Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Modelagem Matemática Aplicada aos Fenômenos Físicos †

Por

Ademar Freire da Silva Júnior

Sob a orientação da

Profa. Dra. Miriam Silva Pereira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/ UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2022
João Pessoa – PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586m Silva Júnior, Ademar Freire da.
Modelagem matemática aplicada aos fenômenos físicos / Ademar Freire da Silva Júnior. - João Pessoa, 2022.
115 f. : il.

Orientação: Miriam Silva Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Modelagem matemática. 2. Ensino de física. I. Pereira, Miriam Silva. II. Título.

UFPB/BC CDU 519.673(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

Modelagem Matemática Aplicada aos Fenômenos Físicos

Por

Ademar Freire da Silva Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ciências Exatas e da Natureza

Aprovada por:

Profa. Dra. Miriam Silva Pereira - UFPB (Orientadora)

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior – USP

Profa. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley - UFPB

Março/ 2022

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

No dia vinte e quatro de fevereiro de dois mil e vinte e dois (24/02/2022), às 09:00 horas, por meio da plataforma virtual Google Meet, por meio do link: https://meet.google.com/nrk-dnhg-wnv, em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, seguindo os mesmos preceitos da defesa presencial, em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado *“Modelagem Matemática Aplicada aos Fenômenos Físicos”,* do aluno **ADEMAR FREIRE DA SILVA JÚNIOR,** que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação da professora Miriam da Silva Pereira. A Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foi composta pelos professores Miriam da Silva Pereira (presidenta), Gabriela Albuquerque Wanderley (membro interno/UFPB) e Nivaldo de Góes Grulha Júnior (membro externo/USP). A professora Miriam da Silva Pereira, em virtude da sua condição de presidenta, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou a presidenta achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 24 de fevereiro de 2022.

Banca Examinadora:

Miriam da Silva Pereira — Miriam Silva Pereira

Gabriela Albuquerque Wanderley —

Nivaldo de Góes Grulha Júnior —

Ademar Freire da Silva Júnior graduou-se em Física pela Universidade Federal da Paraíba, graduou-se em Matemática pela Universidade Metodista de São Paulo, especializou-se em Ensino de Matemática pelo Instituto de Educação Superior da Paraíba e atua como professor na Secretaria de Educação da Paraíba.

A criança veio até ele trazendo
uma tocha acesa, e ele perguntou-lhe
de onde tinha vindo a luz.

A criança soprou a chama e apagou-a.
Depois respondeu: “Diz-me agora para onde
ela foi e eu dir-te-ei de onde vinha”.

Texto Zen

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a oportunidade de ter um contato com essa linguagem universal tão bela: a Matemática.

Agradeço a minha mãe Maria Waldizete e ao meu pai Ademar Freire pelo apoio em toda a minha caminhada. Aos meus filhos lindos Joaquim Freire e Arthur Freire por me presentearem todos os dias com seus sorrisos. A minha esposa Milena Santos pela paciência comparável a de Jó.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo ressaltar a utilização da Modelagem Matemática no Ensino Básico com ênfase nos Fenômenos Físicos, criando, assim, uma alternativa pedagógica para integrar a Matemática ao Ensino de Física. Dessa forma, a Matemática do Ensino Básico ganha mais significado, visto que os discentes serão estimulados a construir seu próprio conhecimento através de uma situação problema real.

Palavras -chaves: Modelagem Matemática; Ensino de Física;

ABSTRACT

This work aims to emphasize the use of Mathematical Modeling in Basic Education with an emphasis on Physical Phenomena, thus creating a pedagogical alternative to integrate Mathematics with Physics Teaching. In this way, Basic Education Mathematics gains more meaning, since students will be encouraged to build their own knowledge through a real problem situation.

Key words: Mathematical Modeling; Physics Teaching;

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitas vezes os professores de Matemática são postos em xeque quando os estudantes fazem perguntas como “para que serve esse conteúdo?”, “quando vou usar isso na minha vida?”, “por qual motivo estamos estudando esse assunto?”, etc. Estas indagações têm surgido com freqüência devido ao fato do Ensino da Matemática no nosso país seguir ideais tradicionais onde a Matemática é apresentada como uma série de regras e técnicas que visam apenas resolver o problema sem se preocupar com o motivo real que originou o problema e porque é importante resolvê-lo.

É fato que os professores têm utilizado diversas vezes problemas que fogem da realidade do aluno para exemplificar conteúdos relacionados à Matemática, o que dificulta, para a grande maioria, o aprendizado e o interesse por essa Ciência tão bela. Nessa perspectiva cabe ao professor desenvolver técnicas que aproxime a Matemática, vista como um objeto inalcançável, ao cotidiano dos alunos. Com esse objetivo, revela-se a Modelagem Matemática, como estratégia fundamental para contribuir com o processo de aprendizagem da Matemática, induzindo o aluno à construção do conhecimento através de situações problema do seu cotidiano ou de outras áreas do conhecimento de sua afinidade.

A Modelagem Matemática é uma forma de Ensino Aprendizagem na qual os alunos são apresentados a um problema real e são convidados a investigar possíveis soluções através de conhecimentos matemáticos.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma das competências específicas da Matemática é reconhecê-la como uma ciência humana, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. Portanto, nada mais justo que utilizar a riqueza dessa Ciência para modelar situações problemas e apresentar soluções.

Outro ponto positivo da Modelagem Matemática é despertar no aluno o interesse pelo trabalho em equipe e a interação com o professor, fortalecendo laços sociais e transformando-o em um cidadão crítico e protagonista da sua realidade.

A utilização da Modelagem Matemática desperta no estudante o ato de indagar-se sobre determinado fenômeno gerando a problematização deste, e estimulando à investigação através da pesquisa e da reflexão. Nesta perspectiva, a Modelagem Matemática conduz o estudante a resolver problemas reais de áreas do conhecimento que não são necessariamente da Matemática por meio da Matemática.

A Física, por exemplo, é uma das Ciências que mais necessita da linguagem Matemática para desenvolver seus fundamentos, expressar suas Leis, e provar seus resultados. A saber, grande parte dos conceitos Matemáticos encontrou sua inspiração e desenvolvimento dentro da Física. Assim, o Ensino de Física associado à Matemática pode ser motivador para ambas as áreas.

O presente trabalho faz uma relação entre o Ensino de Física e a Matemática através de modelos que exigem um comportamento ativo dos alunos e professores na própria elaboração do problema e não apenas na resolução do problema já exposto num livro didático. Um ensino com Modelagem Matemática nos permite refletir sobre problemas da realidade, formalizá-lo, resolvê-lo e interpretar os resultados obtidos. Assim, conforme Bassanezi (2009, p. 35):

> Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

A Modelagem Matemática ainda não é um procedimento muito usual na Educação Básica brasileira, daí a importância de trazer a integração de modelos matemáticos às aulas de Física com a expectativa de que o processo de aprendizagem se torne mais otimista em relação à Matemática.

No primeiro capítulo definiremos os conceitos de Modelo Matemático e Modelagem Matemática bem como a sua história no Brasil e no mundo.

No capítulo seguinte introduziremos a possibilidade da Modelagem Matemática ser inserida como metodologia de ensino de Física tendo como ambiente educacional o laboratório didático.

O capítulo III trata de conceitos básicos a serem levados em consideração ao se adentrar num laboratório didático.

Por fim, no capítulo IV, abordaremos propostas de atividades experimentais com o uso da Modelagem Matemática, deixando margens para o leitor modificar, adequar ou expandir os experimentos para uma realidade mais próxima do seu âmbito educacional e cultural.

Capítulo 1

O que é Modelagem Matemática?

A Modelagem Matemática surgiu com a necessidade do homem em dominar o habitat em que vive. Portanto a Modelagem Matemática é muito mais antiga do que nos parece. Desde a criação da roda, as construções das imponentes pirâmides do Egito e as espetaculares obras da engenharia atual, têm-se relatos de modelos matemáticos que contribuíram significativamente para a dominação da espécie humana na Terra. Visto a importância desse assunto para o desenvolvimento da humanidade é necessário um olhar mais preciso para o tema em questão.

Entendendo a modelagem como uma das possibilidades de trabalho nas aulas de Matemática e Física e analisando a idéia de que os projetos de modelagem podem ampliar a competência crítica dos sujeitos envolvidos, é fundamental apresentar a compreensão do significado de modelagem na visão de diferentes e renomados autores.

Para Barbosa (2004, p. 4), modelagem "é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade".

Já para Biembengut e Hein (2000, p. 12), Modelagem Matemática "é o processo que envolve a obtenção de um modelo", de modo que " um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se modelo matemático"

Bassanezi (2004, p. 24) define a Modelagem Matemática da seguinte forma:

> A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

Nessa mesma perspectiva concorda Dale Bean, destacando a idéia do modelo matemático como uma aproximação da realidade. De acordo com Bean (2001, p. 53):

> A essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto a crítica e ao aperfeiçoamento.

Tendo como base as definições de Modelagem Matemática expostas pelos diferentes autores supracitados, notamos, marcadamente, a formulação e a resolução de problemas como uma atividade intrínseca ao processo de modelagem, da qual decorre a preparação cuidadosa de um modelo. Portanto, para usar a modelagem é indispensável à contemplação da problematização e resolução de problemas nas atividades aplicadas em sala de aula.

É importante ressaltar que uma atividade de Modelagem Matemática pode ser desenvolvida em diferentes níveis de ensino, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior. A diferença ocorrerá apenas em alguns aspectos como: os possíveis temas, o nível de aprofundamento dos conhecimentos ou o nível de envolvimento dos alunos nas diferentes etapas do processo. O presente trabalho foca no nível de Ensino Básico, mais especificadamente no Ensino Médio.

Na próxima seção abordaremos o surgimento da Modelagem Matemática no Brasil e no mundo.

1.1 Um pouco de História

Conforme a renomada autora Maria Salett Biembengut[1], as primeiras tentativas de se inserir a Modelagem Matemática no campo da educação

---

[1] Maria Salett Biembengut é Matemática com especialização na UNICAMP, pedagoga, mestra em Educação Matemática pela UNESP, doutora em Engenharia de Produção e Sistemas pela UFSC e pós-doutora em Educação pela USP (2003) e pela University of New Mexico - USA (2009). Na Universidade Regional de Blumenau - FURB atuou de 1990 a 2010 no Departamento de Matemática e nos Programas de Pós-graduação em Educação e em Ensino de Ciências e Matemática; aposentou-se em fevereiro de 2010 e passou a atuar como professora voluntária; e na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS na Faculdade de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (2010-2015). Dedica-se à pesquisa em Modelagem Matemática na Educação desde 1986. Foi Presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM (jan/1992 à jul/1995) e do Comitê Interamericano de Educação Matemática - CIAEM (jul/2003 à jul/2007), membro do IPC Aplicações Modelagem - International Commission on Mathematical Instruction - ICMI (2001-2007). Membro do International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications e idealizadora e fundadora do Centro de Referência em Modelagem Matemática no Ensino - CREMM. (Texto informado pelo autor)

matemática ocorreram no início do século XX, mas foi somente na década de 60 que professores e pesquisadores do cenário internacional começaram a examinar a possibilidade da construção de modelos matemáticos como estratégia de ensino.

Em 1968, na Suíça, ocorre o *Lausanne Symposium,* um dos principais eventos que deram início a debates sobre o ensino da Matemática de forma aplicada e útil, abandonando as aplicações padronizadas e dando ênfase as habilidades dos estudantes em modelar situações do cotidiano.

No ano de 1976, o III Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Kalrsruhe, Alemanha, contou com a participação de dois mil educadores de vários países e trazia, entre diversos temas tratados, a Modelagem Matemática. Essa, enquanto Matemática Aplicada, ganhou espaço e notoriedade, principalmente a partir da Segunda Guerra Mundial, possivelmente por razões econômicas ou militares. Entretanto, pretendemos abordar a Modelagem Matemática em uma perspectiva diferente da proveniente da Matemática Aplicada, almejamos entende-la como uma metodologia de ensino dedicada, principalmente, a Educação Básica.

Em meados dos anos 80, o Ensino da Matemática no Brasil vem acompanhado de novas e promissoras perspectivas para a aprendizagem dessa ciência. A inserção da Modelagem Matemática no Brasil deve-se a um grupo de professores, especialmente, a Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, ambos do Instituto de Matemática Estatística e Ciências da Computação (IMECC), da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), que propagaram esse recurso metodológico para o Ensino da Matemática, através de livros, artigos, palestras, cursos de especialização e orientações de trabalhos de conclusão de mestrado e doutorado. (D'AMBRÓSIO, 1986; BASSANEZI, 1983, 1987). Foi graças a esses precursores que discussões de como se construir um modelo matemático ensinando Matemática simultaneamente permitiram a evolução da Modelagem Matemática no Brasil.

Em 1983, na Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENRO), antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava (FAFIG) e Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Irati (FECLI), iniciou-se a propagação da Modelagem Matemática por meio de cursos de especialização para professores dos três níveis de ensino da Educação Básica. A maneira como a Modelagem Matemática se apresentou rompia a forma tradicional de se ensinar matemática, até então com ênfase na memorização de fórmulas e uso dos algoritmos, trazendo uma revolução na contextualização dos conteúdos.

A UNICENTRO foi a primeira Instituição de Ensino Superior no Estado do Paraná a adotar a proposta de ensino da Modelagem Matemática. Os cursos de especialização ofertados resumiam-se em três fases:

I – Metodologia do Ensino da Matemática e Modelagem no Ensino Fundamental e Modelagem Matemática no Ensino Médio

II – Modelagem no Ensino Médio e História da Matemática

III – Cálculo Diferencial e Integral, Probabilidade e Estatística e Álgebra Linear

As fases I e II focavam mais no Ensino Fundamental e Médio, enquanto que a fase III era destinada à formulação e resolução de problemas envolvendo nível superior. Na fase I os professores-estudantes visitavam os locais onde se desenvolviam as principais atividades econômicas do município de Guarapuava-PR, como fábricas de papel, madeireiras, plantação de maçãs, apicultura, suinocultura, piscicultura, entre outras, com a finalidade de coletar dados para formular e solucionar problemas nas fases II e III.

Apesar de que os cursos de especialização ainda apresentavam um currículo com fragmentos de uma matemática tradicional, a equipe de docentes, formada principalmente por professores do IMECC-UNICAMP, buscava alternativas diferenciadas para o ensino da matemática. Um dos fatos que contribuiu significativamente para a criação de novas estratégias para o ensino da matemática foi a composição do corpo docente dos cursos de especialização, que envolveu professores de diferentes níveis de ensino, além do Superior, fazendo fluir, com a troca de experiências, novas idéias para o ensino da matemática.

No Brasil, ao final da década de 80, ocorre o início da formação de uma massa crítica de professores voltados à pesquisa no campo da Modelagem Matemática e suas vertentes. Os programas de mestrado que se iniciaram a partir dessa década voltados ao Ensino de Matemática, Física, Química e Estatística, contribuíram para uma nova perspectiva de pensamento em relação às áreas de conhecimento e suas formas de aprendizado.

Um dos marcos da Modelagem Matemática como recurso para o ensino da matemática no Ensino Fundamental e Médio, foi a dissertação de mestrado defendida por Dionísio Burak[2] em 1987, na pós-graduação *stricto sensu* da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Campus de Rio Claro, SP.

Atualmente, o número de professores e pesquisadores que relatam suas experiências em eventos de Educação Matemática sobre Modelagem Matemática em sala de aula tem sido cada vez maior. Também tem aumentado significativamente o número de interessados em cursos e publicações voltados para esse tema. Os cursos de Licenciatura em Matemática de muitas universidades do país já ofertam na grade curricular uma disciplina voltada a Modelagem Matemática. Como exemplo, podemos citar o currículo da UFMS que apresenta a

[2] Caso o leitor deseje saber mais sobre a trajetória vivenciada por Burak nos cursos de mestrado, doutorado e pós-doutorado, consulte o Capítulo 1 do livro: Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica / org. Celia Finck Brandt; Dionísio Burak e Tiago Emanuel Kluver, Ponta Grossa, Editora UEPG, 2010 – ISBN 978-85-7798-126-7.

disciplina Modelagem Matemática e Resolução de Problemas presente no 3º período.

Figura 1 - Exemplo de disciplina voltada a Modelagem Matemática no currículo da UFMS.

• 3ª Período

Código	Nome da Disciplina	Carga horária
[04010003102]	CÁLCULO I	68 horas
[04010007666]	POLÍTICAS EDUCACIONAIS	51 horas
[04010003110]	PRÁTICA DE ENSINO I: DIDÁTICA DA MATEMÁTICA	68 horas
[04010003161]	PRÁTICA DE ENSINO II: MODELAGEM MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	68 horas
[04010003072]	VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA I	68 horas

Fonte: https://cpaq.ufms.br/matematica/grade-curricular-matematica/

Desta forma, é cada vez mais vigente o uso da Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica brasileira.

1.2 Definição de Modelo Matemático

Etimologicamente a palavra modelo deriva do latim *modellum*, foma diminutiva de *modus*, que, por sua vez, significa "medida que não pode ser ultrapassada". Já a palavra matemática deriva da palavra grega *matemathike*. *Máthema* significa "compreensão, explicação, ciência, conhecimento, aprendizagem" e *thike* siginifica "arte", portanto a matemática é a "arte de explicar e conhecer os números e as formas geométricas". Dessa forma a essência do significado de Modelo Matemático está relacionada a uma representação simplificada da realidade do ponto de vista do investigador.

É natural que o homem recorra ao uso de modelos para preparar suas ações. Já no contexto da Matemática é comum a utilização de modelos para representar, explicar e compreender situações que podem ou não serem matemáticas.

Segundo Cristofolleti, (1999, p. 47), um Modelo Matemático é:

> Qualquer representação simplificada da realidade ou de um aspecto do mundo real que surja como de interesse ao pesquisador, que possibilite reconstruir a realidade, prever um comportamento, uma transformação ou uma evolução.

Em acordo, Basssanezi (2002, p.19):

> Quando se procura refletir sobre porção da realidade, na tentativa de entender ou de agir sobre ela, o processo implica em selecionar da realidade argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los por meio de um modelo.

Ainda Bassanezi (2004, p.20):

> Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

Conforme Sodré (2007), um modelo matemático é normalmente caracterizado como uma simplificação do mundo real ou alguma forma conveniente de trabalhar com este mundo, mas as características essenciais do mundo real devem estar presentes nesse modelo matemático, de modo que seu comportamento seja igual ou semelhante àquele do sistema modelado.

A partir dessas concepções é possível sintetizar que um modelo matemático é obtido pela extração da essência de uma situação-problema e sua transformação numa linguagem matemática sistematizada, seja através de equações, representações geométricas, diagramas, gráficos ou programas computacionais.

1.3 Definição de Modelagem Matemática

A partir da definição de Modelo Matemático da seção anterior, Modelagem Matemática seria o processo pelo qual a situação problema pode ser expressa usando a linguagem matemática.

Conforme define Iritani (1998, p.29):

> A modelagem matemática consiste na representação matemática do que acontece na natureza a partir de um modelo conceitual, idealizado com base no levantamento e interpretação de dados e observações do sistema real, tendo como objetivo uma melhor compreensão do sistema atual, possibilitando prever situações futuras, algumas vezes passadas, porém sempre buscando direcionar ações de decisão.

Dessa forma, o Modelo Matemático é o que estrutura à solução do problema, enquanto que a Modelagem Matemática é o processo de obtenção da solução do problema.

Tanto a ideia de Modelo quanto a de Modelagem fazem parte do nosso cotidiano e às vezes utilizamos essas ideias de forma inconsciente. Como disse Kruggman (1995, p.77), “somos construtores e provedores de simplificações irreais. Algumas vezes, temos consciência disso e fazemos usos de nossos modelos como metáforas e, em outras, utilizamos de forma inconsciente as metáforas como modelos”. Por exemplo, a vida cotidiana nos permite estimar o tempo para efetuarmos determinado percurso levando em consideração a velocidade e os obstáculos do caminho ou a quantidade correta de ingredientes para fazer determinada receita. Já em outras situações mais complexas, buscamos por alguma expressão matemática, gráficos ou tabelas para criar um modelo que nos permita aplicar dados e obter respostas, como por exemplo, fazer o balanço de uma empresa ou controlar o crescimento populacional de peixes numa piscicultura.

