



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA - UEFS  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

### O TEOREMA DE PICK NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM COM O USO DO GEOGEBRA

JOSÉ VALDECI DE SANTANA LIMA JUNIOR

**Orientadora:** PROF<sup>a</sup> DR<sup>a</sup> FABÍOLA DE OLIVEIRA PEDREIRA

Feira de Santana - Bahia

Março/2022

José Valdeci de Santana Lima Junior

**O TEOREMA DE PICK NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA  
ABORDAGEM COM O USO DO GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Fabíola de Oliveira Pedreira.

**Feira de Santana - Bahia**

Março/2022

#### Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

1.699t Lima Junior, José Valdeci de Santana  
O teorema de Pick no ensino fundamental: uma abordagem com o uso do geogebra / José Valdeci de Santana Lima Júnior  
102 p.  
Orientadora: Fabíola de Oliveira Pedreira  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana-UEFS, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022.  
1. Teorema de Pick – Ensino fundamental. 2. GeoGebra. 3. Tecnologias educacionais - Matemática. I. Pedreira, Fabíola de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE JOSÉ VALDECI DE SANTANA LIMA JUNIOR DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos quatro dias do mês de março de dois mil e vinte e dois, às 17:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: <https://meet.google.com/dmg-ekzo-gfm>, da dissertação apresentada sob o título “O TEOREMA DE PICK NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM COM O USO DO GEOGEBRA”, do discente **José Valdeci de Santana Lima Junior**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS), Junilson Cerqueira da Silva (IFBA) e Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: Aprovado.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 04 de março de 2022.

Fabíola de Oliveira Pedreira

Prof.ª Dra. Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS)

Junilson Cerqueira da Silva

Prof. Dr. Junilson Cerqueira da Silva (IFBA)

Darlan Ferreira de Oliveira

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Visto do Coordenador:

[Assinatura]

*Dedico esse trabalho a todos que direta ou indiretamente contribuíram para sua concretização, em especial aos meus amados pais Valdeci “Bia” (in memoriam), Laudecy “Lai”, por tudo que fizeram por mim ao longo de minha vida.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por se fazer presente em todos os momentos trêmulos e firmes.

Aos meus pais, Valdeci e Laudecy, que me deram à vida e me ensinaram a viver com dignidade.

Ao meu amado irmão Fábio, pelo inestimável companheirismo.

A minha amada esposa, Taciana, por todo apoio emocional e compreensão que me dedicou nesse tempo. Obrigado pelo carinho, paciência, companheirismo e pelas palavras de sabedoria e esperança. A meu amado filho, Thiago, que mesmo pequeno na idade é gigante nas coisas boas que me faz, fortalece minha vontade de crescer e aprender mais.

A minha orientadora, professora doutora Fabíola de Oliveira Pedreira, pela confiança em mim depositada e pelas contribuições prestadas.

Aos colegas de mestrado, pela união ao longo dessa jornada e pelo aprendizado contínuo, sempre com discussões construtivas.

A todos aqueles que cruzaram meu caminho fortalecendo ainda mais minha caminhada.

A minha cunhada Mariluze e seu esposo Gilberto Neto pelas contribuições nesse trabalho.

A todos os profissionais da UEFS que contribuíram, de alguma forma, para o meu crescimento profissional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

*“A Matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza.”*

*(Bertrand Russell)*

# Resumo

A presente dissertação retrata uma forma inovadora de trabalhar a Geometria com tecnologias. O objetivo principal é apresentar, demonstrar e aplicar o Teorema de Pick acessando o software GeoGebra. O teorema é uma importante ferramenta para calcular áreas de polígonos através da contagem dos pontos numa rede com coordenadas inteiras. O trabalho apresenta três demonstrações para polígonos simples: por triângulos fundamentais, por justaposição e por indução finita e, também, traz uma extensão do teorema com polígonos não simples e a relação entre o teorema de Pick e o teorema de Euler para poliedros planos com suas respectivas demonstrações. Por fim, será apresentada uma sequência didática composta de quatro atividades para serem aplicadas em turmas do 8º ano do ensino fundamental II e tem como propósito a aplicação do Teorema de Pick.

**Palavras-chave:** Contagem de pontos; Áreas de polígonos; Teorema de Pick; GeoGebra; Sequência didática.

# Abstract

This dissertation portrays an innovative way of working geometry with Technologies. Its main objective is to present, demonstrate and apply Pick's Theorem using Geogebra software. This theorem is an important tool to calculate areas of polygons by counting the points in a lattice with integer coordinates. This work presents three proofs for simple polygons: by fundamental triangles, by juxtaposition and by finite induction. It also brings an extension of the theorem with non-simple polygons and the relationship between Pick's theorem and Euler's Theorem for plane polyhedra with their respective proofs. Finally, a didactic sequence will be presented composed of four activities to be applied in classes of the 8th year of elementary school II and its purpose is to provide students with the applicability of the theorem in remote classes.

**KEY WORDS:** Point count; Polygon areas; Pick's Theorem; GeoGebra; Didactic Sequence.

# Lista de Figuras

1.1	Linha poligonal .....	15
1.2	Polígonos variados .....	16
1.3	Não polígonos .....	16
1.4	Caso em que M pertence ao interior de uma aresta do polígono P..	17
1.5	Caso em que M é um vértice do polígono P .....	17
1.6	Segmento cujo interior não intersecta o polígono .....	18
1.7	Polígonos justapostos .....	18
1.8	Polígonos semelhantes.....	18
1.9	Unidade de área fundamental .....	20
1.10	Área de um retângulo .....	20
1.11	Área de um quadrado.....	21
1.12	Área de um paralelogramo.....	22
1.13	Área de um triângulo conhecendo a altura.....	23
1.14	Área de um triângulo conhecendo os três lados.....	23
1.15	Área de um trapézio.....	24
1.16	Área de um losango.....	25
1.17	Área de um polígono com buracos.....	26
1.18	Área de um polígono simples .....	27
1.19	Área por decomposição de um polígono simples.....	27
1.20	Área de polígonos semelhantes .....	28
1.21	Região irregular .....	29
1.22	Região irregular com quadrados inteiros no seu interior .....	30
1.23	Região irregular revistada com quadrados inteiros .....	30
2.1	Rede de pontos no plano.....	32
2.2	Triângulos fundamentais.....	33
2.3	Triângulos não fundamentais.....	33

2.4	Paralelogramo fundamental e não fundamental.....	33
2.5	Área do triângulo fundamental.....	34
2.6	Polígono ABCDEFGH.....	36
2.7	Polígono ABCDEFGH decomposto em triângulos e quadrados fundamentais.....	36
2.8	Polígono decomposto em triângulos.....	37
2.9	Polígono decomposto em triângulos: 1ª possibilidade.....	37
2.10	Polígono decomposto em triângulos: 2ª possibilidade.....	37
2.11	Polígono decomposto em triângulos fundamentais.....	39
2.12	Decomposição de $ABC$ a partir de um ponto $Q$ no seu interior.....	40
2.13	Decomposição de $ABC$ a partir de um ponto $Q$ no seu bordo.....	40
2.14	Decomposição de $ABC$ em triângulos fundamentais com base nas imagens anteriores.....	40
2.15	Decomposição de $ABC$ em triângulos fundamentais de forma aleatória.....	40
2.16	Ângulos num polígono.....	41
3.1	Georg Alexander Pick.....	42
3.2	Área de um retângulo por Pick.....	43
3.3	Área de um polígono simples por Pick.....	44
3.4	Polígono simples em uma rede.....	45
3.5	Polígono simples decomposto em triângulos fundamentais.....	45
3.6	Ângulos em torno dos pontos do polígono simples em uma rede....	46
3.7	Justaposição de $P_1$ e $P_2$ .....	47
3.8	Teorema de Pick no triângulo retângulo.....	49
3.9	Teorema de Pick no retângulo.....	50
3.10	Passagem da indução.....	52
3.11	Área de um polígono simples com buraco em uma rede por Pick....	53
3.12	Polígono com 3 buracos em uma rede.....	54
3.13	Teorema de Euler para poliedros planos.....	55
3.14	Poliedro plano dividido em triângulos.....	56
3.15	Poliedro plano dividido em triângulos fundamentais.....	58
3.16	Localização do vazadouro municipal de resíduos sólidos – Serrinha/Ba.....	60

3.17	Área do vazadouro municipal de resíduos sólidos – Serrinha/Ba.....	60
3.18	Polígono do vazadouro municipal em uma malha quadriculada próxima a 1 cm.....	61
3.19	Teorema de Pick - Área do vazadouro uma malha quadriculada próxima a 1 cm.....	62
3.20	Polígono do vazadouro municipal em uma malha quadriculada próxima a 0,9 cm.....	63
3.21	Teorema de Pick: Área do vazadouro em uma malha quadriculada próxima a 0,9 cm.....	64
4.1	Interface do software GeoGebra.....	67
4.2	Interface do software Google Earth.....	68

# Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular.
$\overline{AB}$	Segmento $AB$ .
$P$	Polígono $P$ .
$u. c$	Unidade de comprimento.
$u. a$	Unidade de área.
$S_{\square}$	Área de um retângulo.
$S_Q$	Área de um quadrado.
$S_G$	Área de um paralelogramo.
$S_{\Delta}$	Área de um triângulo.
$S_T$	Área de um trapézio.
$S_L$	Área de um losango.
$S_R$	Área de região irregular.
$\approx$	Aproximação.
■	Indica o fim de uma demonstração.
$B$	Número de pontos do bordo do polígono.
$I$	Número de pontos internos do polígono.
$T$	Número de triângulos fundamentais.
$S$	Soma dos ângulos internos dos $T$ triângulos fundamentais do polígono.
$S_B$	Soma dos ângulos internos que possuem vértices no bordo.
$S_I$	Soma dos ângulos internos que possuem vértices no interior.
$B'$	Número de pontos que são vértices do polígono.
$B''$	Número de pontos que estão no bordo do polígono, mas não são vértices.

$S_P$	Área do polígono $P$ .
$U$	União.
$S_{b_i}$	Área dos buracos do polígono.
$V$	Número de vértices.
$A$	Número de arestas.
$F$	Número de faces.
$A_e$	Aresta externa.
$A_i$	Aresta interna.
CTRS	Central de Tratamento de Resíduos Sólidos.

# Sumário

INTRODUÇÃO .....	17
1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	19
1.1 - Áreas das principais regiões planas .....	24
1.2 - Área de um polígono com buracos .....	29
1.3 - Área a partir da decomposição de polígonos.....	30
1.4 - Áreas de polígonos semelhantes .....	32
1.5 - Área de região irregular .....	33
2. RESULTADOS PRELIMINARES .....	35
2.1 - Rede no plano.....	35
2.2 - Triângulo fundamental .....	36
3. O TEOREMA DE PICK .....	46
3.1 - O Teorema de Pick para um polígono simples.....	47
3.2 - Demonstrações do Teorema de Pick .....	49
3.2.1 - Demonstração por triângulos fundamentais .....	49
3.2.2 - Demonstração por justaposição .....	51
3.2.3 - Demonstração por indução finita .....	56
3.3 – Extensão do Teorema de Pick .....	57
3.4 - Teorema de Pick e sua equivalência com o Teorema de Euler para poliedros planos.....	60
3.5 - Teorema de Pick em regiões irregulares.....	65
4. TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL.....	71
4.1 - Ferramentas Tecnológicas. ....	71
4.2 - Sequências Didáticas.....	74
4.2.1 Aula 1: Atividade de sondagem e revisão .....	74
4.2.2 Aula 2: Teorema de Pick.....	76
4.2.3 Aula 3: Teorema de Pick usando o aplicativo/software GeoGebra.....	77
4.2.4 Aula 4: Teorema de Pick – Estimando áreas aproximadas em regiões no município de Serrinha/Ba usando o GeoGebra.....	78

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	82
APÊNDICES: ATIVIDADES PROPOSTAS.....	84

# INTRODUÇÃO

A educação contribui de forma significativa para formação de um indivíduo em vários aspectos. Nesse contexto, ao longo do processo ensino-aprendizagem o discente tem contato com vários componentes curriculares, entre eles a Matemática.

Muitos discentes tem uma grande dificuldade de compreender a matemática, em especial a Geometria. Isso foi acentuado com o ensino remoto, instituído no contexto educacional, devido a Pandemia do Covid-19 no mundo. Desta forma, ensinar se tornou um desafio contínuo para que o discente obtivesse uma aprendizagem significativa e o docente precisou ressignificar a sua metodologia.

Durante o ensino remoto as tecnologias tiveram destaque na educação fortalecendo ideias norteadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esta orienta a criar maneiras inovadoras e desafiadoras de lecionar e direcionar o discente a compreender a Matemática no seu cotidiano.

Diante dessa realidade e de ser um adepto a educação com ferramentas tecnológicas este trabalho tem como objetivo estudar a geometria com software matemático. Nesse contexto, propõe-se trabalhar com áreas de figuras planas utilizando o GeoGebra com apoio do Google Earth, contextualizando assim a matemática com a geografia. Além disso, foi proposta uma forma diferenciada de fazer o cálculo de áreas de polígonos simples através da contagem dos pontos internos e do contorno, contidos numa rede de pontos com coordenadas inteiras, o que caracteriza o Teorema de Pick. Em síntese, este trabalho está organizado da seguinte forma.

No capítulo 1 serão discutidos princípios importantes da geometria básica formalizando o conceito de área e abordando seu cálculo de diversas formas.

Já no capítulo 2, introduzimos a rede de pontos no plano, o triângulo fundamental e mostramos alguns resultados relativos a ele que serão necessários para demonstração do Teorema de Pick.

No capítulo 3, onde encontra-se o principal objeto de estudo deste trabalho, será retratado uma breve biografia do matemático Georg Alexander Pick, seu teorema e três maneiras distintas de demonstrá-lo. Além disso, serão abordadas extensão e aplicações do teorema de Pick, bem como a relação entre o teorema de Pick e o teorema de Euler.

O Capítulo 4 será voltado para a estruturação de uma sequência didática, abordando o Teorema de Pick, com tecnologias educacionais inovadoras e no apêndice são apresentadas algumas atividades proposta desta sequência.

Almeja-se que este trabalho seja bem produtivo para o ensino da Matemática, em especial da Geometria, permitindo aos docentes uma inovação em seu método de trabalho e motivando os seus alunos a participarem na construção do seu conhecimento.

# 1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No presente capítulo serão discutidos princípios importantes da geometria básica. Para isso, inicialmente admite-se que o leitor tenha conhecimento dos axiomas e dos principais resultados da Geometria Plana, relativos aos seus elementos básicos. Enuncia-se, também, algumas definições e lemas que serão úteis para o desenvolvimento dos resultados posteriores.

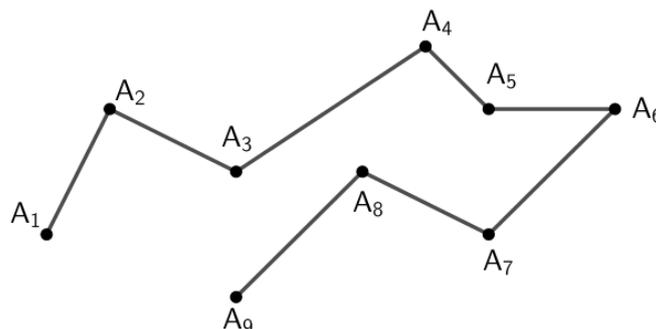
Para concluir o capítulo, formaliza-se o conceito de área e deduz-se as principais áreas planas. Em seguida, aborda-se o cálculo de área a partir da decomposição de polígonos e de regiões irregulares.

**Definição 1.1** Dados pontos distintos  $A$  e  $B$  sobre uma reta  $r$ , o segmento de reta  $\overline{AB}$  é a porção da reta  $r$  situada entre  $A$  e  $B$ .

**Definição 1.2** O interior de um segmento de reta  $\overline{AB}$  é o conjunto dos pontos de  $\overline{AB}$  que são distintos de  $A$  e  $B$ .

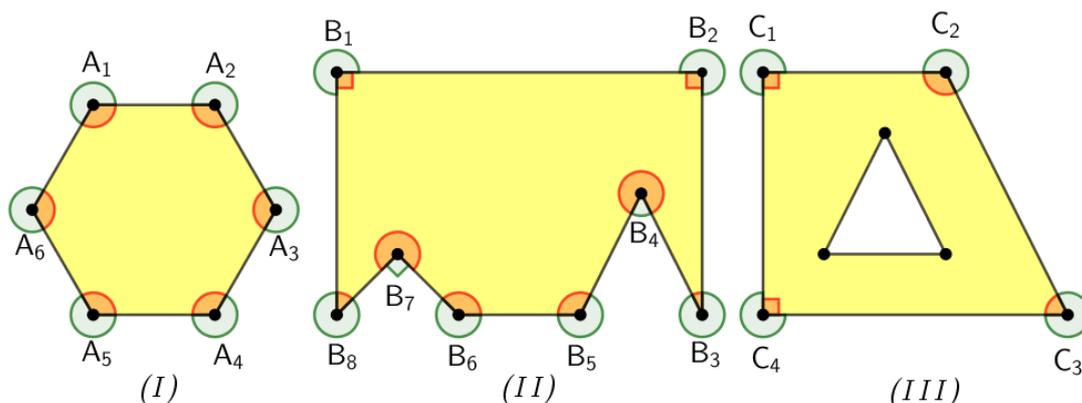
**Definição 1.3** Dado um número finito de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  no plano, chamaremos de linha poligonal com extremos  $A_1$  e  $A_n$ , a união dos segmentos não-alinhados  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ . Além disso, se  $A_n = A_1, n \geq 4$ , teremos uma linha poligonal fechada.

Figura 1.1: Linha poligonal



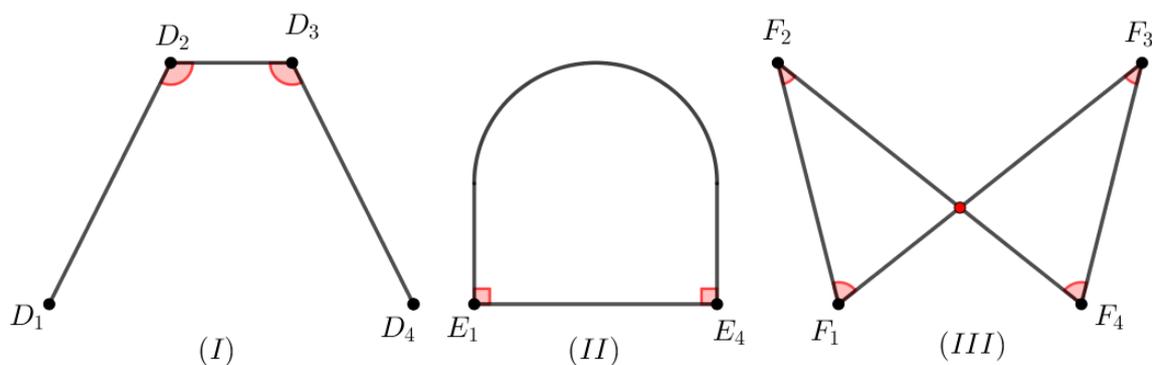
**Definição 1.4** Um polígono é uma região do plano cuja fronteira é formada pela união disjunta de linhas poligonais fechadas. Os pontos são vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados, também chamados de arestas.

**Figura 1.2: Polígonos variados**



Portanto, podemos concluir, pela Figura 1.2, que os polígonos são constituídos por pontos, segmentos de retas e ângulos internos (destaque em vermelho) e externos (destaque em verde) formados por dois segmentos consecutivos.

**Figura 1.3: Não polígonos**



Notemos que as imagens da Figura 1.3 não são polígonos, já que não satisfazem as condições da definição. A imagem (I) não está fechada, a (II) não é formada apenas por segmentos de reta e a (III) segmentos de reta se interceptam.

**Definição 1.5** Um polígono é simples se a região é delimitada apenas por uma linha poligonal fechada.

**Definição 1.6** Um buraco  $B$  de um polígono  $P$  é uma região delimitada por um polígono simples contíguo em  $P$ .

Em relação a Figura 1.2, podemos constatar que as imagens (I) e (II) são polígonos simples, enquanto a imagem (III) é um polígono não simples pois possui mais de uma linha poligonal.

**Definição 1.7** Um polígono  $P$  tem  $n$  buracos se existirem  $n$  buracos,  $B_1, \dots, B_n$ , em  $P$  tais que para cada par  $B_i, B_j$ , com  $i \neq j$ ,  $B_i$  e  $B_j$  são disjuntos e para todo índice  $i$  o buraco  $B_i$  não é um buraco de nenhum  $B_j$ , para todo  $i \neq j$ .

Cabe destacar que quando fizermos referência a “polígono” durante o trabalho entenda como sendo polígono simples.

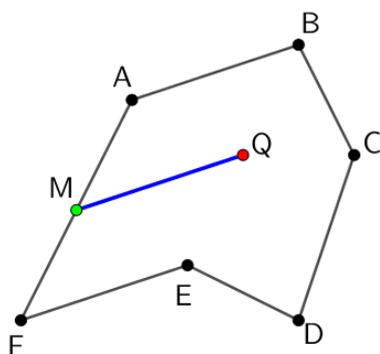
Vale ressaltar que duas arestas consecutivas de um polígono  $P$  são formadas por três vértices consecutivos. Além disso, o polígono  $P$  divide o plano em duas regiões: o interior  $I$  de  $P$ , e o exterior  $E$  de  $P$ .

**Definição 1.8** O interior de um polígono  $P$  é o conjunto de todos os pontos do plano pertencentes à região poligonal interna a  $P$ .

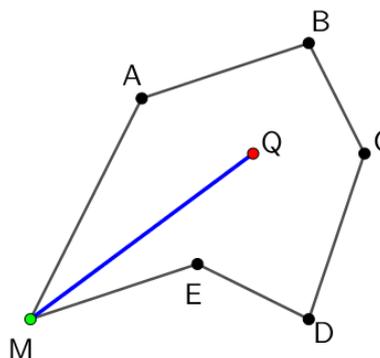
**Definição 1.9** O exterior de um polígono  $P$  é o conjunto de todos os pontos do plano pertencentes à região poligonal externa a  $P$ .

