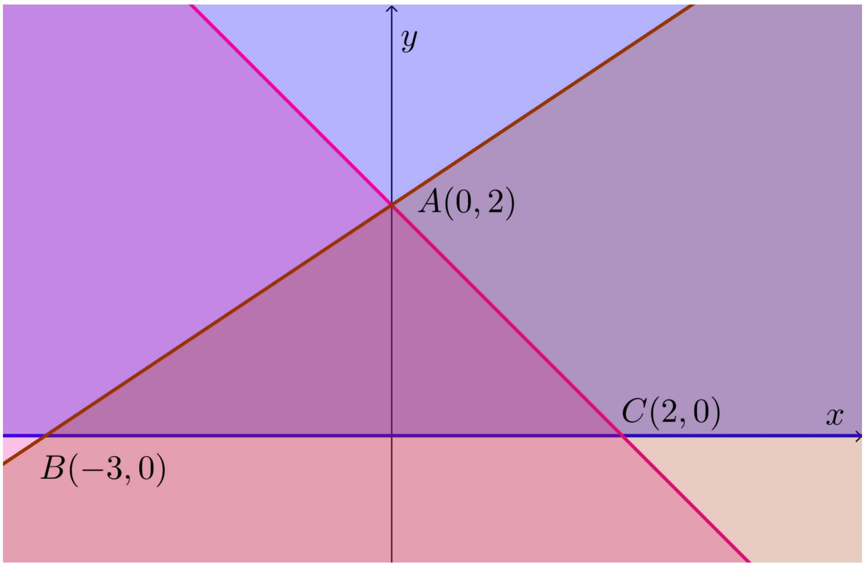
Num sistema de desigualdades, a solução acontecerá no conjunto de pontos, $P(x, y)$, que satisfaçam todas as condições das desigualdades.

Exemplo 2. Resolva o sistema de desigualdades lineares abaixo.

$$\begin{cases} -2x + 3y \leqslant 6 \\ y \leqslant -x + 2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Deve-se determinar cada região, semi-plano, para cada desigualdade linear, e, após, fazer a interseção destes semi-planos (Figura6).

**Figura 6 – Exemplo sistema de desigualdades lineares**




Fonte: O autor, 2021.

Sendo assim, a solução do sistema de inequações dado será a região delimitada pelos os vértices $A(0, 2)$, $B(-3, 0)$, $C(2, 0)$ do triângulo.

De acordo com Lima (2014), os sistemas de desigualdades lineares ocorrem em problemas de otimização, onde é possível maximizar e minimizar funções lineares, ou seja, sendo possível encontrar soluções ótimas, conjunto de pontos $P(x, y)$, que atendam a todas as restrições impostas no sistema de modo a otimizar uma função dada. A estes problemas de otimizações que atribuí-se a programação linear, objeto de estudo deste trabalho.

### 3.2.2 Desigualdades lineares no $\mathbb{R}^n$

Uma desigualdade linear no $\mathbb{R}^n$ é do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n \leq a_n$, com todos os coeficientes reais e não todos nulos simultaneamente.

Boldrini et al. (1980) mostra que a solução de um sistema de desigualdades definidas no $\mathbb{R}^n$ determina um conjunto denominado de região poliedral convexa fechada no $\mathbb{R}^n$ . A determinação de tal região se dará pela transformação desse sistema de desigualdades lineares em um sistema de equações lineares com $n$ equações. A fim de que se possa verificar se a solução (ponto) fica no interior dessa região, basta substituir nas desigualdades e verificar se todas as desigualdades estarão satisfeitas. Os vértices encontrados pelo sistema de equações dessa região poliedral são os extremos dessa região.

**Exemplo 3**. Resolva o sistema de desigualdades lineares abaixo.

$$\begin{cases} 2x + y - z \geqslant 5 \\ y + z \leqslant 4 \\ x - 2z \leqslant 8 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Logo pela definição acima, deve-se transformar esse sistema de desigualdades em um sistema de equações.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ y + z = 4 \\ x - 2z = 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

Como a região em questão encontra-se no $\mathbb{R}^3$, deve-se montar um sistema com três equações, sendo que o sistema todo possui 4 equações. Logo pela combinação de 4 escolhe 3, seria possivel a confecção de 4 sistemas de 3 equações por 3 variáveis.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ y + z = 4 \\ x - 2z = 8 \end{cases}$$ , solução $(-7, \frac{23}{2}, -\frac{15}{2})$

Esta solução pertence a região poliedral convexa, pois satisfaz todas desigualdades do sistema;

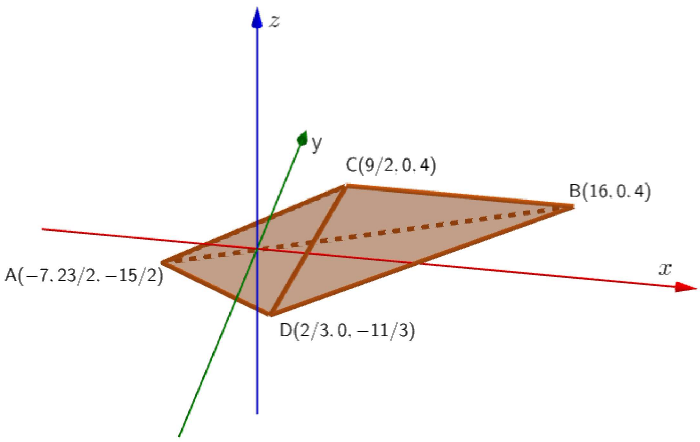
$$\begin{cases} y + z = 4 \\ x - 2z = 8 \\ y = 0 \end{cases}$$ , solução $(16, 0, 4)$, pertence a região poliedral convexa;

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ y + z = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$ , solução $(\frac{9}{2}, 0, 4)$, pertence a região poliedral convexa; e

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - 2z = 8 \\ y = 0 \end{cases}$$ , solução $(\frac{2}{3}, 0, -\frac{11}{3})$, pertence a região poliedral convexa.

Logo temos os vértices da região poliedral convexa limitada, conforme gráfico apresentado na Figura 7.

**Figura 7 – Região poliedral convexa limitada no $\mathbb{R}^3$**




Fonte: O autor, 2021.

A solução do sistema de desigualdades lineares acima será a região poliedral convexa cujos vértices são: $A(-7, \frac{23}{2}, -\frac{15}{2})$, $B(16, 0, 4)$, $C(\frac{9}{2}, 0, 4)$, e $D(\frac{2}{3}, 0, -\frac{11}{3})$.

### 3.3 Conjuntos Convexos

Os conceitos e resultados apresentados nesta subseção estão baseados em Boldrini et al. (1980).

O segmento de extremos $A$ e $B$, com $A$ e $B$ dois pontos pertencentes ao $\mathbb{R}^n$, é o conjunto $\overline{AB}$ de pontos do $\mathbb{R}^n$, dado por:

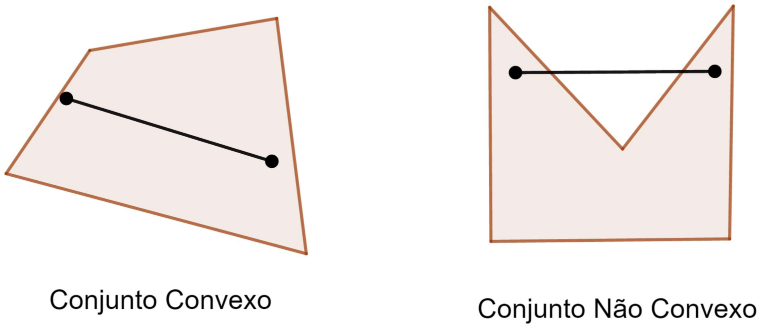
$$\overline{AB} = \{(1-t)A + tB, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Observe que se $t = 0$, o ponto $A$ pertence ao segmento de reta $\overline{AB}$ , se $t = 1$ o ponto $B$ pertence a $\overline{AB}$, e, a qualquer ponto P do segmento existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t_1 \leq 1$ e $P = (1 - t_1)A + t_1 B$.

Diz-se que um subconjunto $C$ do $\mathbb{R}^n$ é convexo quando para quaisquer dois pontos $P_1$ e $P_2 \in C$, o segmento $\overline{P_1P_2}$ está contido em $C$. Caso $\overline{P_1P_2}$ não esteja contido em $C$, diz-se que o conjunto é não convexo.

A Figura 8 mostra exemplos de conjuntos convexos e não convexos.

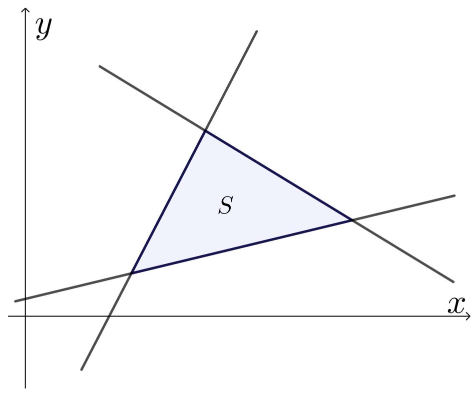
**Figura 8 – Exemplos de conjuntos convexos e conjuntos não convexos do $\mathbb{R}^2$**




Fonte: O autor, 2021.

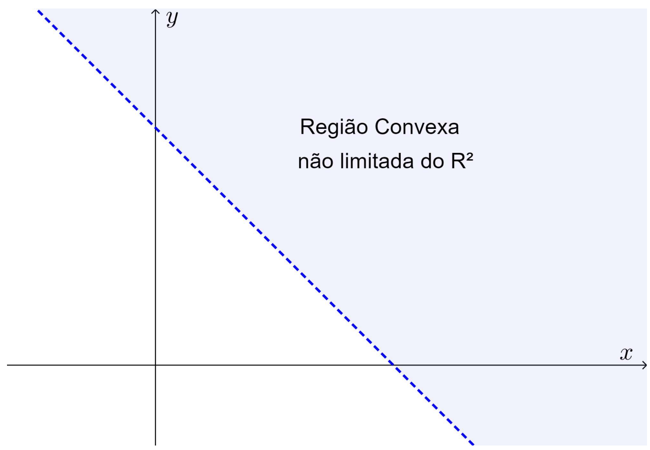
Um conjunto também pode ser limitado ou não limitado. A Figura 9 mostra a região determinada por um sistema de inequações a qual é convexa e limitada no $\mathbb{R}^2$, enquanto a Figura 10 mostra uma região convexa ilimitada no $\mathbb{R}^2$.

**Figura 9 – Região convexa limitada do $\mathbb{R}^2$**




Fonte: O autor, 2021.

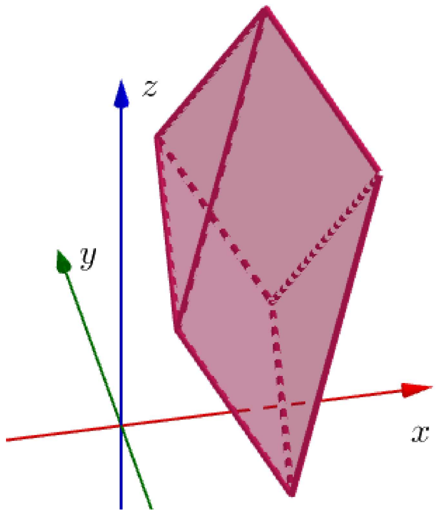
**Figura 10 – Região convexa não limitada do $\mathbb{R}^2$**




Fonte: O autor, 2021.

Ainda de acordo com Boldrini et al. (1980, p.358), “a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo”. A Figura 11 mostra uma região poliedral convexa limitada no $\mathbb{R}^3$, obtida pela interseção de semi-espaços convexos.

**Figura 11 – Região poliedral convexa limitada do $\mathbb{R}^3$**




Fonte: O autor, 2021.

# 4 INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

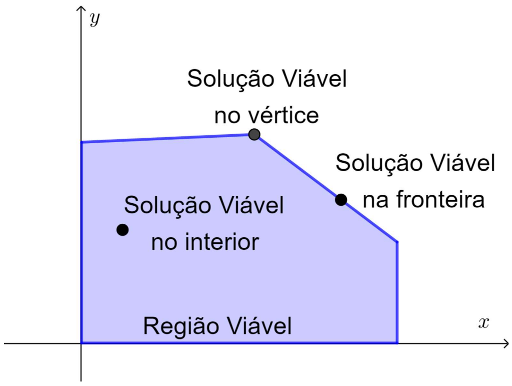
O objetivo principal da PO é auxiliar os tomadores de decisões nas organizações com informações que sejam relevantes à tomada de decisão, tornando - a mais prática e eficiente. Este trabalho foca na Programação Linear (PL), programação esta que visa resolver problemas específicos de otimização onde a função a ser otimizada e as restrições dadas, são lineares e as variáveis, não negativas. De acordo com Marins (2011), a tarefa da PL consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada função objetivo, respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades, que recebem o nome de restrições do modelo. O conjunto de pontos que são solução do sistema de desigualdades lineares (restrições) é denominado região viável ou factível (BOLDRINI et al., 1980), onde é possível encontrar a melhor solução que otimize a função objetivo dada.

Ainda que o termo programação possa inferir o conceito de programação computacional, a programação tratada neste trabalho abarca o planejamento de atividades, e o termo linear é devido à função objetivo a ser otimizada, bem como as restrições impostas nestes tipos de problemas serem lineares. Não existe apenas a Programação Linear, segundo Loesch e Hein (2009), existem programação inteira e mista, que não possui restrição de as variáveis serem positivas, pois podem ser inteiras e as funções objetivo são lineares; Programação não-linear, como o próprio nome, permite que as funções e as restrições sejam não lineares; programação dinâmica é quando envolve etapas sucessivas de decisão a serem empregadas etapa por etapa; grafos, árvores e algoritmos é a otimização porém em rota, como o problema clássico do caixeiro viajante, maximizando as cidades visitadas e minimizando a rota em resumo; e finaliza com a simulação, que cria simulações matemáticas para situações do acaso para tentar maximizar ou minimizar os erros. Para maiores detalhes ver Maculan e Fampa (2006), Macambira et al. (2016), Loesch e Hein (2009), Hillier e Lieberman (2013) e Taha (2008).

## 4.1 Caracterização do Problema de Programação Linear

Retomando a PL, tem-se que as restrições são formadas por desigualdades lineares e a interseção destas desigualdades geram uma região na qual encontram-se todas as soluções viáveis do problema modelado (Figura 12). Pode acontecer destas restrições não gerarem uma região, e caso este fato ocorra, o problema estudado não terá solução ótima.

**Figura 12 – Região Viável**




Fonte: O autor, 2021.

Segundo Lachtermacher (2009), as soluções podem ser classificadas da seguinte maneira:

- Solução: Qualquer especificação de valores, dentro do domínio da função-objetivo,

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

para as variáveis de decisão, independentemente de se tratar de uma escolha desejável ou permissível;

- Solução viável: É uma solução em que todas as restrições são satisfeitas; e
- Solução ótima: Uma solução viável que tem o valor mais favorável da função-objetivo, $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$, isto é, maximiza ou minimiza a função-objetivo, podendo ser única ou não.

A função objetivo na programação linear a ser otimizada é do tipo:

$Z = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$, onde $c_1, c_2, \cdots, c_n$, são constantes reais, e $x_1, x_2, ..., x_n$ são as variáveis de decisão do problema.

Podendo ter infinitas restrições, as restrições tem as características de desigualdades lineares, ou também chamdas de inequação polinomiais do 1° grau.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$; por exemplo, onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e $b$ são constantes reais;

Pode ser dada a seguinte notação matricial aos Problemas de Programação Linear (PPL):

As restrições,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ ax_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ ...\ a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \ \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ ...\ a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \ n, m \,\epsilon\, N^*$$

Com

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \geq 0$$

A função objetivo é dada por:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \Leftrightarrow (c_1\ c_2\ c_3\ ...\ c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Em resumo:

Tomando

$$a = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ ...\ a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \ \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ ...\ a_{mn} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ c = (c_1\ c_2\ c_3\ ...\ c_n),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A função a ser otimizada:

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i$$

$$Z = cx$$

Sujeito as restrições:

$$ax \leq b$$

com:

$$x_i \geq 0$$

## 4.2 Modelagem de um Problema de Programação Linear

A modelagem do problema consiste em identificar, em primeiro lugar, as variáveis de decisão, a função a ser otimizada (função objetivo) e as restrições (desigualdades lineares). Após identificá-las, é necessário saber como proceder a fim de que se possa obter o ótimo resultado para a função objetivo.

Será seguido um processo de resolução, modelagem, respeitando todas as restrições do problema. Loesch e Hein (2009) modelam um problema de PL da seguinte forma:

a) Dividir o problema em outros menores, se possível;

b) Identificar as variáveis de decisão, atentando se as variáveis são inteiras ou reais;

c) Identificar o objetivo (se é para maximizar ou minimizar, por exemplo, lucro ou custo, respectivamente);

d) Identificar os fatores restritivos (maquinaria disponível, matéria prima, etc);

e) Não esquecer as relações entre uma variável e outra; e

f) Descartar aspectos que não compromotem a otimalidade da solução procurada (matéria prima abundante, por exemplo).

Então, de acordo com a modelagem, pode-se dividir este modelo em passos na tentativa de facilitar o entendimento:

1° Passo: Estabelecer as variáveis de decisão, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. A quantidade de variáveis determinará a dimensão a ser trabalhada e os dados do problema;

2° Passo: Definir a expressão a ser maximizada ou minimizada;

$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{(n-1)}x_{(n-1)} + a_nx_n$; onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são os coeficientes da equação;

3° Passo: Estabelecer as restrições, não esquecendo as restrições triviais na programação linear que são $x_1, x_2, x_{3,} \cdots, x_n \geq 0$;

As restrições, normalmente, são formadas por desigualdades, inequações, mas não há impedimento para que haja igualdades.

$ax_1 + bx_2 \geqslant c_1$, $c_1$ é uma constante real, por exemplo;

4° Passo: Transpor estas restrições para o plano cartesiano (no caso de um problema de dimensão 2), bem como definir a região poligonal viável ou no caso de dimensão maior que 2, definir a região poliedral convexa; e

5° Passo: Analisar os vértices desta região poliedral convexa e definir qual será a melhor solução.

A resolução dos problemas de PL, ou seja, o ponto que maximiza ou minimiza a função desejada, encontra-se nos extremos (vértices) da região viável. Adote um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e suponha que este ponto seja interior da região viável, otimizando a função desejada. Por este ponto, passará a representação da função objetivo e pode ser verificado que esta função crescerá ou decrescerá em direção aos vértices ou esta representação passará pelo lado do polígono. Caso passe pelo vértice da região viável, estará provado que o ponto que otimiza esta função se encontra no vértice dessa região, porém se passar pelos lados, existirá uma função que contém o lado e os vértices da região viável, com o valor da $f(x, y)$ podendo crescer ou decrescer em direção ao vértice. (LIMA, 2014)

## 4.3 Método gráfico para resolver o Problema de Programação Linear

Dado um Problema de Programação Linear (PPL), o método gráfico, para determinar a solução do PPL é constituído por duas etapas: determinação da região viável do problema e determinação da solução ótima entre todas as soluções viáveis da região viável podem ser representadas graficamente as restrições e a função objetivo (uma reta), além de permitir a visualização dos tipos de soluções viáveis. Para isso deve-se fazer o gráfico de cada restrição em um sistema de n eixos coordenados (n é o número de variáveis de decisão do problema) e determinar o conjunto interseção de todas as soluções. Ora, para problemas de duas variáveis isso é factível, mas a partir de três variáveis torna-se muito difícil ou impossível traçar tais gráficos.

### 4.3.1 Exemplos de problemas de PL em $\mathbb{R}^2$ solucionados pelo método gráfico

A seguir, mostrar-se-á o processo do método gráfico, resolvendo-se os problemas de PL, em $\mathbb{R}^2$, .

**Exemplo 1.** Certa empresa fabrica dois produtos $P_1$ e $P_2$. O lucro unitário do produto $P_1$ é de R$ 1.000,00 e o lucro unitário de $P_2$ é R$ 1.800. São necessárias 20 horas para fabricação de uma unidade de $P_1$ e de 30 horas para uma unidade de $P_2$. O tempo anual de produção disponível é de 1200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades para $P_1$ e 30 unidades para $P_2$. Construa o modelo de programação linear cujo objetivo é maximizar o lucro.

Existe uma relação entre os produtos 1 e 2 devido ao tempo máximo de 1200 horas, considerando que ou se produz um produto ou outro. Esta relação com duas variáveis será associada à função linear. A fim de proporcionar melhor visualização no gráfico, os valores de $P_1$ são associados ao eixo $x$, e os valores de $P_2$, ao eixo $y$.

- 1° Passo: Verificar quem são as variáveis de decisão, que neste caso, a quantidade de produtos, denotados por $P_1$(Produto 1) e $P_2$(Produto 2).

Os dados:

O lucro unitário de $P_1$ é de RS 1000,00;

O lucro unitário de $P_2$ é de RS 1800,00;

São necessárias 20 horas para produzir 1 unidade de $P_1$;

São necessárias 30 horas para produzir 1 unidade de $P_2$;

O tempo anual de produção disponível é de 1200 h;

A demanda esperada para a variável $P_1$ é de 40 unidades; e

A demanda esperada para a variável $P_2$ é de 30 unidades.

Antes de prosseguir, é fundamental destacar que o tempo anual de 1200 horas é o limite, sendo assim, pode ser que seja utilizado um tempo menor para que se atinja o lucro máximo. De maneira análoga, deve-se pensar que para os produtos $P_1, P_2$, talvez não seja necessário produzir as 40 unidades de $P_1$ nem as 30 unidades de $P_2$.

E para completar esta análise, algumas questões também precisam ser ponderadas. A primeira é que como o objetivo a ser alcançado é o lucro máximo, e o maior lucro é na produção do P2, logo, bastaria fabricar apenas produtos do tipo 2 para alcançar esta meta? Vale ressaltar que, para a produção deste produto, são necessárias 30 horas de um total de 1200, portanto poderiam ser fabricados 40 produtos. Com a venda destes produtos seria possível atingir o lucro máximo? Ou, ao invés disso, se fabricassem mais do produto 1, cujo tempo de produção é menor, o lucro máximo seria alcançado? Para responder estas e outras perguntas, deve ser utilizada a PL para chegar ao resultado ótimo.

- 2° Passo: Definir a equação que representa o objetivo que se quer maximizar ou minimizar;

$L(P_1, P_2) = 1000.P_1 + 1800.P_2$

- 3° Passo: Definir as restrições;

$R_1 : 20.P_1 + 30.P_2 \leqslant 1200$;

$R_2$ :$P_1 \leq 40$;

$R_3$ :$P_2 \leq 30$;

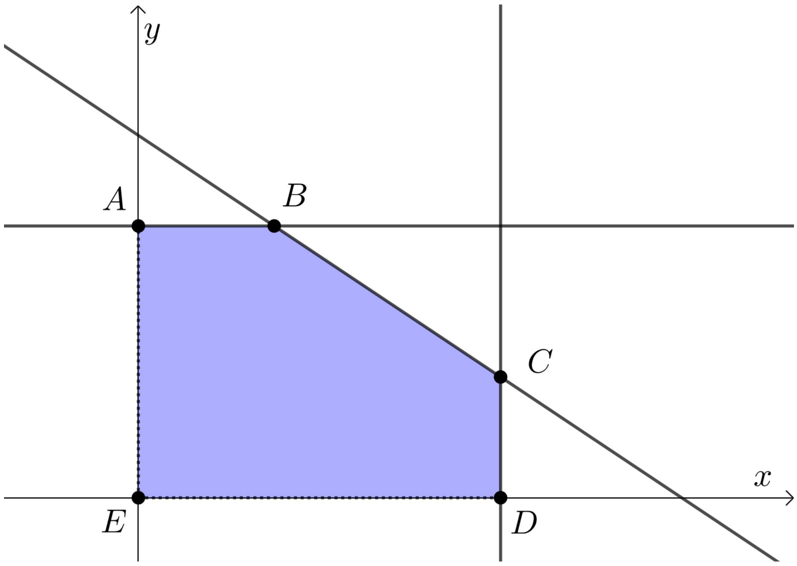
fora as triviais;

$R_4$ :$P_1 \geq 0$;

$R_5$ :$P_2 \geq 0$.