Ao modelar um sistema, reunimos um conjunto de hipóteses e dados que sejam suficientes para dispor de um modelo possível de ser manejado e, nesse processo, usamos de aproximações e simplificações que não venham a afetar o sistema em questão.

Nessa perspectiva, concorda Capra (1983, p.215):

> O que torna a ciência tão bem sucedida é a descoberta de que podemos utilizar aproximações [...], descrever grupos selecionados de fenômenos negligenciando outros que se mostrem menos relevantes [...], explicar muitos fenômenos em termos de poucos e, consequentemente, compreender diferentes

> aspectos da Natureza de forma aproximada sem precisar entender tudo ao mesmo tempo.

Ainda que a Modelagem percorra os passos da pesquisa científica, ou seja, segue as etapas de um projeto de pesquisa, ela não é um método exclusivo dos cientistas. No nosso cotidiano, muitas vezes é utilizado o processo de modelagem. Como disse Machado (2000, p. 30):

> Na ciência ou nas profissões, no universo do conhecimento ou no do trabalho, a ideia de projeto há muito sobressai no círculo restrito das noções verdadeiramente iluminadas, de caráter enciclopédico, transcendendo as fronteiras das disciplinas constituídas e das temáticas supostamente especializadas.

Vejamos, na sequência, algumas definições de Modelagem Matemática presentes na literatura:

> [...] é a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 2002).

> [...] é o processo de escolher características que descrevem adequadamente um problema de origem não matemática, para chegar a uma linguagem matemática [...]; um processo interativo em que o estágio de validação frequentemente leva a diferenças entre as predições baseadas no modelo e na realidade (BERRY E O'SHEA, 1982).

> [...] é o processo que se dá por várias interações, cada uma aperfeiçoando a precedente ate chegar a uma aceitável (MAKI E THOMPSON, 1973).

> [...] é o processo dinâmico no traduzir situações-problema da realidade em problema matemático, interpretar as soluções matemáticas em termos do problema original, utilizar para obtenção e validação de modelos (ERSOY E MOSCARDINI, 1994).

Pelo exposto, a modelagem tem inicio com a reunião de um conjunto de idéias para resolver uma situação-problema e que, ao final do processo, passe por rigorosas verificações e tenha sua validação explícita e pronta para uso.

Portanto, Modelagem Matemática é um método para solucionar alguma situação-problema (seja da área da Matemática ou não) ou para compreender um fenômeno utilizando-se de alguma Teoria Matemática, ou seja, relacionar os dados e hipóteses do fenômeno investigado com alguma estrutura matemática que possibilite uma descrição e uma solução plausível.

No âmbito educacional, a Modelagem Matemática deve ser vista como uma estratégia dinâmica de ensino a intervir nos métodos tradicionais e trazer o cotidiano para a sala de aula através da elaboração de modelos. Dessa forma a Modelagem pode ser interpretada como um ambiente de aprendizagem:

> Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. (BARBOSA, 2001).

A Modelagem Matemática não deve ter como objetivo apenas a aplicação de um conteúdo, e sim a essência da sua origem, o motivo pelo qual é importante estudá-lo e aprendê-lo, compreender o significado que esse conteúdo tem para a vida do estudante. O fluxo de caixa de uma empresa, o controle populacional de peixes em uma piscicultura, a aplicação de cerâmica no piso de uma casa, a transmissão de um vírus por um hospedeiro, a idade de rochas por decaimento radioativo, o movimento de uma carga elétrica na presença de um campo magnético, o lançamento de um satélite artificial, etc, são exemplos de algumas situações onde se é possível construir um modelo matemático e fazer do estudante um cidadão mais consciente da sua capacidade e mais participativo no âmbito educacional e, consequentemente, na sociedade.

1.4 Diferenciação entre Modelo e Modelagem

Agora que já conhecemos a definição de Modelo Matemático e de Modelagem Matemática, vamos diferenciar esses conceitos. Segundo o dicionário online Michaelis modelo é um “objeto que se destina a ser reproduzido por imitação”, enquanto que modelagem é o “ato ou resultado de modelar”. Portanto modelar é fazer o modelo. Em consequência, na Modelagem Matemática, procura-se elaborar um modelo matemático que possa representar a realidade, ou melhor, um fragmento da realidade.

Conforme Almeida e Vertuan (2014, p. 2):

> [...] a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos [...] é o que dá forma à solução do problema e a Modelagem Matemática é a atividade de buscar por esta solução.

Trabalhar com Modelagem Matemática exige dedicação, busca de novos conhecimentos, tanto para o professor quanto para o aluno, além disso, precisa-se aceitar o risco de não conseguir chegar à solução de um problema. Apenas com a experiência, novas possibilidades vão surgindo e trazendo mais facilidade a resolução dos problemas. Em concordância afirma Almeida e Vertuan (2014, p.9):

> É na pratica de tais atividades, no decorrer de experiências, que se dá a familiarização dos alunos e dos professores com modelagem, que se dá o conhecimento em relação a como funciona uma atividade de modelagem, quais são as características dessas atividades e que tipos de problemas podem desencadear uma investigação matemática via modelagem. A partir desses conhecimentos construídos no fazer modelagem que os sujeitos tornam-se cada vez mais autônomos e responsáveis pela condução de atividades dessa natureza.

Usar modelagem exige disposição do professor em entrar num mundo sem respostas prontas, onde muitas perguntas podem surgir, e pode ser que nem todas elas tenham respostas. Nessa metodologia é preciso mudar o foco de que o professor é quem ensina para o foco de que é o aluno quem aprende. Dessa maneira, por meio de atividades cuidadosamente planejadas, é possível favorecer o desenvolvimento de habilidades e competências no estudante, para que ele aprenda e compreenda criticamente sua realidade.

1.5 As etapas da Modelagem Matemática

Sob os auspícios de Biembengut (2016), uma atividade de modelagem matemática envolve todo um processo de perceber o contexto do problema, compreendê-lo e explicá-lo por meio de uma linguagem ou sistemas de símbolos e, em seguida, descrevê-lo e representá-lo externamente traduzindo os resultados para os nossos sentidos.

Biembengut (2016) prescreve os procedimentos da modelagem matemática em três etapas:

1) Percepção e Apreensão

A percepção está relacionada ao reconhecimento e a delimitação da situação-problema, enquanto que a apreensão foca na familiarização do assunto abordado tendo como base um referencial teórico.

2) Compreensão e Explicitação

A fase de compreensão consiste na formulação do problema e no levantamento das hipóteses. A explicitação na formulação de um modelo matemático e na resolução do problema a partir desse modelo.

3) Significação e Expressão

A significação consiste na interpretação da solução do problema e na validação do modelo obtido. A expressão compõe a etapa final: a aceitação do modelo que venha a expressar a situação problema capaz de fazer suposições sobre o passado ou o futuro do fenômeno estudado.

Figura 2 - Etapas da Modelagem Matemática.

Fonte: elaborado pelo autor

Não importa em qual área do conhecimento vamos utilizar a modelagem, seja na Arte, na Biologia, na Matemática ou na Física, as etapas do processo de modelar são as mesmas.

1.5.1 Percepção e Apreensão

Esta fase representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende solucionar. Consiste em perceber ideias, reunir informações, coletar dados, observar eventos e apreendê-los, relacionando-os com o conhecimento que já se dispõe. Dessa forma, ao iniciar o processo de modelagem, a partir da situação-problema, passamos pelas seguintes subfases:

i. Identificar a literatura bibliográfica e os especialistas.

ii. Levantar o maior número possível de dados, informações na literatura disponível, de forma indireta (produções em livros, revistas especializadas, entre outros) e de forma direta (dados experimentais fornecidos por especialistas da área).

iii. Inteirar desses dados e apreender o que se julga relevante ao que se espera aprimorar.

iv. Delimitar melhor a situação-problema, fenômeno ou assunto a tratar.

v. Efetuar uma primeira descrição de termos, conceitos e dados, organizando-os de forma que melhor permitam estudo e análise posterior.

É almejado que essa etapa inicial do processo de modelagem nos seja reveladora sobre o que existe, inspiradora sobre o que ainda podemos saber e motivadora a seguir com esse método para aprimorar e aperfeiçoar algo do que estamos tratando.

1.5.2 Compreensão e Explicitação

Essa segunda fase, impulsionada pela inspiração da fase anterior, nos permite compreender as informações apreendidas, tornando-as cada vez mais perceptíveis e suscetíveis a explicitação através de expressões (aritméticas, gráficas, geométricas, etc.) que levam a solução ou a dedução da solução do problema.

No processo de modelagem, esta fase é a mais desafiadora. Para tanto, passamos pelas seguintes subfases:

i. Examinar de forma criteriosa a situação-problema ou o fenômeno e os respectivos dados obtidos (teóricos e experimentais);

ii. Formular questões, hipóteses ou pressupostos;

iii. Identificar como cada informação, cada dado, encontra-se relaionado a outros dados;

iv. Observar como estas relações fazem sentidos;

v. Confirmar se questões de áreas periféricas interferem ou são coadjuvantes;

vi. Explicitar estas relações em termos teóricos e matemáticos – formular um modelo.

Assim, o objetivo principal dessa etapa do processo de modelagem é chegar a um conjunto de expressões matemáticas que representem a realidade de uma forma simplificada.

1.5.3 Significação e Expressão

Nessa ultima etapa, a significação trata-se da interpretação da solução e ainda da verificação e validação do modelo. O modelo será considerado válido se expressar a situação-problema e, assim, permitir entender e fazer previsões sobre o futuro do objeto em estudo.

Nesta terceira etapa, passamos pelas seguintes subfases:

i. Obter respostas das questões a partir do modelo

ii. Verificar se o modelo é válido ou quão válido pode ser, retornando a fonte dos dados

Segundo Bassanezi (2014), um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram. Um bom modelo é aquele que tem a capacidade de prevenir novos acontecimentos ou relações insuspeitas a respeito do problema estudado. Assim, é fundamental a realização da interpretação dos resultados obtidos pelo processo de modelagem, através da análise da solução da situação-problema e da validação de sua adequação ao nível de realidade aceitável à pesquisa em curso.

1.6 Propostas Governamentais

Começaremos essa seção enfatizando que a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei Federal n.9394/96), no art. 35, estabelece que o Ensino Médio tem por finalidades a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no percurso escolar anterior, a preparação básica para o trabalho e a cidadania, a capacidade de adaptar-se com flexibilidade às novas situações, o desenvolvimento da autonomia intelectual e pensamento crítico e a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos, relacionando teoria e prática.

A matemática é necessária em todas as etapas do nosso cotidiano. Entretanto, é comum ouvirmos que a matemática escolar é desconexa da realidade e que ela apenas traz obstáculos à aprovação.

Contrapondo esse pensamento, a modelagem tem se configurado em um meio de "construir matemática" a partir de situações reais, de problemas enfrentados pelos estudantes dentro do seu ambiente de aprendizagem.

Ao usar modelagem como metodologia de ensino, o professor tem a oportunidade de aproximar a matemática escolar da vivência do aluno e fazer com que ela sirva de ferramenta para a resolução de problemas que afetam a vida do estudante.

Se olharmos para o passado, veremos que muitos dos objetos matemáticos foram desenvolvidos com uma finalidade: resolver problemas. No entanto, com o passar do tempo, esse conhecimento matemático acabou sendo considerado como pronto e acabado, o que, de certa forma, inspirou que se chegasse a uma matemática escolar distante da realidade.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, BRASIL, 1998), propostas elaboradas entre 1980 e 1995, em diversos países, apresentam pontos de convergência, no que diz respeito à resolução de problemas, na exploração da matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas. Os PCN's consideram a matemática um instrumento para compreender o mundo a sua volta e como área do conhecimento que estimula o aluno à curiosidade, ao espírito de investigação e ao desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

A resolução de problemas é destacada nos PCN's como ponto de partida da atividade matemática a fim de discutir caminhos para fazer Matemática na sala de aula, destacando a importância de outras tendências como a Modelagem Matemática.

Conforme o PCN (BRASIL, 1998, p. 26):

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.

Esses documentos apresentam a ideia do conhecimento matemático ser tratado como algo flexível e maleável às inter-relações entre os seus vários conceitos e modos de representação e, também, passível aos problemas de outros campos do conhecimento científico.

O rumo que pode ser dado para a investigação de determinados problemas, bem como as relações com a aprendizagem dos alunos têm sido o foco da Modelagem Matemática. Portanto, a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática são metodologias que devem caminhar juntas, com o mesmo objetivo de ensinar matemática de forma a inserir o indivíduo no mundo das relações sociais.

> Para que ocorram as inserções dos cidadãos no mundo do trabalho, no mundo das relações sociais e no mundo da cultura e para que desenvolvam a crítica diante das questões sociais, é importante que a Matemática desempenhe, no currículo, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (BRASIL, 1988, p. 28).

Como podemos ver, em concordância com os PCN's, o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

A resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, conforme o PCN (BRASIL, 1998, p. 40-41), pode ser resumida nos seguintes princípios:

i. a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

ii. o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

iii. aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;

iv. um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;

v. a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Nessa mesma concepção, conduziremos as atividades de Modelagem Matemática, ou seja, partindo de uma situação problema real para chegar a uma solução para a situação inicial através de um conjunto de procedimentos que nos forneçam informações suficientes para criação de um modelo matemático.

Por esses motivos a Modelagem Matemática tem sido foco de inúmeros projetos de ensino, pesquisa e extensão, cuja divulgação tem se intensificado especialmente em periódicos e anais de eventos científicos ou acadêmicos neste século XXI.

Capítulo 2

Modelagem Matemática como Ferramenta para o Ensino de Física

O Ensino de Física encontra-se em contínuo processo de evolução no que diz respeito a novas técnicas que tragam melhores resultados em termos do aprendizado dos estudantes. Este esforço vem sendo feito em diversos campos do conhecimento, como na Matemática, na Estatística e na Biologia. A Modelagem Matemática vem como uma alternativa para atingir tal resultado.

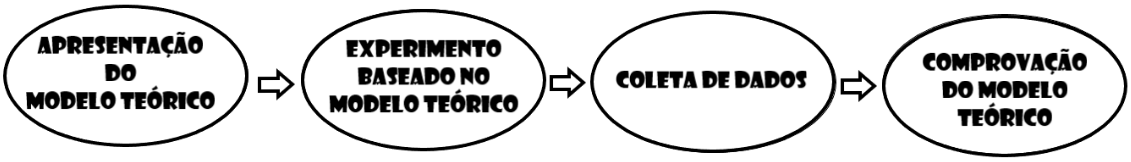
Para se conseguir um melhor desempenho como professor em sala de aula são necessários diversos fatores fundamentais, como o domínio do conteúdo ministrado, uma metodologia de ensino compreensível e uma boa capacidade de comunicação. A metodologia de ensino utilizada necessita passar por inúmeras mudanças até que haja um resultado positivo de assimilação da grande maioria. É fato que buscar um método que uniformize o entendimento de um determinado conteúdo é uma tarefa complexa, difícil de alcançar e suscetível a erros.

Como contribuição para esse processo evolutivo, apresentaremos neste trabalho propostas para o Ensino de Física através da Modelagem Matemática. Para tanto, é necessário que o leitor conheça a diferença entre a estratégia clássica para o Ensino da Física e a estratégia usada pela Modelagem Matemática.

A Física é uma ciência que necessita de um caminho paralelo que una a teoria com a prática, ou seja, a Física Teórica com a Física Experimental. Visto que, grande parte do conhecimento físico tem caráter empírico, é ideal que se utilize do Laboratório de Física como um laboratório didático e que tenha como objetivo proporcionar ao estudante a execução de experimentos, o tratamento dos dados coletados e a interpretação dos resultados.

Na estratégia clássica de ensino da Física através do laboratório didático, já se tem um modelo teórico pré-estabelecido que necessita da verificação experimental por meio das ações empíricas de manuseio, análise de dados e interpretação de resultados. Ou seja, existe um roteiro a ser seguido pelo aluno no qual ele irá verificar a validação do modelo matemático já estabelecido. Isso pode trazer como consequência uma grande incidência de erros, principalmente na comparação dos resultados das medições feitas com os resultados obtidos com a fundamentação teórica.

Figura 3 - Modelo Clássico das etapas da metodologia aplicada num laboratório didático de Física.



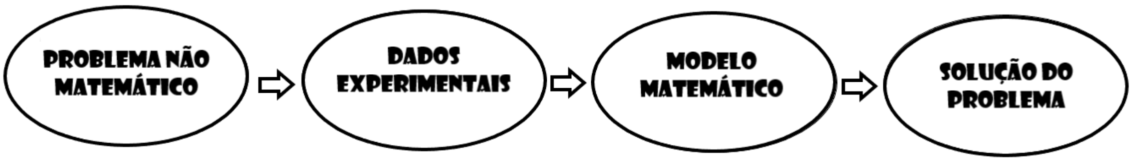
Fonte: elaborado pelo autor

Ao adentrar no laboratório didático, o aluno já recebe um modelo teórico e um roteiro com o passo a passo a seguir a fim de validá-lo. Nesse sentido, em parte dos laboratórios didáticos clássicos, não existe atividade investigativa aberta a pondo de o aluno ter mais liberdade de descobrir, manusear e propor por conta própria atos que facilitem o entendimento relativo à execução do experimento.

Já com o uso da Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa, como veremos mais adiante, as etapas dos experimentos de física se tornam mais flexíveis, com variado grau de abertura, fazendo com que o aluno atinja os objetivos e aprimore seu compromisso com os resultados, dessa forma ele terá um entendimento e desenvolverá um pensamento crítico do significado de um fenômeno físico.

Basicamente, seguindo o processo de Modelagem Matemática proposto por Bassanezi (2009), iniciaremos com um problema não matemático (que no nosso caso será um fenômeno físico), que depois de passar por uma ação empírica, obteremos dados experimentais (experimentação) e chegaremos à solução por meio de um modelo matemático, que deve possuir coerência e apresentar a solução do problema proposto.

Figura 4 - Proposta de Bassanezi (2009) para o uso da Modelagem Matemática.



Fonte: elaborado pelo autor

Portanto, essas quatro etapas são necessárias para o uso da Modelagem Matemática na medida de grandezas físicas e na interpretação dos fenômenos físicos.

Note que nas etapas do laboratório didático clássico (veja figura 3), o Modelo Teórico é que dá início ao processo de investigação com o objetivo de comprová-lo, enquanto que no processo da Modelagem Matemática (veja figura 4) o modelo surgirá apenas na terceira etapa objetivando resolver a situação problema. Ou seja, o aluno será instigado a pensar como as grandes mentes do passado fizeram para formular seus Modelos Teóricos baseados apenas na observação dos fenômenos, na coleta de dados e na comprovação dos resultados através do experimento. Óbvio que nem todos os alunos terão a capacidade de observar um fenômeno, coletar dados e já formular um Modelo Teórico Matemático, cabe ao professor, que já detém o conhecimento prévio do Modelo, apontar o caminho a ser seguido até chegar ao resultado esperado. Nesse sentido, o professor tem o papel de um "guia" para que o aluno não se perca no que para ele é desconhecido.

A Modelagem Matemática Aplicada aos Fenômenos Físicos é composta por possibilidades envolvendo determinadas etapas e determinados sujeitos da educação. No Quadro 1 da página seguinte, relacionamos as possibilidades entre os sujeitos envolvidos e as etapas do processo de três maneiras diferentes conforme a visão dos autores Chaves e Espírito Santo (2001). Cabe ao leitor escolher a maneira de trabalhar que mais se adéqua a sua realidade.

