Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Critérios de divisibilidade: uma abordagem de acordo com a BNCC

Geisa Feltrin Santana de Alvarenga

Orientadora: Profª. Drª. Grasiele Cristiane Jorge

São José dos Campos

Fevereiro, 2022

Título: *Critérios de divisibilidade: uma abordagem de acordo com a BNCC*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Fevereiro, 2022

Alvarenga, Geisa Feltrin Santana de

Critérios de divisibilidade: uma abordagem de acordo com a BNCC, Geisa Feltrin Santana de Alvarenga – São José dos Campos, 2022.

xiii, 45f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Divisibility criteria: a BNCC-based approach

1. Critérios de divisibilidade. 2. Números naturais. 3. Números inteiros. 4. Aritmética dos restos. 5. BNCC .

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação:
Prof[a]. Dr[a]. Grasiele Cristiane Jorge

GEISA FELTRIN SANTANA DE ALVARENGA

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE: UMA ABORDAGEM DE ACORDO COM A BNCC

Presidente da banca: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Grasiele Cristiane Jorge

Banca examinadora:

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Elisangela Pavanelo

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Kelly Cristina Jorge Sakamoto

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Tatiana Miguel Rodrigues

Data da Defesa: 25 de Fevereiro de 2022

“Ninguém nasce feito, ninguém nasce marcado para ser isso ou aquilo. Pelo contrário, nos tornamos isso ou aquilo. Somos programados, mas, para aprender.”

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Agradeço, a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a realizar esse trabalho.

Primeiramente a Deus, pela vida e pela capacidade de aprender.

Aos meus pais Edna e Daniel por me incentivarem ao estudo desde pequena, mostrando a importância do conhecimento.
Ao meu marido Eduardo pelo ombro amigo nos momentos que precisei e por acreditar em mim quando eu não estava mais acreditando.

Aos colegas do Profmat - Gabriel, Jayrton, Jéssica, José Marques, Leonardo, Letícia, Márcio e Robert - pelas dicas, pela ajuda, por tirarem minhas dúvidas sempre com prontidão e paciência.

A amiga Rebeca Baptista por me apresentar o programa. Às amigas Andressa Assis e Andrea Marques pelas correções.

A minha professora do Ensino Médio, Elen Gomes Leite, por despertar em mim o gosto e a paixão pela Matemática.

E finalmente a minha orientadora Profª. Drª. Grasiele Cristiane Jorge, por ser tão paciente e acreditar no meu potencial.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo trazer uma abordagem dos critérios de divisibilidade tendo como referência o que a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) de 2017 traz a respeito do assunto. Para isso, será feita uma descrição de como alguns livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental - elaborados de acordo com a BNCC - apresentam os critérios de divisibilidade. Além disso, serão apresentados alguns critérios de divisibilidade com demonstrações para professores e outros com deduções para alunos do 6º ano. Para professores, serão apresentados os critérios de divisibilidade nos inteiros por 2 até 20, por 100 e por 1000 com demonstrações usando congruências e mínimo múltiplo comum. Para alunos do 6º ano, serão deduzidos os critérios de divisibilidade nos naturais por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10 usando propriedades da divisibilidade e decomposição de números.

Palavras-chave: 1. Critérios de divisibilidade. 2. Números naturais. 3. Números inteiros. 4. Aritmética dos restos. 5. BNCC .

ABSTRACT

This work aims to bring an approach to the divisibility criteria based on what the 2017 BNCC (National Common Curriculum Base) brings on the subject. For this, a description will be made of how some textbooks from the 6th year of elementary school - elaborated in accordance with the BNCC - present the divisibility criteria. Besides that, some divisibility criteria will be presented with demonstrations for teachers and other with deductions for students from the 6th year. For teachers, it will be presented the divisibility criteria by 2 to 20, by 100 and by 1000 with demonstrations using congruences and minimum common multiple. For students from the 6th year it will be deduced the divisibility criteria in natural numbers by 2, 3, 4, 5, 6, 9 and 10 using divisibility properties and number decomposition.

Keywords: 1. Divisibility criteria. 2. Natural numbers. 3. Integers. 4. Aritmetic of the remains. 5. BNCC.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática sempre foi um tema muito abrangente e complexo. O que fazer para que o aluno realmente aprenda e não apenas decore? Existe um método eficaz para tornar os alunos construtores de seu conhecimento? A demonstração no ensino básico deve ou não deve aparecer? Essas questões geram muita discussão.

Esse trabalho não pretende responder a essas questões. No entanto, pretende trazer uma luz aos professores que acreditam que a construção do conhecimento é parte do processo de aprendizagem e pode fazer com que o monstro da Matemática se torne menor para os alunos, ou não os assuste mais. Em especial, quando se trata de critérios de divisibilidade, ao verificar alguns livros didáticos, percebe-se que em alguns há uma certa investigação para descobrir os critérios, enquanto que em outros essa investigação aparece apenas como orientação ao professor.

Os critérios de divisibilidade são regras que permitem verificar se um número natural é divisor de outro número natural de maneira mais rápida do que efetuando a divisão. Eles baseiam-se em propriedades da representação decimal dos números.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017, os critérios de divisibilidade devem ser introduzidos no 6º ano do Ensino Fundamental sendo uma das habilidades:

> "Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos 'é múltiplo de', 'é divisor de', 'é fator de' e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000" [2, p. 301].

O assunto divisão entre números naturais já deve ser introduzido no 3º ano do Ensino Fundamental, sendo uma das habilidades:

> "Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais" [2, p. 287].

A escolha de livros didáticos adequados se faz necessária para os professores, pois a BNCC prevê que do 6º ao 9º ano seja necessário que o aluno faça uma leitura crítica do material didático utilizado:

> "Além disso, nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada" [2, p. 299].

Neste trabalho, realizamos uma pesquisa qualitativa em ensino de Matemática, a partir de uma abordagem exploratória. Serão apresentados critérios de divisibilidade por 2 a 20, por 100 e por 1000 para os números inteiros e será feita uma descrição de como quatro livros didáticos para o 6º ano tratam o tema para os números naturais. Apesar dos números inteiros não serem estudados ainda no 6º ano, já que de acordo com a BNCC tal conjunto numérico deve ser introduzido a partir do 7º ano, optamos por apresentar os critérios para o caso mais geral para que o professor possa utilizá-los somente para os naturais no 6º ano e para os inteiros nos anos seguintes. A seção que contém todas as demonstrações do critérios de divisibilidade considerados neste trabalho é voltada para o professor, uma vez que as técnicas ali utilizadas são um pouco mais avançadas. Inserimos uma seção com sugestões de como deduzir alguns critérios de divisibilidade para os alunos do 6º ano.

Para que fosse possível utilizar as técnicas mais avançadas de demonstrações na seção voltada ao professor, fizemos uma seção de pré-requisitos focada em aritmética modular.

Para concluir o trabalho apresentamos uma sugestão de atividade, em que os alunos terão que assistir a um vídeo e depois descrever as informações que conseguiram retirar dele.

1

TÓPICOS ELEMENTARES DA TEORIA DOS NÚMEROS

Nesse capítulo serão apresentadas alguns tópicos elementares da Teoria dos Números que serão necessários para os capítulos seguintes. As principais referências utilizadas foram [7, 8, 14].

1.1 NÚMEROS NATURAIS

Temos uma noção intuitiva do que são os números naturais. Essa construção se deu gradativamente, como podemos observar no trecho a seguir:

> Lentamente, à medida em que se civilizava, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro, ...) que são os números naturais. Foi uma evolução demorada. As tribos mais rudimentares contam apenas um, dois, muitos. (...)
> Decorridos muitos milênios podemos hoje descrever concisa e precisamente o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais valendo-se da notável síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano no limiar do século 20 [9, p. 23].

Giuseppe Peano (1858-1932) baseando-se na noção intuitiva de sucessor de um número propôs uma lista de quatro axiomas, conhecidos como Axiomas de Peano, para caracterizar o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$. São eles:

1. Todo número natural tem um sucessor, que também é um número natural, e é único;
2. Os números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro e é indicado por 1;
4. Seja A um subconjunto de números naturais (isto é, $A \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in A$ e se, o sucessor de cada elemento de A também pertence a A, então $A = \mathbb{N}$.

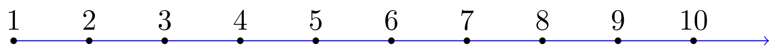
Esses números são representados pelos símbolos, ou algarismos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 justapostos. A disposição desses símbolos para representar quantidades será apresentada em detalhes na Seção 1.6.

Exemplo 1.1. *Os algarismos 1 e 9 podem formar os números naturais 19 ou 91.*

Podemos descrever os números naturais como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots, 19, 20, 21, \ldots, 29, 30, 31, \ldots\}$$

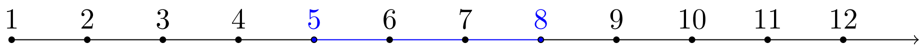
e representá-lo sob uma semirreta orientada como:



1.1.1 *Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão e Ordem*

Para dois números naturais a e b, definimos a soma $a + b$, que se lê a mais b, como sendo o número natural obtido pelo deslocamento de a para a direita b posições.

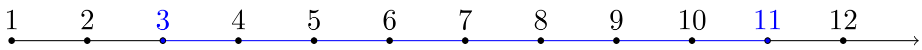
Exemplo 1.2. *Temos que* $5 + 3 = 8$. *Partindo do* 5 *e deslocando-se* 3 *posições para a direita obtém-se* 8.



A operação que a cada dois números naturais associa a sua soma é chamada de adição.

Para dois números naturais a e b com $a > b$, definimos a diferença $a - b$, que se lê a menos b, como sendo o número natural obtido pelo deslocamento de a para a esquerda b posições.

Exemplo 1.3. *Temos que* $11 - 8 = 3$. *Partindo do* 11 *e deslocando-se* 8 *posições para a esquerda obtém-se* 3.



A operação que a cada dois números naturais associa a sua diferença é chamada de subtração.

Para dois números naturais a e b, definimos o produto $a \cdot b$, que se lê a vezes b, como

$$a \cdot b = \begin{cases} b, & \text{se} \quad a = 1 \\ \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ parcelas}}, & \text{se} \quad a > 1. \end{cases}$$

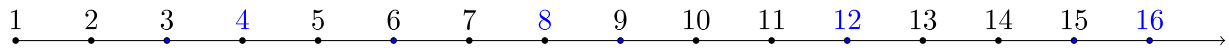
O produto $a \cdot b$ também denotado por ab, quando não houver risco de confusão.

Exemplo 1.4. *Temos que* $3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$.

A operação que a cada dois números naturais associa o seu produto é chamada de multiplicação.

Fixado um número natural a, chamamos de múltiplos de a todos os números naturais do tipo $a \cdot b$ com b um número natural.

Exemplo 1.5. *Os múltiplos de 4 são números naturais da forma $4 \cdot b$ com $b \in \mathbb{N}$. Para obtê-los, partimos do 4 e então vamos caminhando 4 unidades para a direita e marcando os números obtidos.*



Quando o número natural a aparece antes do número natural b na listagem dos números naturais, ou seja, à esquerda de b, dizemos que $a < b$, e lê-se a é menor do que b. Caso contrário, dizemos que $a > b$ e lê-se a é maior do que b.

Dados dois números naturais a e b com $a > b$, dizemos que b divide a se existe um número natural c tal que $a = b \cdot c$.

1.1.2 *Princípio da Indução Matemática*

O quarto Axioma de Peano é também chamado de Axioma da Indução. Ele pode ser reescrito como 4' a seguir e é chamado de Princípio da Indução Finita ou da Indução Matemática. Esse princípio serve para mostrar que uma propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n é válida para todos os valores naturais de $\mathbb{N}$.

4'. Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número n. Suponhamos que

i) P(1) é válida.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Os números naturais são divididos alternadamente em números pares e números ímpares. O número 1 é ímpar, o número 2 é par, o número 3 é ímpar, o número 4 é par, e assim por diante.