- 4° Passo: Transpor as informações das restrições para os eixos coordenados (Figura 13);

**Figura 13 – Polígono com a região viável do exemplo 1**




Fonte: O autor, 2021.

Este polígono criado entre os vértices $A(0,30), B(15,30), C(40,\frac{40}{3}), D(40,0)$,e $E(0,0)$ satisfaz o problema desejado, ou seja, a região satisfeita por todas as restrições. Pode-se agora descobrir qual destas soluções será a melhor, ou seja, a melhor combinação de vendas, a que proporciará o melhor lucro com a venda dos produtos dados, $P_1, P_2$.

- 5° Passo: Analisar o gráfico.

Mesmo reduzindo o problema ao polígono acima, ainda continua com algumas possibilidades de respostas (combinações), entre os vértices deste polígonos.

São eles: $A = (0,30), B = (15,30), C = (40,\frac{40}{3}), D = (40,0), E = (0,0)$

Lembrando que os valores correspondentes ao eixo $x$ serão atrelados a $P_1$, e os valores correspondentes ao eixo $y$ serão atrelados a $P_2$.

A função a ser maximizada: $L(P_1, P_2) = 1000.P_1 + 1800.P_2$

$L_A(0,30) = 1000.0 + 1800.30 = 0 + 54000 = R\$54.000,00$

$L_B(15,30) = 1000.15 + 1800.30 = 15000 + 54000 = R\$69.000,00$

$L_C(40,\frac{40}{3}) = 1000.40 + 1800.\frac{40}{3} = 40000 + 24000 = R\$64.000,00$

$L_D(40,0) = 1000.40 + 1800.0 = 40000 + 0 = R\$40.000,00$

$L_E(0,0) = 1000.0 + 1800.0 = 0 + 0 = R\$0,00$

Pode-se concluir que a melhor escolha para a fabricação dos produtos seria produzir 15 produtos do tipo 1 e 30 do tipo 2, pois geraria um lucro máximo de $R\$69.000,00$.

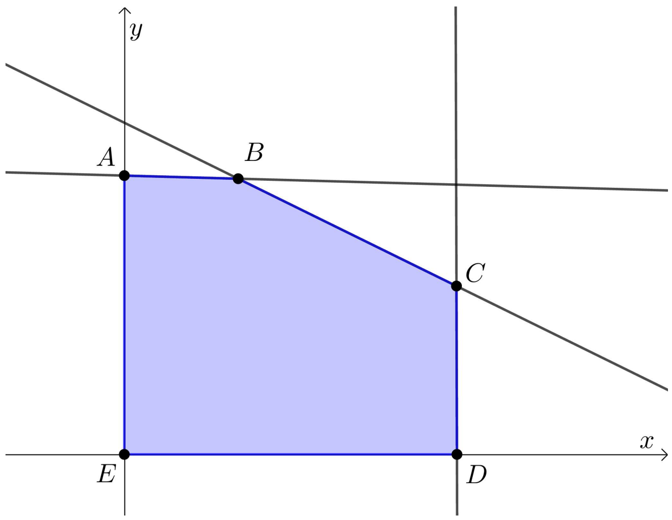
E há de se pontuar que $L_E$ não seria necessário calcular, pois não estaria vendendo nenhum produto do tipo 1 nem do tipo 2; e $L_C$ dependendo dos produtos de tipo 1 e dos produto de tipo 2, talvez não fosse necessário calcular, pois o número de produtos do tipo 2 seriam um número decimal e não fosse conveniente.

**Exemplo 2**. (PRADO, 2016) Uma fábrica de computadores produz dois modelos de computador: $x_1$ e $x_2$ . O modelo $x_1$ fornece um lucro de R$180,00 e $x_2$ de R$ 300,00. O modelo $x_1$ requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo $x_2$ requer de um gabinete grande e duas unidades de disco. Existem no estoque: 60 unidades do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Como maximizar o lucro desta empresa.

A função a ser maximizada: $f(x_1, x_2) = Z = 180.x_1 + 300.x_2$

As restrições presente no exemplo: $\begin{cases} x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 50 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

**Figura 14 – Polígono com a região viável do Exemplo 2**




Fonte: O autor, 2021.

O polígono formado pelos os pontos $A(0, 50), B(20, 50), C(60, 30), D(60, 0), E(0, 0)$ é a região viável do problema de (PRADO, 2016), a solução do exemplo proposto acima de Prado estará neste polígono.

$f(A) = 180.0 + 300.50 = R\$15000, 00$

$f(B) = 180.20 + 300.50 = R\$18600, 00$

$f(C) = 180.60 + 300.30 = R\$19800, 00$

$f(D) = 180.60 + 300.0 = R\$10800, 00$

$f(E) = 180.0 + 300.0 = R\$0,00$

Logo, o lucro máximo na confecção será na venda de 60 produtos do tipo $x_1$ e 30 produtos do tipo $x_2$, e o valor obtido nesta venda será de $R\$19.800,00$.

Porém este trabalho foca na programação linear que trabalha com as restrições e as funções ambas lineares, iniciando com o método gráfico de resolução no $\mathbb{R}^2$, além do uso da tecnologia como forma de resolução. Assim sendo, a ferramenta tecnológica escolhida foi o *Solver,* ferramenta do *Software* Microsoft Office Excel, que será visto no Capítulo 4 deste trabalho.

## 4.4 Ferramentas digitais para resolver problemas de Programação Linear

Em geral, os modelos de PL que representam problemas práticos podem conter milhares de variáveis e restrições. Assim, o único modo plausível de resolvê-los é via uso de computadores (TAHA, 2008). Há vários *softwares* populares que podem ser usados para obter a solução de um problema de PL. Entre eles, tem-se:

- o Solver do Excel o qual é mais atraente para quem gosta de usar planilhas, e o AMPL − linguagem algébrica de modelagem. Para mais detalhes, veja Taha (2008).

Além destes, Hillier e Lieberman (2013) destacam entre outros:

- o LINDO, um otimizador tradicional, e o LINGO, uma popular linguagem de modelagem algébrica;
- MPL, uma popular linguagem de modelagem algébrica, e seu excelente resolvedor CPLEX, o otimizador de ponta mais usado.

Vale citar também a ferramenta online:

- PHPSimplex pela sua interface amigável e acesso gratuito online.

Neste trabalho, almeja-se utilizar resolvedores que sejam mais fáceis de serem usados e acessados e, além disso, venham ao encontro de algumas habilidades elencadas em Brasil. Ministério da Educação (2018) que espera-se que sejam adquiridas pelos alunos da educação básica como, por exemplo, o uso de planilhas eletrônicas e tecnologias digitais.

Considerando-se o que já foi mencionado, neste trabalho, opta-se por usar o Solver do Excel e o PHPSimplex, os quais serão tratados com mais detalhes a seguir.

### 4.4.1 Resolução de um PPL com o Solver do Excel

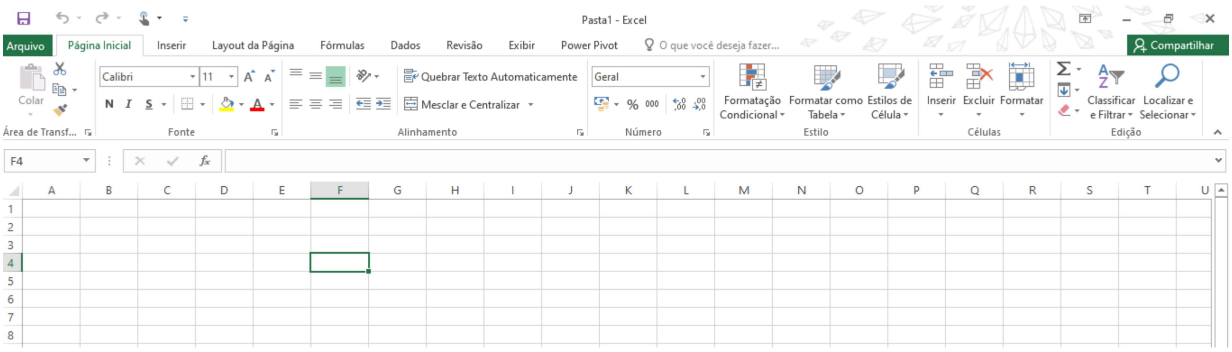
Preliminarmente, vale ressaltar que, conforme o preconizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio (BRASIL. Ministério da Educação, 2001), em suas competências e habilidades, deve-se "Aplicar as tecnologias associadas às Ciências Naturais na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida". Dessa forma, os problemas que envolvem a otimização podem ser utilizados no dia a dia dos alunos, contribuindo para sua formação profissional. Além do mais, o uso da tecnologia como subsídio no processo de ensino-aprendizagem torna o assunto mais atraente para os alunos quando eles percebem a aplicação do conteúdo na realidade em que vivem. Além disto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL. Ministério da Educação, 2018), que deverá ser implementada em todas as escolas brasileiras até o final de 2021, propõe que "os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental".

Neste capítulo, será aplicado um método de resolução utizando *Software* Microsoft Excel, mais precisamente, o Solver, e com um passo a passo para se chegar ao valor que melhor atenda à resolução de uma expressão, solução ótima, em outras palavras, maximizar ou minimizar a expressão dada.

**i)** Apresentação do Excel

Serão apresentados alguns itens a respeito da planilha do Excel (Figura 15).

**Figura 15 – Apresentação do Excel**




Fonte: O autor, 2021.

Aprendizado sobre alguns dos itens da barra de ferramenta da planilha do Excel e como instalar o Solver.

Chama-se de planilha a página aberta no Excel, e os retângulos visíveis, de células, as quais são formadas pelos cruzamentos de colunas e linhas (F4), em que a letra maiúscula representa a coluna; e o número, a linha, como mostra a Figura 16.

**Figura 16 – Barra de Ferramenta do Microsoft Excel**


Fonte: O autor, 2021.

Breve apresentação dos itens da barra de ferramenta, Microsoft Office, Excel 2016, que será utilizada nesta parte do capítulo.

- Arquivo: abrir arquivo novo ou salvo, salvar arquivo, exportar, $\cdots$;
- Pagina Inicial: itens de formatação, mesclar células, mudar cor de letras $\cdots$;
- Inserir: modelos de tabelas, modelos de gráficos, modelos de imagens, hiperlink, símbolos matemáticos, $\cdots$;
- Layout de Páginas: configuração de páginas como, margens, recuo, plano de fundo, $\cdots$;
- Fórmula: auto soma, média, fórmulas pré definidas como, $senx$, $cosx$, conta.se, $\cdots$;
- Dados: pode ser tratado os dados externos como tabela, tratar informações internas e externas, filtros, conversão de texto para colunas, Solver;
- Revisão: revisão de arquivos, revisão ortográfica, segurança de planilha ou celula, dicionário, idiomas, $\cdots$;
- Exibir: layout de exibição, adcionar linhas de grade, zoom, $\cdots$;

Estas são algumas das utilidades do *Software* Excel, que permite criar fórmulas, gráficos, dentre outras aplicaçãoes das mais fáceis às mais complexas, como contar palavras dentre outras funções.

A ferramenta utilizada neste trabalho é o Solver do Excel, porém em algumas versões do Excel, esta ferramenta não está habilitada. Para habilitá-la, deve-se ir em "arquivo", em seguida "opções", logo após "suplementos". No fim da página, haverá "gerenciar", e deve-se clicar em "suplemento do Excel", e então habilitar o Solver do Excel.

**ii)** Passo a Passo de resolução com o Solver do Excel

O Excel será utilizado para resolver o problema de PL que foi resolvido por resolução gráfica no item 4.2 deste trabalho. A finalidade é checar se chegará ao mesmo resultado do exemplo anterior. Segundo Rodrigues et al. (2014), é possível resolver problemas de PL com este *software* da seguinte forma:

Exemplo - Certa empresa fabrica dois produtos $x_1$ e $x_2$. O lucro unitário do produto $x_1$ é de R$ 1.000,00 e o lucro unitário de $x_2$ é R$ 1.800. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de $x_1$ e de 30 horas para fabricar uma unidade de $x_2$. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades para $x_1$ e 30 unidades para $x_2$. Construa o modelo de programação linear que objetivo maximizar o lucro, utilizando a ferramenta Solver do Excel.

A formatação nada tem a ver com o resultado, apenas para dispor os dados. Já a fórmula dará os resultados esperados para cada etapa da criação da programação. As células que contêm fórmulas devem começar pelo sinal de igual " = ", para que o programa entenda que ali está sendo inserido uma fórmula e assim possa calculá-la. Vale destacar que nas fórmulas serão utilizadas as aspas para dar destaque textual, porém na célula não devem ser utilizadas, pois o *Microsoft* Excel entenderá que é um texto e assim não gerará um resultado mas um texto com números.

Primeiro Passo: Fazer um resumo do problema, coletando os dados que foram apresentados e as restrições impostas. Todas as células estão como texto, e não como fórmula para ser calculada, sendo assim, são apenas um resumo do que será calculado (Figura 17).

**Figura 17 – Resumo dos dados do exemplo**

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Resolução | | |
| 2 | Expressão a ser Maximizada | | |
| 3 | MAX $z = 1000.X_1+1800.X_2$ | | |
| 4 | | | |
| 5 | Sujeito as restrições | | |
| 6 | I - $20.X_1 + 30.X_2 \leq 1200$ | | |
| 7 | II - $X_1 \leq 40$ | | |
| 8 | III - $X_2 \leq 30$ | | |
| 9 | IV - $X_1 \geq 0$ | | |
| 10 | V - $X_2 \geq 0$ | | |

Fonte: O autor, 2021.

- $AC1$: mesclar células $A1$ a $C1$, "Resolução";
- $AC2$: mesclar células $A2$ a $C2$, "Expressão a ser maximizada";
- $AC3$: mesclar células $A3$ a $C3$, "$max\, z = 1000.x_1 + 1800.x_2$";
- $AC6$: mesclar células $A6$ a $C6$, "$20 * x_1 + 30 * x_2 \leq 1200$";

- $AC7$: mesclar células $A7$ a $C7$, "$x_1 \leq 40$";
- $AC8$: mesclar células $A8$ a $A8$, "$x_2 \leq 30$";
- $AC9$: mesclar células $A9$ a $C9$, "$x_1 \geq 0$";
- $AC10$: mesclar células $A10$ a $C10$, "$x_2 \geq 0$";

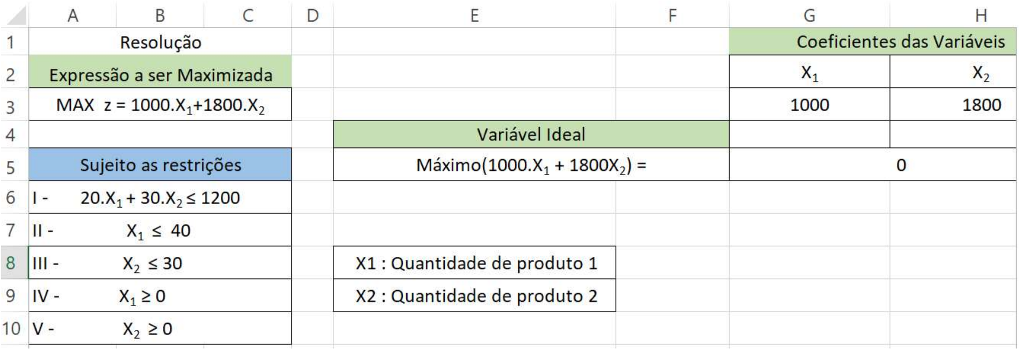
As células $AC2$ e $AC5$ foram pintadas com o fundo verde e azul, respectivamentes, para destacá-las apenas. Isso não alterará os resultados.

Segundo Passo: preparação da planilha no preenchimento das células com os dados iniciais.

Colocar a expressão a ser maximizada ou minimizada (Figura 18);

$L(x_1, x_2) = 1000.x_1 + 1800.x_2$

**Figura 18 – Dados iniciais do Problema**



| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Resolução | | | | | | Coeficientes das Variáveis | |
| 2 | Expressão a ser Maximizada | | | | | | $X_1$ | $X_2$ |
| 3 | MAX z = $1000.X_1+1800.X_2$ | | | | | | 1000 | 1800 |
| 4 | | | | | Variável Ideal | | | |
| 5 | Sujeito as restrições | | | | Máximo($1000.X_1 + 1800X_2$) = | | 0 | |
| 6 | I - | $20.X_1 + 30.X_2 \leq 1200$ | | | | | | |
| 7 | II - | $X_1 \leq 40$ | | | | | | |
| 8 | III - | $X_2 \leq 30$ | | | X1 : Quantidade de produto 1 | | | |
| 9 | IV - | $X_1 \geq 0$ | | | X2 : Quantidade de produto 2 | | | |
| 10 | V - | $X_2 \geq 0$ | | | | | | |

Fonte: O autor, 2021.

Formatação

Foi inserida a expressão a ser maximizada (fundo verde) e no quadro será preenchido pelos dados como:

- $G2$ identificação da 1ª Variável;
- $H2$ identificação da 2ª Variável;
- $G3$: coeficiente de $x_1$;
- $H3$: coeficiente de $x_2$;
- $G4$: reservar esta célula para o *Solver* preencher com o máximo valor de $x_1$, respeitando as restrições;

- $H4$: reservar esta célula para o *Solver* preencher com o máximo valor de $x_2$; respeitando as restrições; e
- $GH5$: mesclar as celulas $G5$ e $H5$ e juntar, com os máximos valores de $x_1$ e $x_2$. Esta célula será preenchida com o valor máximo da expressão a ser maximizada, por exemplo.

Relebrando que a formatação não influencia nos resultados.

Fórmula

- $G3$: preencher com o coeficiente de $x_1$, ou seja, $1000$.
- $H3$: preencher com o coeficiente de $x_2$, ou seja, $1800$.
- $G4$ e $H4$: preenchidas pelo Solver no final de todas as formatações e fórmulas;
- $GH5$: colocar a expressão a ser maximizada de acordo com as células $G4$ e $H4$; $= G3 * G4 + H3 * H4$, quando o Solver definir o máximo de $x_1$ e $x_2$, automaticamente, esta célula será preenchida pelo máximo da expressão desejado.

A célula $GH5$ indicará o valor de zero, pois ainda não se sabe os valores de $G4$ e $H4$.

Terceiro passo: inserir as restrições do problema para serem calculadas (Figura 19).

**Figura 19 – Formatação das restrições**

| | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Precisar para o Solver | | | | | |
| 2 | Restrições | | Coeficientes | | Facilitador de restrições | constantes pós sinais |
| 3 | | | $X_1$ | $X_2$ | Expressões com os coef. | Constante |
| 4 | I | | | | | |
| 5 | II | | | | | |
| 6 | III | | | | | |

Fonte: O autor, 2021.

Formatação

Foi feito um quadro com as restrições, a ser preenchido no Solver.

- $JO1$ : Mesclar $J1, K1, L1, M1, N1, O1$, (apenas para escrever o que será preenchido neste quadro);
- $JK2$ : Escrever “Restrições”;
- $L2, M2$ : Preparar esta coluna para os coeficientes das restrições, mesclar $L2$ e $M2$ ;

- $N2$ : Preparar esta coluna para o facilitador de restrições. Serão postos os coeficientes das restrições (inequações) para a resolução do *Solver*, a esquerda dos sinais das restrições;
- $O2$ : Preparar esta coluna para as constantes das desigualdades, após sinais das restrições;
- $L3$ : Preparar esta coluna para receber os valores dos coeficientes da primeira variável nas restrições;
- $M3$ : Preparar esta coluna para receber os valores dos coeficientes da segunda variável nas restrições;
- $N3$ : Preparar esta coluna para receber as expressões das inequações, apenas com os coeficientes das variáveis e o valor das variáveis ideais;
- $O3$ : Preparar esta coluna para receber as constantes das restrições( inequações);
- $JK4$ : Mesclar $J4$ e $K4$, primeira restrição; I;
- $L4, M4$ : Será preenchido com os coeficientes da primeira variável e a segunda variável, respectivamente, da primeira restrição;
- $N4$ : Será prenchida de acordo com as variáveis de $L4, M4$, respectivamente, sendo que multiplicado pelas variáveis ideais, ou seja, $G4, H4$, respectivamente;
- $O4$ : Preparar esta coluna para ser preenchida com as constantes pós sinais de desigualdades I;
- $JK5$ : Mesclar $J5$ e $K5$, segunda restrição; II;
- $L5, M5$ : Será preenchido com os coeficientes da primeira variável e a segunda variável, respectivamente, da segunda restrição;
- $N5$ : Será prenchida de acordo com as variáveis de $L5, M5$, respectivamente, sendo que multiplicado pelas variáveis ideais, ou seja, $G4, H4$, respectivamente;
- $O5$ : Preparar esta coluna para ser preenchida com as constantes pós sinais de desigualdades II;
- $JK6$ : Mesclar $J6$ e $K6$, terceira restrição; III;
- $L6, M6$ : Será preenchido com os coeficientes da primeira variável e a segunda variável, respectivamente, da terceira restrição;
- $N6$ : Será prenchida de acordo com as variáveis de $L6, M6$, respectivamente, sendo que multiplicado pelas variáveis ideais, ou seja, $G4, H4$, respectivamente;
- $O6$ : Preparar esta coluna para ser preenchida com as constantes pós sinais de desigualdades III;

Faltam ainda duas restrições, que seriam $x \geq 0, y \geq 0$, mas estas serão inseridas diretamente no *Solver,* pois existe uma função disponivel.

Fórmula

A Figura 20 abaixo mostra as células das restrições com coeficientes.

**Figura 20 – Células das Restrições com os coeficientes - Parte 1**

| | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Precisar para o Solver | | | | | |
| 2 | Restrições | | Coeficientes | | Facilitador de restrições | constantes pós sinais |
| 3 | | | $X_1$ | $X_2$ | Expressões com os coef. | Constante |
| 4 | I | | 20 | 30 | | |
| 5 | II | | 1 | 0 | | |
| 6 | III | | 0 | 1 | | |

Fonte: O autor, 2021.

- $L4$ : Inserir o coeficiente de $x_1$ da restrição I "$= 20$";
- $M4$ : Inserir o coeficiente de $x_2$ da restrição I "$= 30$";
- $L5$ : Inserir o coeficiente de $x_1$ da restrição II "$= 1$";
- $M5$ : Inserir o coeficiente de $x_2$ da restrição II "$= 0$";
- $L6$ : Inserir o coeficiente de $x_1$ da restrição III "$= 0$";
- $M6$ : Inserir o coeficiente de $x_2$ da restrição III "$= 1$";
- As restrições IV e V não precisam ser incluídas, pois o *Solver* já as considera mediante marcação de item, o qual será apresentado futuramente neste trabalho.

A Figura 21 abaixo mostra como ficam todas as células de restrições preenchidas com os dados.

**Figura 21 – Células das Restrições com os coeficientes - Parte 2**

| | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Precisar para o Solver | | | | | |
| 2 | Restrições | | Coeficientes | | Facilitador de restrições | constantes pós sinais |
| 3 | | | $X_1$ | $X_2$ | Expressões com os coef. | Constante |
| 4 | I | | 20 | 30 | 0 | 1200 |
| 5 | II | | 1 | 0 | 0 | 40 |
| 6 | III | | 0 | 1 | 0 | 30 |

Fonte: O autor, 2021.

Agora será uma parte muito importante, nesta etapa acontecerá a preparação para a resolução do *Solver*, ou melhor, entregar a solução ideal para esta questão.