Na possibilidade **A**, o professor é responsável pela escolha do tema, elaboração da situação problema, coleta e simplificação dos dados, dividindo com o aluno a etapa da criação do modelo, resolução e validação do modelo obtido. Na possibilidade **B**, o professor apenas escolhe o tema e elabora a situação problema, cabendo ao aluno a coleta dos dados até a validação do modelo. Por fim, na possibilidade **C**, o aluno assume todas as etapas, desde a escolha do tema até a validação do modelo obtido, considerando-se que todas as etapas são acompanhadas e orientadas pelo professor.

Quadro 1 - Possibilidades de Modelagem Matemática Aplicada aos Fenômenos Físicos conforme Chaves e Espírito Santo (2011).

	ETAPAS DO PROCESSO	POSSIBILIDADE A	POSSIBILIDADE B	POSSIBILIDADE C
1	**Escolha do Tema**	Professor	Professor	Professor e Aluno
2	**Elaboração da Situação Problema**	Professor	Professor	Professor e Aluno
3	**Coleta de Dados**	Professor	Professor e Aluno	Professor e Aluno
4	**Simplificação dos Dados**	Professor	Professor e Aluno	Professor e Aluno
5	**Criação do Modelo**	Professor e Aluno	Professor e Aluno	Professor e Aluno
6	**Resolução do Problema**	Aluno	Aluno	Aluno
7	**Análise Crítica da Solução e Validação**	Professor e Aluno	Professor e Aluno	Professor e Aluno

Fonte: elaborado pelo autor

Note que na etapa 6, o professor deve deixar a resolução do problema mais a cargo do aluno, pois nessa etapa ele já vai estar munido do modelo matemático (uma equação por exemplo) e apenas deve aplicá-lo ao problema a fim de solucioná-lo.

O acompanhamento do professor é imprescindível durante todas as etapas como forma de desenvolver no aluno as características de investigação, como meta para o entendimento do conceito implícito no modelo.

Conforme Chaves e Espírito Santo (2011, p.3):

> Atuar como mediador demanda do professor, dentre outras coisas, que ele coloque os alunos em situações que possam interpretar, explicar, justificar e avaliar o "melhor" modelo; que

> ele tenha ampla compreensão da diversidade de abordagens que os alunos podem adotar e que necessita saber ouvir os alunos em suas interpretações, organizações e explorações de modelos; que ele saiba oferecer representações matemáticas úteis às idéias dos alunos de modo que possam desenvolver suas ideias por meio de conexões com as representações anteriormente utilizadas e que ele domine um amplo espectro de intervenções pedagógicas.

No Capítulo IV do presente trabalho, abordaremos algumas propostas de práticas experimentais com o uso da Modelagem Matemática seguindo as etapas do Quadro 1, mas antes se faz necessário reter alguns conceitos básicos da Física Experimental usados no Laboratório Didático.

Capítulo 3

Ensino de Física Experimental no Laboratório Didático

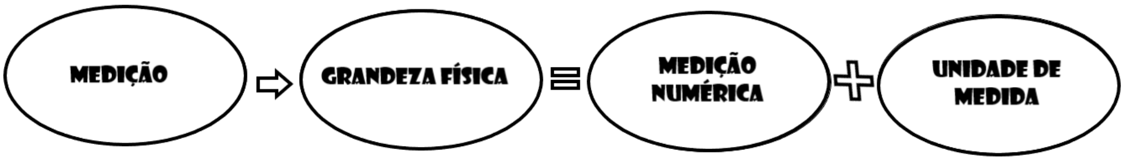
A Física sempre esteve intimamente ligada às práticas experimentais de tal forma que de todas as Ciências Naturais, a Física é a que tem uma relação mais estreita com atividades ligadas ao laboratório. Essa relação é tão intensa que levou à introdução do Laboratório Didático nos cursos de Física, pois se para formular uma Teoria Física quase sempre é necessário um laboratório, então para aprender Física é de se esperar que o uso do laboratório seja indispensável.

O Ensino de Física Experimental no Laboratório Didático constitui uma poderosa ferramenta para o ensino de Ciências. No entanto, antes de adentrar numa prática experimental é necessário saber lidar com processos de medição e seus erros.

3.1 Características das Medidas

O estudo das características das medidas está relacionado com os resultados obtidos na coleta de dados a partir do instrumento de medida utilizado e que são constituídas por: medição, grandeza física, medição numérica e unidade de medida.

Figura 5 - Constituição do processo de medida.



Fonte: elaborado pelo autor

3.2 Medição

Medição é o processo de determinar, experimentalmente, um valor numérico para uma característica de um objeto ou evento, que permita fazer comparações com outros objetos ou eventos. A medição teve início com o ato do ser humano de contar (quantificar as coisas). Associar os números a uma característica de um objeto ou evento deu significado à quantidade, ou seja, algumas necessidades quotidianas, como o número de alimentos a serem consumidos num determinado período, o número de membros de uma família, a temperatura do ambiente, são associadas com um valor numérico a fim de que sejam úteis para a vida do homem.

Conforme define Albertazzi Júnior; Sousa (2008, p.3):

> Medir é o procedimento experimental pelo qual o valor momentâneo de uma grandeza física (mensurando) é determinado como um múltiplo e/ou uma fração de uma unidade, estabelecida por um padrão e reconhecida internacionalmente.

Para um completo entendimento da medição, é necessário conhecer o conceito de *unidade de medida*, *grandeza física* e *mensurando*. Estes entes físicos estão atrelados ao ato de medir e dão o real significado cognitivo a quantidade das coisas, pois a noção humana de "muito ou pouco", "grande ou pequeno", "perto ou longe", apenas tem sentido ao ser comparado com algo pré estabelecido.

3.3 Unidade de Medida

O homem, com o passar do tempo, sempre sentiu a necessidade de medir as coisas. Estamos sempre realizando medições diariamente de uma forma tão natural que nem percebemos. Por muito tempo, cada civilização teve o seu próprio sistema de medição e, geralmente, as unidades de medidas primitivas estavam relacionadas a alguma parte do corpo humano, conhecidas como medidas antropomórficas. Uma das primeiras unidades definidas foi para o comprimento, baseado inicialmente no tamanho dos pés, do polegar, do cúbito (osso maior do antebraço, a ulna), da palma da mão, do braço, ou na distancia do nariz a ponta do dedo da mão (jarda), etc. Por exemplo, ainda nos dias de hoje, quando vamos comprar uma TV perguntamos ao vendedor pelo tamanho da tela em polegadas, que é uma unidade de medida baseada no polegar de um homem adulto. Ou quando ouvimos no noticiário que um avião caiu de uma altura de 300 pés, estamos fazendo uso de uma medição baseada no comprimento do pé de um homem adulto.

Figura 6 - Medidas primitivas com base no corpo humano.

Fonte: Cartilha do Novo Sistema Internacional, Sociedade Brasileira de Metrologia, 2019

Devido à imprecisão dessas unidades de medidas, pois nem todos os pés nem polegares são iguais, foi necessário basear as unidades de medida na estrutura de elementos da Natureza. Foi então que o comprimento passou a ser medido tendo como referência alguma distância no planeta Terra, como a distância entre cidades ou uma fração do comprimento do meridiano terrestre. A massa também passou a ser medida por elementos da Natureza, o quilograma era representado como sendo 1 milésimo de 1 metro cúbico de água.

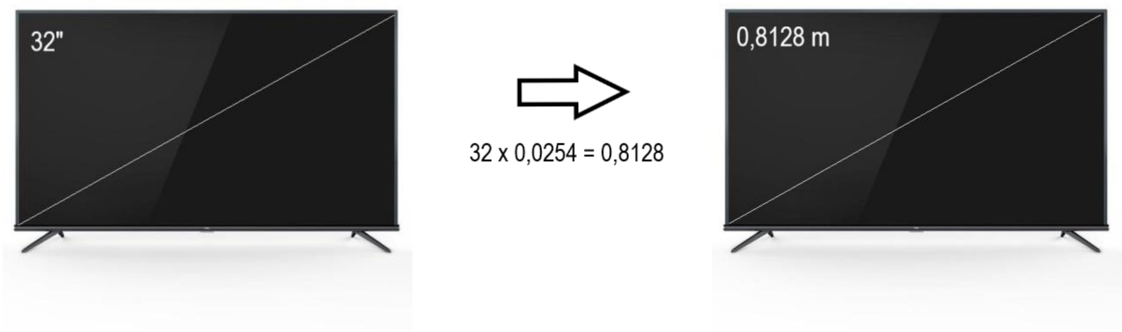
Porém, no início, as unidades de medida não eram padronizadas internacionalmente e isso causava muita confusão na hora de fazer transações comerciais ou acordos econômicos. Foi então que em 1960, na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, decidiram criar um novo Sistema Internacional de Medidas (SI), que foi adotado progressivamente em escala mundial para sanar esses problemas.

Conforme está escrito na Cartilha do Novo Sistema Internacional publicada pela Sociedade Brasileira de Metrologia em conjunto com a Sociedade Brasileira de Física (2019):

> Um sistema prático, coerente e mundialmente aceito nas relações internacionais, no ensino e nas pesquisas científicas, que evolui continuamente para refletir as melhores práticas de medição. O SI é o sistema de unidades adotado pela maioria dos países, conforme pode ser verificado em www.bipm.org/en/about-us/member-states/.

No entanto, as unidades de medidas adotadas por cada país individualmente não deixaram de existir e nem foram proibidas, mas todas elas podem ser convertidas em alguma unidade de medida do Sistema Internacional. Portanto, uma TV de 32 polegadas pode ter o comprimento diagonal da sua tela convertido para metros (SI) sabendo que 1 polegada equivale a 0,0254 metros, logo equivale a 0,8128 metros.

Figura 7 - Exemplo de conversão de unidade usual em unidade oficial SI.



Fonte: elaborado pelo autor

No SI, as unidades são classificadas em unidades de base, unidades suplementares e unidades derivadas.

I. Unidades de base

Unidades de base são entes físicos fundamentais que não derivam de outras unidades. O SI possui sete unidades de base: o metro (comprimento), o kilograma (massa), o segundo (tempo), o ampère (corrente elétrica), o kelvin (temperatura termodinâmica), o mol (quantidade de substância) e a candela (intensidade luminosa).

O valor da maioria das unidades básicas é constante, embora algumas tenham sofrido alterações devido à evolução tecnológica dos instrumentos de medida. Um exemplo clássico é o metro, que até 1983 era definido como 1650763,73 comprimentos de ondas da raia alaranjada da luz da lâmpada de criptônio 86 e que foi substituído pelo comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.

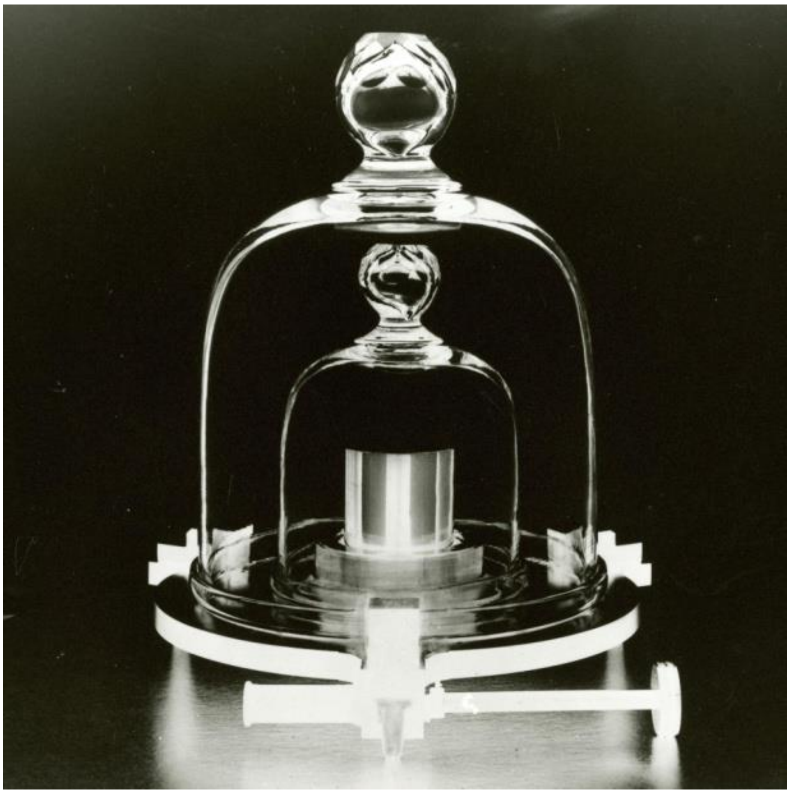
Evidentemente que como em todo processo de medida o valor final está associado a uma incerteza (definiremos erros de medida na seção 3.6), os valores oficiais podem sofrer alterações ao longo do tempo à medida que vão surgindo novas maneiras bem mais precisas de se obter tal unidade. Até mesmo a pureza do material envolvido ou o desgaste do tempo pode corromper uma unidade de medida. Um exemplo típico é o quilograma, que, como vimos anteriormente era definido como sendo 1 milésimo de 1 metro cúbico de água, mas como a pureza da água causava variação na medição, os cientistas substituíram o quilograma pela massa do *International Prototype Kilogram (IPK)*, que trata-se de um cilindro de uma liga de platina e irídio com 39 milímetros de diâmetro e 39 milímetros de altura, depositado no *Bureau International de Poids et Mesures*, na França, desde 1889. Com o passar do tempo, constatou-se que este objeto começou a sofrer desgastes e trazer preocupações a comunidade científica. Este foi um problema sem solução durante um bom tempo, até que, em 2019, o IPK deixou de ser o padrão para o quilograma e foi adotado o resultado de um experimento chamado *Balança de Watt*[3] que relacionou o quilograma a constante de Planck *h*.

Figura 8 - Representação do quilograma (kg) por 1 milésimo de 1 metro cúbico de água, que equivale a 1000 mL de água.

Fonte: elaborada pelo autor

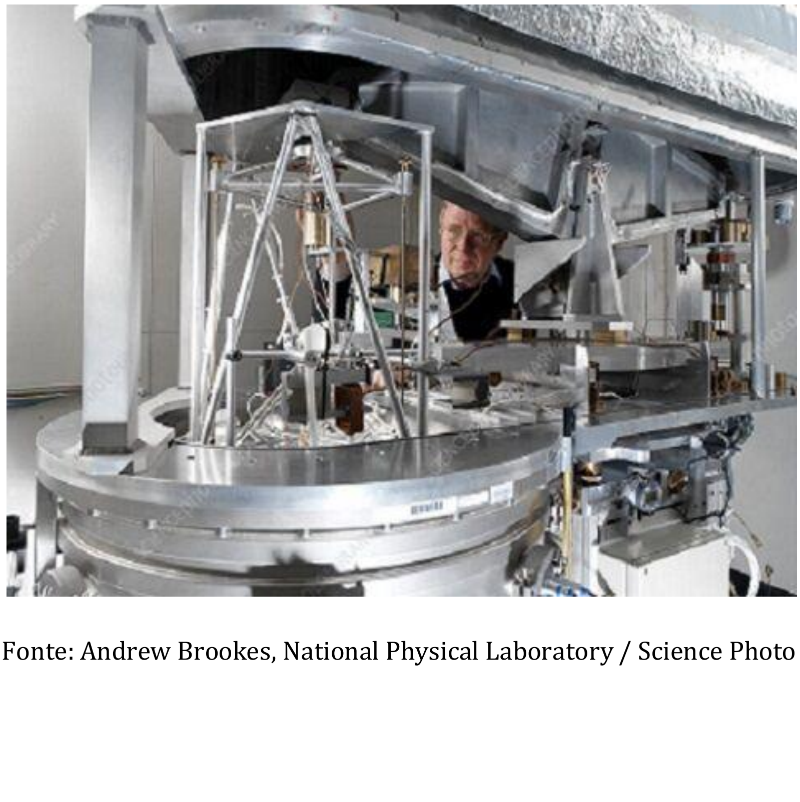
[3] A balança de Watt é um instrumento de pesagem eletromecânico que mede a massa de um objeto com precisão elevada utilizando a força produzida por uma corrente e tensão elétrica. Foi utilizada como instrumento metrológico nas pesquisas que visam definir a unidade de quilograma por meio de constantes fundamentais.

Figura 9 - International Prototype Kilogram (IPK).



Fonte: https://qz.com/1458672/the-history-of-the-international-prototype-kilogram/

Figura 10 - Balança de Watt.



Fonte: Andrew Brookes, National Physical Laboratory / Science Photo

Obviamente que devemos sempre prezar pela qualidade da medida, mas não devemos exagerar na precisão quando a situação em questão não exigir tal rigor. Por exemplo, se você vai ao mercado e pede 1kg de queijo, não importa se lhe for atendido 0,998 kg ou 1,001 kg, pois, nessa ocasião, isso não faz a menor diferença e será muito difícil para o despachante te dar exatamente 1kg de queijo usando um instrumento de medida impreciso como a balança do mercado. Agora se você é contratado pela NASA para construir o espelho do telescópio *James Webb*[4], que necessita de uma superfície nanometricamente perfeita, ai sim faz todo sentido utilizar de instrumentos de medida mais precisos e fazer a medição várias vezes até obter o resultado exigido pelo projeto. Sem falar que o próprio instrumento de medida pode sofrer alterações devido à temperatura e pressão a qual estão submetidos.

Portanto, para fins didáticos, os experimentos sugeridos no próximo capítulo, serão realizados com instrumentos de medida semi-profissionais e os erros serão levados em consideração apenas pelo fato de estarmos fazendo aproximações da realidade.

As unidades do Sistema Internacional para as grandezas físicas básicas bem como as alterações sofridas em 2019 estão listadas no Quadro 2 da página seguinte.

[4] James Webb Space Telescope ou JWST é um projeto de uma missão não tripulada norte-americana da Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço (NASA), com a finalidade de colocar no espaço um observatório para captar a radiação infravermelha. O telescópio deverá observar a formação das primeiras galáxias e estrelas, estudar a evolução das galáxias, ver a produção dos elementos pelas estrelas e ver os processos de formação das estrelas e dos planetas.

Quadro 2 - Unidades de Base do Sistema Internacional de Medidas (SI).

ENTIDADE FÍSICA	SÍMBOLO	DEFINIÇÃO DA UNIDADE	ERRO	ATUALIZAÇÃO SOFRIDA EM 2019
Comprimento	m	*metro* é o comprimento do trajeto percorrido pela luz, no vácuo, durante o intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo	10^{-12}	se define ao fixar o valor numérico da velocidade da luz no vácuo, ***c***, em 299 792 458, quando se expressa a unidade em $m \cdot s^{-1}$, onde o segundo é definido em função da frequência de Césio, Δ_{vCs}
Massa	kg	*quilograma* é a unidade de massa que é igual à massa do *International Prototype Kilogram (IPK)*	$2 \cdot 10^{-9}$	seu valor foi estabelecido fixando-se o valor numérico da constante de Planck, ***h***, exatamente igual a $6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$ quando expresso em unidades do SI, $m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$, que é igual a Joule segundo $(J \cdot s)$
Tempo	s	*segundo* é a duração de 9 192 631 770 períodos de radiação da transição dos níveis hiperfinos do átomo de Césio 133	10^{-15}	foi reescrita ao se fixar o valor numérico da frequência de transição hiperfina do estado fundamental não perturbado do átomo de Césio 133, Δ_{vCs}, em 9 192 631 770, quando se expressa a unidade em Hz, igual a s^{-1}
Intensidade de Corrente Elétrica	A	*Ampère* é definido como a intensidade de uma corrente elétrica constante que produz uma força atrativa de $2 \cdot 10^{-7}$ Newtons por metro de comprimento entre dois fios condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de secção	$9 \cdot 10^{-8}$	seu valor foi estabelecido fixando-se o valor numérico da carga elementar, ***e***, exatamente igual a $1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ quando se expressa a unidade em coulombs (C)

		circular desprezível, colocados a um metro de distância entre si, no vácuo		
Temperatura	K	*Kelvin* é a fração 1/273,16 da temperatura do ponto tríplice da água	$3 \cdot 10^{-1}$	seu valor foi estabelecido fixando-se o valor numérico da constante de Boltzmann exatamente igual a $1{,}380\ 649 \cdot 10^{-23}$ quando expresso em unidades do SI, $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$,que é igual a $J \cdot K^{-1}$
Intensidade Luminosa	cd	*candela* é a intensidade luminosa, numa direção dada, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência $540 \cdot 10^{12}$ Hertz e cuja intensidade energética naquela direção é 1/683 Watt por esferorradiano.	10^{-4}	foi redefinida ao fixar o valor numérico da eficácia luminosa da radiação monocromática de frequência $540 \cdot 10^{12}\ Hz$, K_{cd}, em 683, quando se expressa a unidade em $lm \cdot W^{-1}$, igual a $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-3}$ onde o kilograma, o metro e o segundo são definidos em função de $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{c}$ e Δ_{vCs}
Quantidade de Matéria	mol	*mol* é a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quantos átomos existem em 0,012 quilogramas de Carbono 12	$2 \cdot 10^{-9}$	mol continua sendo a unidade de quantidade de substância de uma entidade elementar especificada, que pode ser um átomo, molécula, íon, elétron, qualquer outra partícula ou um grupo especificado de tais partículas, mas seu valor será estabelecido fixando-se o valor numérico da Constante de Avogadro N_A exatamente igual a $6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$ quando expresso em unidades do SI, mol^{-1}

Fonte: elaborado pelo autor

II. Unidades suplementares

Para complementar as unidades base, são acrescentadas mais duas unidades de natureza matemática, que são definidas como unidades suplementares: a unidade de ângulo plano *radiano* (rad) e a unidade de ângulo sólido *esterradiano* (sr).