Exemplo 1.6. *Vamos mostrar usando o princípio da indução finita que a soma dos primeiros n números naturais ímpares é n^2, isto é, vamos mostrar que a propriedade $P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.*

i) Vamos verificar se $P(n)$ é válida para $n = 1$.
De fato, $1 = 1^2$.

ii) Vamos verificar que se o fato de $P(n)$ valer para um valor arbitrário de n, implica que vale $P(n+1)$.

Admitindo que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para um certo valor de n, devemos mostrar que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$.

Para isso, vamos somar o novo termo $2(n+1)-1$ a ambos os membros da igualdade $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Obtemos assim:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) &= n^2+2(n+1)-1 \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Portanto, como $P(1)$ é válida e a validade de $P(n)$ para um valor arbitrário de n implica a validade de $P(n+1)$, temos, pelo Princípio da Indução, que a igualdade $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma variante do Princípio da Indução é muitas vezes é chamado de Princípio da Indução Completa. Nela a hipótese de indução é a validade da propriedade para todos os naturais menores do que ou iguais a um natural n:

Teorema 1.7. *[8, p. 27] Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao natural n. Suponhamos que*

i) $P(1)$ é válida.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(k)$, para todo $k \leq n$, implica a validade de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:
Consideremos a sentença aberta $Q(n) : P(k)$ é válida, para todo natural $k \leq n$.
Como, por i), $P(1)$ é válida, então $Q(1)$ também é.
Suponhamos agora que $Q(n)$ seja válida. Isto quer dizer que $P(k)$ é válida para todo $k \leq n$. Mas, por ii), isto implica a validade de $P(n+1)$, que por sua vez implica que $P(k)$ seja válida para todo $k \leq n+1$. Logo, $Q(n+1)$ também é válida.
Portanto, pela forma original do Princípio da Indução, $Q(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde decorre a validade de $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

1.2 NÚMEROS INTEIROS

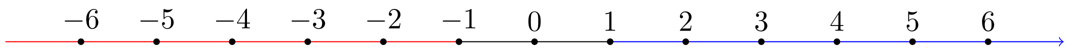
Os números naturais fornecem, intuitivamente, a ideia de positividade, especialmente quando considerados como quantidade, por exemplo: 3 capítulos. No entanto, em algumas situações precisamos de números que expressem a ideia de negatividade, por exemplo, quando falamos de uma dívida de 3 reais.

A cada número natural n, define-se um número negativo, denotado por $-n$ associado a ele e chamado de oposto de n. Chamamos também n de oposto de $-n$. Unindo o zero a todos os valores de n e de $-n$ obtém-se o conjunto dos números inteiros representado por $\mathbb{Z}$.

Pode-se descrever o conjunto dos números inteiros como:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

e representá-lo sob uma reta orientada como:



1.2.1 *Adição, Subtração, Multiplicação e Ordem*

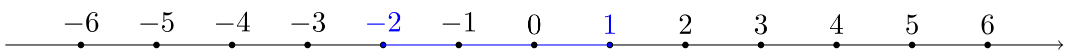
Antes de definir a adição, vamos caracterizar o valor absoluto de um número inteiro.

Seja $a \in \mathbb{Z}$, definimos

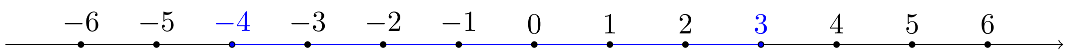
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Para todo número inteiro a, definimos a soma $a + b$ como sendo o número obtido pelo deslocamento de a para a direita b posições, se $b > 0$, de $|b|$ posições para a esquerda se $b < 0$ e nenhum deslocamento se $b = 0$.

Exemplo 1.8. *Temos que* $(-2) + 3 = 1$*. Partindo do* -2 *descolando-se* 3 *posições para a direita, obtém-se* 1*.*



Temos que $3 + (-7) = -4$*. Partindo do* 3 *e deslocando-se* 7 *casas para a esquerda, obtém-se* -4*.*



Vamos considerar a multiplicação já definida entre dois números naturais e estendê-la para números inteiros.

Se $a, b > 0$, sabemos o que é $a \cdot b$. A partir desse ponto, definimos

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \quad \text{e} \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Além disso, definimos $a \cdot 0 = 0$.

Assim, $a \cdot b$ está definido para quaisquer inteiros a e b.

A adição e a multiplicação no conjunto dos inteiros satisfazem as seguintes propriedades elementares:

1. Ambas são bem definidas:
Para todos $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, se $a = a'$ e $b = b'$, então $a + b = a' + b'$ e $a \cdot b = a' \cdot b'$.

2. Ambas são comutativas:
Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

3. Ambas são associativas
Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$.

4. Ambas possuem elementos neutros:
Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$.

5. A adição possui elementos simétricos:
Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $b = (-a)$ tal que $a + b = 0$.

6. A multiplicação é distributiva em relação à adição:
Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

7. (Tricotomia) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:
i) $a = b$;
ii) $b - a \in \mathbb{N}$;
iii) $-(b - a) = a - b \in \mathbb{N}$.

Em relação à Propriedade 7, quando a Propriedade (ii) for satisfeita, diz-se que a é *menor* que b e indica-se $a < b$. Assim, a Propriedade (iii) equivale a $b < a$.

Dessa forma, a tricotomia pode ser reescrita como: dados $a, b \in \mathbb{Z}$, uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

$$\text{i) } a = b; \quad \text{ii) } a < b; \quad \text{iii) } b < a.$$

Utiliza-se a notação $a > b$ para representar $b < a$.

A partir dessas propriedades básicas, demonstramos outras, como, por exemplo, as proposições seguintes.

Proposição 1.9. *[7] A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade, isto é, para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}, a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$.*

Demonstração:
A implicação $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ é consequência da Propriedade 1 ($a = b$ e $c = c$).
Agora, suponha que $a + c = b + c$. Somando $(-c)$ a ambos os lados, temos $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) \Rightarrow a + (c + (-c)) = b + (c + (-c)) \Rightarrow a + 0 = b + 0 \Rightarrow a = b$. ■

Também valem as seguintes propriedades:

Proposição 1.10. *[7] A relação "menor do que" é transitiva, isto é, para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.*

Demonstração:
Supondo $a < b$ e $b < c$, temos que $b - a \in \mathbb{N}$ e $c - b \in \mathbb{N}$.
Como $\mathbb{N}$ é fechado para a adição, temos que $c - a = c - a + 0 = c - a + (b - b) = (b - a) + (c - b) \in \mathbb{N}$, logo $a < c$. ■

Proposição 1.11. *[7] A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que", isto é, para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.*

Demonstração:
Suponha que $a < b$. Logo $b - a \in \mathbb{N}$. Podemos reescrever $b - a$ como $(b + c) - (a + c) \in \mathbb{N}$, o que implica que $a + c < b + c$.
Reciprocamente, suponha que $a + c < b + c$. Podemos somar $(-c)$ a ambos os lados da desigualdade: $(a + c) + (-c) < (b + c) + (-c) \Rightarrow a + (c + (-c)) < b + (c + (-c)) \Rightarrow a + 0 < b + 0 \Rightarrow a < b$. ■

Proposição 1.12. *[7] A multiplicação por elementos de $\mathbb{N}$ é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que", isto é, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, e todo $c \in \mathbb{N}$, $a < b \Leftrightarrow ac < bc$.*

Demonstração:
Suponha que $a < b$. Logo $b - a \in \mathbb{N}$. Assim, se $c \in \mathbb{N}$, pelo fato de $\mathbb{N}$ ser fechado para multiplicação, temos $bc - ac = (b - a)c \in \mathbb{N}$, logo $ac < bc$.
Reciprocamente, suponha que $ac < bc$, com $c \in \mathbb{N}$. Pela tricotomia, temos três possibilidades a analisar:
(i) $a = b$. Isso resultaria em $ac = bc$, o que é falso.
(ii) $b < a$. Isso resultaria, pela primeira parte da demonstração, em $bc < ac$, o que também é falso.
(iii) $a < b$. Esta é a única possibilidade válida. ■

Proposição 1.13. *[7] A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade, isto é, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$,e para todo $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $a = b \Leftrightarrow ac = bc$.*

Demonstração:
Da Propriedade 1, vem que a igualdade $a = b \Rightarrow ac = bc$ vale quando $c = 0$, já que $c = c$.
Suponha agora que $ac = bc$ tenha duas possibilidades:
i) Caso $c > 0$. Se $a < b$, pela Proposição 1.12, temos que $ac < bc$, o que é um absurdo. Se $b < a$, pelo mesmo argumento acima, $bc < ac$, o que é um absurdo. Portanto, a única alternativa válida é $a = b$.
ii) Caso $-c > 0$ a argumentação segue a mesma linha acima para o caso $c > 0$. ■

Proposição 1.14. *Se a e b são inteiros tais que $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Similarmente, para todos $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, tem-se $ab \neq 0$.*

Demonstração:
Se $a \neq 0$, então $ab = 0 = a \cdot 0$. Pela Proposição 1.13 e já que $a \neq 0$, segue-se que $b = 0$. ■

As sete primeiras propriedades listadas valem para o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) ou reais ($\mathbb{R}$) também. No entanto, o Princípio da Boa Ordenação, que será enunciado a seguir só vale para os inteiros.

8. (Princípio da Boa Ordenação) Todo subconjunto não-vazio de inteiros, limitado inferiormente, contém um elemento mínimo. Em particular, como qualquer subconjunto de naturais é limitado inferiormente (pelo número 1), temos que todo subconjunto não-vazio de naturais possui um menor elemento.

Aqui será feito um exemplo utilizando o conjuntos dos números racionais e reais, apenas para que os leitores que já estão familiarizados com esses conjuntos entendam a importância do Princípio da Boa Ordenação.

Exemplo 1.15. *Sejam os conjuntos:*
$A = \{a \in \mathbb{Z} : -2 < a < 3\} = \{-1, 0, 1, 2\}$
$B = \{b \in \mathbb{Q} : -2 < b < 3\}$
$C = \{c \in \mathbb{R} : -2 < c < 3\}$
O conjunto A possui um menor elemento, enquanto os conjuntos B e C não possuem.

Para os números inteiros a e b definimos a subtração $a - b$ como a soma de a com o oposto de b, isto é,

$$a - b = a + (-b).$$

Em outras palavras, quando $b > 0$ fazemos um deslocamento a partir de a de b unidades para a esquerda. Se $b < 0$ fazemos um deslocamento a partir de a de $|b|$ unidades para a direita.

1.3 DIVISIBILIDADE

Dados dois números inteiros a e b, dizemos que a divide b, e indicamos por $a|b$, quando existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Nesse caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou ainda que b é divisível por a. Se a não divide b, denotamos esse fato por $a \nmid b$.

Proposição 1.16. *[7] Sejam, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tem-se:*

i) $1|a$, $a|a$ e $a|0$.

ii) $0|a \Leftrightarrow a = 0$.

iii) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração:

(i) Isso vem imediatamente das igualdades $a = 1 \cdot a$, $a = a \cdot 1$ e $0 = a \cdot 0$.

(ii) Suponhamos que $0|a$; logo existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 0 \cdot c$. Como $0 \cdot c = 0$, pode-se concluir que $a = 0$. Para a recíproca basta observar que $0|0$, o que foi provado no item anterior.

(iii) $a|b$ e $b|c$ implicam que existem $g, h \in \mathbb{Z}$, tais que $b = ga$ e $c = hb$.
Substituindo o valor de b da primeira equação na segunda, obtemos:
$c = hb = h(ga) = (hg)a$. Logo, $a|c$.