- $N4$ : A expressão que atende a restrição I, "$= L4 * G4 + M4 * H4$", na célula $N4 = 0$, é esperado este valor, pois $G4$ e $H4$ são as células reservadas para o Solver entregar os valores ideais para as variáveis $x_1$ e $x_2$, respectivamente, e neste momente estão vazios, ou seja, no primeiro momento nulos;
- $N5$ : A expressão que atende a restrição II, "$= L5 * G4 + M5 * H4$" na célula, $N5 = 0$, também é esperado este valor, pelo mesmo motivo acima, pois $G4$ e $H4$ são as células reservadas para o Solver entregar os valores ideais para as variáveis $x_1$ e $x_2$, respectivamente, e, neste momente estão vazios, ou seja, no primeiro momento nulos;
- $N6$ : A expressão que atende a restrição III, "$= L6 * G4 + M6 * H4$" ,na célula, $N6 = 0$, este valor também é esperado, pois $G4$ e $H4$ são as células reservadas para o Solver entregar os valores ideais para as variáveise $x_1$ e $x_2$, respectivamente.

Um questionamento pode vir a surgir em relação a restrição faltante, que são $x_1, x_2 \geq 0$; porém ao utilizar o *Solver,* pode-se habilitar a função para trabalhar com esta hipótese.

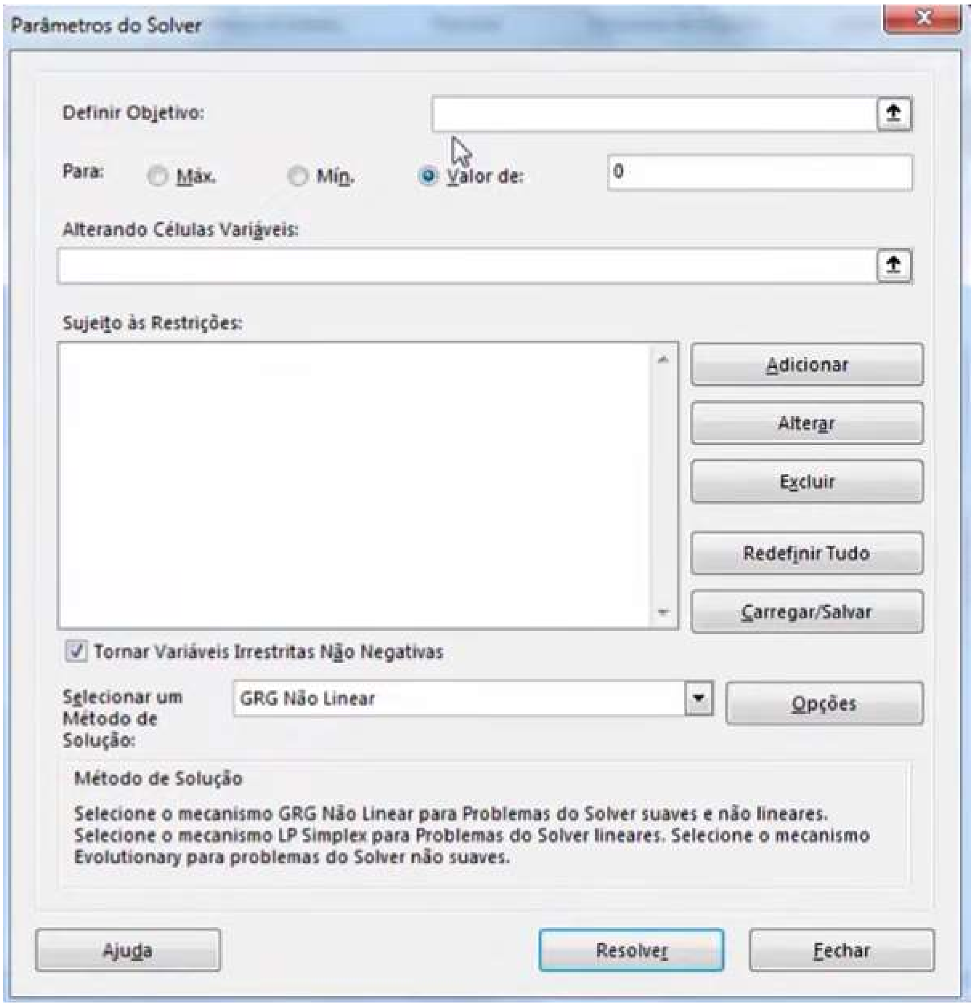
E a última coluna será preenchida com as constantes das restrições, a saber:

- $O4$ : Inserir com a constante da restrição I "$= 1200$";
- $O5$ : Inserir com a constante da restrição II "$= 40$"; e
- $O6$ : Inserir com a constante da restrição III "$= 30$".

  Diante do exposto, será possível descobrir os valores ideais para as variáveis de $x_1, x_2$, respectivamente. As células que o *Solver* irá preecher com estes valores já foram reservadas, além de haver as expressões dependentes desses valores, que são as restrições.

Na barra de "Ferramenta", clique em "Dados", e em seguida, no *Solver* e aparecerá a janela conforme mostra a Figura 22:

**Figura 22 – Apresentação do *Solver do Excel***




Fonte: O autor, 2021.

A janela do *Solver* do Excel apresenta algumas funções, como:

- "Definir Objeto": É a célula onde se encontra a expressão a ser maximimizada ou minimizada; No exemplo em questão, encontra-se na célula $GH5$;
- "Para": Como o objeto deste estudo é programação linear, apenas utilizaremos *Máx* para maximizar ou *Min* para minimizar a expressão dada. No exemplo em tela, deverá ser marcado *Max*;
- "Alterando células variáveis": Para escolher a(s) célula(s) onde o *Solver* preencherá com o(s) valor(es) ideal(is). Aparecerá o símbolo "$", pois a célula ficará fixa com este valor. No contexto deste exemplo, encontra- se nas células $G4$ e $H4$;
- "Sujeito às restrições": Local onde deverão ser preenchidas as restrições com as opções "Adicionar", "Alterar", "Excluir", por exemplo. Neste caso, entrarão as restrições I, II, e III;

No momento em que for adicionar as restrições, aparecerá uma nova janela, como na Figura 23:

**Figura 23 – Adicionar as restrições no Solver do Excel**

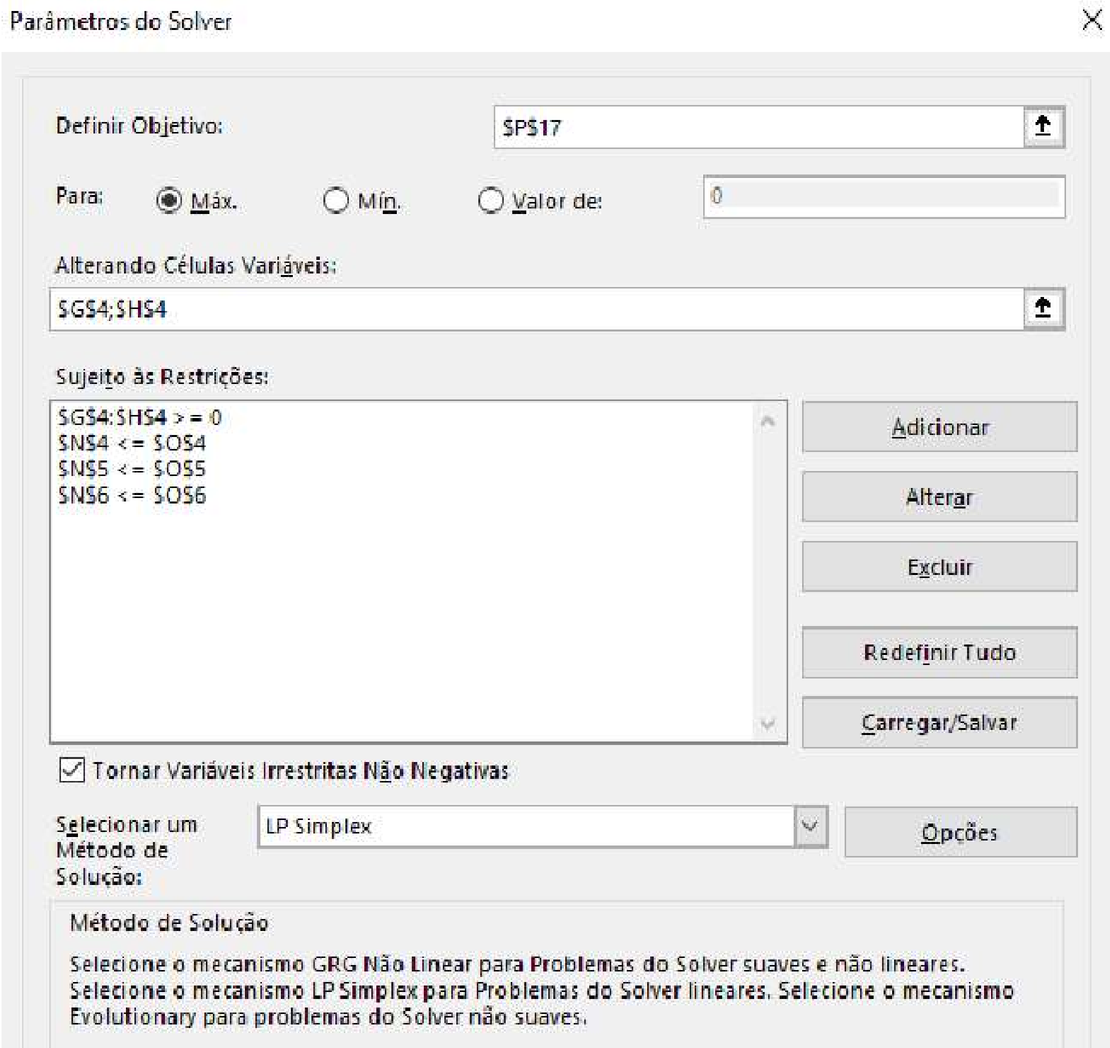

Fonte: O autor, 2021.

Devem-se acrescentar em “Referência de célula”, as expressões que foram criadas na preparação do quadro de Restrições, tais como,”$L7$” para restrição I, ”$L8$” para restrição II, ”$L9$” para restrição III. Importante destacar que os sinais dessas desigualdades serão o de “<=” , tendo em vista que não existe um símbolo matemático único de ” $\leq$ ” no *Solver.* Além disso, o campo “Restrição” será preenchido pelas contantes (os coeficientes) das restrições I, II e III, respectivamente, e também pelas células onde se encontraram as variáveis $x_1$ e $x_2$ através do símbolo matemático “>=0” . Vale lembrar que as variáveis de decisão devem ser bem definidas.

- “Tornar variáveis irrestritas não negativas”: Deve-se habilitar esta função para que as variáveis sejam todas positivas. No exemplo estudado, esta habilitação restringe $x_1, x_2 \geq 0$;
- “Selecionar uma método de resolução”: “GRG não Linear”, “LP Simplex” ou “Evolutionary”; Levando em consideração que o objeto deste estudo é a programação linear, deve-se, então, habilitar a função “LP Simplex”.

Assim sendo, os parâmetros do Solver, para este exercício, ficarão como mostra a Figura 24:

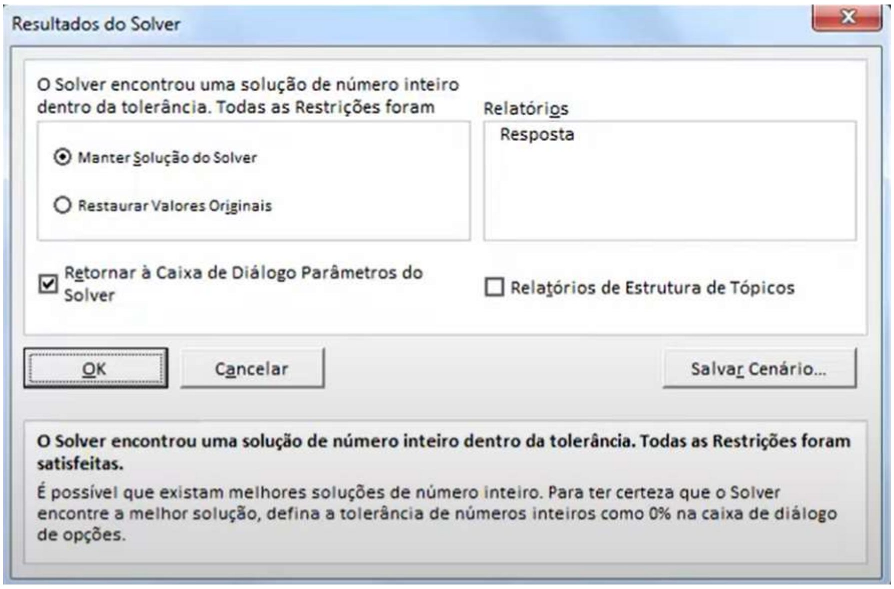
**Figura 24 – Configuração final do Solver do Excel**




Fonte: O autor, 2021.

O *Solver* resolverá de acordo com as entradas das restrições, encontrando a solução ótima, conforme a Figura 25 abaixo:

**Figura 25 – A solução encontrada do Solver do Excel**




Fonte: O autor, 2021.

A mensagem que aparece na tela , Figura 25 acima, mostra que o Solver do Excel encontrou a solução ideal procurada, com todas as restrições e condições satisfeitas, e estas soluções encontram se nas células $F7$, com o valor de $x_1 = 15$, e na célula $G7$, com o valor de $x_2 = 30$, ou seja, o par ordenado $(15, 30)$, neste exemplo, o valor ideal que consegue chegar no valor máximo da expressão. E com este par de solução, chega-se no valor máximo da expressão desejado.

**Figura 26 – Maximização do exemplo**

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | Coeficientes das Variáveis | |
| 2 | | | $X_1$ | $X_2$ |
| 3 | | | 1000 | 1800 |
| 4 | Variável Ideal | | 15 | 30 |
| 5 | Máximo(1000.$X_1$ + 1800$X_2$) = | | 69000 | |

Fonte: O autor, 2021.

Logo, no exemplo em questão, os valores ideais para a expressão são $x_1 = 15$ e $x_2 = 30$ conforme mostra a Figura 26. Já o valor máximo da expressão $L(x_1, x_2) = 1000.x_1 + 1800.x_2$, de acordo com os valores encontrados, será $L(x_1, x_2) = 6900$ que se encontra na célula $GH5$.

### 4.4.2 Resolução de um problema de PL com PHPSimplex

O PHPSimplex é uma ferramenta online [1] para a resolução de problemas de PL, possui uma interface bem simples e intuitiva. Ele soluciona problemas pelo método Simplex, o método das Duas Fases, e o método Gráfico, e não tem limitações quanto ao número de variáveis de decisão ou de restrições dos problemas. Seu uso é livre e gratuito. Além disso, no site está disponível um manual de ajuda do PHPSimplex onde aprende-se a usar a ferramenta rapidamente.

[1] Disponível em: http://www.phpsimplex.com/

# 5 MÉTODO SIMPLEX

Como visto no método gráfico, depois de criada a região viável, a parte a ser analisada serão os vértices (extremos) desta região. Este método de resolução é eficiente para problemas com duas variáveis, porém com três variáveis, se torna mais trabalhoso, e acima de três variáveis não é possível utilizar o método geométrico. Para esta situação, Dantzig (1963) elaborou um algoritmo que permite calcular as soluções viáveis, ou seja, os extremos da região viável, quando esta existir, para qualquer quantidade de variáveis. Tal algoritmo é conhecido como método Simplex, o qual utiliza a álgebra e tão somente a álgebra para chegar a valores viáveis. Segundo Boldrini, et al. (1980, p.374), "o método Simplex nada mais é do que um algorítmo de busca, isto é, ele começa num vértice da região factível e move-se de um vértice factível a outro até encontrar o vértice ótimo".

## 5.1 Fundamentação para o método Simplex

De acordo com o Capítulo 3 deste trabalho, os sistemas de equações lineares podem ser representados matricialmente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$

mas também podem ser representados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tomando:

$A$= como a matriz com os coeficientes das variáveis de decisão;

$x$= como o vetor das incógnitas; e

$b$= como o vetor dos termos independentes.

tem-se um sistema de equações com $m$ equações e com $n$ incógnitas, com $n > m$.

Define-se:

- variáveis básicas, as $m$ variáveis escolhidas de $A$;
- variáveis não-básicas, as demais variáveis $(n-m)$ escolhidas de $A$; e
- solução básica, a solução do sistema formado pelas colunas correspondentes às variáveis básicas.

Segundo Boldrini, et al. (1980, p.378), "Dado um conjunto com $m$ equações lineares com $m$ incógnitas, $B$, qualquer submatriz do tipo $m \times m$, não singular, formada por m colunas independentes de $A$ e seja $N$ a submatriz $m \times (n-m)$ formada pelas $(n-m)$ colunas restantes, as que não pertencem a $B$".

Logo, tem-se:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \rightarrow B.x_B + N.x_N = b$$

onde:

$B$ é a matriz básica;

$N$ é a matriz não-básica;

$x_B$ é a variável básica; e

$x_N$ é a variável não-básica.

- Variável de folga($f_i$)

Para resolver o Problema de Programação Linear (PPL) pelo método Simplex deve-se reescrevê-lo na forma padrão, ou seja, em forma de equações lineares, e para balancear as desigualdades lineares utiliza-se variáveis de folga ou de excesso.

De acordo com Marins (2011), qualquer desigualdade pode ser transformada em uma igualdade equivalente, adicionando novas variáveis não negativas.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$; logo, tem-se:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + f_i = b$;neste caso, $f_i$ é a variável de folga.

- Variável de excesso $(e_i)$

Ainda de acordo com Marins (2011), ao subtrair novas variáveis não negativas, transforma-se qualquer desigualdade em uma igualdade equivalente.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant b$;logo tem-se:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - e_i = b$; neste caso $e_i$ é a variável de excesso.

Será modelado o exemplo a seguir, do Capítulo 4, extraído de Prado (2016).

Exemplo 2.(PRADO, 2016) Uma fábrica de computadores produz 2 modelos de computador: $x_1$ e $x_2$ . O modelo $x_1$ fornece um lucro de R$180,00 e $x_2$ de R$ 300,00. O modelo $x_1$ requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo $x_2$ requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque: 60 unidades do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Como maximizar o lucro desta empresa?

Representação algébrica do PPL.

A função a ser maximizada: $f(x_1, x_2) = Z = 180.x_1 + 300x_2$

sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 50 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Preparar para a forma padrão PPL para resolução com a utilização do método Simplex.

Logo as desigualdades lineares ficarão nos moldes de resolução para resolução pelo método Simplex, já inclusa as variáveis de folga e/ou de excesso.

$$x_1 + x_3 = 60$$
$$x_2 + x_4 = 50$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 120$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

e a função a ser maximizada, ficará:

$$f(x_1, x_2) = Z = 180.x_1 + 300x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

## 5.2 Tipos de solução no método Simplex

De acordo com Boldrini et al. (1980), existem 4 tipos de soluções:

- Solução básica. Caso todos os componentes de $x_n$ forem nulos, na equação $B.x_B + N.x_N = b$, a equação se resumirá a $B.x_B = b$, em consideração a base $B$. Todas as soluções desta equação são chamadas de soluções básicas. Em contrapartida, os componentes de $x_B$ são chamdos de variáveis básicas e os componentes de $x_N$de variáveis não-básicas. Pelo ponto de vista geométrico, as soluções básicas serão os vértives da região viável.

- Solução básica degenerada. Caso uma ou mais variáveis básicas nas soluções básicas forem nulas, esta solução é conhecida como solução básica degenerada. Segundo o ponto de vista geométrico, serão os vértices onde haverá duas ou mais retas se intersectando.

Considere

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases},$$

que representa as restrições do PPL na forma padrão.

- Solução factível. Se um vetor **x** satisfaz todas as restrições na forma padrão do PPL, esta solução é chamada de factível. Bem como, se uma solução factível também for uma solução básica, será considerada por solução básica factível. Por outro lado, se esta solução for uma básica degenerada, esta será classificada por básica factível degenerada.

Considere

$$\begin{cases} \max\ f(x) \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Suponha uma função objetivo (minimizá-la) $f(x)$; sujeito as restrições $Ax = b$; e com os elementos não negativos $x \geqslant 0$.

- Solução básica factível ótima. É a solução básica factível que gere o valor ótimo, que no item acima, minimiza a função objetivo $f(x)$.

## 5.3 Teorema Fundamental da Programação Linear

De acordo com Boldrini et al. (1980), dado um PPL na forma padrão a matriz $A$ (a matriz com os coeficientes das variáveis de decisão) será do tipo $m \times (n + m)$, onde $m$ números de equações e com $n$ o número de incógnitas.

- Se existe uma solução factível, existirá uma solução factível;
- Se existe uma solução factível ótima, existirá uma solução básica factível ótima.

Ainda de acordo com Boldrini et al. (1980), este teorema junto a relação de equivalência entre as soluções básica factível e os vértices dos polígons de região viável permite afirmar que o número de iterações do método Simplex é limitado, pois um sistema que possua $m$ equações e $(n + m)$ incógnitas terá no máximo:

$$\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

soluções básicas.

Como o método Simplex é um algorítmo de busca, move-se de vértice em vértice no polígono da região viável, sem a necessidade de construção gráfica, ou seja, move-se de solução básica factível em solução básica factível até encontrar a solução básica factível ótima.

## 5.4 Algoritmo Simplex

De acordo com Loesch e Hein (2009), com este algorítmo é possível evitar a exploração exaustiva de soluções básicas viáveis, seguindo os princípios:

i) Percorrer as soluções básicas factíveis viáveis, presentes nos vértices do polígono;

ii) Melhorar o valor da função objetivo afim que possa incrementar (em caso de maximizar) ou decrementar (caso de minimizar), a cada etapa; e

iii) Utilizar regra de parada que testem as seguintes situações:

a) Parar caso tenha encontrado a solução ótima;

b) Solução é ilimitada; e

c) Não exista solução viável.

### 5.4.1 Implementação do Método Simplex

De acordo com Belfiore e Fávero (2013), os passos que implementam o algoritmo Simplex podem ser expressos por:

Início: O problema deve estar na forma padrão;

1° Passo: Determinar uma solução básica factível (SBF) inicial;

Uma solução básica factível inicial a ser tentada é atribuir zero as variáveis não básicas (VNB), esta opção não será viável caso alguma restrição não seja satisfeita.

2° Passo: Teste da otimalidade: Uma solução básica factível será considerada ótima, se não houver nenhuma solução básica factível adjacente melhor;

Esta solução básica viável será considerada melhor quando houver um acréscimo de valor na função objetivo; e de forma análoga uma solução básica viável adjacente será considera pior do que a solução básica atual, se houver um decrescimo no valor da função objetivo.

A seguir, a Figura 27 apresenta a descrição geral do algoritmo Simplex.