**Lema 1.10** Dado um polígono  $P$ , qualquer ponto  $M$  de  $P$  pode ser ligado a qualquer ponto  $Q$  da região interior  $I$  de  $P$  por uma linha poligonal, cujos pontos, exceto  $M$ , são todos pertencentes a  $I$ .

**Figura 1.4:** Caso em que  $M$  pertence ao interior de uma aresta do polígono  $P$

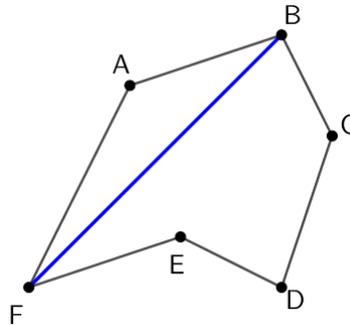


**Figura 1.5:** Caso em que  $M$  é um vértice do polígono  $P$



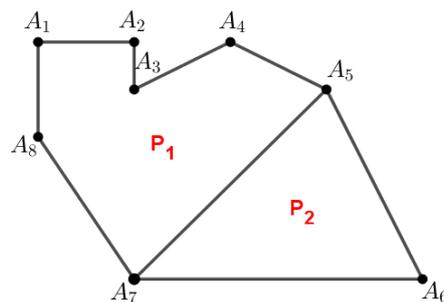
**Lema 1.11** Num polígono com mais de três vértices, existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta o polígono.

**Figura 1.6: Segmento cujo interior não intersecta o polígono**



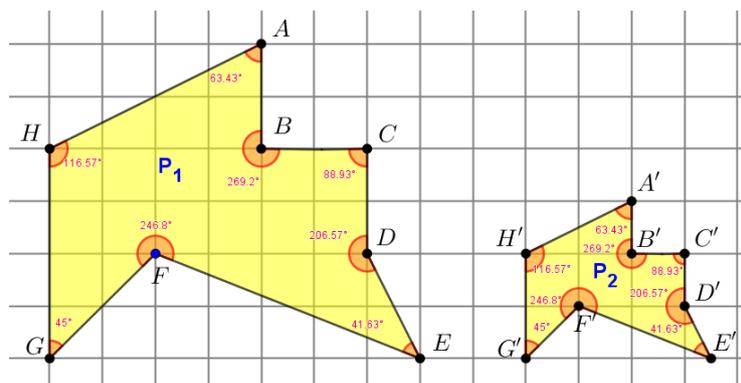
**Definição 1.12** Polígonos justapostos são polígonos que possuem pelo menos dois vértices em comum e não possuem pontos interiores em comum.

**Figura 1.7: Polígonos justapostos**



**Definição 1.13** Dados dois polígonos  $P_1$  e  $P_2$ , dizemos que eles são semelhantes quando é possível fazer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus ângulos internos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes proporcionais.

**Figura 1.8: Polígonos semelhantes**



**Definição 1.14** Dados dois polígonos  $P_1$  e  $P_2$ , dizemos que razão de semelhança é o quociente entre as medidas de comprimentos de quaisquer segmentos correspondentes, respectivamente pertencentes aos dois polígonos, semelhantes entre si.

Pela Figura 1.8 podemos observar que:

- ✓ Os ângulos  $A$  e  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ ,  $D$  e  $D'$ ,  $E$  e  $E'$ ,  $F$  e  $F'$ ,  $G$  e  $G'$  e  $H$  e  $H'$  são correspondentes e congruentes;
- ✓ Os pares de lados  $AB$  e  $A'B'$ ,  $BC$  e  $B'C'$ ,  $CD$  e  $C'D'$ ,  $DE$  e  $D'E'$ ,  $EF$  e  $E'F'$ ,  $FG$  e  $F'G'$ ,  $GH$  e  $G'H'$  e  $HA$  e  $H'A'$  são correspondentes e proporcionais, então

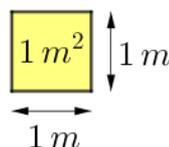
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FG}{F'G'} = \frac{GH}{G'H'} = \frac{HA}{H'A'} = k$$

Assim,  $k$  é a razão de semelhança entre os polígonos.

Medir é comparar uma dada grandeza com outra da mesma espécie, tomada como unidade. Nesse contexto, como a área de uma figura plana é a medida de sua superfície, para encontrar a área dela deve-se comparar sua superfície com a de outra tomada como parâmetro. Desta forma, o cálculo dessa comparação será um número que descreve quantas vezes maior ou menor, a área da figura plana será dada em relação à unidade tomada como parâmetro.

A unidade fundamental da área, determinada pelo SI (Sistema Internacional de medida), é o metro quadrado ( $m^2$ ), que corresponde à medida da superfície de um quadrado de lados medindo 1 m de comprimento cada, como pode ser visualizado na Figura 1.9. Vale ressaltar que, em alguns casos, é muito comum não usar unidades de medida padrão, indicando-a apenas por unidade de área ( $u. a.$ ) e unidade de comprimento ( $u. c.$ ).

**Figura 1.9: Unidade de área fundamental**



A geometria indica uma fórmula matemática para o cálculo de cada área, dependendo da aparência da figura. A seguir, daremos ênfase a algumas delas. Para isso, considere o polígono inserido numa malha quadriculada.

## 1.1 - Áreas das principais regiões planas

### I. Área de um retângulo.

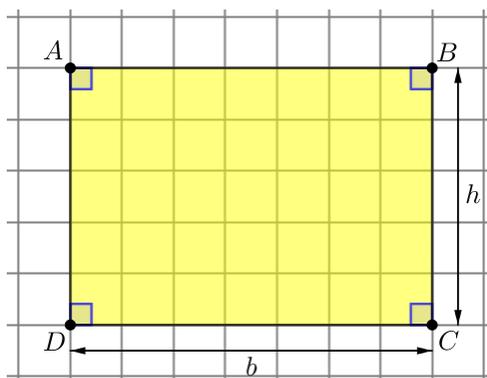
Retângulo é todo quadrilátero cujos ângulos internos são todos retos. De modo geral, para obter a área  $S_{\square}$  de qualquer retângulo basta multiplicar a medida da base  $b$  pela medida da altura  $h$ , ou seja,

$$S_{\square} = b \cdot h.$$

**Exemplo 1.1.1:** Se tomarmos como unidade de área um quadradinho de  $1 u.c$  de lado, na Figura 1.9 podemos dizer que  $b = 7$  e  $h = 5$ , então

$$S_{\square} = 7 \cdot 5 = 35 u.a.$$

**Figura 1.10: Área de um retângulo**



**Observação:** As dimensões de um retângulo são chamadas de base e altura ou, respectivamente, de largura e comprimento.

## II. Área de um quadrado.

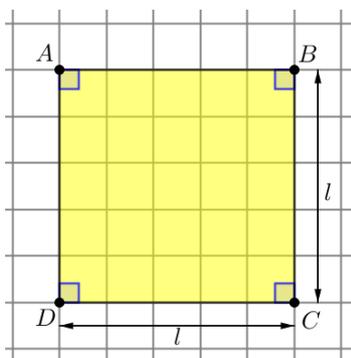
Quadrado é todo quadrilátero cujos ângulos internos são todos retos e os quatro lados são congruentes. De modo geral, para obter a área  $S_Q$  de qualquer quadrado basta multiplicar a medida da base  $l$  pela medida da altura  $l$ , ou seja,

$$S_Q = l \cdot l = l^2.$$

**Exemplo 1.1.2:** Se considerarmos como unidade de área um quadradinho de  $1 \text{ u. c}$  de lado, na Figura 1.10 podemos dizer que  $l = 5$ , então

$$S_Q = 5^2 = 25 \text{ u. a.}$$

Figura 1.11: Área de um quadrado



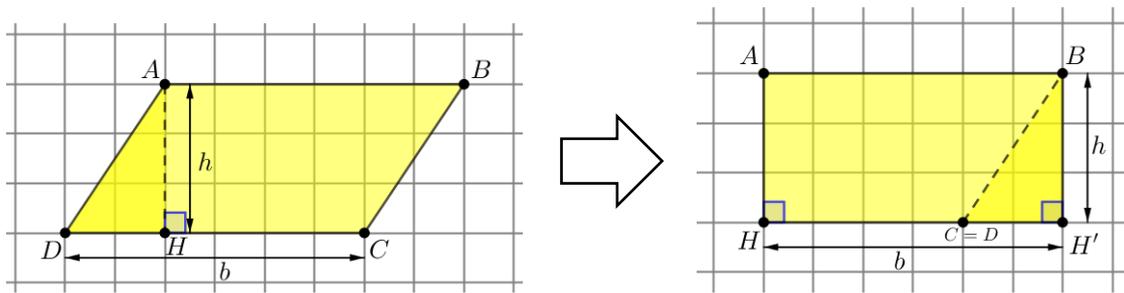
Vale pontuar que todo quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado.

## III. Área de um paralelogramo.

Paralelogramo é todo quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. A área do paralelogramo é facilmente deduzida da área do retângulo. Para verificar isso, considere o paralelogramo  $ABCD$  de base  $\overline{CD}$  e altura  $\overline{AH}$  relativa à base  $\overline{CD}$ . Note que ao transladar o triângulo  $AHD$  para o outro lado formamos o retângulo  $ABH'H$ , conforme Figura 1.11. Desta forma, a área do paralelogramo original  $S_G$  equivale a área do retângulo, ou seja

$$S_G = b \cdot h.$$

Figura 1.12: Área de um paralelogramo



**Exemplo 1.1.3:** Considerando  $b = 12 \text{ u.c.}$  e  $h = 6 \text{ u.c.}$ , então

$$S_G = 12 \cdot 6 = 72 \text{ u.a.}$$

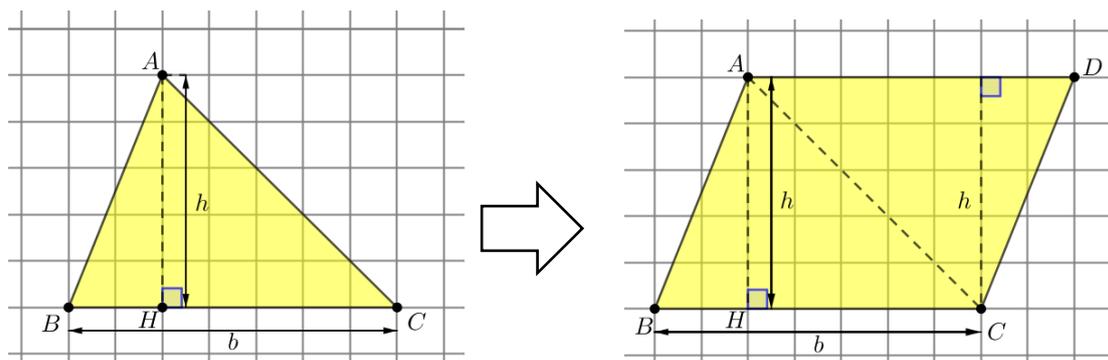
Vale pontuar que todo retângulo é paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é retângulo.

#### IV. Área de um triângulo.

Triângulo é um polígono composto de três lados e três ângulos internos. A área do triângulo é facilmente deduzida da área do paralelogramo. Para verificar isso, consideremos um triângulo  $ABC$  de base  $\overline{BC}$  e altura  $\overline{AH}$  relativa à base  $\overline{BC}$ . Notemos que ao juntar dois triângulos congruentes ao triângulo  $ABC$  obtém-se uma região com a forma de um paralelogramo de mesma base  $b$  e mesma altura  $h$ , conforme Figura 1.12. Desse modo, podemos observar que a área do triângulo  $S_{\Delta}$  será a metade da área do paralelogramo, ou seja

$$S_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Figura 1.13: Área de um triângulo conhecendo a altura



**Exemplo 1.1.4:** Tomando  $b = 20 \text{ u.c.}$  e  $h = 14 \text{ u.c.}$ , então

$$S_{\Delta} = \frac{20 \cdot 14}{2} = 140 \text{ u.a.}$$

Na hipótese de ter um triângulo equilátero, aquele que tem todos os lados congruentes  $l$ , podemos calcular a área da seguinte forma

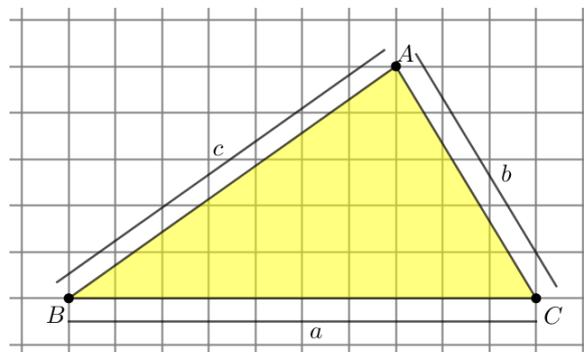
$$S_{\Delta} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Entretanto, quando precisarmos encontrar a área de um triângulo, conhecidas apenas as medidas dos seus três lados, podemos aplicar a famosa fórmula de Heron. Assim, observe o triângulo  $ABC$  da Figura 1.13 e considere  $p$  o semiperímetro do triângulo. Desta forma, a área será

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

em que  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

**Figura 1.14:** Área de um triângulo conhecendo os três lados



**Exemplo 1.1.5:** Considerando  $a = 7 \text{ u.c.}$ ,  $b = 8 \text{ u.c.}$  e  $c = 9 \text{ u.c.}$ , temos

$$p = \frac{7 + 8 + 9}{2} = 12 \text{ u.c.}$$

donde,

$$S_{\Delta} = \sqrt{12(12-7) \cdot (12-8) \cdot (12-9)}$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5} \cong 26,8 \text{ u.a.}$$

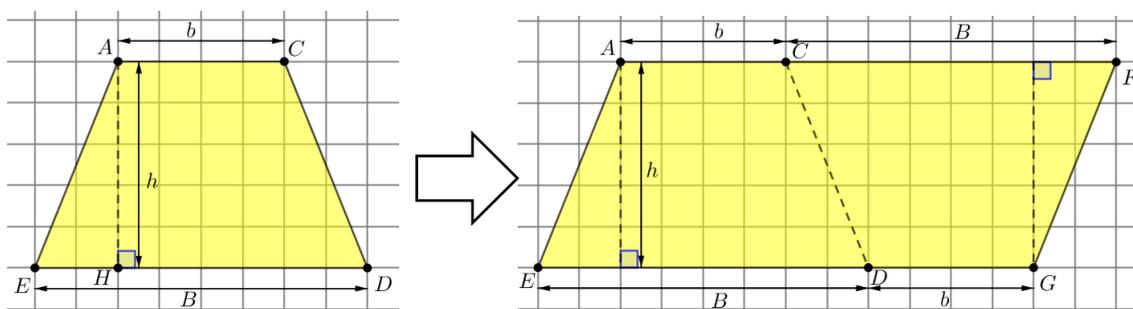
Para curiosidade dos leitores, três demonstrações distintas dessa fórmula podem ser consultadas em Oliveira (2015, p. 5).

## V. Área de um trapézio.

Trapézio é todo quadrilátero com dois lados paralelos entre si, conhecidos como base maior e base menor. Podemos deduzir a sua área de maneira similar feita no triângulo. Para verificar isso, considere o trapézio  $ACDE$  de base maior e menor, respectivamente  $B$  e  $b$  e altura  $\overline{AH}$  (Figura 1.14). Notemos que ao juntar dois trapézios congruentes ao trapézio  $ACDE$  obtemos uma região com a forma de um paralelogramo de base  $B + b$  e mesma altura  $h$ . Desse modo, podemos observar que a área do trapézio  $S_T$  será a metade da área do paralelogramo, ou seja

$$S_T = \frac{(B + b) \cdot h}{2}.$$

Figura 1.15: Área de um trapézio



**Exemplo 1.1.6:** Considerando  $B = 16 \text{ u.c.}$ ,  $b = 8 \text{ u.c.}$  e  $h = 10 \text{ u.c.}$ , então

$$S_T = \frac{(16 + 8) \cdot 10}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ u.a.}$$

## VI. Área de um losango.

Losango é um quadrilátero com todos os lados de mesma medida. Podemos deduzir a sua área  $S_L$  tomando como referência a área do triângulo, já

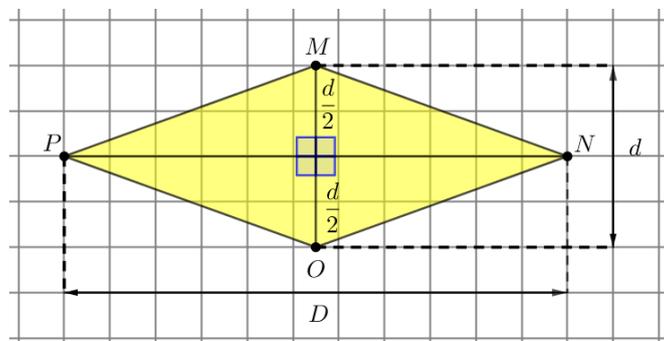
que o losango é composto de dois triângulos congruentes. Assim, observando o losango na Figura 1.15 e considerando o triângulo  $PMN$ , tem-se que a área desse triângulo é

$$S_{\Delta PMN} = \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{D \cdot d}{4}$$

donde concluímos que

$$S_L = 2 \cdot \frac{D \cdot d}{4} = \frac{D \cdot d}{2}.$$

**Figura 1.16: Área de um losango**



**Exemplo 1.1.7:** Considerando  $D = 14 \text{ u.c}$  e  $d = 6 \text{ u.c.}$ , temos

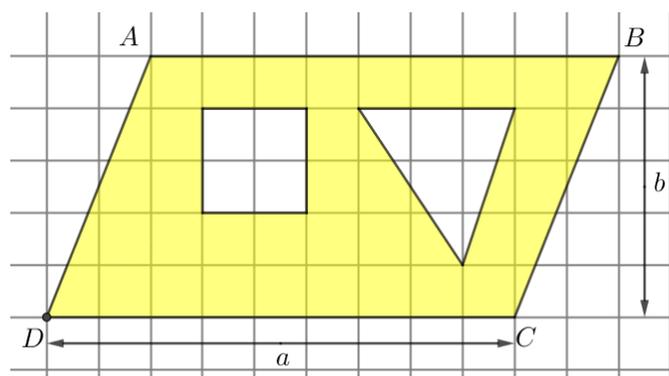
$$S_L = \frac{14 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ u.a.}$$

## 1.2 - Área de um polígono com buracos

Nessa seção iremos refletir qual estratégia para encontrar a área de um polígono que possui buracos. Nestes casos efetuamos o cálculo da área total do polígono e retiramos a área de cada polígono que representa os buracos.

**Exemplo 1.2.1:** Observando o polígono  $ABCD$  abaixo, inserido numa malha quadriculada  $1 \text{ u.c}$ , vamos calcular a área sombreada.

Figura 1.17: Área de um polígono com buracos



Considerando  $a = 9 \text{ u. c}$  e  $b = 5 \text{ u. c.}$ , temos

- $S_{ABCD} = 9 \cdot 5 = 45 \text{ u. a}$
- $S_{\text{quadrado}} = 2^2 = 4 \text{ u. a}$
- $S_{\text{triângulo}} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 \text{ u. a}$
- $S_{\text{sombreada}} = S_{ABCD} - S_{\text{quadrado}} - S_{\text{triângulo}}$   
 $S_{\text{sombreada}} = 45 - 4 - 4,5 = 36,5 \text{ u. a.}$

Nas próximas seções abordaremos como calcular áreas de regiões planas mais complexas, que fogem dos padrões tradicionais supracitados.

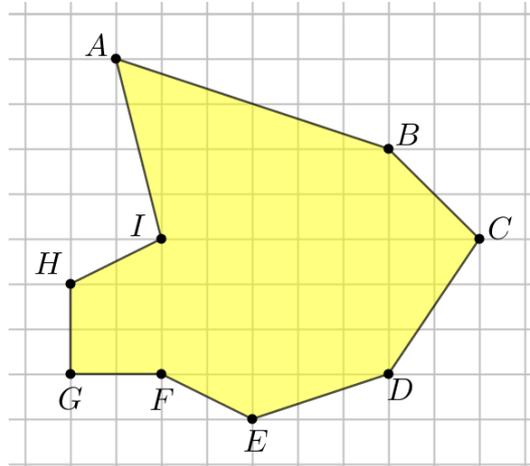
### 1.3 - Área a partir da decomposição de polígonos

Nessa seção iremos analisar as áreas de polígonos que não possuem fórmulas de áreas definidas. Nestes casos fazemos uma decomposição do polígono em outros, cortando a figura a fim de obter outras que possuam fórmulas de áreas bem definidas, a exemplo triângulos e quadriláteros. Depois disso, para calcular a área do polígono maior basta somarmos as áreas dos polígonos menores.

Vale ressaltar que para calcular a área de um polígono qualquer podemos decompor de vários modos. No entanto, cabe a nós procurarmos a divisão mais simples para resolver o problema.

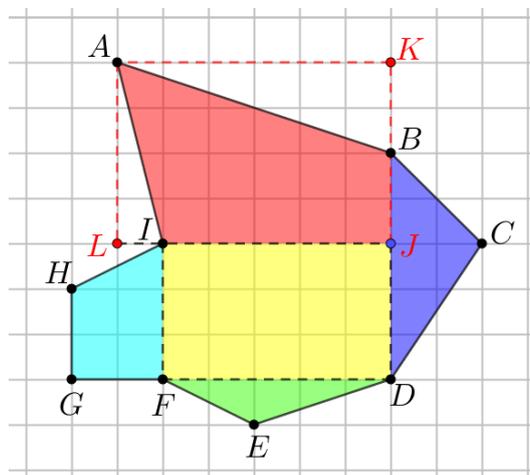
**Exemplo 1.3.1:** Observando o polígono  $ABCDEFGHI$  abaixo, inserido numa malha quadriculada  $1 u. c$ , vamos calcular sua área.