■

Proposição 1.17. *[7] Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, então $a|b$ e $c|d \Rightarrow ac|bd$.*

Demonstração:
Se $a|b$ e $c|d$, então existem $g, h \in \mathbb{Z}$, tais que $b = ga$ e $d = hc$.
Portanto, $bd = (ga)(hc) = g(ah)c = g(ha)c = (gh)(ac)$. Logo, $ac|bd$. ■

Proposição 1.18. *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $a|b \Rightarrow a|(-b)$.*

Demonstração:
Se $a|b$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Agora, $a(-c) = -(ac) = -b$. Portanto, $a|(-b)$. De forma similar, se $a|(-b)$, então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $-b = ac$. Agora, $a(-c) = -(ac) = -(-b) = b$. Portanto, $a|b$. ■

Proposição 1.19. *[7] Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$. Então $a|b \Leftrightarrow a|c$.*

Demonstração:
Suponhamos que $a|(b + c)$. Logo, existe $h \in \mathbb{Z}$, tal que $b + c = ga$.
Agora, se $a|b$, temos que existe $h \in \mathbb{Z}$, tal que $b = ha$.
Juntando as duas igualdades temos que $ga = b + c = ha + c$.
Daí, $c = ga - ha = a(g - h)$.
Logo $a|c$.
A prova da implicação contrária é totalmente análoga.
E ainda, se $a|(b - c)$ e $a|b$, pelo caso anterior, temos $a|(-c)$, o que implica que $a|c$. ■

Proposição 1.20. *[7] Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, são tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ temos $a|(xy + yc)$.*

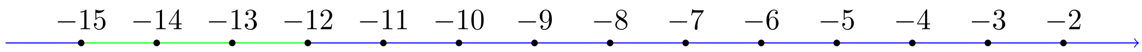
Demonstração:
Como $a|b$ e $a|c$ implicam que existem $f, g \in \mathbb{Z}$ tais que $b = fa$ e $c = ga$. Logo, $xb + yc = x(fa) + y(ga) = (xf + yg)a$, o que prova o resultado. ■

1.4 DIVISÃO EUCLIDIANA

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ não nulos, a divisão euclidiana nos fornece o maior múltiplo de b menor ou igual a a e quanto falta para chegar em a a partir de tal múltiplo.

Exemplo 1.21. *Sejam $a = 12$ e $b = 5$. Temos que o maior múltiplo de 5 menor ou igual a 12 é $10 = 5 \cdot 2$ e que falta 2 para chegar em 12 a partir de 10, ou seja, $12 = 5 \cdot 2 + 2$.*

Sejam $a = -12$ e $b = 5$. Temos que o maior múltiplo de 5 menor ou igual a -12 é $-15 = 5 \cdot (-3)$ e que falta 3 para chegar em -12 a partir de -15, ou seja, $-12 = 5 \cdot (-3) + 3$.



Teorema 1.22. *[13] Sejam a e b dois números inteiros com $a, b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração:
Vamos dividir a demonstração em casos:

- Caso 1: Para $a, b > 0$. Vejamos inicialmente a existência dos números q e r. Se $0 < a < b$, tomamos $q = 0$ e $r = a$, e temos $a = bq + r$, com $0 < r < b$. Suponhamos $0 < b \leq a$. Fazemos as subtrações sucessivas $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, etc, enquanto essa diferença for maior ou igual a zero. Em algum momento essa diferença ficará negativa, pois estamos gerando números naturais que estão ficando cada vez menores e o conjunto dos números naturais possui um menor elemento, o 1. Quando encontrarmos a primeira diferença negativa, isto é, encontrarmos q tal que $a - qb \geq 0$ e $a - (q+1)b < 0$, definimos $r = a - qb$. Como $a - qb \geq 0$, vemos que $r \geq 0$. Ainda, de $a - (q+1)b < 0$ vem $a - qb < b \Rightarrow r < b$. Isto estabelece a existência de q e r. Vejamos agora a unicidade. Sejam q e r números naturais tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$, e sejam p e s números naturais tais que $a = bp + s$ e $0 \leq s < b$. Sem perda de generalidade podemos supor $q \geq p$. Subtraindo membro a membro essas identidades vem $s - r = b(q - p)$. Se fosse $q > p$, teríamos $q - p \geq 1$ e $s - r = b(q - p) \geq b$, o que não ocorre, pois $s - r < b$. Segue que $q = p$. De $s - r = b(q - p)$ obtemos $s - r = 0 \Rightarrow s = r$. Fica demonstrada a unicidade do par q e r.

- Caso 2: Para $a < 0$ e $b > 0$. Definindo $a' = -a$, pelo Caso 1, existem únicos q', r' inteiros tais que $a' = bq' + r'$ com $0 \leq r' < b$. Se $r' = 0$, então $a = b(-q')$ e acabou. Se $r' > 0$, então podemos escrever $a = b(-q') - r' = b(-q' - 1) + (b - r')$. Sejam $q = -q' - 1$ e $r = b - r'$. Assim, temos que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$. Notemos que como $r' > 0$ neste caso, então $r = b - r' < b$. Assim, a prova fica reduzida ao Caso 1.

- Caso 3: Para $a \neq 0$ e $b < 0$. Definindo $b' = -b > 0$, pelos casos anteriores, existem únicos q, r inteiros tais que $a = (-b)q + r$ com $0 \leq r < (-b)$. Daí, podemos reescrever $a = b(-q) + r$ com $0 \leq r < |b|$.

■

Os números q e r são chamados de *quociente* e *resto* da divisão de a por b. E a e b são chamados, respectivamente, de *dividendo* e *divisor*.

Da divisão euclidiana, temos que o resto da divisão de a por b é zero, se, e somente se $b|a$.

Exemplo 1.23. *Temos que* $13 = 2 \cdot 6 + 1$*, onde* $q = 6$ *e* $r = 1$*. Logo,* $2 \not| \ 13$*. Agora,* $12 = 2 \cdot 6 + 0$*, onde* $q = 6$ *e* $r = 0$*. Logo,* $2|12$.

1.5 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Dizemos que um número inteiro é *múltiplo comum* de dois ou mais números inteiros dados se ele é, simultaneamente, múltiplo de todos esses números.
São sempre múltiplos comuns de a e b, o número resultante do produto de a por b (e suas variantes negativas) e o zero.

Diremos que um número inteiro $m > 0$ é um *mínimo múltiplo comum (mmc)* dos números inteiros a e b, e denotamos por $m = mmc(a, b)$, se m for o menor inteiro positivo múltiplo de a e que é múltiplo de b.

Exemplo 1.24. *30 é múltiplo comum 2 e 5, mas não é mmc desses números. O número 10 é o mmc de 2 e 5.*

1.6 REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS

O sistema de numeração adotado atualmente no sistema educacional é o decimal posicional. Esse nome se dá porque utiliza a base 10 e os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 justapostos, de forma que, cada algarismo além do seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição. Esse peso é uma potência de 10 e varia da seguinte forma: O algarismo que está mais à direita é multiplicado por 10^0, o que está imediatamente à sua esquerda é multiplicado por 10^1, o que vem imediatamente à esquerda desse é multiplicado por 10^2 e assim por diante.

Exemplo 1.25. *Temos que*

$$52066 = 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10 + 6.$$

Cada algarismo possui uma ordem, contada da direita para a esquerda. Cada grupo de três ordens forma uma classe, também contada da direita para a esquerda. As classes podem ser separadas por um ponto, um espaço ou não serem separadas. Nesse trabalho serão separadas por um espaço. A seguir estão apresentadas as primeiras classes e ordens:

Classe do Milhão			Classe do Milhar			Classe das Unidades		
centena	dezena	unidade	centena	dezena	unidade	centena	dezena	unidade
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem

O sistema de numeração decimal posicional baseia-se no teorema a seguir, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema 1.26. *[7, p. 59] Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \cdots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados tais que*

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n.$$

Demonstração:
Vamos demonstrar o teorema por Indução Completa sobre a. Se $0 < a < b$, basta tomar $n = 0$ e $r_0 = a$. A unicidade da escrita é clara nesse caso.
Suponhamos o resultado válido para todo natural menor do que a, onde $a \geq b$. vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r, únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < b.$$

Como $0 < q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números inteiros $n' \geq 0$ e $0 \leq r_1, \cdots, r_{n'+1} < b$, com $r_{n'+1} \neq 0$, univocamente determinados, tais que

$$q = r_1 + r_2 b + \cdots + r_{n'+1} b^{n'}.$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas temos que

$$a = bq + r = b(r_1 + r_2 b + \cdots + r_{n'+1} b^{n'}) + r$$

donde o resultado segue-se pondo $r_0 = r$ e $n = n' + 1$. ∎

A representação dada no teorema anterior é chamada de expansão relativa à base b. Quando $b = 10$, essa expansão é chamada expansão decimal.

1.7 ARITMÉTICA DOS RESTOS

Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são *congruentes* módulo m se os restos de suas divisões euclidianas por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se $a \equiv b \mod m$.

Quando a relação $a \equiv b \mod m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são *incongruentes* módulo m. Nesse caso escreve-se $a \not\equiv b \mod m$.

Exemplo 1.27. $27 \equiv 32$ *mod 5, pois os restos das divisões de 27 e 32 por 5 são os mesmos (iguais a 2).*

Exemplo 1.28. $31 \not\equiv 29$ *mod 3, pois o resto da divisão de 31 por 3 é 1, enquanto o resto da divisão de 29 por 3 é 2.*

Proposição 1.29. *[3] Dado o inteiro positivo m, a relação de congruência módulo m satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $a \equiv a \bmod m$, para qualquer inteiro a, ou seja, é uma relação reflexiva;

ii) se $a \equiv b \bmod m$, então $b \equiv a \bmod m$, para quaisquer inteiros a e b, ou seja, é uma relação simétrica;

iii) se $a \equiv b \bmod m$ e $b \equiv c \bmod m$, então $a \equiv c \bmod m$, para quaisquer inteiros a, b e c, ou seja, é uma relação transitiva.

A demonstração desta proposição é imediata, uma vez que, como mostrado anteriormente, dois números são congruentes módulo m quando deixam o mesmo resto na divisão por m.

Proposição 1.30. *[7] Suponha $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \bmod m$ se, e somente se, $m|(b-a)$.*

Demonstração:
Sejam $a = mq + r$, com $0 \leq r < m$ e $b = mq' + r'$, com $0 \leq r' < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$b - a = (mq' + r') - (mq + r) = mq' - mq + r' - r = m(q' - q) + (r' - r).$$

Portanto, $a \equiv b \bmod m$ se, e somente se, $r = r'$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m|(b-a)$, já que $|r - r'| < m$. ■

Vejamos agora que a relação de congruência é preservada por somas e produtos.

Proposição 1.31. *[7] Se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $a + c \equiv b + d \bmod m$ e $ac \equiv bd \bmod m$.*

Demonstração:
Pela Proposição 1.30, $a \equiv b \bmod m \Rightarrow m|(a-b)$. Analogamente, $c \equiv d \bmod m \Rightarrow m|(c-d)$. Sabemos que a soma de dois múltiplos de m é também um múltiplo de m, ou seja, $a - b + c - d$ é um múltiplo de m , isto é, $m|[(a+c) - (b+d)]$ e, assim, $a + c \equiv b + d \bmod m$.
Se $m|(a-b)$, ocorre também que $m|(a-b)c$. Da mesma forma, se $m|(c-d)$, $m|(c-d)b$. Usando argumento semelhante, concluímos que, se $m|(a-b)$, vale dizer também que $(a-b)c + (c-d)b$ é um múltiplo de m, mas $(a-b)c + (c-d)b = ac - bc + cb - db$, ou seja, $m|(ac - bd)$, de onde obtemos $ac \equiv bd \bmod m$. ■

Proposição 1.32. *[7] Para todos $n \in \mathbb{N}, a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b$ mod m, então, tem-se que $a^n \equiv b^n$ mod m.*

Demonstração:
Vamos mostrar por indução em n. Para $n = 1$ é evidente. Suponhamos que para algum n tenha-se $a^{n-1} \equiv b^{n-1}$ mod m. Pela Proposição 1.31, podemos ter $a \cdot a^{n-1} \equiv b \cdot b^{n-1}$ mod m, daí $a^n \equiv b^n$ mod m. ■

2

OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DO 6º ANO

Serão apresentadas nesse capítulo as descrições de como os critérios de divisibilidade são apresentados em quatro livros didáticos escritos de acordo com a BNCC. Esses quatro livros foram escolhidos porque o trabalho foi escrito durante a pandemia de Coronavírus que ocorreu nos anos de 2020 e 2021 e as bibliotecas estavam fechadas nessa ocasião. Esses foram os livros que estavam disponíveis para pesquisa.