III. Unidades derivadas

Unidade derivada é qualquer outra unidade que seja resultado da combinação das unidades de base. Como exemplo, vamos citar a unidade SI para força, cujo símbolo é o Newton (N) e tem como combinação de unidades de base o *quilograma*, o *metro* e o *segundo*.

$$N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Uma outra unidade de medida derivada muito utilizada na Física é a unidade de Trabalho ou Energia, o Joule (J). O Joule é a combinação da unidade de força (N) com a de comprimento (m), ou seja,

$$J = N \cdot m$$

$$J = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m$$

$$J = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

3.4 Grandeza Física

Grandezas Físicas são propriedades de um objeto ou evento, sujeitas a um processo de medição, objetivando facilitar o estudo e a descrição dos fenômenos físicos. É essencial que essas propriedades sejam expressas quantitativamente.

As propriedades físicas podem ser classificadas em intensivas ou extensivas:

I. Propriedades intensivas: são aquelas que não dependem da quantidade da amostra, ou seja, da massa. A *massa específica*[5] (μ) de uma substância, por exemplo, é uma propriedade intensiva, já que a massa específica de um cubo de gelo e de um *iceberg* é a mesma (0,92 g/cm^3, em temperaturas abaixo de 0°C ao nível do mar), claro que levando em consideração que o cubo de gelo tenha a mesma composição do *iceberg*.

II. Propriedades extensivas: são aquelas que dependem da massa (extensão) da amostra. O *volume* (v) de uma substância, por exemplo, é uma propriedade extensiva, já que o volume ocupado por 1kg de isopor é bem maior do que o volume de 1g desse mesmo material.

As grandezas físicas são classificadas em escalares ou vetoriais:

I. Grandezas escalares: são representadas por uma quantidade numérica (que representa seu tamanho, sua intensidade ou módulo) e uma referência (unidade de medida). Portanto, admitindo G uma grandeza física escalar qualquer e $U(G)$ sua unidade de medida correspondente, a quantidade numérica $n(G)$ é o resultado da comparação de G com a unidade U e é definida como a medição da grandeza G.

$$G = n(G)\, U(G)$$

---

[5] A massa específica (μ) de uma substância é definida como sendo a razão entre a massa total da amostra dessa única substância e o volume por ela ocupado $\left(\mu = \frac{m}{v}\right)$. O leitor deve tomar o cuidado para não confundir massa específica (μ) com densidade (d). A densidade de um objeto é definida como sendo a razão entre a massa do objeto e o volume por ele ocupado $\left(d = \frac{m}{v}\right)$. Apesar das definições serem parecidas, no cálculo da densidade você pode considerar partes vazias desse objeto, ou seja, ele não precisa ser homogêneo, enquanto que no cálculo da massa específica essa peculiaridade deve ser levada em consideração.

Por exemplo, vejamos a medida de uma massa (m) de 65 kg:

$$m = 65\ kg$$

$$\begin{cases} G \rightarrow m \\ n(G) \rightarrow 65 \\ U(G) \rightarrow kg \end{cases}$$

São exemplos de grandezas escalares: tempo, temperatura, volume, massa, densidade, massa específica, quantidade de calor, comprimento, energia, etc.

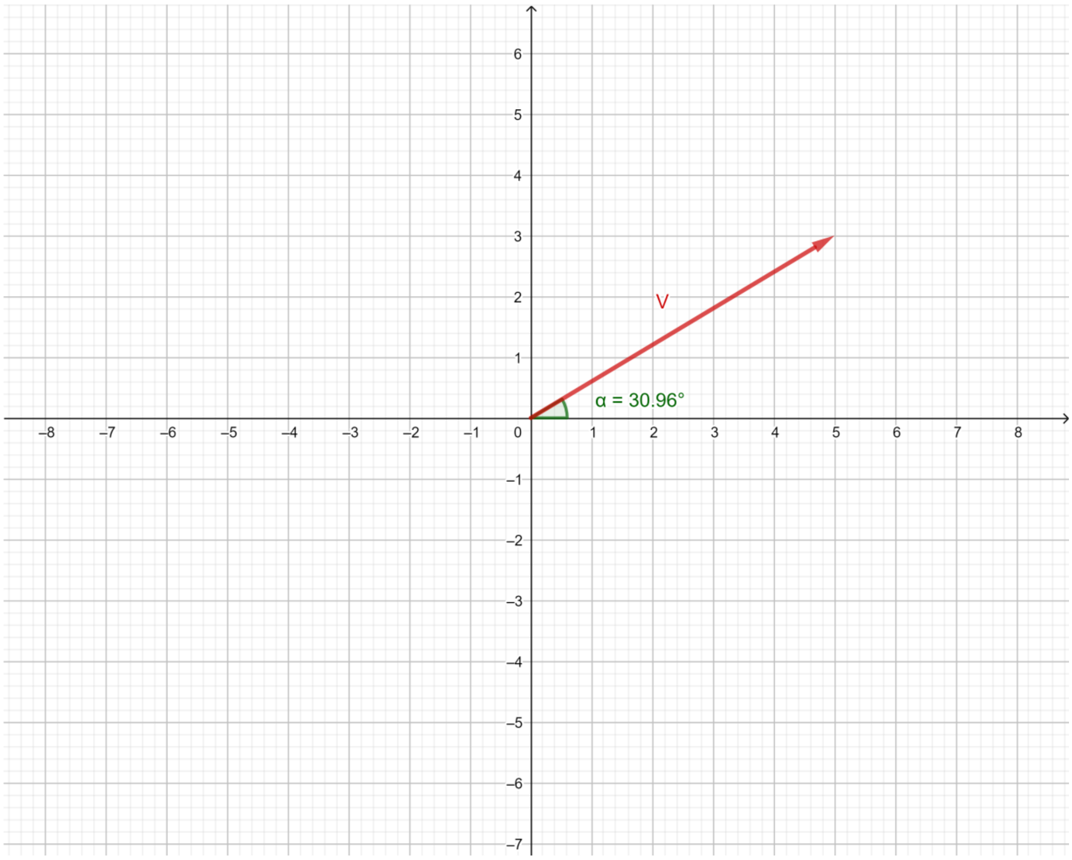
II. Grandezas vetoriais: são representadas por uma quantidade numérica, uma unidade de medida e, além disso, por uma orientação (direção e sentido). Para representar a direção e o sentido da grandeza, usamos um elemento matemático chamado de *vetor*[6]. Geometricamente, representamos um vetor por um segmento de reta orientado (uma seta) no espaço. Mas para se colocar direção e sentido num vetor é necessário um sistema de referência. Um sistema de referência muito conhecido da matemática para representar vetores em duas dimensões é o Plano Cartesiano. Um plano cartesiano é formado por duas retas numéricas orientadas, perpendiculares entre si, onde o ponto de intersecção entre as retas é chamado de origem (O) e é nele que se encontra o zero de ambas as retas. A reta vertical é chamada ordenada (comumente chamada de eixo y) e a horizontal é chamada abscissa (comumente chamada de eixo x). O vetor é desenhado no plano cartesiano a partir da Origem (O) e o seu tamanho representa o seu módulo. A orientação do vetor é o ângulo formado pelo vetor e o eixo das abscissas. Esse ângulo pode variar entre 0° e 360°, sendo sua contagem crescente feita no sentido anti-horário. Vejamos o exemplo de um vetor representado no plano cartesiano (figura 11). Em vermelho temos o vetor (o comprimento representa o seu módulo), em verde temos sua direção (30,96°) e a ponta da seta representa o sentido do vetor. Vale lembrar que o plano cartesiano (a malha cinza representada na figura com as duas retas: horizontal (x) e vertical (y) é infinito, sendo possível a representação de apenas uma pequena parte dele.

São exemplos de grandezas vetoriais: velocidade, aceleração, força, deslocamento, empuxo, campo elétrico, campo magnético, força peso, etc.

---

[6] De uma forma bem concisa, vetor é um segmento de reta orientado utilizado para representar uma grandeza física vetorial. Podemos representá-lo geometricamente como uma seta no espaço.

Figura 11 - Representação de um vetor no Plano Cartesiano.



Fonte: elaborado pelo autor através do *software* GeoGebra

3.5 Mensurando

Segundo o Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM-2012, item 2.3, p.16), *mensurando* é a grandeza que se pretende medir. O comprimento de uma barra de aço, a temperatura de um líquido, a diferença de potencial entre os terminais de uma bateria, são exemplos de grandezas que podem ser medidas.

Além do conceito de mensurando, o VIM-2012 (item 2.3, p.16) trás notas importantes a respeito dos processos de medição e alguns exemplos de mensurando:

NOTA 1: A especificação dum mensurando requer o conhecimento da **natureza da grandeza** e a descrição do estado do fenômeno, do corpo ou da substância da qual a grandeza é uma propriedade, incluindo qualquer constituinte relevante e as entidades químicas envolvidas.

NOTA 2: Na 2ª edição do VIM e na IEC 60050-300:2001, o mensurando é definido como a "grandeza particular submetida à medição". Na 2ª edição do Brasil, a grandeza era adjetivada de específica, em vez de particular.

NOTA 3: A **medição**, incluindo o **sistema de medição** e as condições sob as quais ela é realizada, pode modificar o fenômeno, o corpo ou a substância, de modo que a grandeza que está sendo medida pode diferir do mensurando como ele foi definido. Neste caso, é necessária uma **correção** adequada.

EXEMPLO 1: A diferença de potencial entre os terminais duma bateria pode diminuir quando na realização da medição é utilizado um voltímetro com uma condutância interna significativa. A diferença de potencial em circuito aberto pode ser calculada a partir das resistências internas da bateria e do voltímetro.

EXEMPLO 2: O comprimento duma haste de aço em equilíbrio com a temperatura ambiente de 23 °C será diferente do comprimento à temperatura especificada de 20 °C, que é o mensurando. Neste caso, é necessária uma correção.

Conforme a NOTA 3 do VIM-2012, podemos concluir que as condições sob as quais a medição é realizada pode modificar o que está sendo medido. Por essa razão as especificações de um mensurando podem requerer informações de outras grandezas, as chamadas grandezas de influência, como tempo, umidade do ar, temperatura ou pressão, por exemplo.

Para realizar uma medição de forma adequada, precisamos ter conhecimento de se a grandeza a ser mensurada se dilata com a mudança de temperatura, se muda suas propriedades com a umidade relativa do ar, se evapora rapidamente, se interage com alguma outra força não desejada, enfim, é necessário conhecer as propriedades do mensurando.

Figura 12 - Influência da temperatura no processo de medição.

Fonte: Sociedade Brasileira de Metrologia
(http://bom.org.br:8080/jspui/bitstream/2050011876/242/1/02%20Mensurando%20.pdf)

Sendo assim, o mensurando depende de várias informações contidas no processo de medição, que podem ou não trazer uma incerteza significativa para o grau de exatidão requerido no seu trabalho. Conforme o Guia para a Expressão de Incerteza de Medição (GUN, BARATTO, 2012, p.49):

> Assim, na medida em que deixa margem a interpretação, a definição incompleta do mensurando introduz, na incerteza do resultado de uma medição, um componente de incerteza que pode ou não ser significativo para a exatidão requerida da medição.

Para fortalecer a importância da medição no desenvolvimento da ciência experimental, citemos uma famosa frase do físico e matemático William Thomson[7] (1824 – 1907):

[7] William Thomson, também conhecido como Lord Kelvin, foi um físico, matemático e engenheiro britânico, nascido em 26 de junho de 1824 em Belfast, Irlanda do Norte. Aos 68 anos de idade, recebeu o título de nobreza de Primeiro Barão Kelvin de Largs, pela grande importância de seu trabalho científico. Morreu em 17 de dezembro de 1907 em Ayrshire.

> "O conhecimento amplo e satisfatório sobre um processo ou fenômeno somente existirá quando for possível medi-lo e expressá-lo através de números"

3.6 Erros

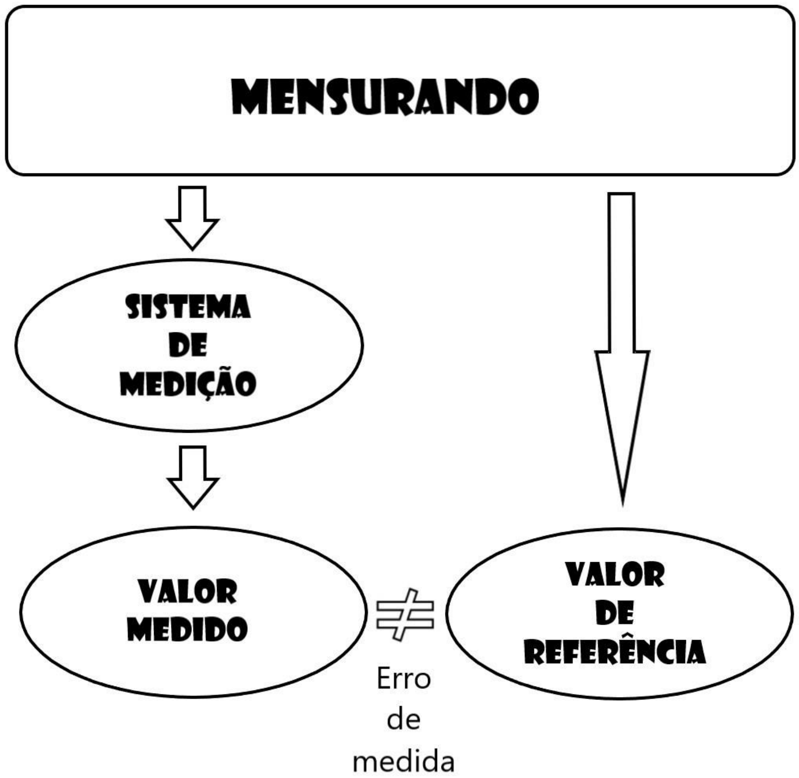
O processo de medição de uma grandeza física é um conjunto de etapas que visam obter resultados numéricos. Por mais cuidadosas que sejam realizadas as medidas, ocorrem desvios nos resultados, sendo quase que impossível obter um valor absolutamente verdadeiro que descreva por completo a grandeza. Esses desvios nos resultados são definidos como erros ou incertezas.

Ao se considerar dados obtidos experimentalmente, suas incertezas são tratadas como erros de medidas, enquanto que as ações relativas à execução do experimento, assim como a análise dos resultados que não estão de acordo com a teoria, são tratadas como erros de ação e erros de investigação, respectivamente.

No laboratório didático de física, o ato de medir inicia-se pelas ações, com o preparo do experimento por meio da montagem adequada ao problema proposto. Nessa etapa é comum que ocorra erros de ação devido a falsas interpretações da teoria e, consequentemente, falhas na montagem do experimento, que produzirá dados equivocados. Em seguida, os dados obtidos são submetidos a processos matemáticos estatísticos, obtendo-se o intervalo de incerteza, e não um valor único, supostamente verdadeiro para o mensurando. Essa incerteza é o que denominamos de erro de medida.

Por ser um conceito idealizado, os erros de medidas não podem ser conhecidos com exatidão. O que podemos fazer é estimar o erro de medida através da diferença entre o valor medido de uma grandeza e um valor de referência convencionado. Se o erro de medida fosse perfeitamente conhecido, este poderia ser corrigido e sua influência completamente anulada da medição.

Figura 13 - Erro de medida.



Fonte: elaborado pelo autor

Por fim, os dados são analisados e confrontados com o modelo teórico, de modo a obter coerência na medida. Nessas ações, estão infiltrados os *erros de investigção*, que podem ocasionar análises diferentes do contexto da aprendizagem por meio do experimento.

Figura 14 - Tipos de erros na execução do experimento.

Fonte: elaborado pelo autor

Evidentemente que a teoria dos erros é mais abrangente, porém, para este trabalho é suficiente delimitar essa investigação às ações que comumente comprometem o processo de ensino dos conteúdos experimentais de física, a fim de se obter resultados práticos.

3.7 Erros de Medida

O valor indicado por um instrumento de medida muitas vezes é tido como uma verdade absoluta e muitas pessoas crêem que a medida exibida no instrumento é de fato o valor verdadeiro do mensurando. Porém no mundo real, não é isso que realmente acontece, pois em uma medição existem imperfeições que dão origem a um erro no resultado da medição. Esses erros podem ocorrer devido às imperfeições no sistema de medição, limitação de quem está executando a operação ou influências das condições ambientais, tais como a temperatura e a pressão local.

O VIM – 2012 (item 2.16, p.21) define *erro de medida* da seguinte forma:

> Diferença entre o **valor medido** duma **grandeza** e um **valor de referência**.

Além da definição, o VIM – 2012 (item 2.16, p.21) trás notas importantes a respeito do erro de medida:

NOTA 1: O conceito de "erro de medição" pode ser utilizado:

a) quando existe um único valor de referência, o que ocorre se uma **calibração** for realizada por meio dum **padrão de medição** com um **valor medido** cuja **incerteza de medição** é desprezável, ou se um **valor convencional** for fornecido; nestes casos, o erro de medição é conhecido;

b) caso se suponha que um **mensurando** é representado por um único **valor verdadeiro** ou um conjunto de valores verdadeiros de amplitude desprezável; neste caso, o erro de medição é desconhecido.

NOTA 2: Não se deve confundir erro de medição com erro de produção ou erro humano.

Segundo o VIM – 2012 (introdução, p.x), o erro de medida, tradicionalmente, possui duas componentes, a componente aleatória e a componente sistemática:

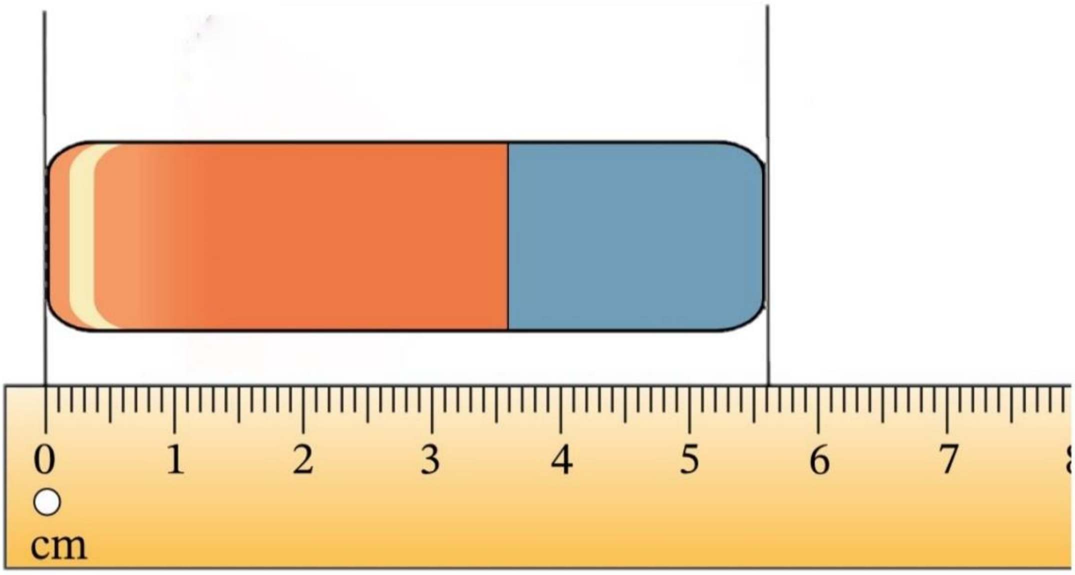
> O objetivo da medição na Abordagem de Erro é determinar uma estimativa do valor verdadeiro que esteja tão próxima quanto possível deste valor verdadeiro único. O desvio do valor verdadeiro é composto de erros aleatórios e sistemáticos. Os dois tipos de erros, supostos como sendo sempre distinguíveis, têm que ser tratados diferentemente. Nenhuma regra pode ser estabelecida quanto à combinação dos mesmos para se chegar ao erro total caracterizando um determinado resultado de medição, tido geralmente como a estimativa.