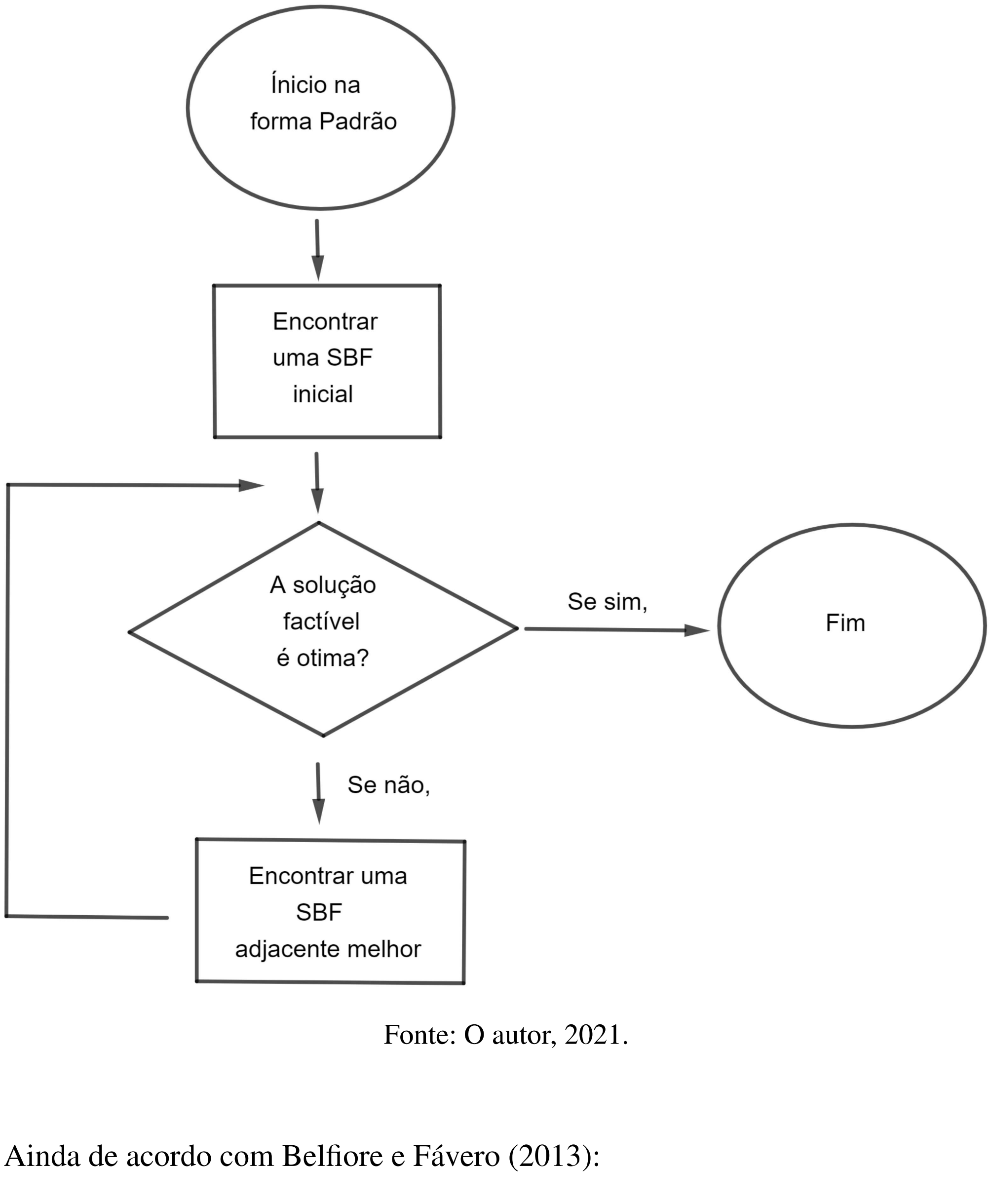
**Figura 27 – Descrição geral do algoritmo Simplex**

**Início:** O problema deve estar na forma padrão.
**Passo 1:** Encontrar uma SBF inicial para o problema de PL.
SBF inicial = SBF atual
**Passo 2:** Verificar se a SBF atual é a solução ótima do problema de PL.
  **Enquanto** a SBF atual não é a solução ótima do problema de PL **faça**
    Encontrar uma SBF adjacente com melhor valor na função objetivo
    SBF adjacente = SBF atual
  **Fim enquanto**

Fonte: Belfiore; Fávero, 2013.

Por outro lado, a Figura 28 ilustra o Fluxograma da descrição geral do algoritmo Simplex.

**Figura 28 – Fluxograma da descrição geral do algoritmo Simplex**




Fonte: O autor, 2021.

Ainda de acordo com Belfiore e Fávero (2013):

Deve-se determinar a direção de incremento para a função objetivo, ou seja, buscar a melhor solução básica factível. Para atingir este objetivo, três passos devem ser tomados:

i) Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas. A escolha da variável não básica que passará para o conjunto das variáveis básicas deve ser aquela que determina um maior incremento, ou seja, a que tiver maior coeficiente positivo na função objetivo $(Z)$;

ii) Determinar a variável básica que passará para o conjunto das variáveis não básicas. A escolha da variável básica que passará para o conjunto das variáveis não básicas deve ser aquela que limita o crescimento da variável não básica selecionada no passo anterior; e

iii) Resolver o sistema de equações recalculando os valores da nova solução básica factível adjacente. Antes disso, o sistema de equações deve ser convertido para uma forma mais conveniente, por meio de operações algébricas elementares, utilizando o método de eliminação de Gauss - Jordan.

Retornando ao exemplo (PRADO, 2016) no início deste capítulo.

Uma fábrica de computadores produz 2 modelos de computador: $x_1$ e $x_2$ . O modelo $x_1$ fornece um lucro de R$180,00 e $x_2$ de R$ 300,00. O modelo $x_1$ requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo $x_2$ requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque: 60 unidades do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Como maximizar o lucro desta empresa?

1° Passo: O PPL deverá ser escrito na forma do item 4.1, deste trabalho;

A função a ser maximizada: $f(x_1, x_2) = Z = 180.x_1 + 300.x_2$

sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 50 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2° Passo: Reescrever as restrições, na forma padrão dos PPL;

função a ser maximizada, ficará:

$Z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = Z = 180x_1 + 300x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

As restrições ficarão:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$

3° Passo: Determinar uma solução básica factível (SBF) inicial;

Uma solução básica inicial é possivel na atribuição dos valores $0\,(zero)$ as variáveis de decisão $x_1$ e $x_2$, variáveis não básicas;

Portanto o novo sistema de desigualdades lineares, com as variáveis não básicas atreladas ao valor nulo, ficarão:

Pela resolução de sistema de equações lineares,

$$\begin{aligned} 0 + x_3 &= 60 \\ 0 + x_4 &= 50 \\ 0 + 2.0 + x_5 &= 120 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$

Logo, pode se concluir que:

$x_3 = 60$; $x_4 = 50$; $x_5 = 120$

Uma solução básica inicial:

Variáveis Não Básicas (VNB) → $x_1 = 0$; $x_2 = 0$

Variáveis Básicas (VB) → $x_3 = 60$; $x_4 = 50$; $x_5 = 120$

Solução → $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \rightarrow \{0, 0, 60, 50, 120\}$

Função objetivo →$z = 180.0 + 300.0 + 0.60 + 0.50 + 0.120 = 0$

Esta solução é visivel na Figura 14, no Capítulo 4, Subseção 4.3.1. Este valor da função objetivo refere-se ao vértice E do polígono.

4° Passo: Teste de Otimalidade

Iteração 1: Determinar uma SBF adjacente melhor.

É notório que esta solução não será a ótima, pois qualquer incremento nas variáveis não básicas implicará num incremento da função objetivo, visto que os coeficientes dessas variáveis são positivos, sendo assim é possível encontrar uma solução básica factível adjacente melhor, para isto, serão necessários três passos:

i) Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (bases).

De $x_1$ e $x_2$, a escolha da retirada da VNB, é aquela que possuir o menor coeficiente na função objetivo, ou seja, $x_1$.

Para $x_1$ será atribuido o valor nulo.

ii) Determinar a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas, aquela que limita mais o crescimento da função objetivo.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 60 \\ x_4 &= 50 - x_2 \\ x_5 &= 120 - 2x_2 \end{aligned}$$

Atentando que todas as variáveis devem ser positivas, logo tem-se:

$x_4 = 50 - x_2 \rightarrow x_4 \geqslant 0 \rightarrow 50 - x_2 \geqslant 0 \rightarrow x_2 \leqslant 50$

$x_5 = 120 - 2x_2 \rightarrow x_5 \geqslant 0 \rightarrow 120 - 2x_2 \geqslant 0 \rightarrow x_2 \leqslant 60$

Como a variavel $x_4$ limita mais o crescimento da variável $x_2$, esta deixará de ser variável básica e passará para variável não básica, e a variável $x_2$ passará a ser considerada variável básica.

(VNB) → $x_1 = 0$; $x_4 = 0$

iii) Resolver o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \quad \text{tem-se:} \quad \begin{aligned} x_3 &= 60 \\ x_2 &= 50 \\ x_5 &= 20 \end{aligned}$$

(VNB) → $x_1,\ x_4 = 0$

(VB) → $x_2 = 50;\ x_3 = 60;\ x_5 = 20$

Solução → $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \rightarrow \{0, 50, 60, 0, 20\}$

Função Objetivo →$z = 180.0 + 300.50 + 0.60 + 0.0 + 0.20 = 15.000,00$

Houve um incremento da solução inicial para a atual, ainda de acordo com a Figura 14, no Capítulo 4, Subseção 4.3.1. Eeste valor da função objetivo refere-se ao vértice A do polígono, até o sentido de percorrer os vértices é bem definido, neste caso o sentido que está sendo percorrido é o horário, de acordo com os vértices EABCD.

4° Passo: Teste de Otimalidade

Iteração 2: Determinar uma SBF adjacente melhor, seguindo os três passos.

Verificar se a SBF adjacente será melhor ou não, se não, terminou, e a solução que maximiza a função objetivo serão os (VNB, $x_1, x_2$) anterior. Mas caso no valor da função objetivo atual, haja algum incremento, o processo continua.

i) Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (bases).

De acordo com a iteração anterior, tem-se:

(VNB)→$x_1,\ x_4$

(VB)$\rightarrow x_2,\ x_3,\ x_5$

É notório que a única variável, que possa gerar algum incremento na função objetivo, é a variável $x_1$ que tinha sido posta nas variáveis não básicas, retorna para a variável básica. As variáveis Básicas será atribuido o valor nulo, que neste caso, será para a variável $x_4$ e para a variável que entrará no lugar de $x_1$.

ii) Determinar a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas, aquela que limita mais o crescimento da função objetivo, que neste caso será a variável que limita o crescimento de $x_1$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \quad \text{Tem - se:} \quad \begin{aligned} x_3 &= 60 - x_1 \\ x_2 &= 50 \\ x_5 &= 20 - x_1 \end{aligned}$$

como as variáveis precisam ser positivas, temos:

$x_3 = 60 - x_1 \rightarrow x_3 \geqslant 0 \rightarrow 60 - x_1 \geqslant 0 \rightarrow x_1 \leqslant 60$

$x_5 = 20 - x_1 \rightarrow x_5 \geqslant 0 \rightarrow 20 - x_1 \geqslant 0 \rightarrow x_1 \leqslant 20$

Como quem limita mais a variável $x_1$ é a variavel $x_5$, ela será posta no lugar de $x_1$, nas variáveis não básicas, (VNB, $x_4, x_5$), que receberam o valor nulo.

iii) Resolver o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \quad \text{Tem-se:} \quad \begin{aligned} x_3 &= 40 \\ x_2 &= 50 \\ x_1 &= 20 \end{aligned}$$

Logo, tem-se:

(VNB) $\rightarrow x_4,\ x_5 = 0$

(VB)$\rightarrow$ $x_1 = 20;\ x_2 = 50;\ x_3 = 40$

Solução $\rightarrow \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \rightarrow \{20, 50, 40, 0, 0\}$

Função Objetivo $\rightarrow z = 180.20 + 300.50 + 0.40 + 0.0 + 0.0 = 18.600,00$

Houve um incremento da solução anterior para a atual, ainda de acordo com a Figura 14, no Capítulo 4, Subseção 4.3.1. Este valor da função objetivo refere-se ao vértice B do polígono.

4° Passo: Teste de Otimalidade

Iteração 3: Determinar uma SBF adjacente melhor, seguindo os três passos.

Verificar se a SBF adjacente será melhor ou não, se não, terminou, e a solução que maximiza a função objetivo serão os (VNB, $x_1, x_2$) anterior. Mas caso no valor da função objetivo atual, haja algum incremento, o processo continua.

i) Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (bases).

De acordo com a iteração anterior, tem-se:

(VNB)→$x_4,\ x_5$

(VB)→$x_1,\ x_2,\ x_3$

As variáveis não básicas será atribuido o valor nulo, que neste caso, será para a variável $x_5$ que limita o crescimento de $x_1$.

ii) Determinar a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas, aquela que limita mais o crescimento da função objetivo, que neste caso será a variável que limita o crescimento de $x_1$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \rightarrow \quad x_1 = 60 - x_3$$

Como as variáveis precisam ser positivas, e das variáveis $x_1$ e $x_2$ , quem atingirá o valor máximo será $x_1$ se $x_3$ for nulo, e será a variável escolhida para sair das (VB) para ir para (VNB), no lugar desta variável, $x_3$, entrará $x_4$.

(VNB) →$x_3,\ x_5$

(VB) → $x_1,\ x_2,\ x_4$

iii) Resolver o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \quad \text{tem-se:} \quad \begin{aligned} x_1 &= 60 \\ x_4 &= 20 \\ x_2 &= 30 \end{aligned}$$

Logo, tem-se:

(VNB) → $x_3,\ x_5 = 0$

(VB) → $x_1 = 60;\ x_2 = 30;\ x_4 = 20$

Solução → $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ → $\{60, 30, 0, 20, 0\}$

Função Objetivo →$z = 180.60 + 300.30 + 0.40 + 20.0 + 0.0 = 19.800$

Houve um incremento da solução anterior para a atual, ainda de acordo com a Figura 14, no Capítulo 4, Subseção 4.3.1. Este valor da função objetivo refere-se ao vértice C do polígono.

4° Passo: Teste de Otimalidade

Iteração 4: Determinar uma SBF adjacente melhor, seguindo os três passos.

i) Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (bases).

De acordo com a iteração anterior, tem-se:

(VNB)→$x_3,\ x_5$

(VB)→$x_1,\ x_2,\ x_4$

Às variáveis não básicas será atribuido o valor nulo, que neste caso, será para a variável $x_2$ , e para $x_3$ que ainda satisfará as condições de todas as variáveis de decisão serão positivas ou nulas.

ii) Determinar a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas, aquela que limita mais o crescimento da função objetivo, que neste caso será a variável que limita o crescimento de $x_1$.

(VNB) → $x_2,\ x_3$

(VB) → $x_1,\ x_4,\ x_5$

iii) Resolver o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \quad \text{tem-se:} \quad \begin{aligned} x_1 &= 60 \\ x_4 &= 50 \\ x_5 &= 60 \end{aligned}$$

Logo, tem-se:

(VNB) → $x_2,\ x_3 = 0$

(VB) → $x_1 = 60;\ x_4 = 50;\ x_5 = 60$

Solução → $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ → $\{60, 0, 0, 50, 60\}$

Função objetivo →$z = 180.60 + 300.0 + 0.0 + 0.50 + 0.60 = 10.800$

Houve um incremento da solução anterior para a atual, ainda de acordo com a Figura 14, Capítulo 4, Subseção 4.3.1. Este valor da função objetivo refere-se ao vértice D do polígono.

4° Passo: Teste de Otimalidade

Iteração 5: Determinar uma SBF adjacente melhor, seguindo os três passos.

i) Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (bases).

De acordo com a iteração anterior, tem-se:

(VNB) →$x_3,\ x_5$

(VB) →$x_1,\ x_2,\ x_4$

Às variáveis não básicas será atribuido o valor nulo, que neste caso, será para a variável $x_3$ que limita o crescimento de $x_1$, e para $x_4$ que também o crescimento da soma $x_2$.

ii) Determinar a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas, aquela que limita mais o crescimento da função objetivo, que neste caso será a variável que limita o crescimento de $x_1$.

(VNB) → $x_3,\ x_4$

(VB) → $x_1,\ x_2,\ x_5$

iii) Resolver o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_4 &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 120 \end{aligned} \quad \text{tem-se:} \quad \begin{aligned} x_1 &= 60 \\ x_2 &= 50 \\ x_5 &= -40 \end{aligned}$$

Logo, tem-se:

(VNB) → $x_3,\ x_4 = 0$

(VB) → $x_1 = 60;\ x_2 = 50;\ x_5 = -40$

Solução → $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ → $\{60, 50, 0, 0, -50\}$

Não sendo possível, pois uma das primeiras condições era as variáveis de decisão serem positivas, o que não ocorreu com a variável $x_5$.

4° Passo: Teste de Otimalidade

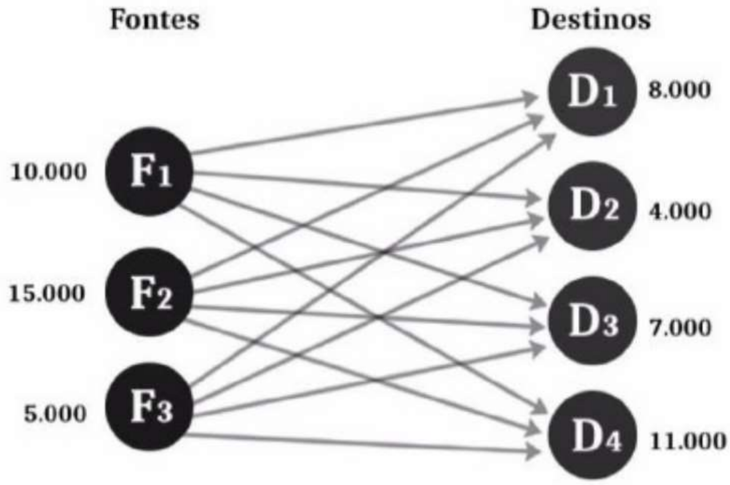
Pela própria definição do teste de otimalidade, a qual cita solução básica factível será considerada ótima, se não houver nenhuma solução básica factível adjacente melhor, quando calculou-se o valor da função objetivo na iteração 3 $(19.800)$, e na iteração 4 $(10.800)$, já seria possível a parada do teste e definir que o valor que maximiza a função objetivo seria $(19.800)$.

## 5.5 O Problema do Transporte

Conforme Loesch e Hein (2009), o problema do transporte é uma série de problemas com as seguintes características: existem $m$ fornecedores (podem ser denotados por fontes), cada um com sua oferta, respectivamente, $a_i = 1, 2, 3, ..., m$, e $n$ consumidores, cada um com sua respectiva demanda, $b_j = 1, 2, 3, ..., n$, que deverão receber as mercadorias dos fornecedores. Será dado o valor do custo de transporte por cada item $i$ para cada sumidouro $j$. Desta forma, existem diversas forma de realizar este deslocamento a fim de atender à demanda. Porém, aplicando a PL é possível planejar uma rota com menor custo e que atenda a todos os depósitos (consumidores). O objetivo é saber a quantidade a ser transportada $x_{ij}$ de cada fonte $i$ para cada sumidouro $j$. Observe o exemplo a seguir extraído de Moreira (2010).

Exemplo. (Adaptado, Moreira, 2010). Existem três fontes de suprimento de um determinado produto, indicadas por F1, F2 e F3, com as seguintes capacidades mensais de produção, respectivamente: 10.000 unidades, 15.000 unidades e 5.000 unidades, totalizando 30.000 unidades disponíveis por mês. Essas três fontes devem suprir as necessidades de quatro armazéns (consumidores), indicados por D1, D2, D3 e D4, com as seguintes demandas de produto por mês: D1 de 8000 unidades, D2 de 4000 unidades, D3 de 7000 unidades, e D4 de 11000 unidades, atingindo um total de 30.000 unidades de produto demandadas por mês.

**Figura 29 – Ilustração do Problema de Transporte**




Fonte: Moreira, 2010, p.146.

Pela Figura 29, tem-se que a fonte 1 produz 10.000 unidades, a fabrica 2 produz 15.000 unidades e que a fábrica 3 produz 5.000 unidades. Os depósitos têm as seguintes capacidades: D1 de 8.000 unidades, D2 de 4.000 unidades, D3 de 7.000 unidades e D4 de 11.000. E as variáveis de decisão $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, ..., x_{34}$, referente ao custo unitário do deslocamento, conforme Tabela 1 abaixo.

**Tabela 1 – Custos unitários de transporte**

| Custos $(x_{ij})$ | Destinos $(j)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fontes $(i)$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 13 | 9 | 8 | 12 |
| 2 | 12 | 9 | 10 | 14 |
| 3 | 8 | 8 | 9 | 6 |

Fonte: O autor, 2021.

Uma melhor representação, conforme o quadro mostrado na Figura 30 abaixo.

**Figura 30 – Quadro com os dados do custo unitário do transporte da Fonte para o Destino**

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $Suprimento$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | (13) $x_{11}$ | (8) $x_{12}$ | (9) $x_{13}$ | (13) $x_{14}$ | 10.000 |
| $F_2$ | (12) $x_{21}$ | (9) $x_{22}$ | (10) $x_{23}$ | (14) $x_{24}$ | 15.000 |
| $F_3$ | (8) $x_{31}$ | (8) $x_{32}$ | (9) $x_{33}$ | (6) $x_{34}$ | 5.000 |
| $Demanda$ | 8.000 | 4.000 | 7.000 | 11.000 | 30.000 |

Fonte: Moreira, 2010, p.146.

Pode-se concluir que:

A função objetivo a ser minimizada (custo):

$$Z = 13x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 13x_{14} + 12x_{21} + 9x_{22} + 10x_{23} + 14x_{24} + 8x_{31} + 8x_{32} + 9x_{33} + 6x_{34}$$

O custo dependerá de quantas viagens serão feitas, considerando o deslocamento fábrica X depósito.

As restrições impostas pelo problema serão divididas em duas etapas: a primeira com relação às fontes, por conta da capacidade de produção e a segunda em relação à demanda, por ter sua capacidade específica e conhecida.

Sujeito às restrições:

Com relação às fontes:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 10.000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 15.000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 5.000 \end{cases}$$

Com relação à demanda:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 8.000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4.000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7.000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 11.000 \end{cases}$$

Para a resolução deste problema, será preciso utilizar o método Simplex ou outro método computacional, por exemplo o Solver do Excel. Porém como já foi mencioado, fica inviável a utilização do método gráfico com 12 variáveis de decisão, além das 7 restrições com esta quantidade de variáveis. Sendo assim, é possível observar que sempre terá $(m \times n)$ variáveis de decisão, e $(m + n)$ restrições, onde $m$ é o número de fontes, e $n$ o número de consumidores.

### 5.5.1 Modelando os Problemas de Transportes

De acordo com Lisboa (2002), deseja minimizar o custo com transporte:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$$

Sujeito às restrições:

De Fabricação (fonte), ficando sujeito a $m$ restrições:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = F_i$$

De Depósito (sumidouro), ficando sujeito a $n$ restrições:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j$$

Para:

- $x_{ij} \geq 0$ para $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$;
- $a_{ij}$ = custo unitário de distribuição entre a fonte $i$ e o destino $j$;
- $x_{ij}$ = total a ser distribuido da fonte $i$ até o destino $j$;
- $F_i$ = total produzido pela fonte $i$; e
- $D_j$ = total a ser armazenado pelo destino $j$.

Ainda de acordo com Lisboa (2002), para que os problemas de transporte tenham solução, é necessário que esteja balanceado, ou seja, o número total armazenado deve ser igual ao número total produzido, definindo-o assim:

$$\sum_{i=1}^{m} F_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

O exemplo acima já estava balanceado, ou seja, o total produzido pelas fontes era equivalente à demanda. Mas caso não o fosse, ou seja, o número total produzido pelas fontes fosse maior que a demanda, ou vice-versa, deveria-se criar uma fonte ou consumidor fictício, respectivamente, a fim que pudesse equilibrar a oferta e a demanda total. Criaria- se um depósito fictício com capacidade = produção total - capacidade total, com custo de distribuição nulo ou uma fábrica com a capacidade = capacidade total - produção total.

## 5.6 Problema da Dieta

De acordo com Loesch e Hein (2009), um dos primeiros problemas a ser resolvido por Programação Linear foi o problema da dieta, por Jerome cornfield, em 1940, porém sem utilizar as técnicas de Programação Linear, Cornfield chegou a um valor muito próximo ao valor ótimo encontrado por Dantzig e Laderman em 1947. O problema da dieta é caracterizado não somente por problemas que envolvam dieta humana, tornou se bastante relevante em numerosas situações, como nas indústrias farmacêuticas, indústrias de cigarros, indústrias têxteis, indústrias siderúrgicas, dentre outras.