Após a homologação da BNCC, muitos livros didáticos se adequaram aos novos parâmetros para o ensino da Matemática e mudaram a forma como apresentam os critérios de divisibilidade. De acordo com o documento, em relação ao objeto de conhecimento "Múltiplos e divisores de um número natural" temos a seguinte habilidade:

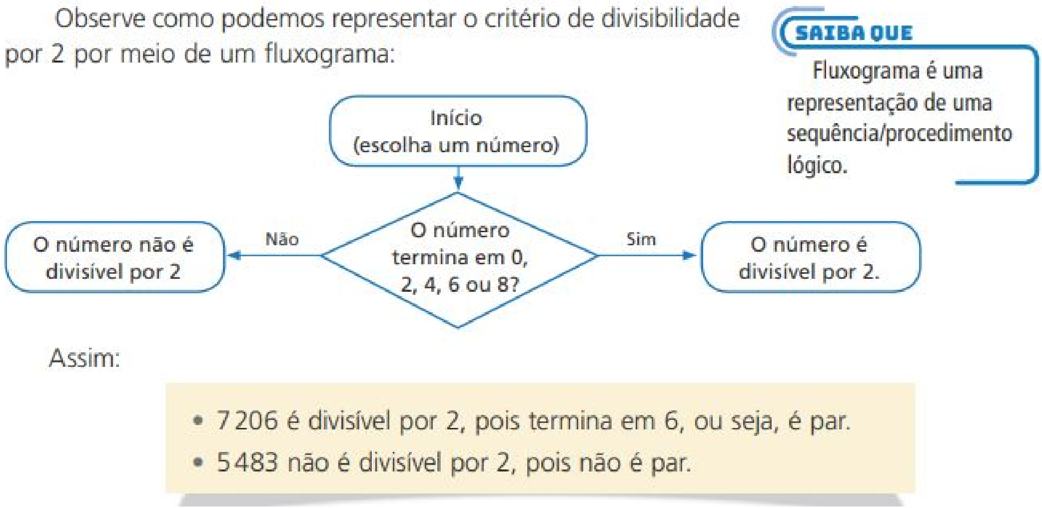
> (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. ([2] p.301)

Mas, o que pode-se perceber, com a descrição dos livros é que a maioria apresenta alguns exemplos e contraexemplos como investigação, como se isso fosse suficiente para comprovar a teoria apresentada.

A seguir faremos um resumo de como os critérios de divisibilidade são apresentados em 4 livros didáticos:

- Livro 1: A Conquista da Matemática - José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci - 2019 [4].

O livro apresenta o assunto nas páginas 106 até 115. Este é abordado com poucos exemplos para que os alunos cheguem a uma conclusão que vale para infinitos números. No critério de divisibilidade por 2, por exemplo, é mostrado um fluxograma, que pode ser visto na Figura 1. Esse fluxograma apresenta a regra, indo para um sim (ser) ou não (não ser) ser divisível por 2. Para outros critérios, após os exemplos as regras são apresentadas para memorização. Como pode ser visto na Figura 2, é colocada uma frase para cada critério sugerindo a investigação. No caso da divisibilidade por 5, a frase é "Observando os números naturais divisíveis por 5 (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, . . .), dizemos que:". Em seguida a regra já é colocada. São apresentados todos os critérios de divisibilidade citados na BNCC. Para finalizar há uma lista de sete exercícios.


Observe como podemos representar o critério de divisibilidade por 2 por meio de um fluxograma:

SAIBA QUE

Fluxograma é uma representação de uma sequência/procedimento lógico.

Assim:

- 7 206 é divisível por 2, pois termina em 6, ou seja, é par.
- 5 483 não é divisível por 2, pois não é par.

Figura 1: Fonte [4].


Divisibilidade por 5

Observando os números naturais divisíveis por 5 (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5.

- 42 020 é divisível por 5, pois termina em 0.
- 6 045 é divisível por 5, pois termina em 5.
- 21 237 não é divisível por 5, pois não termina nem em 0 nem em 5.

Divisibilidade por 10

Observando os números naturais divisíveis por 10 (0, 10, 20, 30, 40, 50, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 10 quando terminar em 0.

- 1 500 é divisível por 10.
- 4 203 não é divisível por 10.

Divisibilidade por 100

Observando os números naturais divisíveis por 100 (0, 100, 200, 300, 400, 500, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 100 quando terminar em 00.

- 31 700 é divisível por 100.
- 5 430 não é divisível por 100.
- 789 não é divisível por 100.

Divisibilidade por 1 000

Observando os números naturais divisíveis por 1 000 (0, 1 000, 2 000, 3 000, 4 000, 5 000, ...), dizemos que:

Um número natural será divisível por 1 000 quando terminar em 000.

- 25 000 é divisível por 1 000.
- 8 300 não é divisível por 1 000.
- 6 341 não é divisível por 1 000.

Figura 2: Fonte [4].

- Livro 2: Araribá Mais: Matemática - obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editores responsáveis Mara Regina Garcia Gay, Willian Raphael Silva - 2018 [6].

O assunto é abordado nesse livro de forma investigativa, nas páginas 104 até 106, apresentando alguns exemplos e questionando o que há em comum nos números apresentados para que o aluno deduza a regra. Estas não são colocadas, como pode ser observado nas Figuras 3 e 4. São dadas sugestões, com questionamentos ou parte do número destacada, e o aluno deve escrever com suas palavras a conclusão que chegou. Não há comprovação de nenhuma teoria, apenas exemplos e contraexemplos. No entanto, nas orientações ao professor, sugere-se que seja dito aos alunos que a verificação de alguns casos não é suficiente para provar o critério de divisibilidade, como pode ser visto na Figura 4. É dito ainda que existe uma demonstração, mas que não será apresentada nessa coleção. O assunto é finalizado com uma lista de seis exercícios.

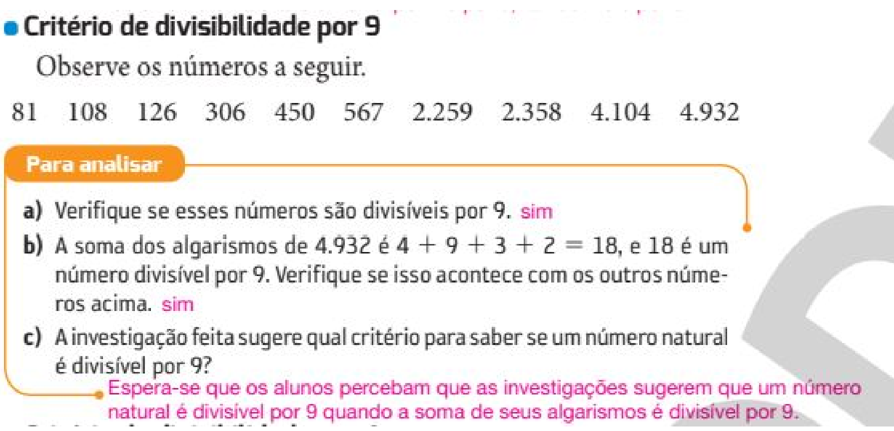


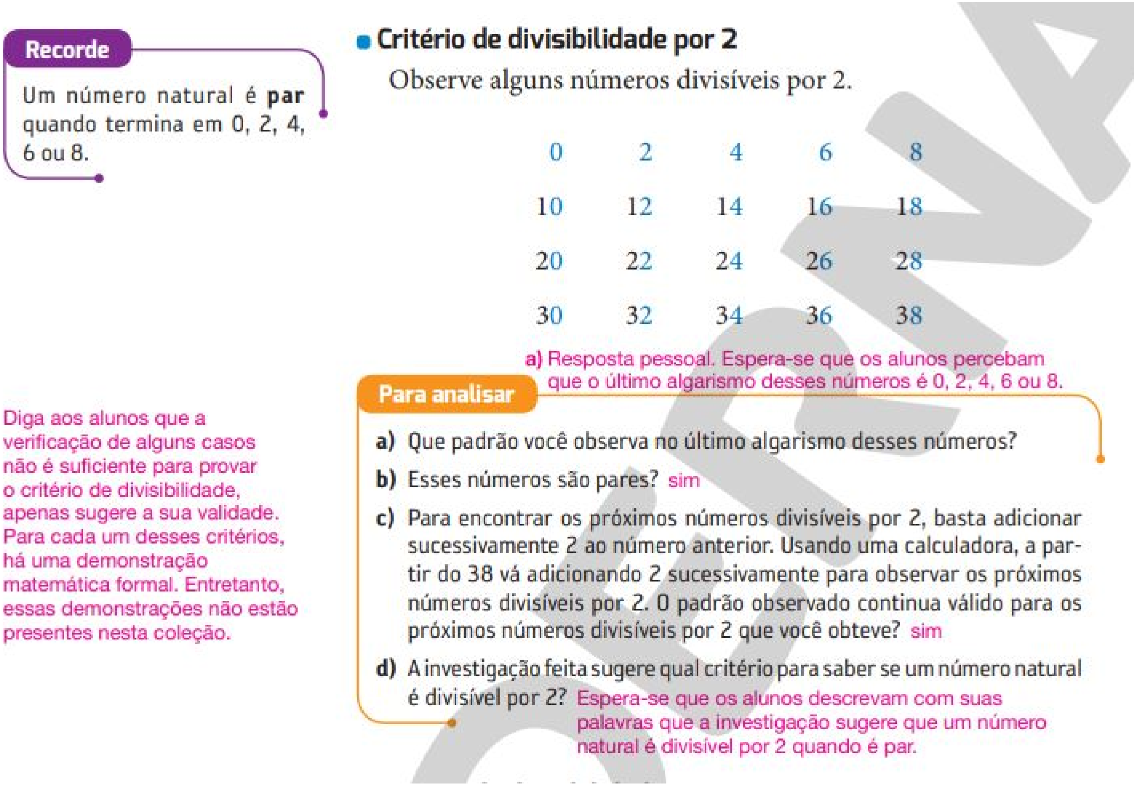
Figura 3: Fonte [6].

- Livro 3: Apoema: Matemática - Adilson Longen - 2018 [10].

Encontra-se nas páginas 80 e 81, um jogo, com os critérios de divisibilidade por 2 a 10, apresentados em parte na Figura 5. Esse jogo constitui-se de tiras com as regras para que os alunos leiam e em seguida um quadro com números para que sejam assinalados os números que são divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. Os critérios de divisibilidade por 100 e 1000 não estão presentes no jogo, mas nas orientações ao professor aparece a sugestão de conversar com os alunos sobre eles. Nas dez atividades que finalizam o assunto aparece uma em que há uma investigação dos critérios de divisibilidade por 100 e 1000 (Figura 6).

- Livro 4: Matemática Bianchini - Edwaldo Bianchini - 2018 [1].

Nesse livro, os critérios de divisibilidade são apresentados nas páginas 94 até 100 por meio de exemplos e em seguida as regras. Os exercícios são colocados após cada critério. Também monta-se um fluxograma para cada critério (Figura 7). O diferencial desse


Recorde

Um número natural é **par** quando termina em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Diga aos alunos que a verificação de alguns casos não é suficiente para provar o critério de divisibilidade, apenas sugere a sua validade. Para cada um desses critérios, há uma demonstração matemática formal. Entretanto, essas demonstrações não estão presentes nesta coleção.

Critério de divisibilidade por 2

Observe alguns números divisíveis por 2.

0	2	4	6	8
10	12	14	16	18
20	22	24	26	28
30	32	34	36	38

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que o último algarismo desses números é 0, 2, 4, 6 ou 8.