Uma das técnicas adotadas para se obter uma medida num determinado experimento é a medição repetida. Trata-se de realizar várias vezes a medição de uma grandeza, de forma que seus valores numéricos orbitem em torno de um valor fixo, permitindo, através de cálculos estatísticos, a obtenção de uma medição confiável. Esse tipo de medição pode gerar erros aleatórios.

Os erros aleatórios são variações aleatórias no resultado das medições repetidas que não se tem como controlar ou que, de certa forma, não foram monitoradas. Um operador, por mais cauteloso que seja, irá obter várias medições diferentes para uma mesma grandeza física. Isso se deve a vários fatores de flutuações que podem estar relacionados a causas identificáveis ou, na maioria das vezes, indeterminadas, podendo o erro ser submetido a um tratamento estatístico (teoria dos erros) para uma melhor exatidão do valor da grandeza estudada.

Como exemplo, consideremos um operador que deseja fazer uma medida do comprimento de um objeto com uma régua metálica (figura 15):

Figura 15 - Medição de um objeto com uma régua metálica e os erros aleatórios envolvidos.



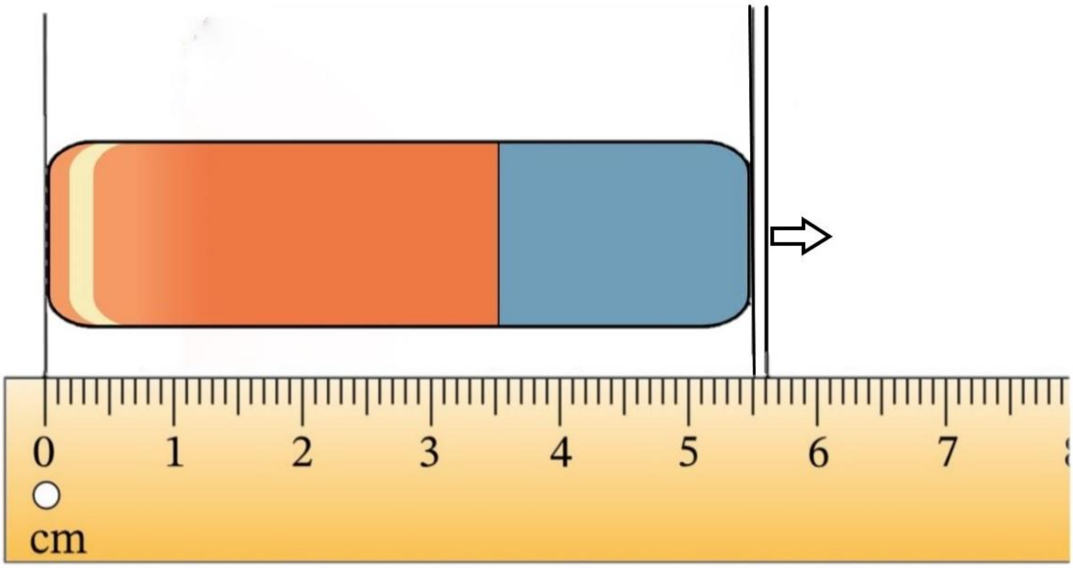
Fonte: elaborado pelo autor

Podemos perceber que a medida encontra-se entre 5,6 cm e 5,7 cm. Ao se aumentar o número de medições, teremos uma variedade de valores tais como: 5,61 cm; 5,60 cm; 5,65 cm; 5,68 cm; 5,63 cm... de tal forma que essas medidas formam um conjunto aleatório de dados que podem subestimar ou sobre-estimar o valor do comprimento. Ao aumentar cada vez mais o número de dados de leitura, o erro aleatório diminui, porém jamais poderá ser anulado completamente.

Já os erros sistemáticos são ocorrências no valor da medida da grandeza física que, na maioria das vezes, são de causas identificáveis e originadas por: erro do operador, deficiência na calibragem do equipamento ou influência do ambiente. Nesse tipo de erro o valor da amplitude varia sempre num mesmo sentido: ou para mais ou para menos. Portanto, diferentemente do erro aleatório, não é possível fazer um tratamento estatístico dos erros sistemáticos.

Como exemplo, consideremos que a régua metálica do nosso operador sofra uma dilatação térmica linear de 1mm (figura 16). Logo todas as medições do objeto estarão deslocadas 1mm para menos, ou seja, 5,51 cm; 5,50 cm; 5,55 cm; 5,58 cm; 5,53 cm...

Figura 16 - Dilatação térmica da régua metálica gerando erros sistemáticos.



Fonte: elaborado pelo autor

Os erros sistemáticos podem ser identificados e corrigidos.

Vejamos como o VIM – 2012 (item 2.19, p.22 e item 2.17, p.21) define erros aleatórios e erros sistemáticos:

2.19

erro aleatório

Componente do **erro de medição** que, em **medições repetidas**, varia de maneira imprevisível.

NOTA 1: O **valor de referência** para um erro aleatório é a média que resultaria dum número infinito de medições repetidas do mesmo **mensurando**.

NOTA 2: Os erros aleatórios dum conjunto de medições repetidas formam uma distribuição que pode ser resumida por sua esperança matemática ou valor esperado, o qual é geralmente assumido como sendo zero, e por sua variância.

NOTA 3: O erro aleatório é igual à diferença entre o erro de medição e o **erro sistemático**.

2.17

erro sistemático

Componente do **erro de medição** que, em **medições repetidas**, permanece constante ou varia de maneira previsível.

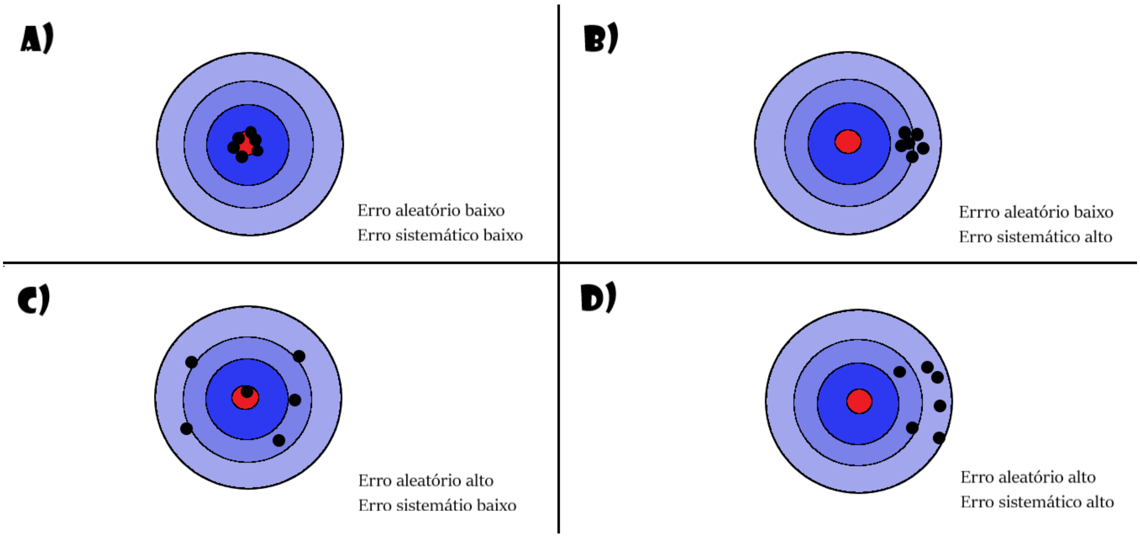
NOTA 1: Um **valor de referência** para um erro sistemático é um **valor verdadeiro**, ou um **valor medido** dum **padrão** com **incerteza de medição** desprezável, ou um **valor convencional**.

NOTA 2: O erro sistemático e suas causas podem ser conhecidos ou desconhecidos. Pode-se aplicar uma **correção** para compensar um erro sistemático conhecido.

NOTA 3: O erro sistemático é igual à diferença entre o erro de medição e o erro **aleatório.**

Nos gráficos da Figura 17, podemos fazer uma melhor distinção entre erros aleatórios e erros sistemáticos. Imagine que o ponto vermelho da figura seja o alvo da medida a ser obtido de uma determinada grandeza física, enquanto que os pontos pretos são os valores obtidos pelo operador:

Figura 17 - Erros sistemáticos e aleatórios em relação a um alvo de medida.



Fonte: elaborado pelo autor

Podemos notar que em:

A) Os pontos estão concentrados no alvo de medida, proporcionando erros aleatórios baixos e erros sistemáticos baixos, sendo esta situação a ideal para obtenção de dados experimentais.

B) Os pontos estão concentrados, mas não em torno do alvo da medida, ou seja, há um deslocamento do conjunto de valores das medidas em relação ao alvo devido a uma alta existência de erros sistemáticos.

C) Os pontos estão bastante dispersos em relação ao alvo de medida, configurando erros aleatórios altos.

D) Os pontos estão dispersos em relação ao alvo de medida e, além disso, apresentam um deslocamento para direita, caracterizando erros aleatórios e sistemáticos altos.

O Quadro 3 resume as principais características dos erros aleatórios e sistemáticos:

Quadro 3 - Características dos erros.

Características dos Erros	
Erros Aleatórios	• natureza indeterminada • dispersão simétrica de baixa amplitude • são detectados pela repetição da medição • nunca podem ser anulados completamente • são minimizados por meio de cálculos estatísticos • afetam a precisão dos dados
Erros Sistemáticos	• a causa pode ser determinada • a dispersão é tendenciosa • não pode ser detectado pela repetição da experiência • sua análise estatística é inválida • podem ser eliminados • afetam a exatidão dos dados

Fonte: elaborado pelo autor

Obviamente que num processo de medição realizado por alunos inexperientes podem ocorrer erros grosseiros, geralmente decorrentes do mau uso ou do mau funcionamento dos instrumentos utilizados na medição. Pode ocorrer, por exemplo, uma leitura errada das escalas, má calibração dos equipamentos, ou dano ao instrumento utilizado na medição. Esse tipo de erro é totalmente imprevisível, mas pode ser facilmente detectável pelo professor tutor e corrigido.

Portanto, dependendo da metodologia aplicada na medição, podem ocorrer altos índices de erros de medidas, erros de ação ou erros de investigação, que trará como conseqüência a dificuldade dos alunos de entender os conceitos físicos e não conseguir interpretá-los corretamente. Dessa forma, é cabível ao professor vistoriar os processos de medição a fim de minimizar ao máximo os erros de medição.

No capítulo seguinte abordaremos alguns experimentos que podem ser aplicados no Ensino Básico com aparatos simples e instrumentos semi profissionais.

Capítulo 4

Práticas Experimentais com o uso da Modelagem Matemática

A proposta de Modelagem Matemática adotada nesse trabalho, conforme especificado no Capítulo 2, utilizará as ações de Bassanezi (2009), Chaves e Espírito Santo (2001), pelo fato de suas concepções possibilitarem uma associação com as práticas experimentais (ver Figura 4 e Quadro 1).

Cada prática experimental aqui apresentada será introduzida por uma breve apresentação da teoria física envolvida. Lembrando que esse estudo deve ser feito apenas pelo professor para que ele possa nortear os alunos a criar o modelo matemático.

O professor da disciplina tem plena liberdade para alterar as práticas experimentais aqui apresentadas, adaptando-as a realidade da comunidade escolar, levando em consideração a história, a cultura e a economia local. E caso nenhuma das práticas experimentais seja possível de ser realizada na sua comunidade escolar, que elas sirvam de inspiração para que tantas outras sejam criadas.

Para a fase de experimentação, eliminamos os roteiros pré-definidos das execuções pelo motivo de que o passo inicial é apresentar ao aluno um modelo teórico, obrigando-o a uma comprovação, o que contradiz a estratégia da Modelagem Matemática para o ensino, cujo direcionamento é obter um modelo teórico e resolver uma situação problema como objetivo final.

Sendo assim, adotamos níveis de estruturação de ensino, de modo que as intervenções do professor sejam mínimas, visando uma evolução na autonomia dos alunos.

Basicamente, as ações realizadas serão: a escolha do tema, a elaboração da situação problema, a montagem do experimento e a coleta dos dados, a simplificação dos dados, a criação do modelo teórico matemático, a resolução do problema e a análise crítica da solução.

Figura 18 - Etapas da Modelagem Matemática.

Fonte: elaborado pelo autor

Dessa forma, para associar a abordagem da Modelagem Matemática com o Laboratório Didático, seguiremos as seguintes etapas:

1- Escolha do Tema: um tema relacionado à Física deve ser escolhido;

2- Situação Problema: um problema real relacionado ao tema escolhido deve ser elaborado;

3- Coleta dos dados: um experimento deve ser montado para a coleta dos dados ou a própria observação do fenômeno com os instrumentos de medida corretos seja suficiente para coletar dados;

4- Simplificação dos dados: os dados obtidos na etapa anterior devem receber um tratamento estatístico ou uma aproximação para alguma função matemática conhecida;

5- Criação do modelo matemático: nessa fase atingimos o objetivo da criação de um modelo geométrico, gráfico ou funcional do fenômeno estudado;

6- Resolução do problema: retornamos a etapa 2 para solucionar o problema;

7- Análise crítica da solução: finalizamos com as considerações finais a respeito do que foi aprendido com o experimento.

Portanto, essas 7 etapas da Modelagem Matemática tornam o Laboratório Didático um ambiente de ensino gerador de aprendizagem de conceitos físicos bem diferenciado do modelo tradicionalmente adotado.

O aluno aqui é visto como um cientista e é apresentado ao fenômeno a ser estudado por meio de um problema de investigação, de modo que seus conhecimentos do cotidiano se choquem com os conceitos de investigação.

O professor é essencial, não só para que o aluno aprenda o conteúdo teórico de Física, mas para que ele conheça o modo como se realiza a prática experimental, dando a ele uma visão inicial do que se poderia chamar de método cientifico.

4.1 O Experimento da Lei de Hooke

Robert Hooke (1635-1703) foi um cientista experimental inglês, contemporâneo de Isaac Newton[8], conhecido por ser um exímio inventor e um estudioso nato, uma das figuras-chave da revolução científica. A ele atribui-se a invenção do barômetro, do relógio portátil de corda, a primeira teoria sobre as propriedades elásticas da matéria, descreveu a estrutura celular das cortiças e publicou o livro *Micrographia*[9] sobre suas descobertas realizando análises dos efeitos do prisma, esferas e lâminas com a utilização do microscópio.

Pesquisador em elasticidade dos fluidos e um estudioso da gravitação universal, Robert Hooke foi eleito e nomeado curador de experiências da *Royal Society*[10]. Foi também professor de geometria em *Greshan College*, na Inglaterra.

Apesar dos encontros impetuosos entre os cientistas Robert Hooke e Isaac Newton e das diversas e controversas opiniões acerca da relação de inimizade entre eles, é consenso na comunidade científica que ambos contribuíram de forma imensurável para a Revolução Científica.

---

[8] Sir Isaac Newton (1642-1727) foi um matemático, físico, astrônomo, teólogo e autor inglês (descrito em seus dias como um "filósofo natural") que é amplamente reconhecido como um dos cientistas mais influentes de todos os tempos e como uma figura-chave na Revolução Científica. Seu livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*), publicado pela primeira vez em 1687, lançou as bases da mecânica clássica. Isaac Newton também fez contribuições seminais à óptica e compartilha crédito com Gottfried Wilhelm Leibniz pelo desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

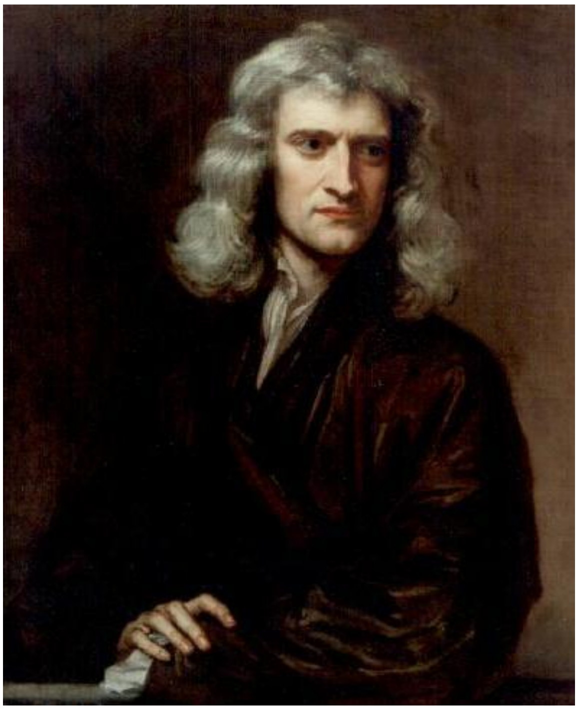
[9] *Micrographia* é o título da obra escrita em 1665 pelo cientista inglês Robert Hooke, que contém a descrição detalhada de cinquenta e sete observações realizadas com o microscópio que o próprio autor fabricou, e três observações telescópicas.

[10] A *Royal Society* é uma instituição destinada à promoção do conhecimento científico fundada em 28 de novembro de 1660 em Londres. A Academia Real Irlandesa (*Royal Irish Academy*), fundada em 1782, é afiliada a ela. Seu nome completo em inglês é *The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge* (A Sociedade Real de Londres para a Melhoria do Conhecimento Natural).

Figura 19 - Robert Hooke.

Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Robert_Hooke#/media/Ficheiro:13_Portrait_of_Robert_Hooke.JPG

Figura 20 - Newton retratado por Godfrey Kneller, 1689 (com 46 anos de idade).

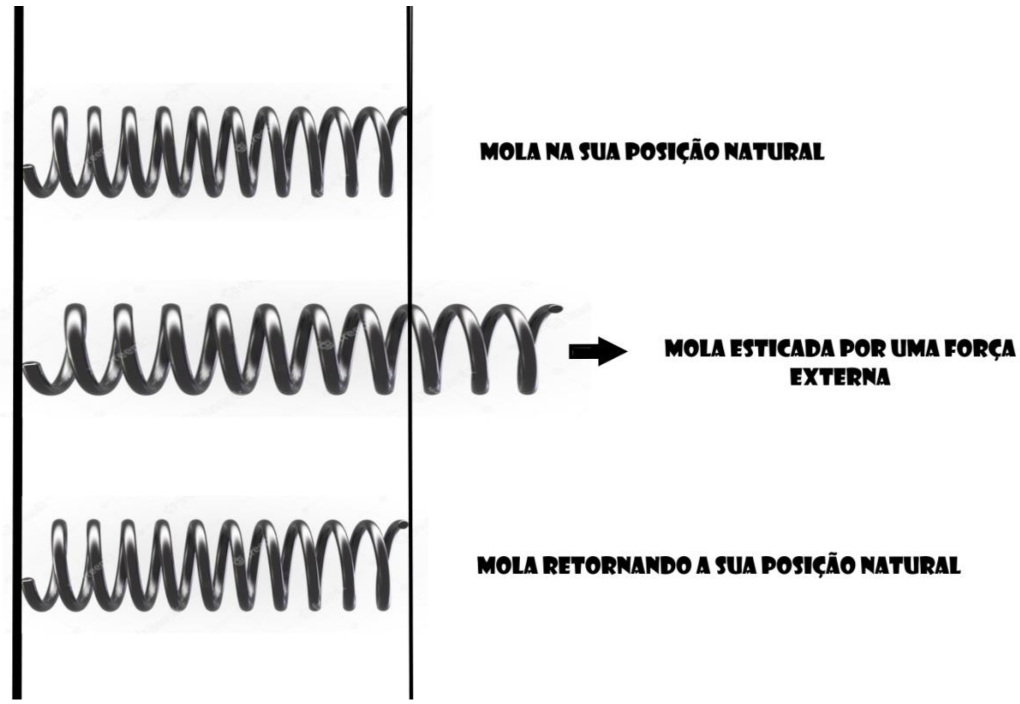


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton#/media/Ficheiro:Sir_Isaac_Newton_(1643-1727).jpg

Para entendermos o experimento de Hooke, precisamos saber de alguns conceitos a cerca das molas.