### 5.6.1 Modelando o Problema da Dieta

**Exemplo**. (BELFIORE; FÁVERO, 2013) A anemia é uma doença decorrente de baixos níveis de hemoglobina no sangue, proteína esta responsável pelo transporte de oxigênio. Segundo a hematologista Adriana Ferreira, a "ferropriva" é a anemia mais comum e é causada pela deficiência de ferro no organismo. Para sua prevenção, deve-se adotar uma dieta rica em ferro, vitamina A, vitamina B12 e ácido fólico. Esses nutrientes podem ser encontrados em diversos alimentos, como espinafre, brócolis, agrião, tomate, cenoura, ovo, feijão, grão de bico, soja, carne, fígado e peixe. O quadro, mostrado na Figura 31, apresenta as necessidades diárias de cada nutriente, a respectiva quantidade em cada um dos alimentos e o preço por alimento. A fim de prevenir que seus pacientes apresentem esse tipo de anemia, o Hospital Metrópole está estudando uma nova dieta. O objetivo é selecionar os ingredientes, com o menor custo possível, que farão parte das duas principais refeições diárias (almoço e jantar), de forma que 100% das necessidades diárias de cada um desses nutrientes sejam atendidas nas duas refeições. Além disso, o total ingerido nas duas refeições não pode ultrapassar 1,5 kg.

**Figura 31 – Nutrientes, necessidades diárias e custo por alimento**

| | Porção de 100 gramas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ferro | Vitamina A | Vitamina B12 | Ácido fólico | Preço |
| | (mg) | (UI) | (mcg) | (mg) | (R$) |
| Espinafre | 3 | 7.400 | 0 | 0,4 | 0,30 |
| Brócolis | 1,2 | 138,8 | 0 | 0,5 | 0,20 |
| Agrião | 0,2 | 4.725 | 0 | 0,1 | 0,18 |
| Tomate | 0,49 | 1.130 | 0 | 0,25 | 0,16 |
| Cenoura | 1 | 14.500 | 0,1 | 0,005 | 0,30 |
| Ovo | 0,9 | 3.215 | 1 | 0,05 | 0,30 |
| Feijão | 7,1 | 0 | 0 | 0,056 | 0,40 |
| Grão de bico | 4,86 | 41 | 0 | 0,4 | 0,40 |
| Soja | 3 | 1.000 | 0 | 0,08 | 0,45 |
| Carne | 1,5 | 0 | 3 | 0,06 | 0,75 |
| Fígado | 10 | 32.000 | 100 | 0,38 | 0,80 |
| Peixe | 1,1 | 140 | 2,14 | 0,002 | 0,85 |
| **Necessidades diárias** | **8** | **4.500** | **2** | **0,4** | |

Fonte: Belfiore e Fávero, 2013, p.35.

Belfiore e Fávero (2013) modela o problema da seguinte maneira:

- Primeiramente, definem-se as variáveis de decisão:

$x_i$ =quantidade (kg) do alimento, $j$ consumido diariamente, $j$ = 1, 2,..., 12.

Logo tem-se:

$x_1$ = quantidade (kg) de espinafre consumido diariamente.

$x_2$ = quantidade (kg) de brócolis consumido diariamente.

$x_3$ = quantidade (kg) de agrião consumido diariamente.

$\vdots$

$x_{12}$ = quantidade (kg) de peixe consumido diariamente.

A função objetivo do modelo que visa otimizar (minimizar) o custo com os alimentos será:

$z = F(x_1, x_2, ..., x_{12}) = 3x_1 + 2x_2 + 1,8x_3 + 1,6x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 4,5x_9 + 7,5x_{10} + 8x_{11} + 8,5x_{12}$

- Definir as restrições impostas de acordo com as quantidades mínimas de nutrientes e peso máximo de 1,5 kg (almoço mais jantar).

i) Com relação a quantidade mínima diária de ferro:

$30x_1+12x_2+2x_3+4,9x_4+10x_5+9x_6+71x_7+48,6x_8+30x_9+15x_{10}+100x_{11}+11x_{12} \geqslant 80$

ii) Com relação a quantidade mínima diária de Vitamina A:

$74.000x_1+1.388x_2+47.250x_3+11.300x_4+145.000x_5+32.150x_6+410x_8+10.000x_9+320.000x_{11}+14.00x_{12} \geqslant 45.000$

iii) Com relação a quantidade mínima diária de Vitamina B12:

$x_5+10x_6+30x_{10}+1.000x_{11}+21,4x_{12} \geqslant 20$

iv) Com relação a quantidade mínima diária de ácido fólico:

$4x_1+5x_2+x_3+2,5x_4+0,05x_5+0,5x_6+0,56x_7+4x_8+0,8x_9+0,6x_{10}+3,8x_{11}+0,02x_{12} \geqslant 4$

v) Com relação a quantidade máxima diária nas refeições:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} \leqslant 1,5$

vi) Restrições trivias com relação às variáveis de decisão:

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12} \geqslant 0$

Este PPL pode ser escrito na forma:

Min $z=3x_1+2x_2+1,8x_3+1,6x_4+3x_5+3x_6+4x_7+4x_8+4,5x_9+7,5x_{10}+8x_{11}+8,5x_{12}$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 30x_1+12x_2+2x_3+4,9x_4+10x_5+9x_6+71x_7+48,6x_8+30x_9+ \\ +15x_{10}+100x_{11}+11x_{12} \geqslant 80 \\ 74.000x_1+1.388x_2+47.250x_3+11.300x_4+145.000x_5+32.150x_6+ \\ +410x_8+10.000x_9+320.000x_{11}+14.00x_{12} \geqslant 45.000 \\ x_5+10x_6+30x_{10}+1.000x_{11}+21,4x_{12} \geqslant 20 \\ 4x_1+5x_2+x_3+2,5x_4+0,05x_5+0,5x_6+0,56x_7+4x_8+ \\ +0,8x_9+0,6x_{10}+3,8x_{11}+0,02x_{12} \geqslant 4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} \leqslant 1,5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12} \geqslant 0 \\ 1 \leqslant j \leqslant 12 \end{cases}$$

Resolvendo via a ferramenta Solver do Excel, esta ferramenta entrega o resultado ótimo que seria $x_2=0,427\,kg$ de brócolis, $x_7=0,698\,kg$ de feijão, $x_8=0,237\,kg$ de grão de bico, $x_{11}=0,138\,kg$ de fígado, $x_1=x_3=x_4=x_5=x_6=x_9=x_{10}=x_{12}=0$ com $z=5,70$ custo total pelas refeições de $R\$5,70$.

# 6 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo, é apresentada uma proposta de uma sequência didática, onde se faz uma introdução à Programação Linear para alunos do Ensino Médio. Considera-se que os alunos possuam, como pré-requisito, o conhecimento dos seguintes assuntos:

- Função polinomial do primeiro grau e sua representação geométrica no plano cartesiano;
- Resolução de desigualdades lineares do primeiro grau,
- Paralelismo entre retas;
- O básico de planilhas do Excel; e
- O básico do software GeoGebra.

Em relação ao material necessário, computador com os softwares Geogebra, planilha do Excel, Solver do Excel e um editor de textos instalados, além de conexão com a Internet.

Embora, o autor sugira a aplicação deste material após o estudo de desigualdades lineares no ensino de Geometria Analítica, o docente que usar este material pode escolher qual o melhor momento para aplicá-lo.

## 6.1 Atividades

As atividades a seguir, estão organizadas em diferentes niveis de dificuldades e foram elaboradas de maneira que o aluno, ao mesmo tempo que adquire novos conhecimentos, também põe em prática conhecimentos já adquiridos anteriormente, de forma a consolidar o aprendizado. Os problemas são contextualizados com uma temática em evidência atualmente: a pandemia da Covid-19. O uso de tecnologias, juntamente com a contextualização de algo que está fazendo parte do cotidiano de toda a sociedade, propicia uma diversidade nas tarefas, tornando-as mais envolventes. Com isso, dada uma situação-problema, almeja-se que o aluno reconheça o Problema de Programação Linear, analise-o e avalie o método a utilizar para obter a solução, assim como também a própria solução obtida.

Os objetivos específicos destas atividades são:

- Integrar os conhecimentos da educação básica (álgebra e geometria analítica) ao assunto deste trabalho;
- Identificar os termos da Programação Linear;

- Modelar os Problemas de Programação Linear, de acordo com o item 4.2 deste trabalho (modelagem PPL);
- Resolver graficamente os Problemas de Programação Linear;
- Resolver os problemas de Problemas de Programação Linear utilizando recursos digitais (PHPSimplex e Solver do Excel); e
- Aplicar com a ajuda do aluno, a matemática de sala de aula para uma aplicação com um assunto atual.

**Atividade 1 – Plotando semiplanos e regiões poligonais utilizando o *software* GeoGebra**

Faça o que se pede em cada item a seguir.

a) Plote o gráfico da desigualdade $6x + 4y \leq 24$ utilizando o GeoGebra. Verifique a resposta apresentada.

b) Plote, usando o GeoGebra, no mesmo gráfico, as desigualdades $6x + 4y \leq 24$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

c) Resolva geometricamente o sistema de desigualdades abaixo utilizando o GeoGebra

$$\begin{cases} 6x + 4y \leq 24 & (1) \\ x + 2y \leq 6 & (2) \\ -x + y \leq 1 & (3) \\ y \leq 2 & (4) \\ x \geq 0 & (5) \\ y \geq 0 & (6) \end{cases}$$

**Atividade 2 – Resolução pelo método gráfico de um Problema de Programação Linear de duas variáveis**

Resolva, pelo método gráfico, o seguinte Problema de Programação Linear $P_2$ (TAHA, 2008, p.8):

$P_2$: Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$

Sujeito a

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad &(7)\\
x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad &(8)\\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \quad &(9)\\
x_2 &\leq 2 \quad &(10)\\
x_1 &\geq 0 \quad &(11)\\
x_2 &\geq 0 \quad &(12)
\end{aligned}
$$

**Atividade 3 – Um problema de maximização de duas variáveis**

**Problema 3**. Um posto de saúde atende o público para vacinar contra a Covid-19 somente com agendamento prévio pelo telefone ou WhatsApp. No momento, a prioridade é para idosos acima de 70 anos e pessoal da saúde que trabalha na linha de frente no combate à Covid-19. No agendamento de um determinado dia, por questões técnicas, há somente uma pessoa escalada para vacinar o público. Por isso, limitou-se o número de atendimentos neste dia a, no máximo, 90 pessoas do grupo de idosos e 100 pessoas do grupo da saúde. A funcionária que aplica a vacina gasta 3 minutos para vacinar uma pessoa do grupo da saúde, 4 minutos para vacinar um idoso e trabalha 8 h por plantão.

a) Quais são as variáveis de decisão do problema?

b) Escreva a função objetivo;

c) Descreva as restrições de não negatividade;

d) Descreva a restrição (desigualdade linear) que exprime a quantidade de minutos que a funcionária tem disponíveis para o atendimento no total;

e) Descreva a restrição (desigualdade linear) que exprime a quantidade de número de pessoas do grupo de idosos disponíveis para serem atendidos;

f) Descreva a restrição (desigualdade linear) que exprime a quantidade de número de pessoas do grupo da saúde disponíveis para serem atendidos;

g) Formule o problema $P_3$ de programação linear.

h) Com o auxílio do GeoGebra, esboce o gráfico da região viável do problema;

i) Enumere os pontos extremos (em que duas retas se intersectam) da região viável e os respectivos valores da função objetivo correspondente.

j) Plote a reta descrita pela função objetivo, deslize-a pela região viável. Qual a solução ótima que maximiza o número de pessoas atendidas? Justifique sua resposta.

k) Outra ferramenta que utiliza o método gráfico para resolver um PL é a ferramenta online PHPSimplex. Para resolver o mesmo Problema $P_3$ via esta ferramenta, escolha a opção método gráfico na janela de entrada dos dados do problema, insira os dados e obtenha a solução do problema.

l) Compare este procedimento com o utilizado no GeoGgebra para resolução de $P_3$. Comente as vantagens de se usar cada um dos recursos computacionais, GeoGebra e PHPSimplex.

m) Novamente, utilizando a ferramenta online PHPSimplex, resolva o mesmo Problema, $P_3$.

n) A solução ótima encontrada via PHPSimplex é a mesma nos dois métodos (método gráfico e método Simplex)?

o) Quantas pessoas de cada grupo devem ser vacinadas para que o total de pessoas vacinadas seja máximo?

p) Qual o número máximo de pessoas que devem ser vacinadas no total?

**Atividade 4 – Um problema de minimização de duas variáveis**

**Problema 4**

Doses de uma vacina contra a Covid-19 devem ser transportadas de São Paulo para o Rio de Janeiro. A companhia aérea responsável pelo transporte tem dois tipos de aviões, o Aero 1 e o Aero 2. O Aero 1 pode transportar no máximo 18 contêineres do tipo A e 12 do tipo B; e o Aero 2, 15 do tipo A e 20 do tipo B. A quantidade de doses da vacina a ser transportada está armazenada em 360 contêineres do tipo A e em 420 do tipo B. A companhia calcula ser necessário 2.500 litros de combustível para uma viagem do Aero 1 e 2400 litros com o Aero 2. Quantas viagens deverão ser feitas com cada tipo de avião para que se utilize a menor quantidade de combustível possível? Qual o valor do custo mínimo total? Para resolver este problema, siga o roteiro estabelecido abaixo e faça o que se pede.

(Considere o preço do litro de combustível R$ 3,20).

a) Quais são as variáveis de decisão do problema?

b) Escreva a função objetivo;

c) Descreva as restrições de não negatividade;

d) Descreva a restrição (desigualdade) que exprime a quantidade de contêineres do tipo A disponíveis;

e) Descreva a restrição (desigualdade) que exprime a quantidade de contêineres do tipo B disponíveis;

f) Formule o Problema de Programação Linear.

g) Com o auxílio do GeoGebra, esboce o gráfico da região viável do problema;

h) A região viável é limitada?

i) Enumere os pontos extremos (em que duas retas se intersectam) da região viável e os respectivos valores da função objetivo correspondente.

j) Plote a reta descrita pela função objetivo, deslize-a pela região viável. Qual a solução ótima que minimiza o custo total? Justifique sua resposta.

k) Agora utilizando a ferramenta online PHPSimplex, resolva o mesmo problema, $P_4$, escolhendo a opção método gráfico.

l) Novamente, utilizando a ferramenta online PHPSimplex, resolva o mesmo problema, $P_4$, escolhendo a opção método Simplex.

m) Quantas viagens deverão ser feitas com cada tipo de avião para que gaste o mínimo de combustível possível?

n) Qual o valor do custo total mínimo?

### Atividade 5 – Um problema de maximização de três variáveis

**Problema 5**

A distribuidora Revendex vende álcool gel, máscaras cirúrgicas e sabonete líquido somente em *kits*. Estes são montados na própria distribuidora. A composição e o valor de venda de cada *kit* e a quantidade em estoque de cada produto estão descritos na Tabela 2 abaixo.

**Tabela 2 – Composição dos kits**

| Produtos | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 3 | Quantidade em estoque |
|---|---|---|---|---|
| Álcool em gel (frasco) | 6 | 9 | 3 | 480 |
| Máscaras cirúrgicas (caixa) | 3 | 4 | 2 | 250 |
| Lucro na venda do kit (R$) | 78,00 | 112,50 | 52,50 | |

Fonte: O autor, 2021.

a) Quais são as variáveis de decisão do Problema $P_5$?

b) Escreva a função objetivo;

c) Descreva a restrição (desigualdade) que exprime a quantidade de frascos de álcool em gel disponíveis;

d) Descreva a restrição (desigualdade) que exprime a quantidade de caixas de máscaras disponíveis;

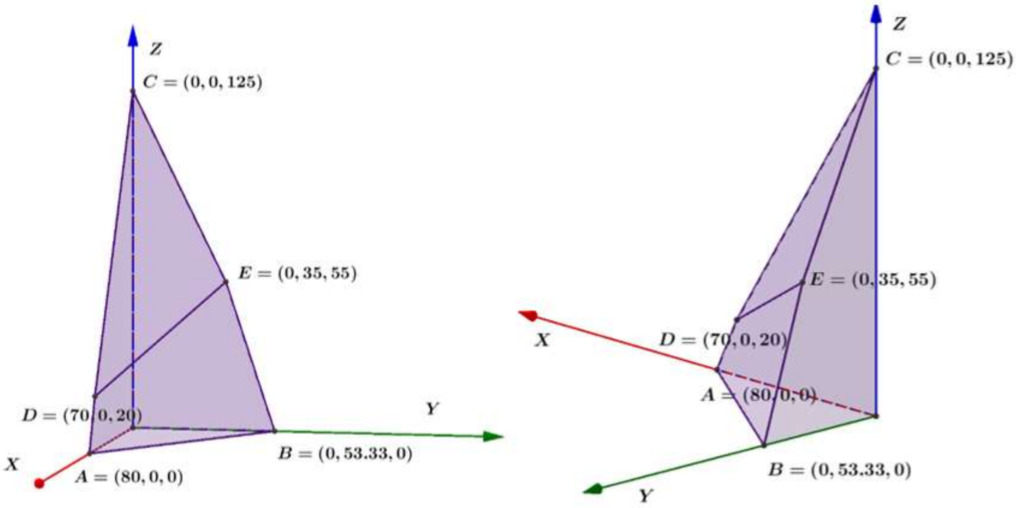
e) Descreva as restrições de não negatividade;

f) Formule o Problema de Programação Linear $P_5$

Para resolver Problemas de PL de três variáveis, pelo método gráfico, a visualização da região viável se torna mais difícil. Observe, na Figura 32, o gráfico da região viável para o

Problema $P_4$ obtido pelo método gráfico com o auxílio do GeoGebra.

**Figura 32 – Figura Atividade 5**




Fonte: O autor, 2021.

Analogamente, nos problemas de PL com três variáveis a solução ótima, quando existe e é única, é um dos pontos extremos (vértices da região poliedral) da região viável. Baseando-se neste fato e na Figura 32, responda aos itens a seguir.

g) Enumere os pontos extremos da região viável, mostrada na Figura 32, e os respectivos valores da função objetivo.

h) Qual a solução ótima? E o valor do lucro total máximo?

i) Exiba o modelo do Problema P4 em uma planilha do Excel.

j) Resolva o Problema $P_5$ utilizando o Solver do Excel;

k) Agora utilizando a ferramenta online PHPSimplex, resolva o mesmo Problema $P_5$, escolhendo a opção método Simplex/Duas fases na janela de entrada dos dados do Problema. Compare os dois processos utilizados para a resolução do Problema P4. Comente as vantagens de se usar cada uma dessas duas ferramentas computacionais na resolução de um Problema de PL.

l) Qual a quantidade de kits de cada tipo que maximiza o valor total do lucro?

m) Qual o valor máximo do lucro?

**Atividade 6 – Um problema de minimização com mais de três variáveis**

Esta atividade foi elaborada para ser desenvolvida em grupo.

**Problema 5**

A empresa Vidros S.A produz embalagens de vidro para a indústria farmacêutica. Ela possui duas fábricas, localizadas em cidades diferentes, cuja produção foi direcionada exclusivamente para a produção de frascos de vacinas contra a Covid-19. Três laboratórios fizeram pedidos e compraram toda a produção de um semestre. Na Tabela 3 abaixo, mostra-se o custo de remessa de um lote contendo 1 milhão de frascos da Fábrica $i$, $1 \leq i \leq 2$, para o Laboratório $j$, $1 \leq i \leq 3$; a produção de um semestre de cada fábrica e o total de frascos pedidos por cada laboratório.

**Tabela 3 – Custo de remessa por 1 milhão de unidades**

| | Laboratório 1 | Laboratório 2 | Laboratório 3 | Produção |
|---|---|---|---|---|
| Fábrica 1 | 3000 | 4000 | 3500 | 100 milhões |
| Fábrica 2 | 2000 | 4500 | 3000 | 125 milhões |
| Pedido | 75 milhões | 50 milhões | 100 milhões | |

Fonte: O autor, 2021.

Quantos frascos de cada fábrica foram atribuídos a cada laboratório de maneira que o custo total de remessa seja o mínimo possível?

a) Formule o modelo de Programação Linear para este problema.

b) Exiba o modelo em uma planilha do Excel.

c) Use a planilha para verificar se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 100, 75, 50, 0)$ é uma solução viável do Problema $P_6$ e, caso possível, diga qual o custo total de remessa? Quantos frascos cada fábrica enviou para cada laboratório?

d) Use o Solver do Excel para solucionar P5 pelo método Simplex.

e) Use o PHPSimplex para solucionar P5 pelo método Simplex.

f) Qual a solução ótima do Problema? Qual o custo total de remessa?

# 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho de conclusão de curso apresenta aos alunos do Ensino Médio uma ferramenta da Pesquisa Operacional (PO) que é a Programação Linear (PL) a qual permite resolver problemas específicos de otimização e mostrar a estes alunos que a Matemática não se aplica tão somente a sala de aula, mas ela está presente e é utilizada na vida real. Matemática esta que começa a ser aprendida no Ensino Fundamental II e conclui-se com tópicos do ensino médio, como desigualdades lineares e função lineares.

Para atingir o objetivo deste trabalho, apresentam-se alguns problemas de programação linear, seus respectivos modelos matemáticos e soluções. Entre estes, apresentam-se o modelo do problema da dieta e o problema de transporte. Enfatizam-se estes dois modelos, pois eles não se aplicam tão somente a problemas de dieta e de transportes, respectivamente, mas sim a uma série de problemas como, por exemplo, para fazer um mixer de elementos para produzir uma liga metálica a qual atribui o modelo do problema da dieta.

Utilizar o método gráfico para os problemas de PL só é viável com problemas de duas variáveis. Resolver os problemas de três variáveis dependendo das restrições se torma muito difícil por este método. A partir de problemas com quatro variáveis se torna impossível usar o método gráfico. Portanto, dependendo do número de variáveis,torna-se mais viável o uso das ferramentas digitais, como, por exemplo, o Solver do Excel ou o PHP Simplex. Porém, o método gráfico também fornece a ideia do que ocorre na resolução de um problema de PL via o método Simplex. Sendo assim, sua introdução como primeiro método para obter uma solução para um problema de PL é crucial.

São apresentadas todas as etapas da resolução de um problema de PL mostrando passo a passo desde a modelagem até a obtenção da solução do mesmo, tanto utilizando o método gráfico quanto ferramentas digitais. A intenção não é fazer um estudo aprofundado de vários tipos de modelos de PL, mas sim mostrar aos alunos as etapas da resolução de um problema de PL como: modelar o problema, as variáveis de decisão, definir a função objetivo e as restrições, construir a região viável, identificando os seus extremos os quais são os candidatos a otimizar a função objetivo. Além de conhecer dois modelos clássicos de PL: o Problema de Transporte e o Problema da Dieta com mais detalhes.

Espera-se que as atividades propostas, as quais são apresentadas em uma sequência que contempla todos os conteúdos expostos neste trabalho de forma gradativa, e relacionando-as a um assunto bem atual, a pandemia da COVID – 19, sejam motivadoras a fim de que os alunos tenham um participação ativa durante a execução das mesmas favorecendo assim o aprendizado. Conforme capítulo 6, inicia-se com os sistemas de desigualdades lineares, na sequência nomenclaturas dos termos do PPL, e por fim, analisa a função objetivo, chegando assim, na solução ótima do PPL de forma gradativa.

Em virtude da pandemia da Covid-19, as atividades propostas não puderam ser aplicadas a um grupo de alunos. Espera-se que em um futuro próximo isto possa ser feito, além de que este trabalho não só contribua com o aprendizado de Programação Linear para os alunos do Ensino Médio, mas também seja um ponto de partida para incentivar os jovens a adquirirem o gosto pela pesquisa em Matemática.

**REFERÊNCIAS**

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to Linear Optimization**. Massachusetts: Athena Scientific, 1997.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BRASIL, G. **Programação Linear: uma possível abordagem no Ensino Médio**. Dissertação (Mestre em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas, Amazonas, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2020.