Para analisar

a) Que padrão você observa no último algarismo desses números?

b) Esses números são pares? sim

c) Para encontrar os próximos números divisíveis por 2, basta adicionar sucessivamente 2 ao número anterior. Usando uma calculadora, a partir do 38 vá adicionando 2 sucessivamente para observar os próximos números divisíveis por 2. O padrão observado continua válido para os próximos números divisíveis por 2 que você obteve? sim

d) A investigação feita sugere qual critério para saber se um número natural é divisível por 2? Espera-se que os alunos descrevam com suas palavras que a investigação sugere que um número natural é divisível por 2 quando é par.

Figura 4: Fonte [6].

material é que, nas páginas 113, 114 e 115, são feitas as demonstrações dos critérios de divisibilidade por 9, 6 e 4. Essas demonstrações possibilitam o aluno fazer outras demonstrações, como a do 3 e 2, por exemplo.

- **Critério de divisibilidade por 5:** Um número natural é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.
- **Critério de divisibilidade por 10:** Um número natural é divisível por 10 quando termina em 0.
- **Critério de divisibilidade por 4:** Um número natural é divisível por 4 quando seus dois últimos algarismos formam um número divisível por 4.
- **Critério de divisibilidade por 8:** Um número natural é divisível por 8 quando seus três últimos algarismos formam um número divisível por 8.
- **Critério de divisibilidade por 9:** Um número natural é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é um número divisível por 9.

2 Completem o quadro indicando com **X** os números das colunas que são divisíveis pelo número de cada linha.

no caderno

Divisibilidade por	9 456	24 975	18 348	26 405	33 337	15 900	16 000	8 876
2	X		X			X	X	X
3	X	X	X			X		
4	X		X			X	X	X
5		X		X		X	X	
6	X		X			X		
8	X						X	
9		X						
10						X	X	

Figura 5: Fonte [10].

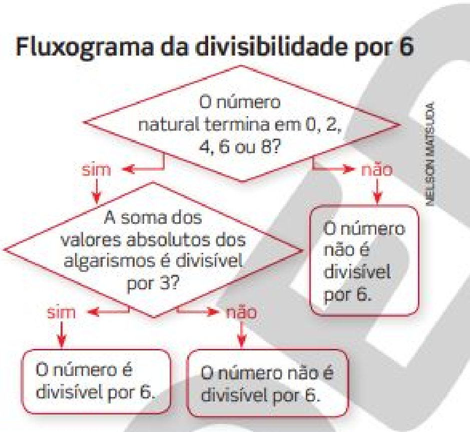
4 Considere os números 50, 110, 200, 300, 2 200, 30 000, 55 000 e 71000.

a) Quais deles são divisíveis por 100? 200, 300, 2 200, 30 000, 55 000 e 71 000

b) E quais são divisíveis por 1 000? 30 000, 55 000 e 71 000

c) Como você descreveria o critério de divisibilidade por 100 e por 1 000? Um número natural é divisível por 100 quando seus dois últimos algarismos são 00, e é divisível por 1 000 quando seus três últimos algarismos são 000.

Figura 6: Fonte [10].



Divisibilidade por 6

Observe os exemplos a seguir.

a) Já sabemos que o número 42 é divisível por 2 e por 3. Ele também é divisível por 6, pois $7 \cdot 6 = 42$.

b) O número 64 é divisível por 2, mas não é divisível por 3. Além disso, ele também não é divisível por 6, pois a divisão de 64 por 6 não é exata.

c) O número 75 é divisível por 3, mas não é divisível por 2. Ele também não é divisível por 6.

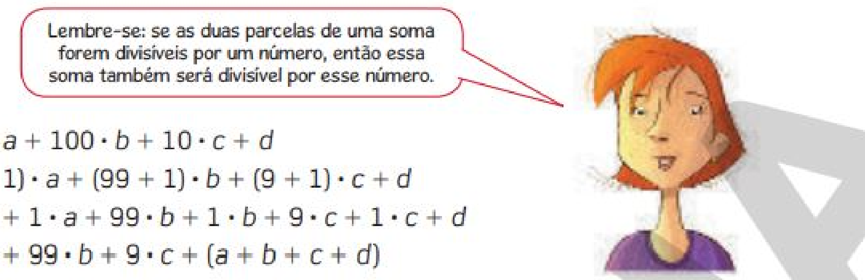
O fluxograma ao lado representa a divisibilidade por 6.

Apresentamos apenas alguns exemplos, mas sempre é verdade que:

Um número natural é divisível por 6 somente quando é divisível por 2 e por 3.

32. a) Para nenhum, pois o número não termina em zero nem em 5.
b) 1, 4 e 7, pois a soma dos valores absolutos dos algarismos é divisível por 3.

Figura 7: Fonte [1]



$$abcd = 1.000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$$
$$abcd = (999 + 1) \cdot a + (99 + 1) \cdot b + (9 + 1) \cdot c + d$$
$$abcd = 999 \cdot a + 1 \cdot a + 99 \cdot b + 1 \cdot b + 9 \cdot c + 1 \cdot c + d$$
$$abcd = 999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c + (a + b + c + d)$$
$$abcd = \underbrace{9 \cdot (111 \cdot a + 11 \cdot b + c)}_{\text{parcela divisível por 9}} + \underbrace{(a + b + c + d)}_{\text{outra parcela}}$$

Para quaisquer valores de *a*, *b*, *c* e *d*, a primeira parcela é divisível por 9 porque ela é um número múltiplo de 9. Se a outra parcela $(a + b + c + d)$, que é a soma dos valores absolutos dos algarismos, também for, então a soma delas, isto é, o número *abcd*, será divisível por 9.

Assim, fica demonstrado que:

Quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de um número de quatro algarismos é divisível por 9, esse número é divisível por 9.

Figura 8: Fonte [1]

3 OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 2 ATÉ 20, POR 100 E POR 1000 - DEMONSTRAÇÕES PARA OS PROFESSORES

A aritmética dos restos como pode ser vista na Seção 1.7 trata de números inteiros com restos iguais quando divididos por um mesmo número natural e denomina-os de congruentes, caso isso ocorra.

Pode-se demonstrar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000 usando a noção de congruência. Essa seção é voltada para os professores e apresenta as demonstrações usando a aritmética dos restos. Essas são seguidas de como são mencionadas comumente nos livros didáticos. Algumas demonstrações serão feitas na mesma seção devido a semelhança entre elas.

Esses critérios não são únicos e outros poderiam ser demonstrados usando diferentes ramos da aritmética. Porém, nesse trabalho a intenção é demonstrá-los usando as congruências e a definição de mínimo múltiplo comum. Então, alguns critérios conhecidos ou mais comuns (eventualmente até mais simples) podem existir, mas não serão apresentados aqui.

Em outra seção, no entanto, serão apresentadas deduções que podem ser passadas para os alunos do 6º ano do ensino fundamental, usando conhecimentos menos avançados de aritmética.

3.1 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 2, 5 E 10

Temos que

$$10 \equiv 0 \bmod 2, \;\; 10 \equiv 0 \bmod 5 \;\; \text{e} \;\; 10 \equiv 0 \bmod 10.$$

Daí, pela Proposição 1.32, temos que:

$$10^i \equiv 0 \bmod 2, \; 10^i \equiv 0 \bmod 5 \text{ e } 10^i \equiv 0 \bmod 10, \quad \forall\, i \geq 1.$$

Isso acarreta que, para todo natural n:

$$n10^i \equiv 0 \bmod 2, \quad n10^i \equiv 0 \bmod 5 \quad \text{e} \quad n10^i \equiv 0 \bmod 10, \;\; \forall\, i \geq 1.$$

Portanto, dado um número $n = n_r n_{r-1} \ldots n_0$ na base 10, temos que $n = n_r 10^r + n_{r-1}10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0$ e então,

$$n \equiv n_0 \bmod 2, \;\; n \equiv n_0 \bmod 5 \quad \text{e} \quad n \equiv n_0 \bmod 10.$$

Isso nos diz que n é divisível por 2, 5 e 10 se, e somente se, n_0 é divisível por 2, 5 e 10, respectivamente. Como $0 \leq n_0 \leq 9$, então escrevemos os respectivos critérios de divisibilidade como:

> Um número natural é divisível por 2 quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

> Um número natural é divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5.

> Um número natural é divisível por 10 quando terminar em 0.

3.2 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 3 E 9

Temos que

$$10 \equiv 1 \text{ mod } 3 \quad \text{e} \quad 10 \equiv 1 \text{ mod } 9.$$

Daí, pela Proposição 1.32 vem que

$$10^i \equiv 1 \quad \text{mod } 3 \;\Rightarrow n10^i \equiv n \quad \text{mod } 3, \;\; \forall\, i \geq 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{e}$$

$$10^i \equiv 1 \quad \text{mod } 9 \;\Rightarrow n10^i \equiv n \text{ mod } 9, \forall\, i \geq 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então, dado um número $n = n_r 10^r + n_{r-1}10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0$, temos que:

$$n \equiv n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0 \text{ mod } 3 \;\; \text{e} \;\; n \equiv n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0 \text{ mod } 9.$$

Isso prova que n é divisível por 3 ou 9 se, e somente se, $n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0$ é divisível por 3 ou 9, respectivamente.

Portanto, enunciamos esses critérios de divisibilidade por 3 e 9 como:

> Um número natural é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for divisível por 3.

> Um número natural é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for divisível por 9.

3.3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 4 E 100

Como

$$100 \equiv 0 \text{ mod } 4 \;\; \text{e} \;\; 100 \equiv 0 \text{ mod } 100,$$

dado um número $n = n_r 10^r + n_{r-1}10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0$, temos que

$$n = 100(n_r n_{r-1} \dots n_2) + n_1 n_0 \equiv n_1 n_0 \text{ mod } 4 \ \text{ e}$$

$$n = 100(n_r n_{r-1} \dots n_2) + n_1 n_0 \equiv n_1 n_0 \text{ mod } 100.$$

Daí, o número n será divisível por 4 ou 100 se $n_1 n_0$ for divisível por 4 ou 100, respectivamente, ou seja:

- n será divisível por 4 quando terminar em 00, 04, 08, 12, ..., 92 ou 96.
- n será divisível por 100 quando terminar em 00.

Portanto, enunciamos esses critérios de divisibilidade por 4 e 100 como:

Um número natural é divisível por 4 quando terminar em 00 ou os dois últimos algarismos formarem um número divisível por 4.

Um número natural é divisível por 100 quando os dois últimos algarismos forem iguais a zero.

3.4 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 8 E 1000

Como

$$1000 \equiv 0 \text{ mod } 8 \ \text{ e } \ 1000 \equiv 0 \text{ mod } 1000,$$

dado um número $n = n_r 10^r + n_{r-1}10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0$, temos que

$$n = 1000(n_r n_{r-1} \dots n_3) + n_2 n_1 n_0 \equiv n_2 n_1 n_0 \text{ mod } 8 \text{ e}$$

$$n = 1000(n_r n_{r-1} \dots n_3) + n_2 n_1 n_0 \equiv n_2 n_1 n_0 \text{ mod } 1000.$$

Daí o número n será divisível por 8 ou 1000, se $n_2 n_1 n_0$ for divisível por 8 ou 1000, respectivamente.

- n será divisível por 8 quando terminar em 000, 008, 016, 024, ..., 184 ou 192.
- n será divisível por 1000 quando terminar em 000.

Portanto, enunciamos esses critérios de divisibilidade por 8 e 1000 como:

Um número natural é divisível por 8 quando terminar em 000 ou os três últimos algarismos formarem um número divisível por 8.

Um número natural é divisível por 1000 quando terminar em 000.

3.5 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 6

Inicialmente, vamos provar por indução que $10^i \equiv 4 \mod 6$ para todo natural $i \geq 1$. De fato, a congruência é válida para $i = 1$. Suponhamos que para algum i tenha-se $10^{i-1} \equiv 4 \mod 6$. Multiplicando ambos os membros da congruência por 10, temos que:

$$10^i = 10 \cdot 10^{i-1} \equiv 10 \cdot 4 = 40 \equiv 4 \mod 6,$$

provando assim a afirmação.
Portanto, se $n = n_r \dots n_1 n_0$, então

$$n = n_r 10^r + \cdots + n_1 10 + n_0 \equiv (n_r + \cdots + n_1)4 + n_0 \mod 6.$$

Decorre daí que n é divisível por 6 se, e somente se, $n_0 + 4(n_r + \cdots + n_1)$ é divisível por 6.