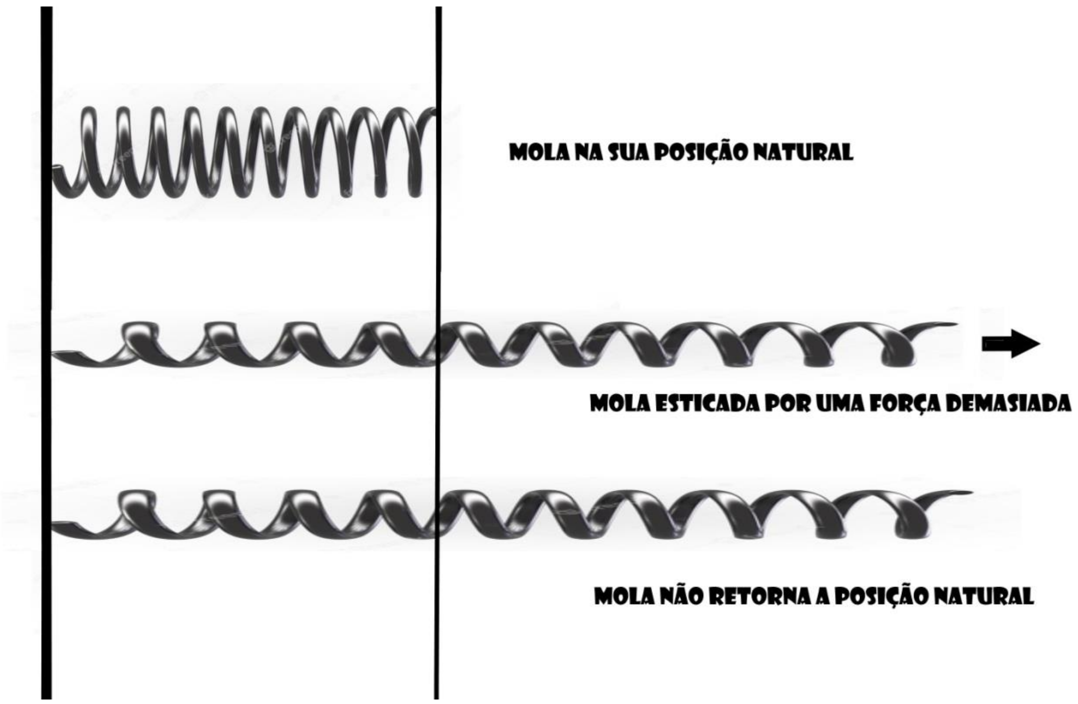
A mola é um objeto elástico utilizado para armazenar energia mecânica. Quando uma força externa atua numa das extremidades de uma mola fixa, essa sofre uma deformação (extensão ou compressão) e quando a atuação dessa força cessa, a mola volta ao seu comprimento inicial; essa situação é chamada de deformação elástica. Já, se após a atuação da força, a mola não retornar a seu estado anterior, dizemos que a deformação foi plástica. Obviamente que se esticarmos uma mola demasiadamente ela deformará tanto que não mais retornará ao seu estado inicial. Portanto, as molas possuem um limite de atuação elástica.

Figura 21 - Deformação elástica.



Fonte: elaborado pelo autor

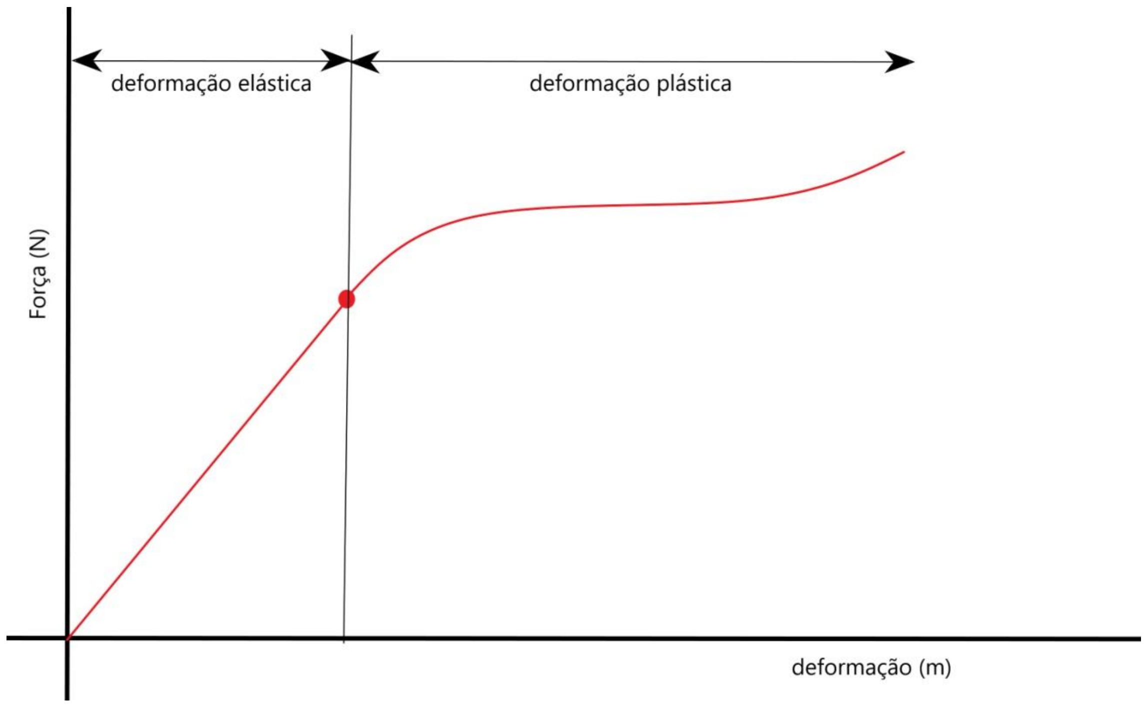
Figura 22 - Deformação plástica.



Fonte: elaborado pelo autor

Ao fazer experimentos sobre a elasticidade em molas, Robert Hooke notou que, para muitos materiais, o gráfico da força de restauração pela deformação, era um gráfico linear, ou seja, a força necessária para esticar uma mola é diretamente proporcional a deformação da mola. No gráfico da Figura 23 notamos que a parte linear corresponde à extensão da mola onde ainda atua uma deformação elástica e, portanto obedece a Lei de Hooke. Após ultrapassar os limites da sua estrutura a mola sofre uma deformação plástica não linear e não obedecerá mais a Lei de Hooke. Portanto, na experiência que vamos realizar devemos ter cuidado para não aplicar forças demasiadas e acabar fugindo do campo de atuação da Lei de Hooke.

Figura 23 - Gráfico da Força pela deformação da mola.



Fonte: elaborado pelo autor

A partir da parte linear do gráfico, podemos deduzir a equação da Lei de Hooke:

$$F_{el} = k \cdot x$$

onde F_{el} é a força elástica (N), k é a constante elástica da mola (N/m) e x é a deformação da mola (m).

Procederemos agora com o passo a passo da Figura 18 para chegarmos ao resultado obtido por Robert Hooke usando das técnicas da Modelagem Matemática.

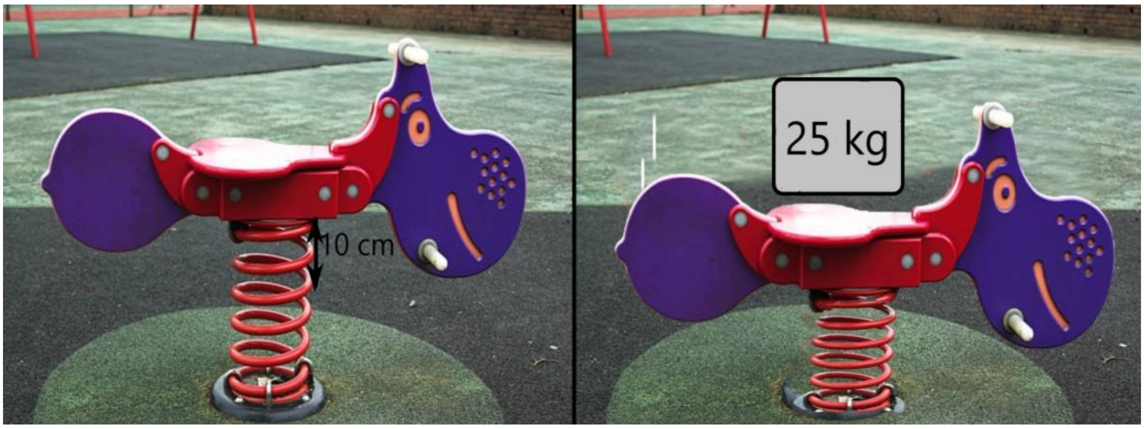
1- Escolha do Tema: A Lei de Hooke.

Você já parou pra pensar o que uma balança, uma suspensão de um automóvel, as teclas de um teclado, um cavalinho do playground, um interruptor de campainha tem em comum? Todas essas invenções possuem um dispositivo em comum com a capacidade de sofrer uma deformação e depois retornar ao seu estado inicial: a mola. No momento em que você está digitando um trabalho, você está interagindo com várias molas no teclado do seu *notebook.* Cada vez que pressiona uma tecla (aplica uma força) e depois retira o dedo (cessa a força), a tecla retorna a sua posição original. Isso se deve a propriedade elástica das molas. Portanto, o nosso objetivo é saber se as molas obedecem alguma lei e como essa lei se apresenta na linguagem matemática.

2- Situação Problema: Escolher a mola ideal para construir um brinquedo no pátio da escola.

É do interesse da comunidade escolar construir um brinquedo como o da Figura 24 com o objetivo de acomodar crianças com até 25 kg. O cavalinho do brinquedo já foi construído e possui 8 kg. Para garantir a segurança do brinquedo, uma mola com 45 cm de comprimento deve sofrer uma deformação máxima de 10 cm. Na cidade há uma fábrica de molas. Ao solicitar a fabricação da mola, quais as informações que os alunos devem dar ao fabricante?

Figura 24 - Cavalinho do playground.

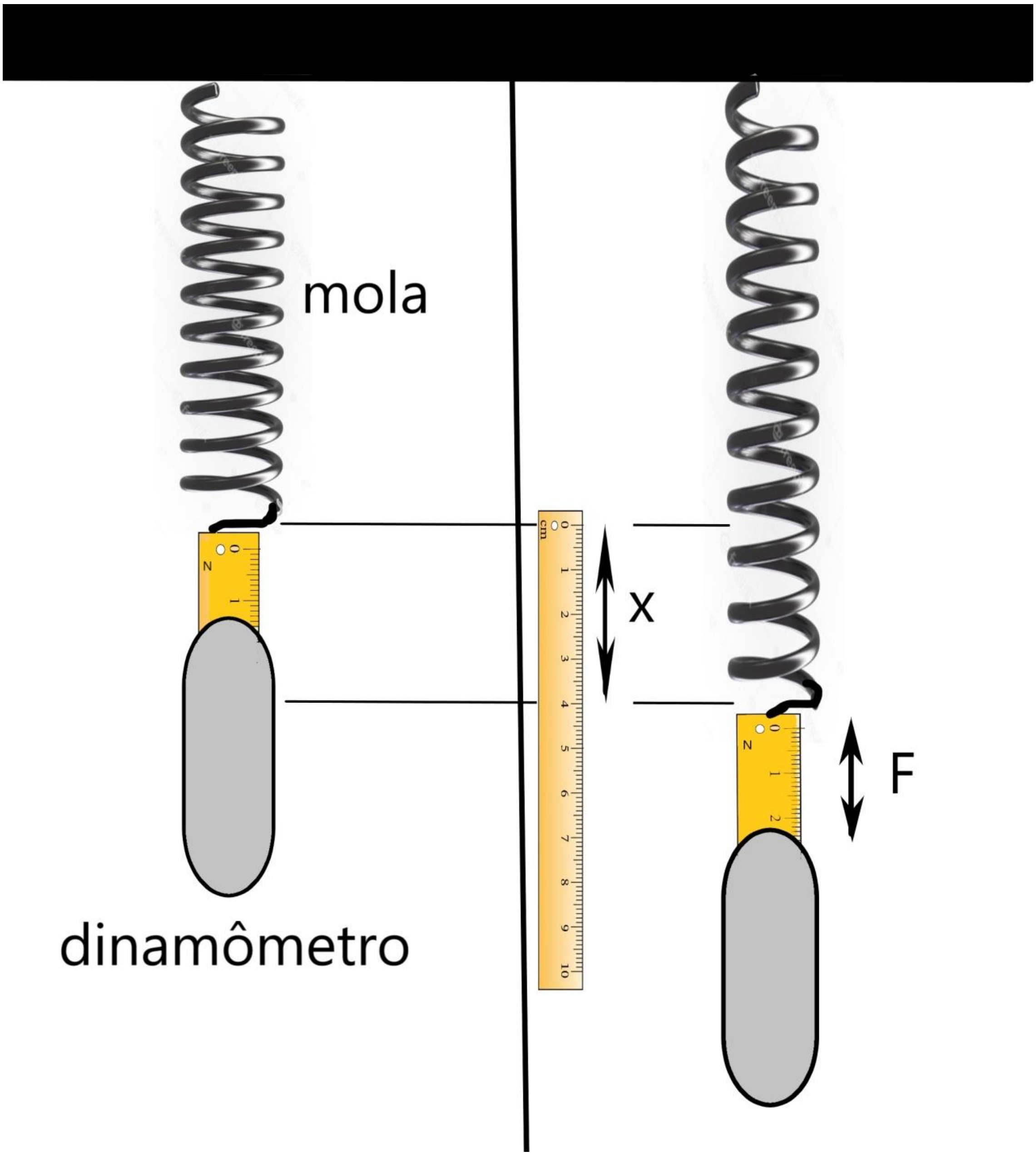


Fonte: elaborado pelo autor

3- Coleta de dados: a coleta será feita ao montar o aparato experimental no Laboratório Didático

Para a coleta de dados, o seguinte experimento deve ser montado pelos alunos distribuídos em equipes (Figura 25):

Figura 25 - Experimento da Lei de Hooke.



Fonte: elaborado pelo autor

O experimento é composto por uma mola, uma régua graduada em centímetros e milímetros e um dinamômetro graduado de 0 a 10 N. O dinamômetro (Figura 26) é o instrumento de medida utilizado para medir força e pode ser facilmente adquirido pela internet caso não haja um no laboratório.

Figura 26 - Dinamômetro.

Fonte: https://www.joom.com/pt-br/products/5b6cae318b2c3701bfd7c1d8

O procedimento do experimento consiste em medir várias vezes a força (F) aplicada para esticar a mola e a respectiva deformação (x) sofrida pela mola. Os alunos devem pendurar objetos de massa conhecida no dinamômetro (geralmente nos laboratórios têm esses tipos de pesos) e ir anotando o valor da força mostrado na graduação do dinamômetro bem como o comprimento x da deformação da mola. É nessa etapa que costumam ocorrer os erros de medição. Todo o cuidado deve ser tomado e os resultados devem ser comparados com os resultados de todas as outras equipes formadas.

Os resultados devem ser distribuídos numa tabela conforme o exemplo:

Tabela 1 - Relação entre força e deformação da mola.

$F\ (N)$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$x\ (m)$	0,007	0,017	0,024	0,032	0,038	0,047	0,056	0,067	0,071

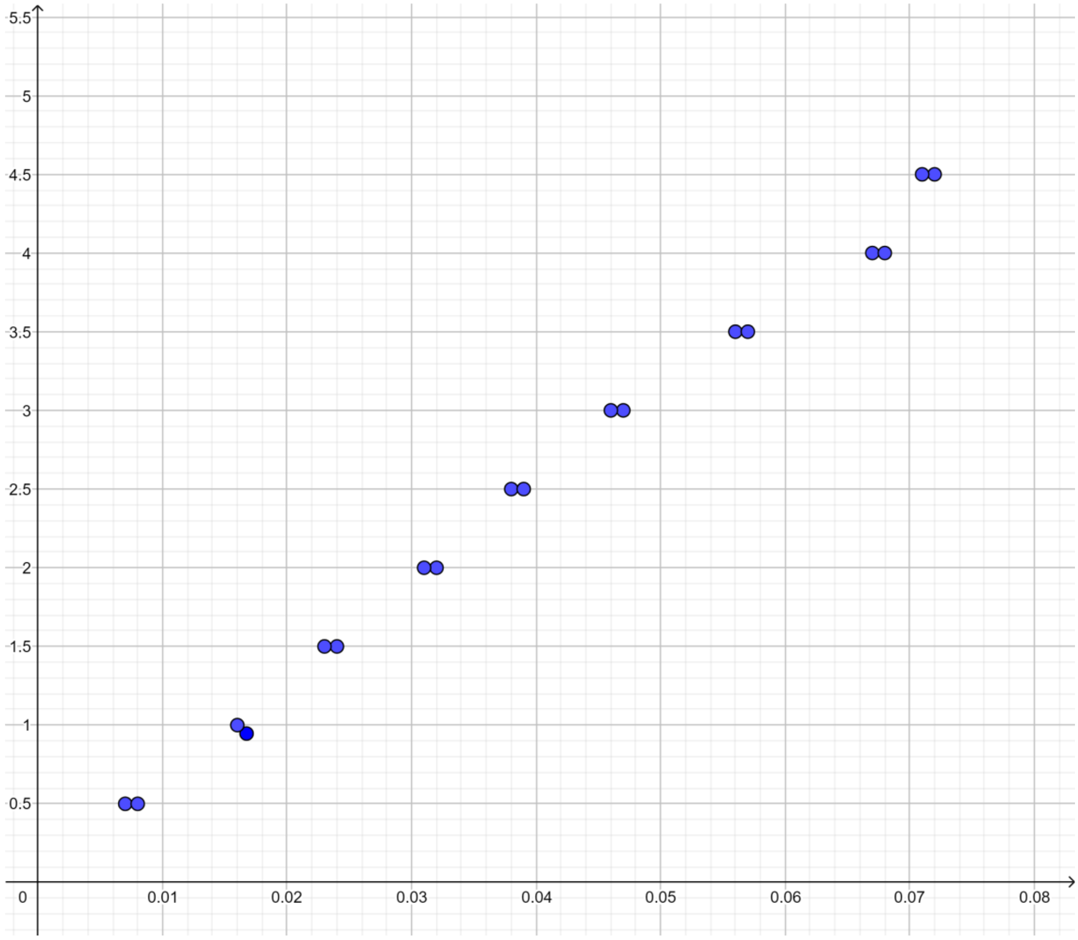
$F\ (N)$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$x\ (m)$	0,008	0,016	0,023	0,031	0,039	0,046	0,057	0,068	0,072

Fonte: elaborado pelo autor

Quanto mais medições, melhor para o resultado do experimento. Perceba que a régua utilizada para medir a deformação (x) no experimento é graduada em centímetros e milímetros. Os alunos, então, devem ser orientados a transformar todas as medições em metros (m) para que fique tudo padronizado com o Sistema Internacional (SI).