CANAVARRO, C. **Apostila de Programação Linear**: problema de transporte. Portugal: Instituto Politécnico de Castelo Branco, 2005.

DANTZIG, G. B. **Linear Programming and Extensions**. Princeton: Princeton University Press, 1963.

GARZÓN, G. R. Una aplicación didáctica del método de fourier-motzkin a los problemas de programación matemática. **Épsilon - Revista de Educación Matemática**, v. 31 (1), n. 86, p. 77–91, 2014. Disponível em: <https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon86.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2020.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2017.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na tomada de decisões**. 1. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LISBOA, E. F. A. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2002. Disponível em: <https://ericolisboa.eng.br/cursos/apostilas/po/po.pdf>. Acesso em: 28 nov 2020.

LOESCH, C.; HEIN, N. **Pesquisa Operacional**: fundamentos e modelos. São Paulo: Saraiva, 2009.

MACAMBIRA, A. F. U. dos S. et al. **Programação Linear**. João Pessoa: Editora da UFPB, 2016.

MACULAN, N.; FAMPA, M. H. C. **Otimização Linear**. Brasília: EdUnB, 2006.

MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011. Disponível em: <https://www.faculdadeparque.edu.br/ebooks/Introducao_pesquisa_operacional.pdf>. Acesso em: 28 nov 2020.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa Operacional**: curso introdutório. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

PRADO, D. S. de. **Programação Linear**. 7. ed. Belo Horizonte: Ed. Falconi, 2016.

RODRIGUES, L. H. et al. **Programação Linear passo a passo**: do entendimento do problema à interpretação da solução. São Leopoldo: Ed.Unisinos, 2014.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

# APÊNDICES

# APÊNDICE A – PROGRAMAÇÃO MISTA

Nos exemplos vistos até agora, os modelos foram todos de Programação Linear, ou seja, as variáveis poderiam assumir valores reais, desde que satisfizessem as restrições impostas. Em alguns situações, precisa-se impor que todas as variáveis assumam valores inteiros, e nestes casos tem-se um Problema de Programação Linear Inteira (PLI). Em outras situações, apenas algumas variáveis precisam ser inteiras, e nestes casos tem-se um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM). Para resolver Problemas de Programação Linear Inteira ou Programação Linear Inteira Mista deve-se usar uma estratégia especial para sua resolução.

De acordo com Taha (2008, p. 266), esta estratégia se divide em três etapas:

Etapa 1. Relaxar a região de soluções da Programação Linear Inteira (PLI), eliminando as restrições de integralidade de todas as variáveis inteiras do problema e substituindo qualquer variável binária $y$ pela faixa contínua $0 \leq y \leq 1$. O resultado da relaxação é um problema de PL normal;

Etapa 2. Resolver o problema de PL e identificar a solução ótima contínua;

Etapa 3. Começando do ponto ótimo contínuo, adcionar restrições especiais que modifiquem iterativamente a região de soluções do problema de PL de maneira que, a certa altura, resultará em um ponto extremo que satisfará as restrições de integralidade aplicadas às variáveis inteiras.

Ainda de acordo com Taha (2008), dois métodos gerais foram criados para gerar as restrições especiais, conforme Etapa 3.

1. O método branch-and-bound (B&B); e

2. O método dos planos de corte.

## Algorítmo Branch-and-Bound (B&B)

Este método foi desenvolvido em 1960, por A. Land e G. Doig, segundo Taha (2008), método este que funciona para resolução de problemas mistos e programação linear inteira (PLI). Cinco anos após, mais precisamente em 1965, E. Balas desenvolveu o algorítmo aditivo a fim de resolver problemas PLI com variáveis binárias puras (variáveis assumindo os valores 0 e 1).

O método Branch-and-Bound (ramificação e limitação) consiste basicamente em dado um problema de PLI ou PLIM, sua relaxação linear é o problema que possui a mesma função objetivo e as mesmas restrições, porém todas as variáveis passam a ser consideradas contínuas.

Exemplo

De acordo com Taha (2008, p. 266)

Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \end{cases}$$

$x_1, x_2$ inteiras e não negativas.

Conforme o próprio termo "branch" (ramificação), inicia-se no **nó 0**, que seria a relaxação linear.

Problema original

Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \end{cases}$$

$x_1, x_2$ inteiras e não negativas.

Problema relaxado (contínuo)

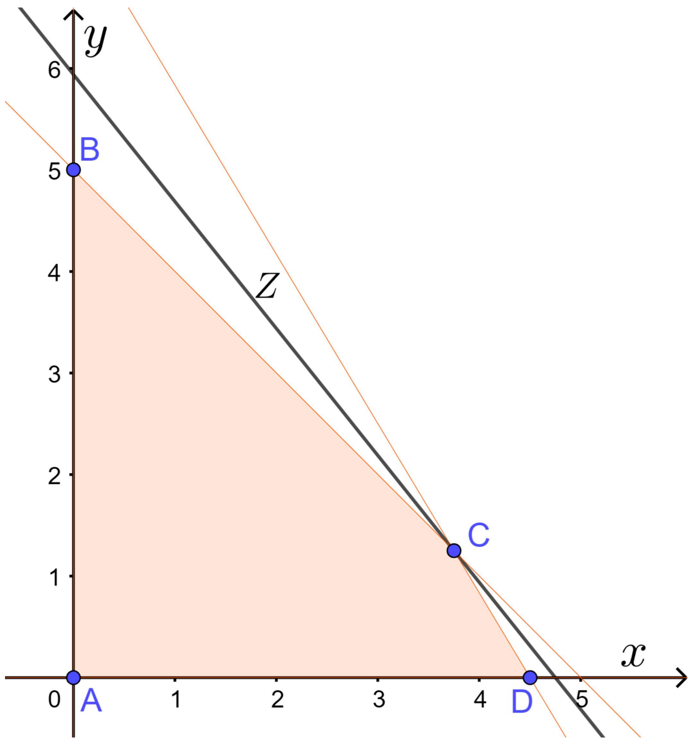
Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Parte-se do problema relaxado, levando-se em consideração que as variáveis de decisão agora são contínuas e, portanto, o problema relaxado pode ser resolvido por qualquer um dos métodos apresentados neste trabalho. Como este problema tem duas variáveis de decisão, será realizada uma abordagem gráfica, conforme Figura 62.

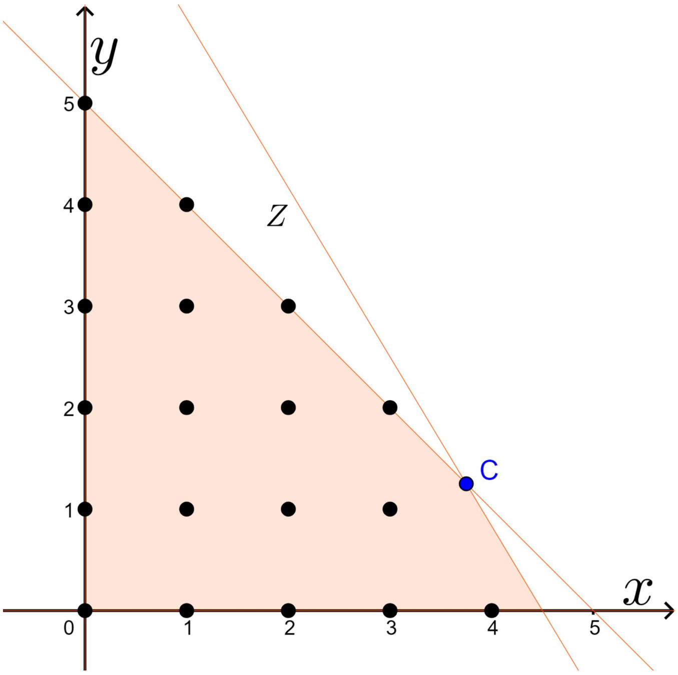
**Figura 33 – Solução relaxada**




Fonte: O autor, 2021.

A solução ótima relaxada ficará no ponto $C(3,75; 1,25)$ e terá o valor de $z = 23,75$. Porém esta solução não será viável no problema original, visto que as variáves de decisão só podem assumir valores inteiros e não negativos. A partir deste ponto será iniciado o método B&B na região viável, que ficará restrita aos candidatos inteiros para as variáveis de decisão, conforme Figura 34. Os pontos em destaque serão denominados pontos inteiros viáveis.

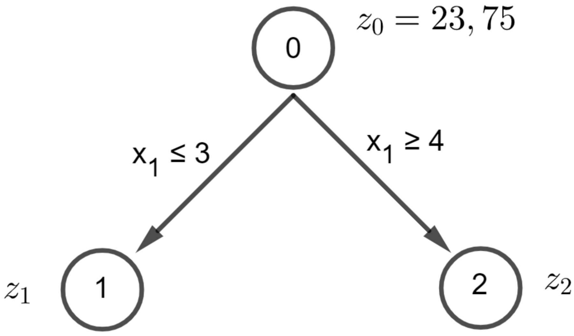
**Figura 34 – Possíveis candidatos a soluções inteiras**




Fonte: O autor, 2021.

Pela limitação aplicada por este método, a partir de $x_1 = 3,75$, por eliminação, exclui-se o intervalo $3 < x_1 < 4$ dado para esta variável, devido a não existir um valor inteiro pertencente a este, e, pela ramificação, será possível subdividir em dois casos, mutualmente excludentes, que seriam $x_1 \leq 3$ e $x_1 \geq 4$, para $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$, conforme Figura 35, ou seja, terá um limitante superior, $x_1 \leq 3$, e um limitante inferior, $x_1 \geq 4$.

**Figura 35 – Ramificação inicial**




Fonte: O autor, 2021.

O primeiro nó, ou nó raiz, é a resolução do problema relaxado com as variáveis contínuas, $x_1 = 3,75$, $x_2 = 1,25$, $z_0 = 23,75$. A partir das novas restrições, $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$, serão gerados dois novos valores para a função objetivo, $z_1$, $z_2$, respectivamente, conforme Figura 36.

Logo tem-se:

Problema $z_1$

Maximizar $z_1 = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

$x_1, x_2$ inteiras e não negativas.

Problema $z_2$

Maximizar $z_2 = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2$ inteiras e não negativas.

Logo para:

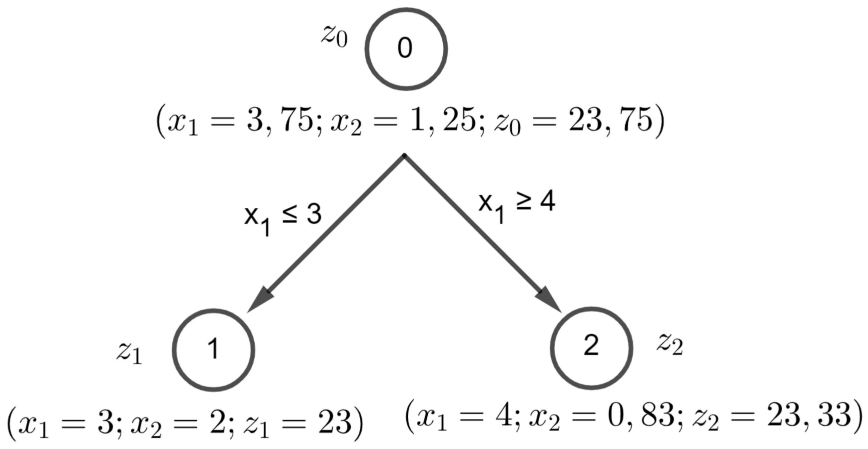
Problema $z_1$

$x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z_1 = 23$

Problema $z_2$

$x_1 = 4$, $x_2 = 0,83$, $z_2 = 23,33$

**Figura 36 – Primeira iteração**



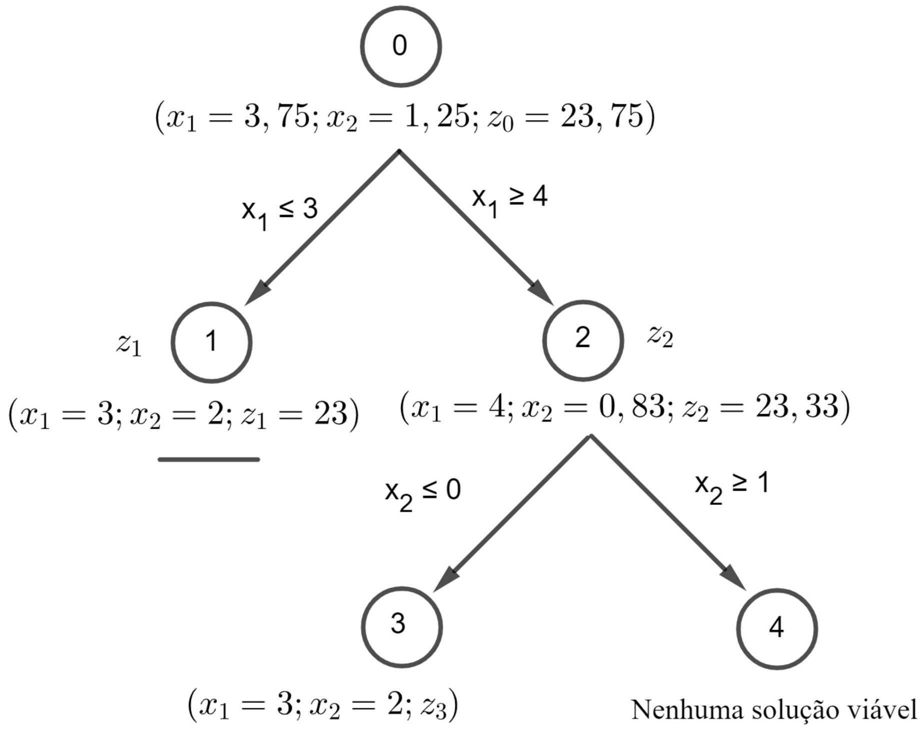

Fonte: O autor, 2021.

A solução ótima do problema relaxado será sempre melhor ou igual à solução do problema original, com as variáveis inteiras e não negativas. Nos nós subsequentes, algumas variáveis inteiras que resultaram em valores fracionários na solução ótima do problema relaxado são usadas para novas ramificações e serão gerados dois novos problemas.

Como no nó 1 as variáveis de decisão são inteiras, este nó não gerará mais ramificações, pois foram atendidas às condições iniciais do problema. Se fossem geradas novas ramificações a partir do nó 1, estas teriam valores para a função objetivo menores ou iguais ao valores da função objetivo para o nó 1.

Mas no nó 2, como a variável de decisão $x_2$ não resultou em um valor inteiro, esta servirá como um novo limitante. O nó 2 gerará dois novos valores para a variável $x_2$, excluindo-se o intervalo $0 < x_2 < 1$, por não ter valores inteiros. Logo serão criados os nós 3 e 4, de acordo com as restrições $x_2 \leq 0$ e $x_2 \geq 1$, respectivamente, conforme Figura 37.

**Figura 37 – Segunda iteração**




Fonte: O autor, 2021.

Logo tem-se:

Problema $z_3$

Maximizar $z_3 = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2$ inteiras e não negativas.

Problema $z_4$

Maximizar $z_4 = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$x_1, x_2$ inteiras e não negativas.

Logo para:

Problema $z_3$

$x_1 = 4,5$, $x_2 = 0$, $z_3 = 22,5$

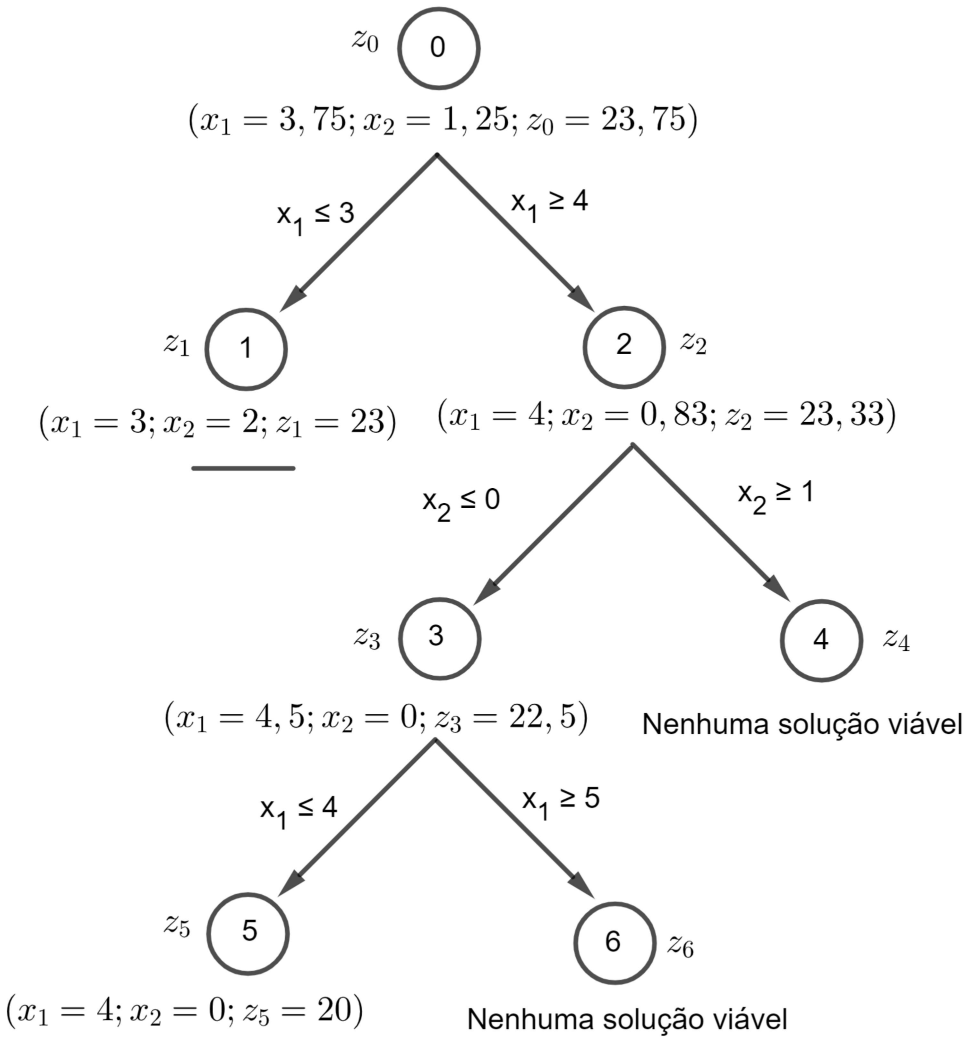
Problema $z_4$

Não existe solução viável

Neste momento já seria possível parar as iterações, pois no nó 1 o valor ótimo é $z_1 = 23$, e todas as variáveis são inteiras e não negativas, e no nó 3, onde as variáveis de decisão são inteiras e não negativas, tem-se o valor de $z_3 = 22,5$, e para as futuras ramificações, os valores para a função objetivo serão menores ou iguais a $22,5$. Por outro lado, $z_4$ não é uma solução a ser considerada, pois não pertence à região viável original.

A partir de $z_3$, como tem-se a variável de decisão $x_1$ não inteira, seria necessária a realização de mais uma iteração, conforme Figura 38.

**Figura 38 – Terceira iteração**




Fonte: O autor, 2021.

Como dito na iteração anterior, os valores de $z_5$ e $z_6$ eram esperados serem menores ou iguais do que o valor do nó 3, $z_3$. No nó 5 tem-se $z_5 = 20$, e no nó 6 tem-se um problema inviável, e portanto este nó poderá ser desconsiderado.

Pode-se concluir que a solução ótima encontra-se no nó 1, cujo valor é $z_1 = 23$. Este valor é próximo ao valor ótimo contínuo no nó 0, $z_0 = 23,75$.

Nos problemas de Programação Inteira Mista (PIM) pode-se também utilizar o método B&B para tratar das restrições de integralidade e resolver o problema de forma iterativa. Para maiores detalhes sobre este método e o método dos planos de corte ver Taha (2008).

# APÊNDICE B – MÚLTIPLAS SOLUÇÕES

## Múltiplas (infinitas) soluções ótimas

Quando a representação geométrica da função objetivo, para um valor fixo de $z$, é paralela a uma das fronteiras da região viável, onde os valores ótimos são atingidos, o segmento de reta que representa os valores de $z$ nesta região formará um conjunto de soluções ótimas, ou seja, o conjunto solução será constituido precisamente por este segmento de reta. Como em um segmento de reta existem uma infinidade de pontos, estes serão todos pontos ótimos, conforme ilustrado pelo segmento de reta (C – D) da Figura 39.

Exemplo: Seja o seguinte modelo de Programação Linear:

Max $z = 5x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

$x_1 + x_2 \leq 6$

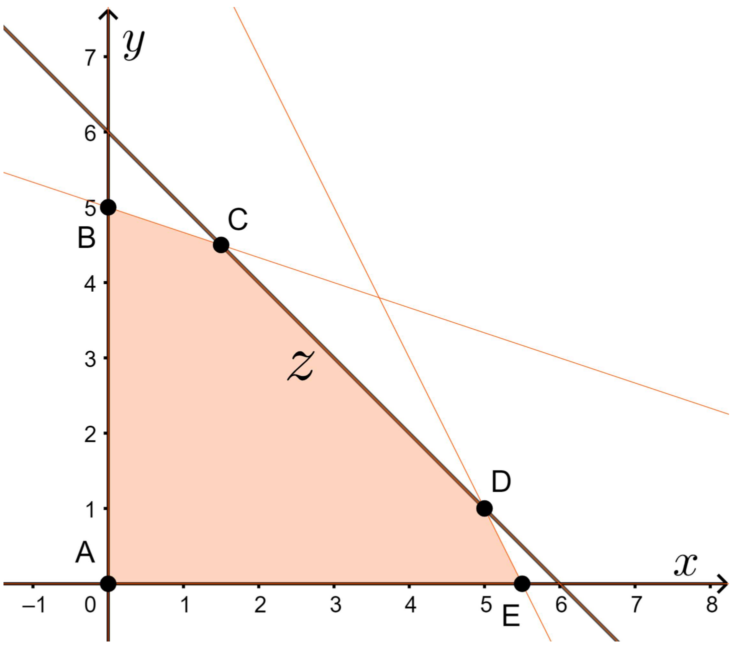
$2x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1 + 3x_2 \leq 15$

$x_1; x_2 \geq 0$

Resolvendo graficamente, tem se:

**Figura 39 – Soluções múltiplas**



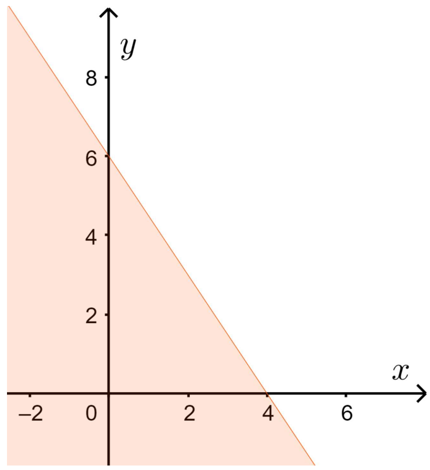

Fonte: O autor, 2021.

# APÊNDICE C – RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES

Resolução da Atividade 1

a) Plote o gráfico da desigualdade $6x + 4y \leq 24$ utilizando o GeoGebra. A Figura 40 mostra a resposta obtida.

**Figura 40 – Resposta do item (a) da Atividade 1**




Fonte: O autor, 2021.

A região colorida é o semiplano cujos pontos satisfazem a desigualdade $6x + 4y \leq 24$.