**Figura 1.18:** Área de um polígono simples



Nesse momento vamos analisar qual o melhor corte que iremos fazer no polígono. Assim, uma das divisões pode ser a dada pela Figura 1.18.

**Figura 1.19:** Área por decomposição de um polígono simples



A área do corte do polígono  $ABCDEFGHI$  ficou constituída da área de dois triângulos ( $\triangle BCD$  e  $\triangle DEF$ ) e três quadriláteros ( $JDFI$ ,  $FGHI$  e  $ABJI$ ). Agora, vamos calcular a área de cada figura

- $S_{\triangle BCD} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 u. a$
- $S_{\triangle DEF} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2,5 u. a$
- $S_{JDFI} = 5 \cdot 3 = 15 u. a$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright S_{FGHI} &= \frac{(3+2) \cdot 2}{2} = 5 \text{ u. a.} \\ \blacktriangleright S_{ABJI} &= S_{AKJL} - S_{\Delta ALI} - S_{\Delta AKB} \\ S_{ABJI} &= 6 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 6}{2} = 24 - 2 - 6 = 16 \text{ u. a.} \end{aligned}$$

Por fim, iremos somar seus resultados. Daí, temos

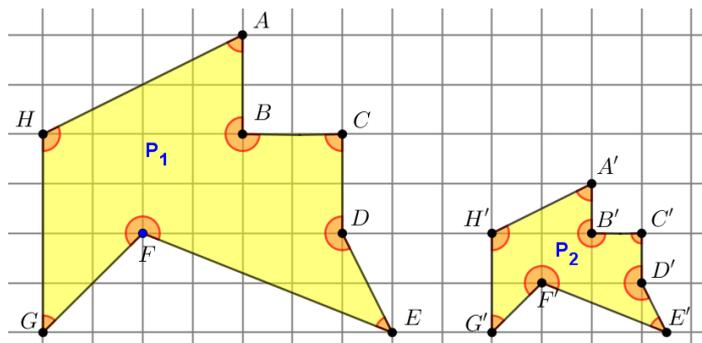
$$S_{ABCDEFGHI} = 5 + 2,5 + 15 + 5 + 16 = 43,5 \text{ u. a.}$$

#### 1.4 - Áreas de polígonos semelhantes

Uma das situações bem interessante sobre área de polígonos é que se dois polígonos  $P_1$  e  $P_2$  forem semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre seus elementos correspondentes lineares (lados, perímetro, diagonais, etc).

Como exemplo, considerando os polígonos  $P_1$  e  $P_2$ , na Figura 1.20, semelhantes. Vamos calcular a área do polígono  $P_1$  sabendo que a área do polígono  $P_2$  é aproximadamente igual  $5,5 \text{ u. a.}$

Figura 1.20: Área de polígonos semelhantes



Como  $P_1$  e  $P_2$  são semelhantes e considerando  $\overline{HG} = 4$  e  $\overline{H'G'} = 2$ , temos

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 \approx \frac{S_{P_1}}{5,5}$$

$$4 \approx \frac{S_{P_1}}{5,5}$$

$$S_{P_1} \approx 22 \text{ u. a.}$$

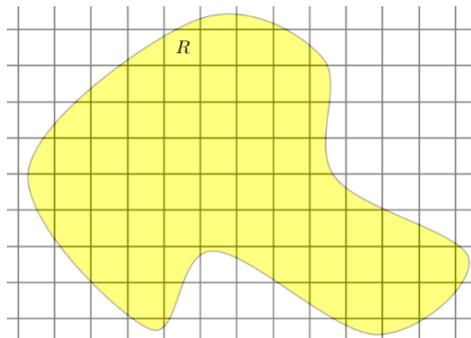
Na próxima seção iremos calcular a área de uma figura não poligonal de forma aproximada.

### 1.5 - Área de região irregular

Nesse tópico iremos usar algumas técnicas para encontrar a área de uma figura irregular  $S_R$  de forma aproximada. O intuito, é fazer as aproximações por excesso ou por falta da área de um polígono retangular que contém ou está contido na região  $R$ .

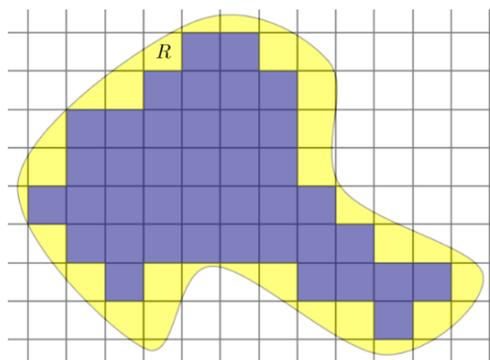
Como exemplo, vamos calcular a área da região irregular a seguir.

**Figura 1.21: Região irregular**



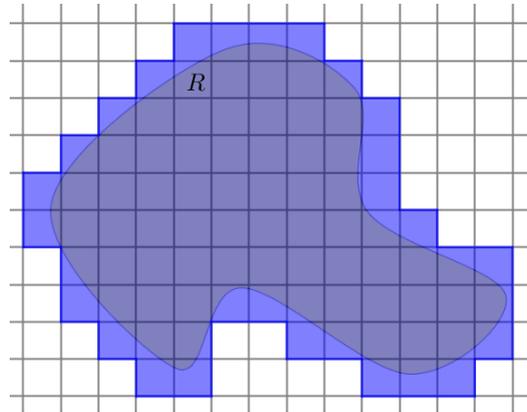
Inicialmente iremos inserir essa região em uma malha quadrada, com  $1 \text{ u. c}$  de lado, e contaremos o maior número possível de regiões quadradas inteiras que cabem no seu interior.

**Figura 1.22: Região irregular com quadrados inteiros no seu interior**



Assim, podemos notar que couberam 40 regiões quadradas inteiras no interior da região  $R$ . Em contrapartida, contaremos o menor número possível de regiões quadradas inteiras que reveste totalmente a região  $R$ .

**Figura 1.23: Região irregular revestida com quadrados inteiros**



Desta forma, podemos observar que toda região  $R$  foi revestida por 86 quadrados inteiros, logo a área da região  $R$  será um valor compreendido entre 40 e 86. Uma provável aproximação para essa área é dada pela média aritmética dos valores identificados

$$S_R \approx \frac{40 + 86}{2} \Rightarrow S_R \approx 63 \text{ u. a.}$$

Como consideramos a unidade de área um quadradinho de 1  $u. c.$  de lado, logo a área de cada quadradinho é de 1  $u. a.$  Portanto, a área da região irregular  $R$  será dada por

$$S_R \approx 63 \cdot 1 \Rightarrow S_R \approx 63 \text{ u. a.}$$

Outra informação relevante é sobre o menor polígono, com vértices de coordenadas inteiras na malha quadriculada, o chamado triângulo fundamental. No próximo capítulo, veremos uma forma de calcular a área deste triângulo.

## 2. RESULTADOS PRELIMINARES

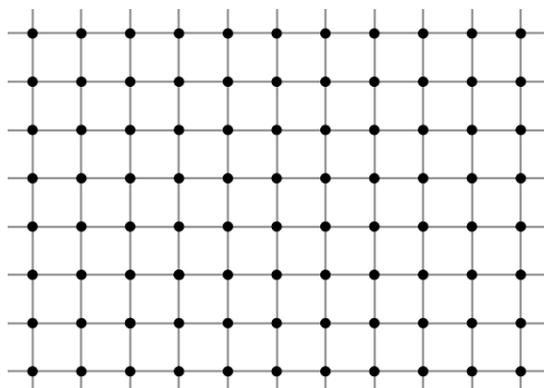
Neste capítulo serão apresentadas algumas ideias centrais, que servirão de suporte na demonstração do Teorema de Pick.

Os fundamentos deste capítulo foram retirados de Abreu (2015) e Lima (1991) possuem o intuito de promover um conhecimento mais amplo acerca de alguns tópicos necessários para a demonstração do Teorema de Pick.

### 2.1 - Rede no plano

**Definição 2.1.1** Uma rede de pontos no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas paralelas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1.

**Figura 2.1: Rede de pontos no plano**



Durante o desenvolvimento de todo o trabalho será usada essa rede de pontos, já que para a validade do teorema de Pick faz-se necessário que os polígonos tenham vértices com coordenadas inteiras.



Na Figura 2.4 podemos ver que os paralelogramos na cor azul são fundamentais e os na cor amarela não. De modo geral, podemos dizer que um polígono de  $n$  lados é fundamental quando todos os seus vértices são os únicos pontos que pertencem à rede.

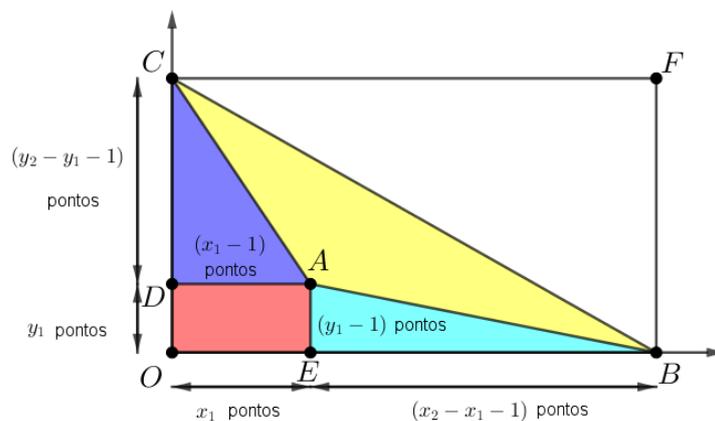
Agora, como em todo paralelogramo fundamental temos dois triângulos fundamentais, será que qualquer triângulo fundamental implica um paralelogramo fundamental? É o que iremos observar no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Lima (1991, p. 103-104).

**Teorema 2.2.1** Se  $ABC$  é um triângulo fundamental então  $ABCD$  é um paralelogramo fundamental.

**Teorema 2.2.2** A área de um triângulo fundamental é igual a  $\frac{1}{2}$ .

**Demonstração.** Consideremos  $ABC$  um triângulo fundamental e  $OBFC$  um retângulo que contém  $ABC$  e ainda, supor que o segmento  $\overline{BC}$  é uma diagonal do retângulo, conforme figura abaixo.

**Figura 2.5: Área do triângulo fundamental**



Fonte: Adaptado de ABREU (2015)

Inicialmente imaginemos a figura acima em um plano cartesiano, notemos que os segmentos  $\overline{AE}$  e  $\overline{AD}$  são perpendiculares aos segmentos  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$ , respectivamente. Podemos supor os segmentos  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$  sob os eixos cartesianos com origem no ponto  $O$  e assim, os pontos  $E = (x_1, 0)$  e  $B = (x_2, 0)$  estão contidos no eixo da abscissa e os pontos  $D = (0, y_1)$  e  $C = (0, y_2)$

estão contidos no eixo da ordenada. Em seguida, se considerarmos  $I_P$  a quantidade de pontos do interior de um polígono  $P$ , então

$$I_{(OBFC)} = (x_2 - 1) \cdot (y_2 - 1).$$

Além disso, como o segmento  $\overline{BC}$  não contém outros pontos de coordenadas inteiras a não ser o  $B$  e  $C$ , já que  $ABC$  é um triângulo fundamental, temos que

$$I_{(OBC)} = \frac{1}{2} I_{(OBFC)} = \frac{1}{2} (x_2 - 1) \cdot (y_2 - 1).$$

De modo análogo,

$$I_{(EBA)} = \frac{1}{2} (x_2 - x_1 - 1) \cdot (y_1 - 1)$$

e

$$I_{(DAC)} = \frac{1}{2} (x_1 - 1) \cdot (y_2 - y_1 - 1).$$

Por conseguinte, a quantidade de pontos no interior do retângulo  $OEAD$  e sobre os segmentos  $OD$  e  $OE$ , exceto os pontos  $D$  e  $E$ , será

$$I_{(OEAD)} = I_{(OBC)} - I_{(EBA)} - I_{(DAC)} = x_1 \cdot y_1.$$

Daí, temos

$$\frac{1}{2} (x_2 - 1) \cdot (y_2 - 1) - \frac{1}{2} (x_2 - x_1 - 1) \cdot (y_1 - 1) - \frac{1}{2} (x_1 - 1) \cdot (y_2 - y_1 - 1) = x_1 \cdot y_1.$$

Simplificando essa expressão teremos

$$\frac{1}{2} x_2 \cdot y_2 - \frac{1}{2} x_2 \cdot y_1 + \frac{1}{2} x_1 \cdot y_1 - \frac{1}{2} x_1 \cdot y_2 + \frac{1}{2} x_1 \cdot y_1 - \frac{1}{2} = x_1 \cdot y_1$$

$$x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 = 1.$$

Por fim, temos

$$S_{ABC} = S_{OBC} - S_{EBA} - S_{DAC} - S_{OEAD}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}x_2 \cdot y_2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \cdot y_1 - \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \cdot x_1 - x_1 \cdot y_1$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \underbrace{(x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}_1$$

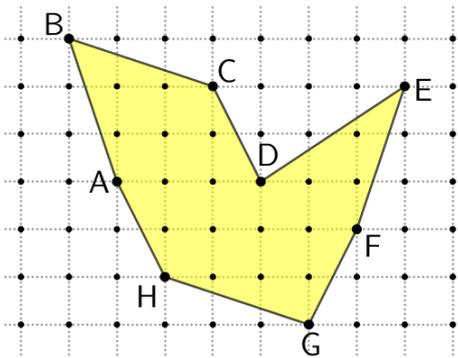
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}$$

■

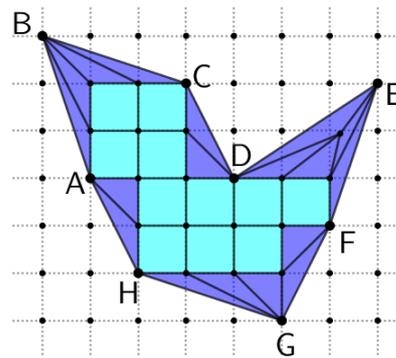
Conseqüentemente, pelo **Teorema 2.2.1**, a área de um paralelogramo fundamental é igual a 1.

A seguir iremos usar o que acabamos de ver para calcular a área do polígono na Figura 2.6.

**Figura 2.6: Polígono ABCDEFGH**



**Figura 2.7: Polígono ABCDEFGH decomposto em triângulos e quadrados fundamentais**



Notemos que o polígono está decomposto em 18 triângulos fundamentais e em 11 quadrados unitários, desta forma sua área será

$$A = \frac{1}{2} \cdot 18 + 1 \cdot 11 = 20 \text{ u. a.}$$

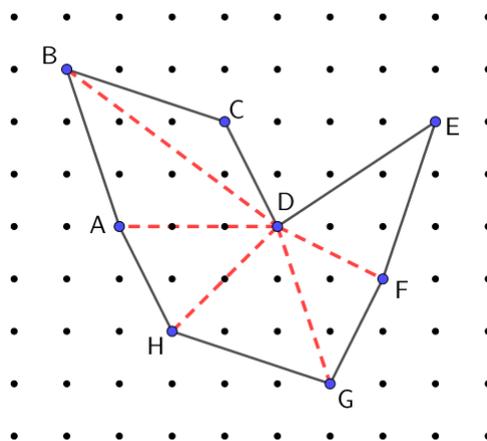
Vale ressaltar, que esse resultado também pode ser comprovado de outras formas. Os leitores que tiverem interesse podem consultar Souza (2014, p.3) que usa o Teorema de Minkowski, e Lima (1991, p. 107) que utiliza a geometria analítica.

O Teorema a seguir é de fundamental importância na geometria plana, já que se trata da decomposição de um polígono de  $n$  lados, em  $(n - 2)$  triângulos justapostos e nos garantirá que todo polígono por ser decomposto em triângulos fundamentais. A demonstração pode ser encontrada em Lima (1991) e a incluímos aqui com um pouco mais de detalhes.

**Teorema 2.2.3** Todo polígono simples de  $n$  lados pode ser decomposto como reunião de  $(n - 2)$  triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.

**Demonstração.** Para uma melhor compreensão observe a seguinte imagem.

**Figura 2.8: Polígono decomposto em triângulos**



Para fazer essa demonstração, vamos supor por absurdo que isso seja falso, ou seja, que exista pelo menos um polígono  $P$ , com o menor número de lados  $n$ , tal que não possa ser decomposto em  $(n - 2)$  triângulos justapostos. Assim, tomemos numa rede de pontos um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono  $P$  seja paralelo ao eixo das ordenadas. Se considerarmos  $B$  o ponto de maior abscissa no bordo do polígono então ele dever ser um vértice, já que nenhum lado de  $P$  é paralelo ao eixo das ordenadas. Desse modo, sejam  $A$  e  $C$  os vértices adjacentes a  $B$ . Com isso, teremos duas possibilidades para analisar conforme figura abaixo.

Figura 2.9: Polígono decomposto em triângulos - Primeira possibilidade

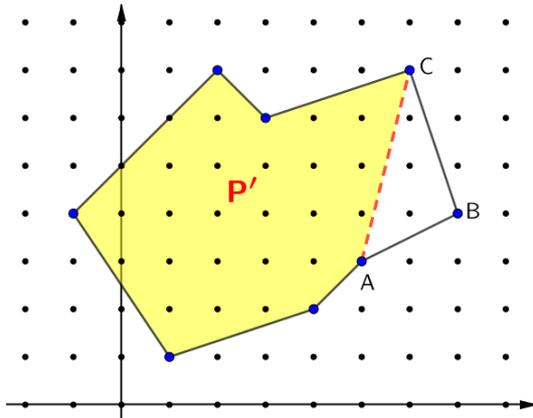
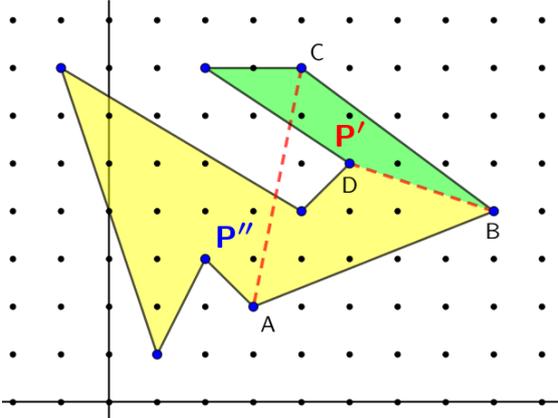


Figura 2.10: Polígono decomposto em triângulos - Segunda possibilidade



Na primeira possibilidade Figura 2.9 podemos constatar que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os únicos vértices do polígono  $P$  que estão contidos no triângulo  $ABC$ . Podemos perceber que quando foi feita a união dos pontos  $A$  e  $C$  deu-se origem a outro polígono que chamamos de  $P'$  e conseqüentemente os lados  $AB$  e  $BC$  foram substituídos por  $AC$ , logo o polígono  $P'$  tem  $n - 1$  lados. Desta forma, como  $n$  é o menor número de lados para o qual o polígono não possa ser decomposto em  $(n - 2)$  triângulos justapostos, então  $P'$  pode ser decomposto em triângulos conforme o teorema, ou seja, ele terá  $((n - 1) - 2) = n - 3$  triângulos justapostos.

Todavia chegamos à conclusão que o teorema é válido para  $P$ , pois juntando a decomposição de  $P'$  com o triângulo  $ABC$  temos que o polígono  $P$  pode ser decomposto em

$$(n - 3) + 1 = n - 2 \text{ triângulos justapostos,}$$

o que é uma contradição, já que supomos inicialmente que um polígono com  $n$  lados não poderia ser decomposto em  $n - 2$  triângulos.

Na segunda possibilidade Figura 2.10 podemos perceber que nos triângulos  $ABC$  temos outros vértices além dos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Dentre esses, escolhemos o vértice  $D$  para ligar ao vértice  $B$ , por ser o mais distante do lado  $AC$  e conseqüente não interceptar nenhum outro lado do polígono  $P$ . Desta forma, o segmento de reta  $BD$  decompõe o polígono  $P$  em dois polígonos que

chamamos de  $P'$  e  $P''$  com número de lados respectivamente  $n'$  e  $n''$ . Em contrapartida, como o segmento  $BD$  faz parte tanto de  $P'$  e  $P''$ , logo teremos que

$$n' + n'' = n + 2. \quad (2.1)$$

Agora, como  $n' \geq 3$  e  $n'' \geq 3$ , concluímos que  $n'$  e  $n''$  são ambos menores do que  $n$ , então o teorema vale para  $P'$  e  $P''$ , ou seja, podem ser decompostos, respectivamente, em  $n' - 2$  e  $n'' - 2$  triângulos. Unindo então  $P'$  e  $P''$  ao longo de  $BD$ , obtemos a seguinte decomposição de  $P$ :

$$(n' - 2) + (n'' - 2) = (n' + n'') - 4.$$

Por (2.1), temos

$$(n + 2) - 4 = n - 2 \text{ triângulos,}$$

o que é uma contradição.

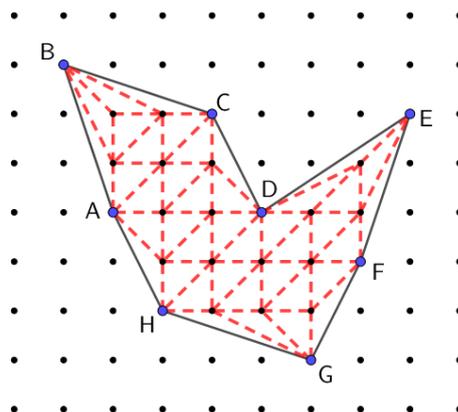
Portanto, comprovamos o teorema. ■

Vale ressaltar que se o polígono for não simples temos  $(n - 2 + 2b)$  triângulos justapostos, onde  $b$  é o número de buracos.