Após realizar as várias medições, os alunos devem distribuir os pares ordenados $(x\ ,F)$ num plano cartesiano. Um *software* que pode ser utilizado para essa tarefa é o GeoGebra (que pode ser encontrado em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT). No nosso exemplo, os pontos ficaram da seguinte forma (Figura 27):

Figura 27 - Distribuição dos pontos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F})$ no plano cartesiano.

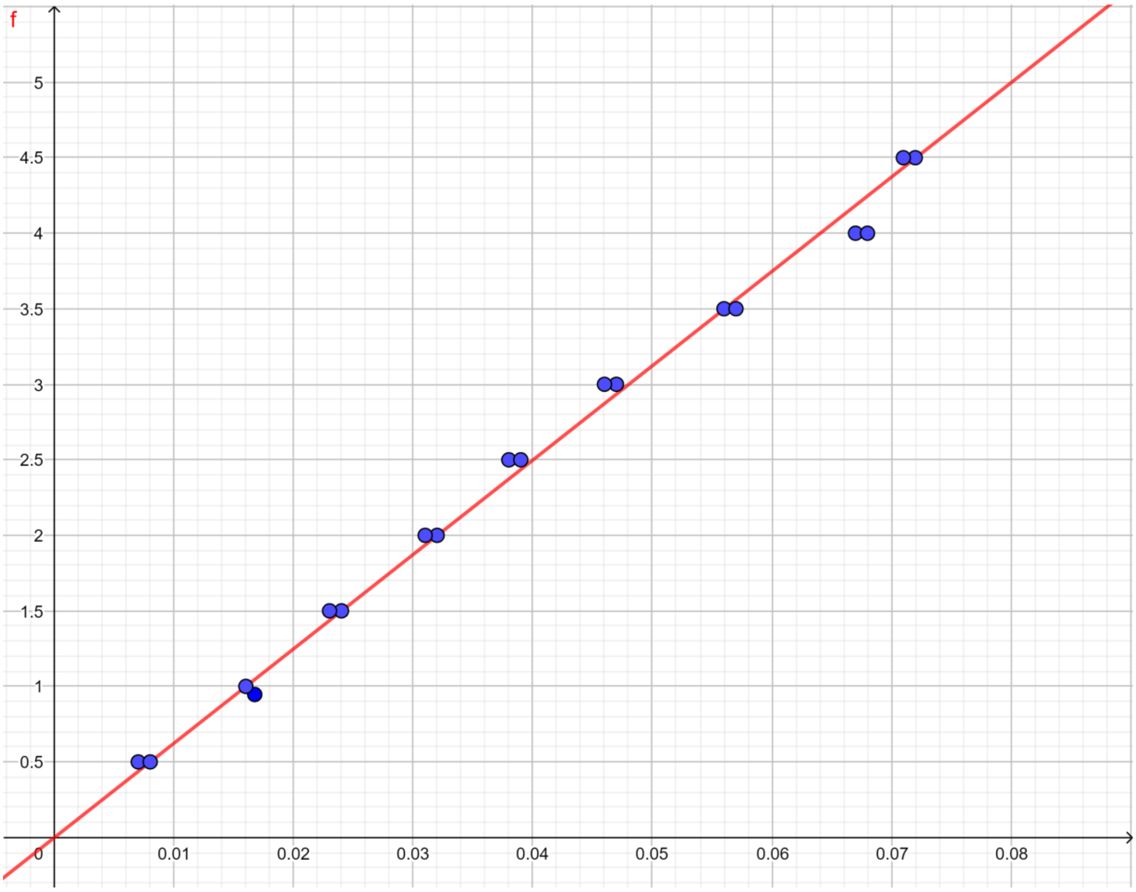


Fonte: elaborado pelo autor com o auxilio do *software* GeoGebra

4- Simplificação dos dados

Como podemos perceber no gráfico da Figura 27 os pontos estão quase que alinhados numa reta (Figura 28):

Figura 28 - Aproximação dos dados obtidos discretamente para uma reta contínua.



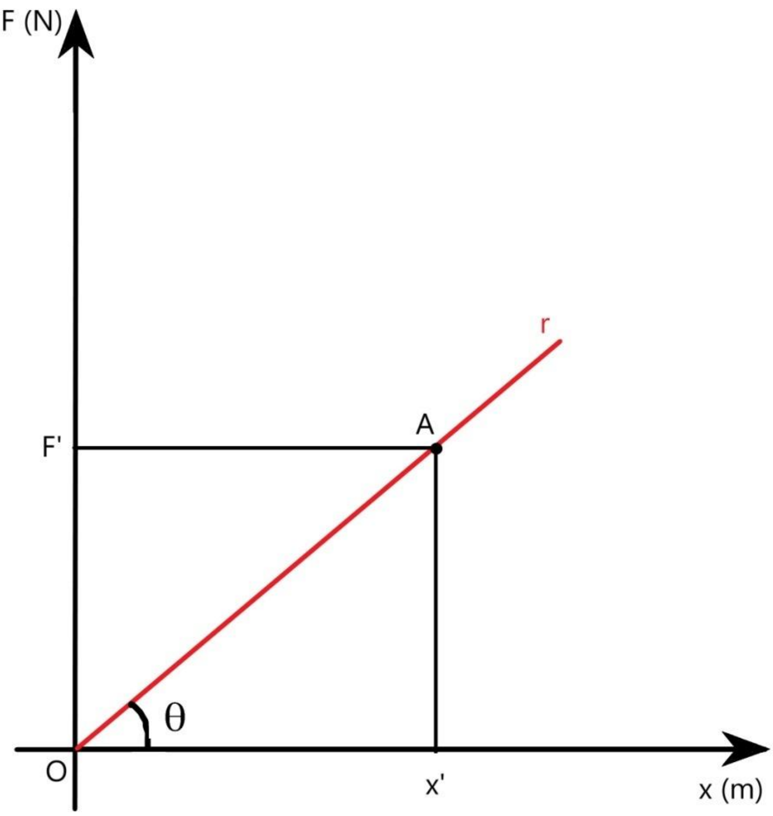
Fonte: elaborado pelo autor com o auxilio do *software* GeoGebra

Portanto, podemos aproximar os dados obtidos discretamente para a equação da reta mostrada em vermelho na Figura 28. Como já foi dito antes, para alongamentos que extrapolam a capacidade elástica da mola a deformação sofrida se torna plástica e para o nosso experimento interessa apenas a deformação elástica da mola. Portanto vamos limitar o gráfico da nossa reta apenas a parte que representa a deformação elástica.

5- Criação do Modelo Matemático

Nessa etapa os alunos já devem perceber que a equação da reta da Figura 28 é um ótimo modelo matemático para o comportamento elástico da mola do experimento. Para estender o resultado para qualquer outra mola, o professor deve nortear os alunos a terem um pensamento genérico, ou seja, para uma força F' qualquer e sua respectiva deformação x' qualquer (Figura 29).

Figura 29 - Comportamento elástico de uma mola qualquer.



Fonte: elaborado pelo autor

Quando não há força aplicada a mola não há deformação, portanto a reta passa pelo ponto (0,0) e possui inclinação constante θ. De posse desse conhecimento, temos informações suficientes para determinar a equação da reta r. Visto que isso pode ser feito de várias maneiras diferentes, cabe ao professor escolher a que mais se adéqua a sua turma. Aqui apresentaremos uma solução geométrica do caso.

A tangente do ângulo θ será sempre a mesma independente do ponto genérico (x', F') escolhido. Então, no triângulo $Ox'A$, temos que

$$tg\ \theta = \frac{F'}{x'} = k$$

Onde $k = tg\ \theta$ é constante e, portanto, representa a constante elástica da mola. Logo temos que

$$F' = k \cdot x'$$

Dessa forma, concluímos que a Lei de Hooke é dada por

$$F_{el} = k \cdot x$$

Chegamos ao modelo matemático da Lei de Hooke. Vamos solucionar o problema na próxima etapa.

6- Resolução do Problema

De posse da equação que representa matematicamente a Lei de Hooke (modelo), tudo que os alunos precisam fazer agora é resolver a equação para a situação apresentada na etapa 2.

A mola deve suportar uma criança de 25 kg mais o cavalinho de 8 kg, portanto 33 kg. Levando em consideração que a força Peso exercida sobre a mola é o produto da massa pela aceleração da gravidade (próximo a superfície da Terra podemos aproximar a gravidade a 10 m/s^2), então

$$P = m \cdot g$$

$$P = 33 \cdot 10$$

$$P = 330\ N$$

Logo a Força elástica deverá equilibrar uma força de $330\ N$ e a mola deverá deformar $10\ cm = 0{,}1\ m$. Aplicando a Lei de Hooke, temos que

$$F_{el} = k \cdot x$$

$$330 = k \cdot 0{,}1$$

$$k = 3300\ N/m$$

Portanto os alunos devem pedir ao fabricante uma mola de $45\ cm$ de comprimento com constante elástica $k = 3300\ N/m$.

7- Análise crítica da solução.

Com a execução desse experimento é esperado que os alunos desenvolvam um pensamento científico bem como habilidades de manuseio com os instrumentos do laboratório e com o *software* GeoGebra.

Além disso, o professor tem a oportunidade de relembrar conceitos básicos de transformação de unidades de medidas, marcação de pontos no plano cartesiano e determinação da equação de uma reta. Também pode trabalhar conceitos importantes como as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

4.2 Formações de Imagens em Espelhos Planos

Dois espelhos planos podem ser associados quando suas superfícies refletoras se defrontam e formam um ângulo diedro[11] θ entre si, com

---

[11] Em geometria, diedro, ângulo diedro ou ângulo diédrico é uma expansão do conceito de ângulo a um espaço tridimensional. É definido como o espaço entre dois semiplanos não contidos num mesmo plano com origem numa aresta comum (ver figura 30).

$$0° \leq \theta \leq 180° \text{ .}$$

Note que $\theta > 180°$ não faz sentido, pois as partes refletoras dos espelhos não mais estariam se defrontando.

Variando-se, lentamente o ângulo entre os espelhos, observamos que o número de imagens formadas varia, portanto, ambas as grandezas: ângulo entre os espelhos (θ) e o número de imagens formadas nos espelhos (N), estão relacionadas pela função:

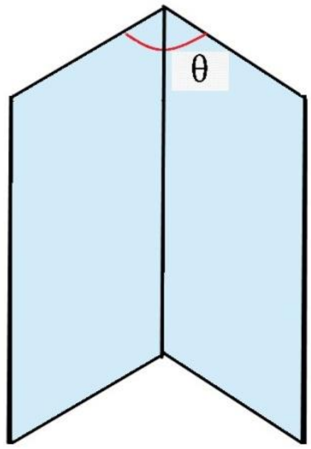
$$N(\theta) = \frac{360°}{\theta} - 1$$

O caso $\theta = 0°$ ocorre quando os espelhos estão de frente um para o outro de forma paralela, o que nos levaria a concordar que teríamos infinitas imagens formadas nos espelhos, pois as imagens seriam refletidas de um para o outro até o infinito. Matematicamente, teríamos:

$$\lim_{\theta \to 0} N = \infty$$

Porém esse resultado é impossível de ser observado na prática, pois além do fenômeno da reflexão, ocorrem também outros fenômenos ópticos, como a refração, a polarização e a dispersão, o que nos leva a constatação de que as primeiras imagens são nítidas, mas como a luminosidade vai diminuindo, após certo número de reflexões o olho humano não é mais capaz de perceber as imagens por receber uma quantidade de luz insuficiente. Esse resultado não pode subjugar a equação a ponto de dizer que está incorreta, pois devemos lembrar que a Física escolhe as fórmulas matemáticas mais adequadas ao modelo em estudo, na tentativa de explicar da forma mais eficiente possível um Fenômeno Natural.

Figura 30 - Ângulo diedro.



Fonte: elaborado pelo autor

Para evitar outro problema, seria interessante que o professor orientasse os alunos a escolherem ângulos múltiplos de 360°, pois, assim, $N \in \mathbb{N}$ e fica mais fácil observar uma imagem inteira do que uma fração dela.

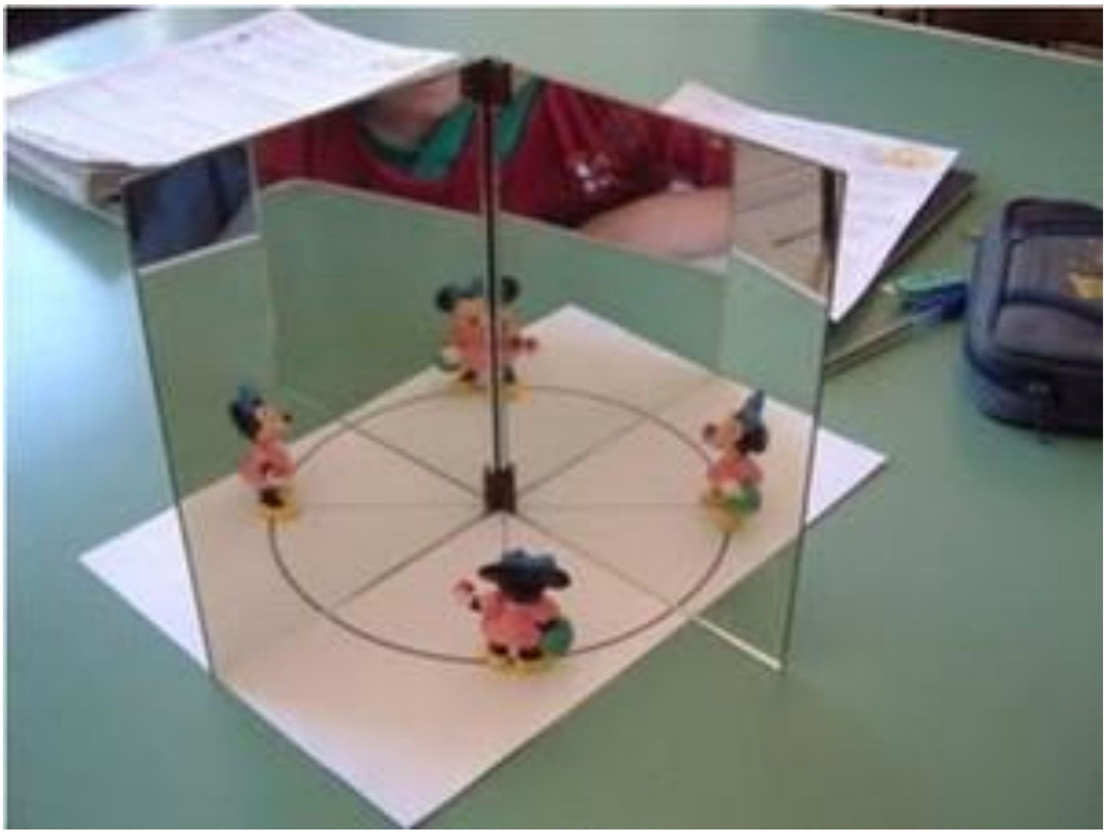
Vejamos como exemplo o caso da Figura 31:

$$N(90°) = \frac{360°}{90°} - 1$$

$$N(90°) = 3$$

Portanto, teremos três imagens formadas nos espelhos.

Figura 31 - Associação de espelhos com ângulo diedro de 90°.



Fonte: http://educacao.globo.com/fisica/assunto/ondas-e-luz/espelhos-planos.html

Vamos agora à obtenção dessa fórmula através da Modelagem Matemática.

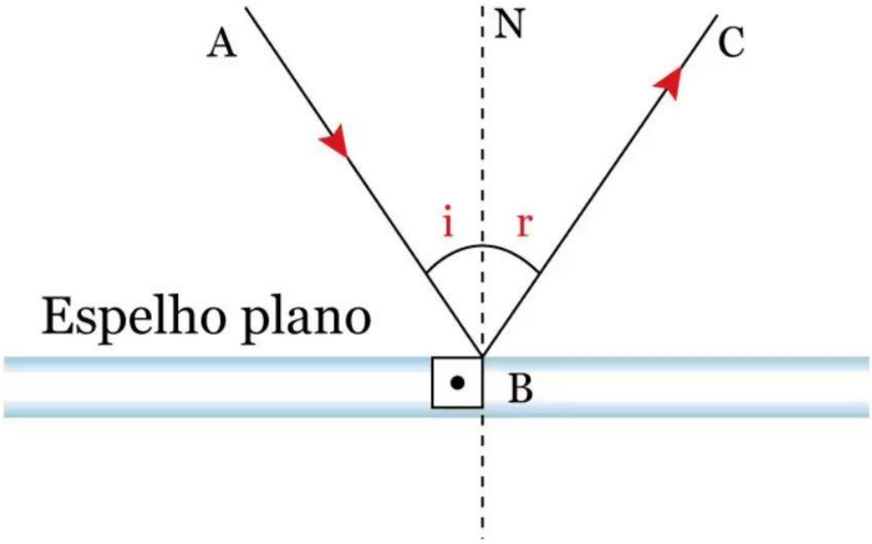
1- Escolha do Tema: Formações de imagens em espelhos planos.

Podemos considerar como um espelho plano qualquer superfície plana que seja capaz de refletir a luz incidente. Assim, os espelhos planos podem ser encontrados em diversos formatos (circular, triangular, retangular, etc...), e em diferentes objetos (mesa, chapa de metal, o vidro de uma janela, a superfície calma de um lago, etc...), desde que a superfície tenha a característica de ser plana, polida e reflexiva.

Para entendermos bem como ocorre a reflexão da luz, vamos lembrar as duas leis da reflexão. A primeira lei diz que o raio incidente, o raio refletido e a reta

Normal[12] são coplanares, ou seja, pertencem ao mesmo plano geométrico; A segunda lei afirma que o ângulo refletido (r) é igual ao ângulo de incidência (i). Vejamos a representação dessas leis na Figura 32:

Figura 32 - Leis da reflexão.



Fonte: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/fisica/reflexao

Pierre Fermat[13], entre seus estudos sobre a trajetória de raios luminosos realizados em 1657, baseou-se na idéia de que a natureza sempre atua pelo caminho mais curto.

> “de todos os caminhos possíveis para ir de um ponto a outro, a luz segue aquele que é percorrido no tempo mínimo.”

Portanto, para o nível de estudo enfatizado nesse trabalho, vamos considerar que um raio de luz viaja em linha reta, em concordância com o pensamento de Fermat.

---

[12] A reta Normal (N) é a reta que forma um ângulo de 90° com qualquer outra reta r pertencente ao plano do espelho e passa pelo ponto de intersecção entre o raio incidente e o raio refletido.

[13] Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, nascido na primeira década do século XVII — Castres, 12 de janeiro de 1665) foi um magistrado, matemático e cientista francês.

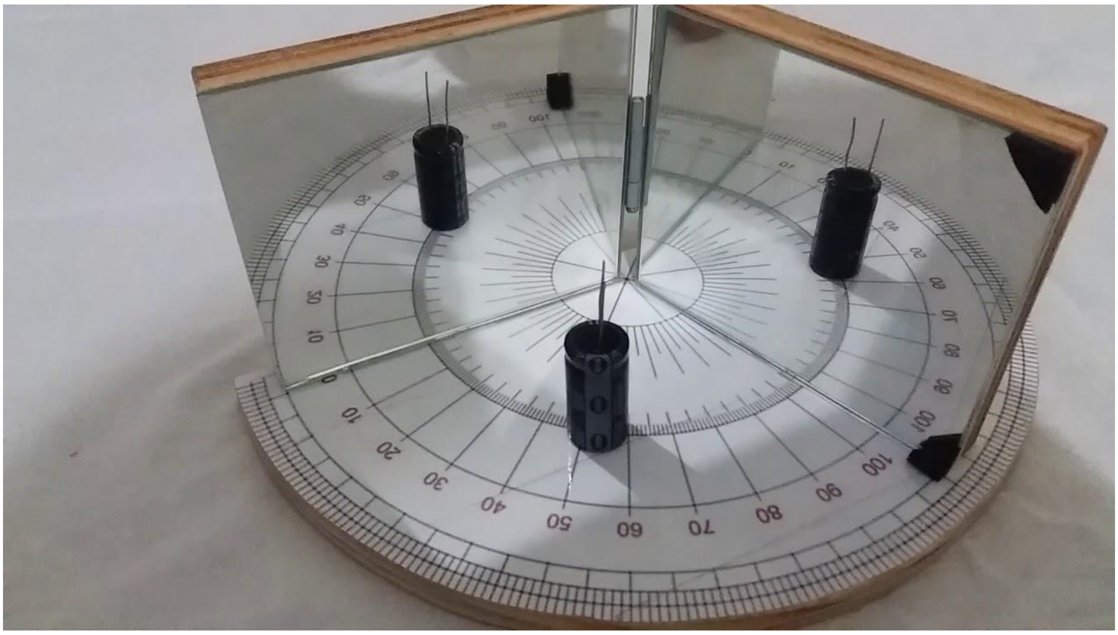
2- Situação Problema: uso de espelhos numa apresentação teatral.