Portanto, enunciamos esse critério de divisibilidade por 6 como:

> Um número natural é divisível por 6 quando a soma do seu último algarismo com o quádruplo da soma dos outros algarismos for divisível por 6.

Nesse caso, a aritmética dos restos fornece um critério de divisibilidade por 6 um pouco diferente do que aparece nos livros didáticos do 6º ano. No entanto, o critério como geralmente aparece nos livros decorre imediatamente do fato que $6 = mmc(2, 3)$. Seu enunciado é:

> Um número natural é divisível por 6 quando for divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo.

3.6 OUTROS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Já foi visto que os livros didáticos apresentam apenas os critérios de divisibilidade que a nova BNCC cita. Mas outros números naturais têm critérios interessantes que poderiam ser ensinados para os alunos do sexto ano do ensino fundamental ou até mesmo em outros anos escolares, já que o assunto encerra-se no ano escolar citado.

A seguir serão apresentados alguns deles da mesma forma que os anteriores, com uma demonstração e uma maneira que poderiam estar expostos nos livros didáticos. Como não estão na BNCC, serão apresentados também alguns exemplos.

3.6.1 *Critério de divisibilidade por 7*

Como

$$100 \equiv 2 \mod 7,$$

dado um número $n = n_r n_{r-1} \dots n_0$ na base 10, temos que

$$n = n_r 10^r + \cdots + n_1 10 + n_0 = 100(n_r n_{r-1} \dots n_2) + n_1 n_0 \equiv 2(n_r n_{r-1} \dots n_2) + n_1 n_0 \bmod 7.$$

Então, n é divisível por 7 quando $2(n_r n_{r-1} \dots n_2) + n_1 n_0$ for divisível por 7.

Enunciamos esse critério de divisibilidade por 7 como:

> Um número natural é divisível por 7 quando a soma dos seus dois últimos algarismos com o dobro do número formado pelos outros algarismos for divisível por 7.

Exemplo 3.1. *Vamos verificar se o número 20881 é divisível por* 7*. Para isso, vamos ter que aplicar o algoritmo de divisibilidade por* 7 *repetidas vezes.*
Primeiro, temos que $2 \cdot 208 + 81 = 497$*. Como* 497 *ainda é um número grande, vamos aplicar o critério nele.*
Temos que $2 \cdot 4 + 97 = 105$*. Como* 105 *ainda é um número grande, vamos aplicar o critério nele novamente.*
Temos que $2 \cdot 10 + 5 = 49$ *e sabemos que* 49 *é divisível por* 7*.*
Então, 20881 *é divisível por* 7 *(assim como* 105 *e* 497*).*

Esse não é o único critério que pode ser apresentado para a divisibilidade por 7.

A seguir um critério que aparentemente é mais simples, no entanto, pelo exemplo, pode-se perceber que em geral são necessários mais passos para chegar a uma conclusão, pois os números analisados nos primeiros passos possuem mais dígitos do que os analisados pelo critério anterior.

Como

$$10 \equiv 3 \bmod 7,$$

dado um número $n = n_r n_{r-1} \dots n_0$ na base 10, temos que

$$n = 10(n_r n_{r-1} \dots n_1) + n_0 \equiv 3(n_r n_{r-1} \dots n_1) + n_0 \bmod 7.$$

Então, n é divisível por 7 quando $3(n_r n_{r-1} \dots n_1) + n_0$ for divisível por 7.

Enunciamos esse critério de divisibilidade por 7 como:

> Um número natural é divisível por 7 quando a soma dos seu último algarismo com o triplo do número formado pelos outros algarismos for divisível por 7.

Exemplo 3.2. *Vamos verificar, por esse critério, se o número* 20881 *é divisível por 7. Novamente, aplicaremos o critério repetidas vezes.*
Temos que $3 \cdot 2088 + 1 = 6265$*, daí* $3 \cdot 626 + 5 = 1883$*, depois* $3 \cdot 188 + 3 = 567$*, ainda* $3 \cdot 56 + 7 = 175$ *e, por fim,* $3 \cdot 17 + 5 = 56$*. Como* 56 *é divisível por* 7*, então,* 20881 *é divisível por* 7 *(assim como* 6265*,* 1883*,* 567 *e* 175*).*

3.6.2 *Critério de divisibilidade por 11*

Como

$$10 \equiv -1 \mod 11,$$

pela Proposição 1.32, temos que

$$10^{2i} \equiv 1 \mod 11 \quad \text{e} \quad 10^{2i+1} \equiv -1 \mod 11.$$

Seja $n = n_r \ldots n_5 n_4 n_3 n_2 n_1 n_0$ um número escrito na base 10. Temos, então, que

$$\begin{aligned} n_0 &\equiv n_0 \bmod 11 \\ n_1 10 &\equiv -n_1 \bmod 11 \\ n_2 10^2 &\equiv n_2 \bmod 11 \\ n_3 10^3 &\equiv -n_3 \bmod 11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Somando, membro a membro as congruências anteriores, temos que

$$n \equiv n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \cdots \mod 11.$$

Portanto, n é divisível por 11 se, e somente se, é divisível por 11 o número $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \cdots$.

Enunciamos esse critério de divisibilidade por 11 como:

> Um número natural é divisível por 11 quando somando o algarismo da unidade, subtraindo o da dezena, somando o da centena, subtraindo o da unidade de milhar e assim por diante, nessa ordem, resulta em um número divisível por 11.

Exemplo 3.3. *Vamos verificar se o número* 138479 *é divisível por* 11. *Temos que* $9 - 7 + 4 - 8 + 3 - 1 = 0$ *e zero é divisível por* 11. *Então,* 138479 *é divisível por* 11.

3.6.3 *Critério de divisibilidade por 13*

Temos que

$$1000 \equiv -1 \mod 13.$$

Podemos escrever

$$n = n_r \ldots n_5 n_4 n_3 n_2 n_1 n_0 = n_2 n_1 n_0 + 10^3 n_5 n_4 n_3 + 10^6 n_8 n_7 n_6 + 10^9 n_{11} n_{10} n_9 + \cdots .$$

Temos que

$$\begin{gathered}
n_2n_1n_0 \equiv n_2n_1n_0 \mod 13\\
10^3n_5n_4n_3 \equiv -n_5n_4n_3 \mod 13\\
10^6n_8n_7n_6 \equiv n_8n_7n_6 \mod 13\\
10^9n_{11}n_{10}n_9 \equiv -n_{11}n_{10}n_9 \mod 13\\
\vdots
\end{gathered}$$

Somando, membro a membro as congruências anteriores, temos que

$$n \equiv n_2n_1n_0 - n_5n_4n_3 + n_8n_7n_6 - n_{11}n_{10}n_9 + \cdots \mod 13.$$

Portanto, n é divisível por 13 se, e somente se, é divisível por 13 o número $n_2n_1n_0 - n_5n_4n_3 + n_8n_7n_6 - n_{11}n_{10}n_9 + \cdots$.

Enunciamos esse critério de divisibilidade por 13 como:

> Um número natural é divisível por 13 quando somando o número formado pelos três últimos algarismos, subtraindo o número formado pelos próximos três algarismos, somando o número formado pelos próximos três algarismos e assim por diante, nessa ordem, resultar em um número divisível por 13.

Exemplo 3.4. *Vamos verificar se o número* 631657 *é divisível por* 13. *Temos que* $657 - 631 = 26$ *e* 26 *é divisível por* 13. *Então,* 631657 *é divisível por* 13.

Uma observação interessante é que o critério de divisibilidade por 13 também serve para o 7 e para o 11, já que:

$$1000 \equiv -1 \mod 7 \quad \text{e} \quad 1000 \equiv -1 \mod 11.$$

Enunciamos esses critérios de divisibilidade como:

> Um número natural é divisível por 7 ou por 11 quando somando o número formado pelos três últimos algarismos, subtraindo o número formado pelos próximos três algarismos, somando o número formado pelos próximos três algarismos e assim por diante, nessa ordem, resultar em um número divisível por 7 ou por 11, respectivamente.

3.6.4 *Critério de divisibilidade por 17*

Temos que

$$100 \equiv -2 \mod 17.$$

Podemos escrever

$$n = n_r \ldots n_5n_4n_3n_2n_1n_0 = n_1n_0 + 10^2n_3n_2 + 10^4n_5n_4 + 10^6n_7n_6 + \cdots.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
n_1n_0 &\equiv n_1n_0 \mod 17\\
10^2n_3n_2 &\equiv -2n_3n_2 \mod 17\\
10^4n_5n_4 &\equiv 4n_5n_4 \mod 17\\
10^6n_7n_6 &\equiv -6n_7n_6 \mod 17\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Somando, membro a membro as congruências acima, temos que

$$n \equiv n_1n_0 - 2n_3n_2 + 4n_5n_4 - 6n_7n_6 + \cdots \mod 17.$$

Portanto, n é divisível por 17 se, e somente se, é divisível por 17 o número $n_1n_0 - 2n_3n_2 + 4n_5n_4 - 6n_7n_6 + \cdots$.

Enunciamos esse critério de divisibilidade por 17 como:

Um número natural é divisível por 17 quando somando o número formado pelos dois últimos algarismos, subtraindo o dobro do número formado pelos próximos dois algarismos, somando o quádruplo do número formado pelos próximos dois algarismos, subtraindo o sêxtuplo do número formado pelos próximos dois algarismos e assim por diante, nessa ordem, resulta em um número divisível por 17.

Exemplo 3.5. *Vamos verificar se o número* 214013 *é divisível por* 17. *Temos que* $13 - 2 \cdot 40 + 4 \cdot 21 = 13 - 80 + 84 = 17$ *e* 17 *é divisível por* 17. *Então,* 214013 *é divisível por* 17.

Observação 3.6. *É importante observar que os critérios de divisibilidade por* 11, 13 *e* 17 *apresentados aqui são delicados de serem ensinados aos alunos de sexto ano, visto que as subtrações podem resultar em números negativos.*
No Exemplo 3.3, isso ocorre, já que $9 - 7 = 2$, $2 + 4 = 6$, $6 - 8 = -2$.
Portanto, a escolha dos números pelo professor deve ser criteriosa para que isso não ocorra em nenhum dos casos.

3.6.5 *Critério de divisibilidade por 19*

Temos que

$$100 \equiv 5 \mod 19.$$

Dado um número $n = n_rn_{r-1}\ldots n_0$ na base 10, temos que:

$$n = 100(n_rn_{r-1}\ldots n_2) + n_1n_0 \equiv 5(n_rn_{r-1}\ldots n_2) + n_1n_0 \ \mathrm{mod} 19.$$

Então, n é divisível por 19 se, e somente se, $5(n_rn_{r-1}\ldots n_2) + n_1n_0$ for divisível por 19.

Enunciamos esse critério de divisibilidade por 19 como:

Um número é divisível por 19, se a soma do número formado pelos dois últimos algarismos com o quíntuplo do número formado pelo restante dos algarismos for divisível por 19.

Exemplo 3.7. *Vamos verificar se o número 48697 é divisível por 19. Temos que* $5 \cdot 486 + 97 = 2527$, $5 \cdot 25 + 27 = 152$ *e* $5 \cdot 1 + 52 = 57$. *Como* $57 = 3 \cdot 19$, *então,* 486971 *é divisível por* 19 *(assim como* 2527 *e* 152*).*

3.6.6 *Critérios de divisibilidade por 12, 14, 15, 18 e 20*

Esses critérios estão assim agrupados, pois podem ser enunciados utilizando outros dois, e a justificativa de todos eles decorre imediatamente da definição de mmc, pois $mmc(3,4) = 12$; $mmc(2,7) = 14$; $mmc(3,5) = 15$; $mmc(2,9) = 18$ e $mmc(4,10) = 20$. A seguir enunciamos os critérios e apresentamos exemplos para todos os casos.