**Teorema 2.2.4** Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.

**Demonstração.** Para uma melhor compreensão observe a seguinte imagem.

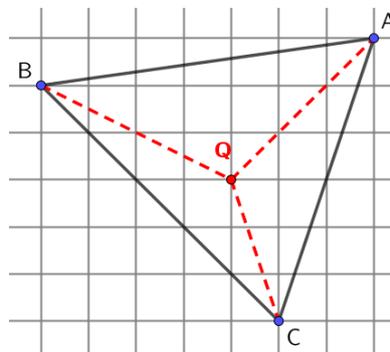
**Figura 2.11: Polígono decomposto em triângulos fundamentais**



Tendo como base o **Teorema 2.2.3**, todo polígono de  $n$  lados pode ser decomposto como reunião de  $(n - 2)$  triângulos justapostos, basta então mostrarmos que cada um desses triângulos pode ser decomposto em triângulos fundamentais. Para isso, iremos considerar um triângulo que chamaremos de  $ABC$ , que contém  $n$  pontos da rede seja no seu interior ou no seu bordo.

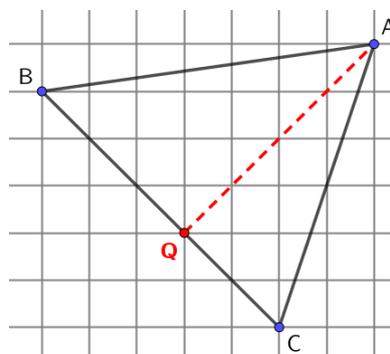
Caso exista realmente algum ponto  $Q$  da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  e, desse modo, decomparamos  $ABC$ , em três triângulos, cada um contendo um número de pontos da rede menor do que  $n$ .

**Figura 2.12: Decomposição de  $ABC$  a partir de um ponto  $Q$  no seu interior**



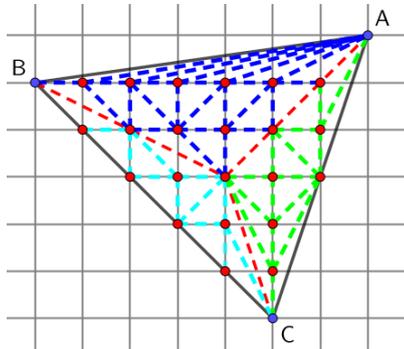
Se houver pontos da rede sobre os lados de  $ABC$ , escolhemos um deles, digamos sobre  $BC$ , e o ligamos ao vértice  $A$ . Assim, decomparamos  $ABC$  em 2 triângulos, cada um contendo um número de pontos de rede menor do que  $n$ .

**Figura 2.13: Decomposição de  $ABC$  a partir de um ponto  $Q$  no seu bordo**

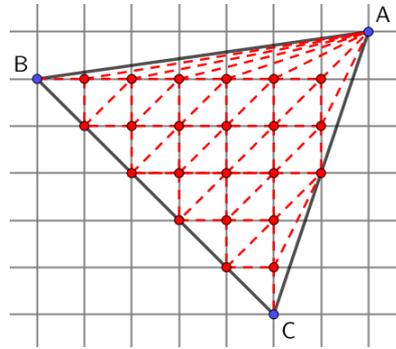


Adotando essa estratégia, com um número finito de etapas, em toda vez que se formar um triângulo e este não for fundamental, chegaremos a uma decomposição de  $ABC$  em triângulos fundamentais.

**Figura 2.14:** Decomposição de  $ABC$  em triângulos fundamentais com base nas imagens anteriores



**Figura 2.15:** Decomposição de  $ABC$  em triângulos fundamentais de forma aleatória



É possível notar pelas Figura 2.14 e Figura 2.15 que independente da ordem que formamos os triângulos fundamentais teremos a mesma quantidade, que nesse caso foram 40 triângulos fundamentais.

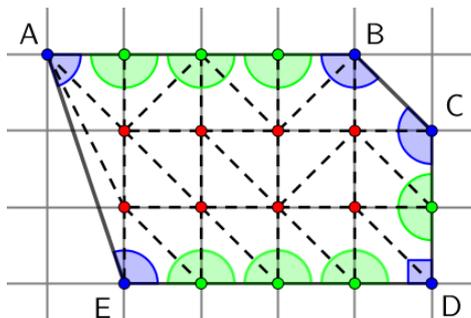
**Corolário 2.2.5** A soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é igual a  $(n - 2) \cdot \pi$ .

**Demonstração.** Vimos no **Teorema 2.2.3** que todo polígono de  $n$  lados pode ser decomposto como reunião de  $(n - 2)$  triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado. Visto isto, como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale  $\pi$ , então a soma dos ângulos internos será  $(n - 2) \cdot \pi$ .



**Corolário 2.2.6** Cada ponto sobre o bordo, exceto os vértices, são encontros de ângulos internos de triângulos fundamentais somando um ângulo raso.

**Figura 2.16:** Ângulos num polígono

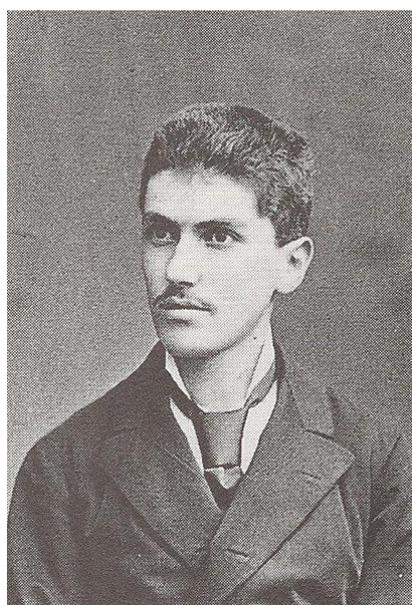


Pela Figura 2.16 temos que os ângulos na cor azul e verde representam respectivamente, o **Corolário 2.2.5** e o **Corolário 2.2.6**. Agora temos resultados suficientes para demonstrar o Teorema de Pick no próximo capítulo.

### 3. O TEOREMA DE PICK

Nesse capítulo, inicialmente será retratado uma breve biografia do matemático Georg Alexander Pick. Também será enunciado e demonstrado o famoso teorema que leva seu nome, o Teorema de Pick. Em seguida, serão abordadas extensão e aplicações do teorema de Pick, bem como a sua relação com o teorema de Euler. A base das demonstrações deste capítulo foram retiradas de Abreu (2015), Hermes (2015), Sé (2016) e Lima (1991).

**Figura 3.1: Georg Alexander Pick**



Fonte: [www.google.com.br](http://www.google.com.br) (Acesso: 24/08/21)

Georg Alexander Pick nasceu em 1859 na cidade de Viena, Áustria e morreu durante a segunda guerra mundial num campo de concentração de Theresienstadt em 1942. Inicialmente, ele foi alfabetizado pelo pai, Adolf Josef Pick, que era diretor de uma instituição privada. Em seguida, ele ingressou na quarta classe do Lepoldstaedter Communal Gynsasmus permanecendo até 1875.

Posteriormente ele ingressou na Universidade de Viena e conquistou uma qualificação que lhe permitia lecionar matemática e física. Ele ensinou na Universidade de Leipzig e logo depois na Universidade alemã de Praga, onde foi professor adjunto, e em seguida titular, de matemática. Escreveu 67 artigos nas mais diversas áreas da matemática, dentre elas o que mais marcou o seu legado foi o Teorema de Pick, que foi publicado pela primeira vez num artigo, em 1899, em Praga.

A demonstração desse teorema depende do entendimento de definições e outros teoremas, vistos no capítulo 2.

### 3.1 - O Teorema de Pick para um polígono simples

Esse teorema mostra como calcular a área de um polígono simples através da contagem dos pontos contidos numa rede facilitando a resolução de problemas geométricos. Assim, basta contar os pontos que estão no interior e no contorno do bordo da rede para calcular a área do polígono.

O interessante nesse teorema é podermos substituir todo o processo tradicional do cálculo de áreas envolvendo grandezas contínuas, vista no capítulo 1, por grandezas discretas tornando uma atividade bem divertida.

**Teorema 3.1.1 (Teorema de Pick)** A área de um polígono simples  $P$  cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela fórmula

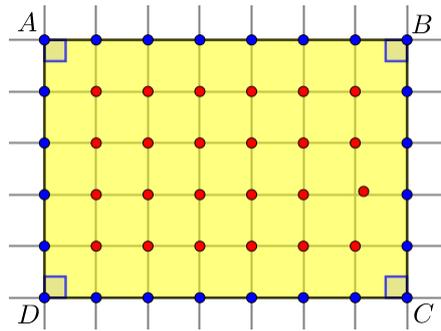
$$S = \frac{1}{2}B + I - 1$$

em que  $S$  representa a área,  $B$  o número de pontos da rede situados sobre o contorno do bordo do polígono e  $I$  número de pontos da rede, situada no interior do polígono.

A seguir vamos calcular algumas áreas de polígonos usando esse teorema.

**Exemplo 3.1.1:** Calcular a área da Figura 3.2 usando o Teorema de Pick.

Figura 3.2: Área de retângulo por Pick

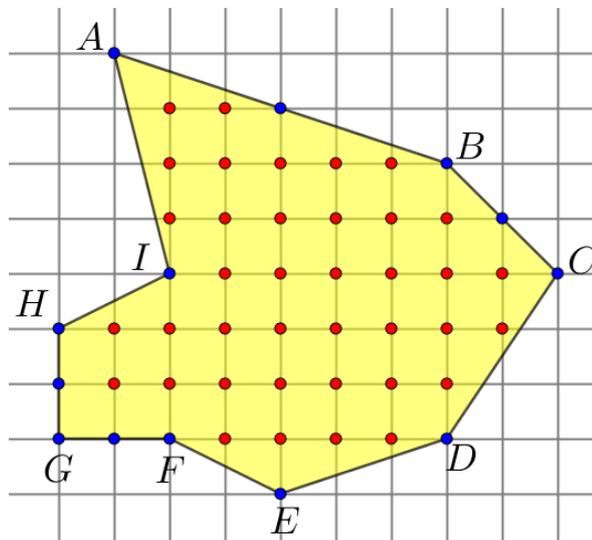


Na Figura 3.2 podemos observar que os pontos que estão na cor azul correspondem aos pontos do contorno do bordo  $B$  do retângulo, e os pontos que estão na cor vermelha correspondem aos pontos do interior  $I$  do retângulo. Assim,  $B = 24$  e  $I = 24$ , daí teremos

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{24}{2} + 24 - 1 = 35 \text{ u. a.}$$

**Exemplo 3.1.2:** Calcular a área da Figura 3.3 usando o Teorema de Pick.

Figura 3.3: Área de um polígono simples por Pick



Assim,  $B = 13$  e  $I = 38$ , daí teremos

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{13}{2} + 38 - 1 = 6,5 + 37 = 43,5 \text{ u. a.}$$

Os polígonos do Exemplo 3.1.1 e Exemplo 3.1.2 foram respectivamente iguais ao Exemplo 1.1.1 e Exemplo 1.2.1. Podemos constatar que houve equivalência no resultado do cálculo, porém a fórmula do Teorema de Pick facilitou bastante o cálculo de área no Exemplo 3.1.2, já que no modo tradicional fizemos a decomposição do mesmo em dois triângulos e três quadriláteros no Exemplo 1.2.1.

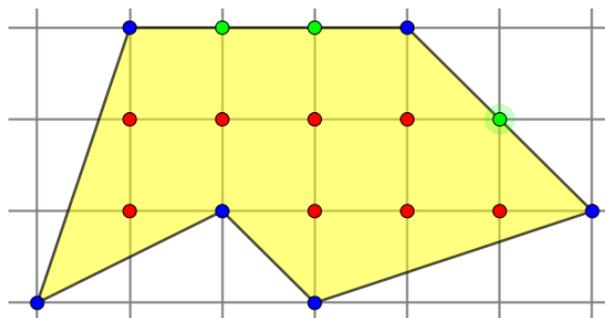
O fundamento na demonstração desse teorema é que todo polígono  $P$  pode ser dividido numa união finita de triângulos. Na próxima seção veremos três demonstrações diferentes do teorema.

## 3.2 - Demonstrações do Teorema de Pick

### 3.2.1 - Demonstração por triângulos fundamentais

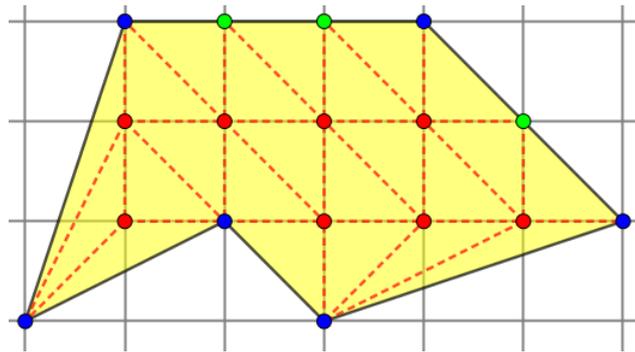
Considere um polígono  $P$  cujos vértices pertençam a uma rede e seja  $B$  o número de pontos da rede que estão sobre os lados e  $I$  os pontos que estão no interior do polígono.

Figura 3.4: Polígono simples em uma rede



Para provar que  $\frac{1}{2}B + I - 1$  é a área do polígono  $P$ , basta mostrar que o número  $T$  de triângulos fundamentais da decomposição de  $P$ , vista no **Teorema 2.2.4**, é igual a  $B + 2I - 2$ , já que a área de  $P$  é igual a  $T/2$ , vista no **Teorema 2.2.2**.

Figura 3.5: Polígono simples decomposto em triângulos fundamentais

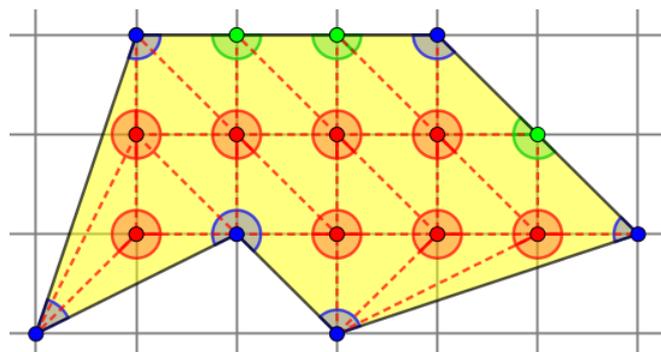


Para tanto, calcularemos a soma dos ângulos internos dos  $T$  triângulos fundamentais que compõem o polígono  $P$  usando dois caminhos. Primeiramente, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $\pi$ , então a soma de  $T$  triângulos é dada por

$$S = \pi \cdot T \quad (3.1)$$

Por outro lado, podemos fazer essa contagem calculando, separadamente, a soma dos ângulos internos que possuem vértices no bordo,  $S_B$ , do polígono  $P$  e a soma dos ângulos internos que possuem vértices no interior,  $S_I$ , do polígono  $P$ .

Figura 3.6: Ângulos em torno dos pontos do polígono simples em uma rede



Assim, consideremos  $B'$  o número de vértices do polígono  $P$  e  $B''$  o número de pontos que estão no bordo de  $P$  na rede, mas não são vértices. Desta forma,  $B' + B'' = B$ .

**Pelo Corolário 2.2.5 e Corolário 2.2.6 temos**

$$\begin{aligned}
S_B &= (B' - 2) \cdot \pi + B'' \cdot \pi \\
S_B &= B' \cdot \pi - 2 \cdot \pi + B'' \cdot \pi \\
S_B &= \pi \cdot (B' - 2 + B'') \\
S_B &= (B - 2) \cdot \pi. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Além disso, a soma dos ângulos em cada vértice no interior do polígono  $P$  equivale a  $2\pi$ . Então,

$$S_I = 2\pi \cdot I \tag{3.3}$$

donde, por (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned}
S &= S_B + S_I \\
S &= (B - 2) \cdot \pi + 2\pi \cdot I \\
S &= B \cdot \pi - 2\pi + 2\pi \cdot I \\
S &= \pi \cdot (B - 2 + 2I). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Portanto, comparando (3.1) e (3.4), teremos

$$\begin{aligned}
\pi \cdot T &= \pi \cdot (B - 2 + 2I) \\
T &= B + 2I - 2.
\end{aligned}$$

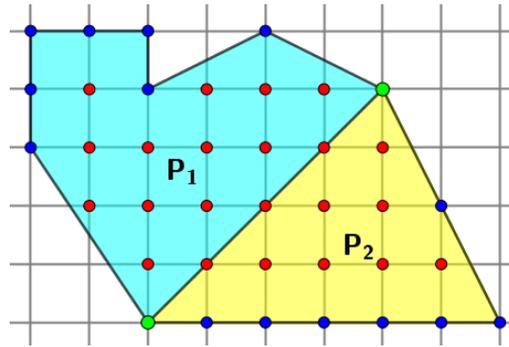
■

### 3.2.2 - Demonstração por justaposição

Para apresentarmos a demonstração do Teorema de Pick, por justaposição, inicialmente iremos provar que no Teorema de Pick é preservada a aditividade, ou seja, que se o teorema de Pick vale para dois polígonos, então vale para o polígono obtido pela justaposição deles.

**Proposição 3.2.2.1 (Propriedade Aditiva da Fórmula de Pick)** Segundo Abreu (2015, p. 34) podemos considerar o teorema de Pick válido nos polígonos simples arbitrários  $P_1$  e  $P_2$ , representados na figura abaixo.

Figura 3.7: Justaposição de  $P_1$  e  $P_2$



Seja  $B_1$  e  $B_2$  a quantidade de pontos do bordo dos polígonos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, e  $I_1$  e  $I_2$  a quantidade de pontos do interior do polígono  $P_1$  e  $P_2$  respectivamente. Justapondo os dois polígonos obtemos um polígono  $P$  com  $B$  pontos do bordo e  $I$  pontos do interior. Nesse contexto, o nosso objetivo é mostrar que

$$S_P = S_{P_1} + S_{P_2}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}B + I - 1 = \left(\frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1\right) + \left(\frac{1}{2}B_2 + I_2 - 1\right).$$

Como os polígonos  $P_1$  e  $P_2$  possuem uma aresta em comum, logo os pontos contidos nessa aresta passarão a ser pontos interiores do polígono  $P$ , exceto dois deles que continuam sendo pontos do bordo (os pontos verdes na Figura 3.7) Nesse contexto, consideremos  $k$  o número de pontos de  $P_1$  e  $P_2$  que se tornarão pontos interiores de  $P$ . Assim,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + k \\ I_1 + I_2 &= I - k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Em contrapartida, se quisermos contar a quantidade de pontos do bordo  $B$  de  $P$  temos que retirar  $k$  pontos tanto de  $B_1$  quanto de  $B_2$ . Dessa forma, como os pontos na cor verde são comuns a  $P_1$  e  $P_2$ , teremos

$$\begin{aligned} B &= (B_1 - k) + (B_2 - k) - 2 \\ B &= B_1 + B_2 - 2k - 2 \end{aligned}$$

$$B_1 + B_2 = B + 2(k + 1). \quad (3.6)$$

Como nos polígonos  $P_1$  e  $P_2$  é válido o teorema de Pick, segue que

$$\begin{aligned} S_P &= S_{P_1} + S_{P_2} \\ S_P &= \left(\frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1\right) + \left(\frac{1}{2}B_2 + I_2 - 1\right) \\ S_P &= \left(\frac{B_1 + B_2}{2}\right) + (I_1 + I_2) - 2. \end{aligned}$$

Substituindo (3.5) e (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} S_P &= \left(\frac{B + 2(k + 1)}{2}\right) + (I - k) - 2 \\ S_P &= \frac{1}{2}B + k + 1 + I - k - 2 \\ S_P &= \frac{1}{2}B + I - 1 \end{aligned}$$

■

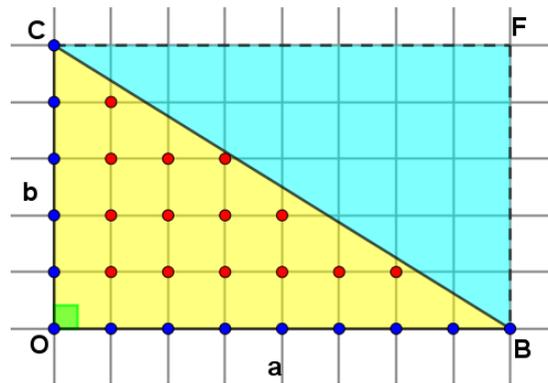
Portanto, ratificamos que justapondo-se dois polígonos simples ao longo de pelo menos uma aresta, as suas respectivas áreas adicionam-se. Em outras palavras, se a Fórmula de Pick é válida para os polígonos  $P_1$  e  $P_2$ , ela também é válida para o polígono  $P_1 \cup P_2$ .

### **Demonstração do Teorema 3.2.2.**

De acordo com **Teorema 2.2.3** e sabendo que as áreas são aditivas, vista anteriormente, basta mostrarmos que o teorema de Pick vale para um triângulo qualquer.

Primeiramente iremos mostrar que o teorema é válido em um triângulo retângulo. De fato, seja um triângulo retângulo  $T$  obtido a partir de um retângulo  $R$ , em uma rede, com os catetos de medidas  $a$  e  $b$  paralelos aos eixos coordenados, conforme Figura 3.8.