Para verificar que a região colorida é a região procurada (semiplano), tome o ponto $(0, 0)$ que está localizado abaixo da reta $6x + 4y = 24$, então tem-se

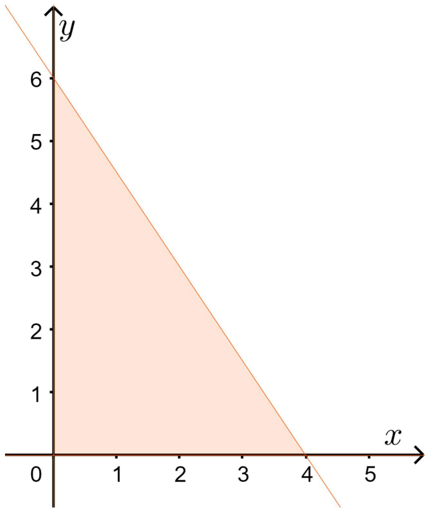
$$6 * 0 + 4 * 0 \leq 24 \rightarrow 0 + 0 \leq 24 \rightarrow 0 \leq 24$$

Como $0$ é menor ou igual a $24$, logo a região que satisfaz a desigualdade $6x + 4y \leq 24$ ficará abaixo da reta $6x + 4y = 24$.

b) Plote, usando o GeoGebra, no mesmo gráfico, as desigualdades $6x + 4y \leq 24$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

A região delimitada pelas desigualdades $6x + 4y \leq 24$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$ é mostrada na Figura 41.

**Figura 41 – Resposta do item (b) da Atividade 1**



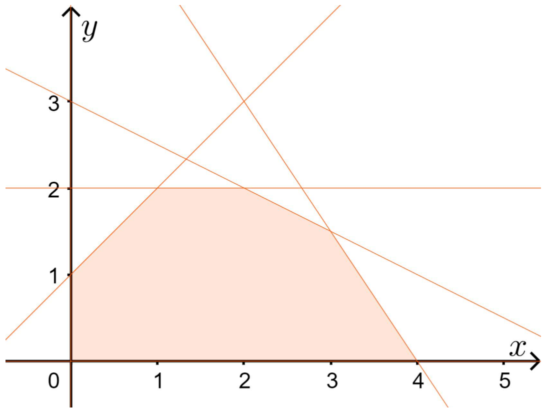

Fonte: O autor, 2021.

c) Resolva geometricamente o sistema de desigualdades abaixo utilizando o GeoGebra.

$$\begin{cases} 6x+4y \leq 24 & (1) \\ x+2y \leq 6 & (2) \\ -x+y \leq 1 & (3) \\ y \leq 2 & (4) \\ x \geq 0 & (5) \\ y \geq 0 & (6) \end{cases}$$

O conjunto solução do sistema de desigualdades (1), (2), (3), (4), (5), (6) está representado na Figura 42.

**Figura 42 – Resposta do item (c) da Atividade 1**




Fonte: O autor, 2021.

Nesta atividade, o aluno poderá resolver as desigualdades lineares utilizando o software GeoGebra como ferramenta didática, e com este aprendizado, será esperado que o aluno possa construir a região viável nos exercícios posteriores e se familiarizar com esta ferramenta didática. Na região viável, o aluno pode verificar o conjunto convexo bem como os seus extremos (vértices).

Resolução da Atividade 2

Maximizar $z = f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$

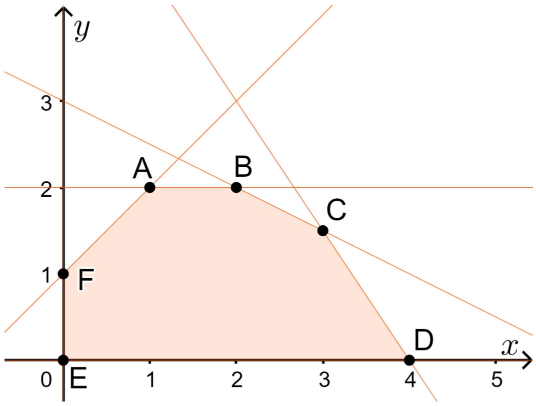
Sujeito a:

$$\begin{array}{cc} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 & (7) \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 & (8) \\ -x_1 + x_2 \leq 1 & (9) \\ x_2 \leq 2 & (10) \\ x_1 \geq 0 & (11) \\ x_2 \geq 0 & (12) \end{array}$$

1° etapa

Determinar a região viável, ou seja, determinar o conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições (7), (8), (9), (10), (11) e (12) do problema. A região viável é mostrada na Figura 43.

**Figura 43 – Resposta do item (a) da Atividade 2**

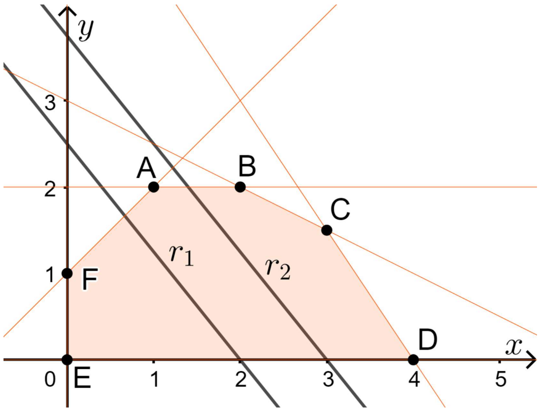



Fonte: O autor, 2021.

A região viável é o polígono de vértices $A(1,2)$, $B(2,2)$, $C(3,3/2)$, $D(4,0)$, $E(0,0)$ e $F(0,1)$ (Figura 43).

Outra possibilidade seria no *software* GeoGebra nomear o eixo $x$ e o eixo $y$, de $x_1$ e $x_2$ , respectivamente.

**Figura 44 – Representação gráfica da região viável e das retas $r_1$ e $r_2$**




Fonte: O autor, 2021.

2° etapa

No mesmo gráfico da região viável acrescentar as retas paralelas $r_1$ e $r_2$ pertencentes à família de retas $5x_1 + 4x_2 = c$, $c$ constante real.

É possivel ver que as famílias de retas $5x_1 + 4x_2 = c$, $c$ constante real, serão sempre paralelas (Figura 44).

É possivel observar que o ponto, dentro da região viável, que maximiza $z$,será um extremo (vértics) deste polígono, e que pertencerá a família de retas paralelas a $5x_1 + 4x_2 = c$.

Basta calcular o valor de $f(A)$,$f(B)$, $f(C)$, $f(D)$, $f(E)$, $f(F)$.

$f(A) = 5 * 1 + 4 * 2 = 13$

$f(B) = 5 * 2 + 4 * 2 = 18$

$f(C) = 5 * 3 + 4 * 1,5 = 21$

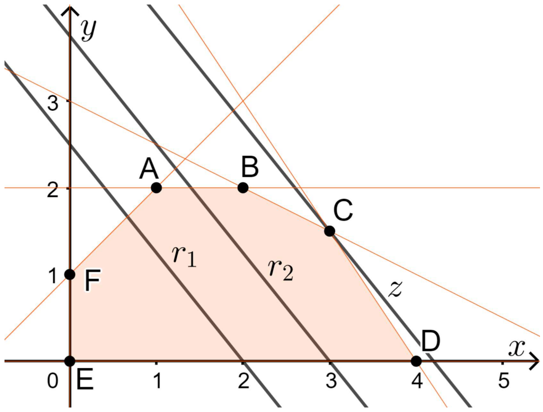
$f(D) = 5 * 4 + 4 * 0 = 20$

$f(E) = 5 * 0 + 4 * 0 = 0$

$f(F) = 5 * 0 + 4 * 1 = 4$

Logo, o valor máximo de $z$, sujeito as restrições impostas, será 21, conforme ilustra a Figura 45 abaixo.

**Figura 45 – Resposta Atividade 2**




Fonte: O autor, 2021.

Nesta atividade é apresentado ao aluno um exercício padrão de programação linear, sem contextualização, e será possível o conhecimento das nomenclaturas dos termos, identificar a função objetivo, e contruir a região viável, lembrando que na Atividade 1, os alunos já aprenderam a construir a região viável. Nesta atividade, bem como em todas de programação linear, os alunos praticaram seus conhecimentos de geometria analítica e de algebra linear para fazer esta atividade, para a determinação tanto da região viável como na determinação do valor ótimo da função objetico. Nesta atividade, o aluno pode com seus conhecimentos de geometria linear determinar o valor ótimo da função objetivo, sujeito as restrições do problema, método este conhecido como método geométrico.

**Resolução da Atividade 3**

a) tem-se duas variáveis de decisão: ora vacina um idoso acima dos 70 anos, e ora vacina o pessoal da saúde da linha de frente. Logo as variavéis de decisão são:

$x$ (quantidade de idosos acima de 70 anos)

$y$ (quantidade de pessoal da saúde que trabalha na linha de frente)

b) A função objetivo depende do tempo de duração da vacinação de cada uma das pessoas envolvidas. Logo, tem-se:

$f(x, y) = z = x + y$

c) A restrição de não negatividade serão:

$x \geq 0$ e $y \geq 0$

d) A funcionária que aplica as vacinas trabalha no máximo 8h no dia e respeitando o tempo de vacinação de cada pessoa agendada, tem-se:

$x + y \leq 8h,$

mas transformando em minutos,

$4x + 3y \leq 8 * (60)$ min $\rightarrow 4x + 3y \leq 480$

e) Como foram agendados 90 idosos, tem-se:

$x \leq 90$

f)Como foram agendados 100 pessoas de saúde, tem-se:

$y \leq 100$

g) Formulação do problema

$\max f(x, y) = x + y$

Sujeito a:

$4x + 3y \leq 480$

$x \leq 90$

$y \leq 100$

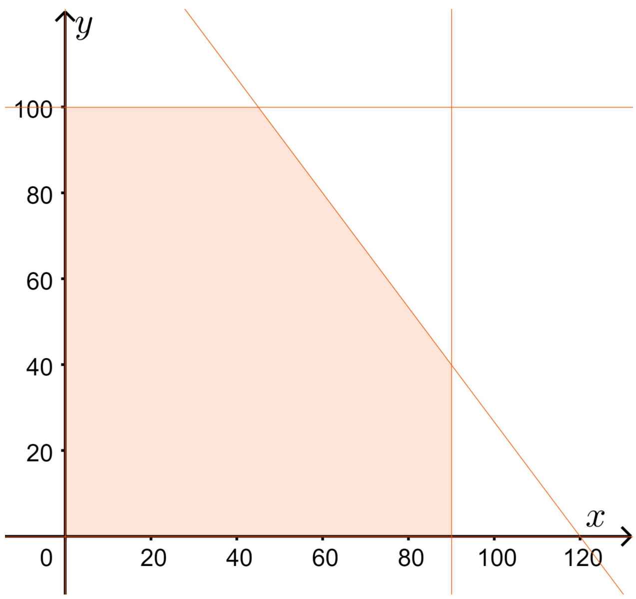
$x \geq 0$

$y \geq 0$

h) Esboçando o gráfico da região viável

A Figura 46 mostra a região viável do problema.

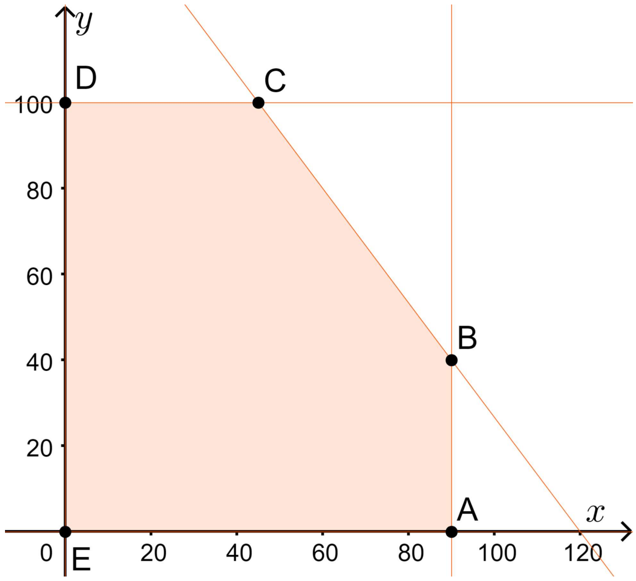
**Figura 46 – Resposta do item (h) da Atividade 3**




Fonte: O autor, 2021.

i) Esboçando o gráfico da região viável, destacando-se os extremos, bem como os valores da função em cada vértice.

**Figura 47 – Resposta do item (i) da Atividade 3**




Fonte: O autor, 2021.

Na Figura 47, aregião viável é limitada pelo polígono de vértices $A(90,0)$, $B(90,40)$, $C(45,100)$, $D(0,100)$, e $E(0,0)$.

Valor da função nos respectivos pontos:

$f(A) = 90 + 0 = 90$

$f(B) = 90 + 40 = 130$

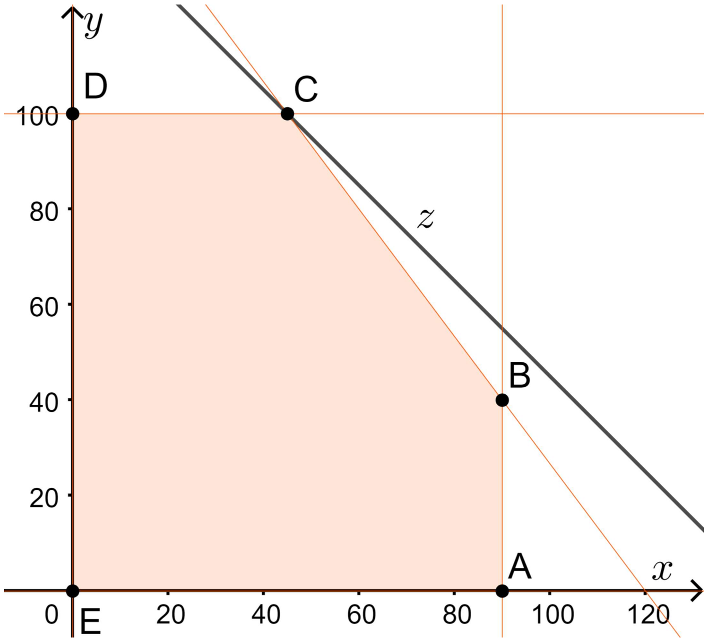
$f(C) = 45 + 100 = 145$

$f(D) = 0 + 100 = 100$

$f(E) = 0 + 0 = 0$

j) Esboçando o gráfico da região viável bem como a função que otimiza a função:

**Figura 48 – Resposta do item (j) da Atividade 3**




Fonte: O autor, 2021.

A solução ótima (ponto) que maximiza o atendimento da funcionária é o vértice $C$ (Figura 48).

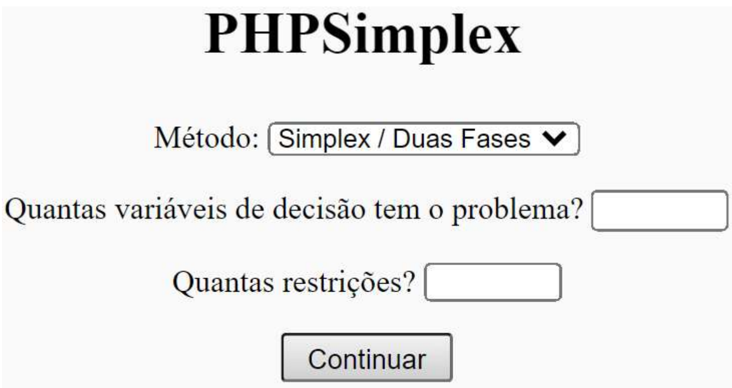
O ideal é colocar um controle deslizante no GeoGebra, na constante da reta, $x + y = c$, $c \epsilon \mathbb{R}$. Isso torna possível a reta manter a inclinação e deslizar dentro da região viável.

k) Para resolver através do PHPSimplex, acesse e siga os presentes passos:

- acesse: <http://www.phpsimplex.com/pt/>
- clique em: PHP Simplex

A seguinte janela será aberta, como mostra a Figura 49 :

**Figura 49 – Apresentação do PHPSimplex**



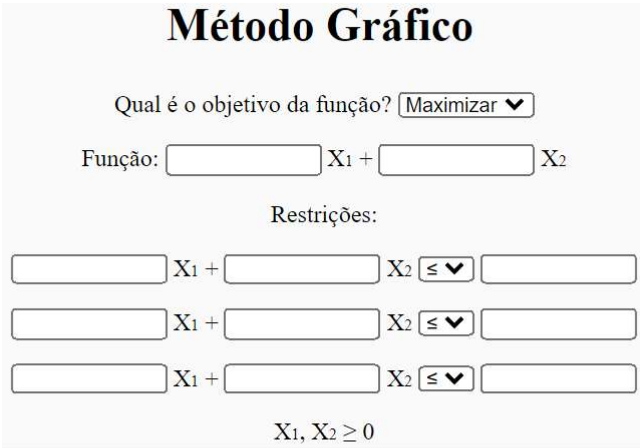

Fonte: O autor, 2021.

- Em método, pode se escolher o Método Simplex ou o Método gráfico. pelo item (k) será escolhido o método gráfico,
- Quantas variáveis de decisão tem o problema? Duas variáveis de decisão; e
- Quantas restrições existem no problema? são cinco restrições.

Após preenchido e só continuar.

Abrirá uma nova janela, conforme Figura 50 abaixo.

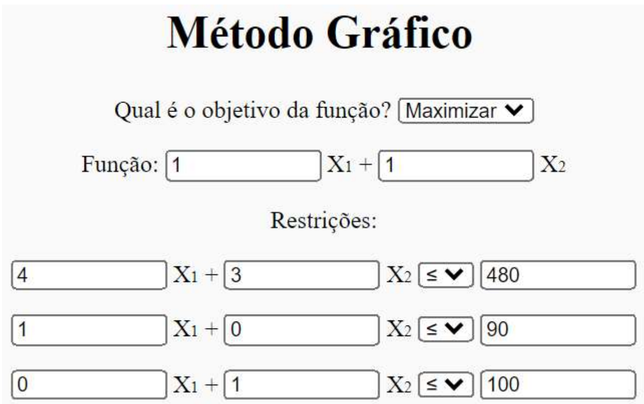
**Figura 50 – Página com preenchimento dos dados PHPSimplex**




Fonte: O autor, 2021.

Preencham as lacunas com os coeficientes, da função objetivo e das restrições respectivamentes, conforme ilustra a Figura 51 abaixo.

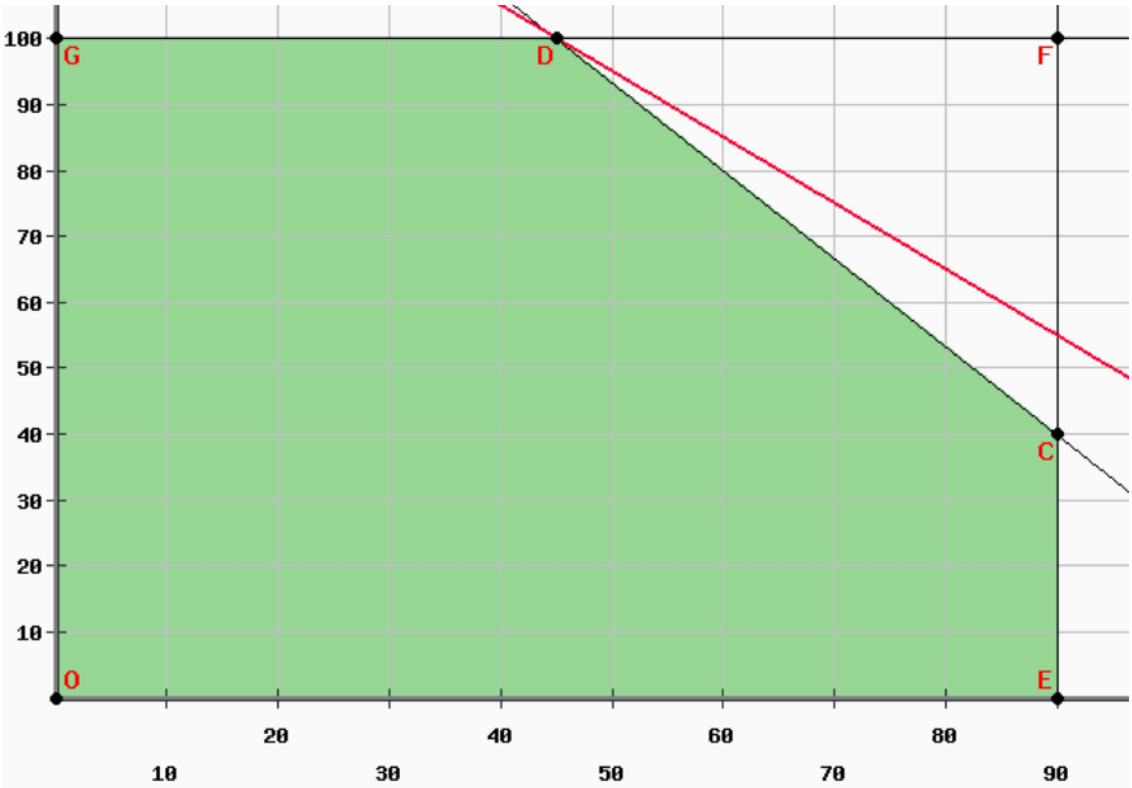
**Figura 51 – Método gráfico preenchido com os coeficientes**




Fonte: O autor, 2021.

Ao clicar em continuar, aparecerá a tela com a solução gráfica do problema, como é mostrado na Figura 52 a seguir.

**Figura 52 – Resposta do item (k) da Atividade 3**

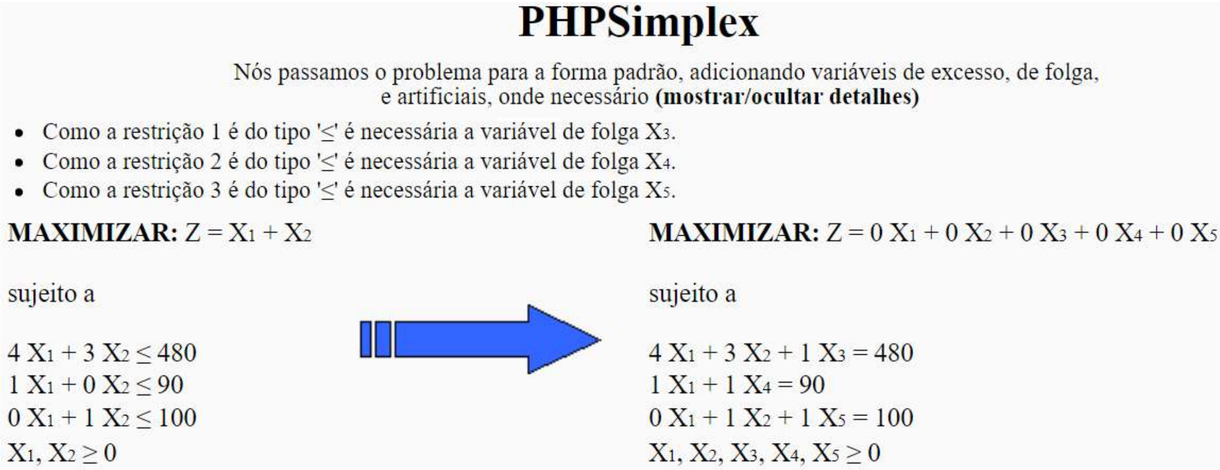



Fonte: O autor, 2021.

l) Comparando as resposta do exercício resolvido pelo GeoGebra e pelo que é possível perceber, são iguais. O método gráfico do PHPSimplex é mais rápido em processar a resolução, mas, por outro lado, a construção, no GeoGebra, da região viável, propicia ao aluno poder participar passo a passo da resolução. A reta vermelha representa a função objetivo e no vértice D, a função objetivo assume valor máximo sujeito às restrições do problema.

m) Retornando à Figura 49, deste trabalho, em Métodos, pode-se escolher o método Simplex ou o método gráfico. Logo, para este item, será escolhido o método Simplex, bem como, a quantidade de variáveis de decisão e restrições. E depois, seguir o passo a passo da Figura 53, preenchendo as lacunas com os coeficientes, da função objetivo e das restrições. Após, clicar em continuar. Assim, tem-se a tela conforme ilustração abaixo (Figura 53).