Um número natural é divisível por 12 quando for divisível por 3 e 4 ao mesmo tempo, ou seja, quando a soma dos algarismos for divisível por 3 e ou terminar em 00 ou os dois últimos algarismos forem divisíveis por 4.

Exemplo 3.8. *Vamos verificar se o número* 32100 *é divisível por* 12. *Temos que* $3 + 2 + 1 = 6$ *e* 6 *é divisível por* 3. *Então* 32100 *é divisível por* 3. *O número termina em* 00, *então é divisível por* 4. *Portanto, como* 32100 *é divisível por* 3 *e* 4 *ao mesmo tempo, ele é divisível por* 12.

Um número natural é divisível por 14 quando for divisível por 2 e 7 ao mesmo tempo, ou seja, quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8 e a soma dos seus dois últimos algarismos com o dobro do número formado pelos outros algarismos for divisível por 7.

Exemplo 3.9. *Vamos verificar se o número* 36344 *é divisível por* 14. *Temos que o último algarismo é* 4, *então é divisível por* 2. *Agora,* $2 \cdot 363 + 44 = 770$ *e* 770 *é divisível por* 7. *Portanto, como* 36344 *é divisível por* 2 *e* 7 *ao mesmo tempo, ele é divisível por* 14.

Um número natural é divisível por 15 quando for divisível por 3 e 5 ao mesmo tempo, ou seja, quando a soma de seus algarismos for divisível por 3 e terminar em 0 ou 5.

Exemplo 3.10. *Vamos verificar se o número* 53025 *é divisível por* 15. *Temos que* $5 + 3 + 0 + 2 + 5 = 15$ *e* 15 *é divisível por* 3. *Agora, o último algarismo é* 5, *então o número é divisível por* 5. *Portanto, como* 53025 *é divisível por* 3 *e* 5 *ao mesmo tempo, ele é divisível por* 15.

Um número natural é divisível por 18 quando for divisível por 2 e 9 ao mesmo tempo, ou seja, quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8 e a soma dos algarismos for divisível por 9.

Exemplo 3.11. *Vamos verificar se o número 16344 é divisível por* 18*. Temos que último algarismo é* 4*, então o número é divisível por* 2*. Agora,* $1 + 6 + 3 + 4 + 4 = 18$ *e* 18 *é divisível por* 9*. Portanto, como* 16344 *é divisível por* 2 *e* 9 *ao mesmo tempo, ele é divisível por* 18*.*

No critério de divisibilidade por 20, observa-se que ele deve ser divisível por 4 e 10 ao mesmo tempo, ou seja, terminar em 00, ou terminar em 0 e os dois últimos algarismos serem divisíveis por 4. Nesse caso, teríamos os finais possíveis: 00, 20, 40, 60 e 80. O que pode ser escrito como:

Um número natural é divisível por 20 quando for divisível por 4 e 10 ao mesmo tempo, ou seja, quando terminar 0 e o penúltimo algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemplo 3.12. *Vamos verificar se o número* 75620 *é divisível por* 20*. O último algarismo é* 0 *e o penúltimo é* 2*, portanto, é divisível por* 20*.*

Nesse último critério, poderíamos ter usado o fato de que $mmc(4, 5) = 20$ também, e enunciar como divisível por 20 quando for divisível por 4 e 5 ao mesmo tempo. Como os números divisíveis por 5 são os terminados em 0 ou 5 e não há nenhum número divisível por 4 terminado em 5, nos restringiríamos aos terminados em zero. Bem, os terminados em zero, são os divisíveis por 10, portanto, é mais prático utilizar o 10 diretamente.

3.6.7 *Critério de divisibilidade por 16*

Temos que,

$$10000 \equiv 0 \mod 16.$$

Dado um número $n = n_r n_{r-1} \dots n_0$ na base 10, temos que $n = 10000(n_r n_{r-1} \dots n_4) + n_3 n_2 n_1 n_0$. Daí, o número n será divisível por 16, se $n_3 n_2 n_1 n_0$ for divisível por 16, ou seja:

- n será divisível por 16 quando terminar em 0000, 0016, 0032, 0048, $\dots$, 9968 ou 9984.

Enunciamos esse critério de divisibilidade por 16 como:

Um número natural é divisível por 16 quando terminar em 0000 ou os quatro últimos algarismos formarem um número divisível por 16.

Exemplo 3.13. *Vamos verificar se o número* 7250032 *é divisível por* 16*. Os quatro últimos algarismos deste número são* 0032*, que é um número divisível por* 16*. Portanto,* 7250032 *é divisível por* 16*.*

4 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 2, 4, 5, 6 E 10 - DEDUÇÕES PARA O 6º ANO

Neste capítulo trabalharemos apenas com números naturais com poucos dígitos (quatro ou cinco) para que a atenção dos alunos esteja focada no processo de dedução e não no tamanho do número.

Alguns conhecimentos prévios são necessários aos alunos para que entendam as demonstrações, como a decomposição de números na base 10, a linguagem algébrica e algumas propriedades de divisibilidade.

A decomposição dos números naturais é uma das habilidades para o 6º ano do Ensino Fundamental, segundo a BNCC:

> (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal [2, p. 301]

A linguagem algébrica não é uma habilidade do 6º ano, porém, é um assunto que deve ser introduzido previamente de forma simples e que tenha significado para o aluno.

As propriedades de divisibilidade que serão usadas neste capítulo serão enunciadas a seguir. Destacamos que no sexto ano os alunos ainda não sabem colocar termos em evidência. Por isso, precisaremos da Propriedade 2. Para auxiliar os alunos a visualizarem tais propriedades, podemos utilizar alguns desenhos (Figura 9 e Figura 10 a seguir) e exemplos numéricos.

Propriedade 1: Se $n|a$, então $n|ac$ para qualquer natural c.

Propriedade 2: Seja $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Suponha que n divide a_i para $i = 1, 2, 3$. Então $n|a$ se, e somente se, n divide a_4.

É muito importante orientar os alunos que as deduções serão feitas com um número com poucos algarismos, mas que elas podem ser ampliadas posteriormente e que a Propriedade 2 vale para um número qualquer de somas.

Por se tratarem de deduções que serão apresentadas para alunos do 6º anos, alguns rigores serão omitidos. Como, por exemplo, especificar para que conjuntos de números a demonstração vale, visto que eles ainda não estudaram todos os conjuntos numéricos.

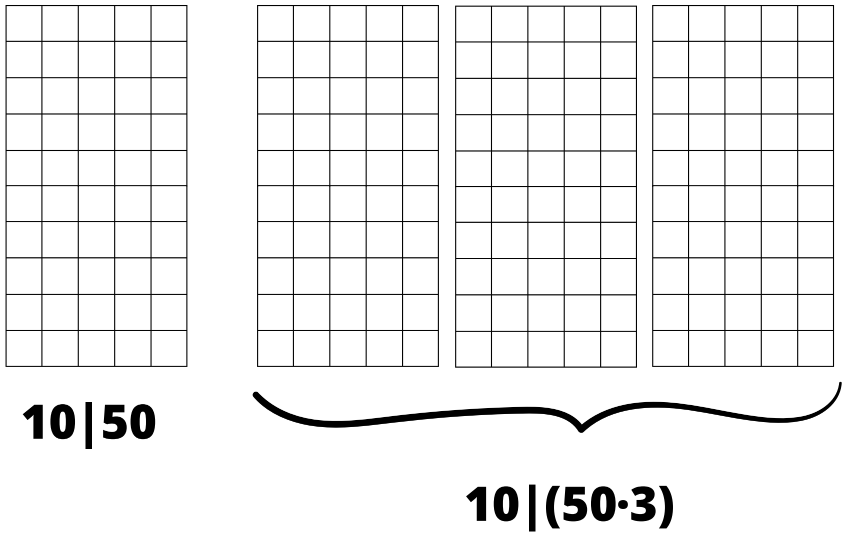


Figura 9: Figura para auxiliar a visualização da Propriedade 1

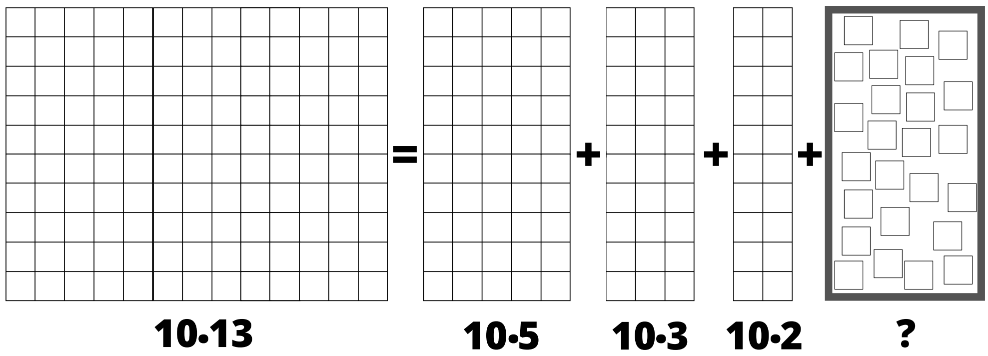


Figura 10: Figura para auxiliar a visualização da Propriedade 2

4.1 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 2

Para o critério de divisibilidade por 2, vamos iniciar considerando um número que vai até a unidade de milhar *abcd*, onde a, b, c e d representam seus algarismos. Então, podemos escrever:

$$abcd = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Como 1000, 100 e 10 são divisíveis por 2, podemos observar que para quaisquer valores de a, b, c, temos:

$$abcd = \underbrace{a \cdot 1000}_{\text{é divisível por 2}} + \underbrace{b \cdot 100}_{\text{é divisível por 2}} + \underbrace{c \cdot 10}_{\text{é divisível por 2}} + d.$$

Então, para que o número $abcd$ seja divisível por 2, basta que d o seja. Como d pode ser substituído por qualquer um dos 10 algarismos que compõem o sistema de numeração decimal, para que seja divisível por 2, d deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

4.2 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 5 E POR 10

Deduzimos os critérios de divisibilidade por 5 e por 10 de forma análoga ao do 2. Iniciando da mesma forma, chegamos semelhantemente a:

$$abcd = \underbrace{a \cdot 1000}_{\text{é divisível por 5 e por 10}} + \underbrace{b \cdot 100}_{\text{é divisível por 5 e por 10}} + \underbrace{c \cdot 10}_{\text{é divisível por 5 e por 10}} + d.$$

Então, para que o número $abcd$ seja divisível por 5 ou por 10, basta que d o seja. Como d pode ser substituído por qualquer um dos 10 algarismos que compõem o sistema de numeração decimal, para que seja divisível por 5, d deve ser 0 ou 5 e para ser divisível por 10, d deve ser 0.

4.3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR 3 E POR 9

Vamos considerar novamente o número $abcd$ para deduzir os critérios de divisibilidade por 3 e por 9. Seja, então:

$$abcd = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Podemos considerar que $1000 = 999 + 1$, $100 = 99 + 1$ e $10 = 9 + 1$. Reescrevendo:

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = a \cdot (999 + 1) + b \cdot (99 + 1) + c \cdot (9 + 1) + d.$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$a \cdot (999 + 1) + b \cdot (99 + 1) + c \cdot (9 + 1) + d = a \cdot 999 + a \cdot 1 + b \cdot 99 + b \cdot 1 + c \cdot 9 + c \cdot 1 + d.$$

Reagrupando as parcelas da adição, obtemos:

$$a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9 + a + b + c + d$$

Como 999, 99 e 9 são divisíveis por 3 e por 9, podemos observar que para quaisquer valores de a, b, c, temos:

$$\underbrace{a \cdot 999}_{\text{é divisível por 3 e por 9}} + \underbrace{b \cdot 99}_{\text{é divisível por 3 e por 9}} + \underbrace{c \cdot 9}_{\text{é divisível por 3 e por 9}} + a + b + c + d.$$

Então, para que o número $abcd$ seja divisível por 3 ou por 9, basta que $a+b+c+d$ seja divisível por 3 ou por 9, respectivamente.