Figura 3.8: Teorema de Pick no triângulo retângulo



Considerando  $B$  o número de pontos da rede, situados sobre o contorno do bordo do triângulo e  $I$  o número de pontos da rede, situada no interior do triângulo. Além disso, se considerarmos  $p_h$  o número de pontos da hipotenusa excluindo os pontos que são vértices do triângulo, teremos

$$I_{OBFC} = (a - 1) \cdot (b - 1) \Rightarrow I_{OBC} = \frac{1}{2} [(a - 1) \cdot (b - 1) - p_h] \quad (3.7)$$

e

$$B = a + b + p_h + 1. \quad (3.8)$$

Segue que, substituindo (3.7) e (3.8) na expressão

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1$$

temos,

$$S = \frac{1}{2}(a + b + p_h + 1) + \frac{1}{2}[(a - 1) \cdot (b - 1) - p_h] - 1$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2} - 1$$

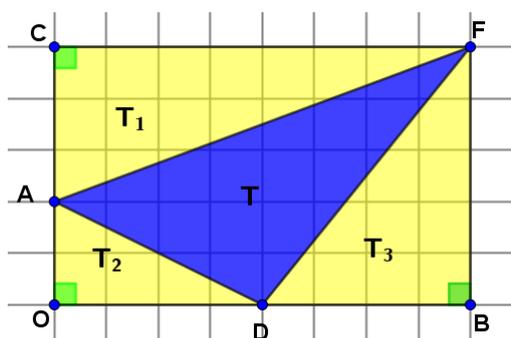
$$S = \frac{1}{2}ab. \quad \blacksquare$$

Portanto, podemos perceber que essa é a fórmula tradicional para calcular a área de um triângulo, vista no **Capítulo 1**, bem como no **Teorema 2.2.2**. Nesse sentido, comprovamos que o Teorema de Pick é válido para os triângulos retângulos.

Por conseguinte, como todo retângulo é a justaposição de dois triângulos retângulos. Isso implica que o Teorema de Pick também será válido para todo retângulo.

Com essas ideias supracitadas, agora mostraremos que o Teorema de Pick é válido também para um triângulo qualquer em uma rede. De fato, se considerarmos um triângulo qualquer  $T$  podemos justapor a ele três triângulos retângulos que chamaremos de  $T_1, T_2$  e  $T_3$ , de modo a formarem um retângulo  $R$ , conforme Figura 3.9.

**Figura 3.9: Teorema de Pick no retângulo**



Assim,  $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ . Além disso, seja  $S_R$  a área do retângulo,  $S_T$  a área do triângulo qualquer e  $S_{T_1}$ ,  $S_{T_2}$  e  $S_{T_3}$  as respectivas áreas dos triângulos retângulos, então  $S_R = S_T + S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3}$ , ou seja,

$$S_T = S_R - S_{T_1} - S_{T_2} - S_{T_3}.$$

Portanto, como o Teorema de Pick é válido tanto nos retângulos quanto nos triângulos retângulos, também será válido em um triângulo qualquer em razão da justaposição dos polígonos.

■

### 3.2.3 - Demonstração por indução finita

Nessa subseção veremos outra forma de mostrar a validade do teorema de Pick, a de indução finita no número de lados, em qualquer polígono simples. A demonstração encontra-se em Abreu (2015, p. 37) e iremos apresentar aqui com mais detalhes.

**Demonstração.** Considere a fórmula de Pick para polígonos simples:  $S_n = \frac{1}{2}B + I - 1$ ,  $\forall n \geq 3$ , onde  $n$  é o número de vértices do polígono. Desta forma, temos

Para  $n = 3$ , o polígono é um triângulo qualquer. Assim, o teorema é válido pela demonstração anterior.

Suponhamos que o Teorema de Pick seja válido para qualquer polígono simples com  $n = k$  vértices, assim,

$$S_k = \frac{1}{2}B + I - 1.$$

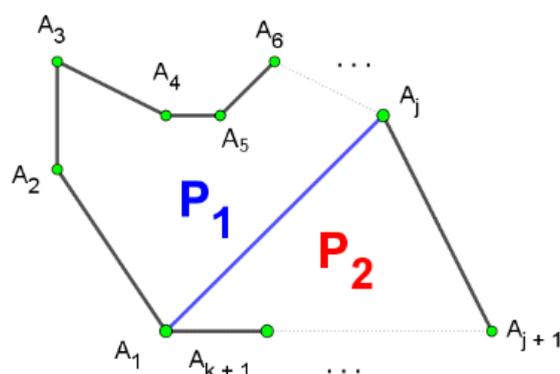
Devemos mostrar que o Teorema de Pick é válido para qualquer polígono simples com  $n = k + 1$  vértices, ou seja,

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}B + I - 1, k \geq n.$$

De fato, seja  $P$  um polígono com vértices  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, A_{k+1}$ . Note que se traçarmos um segmento que une dois vértices não consecutivos, de tal forma que esse segmento não tenha interseção com nenhum lado do polígono, iremos dividi-lo em dois polígonos,  $P_1$  e  $P_2$ .

Dessa forma, tomemos, sem perda de generalidade, o segmento  $\overline{A_1A_j}$ . Com isso, teremos os vértices  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_j$  pertencentes ao polígono  $P_1$  e os vértices  $A_1, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{k+1}$  pertencentes ao polígono  $P_2$ , ver Figura 3.10.

Figura 3.10: Passagem da indução



Podemos observar que os polígonos  $P_1$  e  $P_2$  tem, no máximo,  $k$  vértices. Portanto, pela hipótese de indução, o Teorema de Pick é válido para cada um desses polígonos. Assim, como os polígonos  $P_1$  e  $P_2$  justapostos formam o polígono  $P$ , então a área de um polígono simples de  $n$  lados em uma rede no plano é  $\frac{1}{2}B + I - 1, \forall n$ , conforme a demonstração vista na subseção 3.2.2.

■

E o que acontece se tivermos um polígono com buracos? É o que vamos ver na próxima subseção, onde iremos generalizar o teorema de Pick para polígonos não simples.

### 3.3 – Extensão do Teorema de Pick

Nesse momento iremos mostrar, através do Teorema de Pick, como calcular a área de um polígono, em que os seus vértices são coordenadas inteiras em uma rede, sabendo que tal polígono possui “buracos” que são polígonos simples. A ideia para calcular a área desse polígono é inicialmente imaginarmos um polígono simples (sem buracos) e em seguida subtrair todas as áreas dos polígonos simples que representam os “buracos”.

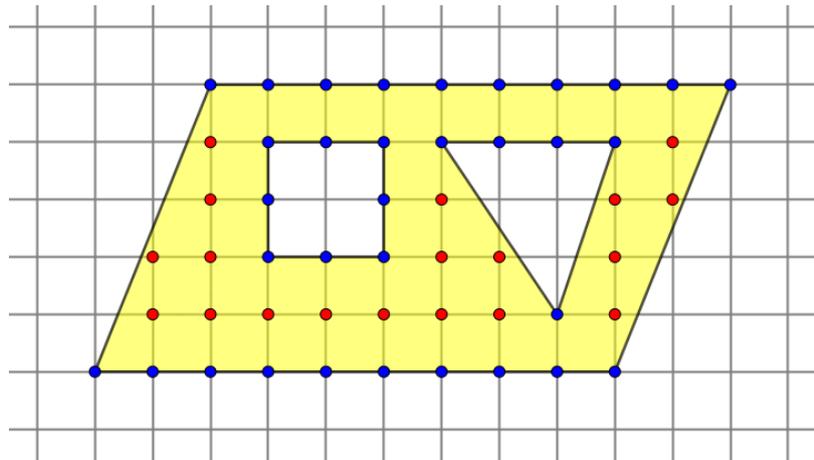
**Teorema 3.2 (Teorema de Pick com buracos)** Seja  $P$  um polígono com  $n$  buracos em que  $B$  é o número de pontos da rede, situados sobre o contorno do bordo do polígono e do bordo dos  $n$  buracos e  $I$  é o número de pontos da rede,

situada no interior do polígono, excluindo os pontos que estão no interior dos buracos, então a área do polígono é dada por

$$S = \frac{1}{2}B + I + n - 1.$$

A seguir iremos usar o que acabamos de ver para calcular a área do polígono na Figura 3.14.

**Figura 3.14: Área de um polígono simples com buraco em uma rede por Pick**



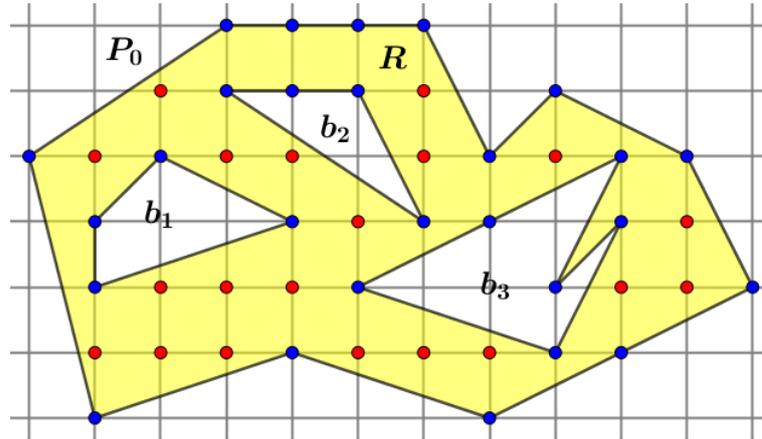
Podemos notar que os pontos que estão na cor azul correspondem os pontos do contorno do bordo  $B$  do polígono e dos buracos  $n$ , e os pontos que estão na cor vermelha correspondem aos pontos do interior  $I$  do polígono. Assim,  $B = 33$ ,  $I = 19$  e  $n = 2$  daí temos

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1 + n = \frac{33}{2} + 19 - 1 + 2 = 16,5 + 20 = 36,5 \text{ u. a.}$$

A Figura 3.14 é igual a Figura 1.17 e podemos constatar que o resultado do cálculo de área nas duas foram equivalentes.

**Demonstração.** Consideremos uma região poligonal  $R$  numa rede de pontos com os buracos  $b_1, \dots, b_n$ , de acordo com a figura abaixo.

Figura 3.15: Polígono com 3 buracos em uma rede



Seja  $P_0$  o polígono que delimita externamente a região poligonal  $R$  e  $b_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , os respectivos buracos. Com isso, podemos perceber que tanto  $P_0$  quanto os buracos contidos nele são polígonos simples, logo podemos aplicar em ambos o Teorema de Pick, visto na seção 3.1. Daí temos,

$$S_{P_0} = \frac{1}{2}B_0 + I_0 - 1 \quad \text{e} \quad S_{b_i} = \frac{1}{2}B_i + I_i - 1.$$

Desta forma, a área da região  $R$  será a diferença da área total de  $P_0$  com a área dos buracos. Assim,

$$S_R = S_{P_0} - S_{b_i}$$

isto é,

$$S_R = \frac{1}{2}B_0 + I_0 - 1 - \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2}B_i + I_i - 1 \right) \right)$$

$$S_R = \frac{B_0}{2} - \frac{B_1}{2} - \frac{B_2}{2} - \dots - \frac{B_n}{2} + I_0 - I_1 - I_2 - \dots - I_n - 1 + \underbrace{1 + 1 + 1 \dots + 1}_{n \text{ vezes}}$$

Estabelecendo  $I_0 - I_1 - I_2 - \dots - I_n = I^*$ , temos

$$S_R = \frac{B_0}{2} - \frac{B_1}{2} - \frac{B_2}{2} - \dots - \frac{B_n}{2} + I^* - 1 + n.$$

Neste momento usaremos o artifício de adicionar e subtrair  $B_i$  na equação anterior, então,

$$S_R = \frac{B_0}{2} - \frac{B_1}{2} + B_1 - B_1 - \frac{B_2}{2} + B_2 - B_2 - \dots - \frac{B_n}{2} + B_n - B_n + I^* - 1 + n$$

$$S_R = \frac{B_0 + B_1 + B_2 + \dots + B_n}{2} + I^* - B_1 - B_2 - \dots - B_n - 1 + n$$

$$S_R = \sum_{i=0}^n \left( \frac{1}{2} B_i \right) + I^* - (B_1 + B_2 + \dots + B_n) - 1 + n.$$

Como  $\sum_{i=0}^n \left( \frac{1}{2} B_i \right) = B$ , já que se refere a soma de todos os pontos pertencentes ao bordo de  $R$  e  $I^* - (B_1 + B_2 + \dots + B_n) = I$ , posto que é a diferença de todos os pontos internos de  $P_0$  com os internos e do bordo dos buracos, então o que sobra são os pontos internos de  $R$ . Desta forma, temos,

$$S_R = \frac{1}{2} B + I - 1 + n.$$

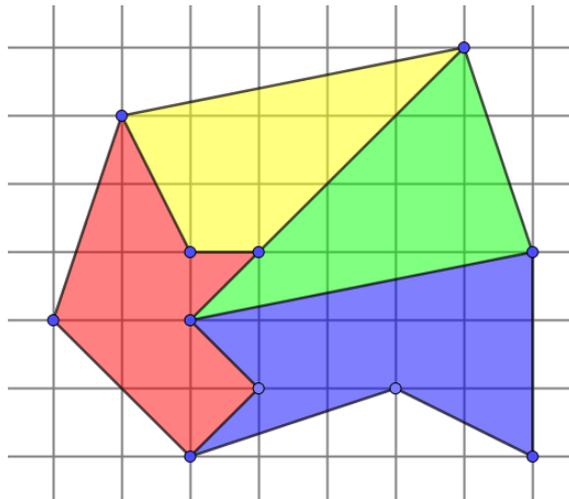
■

### 3.4 - Teorema de Pick e sua equivalência com o Teorema de Euler para poliedros planos

Em Geometria, outro teorema que merece destaque é o "Teorema de Euler para poliedro plano", que relaciona o número de vértices  $V$ , arestas  $A$  e faces  $F$  de um poliedro planificado da seguinte forma,  $V - A + F = 1$ . Os leitores que tiverem interesse na demonstração podem consultar Carvalho (2016, 29-30). Nesse contexto, o objetivo dessa subseção é mostrarmos a equivalência que existe entre a fórmula de Pick e a fórmula de Euler para poliedros planos.

De acordo com Hermes (2015, p. 200-210), um poliedro plano é todo polígono que pode ser decomposto em polígonos menores, de modo que sejam respeitadas as seguintes condições para a decomposição do polígono: duas faces quaisquer da decomposição, ou são disjuntas, ou têm um vértice em comum, ou têm uma ou mais arestas inteiras em comum.

Figura 3.11: Teorema de Euler para poliedros planos



No exemplo acima, os pontos representam os vértices  $V$ , os segmentos de reta as arestas  $A$  e as regiões as faces  $F$  do poliedro plano. Assim,  $V = 11$ ,  $A = 14$  e  $F = 4$ , daí temos

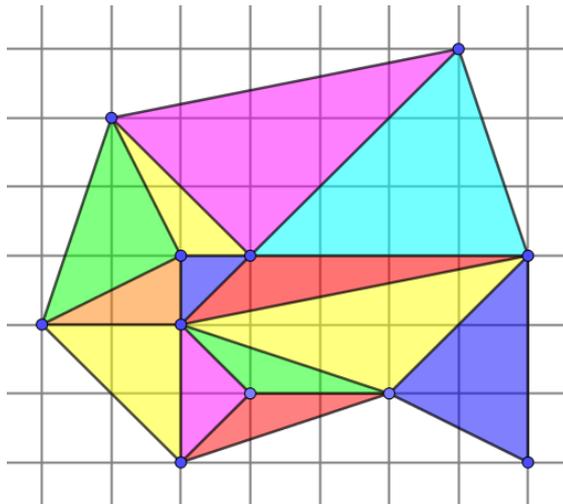
$$V - A + F = 1 \quad \rightarrow \quad 11 - 14 + 4 = 1.$$

Os próximos teoremas 3.3 e 3.4 nos mostram a equivalência dos Teoremas de Pick e de Euler

**Teorema 3.3** O Teorema de Pick implica a fórmula de Euler para poliedros planos.

Seja um poliedro plano  $P$ , com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces em uma rede no plano. Podemos perceber que ao dividirmos cada face desse poliedro em triângulos, preservando a mesma quantidade de vértices, a quantidade de faces  $F$  e de arestas  $A$  serão alteradas. No entanto, como para cada face  $F$  acrescentada teremos uma aresta  $A$  a mais, logo as alterações serão anuladas e a relação  $V - A + F = 1$  será preservada. Veja exemplo na Figura 3.12 obtida a partir da Figura 3.11.

**Figura 3.12: Poliedro plano dividido em triângulos**



Observe que, após dividir o poliedro plano em triângulos, preservando a quantidade de vértices, teremos  $V = 11$ ,  $A = 23$  e  $F = 13$ , daí teremos:

$$V - A + F = 1 \quad \rightarrow \quad 11 - 23 + 13 = 1.$$

Desta forma, a relação de Euler nos poliedros planos é preservada e podemos, sem perda de generalidade, considerar todas as faces como sendo triângulos.

Agora iremos perceber que se alterarmos a quantidade de vértices de um poliedro para fazermos a decomposição em triângulos fundamentais, a relação de Euler também não será alterada.

### **Demonstração**

Na primeira demonstração do Teorema de Pick, subseção 3.2.1, vimos que o número  $T$  de triângulos fundamentais da decomposição do polígono  $P$  equivale a  $B + 2I - 2$ , em que  $B$  representa o número de pontos da rede situados sobre o contorno do bordo do polígono e  $I$  é o número de pontos da rede, situada no interior do polígono. Com isso, podemos considerar que o número de triângulos fundamentais do poliedro plano é igual ao número de faces do poliedro, ou seja,

$$F = B + 2I - 2. \quad (3.9)$$

Seque que, o número de vértices do poliedro plano equivale ao número de pontos do bordo mais o número de pontos do interior, ou seja,

$$V = I + B. \quad (3.10)$$

No tocante as arestas, podemos perceber que em cada aresta externa,  $A_e$ , teremos o lado de apenas uma face e cada aresta interna  $A_i$  é lado de duas faces, assim,

$$3F = A_e + 2A_i.$$

Além disso, podemos notar que o número de arestas internas  $A_i$  é a diferença entre o número total de arestas e número de arestas externas  $A_e$  e esta é igual ao número de pontos do bordo  $B$ , então

$$\begin{aligned} 3F &= A_e + 2(A - A_e) \\ 3F &= B + 2(A - B) \\ 3F &= 2A - B. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.9) em (3.11), temos

$$\begin{aligned} 3(B + 2I - 2) &= 2A - B \\ 3B + 6I - 6 &= 2A - B \\ 2A &= 4B + 6I - 6 \\ A &= 2B + 3I - 3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De posse das expressões (3.9), (3.10) e (3.12) temos

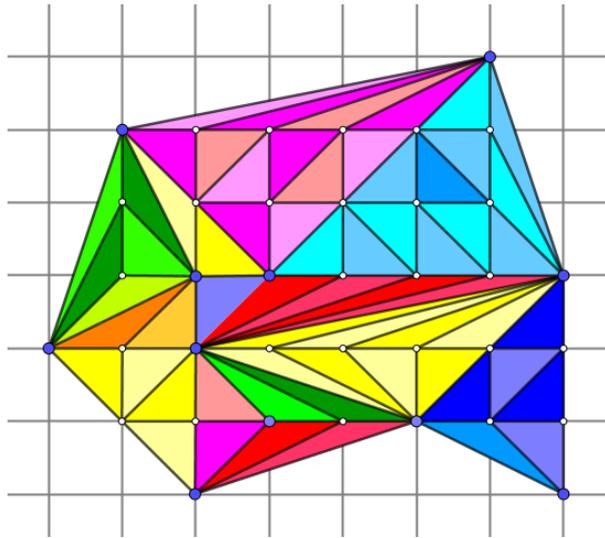
$$V - A + F = I + B - (2B + 3I - 3) + B + 2I - 2$$

$$V - A + F = I - 3I + 3 + 2I - 2$$

$$V - A + F = 1.$$

■

Figura 3.13: Poliedro plano dividido em triângulos fundamentais



Vimos que ao dividir o poliedro plano em triângulos fundamentais, mudando agora a quantidade de vértices, podemos afirmar que a fórmula de Euler também se preserva. No exemplo da Figura 3.13 podemos ver que  $V = 37$ ,  $A = 98$  e  $F = 62$ , daí temos

$$V - A + F = 1 \quad \rightarrow \quad 37 - 98 + 62 = 1.$$

**Teorema 3.4** A fórmula de Euler para poliedros planos implica o Teorema de Pick.

**Demonstração.** Começemos supondo o poliedro decomposto em triângulos fundamentais, e seja válida a fórmula de Euler. De posse das relações (3.10) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} V - A + F &= 1 \\ I + B - \frac{3F + B}{2} + F &= 1 \\ 2I + 2B - 3F - B + 2F &= 2 \\ 2I + B - F &= 2 \\ F &= B + 2I - 2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De acordo o **Teorema 2.2.2** a área  $S$  de um triângulo fundamental é igual a  $\frac{1}{2}$ . e como o poliedro plano foi decomposto em triângulos fundamentais, então a quantidade desses triângulos será igual a quantidade de faces  $F$ . Portanto,

$$S = \frac{1}{2}F.$$

Donde, por (3.13) teremos

$$S = \frac{1}{2}(B + 2I - 2) \Rightarrow S = \frac{1}{2}B + I - 1.$$

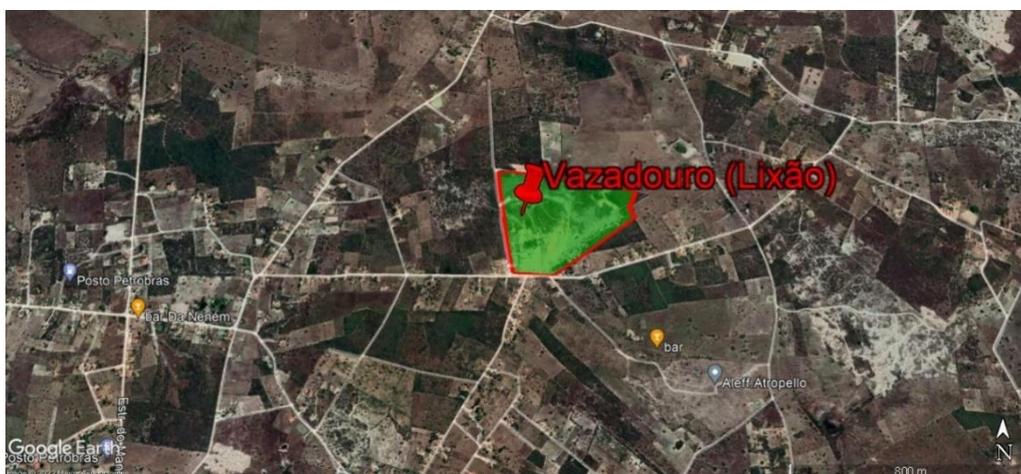
■

### 3.5 - Teorema de Pick em regiões irregulares.

Um ponto interessante a partir de agora é a aplicação do Teorema de Pick para aproximar o cálculo de áreas irregulares, a exemplo de círculo e elipse. Este contexto, pode auxiliar a explorar dimensões de queimadas e/ou desmatamento em uma determinada região, a analisar o alcance de um vazamento de óleo no oceano, a acompanhar a velocidade de cicatrização de um ferimento, dentre outros.