**Figura 53 – Resposta inicial do item (m) da Atividade 3)**

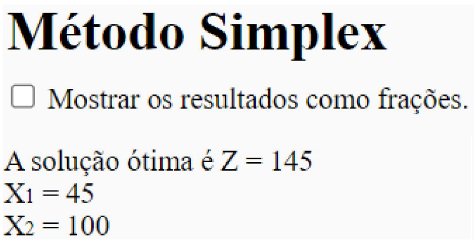



Fonte: O autor, 2021.

Clique em solução direta, e terá o valor máximo da função objetivo, caso o tenha.

Como resultado tem-se $X_1 = 45$, $X_2 = 100$ e $Z = 145$ (Figura54).

**Figura 54 – Resposta do item (m) da Atividade 3**




Fonte: O autor, 2021.

n) Como pode ser percebido, independente do método escolhido o resultado deve ser o mesmo, como de fato foi.

IV. Resposta do problema

o) O máximo de pessoas a ser vacinado neste dia serão 45 pessoas idosos e 100 pessoas da área de saúde.

p) O total de pessoas vacinados será de 145 pessoas.

Esta atividade foi criada para que o aluno possa fazer a modelagem de um problema de programação linear, conforme item 4.2 deste trabalho, o aluno terá que definir a variável de decisão, as restrições do problema (efetuando conversão de hora para minutos) e a função objetivo. Depois da identificação dos termos PPL, função objetivo, as restrições do problema, o aluno já terá conhecimentos para sua resolução, pela a Atividade 1 e pela a Atividade 2. Nesta atividade também será apresentado ao aluno mais uma ferramenta digital on line, PHPSimplex, onde os alunos poderão resolver este problema de maneira dinâmica pelo método gráfico e pelo método Simplex.

**Resolução da Atividade 4**

a) São duas variáveis de decisão, que dependem da quantidade de voos do Aero 1 ($x_1$) e do Aero 2 ($x_2$).

b) A função objetivo será:

Z = $2500 * x_1 + 2400 * x_2$

c) Restrições de não negatividade

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

d) Com relação ao contêiner A

$18 * x_1 + 15 * x_2 \geq 360$

e) Cm relação ao contêiner B

$12 * x_1 + 20 * x_2 \geq 420$

f) Modelo de PPL

Função objetivo

Z = $2500 * x_1 + 2400 * x_2$

sujeito a:

$18 * x_1 + 15 * x_2 \geq 360$

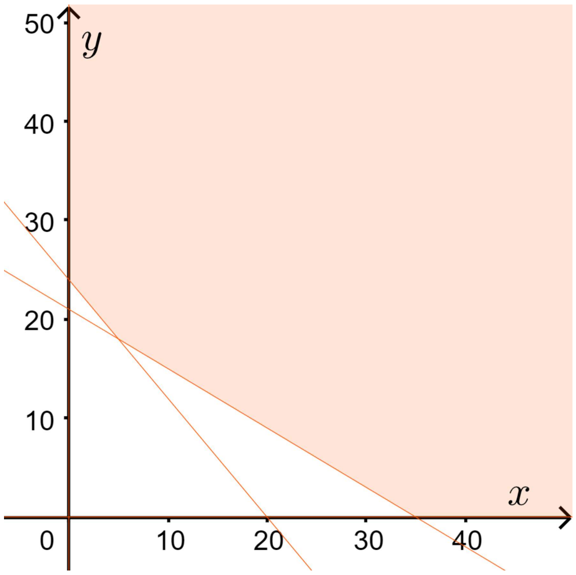
$12 * x_1 + 20 * x_2 \geq 420$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

g) O gráfico no GeoGebra

A Figura 55 abaixo mostra a região viável.

**Figura 55 – Resposta do item (g) da Atividade 4**

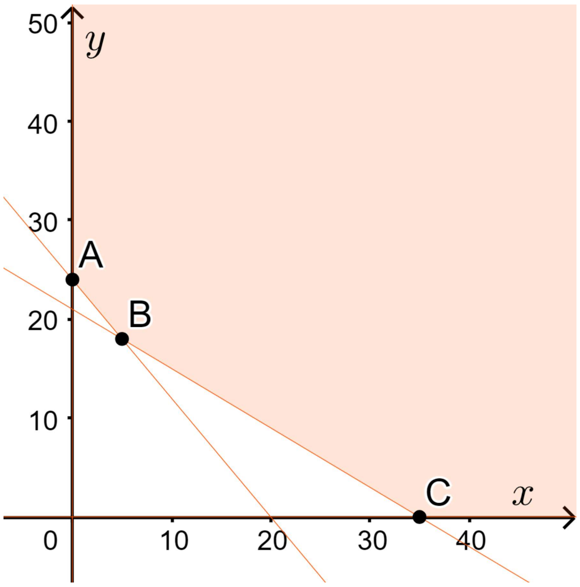



Fonte: O autor, 2021.

h) Pela representação gráfica é possível verificar que a região não é limitada.

i) Conforme ilustrado na Figura 56 abaixo, existem 3 pontos de interseções entre cada duas retas que determinam a região viável.

**Figura 56 – Resposta do item (i) da Atividade 4**




Fonte: O autor, 2021.

Tem-se os pontos, $A(0, 24), B(5, 18), C(35, 0)$:

$f(x_1, x_2) = 2500 * x_1 + 2400 * x_2$

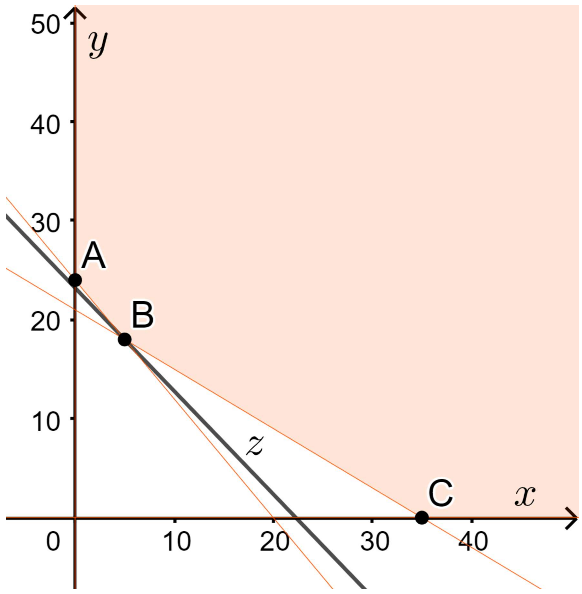
$f(A) = 2500 * 0 + 2400 * 24 = 57600$

$f(B) = 2500 * 5 + 2400 * 18 = 55700$

$f(C) = 2500 * 35 + 2400 * 0 = 87500$

j) Logo a solução mínima ficará no vértice $B$, conforme a mostra a Figura 57.

**Figura 57 – Resposta do item (j) da Atividade 4**




Fonte: O autor, 2021.

Não existirá outra função paralela a $f(x)$ com valor menor que $55700$, este será o menor valor respeitando a região viável.

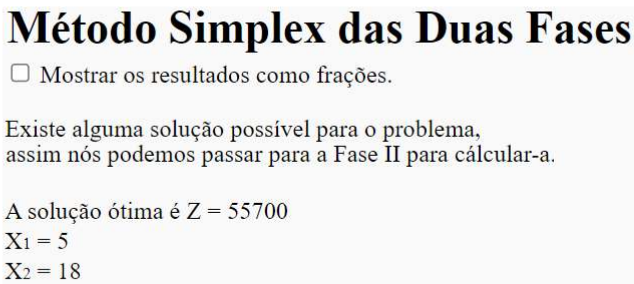
k) Utilizando a ferramenta on line PHPSimplex, a solução gráfica é a apresentada na Figura 58.

**Figura 58 – Resposta do item (k) da Atividade 4**


Fonte: O autor, 2021.

l) Como esperado pelo método Simplex a resposta será a mesma que no método gráfico (Figura 59).

**Figura 59 – Resposta do item (l) da Atividade 4**




Fonte: O autor, 2021.

m) O resultado ótimo será 5 voos do AERO 1 e 18 voos do AERO 2 para que haja o transporte de todo o material e gaste-se o mínimo possível de combustível.

o) O custo mínimo com combustivel será de R$ 55.700,00

Esta atividade foi criada para que o aluno possa fazer a modelagem de um problema de programação linear, o aluno terá que definir a variável de decisão, as restrições do problema e a função objetivo. Depois da identificação dos termos PPL, função objetivo, as restrições do problema, o aluno já terá conhecimentos para sua resolução, pela a Atividade 1, pela a Atividade 2, e pela Atividade 3. Nesta atividade o aluno mais uma vez poderá utilizar a ferramenta digital on line, PHPSimplex, podendo assim conferir sua solução de forma dinâmica pelo método gráfico e pelo método Simplex.

**Resolução da Atividade 5**

a) Tem-se três variáveis de decisão que serão denotadas por: $x_1$ - Lucro unitário do kit 1, $x_2$ - Lucro unitário do kit 2, e $x_3$ - Lucro unitário do kit 3.

b) A função objetivo do PPL será:

$z = 78 * x_1 + 112,50 * x_2 + 52,50 * x_3$

c) Descreva a restrição (desigualdade) que exprime a quantidade de frascos de álcool em gel disponíveis;

$6 * x_1 + 9 * x_2 + 3 * x_3 \leq 480$

d) Descreva a restrição (desigualdade) que exprime a quantidade de caixas de máscaras disponíveis;

$3 * x_1 + 4 * x_2 + 2 * x_3 \leq 250$

e) Descreva as restrições de não negatividade;

$x_1; x_2; x_3 \geq 0$

f) Formule o Problema de Programação Linear $P_5$

Função objetivo

$z = 78 * x_1 + 112,50 * x_2 + 52,50 * x_3$

Sujeito a:

$6 * x_1 + 9 * x_2 + 3 * x_3 \leq 480$

$3 * x_1 + 4 * x_2 + 2 * x_3 \leq 250$

$x_1; x_2; x_3 \geq 0$

g) São os vértices da região viável, conforme a Figura 60, a seguir:

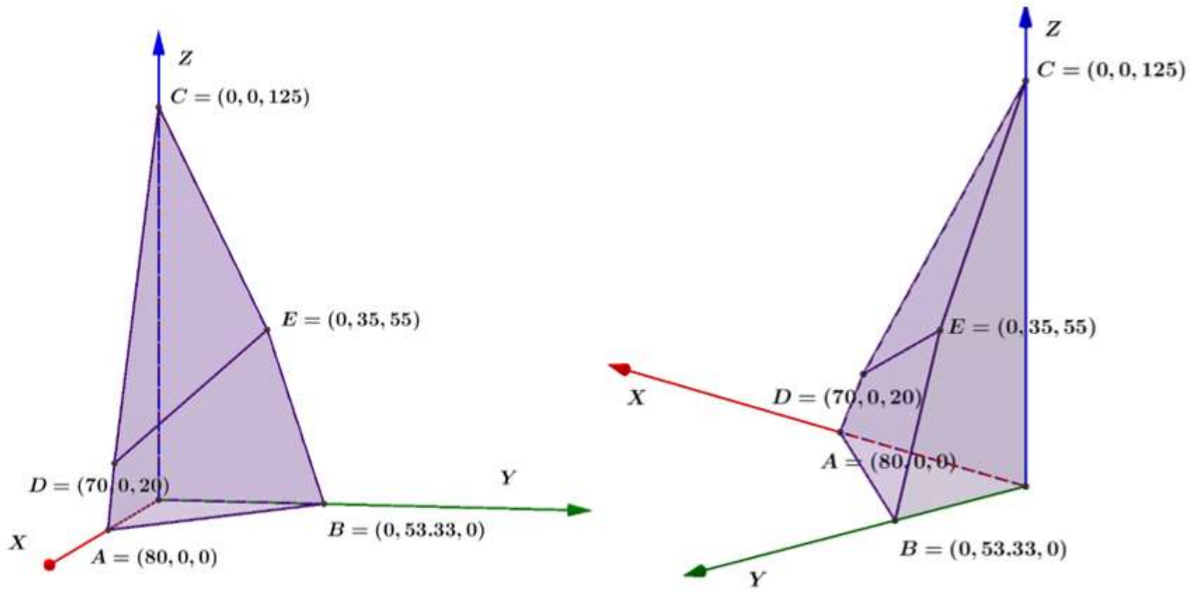
$A(80, 0, 0), B(0, 53.33, 0), C(0, 0, 125), D(70, 0, 20), e\, E(0, 35, 55).$

$z = f(x_1, x_2, x_3) = 78 * x1 + 112,50 * x2 + 52,50 * x3$, logo:

$f(A) = 78 * 80 + 112,50 * 0 + 52,5 * 0 = 6.240,00$

$f(B) = 78 * 0 + 112,50 * 53,33 + 52,5 * 0 = 5.999,62$

**Figura 60 – Figura Atividade 5**




Fonte: O autor, 2021.

$$f(C) = 78 * 0 + 112,50 * 0 + 52,5 * 125 = 6.662,50$$

$$f(D) = 78 * 70 + 112,50 * 0 + 52,5 * 20 = 6.510,00$$

$$f(E) = 78 * 0 + 112,50 * 35 + 52,5 * 55 = 6.825,00$$

h) Logo a solução ótima $(0, 35, 55)$; e o lucro máximo é no valor de $R\$6.825,00$.

i) Conforme mostra a Figura 61 abaixo.

**Figura 61 – Resposta do item (i) da Atividade 5**

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Resolução** | | Variáveis de Decisão | | | |
| 2 | | Função objetivo | | $x_1$ - Lucro unitário do kit 1 | | | |
| 3 | | $z = 78\,x_1 + 112{,}50\,x_2 + 52{,}50\,x_3$ | | $x_2$ - Lucro unitário do kit 2 | | | |
| 4 | | | | $x_3$ - Lucro unitário do kit 3 | Coeficiente das variáveis | | |
| 5 | | | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| 6 | | Sujeita a Restrições | | | 78 | 112,5 | 52,5 |
| 7 | | $6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 480$ | | Solução ótima | | | |
| 8 | | $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 250$ | | Valor Máximo de z | 0 | | |
| 9 | | $x_1;\ x_2;\ x_3 \geq 0$ | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | **Preparar para a utilização da ferramenta Solver, com as restrições** | | | | | | |
| 12 | Restrições | Coeficientes das Variáveis | | | Facilitador de Restrições | Constante Após o sinal | |
| 13 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | Expressões com os coeficientes | Constantes | |
| 14 | I | 6 | 9 | 3 | 0 | 480 | |
| 15 | II | 3 | 4 | 2 | 0 | 250 | |

Fonte: O autor, 2021.

j) Conforme a Figura 62 a seguir.

**Figura 62 – Resposta do item (k) da Atividade 5**

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **Resolução** | | Variáveis de Decisão | | | |
| 2 | | Função objetivo | | $x_1$ - Lucro unitário do kit 1 | | | |
| 3 | | $z = 78\,x_1 + 112{,}50\,x_2 + 52{,}50\,x_3$ | | $x_2$ - Lucro unitário do kit 2 | | | |
| 4 | | | | $x_3$ - Lucro unitário do kit 3 | Coeficiente das variáveis | | |
| 5 | | | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| 6 | | Sujeita a Restrições | | | 78 | 112,5 | 52,5 |
| 7 | | $6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 480$ | | Solução ótima | 0 | 35 | 55 |
| 8 | | $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 250$ | | Valor Máximo de z | 6825 | | |
| 9 | | $x_1;\ x_2;\ x_3 \geq 0$ | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | **Preparar para a utilização da ferramenta Solver, com as restrições** | | | | | | |
| 12 | Restrições | Coeficientes das Variáveis | | | Facilitador de Restrições | Constante Após o sinal | |
| 13 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | Expressões com os coeficientes | Constantes | |
| 14 | I | 6 | 9 | 3 | 480 | 480 | |
| 15 | II | 3 | 4 | 2 | 250 | 250 | |

Fonte: O autor, 2021.

k) Resolvendo pelo PHPSimplex, a resposta é a apresentada na Figura 63.

**Figura 63 – Resolução no PHPSimplex da Atividade 5**

# Método Simplex

☐ Mostrar os resultados como frações.

A solução ótima é Z = 6825
$X_1 = 0$
$X_2 = 35$
$X_3 = 55$

Fonte: O autor, 2021.

l) Os kits que maximizam o lucro são 0 do tipo I, 35 do tipo II, e 55 do tipo III.

m) O valor máximo do lucro será $R\$6.825,00$.

Esta atividade foi criada para que o aluno possa fazer a modelagem de um problema de programação linear, mesmo sendo de três variáveis, o aluno terá que definir as variáveis de decisão, as restrições do problema e a função objetivo. Depois da identificação dos termos PPL, função objetivo, as restrições do problema, o aluno poderá perceber a dificuldade de se criar um gráfico no $R^3$, mas mesmo assim foi dado o gráfico e com os conhecimentos das atividades anteriores, seria esperado que os mesmo pudessem verificar o valor da função objetivo nos extremos da região poliedral convexa para assim determinar o valor ótimo desta função. Nesta atividade o aluno mais uma vez poderá utilizar a ferramenta digital on line, PHPSimplex, podendo assim conferir sua solução de forma dinâmica pelo método gráfico e pelo método Simplex. Nesta atividade ainda, foi apresentado mais uma ferramenta digital o Solver do Excel que permite através de planilhas do excel calcular as soluções ótimas de problemas de programaçao linear de forma dinâmica, conforme item 4.4.1, deste trabalho.

**Resolução da Atividade 6**

a) Maximizar z

$z = 3000x_{11} + 4000x_{12} + 3500x_{13} + 2000x_{21} + 4500x_{23} + 3000x_{23}$

Sujeito a:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 125$

$x_{11} + x_{21} = 75$

$x_{12} + x_{22} = 50$

$x_{13} + x_{23} = 100$

$x_{11}; x_{12}; x_{13}; x_{21}; x_{22}; x_{23} \geq 0$

b) Explicação da formatação e resolução conforme mostra a Figura 64..

**Figura 64 – Formatação da planilha**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Resolução | | | | |
| 2 | Função objetivo | | | | |
| 3–4 | $z = 3000x_{11} + 4000x_{12} + +3500x_{13} + +2000x_{21} + 4500x_{22} + +3000x_{23}$ | | | | |
| 5 | Sujeita a Restrições | | | | |
| 6 | | | | $x_{11}$ - quantidade de frasco em milhão da F1 para L1 | |
| 7 | $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$ | | | $x_{12}$ - quantidade de frasco em milhão da F1 para L2 | |
| 8 | $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 125$ | | | $x_{13}$ - quantidade de frasco em milhão da F1 para L3 | |
| 9 | $x_{11} + x_{21} = 75$ | | | $x_{21}$ - quantidade de frasco em milhão da F2 para L1 | |
| 10 | $x_{12} + x_{22} = 50$ | | | $x_{22}$ - quantidade de frasco em milhão da F2 para L2 | |
| 11 | $x_{13} + x_{23} = 100$ | | | $x_{23}$ - quantidade de frasco em milhão da F2 para L3 | |
| 12 | $x_{11}; x_{12}; x_{13}; x_{21}; x_{22}; x_{23} \geq 0$ | | | | |
| 13 | | Custo de remessa por 1 milhão de unidades | | | |
| 14 | | Laboratório 1 (L1) | Laboratório 2 (L2) | Laboratório 3 (L3) | |
| 15 | Fábrica 1 (F1) | 3000 ($x_{11}$) | 4000 ($x_{12}$) | 3500 ($x_{13}$) | Produção |
| 16 | Fábrica 2 (F2) | 2000 ($x_{21}$) | 4500 ($x_{22}$) | 3000 ($x_{23}$) | 100 milhões |
| 17 | Pedido | 75 milhões | 50 milhões | 100 milhões | 125 milhões |

Fonte: O autor, 2021.

e a formulação, conforme mostra a Figura 65 a seguir.

**Figura 65 – Formulação da atividade 6**

| | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Coeficiente das variáveis | | | | | | | | | |
| 2 | | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | | | | |
| 3 | | 3000 | 4000 | 3500 | 2000 | 4500 | 3000 | | | | |
| 4 | Solução ótima | | | | | | | | | | |
| 5 | Valor Mínimo de z | 0 | | | | | | | | | |
| 6 | | Preparar para a utilização da ferramenta Solver, com as restrições | | | | | | | | | |
| 7 | | Restrições | Coeficientes das Variáveis | | | | | | Facilitador de Restrições | Constante Após o sinal | |
| 8 | | | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | Expressões com os coeficientes | Constantes | |
| 9 | | I | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 100 | |
| 10 | | II | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | | 125 | |
| 11 | | III | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 75 | |
| 12 | | IV | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 50 | |
| 13 | | V | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 100 | |

Fonte: O autor, 2021.

d) Resolver no Excel

A resposta encontrada é a apresentada na Figura 66.

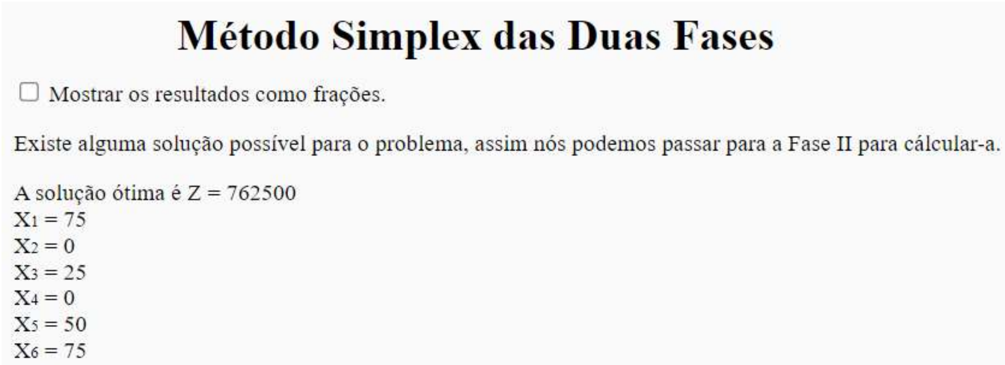
**Figura 66 – Resolução no Excel da Atividade 6**

| | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Coeficiente das variáveis | | | | | | | | | |
| 2 | | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | | | | |
| 3 | | 3000 | 4000 | 3500 | 2000 | 4500 | 3000 | | | | |
| 4 | | 75 | 0 | 25 | 0 | 50 | 75 | | | | |
| 5 | Solução ótima | 762500 | | | | | | | | | |
| 6 | Valor Mínimo de z | | | | | | | | | | |
| 7 | | Preparar para a utilização da ferramenta Solver, com as restrições | | | | | | | | | |
| 8 | | Restrições | Coeficientes das Variáveis | | | | | | Facilitador de Restrições | Constante Após o sinal | |
| 9 | | | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | Expressões com os coeficientes | Constantes | |
| 10 | | I | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | |
| 11 | | II | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 125 | 125 | |
| 12 | | III | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 75 | 75 | |
| 13 | | IV | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 50 | 50 | |
| 14 | | V | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 100 | 100 | |

Fonte: O autor, 2021.

e)Resolvendo pelo PHPSimplex, a resposta encontrada é a apresentada na Figura 67.

**Figura 67 – Resolução no PHPSimplex da Atividade 6**




Fonte: O autor, 2021.

f) Conforme Solver do Excel (Figura 66), $x_{11} = 75; x_{12} = 0; x_{13} = 25; x_{21} = 0; x_{22} = 50; x_{23} = 75$, ficando a um custo total de $R\$762.500,00$.

A Atividade 6 foi criada para que o aluno possa fazer a modelagem de um Problema de Programação Linear, modelo da dieta, presente no item 5.6 deste trabalho, definir as variáveis de decisão, as restrições do problema e a função objetivo. Esta atividade foi desenvolvida para ser resolvida em grupo, os alunos modelando esta atividade poderam resolve-la pelas ferramentas digitais, tanto pelo PHPSimplex como pelo Solver do Excel, de maneira dinâmica.