4.4 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 4

Agora, para deduzir o critério de divisibilidade por 4, vamos considerar o número $abcde$, que vai até dezena de milhar. Podemos escrever:

$$abcde = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e.$$

Como 10 000, 1000 e 100 são divisíveis por 4, podemos observar que para quaisquer valores de a, b, c, temos:

$$abcd = \underbrace{a \cdot 10000}_{\text{é divisível por 4}} + \underbrace{b \cdot 1000}_{\text{é divisível por 4}} + \underbrace{c \cdot 100}_{\text{é divisível por 4}} + d \cdot 10 \ + \ e.$$

As parcelas $d \cdot 10 + e$ representam os dois últimos algarismos do número $adcde$. Então, para que o número $abcde$ seja divisível por 4, basta que $d \cdot 10 + e$ seja divisível por 4, ou seja, o número de o seja.

4.5 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 6

A dedução do critério de divisibilidade por 6 será um pouco diferente. Vamos considerar inicialmente que um número divisível por 6 é aquele que pode ser representado por um produto de 6 por outro valor, por exemplo $12 = 6 \cdot 2$ ou $60 = 6 \cdot 10$. Então, usando a letra a para representar esse segundo fator, temos que um número divisível por 6 é da forma $6 \cdot a$.

Como $6 = 2 \cdot 3$, podemos substituir 6 por $2 \cdot 3$, daí $6a = 2 \cdot 3 \cdot a$.

Pelas propriedades associativa e comutativa da multiplicação, temos:

$$6a = (2 \cdot 3) \cdot a = \underbrace{2 \cdot (3 \cdot a)}_{I} = \underbrace{3 \cdot (2 \cdot a).}_{II}$$

Em I, temos $2 \cdot (3 \cdot a)$, substituindo $3 \cdot a$ por b, vem:

$$6a = 2 \cdot (3 \cdot a) = 2 \cdot b.$$

Isso nos permite concluir que $6a$ é múltiplo de 2 (e portanto, divisível por 2).

Em II, temos $3 \cdot (2 \cdot a)$, substituindo $2 \cdot a$ por c, vem:

$$6a = 3 \cdot (2 \cdot a) = 3 \cdot c.$$

Isso nos permite concluir que $6a$ é múltiplo de 3 (e portanto, divisível por 3).

Portanto, $6a$ é divisível por 2 e por 3. Ou seja, um número divisível por 6 é divisível por 2 e por 3.

Agora, temos que os múltiplos de 2 podem ser escritos na forma $2 \cdot a$ e os múltiplos de 3 podem ser escritos na forma $3 \cdot b$.

Se um número é múltiplo de 2 e 3 ao mesmo tempo, então temos que

$$2 \cdot a = 3 \cdot b.$$

Afirmamos que b é múltiplo de 2.

Para que os alunos consigam visualizar isso, podemos utilizar a Figura 11. Vamos agrupar os $3 \cdot b$ quadrados associados ao número $3 \cdot b$ em 3 linhas, com cada linha contendo b quadrados. Agora, como este número também é múltiplo de 2, podemos retirar a terceira linha, que contém b quadrados, e agrupar os quadrados desta linha em colunas nas 2 primeiras linhas. Como este número é múltiplo de 2, a figura final formada será um retângulo. Se olharmos só nos b quadrados que agrupamos, eles formaram um retângulo com duas linhas. Logo, b é múltiplo de 2

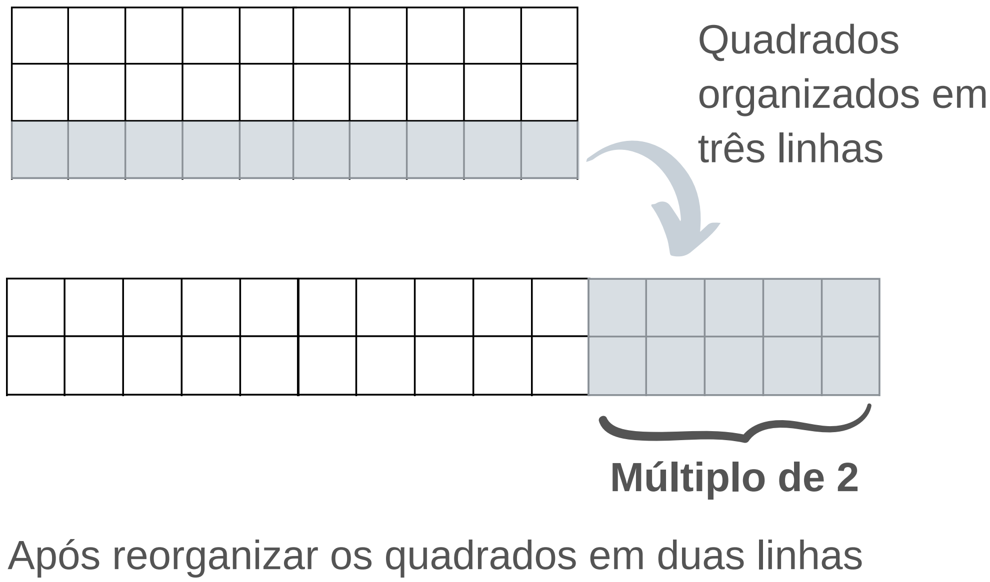


Figura 11: Figura para auxiliar a visualização

Portanto, temos que $3 \cdot b = 3 \cdot (2 \cdot c) = (3 \cdot 2) \cdot c = 6 \cdot c$. Portanto, um número que é múltiplo de 2 e 3 ao mesmo tempo é múltiplo de 6.

5 PROPOSTA DIDÁTICA

Nesse capítulo será apresentada uma proposta de atividade baseada na BNCC, com o foco principal na investigação.

Para a atividade o aluno assistirá um vídeo contendo orientações e questionamentos a respeito dos critérios de divisibilidade e receberá uma folha com as orientações e com espaços para que ele complete com suas conclusões sobre o assunto. Essa atividade pode ser feita individualmente ou em grupo.

O vídeo pode ser acessado no link https://youtu.be/eqvo7-0x3UE.

Público alvo: Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental / Interessados em geral

Tema/Conteúdo: Critérios de divisibilidade por 2, 3, 4 e 5.

Objetivo geral: Ajudar o aluno na investigação dos critérios de divisibilidade.

Objetivos específicos:

- Investigar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4 e 5
- Instigar a curiosidade por assuntos matemáticos, em especial os outros critérios de divisibilidade.
- Desenvolver o protagonismo do aluno em relação às investigações.

Metodologia: Será apresentado um vídeo, que poderá ser pausado a qualquer momento, e uma ficha com orientações aos alunos (Figura 12). Conforme o vídeo vai seguindo, o aluno preenche a ficha e indica suas observações. Ao final, ele tira suas conclusões sobre os critérios de divisibilidade e pode anotar o critério com suas palavras ou copiando do vídeo.

Recursos: Ficha de orientação, lápis, borracha, computador ou aparelho de televisão com acesso a internet.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Critério de divisibilidade por 2

Observações:

O critério de divisibilidade por 2 é:

Critério de divisibilidade por 3

Observações:

O critério de divisibilidade por 3 é:

Critério de divisibilidade por 4

Observações:

O critério de divisibilidade por 4 é:

Critério de divisibilidade por 5

Observações:

O critério de divisibilidade por 5 é:

Não pare por aqui!
Vamos investigar o critério de divisibilidade por _____.

Figura 12: Ficha de orientação

6 CONCLUSÕES

Já pude perceber, em anos que leciono Matemática no Ensino Fundamental, que ela está longe de despertar o interesse geral. Salvo em quem tem facilidade e já vem com esse amor das séries iniciais. No entanto, a investigação pode ser um caminho para trazer mais vida a essa disciplina tão injustiçada.

A curiosidade é nata das crianças, e pode ser que muitas vezes, o ensino de alguns conteúdos seja passado apenas como regras e o "por quê" que o aluno tenha dentro dele seja suprimido pela falta de tempo ou qualquer outra desculpa que se dê.

Procurei, com esse trabalho, ampliar a visão dos critérios de divisibilidade ensinados no 6º ano do Ensino Fundamental. Não apenas como regras, mas como um conteúdo significativo e que tem fundamentos bem claros na teoria dos números.

Além disso, espero que outros critérios, além dos que convencionalmente são apresentados nos livros didáticos sejam conhecidos e eventualmente a investigação desses possa também ser feita, se não nessa série, em outras.

Procurei mostrar que as deduções dos critérios que são apresentados nos livros didáticos são possíveis de serem feitas em séries iniciais, trazendo mais significado aos conteúdos.

Quanto aos livros didáticos, verifiquei que o único que atende a proposta da BNCC é o Araribá Mais: Matemática [6]. Ele faz o estudo das critérios utilizando a investigação e abre espaço para que o aluno escreva suas conclusões, sem apresentar regras prontas. No entanto, a quantidade de exercícios é pequena, apenas 6. E esses 6 exercícios não fazem uma boa exploração do assunto. Já o livro Apoema [10] não traz a investigação, mas contém uma lista com 10 exercícios, explorando bem o assunto. O livro A Conquista da Matemática [4] segue a mesma linha do Apoema, ou seja, não apresenta o tema através de investigação, mas explora o assunto bem através dos exercícios, mesmo sendo uma lista de apenas 7.

Apesar de não apresentar os critérios de divisibilidade por meio de investigações, o livro que considero mais interessante é o Matemática Bianchini [1]. Isso se deve ao fato de que além de apresentar as deduções das regras, ele apresenta uma vasta lista de exercícios. Minha sugestão para quem adotar esse livro é que faça as investigações antes de apresentar os critérios do livro.

Entendo que as deduções que trouxe como sugestão para os alunos são apenas um ponto inicial para que futuramente eles possam questionar mais as regras que diversas vezes vêm prontas e talvez retomar essas mesmas deduções fazendo-as com mais rigor.

Com as demonstrações usando as congruências procurei trazer um entendimento mais amplo do assunto para os educadores, de modo que eles transmitam esse conhecimento de forma plena.

Com a atividade proposta, espero dar uma nova luz ao ensino dos critérios, de modo que a investigação seja o carro chefe, seguido, quem sabe, da dedução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Bianchini, Edwald. Matemática - Bianchini. 9. ed. São Paulo: Moderna, (2018).

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, (2017)

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

[3] Castro, Jânio Kléo Sousa. Teoria dos números / Jânio Kléo Sousa de Castro; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye - Fortaleza: UAB/IFCE (2010)

https://www.educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/429385/2/Teoria%20dos%20Numeros.pdf

[4] Castrucci, Benedicto; Giovanni, José Ruy; Giovanni Jr., José Ruy. A Conquista da Matemática 6. 4 ed. São Paulo: FTD, (2019).

[5] Doering, Luisa Rodrígues; Ripoll, Cydara Cavedon, Critérios de divisibilidade para todas as idades: Um trabalho de reflexão de grupo, IV Simpósio Nacional de Formação do Professor, (2019)

https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2020/12/minicurso_Simposio_Vit_Luisa_cydara_Final_.pdf

[6] Gay, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael (Org.). Araribá Mais. 1. ed. São Paulo: Moderna, (2018).

[7] Hefez, Abramo. Aritmética. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, (2016).

[8] Hefez, Abramo. Iniciação à Aritmética. Rio de Janeiro: IMPA, (2015).

http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf

[9] Lima, Elon Lages. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, (2013).

[10] Longen, Adilson. Apoema: Matemática 6. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, (2018).

[11] Lopes, Davi; Bézout e Outros Bizus. 18ª Semana Olímpica. São José do Rio Preto,SP (2017).

https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/bezout_e_outros_bizus.pdf

[12] Morgado, A. C; Carvalho, P. C. P. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM (2015).

[13] Paterlini, Roberto Ribeiro. Aritmética dos Números Inteiros. 2 ed. São Carlos: UFSCar (2017).

https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_arit_2ed_19_02_2017.pdf

[14] Plinio, José Santos de Oliveira. Introdução à Teoria dos Números. Rio de Janeiro: SBM, (1998).