A imagem a seguir, obtida por satélite no Google Earth, mostra o vazadouro municipal de resíduos sólidos em uma área rural do município de Serrinha-BA, na localidade conhecida como Comunidade de Flores.

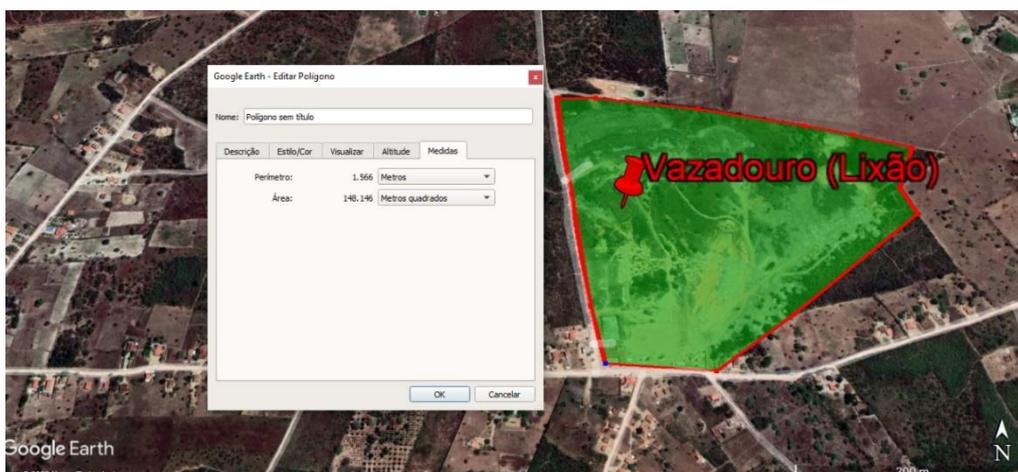
**Figura 3.16: Localização do vazadouro municipal de resíduos sólidos - Serrinha/BA**



Fonte: Google Earth (Acesso: 25/01/22)

Este local já é utilizado para depósito de resíduos há cerca de 20 anos, sem nenhum tipo de tratamento, deixando um passivo ambiental de grandes proporções no que tange à poluição visual, atmosférica, do solo e, ainda, das águas subterrâneas. De acordo com dados no Google Earth, o Vazadouro municipal de resíduos sólidos do município de Serrinha/BA possui uma área aproximada de 148.146 m<sup>2</sup> e um perímetro de 1.566 metros, conforme Figura 3.17.

**Figura 3.17: Área do Vazadouro municipal de resíduos sólidos - Serrinha/BA**



Fonte: Google Earth (Acesso: 25/01/22)

É importante frisar que a Política Nacional de Resíduos Sólidos – Lei 12305/2010, obriga que os municípios extingam os lixões e implantem a Central de Tratamento de Resíduos Sólidos (CTRS), sendo esta lei um marco muito importante para política ambiental brasileira, incentivando o descarte dos resíduos de forma correta e compartilhada, além da reciclagem e reutilização dos resíduos sólidos.

A seguir vamos calcular a área aproximada, indicada por  $S_v$ , desse Vazadouro utilizando o Teorema de Pick e usando o software GeoGebra. Para isso, inserimos a imagem do vazadouro no GeoGebra ajustando a distância entre os pontos da malha, de modo que a distância fique bem próxima de 1 cm. Neste momento será utilizada a medida de 0,9 cm, conforme Figura 3.18. Notemos que a escala no tamanho real na imagem é 300 metros. Esses 300 metros é o valor que corresponde ao segmento de tamanho 3,8 cm . Portanto a razão de

semelhança que iremos utilizar para o cálculo aproximado da área real do vazadouro será

$$\frac{300 \text{ m}}{3,8 \text{ cm}} \approx 78,95 \text{ m/cm} \quad (3.14)$$

**Figura 3.18:** Polígono do vazadouro municipal em uma malha próxima de 1 cm



Agora para respeitar a hipótese do teorema de Pick, iremos aproximar o polígono da Figura 3.18 para outro polígono que tenha vértices com coordenadas inteiras. Em seguida, marcaremos todos os pontos do seu bordo e do seu interior, conforme Figura 3.19.

**Figura 3.19:** Teorema de Pick–Área do vazadouro em uma malha próxima de 1 cm



Assim,  $B = 8$  e  $I = 20$ , daí teremos

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{8}{2} + 20 - 1 = 4 + 19 = 23 \text{ cm}^2$$

donde, por (3.14) e pela proporcionalidade de área, temos

$$\begin{aligned} (78,95)^2 &\approx \frac{S_V}{23} \\ 6.233,10 &\approx \frac{S_V}{23} \\ S_V &\approx 143.361,36. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pelo resultado encontrado em (3.15) podemos perceber que houve uma margem de erro pra menos de aproximadamente 3,22% se comparado com o resultado encontrado pelo Google Earth na Figura 3.17, visto que é um processo de aproximação.

Em contrapartida, ao diminuirmos cada vez mais o tamanho da unidade de medida da malha quadriculada utilizada, teremos uma maior precisão da área encontrada, já que o desenho se aproximará ainda mais do contorno real do vazadouro solicitado.

A seguir, para constatar esse fato, vamos calcular agora a área aproximada desse Vazadouro ajustando a distância entre os pontos da malha, de modo que a distância fique bem próxima de 0,9 cm. Neste momento será utilizada a medida de 0,8 cm, conforme Figura 3.20.

**Figura 3.20: Polígono do vazadouro municipal em uma malha próxima de 0,9 cm**



Além disso, para continuar respeitando a hipótese do teorema de Pick, iremos aproximar o polígono da Figura 3.20 para outro polígono que tenha vértices com coordenadas inteiras. Em seguida, marcaremos todos os pontos do seu bordo e do seu interior, conforme Figura 3.21.

**Figura 3.21: Teorema de Pick—Área do vazadouro em uma malha próxima de 0,9 cm**



Assim,  $B = 15$  e  $I = 23$ , daí teremos:

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{15}{2} + 23 - 1 = 7,5 + 22 = 29,5 \text{ cm}^2.$$

Como consideramos a unidade de área um quadradinho de  $0,9 \text{ cm}$  de lado, logo a área de cada quadradinho é de  $0,81 \text{ cm}^2$ . Portanto, a área da região será dada por

$$S = 29,5 \cdot 0,81 = 23,895$$

donde, por (3.14) e pela proporcionalidade de área e considerando  $S_V$  a área do vazadouro, temos

$$\begin{aligned} (78,95)^2 &\approx \frac{S_V}{23,895} \\ 6.233,10 &\approx \frac{S_V}{23,895} \\ S_V &\approx 148.939,92. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto, podemos confirmar que pelo resultado em (3.16) a margem de erro pra mais foi de aproximadamente 0,5 % se comparado com o resultado encontrado pelo Google Earth na Figura 3.17.

Uma outra aplicação bem interessante do Teorema de Pick é encontrar aproximações para o número  $\pi$ , onde diz que quando a quantidade de pontos tender ao infinito, o valor de tenderá ao seu valor real. (Sé, 2016, pg. 25-27)

De acordo com Hermes (2015, pg. 206) o Teorema de Pick pode ser aplicado na aritmética, onde pode ser usado para determinar a solução minimal de uma equação diofantina.

## **4. TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

O presente capítulo tem a finalidade de estruturar uma sequência didática abordando o Teorema de Pick em tecnologias educacionais inovadoras. Ele está estruturado em duas seções. Na primeira seção, discutimos sobre a importância da utilização de ferramentas tecnológicas em sala de aula apoiada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e apresentamos o aplicativo/software GeoGebra e o Google Earth, os quais serão utilizados na resolução dos problemas. Posteriormente, na segunda seção, construímos uma sequência didática mostrando uma forma de abordar o Teorema de Pick na educação básica.

### **4.1 - Ferramentas Tecnológicas.**

A sociedade contemporânea convive com diversos desenvolvimentos tecnológicos no cotidiano, seja no campo da produção ou da educação. As novas tecnologias permitem que diferentes ambientes e contextos de aprendizagem façam sentido e a compreensão do conteúdo seja significativa. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nos orienta a criar maneiras inovadoras e desafiadoras de lecionar e direcionar o aluno a compreender a Matemática no seu cotidiano. Vale lembrar, que o uso de tecnologias digitais é inserido nas competências a serem desenvolvidas ao longo da Educação Básica de forma a propor ao discente um aprendizado mais significativo através dessa ferramenta.

As competências que abordam o uso de tecnologias são:

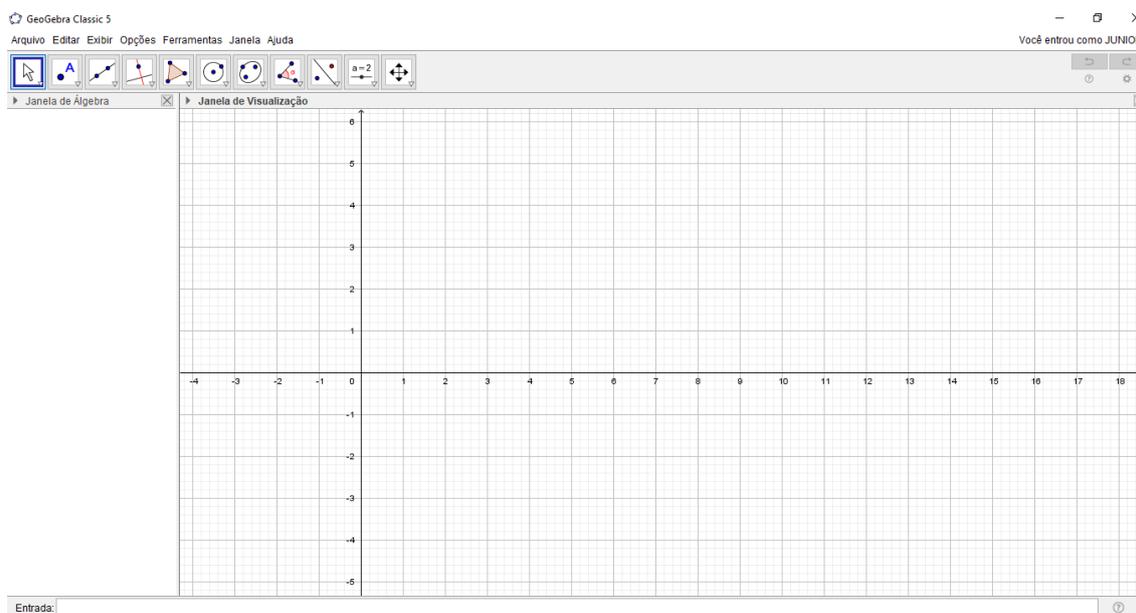
- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;
- Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo;
- Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva;
- Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Nesse contexto, o presente trabalho faz uma abordagem do Teorema de Pick com o aplicativo GeoGebra e Google Earth. Atualmente o GeoGebra é um dos aplicativos educacionais de geometria mais acessados que engloba

recursos de geometria, álgebra e cálculo. Além de ser gratuito, têm uma ótima interface e apresenta uma linguagem acessível a qualquer nível de escolaridade podendo ser usado tanto no computador quanto em smartphone e tablets, em diversos sistemas operacionais.

O GeoGebra contribui em diversas situações para o processo ensino-aprendizagem na matemática, em especial com o ensino da geometria, o que o torna bastante didático e prazeroso. O mesmo foi idealizado por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg e tem autorização para ser baixado pelo site oficial, <http://www.GeoGebra.org> e para funcionar é preciso que o Java esteja instalado no aparelho. Além disso, é fácil encontrar suporte em pesquisas rápidas pela internet. Para os leitores interessados há um tutorial das principais funções do software através do link <https://docplayer.com.br/68199168-Figura-1-interface-do-geogebra.html>.

**Figura 4.1: Interface do software GeoGebra**

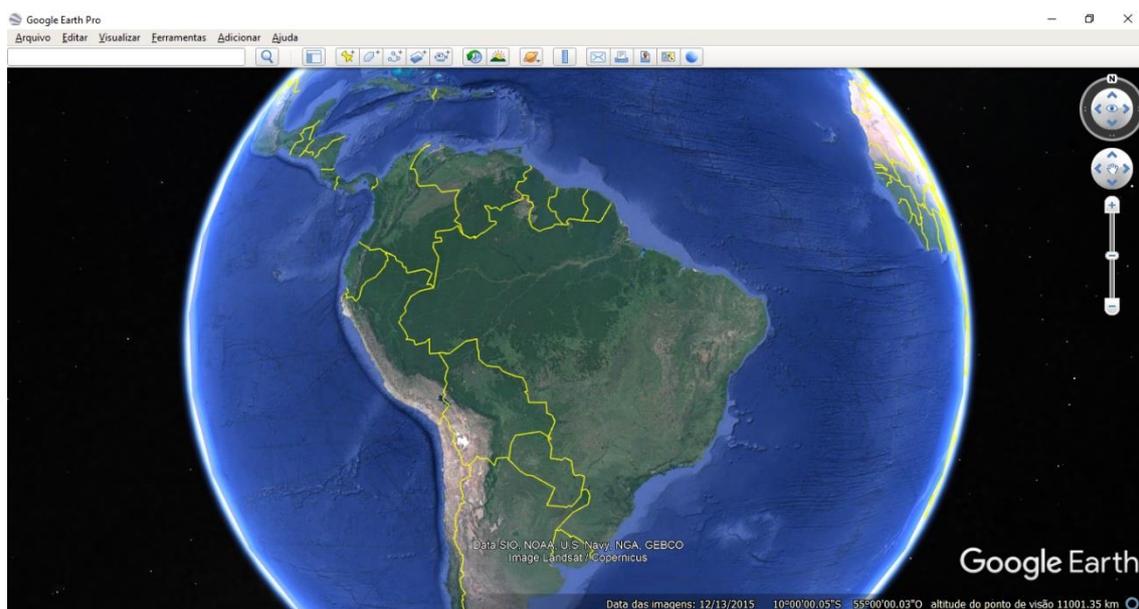


Outra ferramenta tecnológica também muito acessada é o Google Earth. Ele é um programa desenvolvido e distribuído pela empresa estadunidense do Google cuja função é apresentar um modelo tridimensional do globo terrestre, construído a partir de mosaico de imagens de satélite obtidas de fontes diversas, imagens aéreas (fotografadas de aeronaves). Desta forma, o programa pode ser usado simplesmente como um gerador de mapas bidimensionais e imagens de satélite ou como um simulador das diversas paisagens presentes no Planeta

Terra. Com isso, é possível identificar lugares, construções, cidades, paisagens, entre outros elementos.

O Google Earth foi desenvolvido pela Keyhole, Inc, uma companhia adquirida pelo Google em 2004. O programa está disponível em duas diferentes licenças: Google Earth, a versão grátis mas com funções limitadas; e o Google Earth Pro (Gratuito), que se destina a uso comercial. (wikipedia, 2022)

**Figura 4.2: Interface do software Google Earth**



## 4.2 - Sequências Didáticas.

O objetivo desta seção é estruturar uma sequência didática para abordar o Teorema de Pick no ensino fundamental. A aplicação será realizada durante as aulas com turmas do 8º ano no momento em que, na programação do currículo, for trabalhada área de polígonos e terá duração de 12 aulas.

### 4.2.1 Aula 1: Atividade de sondagem e revisão

**Objetivos:** Revisar os conteúdos que são pré-requisitos para compreender áreas de polígonos e áreas aproximadas de figuras irregulares.

**Habilidades:** **(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada; **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas; **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

**Objetos do conhecimento:** Problemas sobre medidas envolvendo grandezas de comprimento e área; Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros; Áreas de figuras planas.

**Duração:** 3 aulas de 50 minutos cada.

**Local:** Sala de aula.

**Organização dos alunos:** Dupla.

**Recursos e/ou materiais utilizados:** Atividade impressa (Apêndice-Atividade 1), lápis, borracha, régua, caneta ou hidrocor colorido.

**Desenvolvimento:** No primeiro encontro, será aplicada uma atividade diagnóstica (Apêndice-Atividade 1) para analisar os conhecimentos prévios abordando o assunto. Em seguida, faremos uma mesa-redonda para um debate sobre a atividade e após as discussões observadas, realizaremos uma revisão enfatizando os conteúdos em que os estudantes demonstraram ter mais dificuldade.

#### **4.2.2 Aula 2: Teorema de Pick.**

**Objetivos:** Conhecer o Teorema de Pick e conduzir os alunos a perceberem que mesmo com diferentes tipos de resoluções podemos chegar a resultados semelhantes.

**Habilidades:** **(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada; **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas; **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

**Objetos do conhecimento:** Problemas sobre medidas envolvendo grandezas de comprimento e área; Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros; Áreas de figuras planas.

**Duração:** 3 aulas de 50 minutos.

**Local:** Sala de aula.

**Organização dos alunos:** Dupla.

**Recursos e/ou materiais utilizados:** Atividade impressa (Apêndice-Atividade 2), lápis, régua, caneta ou hidrocor colorido, banner com a malha quadriculada ou a malha quadriculada projetada pelo data show.

**Desenvolvimento:** Neste encontro, será apresentado o teorema de Pick. Os alunos irão receber uma atividade impressa (Apêndice-Atividade 2) com atividades desafiadora e contendo uma breve biografia e o enunciado do teorema de Pick. Parte das atividades será similar a aplicada na 1ª aula de forma adaptada para trabalhar o Teorema proposto. Em seguida, os alunos, com

mediação do professor, irão preencher uma tabela relacionada a alguns polígonos, contendo os pontos do bordo e interiores do mesmo, e com isso chegarão na fórmula algébrica do famoso Teorema de Pick. Com isso, após a resolução de mais alguns exemplos através do Banner ou projetada pelo data show, será feita mais uma mesa-redonda para um debate sobre a atividade e após as discussões observadas, será aplicada mais questões desafiadoras acerca do Teorema.

#### **4.2.3 Aula 3: Teorema de Pick usando o aplicativo/software GeoGebra.**

**Objetivo:** Apresentar o GeoGebra para auxiliar o cálculo de áreas de polígonos através do Teorema de Pick.

**Habilidades:** **(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada; **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas; **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

**Objetos do conhecimento:** Problemas sobre medidas envolvendo grandezas de comprimento e área; Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros; Áreas de figuras planas.

**Duração:** 3 aulas de 50 minutos.

**Local:** Sala de informática.

**Organização dos alunos:** Dupla.

**Recursos e/ou materiais utilizados:** Computador, smartphone ou tablet, GeoGebra, data show e atividade impressa (Apêndice-Atividade 3);

**Desenvolvimento:** Após os alunos terem conhecimento do Teorema de Pick faz-se necessário apresentar o aplicativo/software GeoGebra, dando ênfase as ferramentas que serão mais úteis para aplicação da atividade, tais como: malha quadriculada, ponto, segmento de reta, comprimento, polígonos, áreas, entre outros.

Nesse contexto, com o conhecimento básico do GeoGebra eles irão interagir com a ferramenta do mesmo e transcrever algumas figuras vistas na atividade impressa da última aula (Apêndice-Atividade 3) no aplicativo, sobrepondo-a a uma malha quadriculada de quadrado com 1 *cm* de lado, de modo a comparar as áreas encontrada na atividade 2 e no GeoGebra.

#### **4.2.4 Aula 4: Teorema de Pick – Estimando áreas aproximadas em regiões no município de Serrinha/Ba usando o GeoGebra.**

**Objetivo:** Contextualizar o cálculo de áreas, com a fórmula de Pick, em regiões irregulares com o software GeoGebra e o Google Earth.

**Habilidades:** **(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada; **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas; **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

**Objetos do conhecimento:** Problemas sobre medidas envolvendo grandezas de comprimento e área; Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser

facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros; Áreas de figuras planas.

**Duração:** 3 aulas de 50 minutos.

**Local:** Sala de informática.

**Organização dos alunos:** Dupla ou trio.

**Recursos e/ou materiais utilizados:** Computador, internet, Google Earth, GeoGebra, atividade impressa (Apêndice-Atividade 4).

**Desenvolvimento:** Com base no Teorema de Pick e no uso do GeoGebra iremos contextualizar a matemática com a geografia, criando assim a interdisciplinaridade entre os dois campos. Para isso, além dos conteúdos já vistos, faz-se necessário uma revisão acerca de figuras semelhantes, escala e a relação entre as áreas de duas figuras semelhantes. Além disso, fazer uma breve apresentação do Google Earth dando ênfase as principais ferramentas que serão acessadas, tais como: Pesquisa, localização, escalas, áreas, entre outros. No primeiro momento, os alunos irão receber uma atividade impressa (Apêndice-Atividade 4) contendo duas situações problemas de imagens irregulares.

O primeiro problema, é sobre o cálculo de área do vazadouro de resíduos sólidos em Serrinha/BA. Nele a imagem já está delimitada por um polígono simples e os alunos irão aplicar o Teorema de Pick em uma malha quadriculada com 1 u.c e outra de 0,9 u.c. O objetivo do problema é inserir os pontos inteiros no contorno (bordo) e no interior do polígono na malha quadriculada e, em seguida, calcular as áreas das regiões usando o Teorema de Pick e aplicando as escalas dadas. Por fim, será feita uma mesa-redonda para um debate para verificar sobre os resultados encontrados e as possíveis incompatibilidades.

No segundo problema, após uma boa interação com as ferramentas do Google Earth, os alunos irão pesquisar a Praça Morena Bela no município de Serrinha/Ba e salvar a imagem no computador, conforme orientação no roteiro da atividade. Posteriormente, com mediação do professor, os alunos deverão inserir a imagem no GeoGebra sobrepondo-a a uma malha quadriculada bem próxima de 1 u.c de lado e usando segmentos de reta com extremidades em

coordenadas inteiras, ou seja, coincidindo com os pontos de encontro da malha, desenhar um polígono que se aproxime do contorno da imagem. Este polígono deve ser simples devido a hipótese do Teorema de Pick.

Desse modo, a área desse polígono será uma aproximação para a área da imagem solicitada. Por conseguinte, o aluno fará a contagem dos pontos do bordo e no interior do polígono e aplicará a fórmula do Teorema de Pick comparando o valor com o encontrado no GeoGebra. O resultado será referente ao tamanho da malha quadriculada e dado em *u. a.*

Em seguida, usando a escala do mapa, deverá ser feita a conversão necessária para encontrar o valor aproximado da região. Para concluir, será feita mais uma mesa-redonda para um debate sobre os resultados encontrados e as possíveis incompatibilidades.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O aprendizado torna-se mais atrativo quando o discente consegue associar o conteúdo estudado com o seu cotidiano. Nesse sentido, o presente trabalho foi realizado buscando contribuir para o processo ensino-aprendizagem envolvendo a Geometria e o GeoGebra norteados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aplicando o teorema de Pick.

Este teorema possui uma beleza envolvendo contagem de pontos para calcular áreas de polígonos. Seu enunciado é simples e traduz uma fórmula pequena e direta. Ao contrário, do cálculo de áreas pelo método tradicional, que muitas vezes torna o cálculo exaustivo simplesmente pela decomposição de alguns polígonos e aplicação de inúmeras fórmulas.

Como base para aplicação do teorema de Pick foi utilizado o GeoGebra com o apoio do Google Earth por serem gratuitos e contribuírem para a aprendizagem da geometria.

Nessa perspectiva, fica a esperança de que a investigação aqui empreendida possa instigar nos educadores a intenção de trabalhar uma geometria interessante e prazerosa, motivando os alunos, público cada vez mais inserido no mundo virtual, no processo de aprendizagem.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

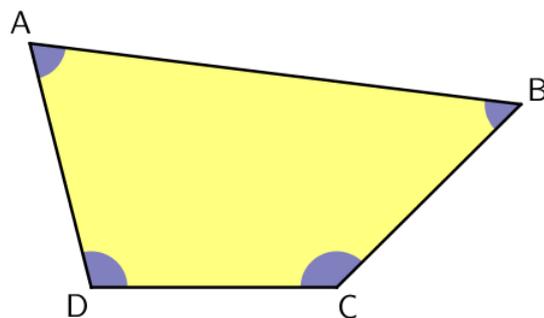
- ✓ ABREU, R. C. **TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES**. 2015. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos do Goytacazes, 2015.
- ✓ BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- ✓ CARVALHO, W.S. **Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no GeoGebra**. 2016. 52 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (Profissional), Goiânia, 2016.
- ✓ GOOGLE EARTH (programa). In: WIKIPEDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikipedia Foundation, 2021. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Google\\_Earth](https://pt.wikipedia.org/wiki/Google_Earth). Acesso em 08/01/22.
- ✓ HERMES, J.D.V. **O teorema de Pick**. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas – UFSM, 2015.
- ✓ LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.
- ✓ LIU, Andy. C. F. **Lattice Points and Pick's Theorem**. *Mathematics Magazine*, v. 52, n.4, p.232-235, Setembro 1979. Published by Mathematical Association of America.

- ✓ OLIVEIRA, Gabriela Vicentini de Oliveira. **Brahmagupta e quadriláteros cíclicos no ensino médio. 2015.** Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP, 2015.
  
- ✓ SÉ, F.C.L.S. **O teorema de Pick e algumas aplicações para os Ensinos fundamental II e médio. 2015.** Dissertação (Mestrado – PROFMAT) – Universidade Federal da Bahia, UFBA, 2016.
  
- ✓ SILVA JUNIOR, F.S. **Sobre o cálculo de Áreas e o Teorema de Pick.** 2013 119 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.
  
- ✓ SOUZA, M. B. **Provas alternativas para os Teoremas de Pick e de Ehrhart e Semigrupos Numéricos.** Universidade de Campinas. IMECC. pinas, 2014.
  
- ✓ TAVARES, J.N., Teorema de Pick. Disponível em <https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html>. Acesso em 08/04/21.
  
- ✓ [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Das Fotoalbum f%C3%BCr Weierstra%C3%9F 039 \(Georg Alexander Pick\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Das_Fotoalbum_f%C3%BCr_Weierstra%C3%9F_039_(Georg_Alexander_Pick).jpg) Acesso em: 24 de agosto de 2021.
  
- ✓ <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick/> Acesso em: 24 de agosto de 2021.
  
- ✓ [https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg Alexander Pick](https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick) Acesso em: 02 de setembro de 2021.

# APÊNDICES: ATIVIDADES PROPOSTAS

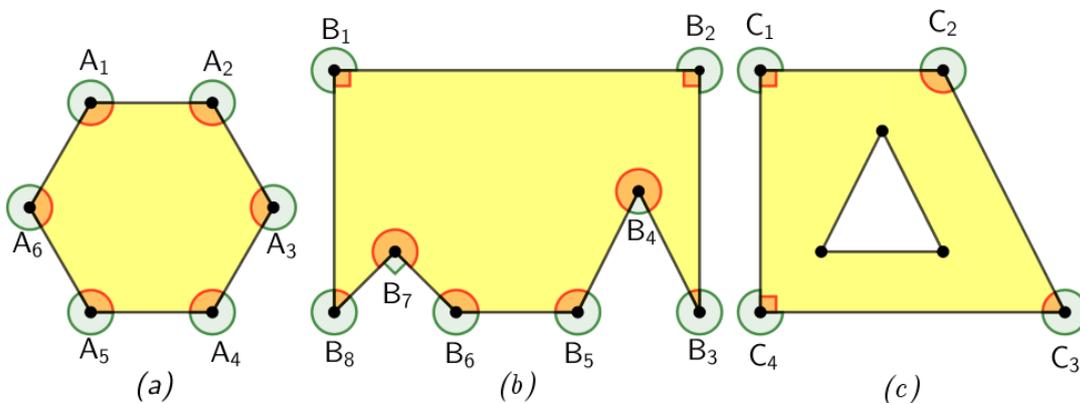
## ATIVIDADE 1: Sondagem e revisão

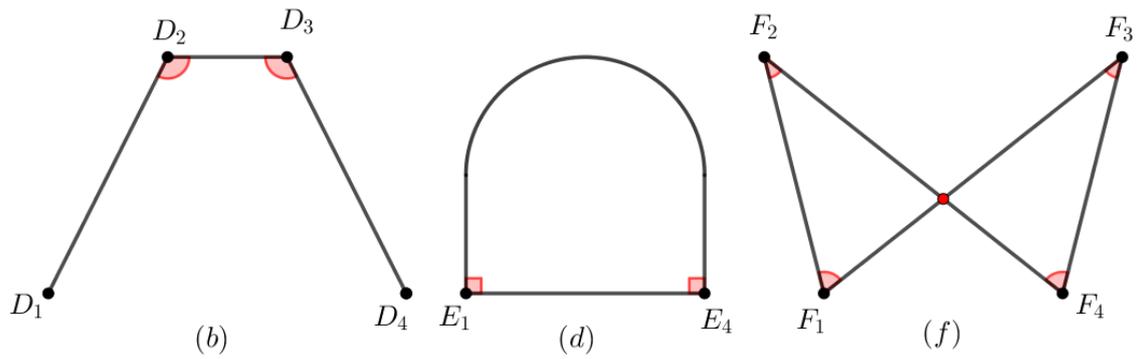
1. Identifique e nomeie no quadrilátero abaixo os elementos indicados em cada item. **Justifique sua resposta.**



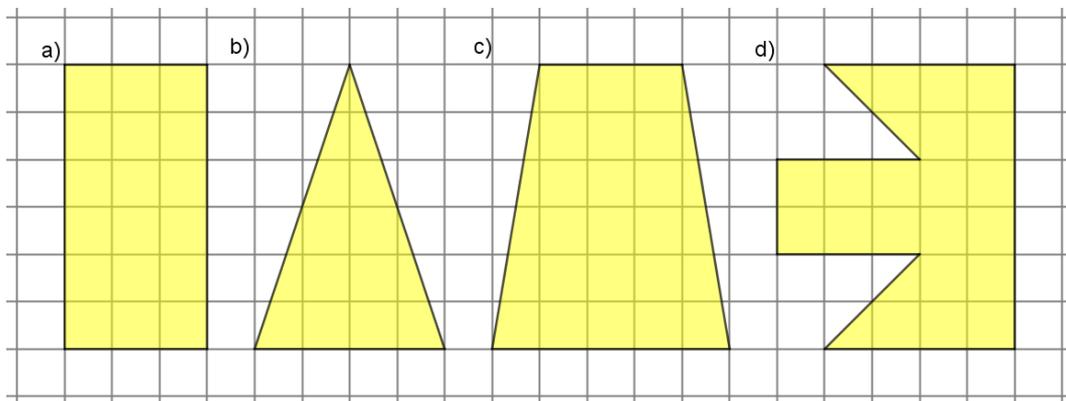
- a) os vértices. \_\_\_\_\_  
b) os lados. \_\_\_\_\_  
c) os ângulos internos. \_\_\_\_\_

2. Quais das figuras abaixo são polígonos? **Justifique sua resposta.**





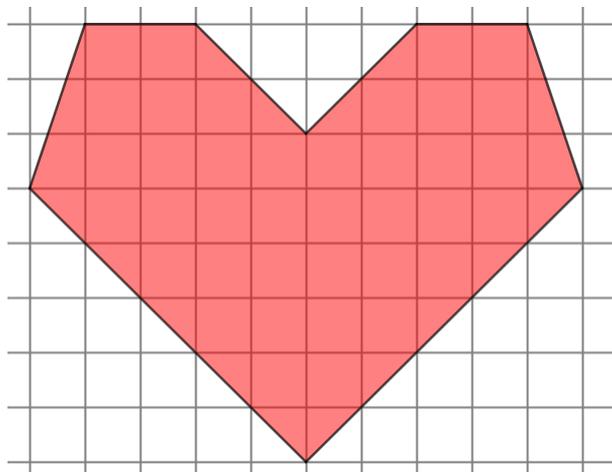
3. Quais são as áreas dos polígonos abaixo se a malha quadriculada for formada por quadrados com 1 u. c de lado? **Justifique sua resposta.**



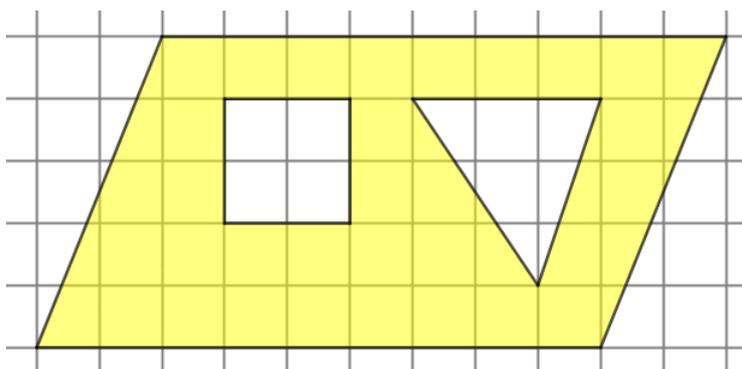
Cálculo de área dos polígonos			
Retângulo	Triângulo	Trapézio	Polígono simples



6. Agora a decomposição do polígono abaixo fica a seu critério. Divida-o em polígonos conhecidos e calcule a área considerando uma malha quadriculada formada por quadrados com 1 u. c de lado. **Justifique sua resposta.**



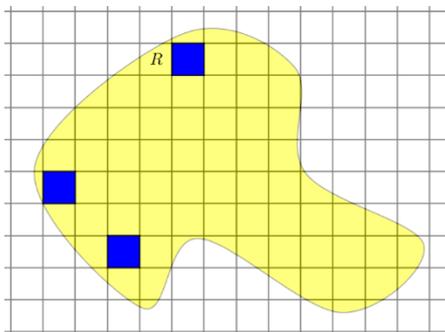
7. Calcule a área sombreada da região abaixo considerando a malha quadriculada formada por quadrados de 1 u. c de lado. **Justifique sua resposta.**



8. Vamos calcular a área de uma região irregular?

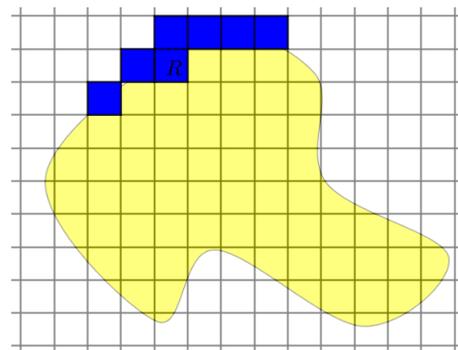
O intuito, desta questão é fazer aproximações por excesso ou por falta da área de um polígono retangular. Para isso, considere a região abaixo inserida numa malha quadriculada de 1 *u. c.* de lado e siga os seguintes passos:

Continue pintando a região R abaixo para encontrar o maior número possível de regiões quadradas inteiras que cabem dentro da dele.



Quantas regiões quadradas inteiras couberam no interior da região R?

Pinte o menor número possível de regiões quadradas inteiras que reveste totalmente a região R.



Toda região R foi revestida com quantos quadrados inteiros?

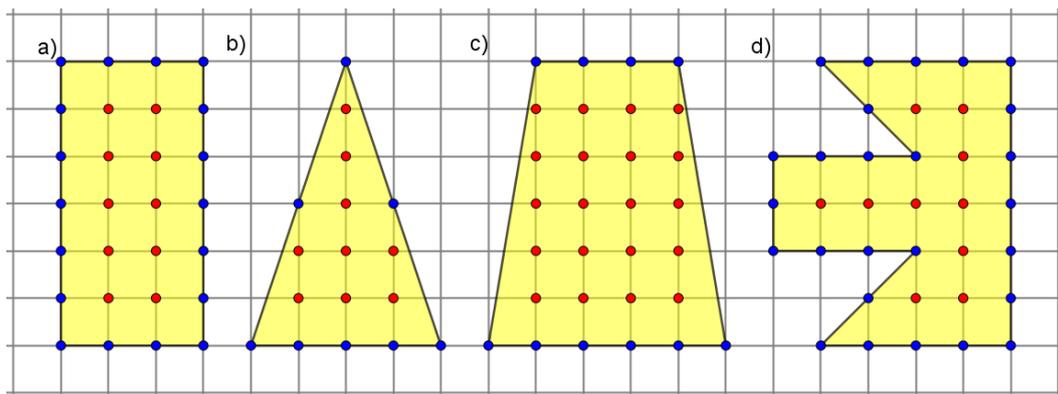
---

Para uma provável aproximação dessa área, calcule a média aritmética dos valores encontrados.

## ATIVIDADE 2

### Teorema de Pick: Vamos contar?

1. Vamos aprender uma forma diferente e mais divertida de calcular área de polígonos simples do que a vista na aula passada?



Com base na figura acima, preencha a tabela abaixo sabendo que os pontos em azul representam os pontos do bordo e os pontos em vermelho representam os pontos do interior.

Polígonos	Pontos do bordo (B)	$\frac{B}{2}$	Pontos do interior (I)	$S = \frac{B}{2} + I - 1$
Quadrado				
Triângulo				
Trapézio				
Polígono Simples				

Agora faça uma comparação com os valores encontrados com a atividade da aula anterior. O que é possível concluir?

---



---



---



---

O interessante da expressão acima,  $S = \frac{B}{2} + I - 1$ , **chamada de Teorema de Pick**, é podermos substituir todo o processo tradicional do cálculo de áreas envolvendo grandezas contínuas, que vimos na aula anterior, por grandezas discretas (contando apenas números inteiros) tornando uma atividade bem divertida.

O Teorema mostra como calcular a área de um polígono simples através da contagem dos pontos contidos numa rede facilitando a resolução de problemas geométricos. Assim, basta contar os pontos que estão no interior e no contorno do bordo da rede para calcular a área do polígono.

#### Georg Alexander Pick



Fonte: [www.google.com.br](http://www.google.com.br) (Acesso: 24/08/21)

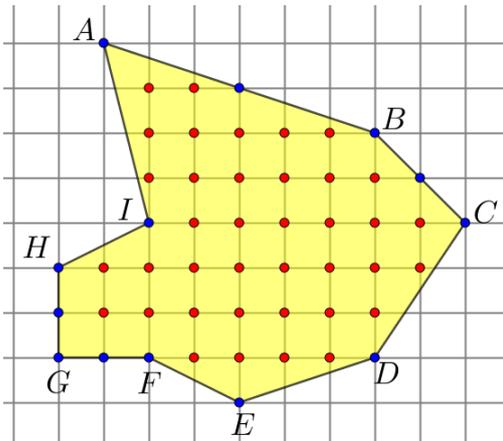
Georg Alexander Pick nasceu em 1859 na cidade de Viena, Áustria e morreu durante a segunda guerra mundial num campo de concentração de Theresienstadt em 1942. Escreveu 67 artigos nas mais diversas áreas da matemática, dentre elas o que mais marcou o seu legado foi o Teorema de Pick, que foi publicado pela primeira vez num artigo, em 1899, em Praga.

**Teorema de Pick:** A área de um *polígono simples*  $P$  cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela fórmula

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1$$

em que  $S$  representa a área,  $B$  é o número de pontos da rede situados sobre o contorno do bordo do polígono e  $I$  é o número de pontos da rede, situada no interior do polígono.

A seguir vamos calcular mais uma área de polígono usando esse Teorema.



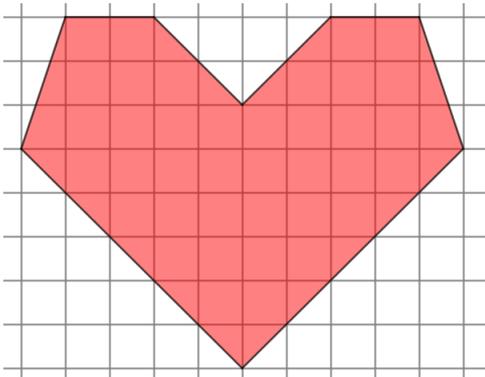
Assim,  $B = 13$  e  $I = 38$ , daí teremos:

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{13}{2} + 38 - 1$$

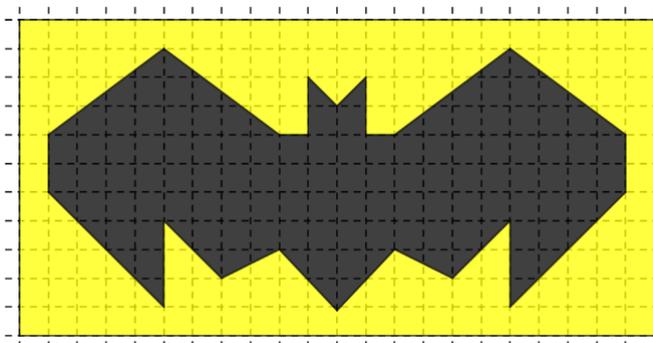
$$S = 6,5 + 37 = 43,5 \text{ u. a.}$$

2. Aplicando o Teorema de Pick, calcule as áreas dos polígonos abaixo e compare-as com os resultados da aula anterior:

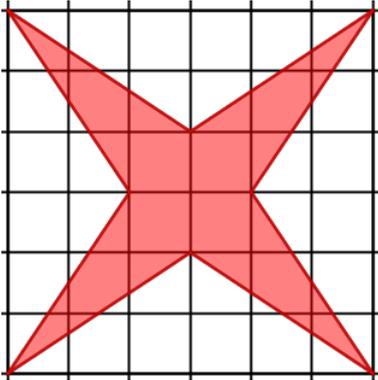
a)



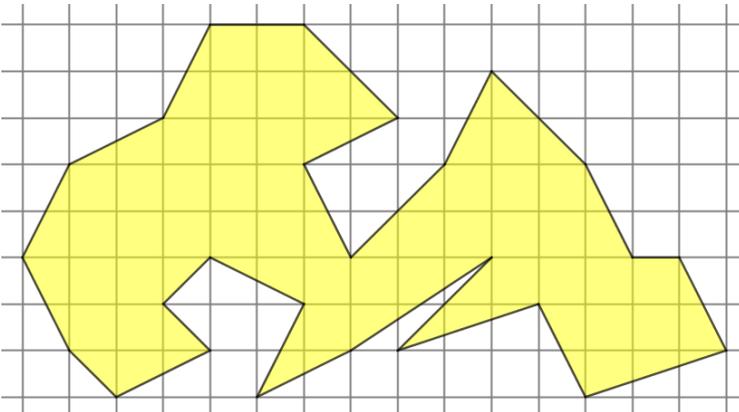
b)



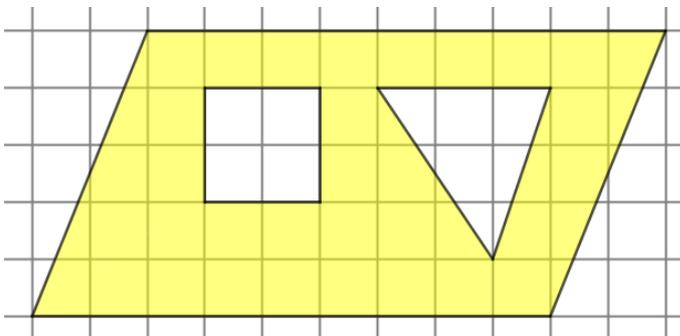
c)



d)



3. Na última aula calculamos a área sombreada do polígono abaixo pelo método tradicional e vimos que seu valor, considerando uma malha quadriculada formada por quadrados de  $1 \text{ u. c}$  de lado, foi igual a  $36,5 \text{ u. a}$ . Agora, usando o Teorema de Pick para polígonos simples, calcule a área da região sombreada abaixo.



**Agora responda:**

a) O resultado encontrado foi equivalente ao da aula passada? Justifique.

---

---

b) A figura da questão é um polígono simples ou não simples? Justifique.

---

---

**Teorema de Pick com buracos:** Seja  $P$  um polígono com  $n$  buracos em que  $B$  é o número de pontos da rede, situados sobre o contorno do bordo do polígono e no bordo dos buracos  $n$  e  $I$  é o número de pontos da rede, situada no interior do polígono, excluindo os pontos que estão no interior dos buracos, então a área do polígono é dada por

$$S = \frac{1}{2}B + I + n - 1.$$

Agora calcule a área usando a fórmula do Teorema de Pick com buracos acima.

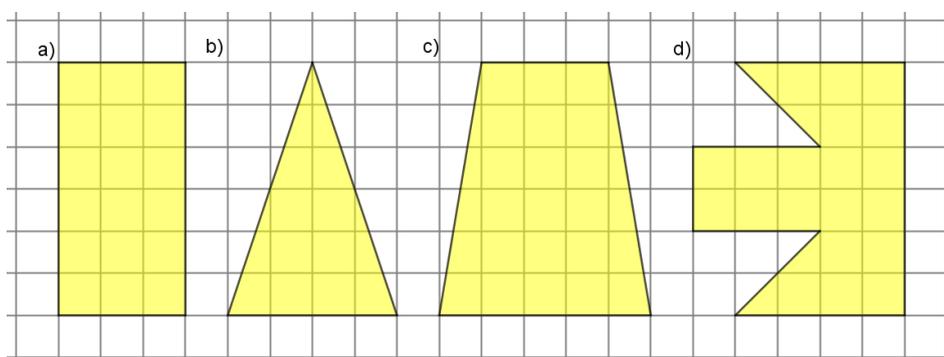
## ATIVIDADE 3

### Teorema de Pick com o software GeoGebra.

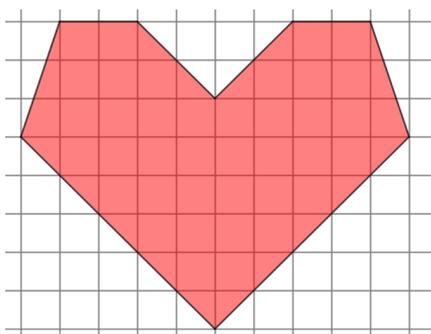
O aplicativo/software GeoGebra, além de ser gratuito, têm uma ótima interface e apresenta uma linguagem bem acessível podendo ser usado tanto no computador quanto em smartphone em diversos sistemas operacionais. Ele contribui em diversas situações para o processo ensino-aprendizagem na matemática, o que o torna bastante didático. Ele foi idealizado por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg e tem autorização para ser baixado pelo site oficial, <http://www.GeoGebra.org>.

Com o conhecimento básico deste programa, mediados pelo professor, vocês irão interagir com a ferramenta do mesmo e transcrever algumas figuras vistas na aula passada, usando uma malha quadriculada formada por quadrados de 1 u. c de lado, com o intuito de comparar as áreas encontradas em ambos.

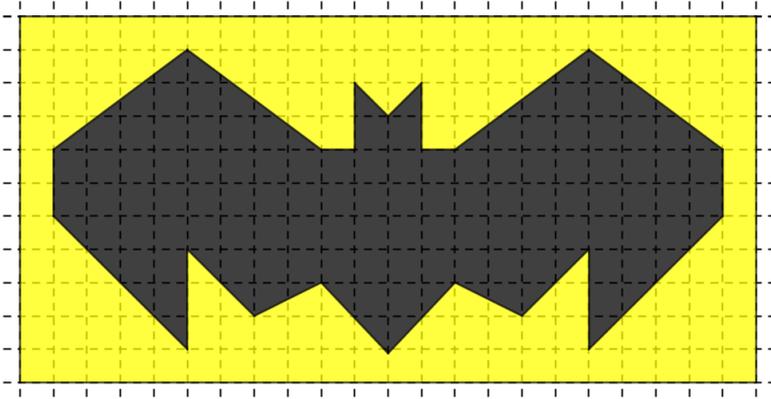
a)



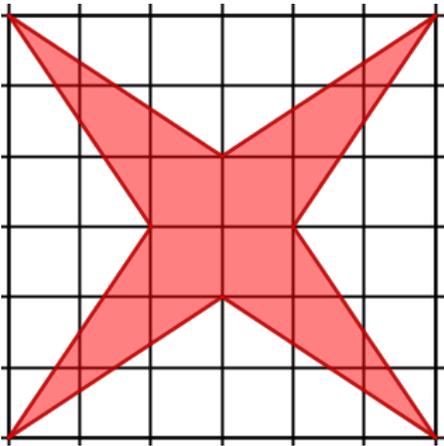
b)



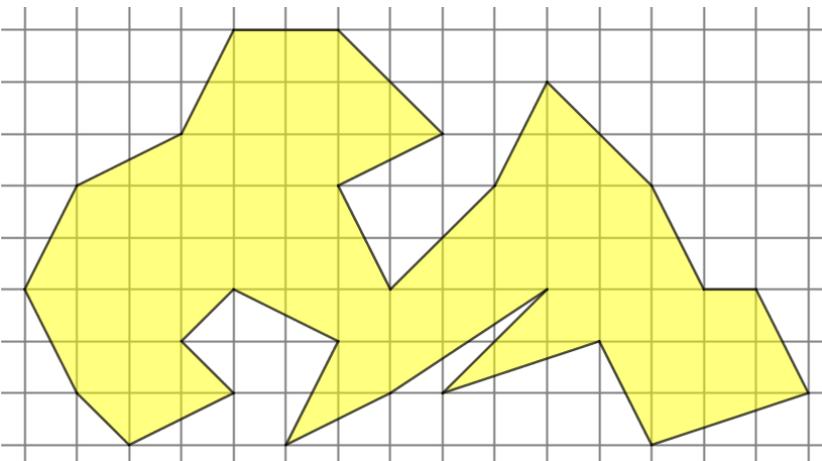
c)



d)



e)



## ATIVIDADE 4

### Teorema de Pick: Estimando áreas aproximadas em regiões no município de Serrinha /Ba.

A base desta atividade é promover uma boa oportunidade de fazer conexões entre matemática e geografia, criando assim a interdisciplinaridade entre os dois campos.

**Problema 1:** A imagem a seguir, obtida por satélite no Google Earth, mostra o vazadouro municipal de resíduos sólidos em uma área rural do município de Serrinha-BA, na localidade conhecida como Comunidade de Flores.

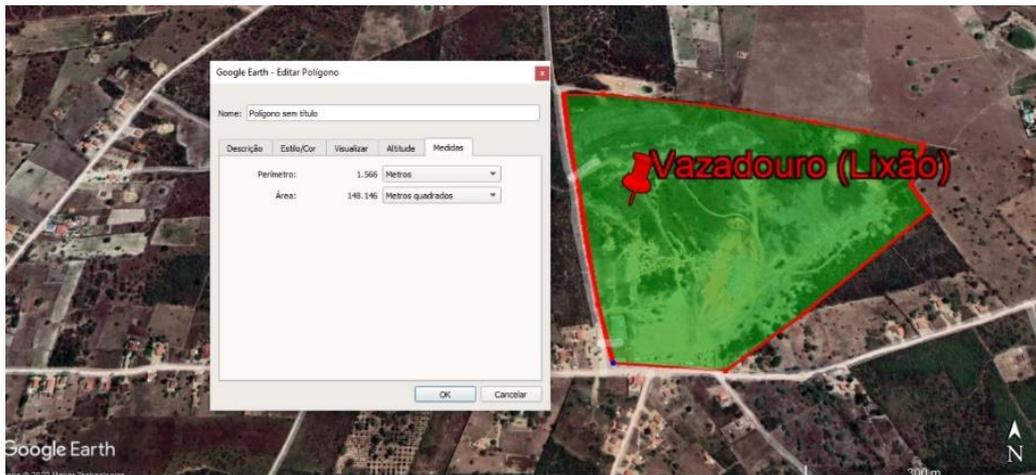
#### Vazadouro municipal de resíduos sólidos - Serrinha/BA



Fonte: Google Earth (Acesso: 25/01/22)

Este local já é utilizado para depósito de resíduos há cerca de 20 anos, sem nenhum tipo de tratamento, deixando um passivo ambiental de grandes proporções no que tange à poluição visual, atmosférica, do solo e, ainda, das águas subterrâneas. De acordo com dados no Google Earth, o Vazadouro municipal de resíduos sólidos do município de Serrinha/BA possui uma área aproximada de 148.146 m<sup>2</sup> e um perímetro de 1.566 metros, conforme figura abaixo.

## Área do Vazadouro municipal de resíduos sólidos - Serrinha/BA



Fonte: Google Earth (Acesso: 25/01/22)

A imagem do vazadouro foi inserida, numa malha quadriculada com quadradinho de aproximadamente 1 cm, no software GeoGebra. Nesse contexto, marque todos os pontos de coordenadas inteiras do bordo e do interior do polígono abaixo e calcule a área utilizando o Teorema de Pick.

**Malha quadriculada com quadradinhos aproximadamente de 1 cm de lado**



**Cálculos.**

**Agora responda:**

a) O resultado encontrado é a área do vazadouro municipal? Justifique.

---

---

b) Nessa imagem foi considerada uma malha com quadradinhos de 1 cm de lado. Logo qual a área de cada quadradinho?

c) A escala no tamanho real na imagem é 300 metros e ela corresponde ao segmento de tamanho 3,8 cm. Calcule a razão de semelhança entre esses valores?

d) Para finalizar faça a conversão da área encontrada do desenho pelo Teorema de Pick para a área real do vazadouro municipal.

Faça o mesmo processo na imagem abaixo:

**Malha quadriculada com quadradinhos de aproximadamente 0,9 u. c de lado**



**Cálculos.**

Agora responda:

a) O resultado encontrado é a área do vazadouro municipal? Justifique.

---

---

b) Nessa imagem foi considerada uma malha com quadradinhos de 0,9 cm de lado. Logo qual a área de cada quadradinho?

c) Calcule a razão de semelhança entre esses valores?

d) Encontre a área real do vazadouro municipal.

e) Em quais das malhas quadriculadas o resultado ficou mais próximo da área real do vazadouro, já que de acordo com dados no Google Earth possui uma área aproximada de 148.146 m<sup>2</sup>. Você sabe dizer por que isso aconteceu?

---

---

---

f) Você acha que em algum momento o resultado pode ficar quase igual ao dado pelo Google Earth? Justifique.

---

---

---

g) A Política Nacional de Resíduos Sólidos – Lei 12305/2010, obriga que os municípios extingam os lixões e implantem a Central de Tratamento de Resíduos Sólidos (CTRS), sendo esta lei um marco muito importante para política ambiental brasileira. Na sua opinião os lixões serão extintos? Justifique.

---

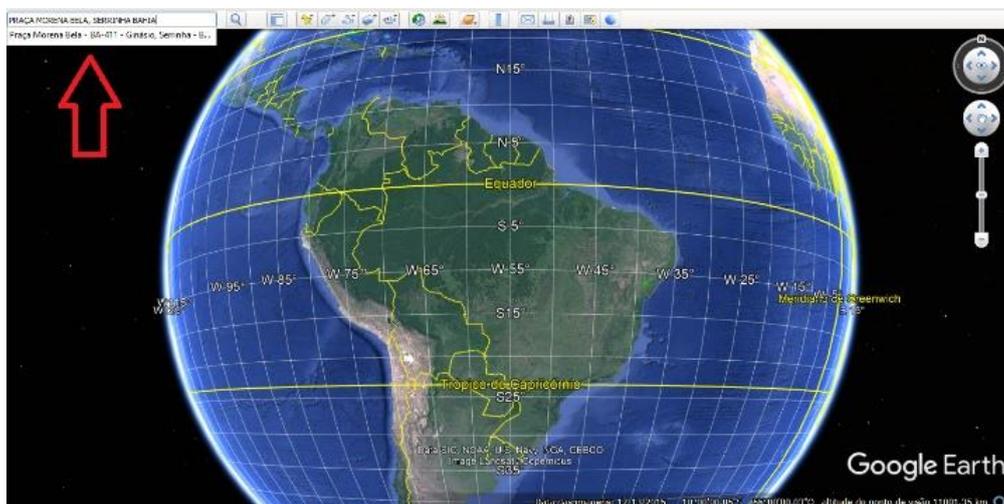
---

---

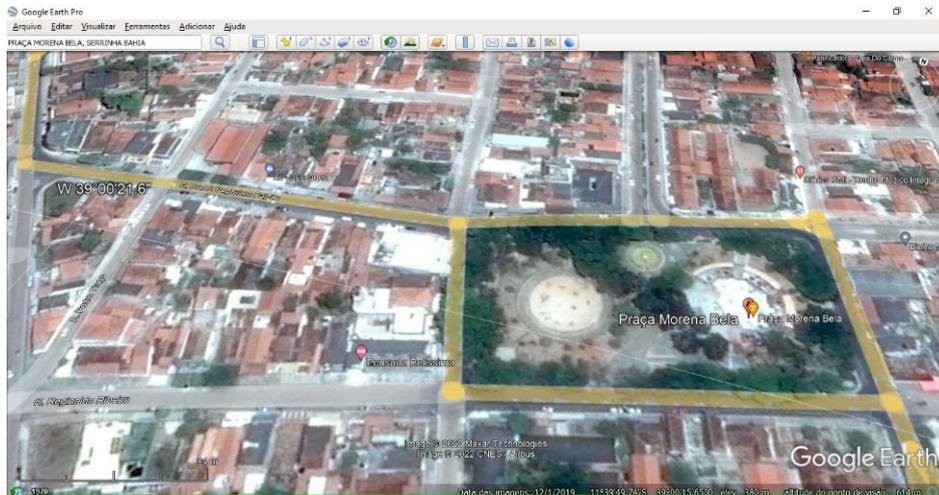
### **Aplicação do Teorema de Pick no cálculo de áreas de figuras planas irregulares mediado pelo software GeoGebra e Google Earth.**

**Problema 2:** Calculando a área aproximada da Praça Morena Bela, Serrinha/BA, aplicando o Teorema de Pick com acessos ao Google Earth e Geogebra.

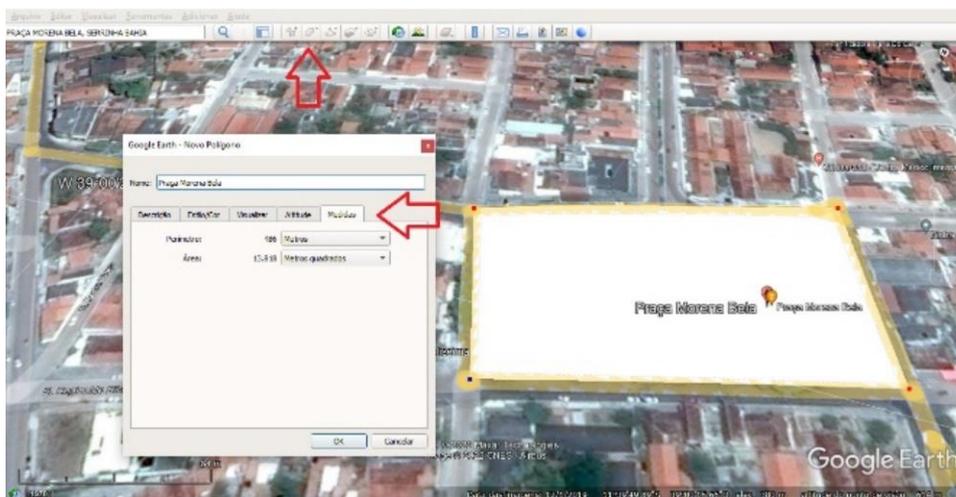
**1ª Etapa:** Abra o Google Earth e pesquise a localidade “Praça Morena Bela, Serrinha/BA”.



**2ª Etapa:** Manipule o Google Earth para a imagem da “Praça Morena Bela” ficar exibido no canto inferior a direita, pois nesse local aparecerá a escala quando pedir para salvar.

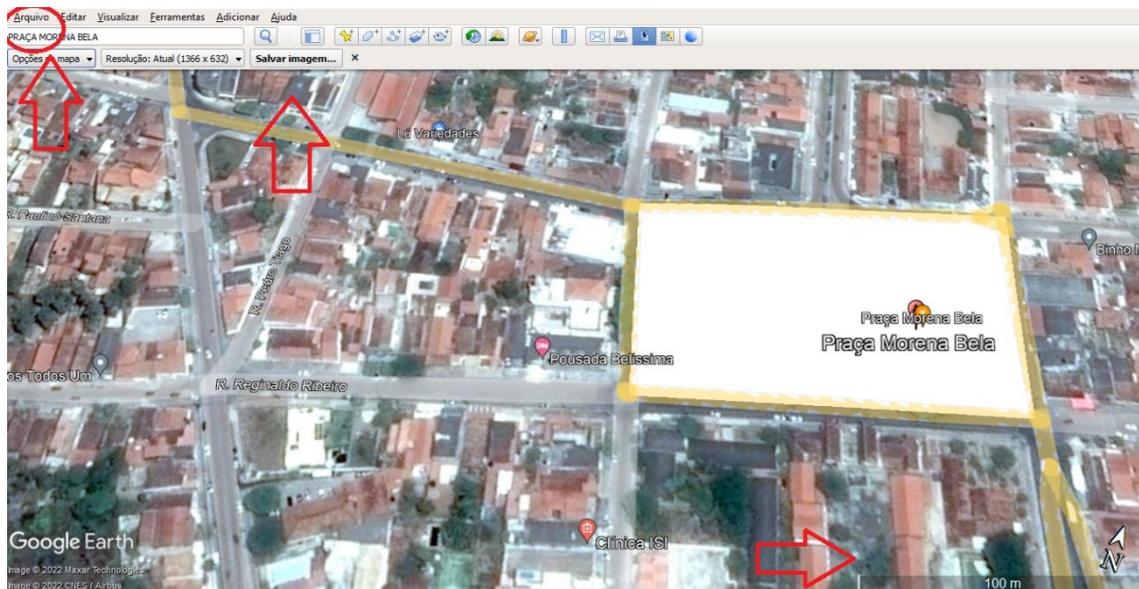


**3ª Etapa:** Vá no ícone central na parte de cima chamado adicionar polígono. Em seguida, vá clicando nos quatro cantos da imagem da praça de forma consecutiva para formar o polígono e escolha um nome para nomeá-lo. Depois vá em medidas e altere o perímetro e área, respectivamente, para metros e metros quadrados e anote os resultados. Caso queira mudar a cor do mesmo vá em Estilo/cor.



**4ª Etapa:** Vá no menu arquivo (salvar > salvar imagem ou use o atalho Ctrl+Alt+S). Note que aparecerá a escala no canto inferior direito. Ajuste a imagem com o zoom para que ela fique com escala no tamanho real de 100

metros, como na figura abaixo. Agora aperte em salvar imagem (central e acima) e nomeie o arquivo como “Praça Morena Bela” na área de trabalho.



**5ª Etapa:** Abra o aplicativo do GeoGebra, na janela de visualização clique com o botão direito do mouse e acesse janela de visualização, vá em malha e altere o tipo de malha para malha principal e selecione distância e registre  $x = 1$  e  $y = 1$ . Dessa forma, o Geogebra estará com uma malha quadriculada com quadradinhos de  $1.u.c$  de lado. Caso queira mude o estilo, coloque em negrito e mude a cor da malha.

Em seguida, vá no menu editar (inserir imagem de arquivo) e insira a imagem da Praça Morena Bela salva. Depois vá na imagem e clique com o botão direito do mouse e acesse propriedades e selecione imagem de fundo para a malha quadriculada ficar sobreposta a imagem. Por conseguinte, manipule os pontos criados ao inserir a figura para ficarem alinhados no eixo  $x$  e vá aumentando até o contorno da imagem ficar bem próximas de coordenadas inteiras na malha.

**6ª Etapa:** Nesse momento, vá no ícone referente a polígonos e construa aquele que mais se aproxima do contorno da praça, caso queira, em propriedades, mude a cor e aumente a tonalidade do mesmo para realçar. Em seguida, insira pontos nas coordenadas inteiras que ficaram no contorno (bordo) e no interior do polígono e edite os pontos para ficar respectivamente nas cores **azul** e **vermelho**. Depois vá em seguimento de reta para verificar a medida do desenho referente a medida real da praça para encontrar a escala.

**7ª Etapa:** Por fim, calcular a área aproximada do polígono simples, utilizando o Teorema de Pick. Em seguida, usando a escala do mapa, fazer a conversão necessária para encontrar o valor aproximado da Praça Morena Bela.

<b>Cálculos.</b>
------------------

Agora responda:

a) O resultado foi igual ao solicitado pelo Google Earth na 3ª etapa? Justifique.

---

---

b) Em sua opinião, o que podemos fazer para que a área se aproxime cada vez mais do valor real, pelo Google Earth, da Praça Morena Bela?

---

---

---

c) Quais vantagens e desvantagens há na aplicação do teorema de Pick?

---

---

---

---

d) Que observações você pode fazer a respeito das atividades realizadas?

---

---

---

---