O dono do circo que está na cidade deseja realizar uma apresentação com 24 bailarinas, porém ele dispõe de apenas 3. O dono do circo possui dois espelhos muito grandes e sabe que pode multiplicar o número de bailarinas com o uso dos espelhos, o que ele não sabe é o ângulo correto que deve associar os dois espelhos para atingir tal efeito. O dono do circo pede, então, ajuda aos alunos da escola local. Qual o ângulo correto a ser aplicado na associação dos espelhos para obter sucesso no espetáculo?

3- Coleta de Dados

Primeiramente é necessária a construção do aparato da Figura 33 para a coleta de dados.

Figura 33 - Experimento de associação de espelhos planos.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1xHiYIPmdsc

A montagem é simples e trata-se de apenas dois espelhos planos interligados (pode ser com uma fita adesiva), um transferidor colocado na base dos espelhos e um objeto pequeno para colocar entre os dois espelhos.

O procedimento é simples, o aluno deve colocar o objeto entre os dois espelhos, se posicionar bem em frente à intersecção dos dois espelhos e anotar o número de imagens visualizadas (incluindo a imagem real do objeto) e o ângulo correspondente.

4- Simplificação dos dados

A simplificação dos dados será feita aqui no ato da coleta. Ao invés de montar qualquer ângulo entre os espelhos, o professor deve direcionar os alunos a coletarem o número de imagens formadas apenas com os ângulos que são múltiplos de 360° e evitar ângulos muito pequenos para facilitar a contagem do número de imagens formadas.

Como exemplo, vejamos a tabela montada abaixo com os resultados do experimento:

Tabela 2 - Relação entre ângulo e número de imagens.

ângulo	180°	120°	90°	60°	45°	30°	20°	10°
número de imagens	2	3	4	6	8	12	18	36

Fonte: elaborado pelo autor

Ou seja, quando o ângulo for raso (180°), teremos duas imagens: uma nos espelhos e a outra do objeto real. Quando for de 120°, teremos duas imagens nos espelhos e uma do objeto real, e assim por diante.

5- Criação do Modelo Matemático

O aluno deve ser levado a perceber que quanto maior o ângulo menor o número de imagens formadas e quanto menor o ângulo maior o número de imagens, ou seja, essas grandezas são inversamente proporcionais. Matematicamente, podemos representar pela simbologia:

$$N \; \alpha \; \frac{1}{\theta}$$

Para resolver esse problema podemos transformar a proporção acima em uma igualdade, ou seja, fazer com que o primeiro e o segundo membros sejam iguais em número e unidades.

Dessa forma, qual deve ser a constante de proporcionalidade que deve ser acrescentada ao segundo membro para se obter uma igualdade?

$$N = k \; \frac{1}{\theta}$$

Analisando a Tabela 2, podemos identificar facilmente que a constante de proporcionalidade k é igual a 360°.

Porém, como queremos calcular apenas a quantidade de imagens virtuais produzidas nos espelhos, devemos sempre retirar uma imagem do objeto real. Portanto a equação completa fica:

$$N = \frac{360°}{\theta} - 1$$

6- Resolução do Problema

De posse da função $N(\theta)$, os alunos podem resolver a situação problema facilmente. O dono do circo necessita de 24 bailarinas, mas tem apenas 3. Portanto cada uma dessas três bailarinas deve produzir 8 imagens, 7 no espelho e a oitava seria ela mesma. Portanto temos que calcular θ para $N = 7$. Assim

$$7 = \frac{360°}{\theta} - 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

7- Análise crítica da solução

Podemos perceber que o uso da Modelagem Matemática nesse experimento proporciona aos alunos a descoberta da "fórmula" ao invés de apenas usá-la ou testá-la.

Durante o processo foram apresentados os conceitos de ângulo diedro, de graus de uma circunferência e de proporcionalidade. Também há a oportunidade de se introduzir conhecimentos de limite de uma função e de análise do gráfico de uma função racional.

4.3 Calculando a vazão de água de um córrego

A importância de se calcular a vazão de água de um córrego pode está relacionada a diversos fatores de interesse, como por exemplo, a construção de barragens, controle da poluição, construção de uma ponte, sistemas de drenagem, sistemas de abastecimento, a instalação de geradores de energia elétrica ou até mesmo para facilitar o estudo ecológico do ambiente.

Calcular a vazão (β) de água significa obter a razão entre o volume de água (ΔV) e o tempo gasto (Δt) para esse volume atravessar uma secção transversal do curso d'água.

$$\beta = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

A unidade de medida oficial será, portanto, m^3/s.

O experimento a seguir não se trata da obtenção da equação acima, pois ela representa a definição de vazão e, portanto não faz sentido obtê-la. Mas o professor pode testar a intuição dos alunos ao perguntar como se calcula uma vazão relacionando ela com a velocidade com que se passa uma determinada quantidade de água por uma determinada área.

O principal objetivo desse experimento é obter modelos matemáticos para o cálculo aproximado do volume (ΔV) e como medir o tempo (Δt).

1- Escolha do tema: calculando a vazão de um córrego.

A escolha desse tema pode abrir um leque de opções para se trabalhar a interdisciplinaridade. É do interesse da Geografia fazer um estudo hidrográfico da região. Também é objeto de estudo da Biologia tomar conhecimento da reprodução de determinada espécie de peixe ou controle de pragas. Para a Química é interessante saber a velocidade com que determinada substância pode se espalhar pelo rio. Para a Ecologia é importante fazer um controle da poluição ambiental e para a Física ou Engenharia é importante ter conhecimento da vazão do rio antes de se instalar um gerador de energia.

2- Situação Problema: Construção de um sistema de irrigação para um pequeno agricultor local

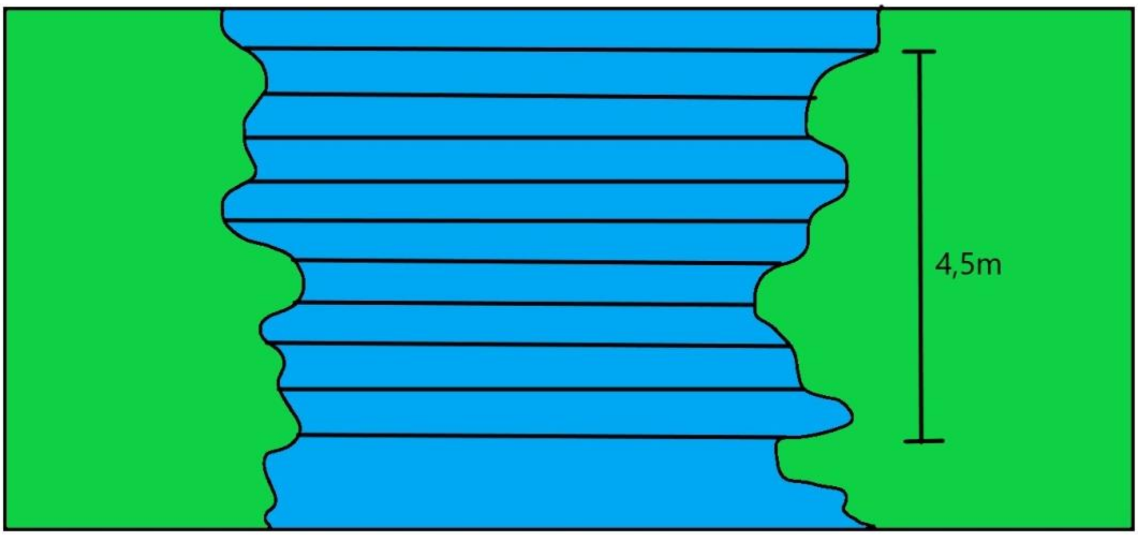
Pela propriedade privada de um pequeno agricultor passa um córrego d'água e ele possui autorização dos órgãos competentes para sua utilização com a finalidade de irrigar sua monocultura de alface. No entanto ele precisa saber a vazão aproximada do córrego antes de investir no equipamento do sistema de irrigação. A tarefa parece fácil para o professor de Matemática da região ao qual ele pede ajuda.

3- Coleta de dados

Para coletar os dados, o professor deve ir com a turma até o local. Medir a largura do córrego com o auxílio de uma fita métrica e a profundidade do rio com o auxílio de uma vara. Obviamente que a largura do córrego não será constante e tão menos sua profundidade. É nessa hora que a Estatística pode ajudar na simplificação dos dados.

Uma boa medida para a largura média do córrego seria medir 10 linhas paralelas entre si, de margem a margem, com uma distância de 0,5m uma da outra. (Ver Figura 34).

Figura 34 - Cálculo da largura média do córrego.

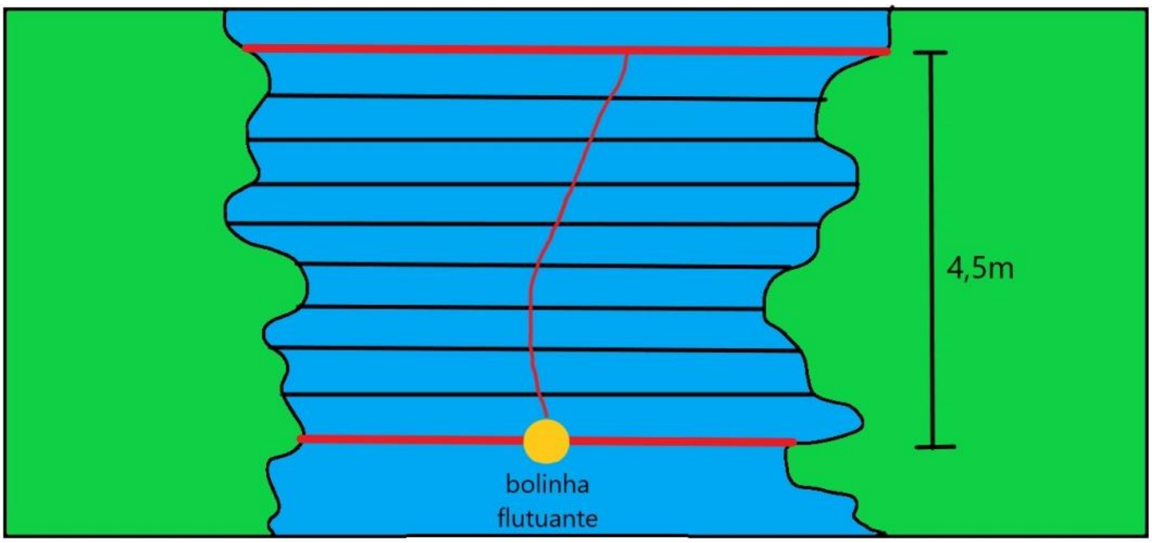


Fonte: elaborado pelo autor

Para medir a profundidade média do córrego, mediremos as 10 profundidades máximas para cada linha medida na Figura 34.

A medição do intervalo de tempo (Δt) pode ser feita abandonando uma bolinha flutuante na primeira linha e marcando, com o auxílio de um cronômetro, o tempo gasto para se chegar a ultima linha. Lembrando que a medição repetida é sempre a melhor forma de obter o melhor resultado. Portanto mediremos 10 vezes o intervalo de tempo.

Figura 35 - Medindo o intervalo de tempo (Δt).



Fonte: elaborado pelo autor

A Tabela 3 mostra um exemplo de medição:

Tabela 3 - Medida da largura do córrego e da profundidade máxima.

Largura (m)	4,4	4,2	4,2	4,3	4,4	3,9	4,1	4,2	4,3	4,4
Profundidade (m)	1,5	1,2	1,8	1,9	1,7	1,6	1,8	1,7	1,8	1,6
Tempo (s)	82	83	78	79	81	80	81	76	79	82

Fonte: elaborado pelo autor

4- Simplificação dos dados

Para simplificar os dados podemos utilizar a Média Aritmética das medidas obtidas. A definição de média aritmética $(\bar{X})$ é dada por:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Caso essa notação seja demasiada complicada para os alunos, pode-se usar essa outra equivalente:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Aplicando a definição da média aritmética aos valores da Tabela 4, obtemos:

$$\bar{X}_{largura} = \frac{4{,}4 + 4{,}2 + 4{,}2 + 4{,}3 + 4{,}4 + 3{,}9 + 4{,}1 + 4{,}2 + 4{,}3 + 4{,}4}{10} = 4{,}24$$

$$\bar{X}_{profund.} = \frac{1{,}5 + 1{,}2 + 1{,}8 + 1{,}9 + 1{,}7 + 1{,}6 + 1{,}8 + 1{,}7 + 1{,}8 + 1{,}6}{10} = 1{,}66$$

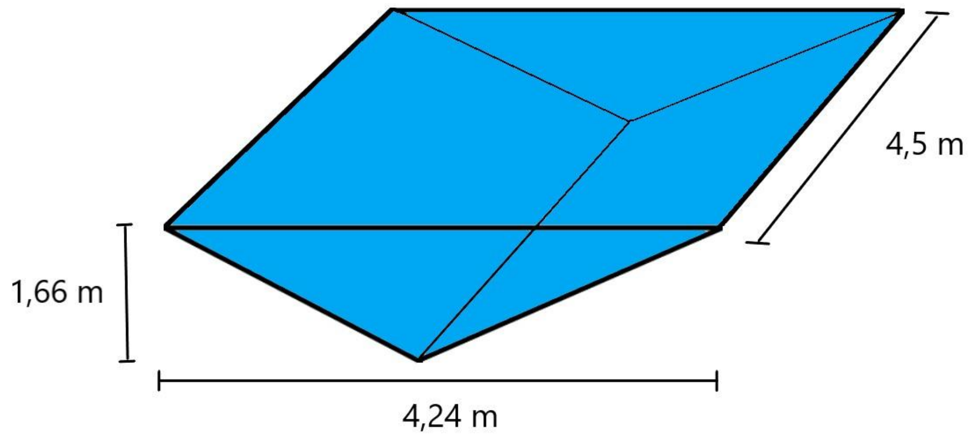
$$\bar{X}_{tempo} = \frac{82 + 83 + 78 + 70 + 81 + 80 + 81 + 76 + 79 + 72}{10} = 78{,}2$$

Portanto, no nosso exemplo, a largura média do córrego equivale a 4,24 m, a profundidade média a 1,66 m e o tempo médio 78,2 s.

5- Criação do Modelo Matemático

Com esses resultados, podemos aproximar o volume desse pedaço do córrego a o volume de um prisma regular de base triangular com altura de 4,5 m cujas bases são triângulos congruentes de base igual a 4,24 m e altura igual a 1,66 m, conforme a Figura 36:

Figura 36 - Aproximação do volume real ao volume de um prisma regular de base triangular.



Fonte: elaborado pelo autor

Obviamente que o volume do prisma trata-se de uma aproximação ao nível do Ensino Médio. Uma aproximação mais elaborada exigiria conhecimentos de Integralização de Funções, porém continuaria a ser uma aproximação. Mesmo que fosse possível conhecer o volume exato ainda assim seria em vão, pois a Natureza do córrego sofre mutações a cada instante de tempo modificando sua forma.

6- Resolução do Problema

O volume de um prisma regular é igual ao produto da área da base pela sua altura:

$$\Delta V = Área\ da\ base\ \cdot Altura$$

A base do prisma é um triângulo cuja área é dada por:

$$A = \frac{Base\ \cdot Altura}{2} = \frac{4{,}24 \cdot 1{,}66}{2} = 3{,}5192\ m^2$$

Portanto

$$\Delta V = 3{,}5192 \ \cdot 4{,}5 = 15{,}8364 \ m^3$$

Logo a vazão do córrego é:

$$\beta = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{15{,}8364}{78{,}2} \cong 0{,}2025 \ m^3/s$$

7- Análise crítica da Solução

Neste experimento podemos notar as ligações que podem ser feitas com diversas disciplinas.

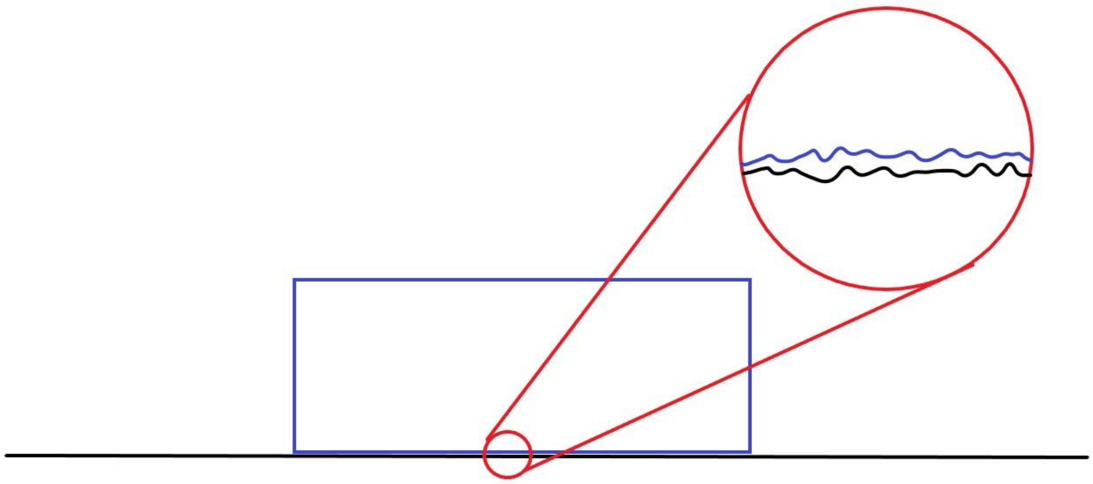
Os alunos aprenderão o conceito de velocidade volumétrica (vazão), conhecimentos estatísticos como a Média Aritmética e desenvolverão a intuição ao aproximar o volume do córrego ao volume de um prisma regular de base triangular.

Os alunos também vão perceber que um Modelo Matemático é uma representação da realidade e não a realidade propriamente dita. O fato de ter medido o tempo que a bolinha chega à segunda linha (ver Figura 35) pode gerar comentários como "a bolinha não fez um percurso em linha reta como imaginamos, portanto existe um erro nesse tempo que estamos medindo". O fato é que cada molécula de água que compõe o córrego não está em um movimento bem definido, tornando essa medição humanamente impossível de se realizar com total precisão. Portanto, ao medir o tempo de percurso da bolinha estamos aproximando a realidade. Sem contar a aproximação feita ao volume também. Essas observações podem ser feitas pelo professor e passadas para os alunos ao explicar o conceito de Modelo Matemático.

4.4 Experimento do coeficiente de atrito

Ao observarmos uma superfície lisa e polida a olho nu temos a impressão de que ela é perfeitamente lisa e livre de imperfeições, mas a experiência nos diz o contrário. Mesmo um vidro polido possui imperfeições a nível molecular. Uma mesa de madeira, o piso da sua casa, o mármore da mesa de sinuca, etc., são superfícies que apresentam rugosidade. Quando um objeto é colocado sobre uma superfície e tentamos movê-lo arrastando-o sobre ela, surge uma força física chamada de atrito. A força de atrito está presente devido à rugosidade, mesmo que mínima, das superfícies dos corpos em contato.

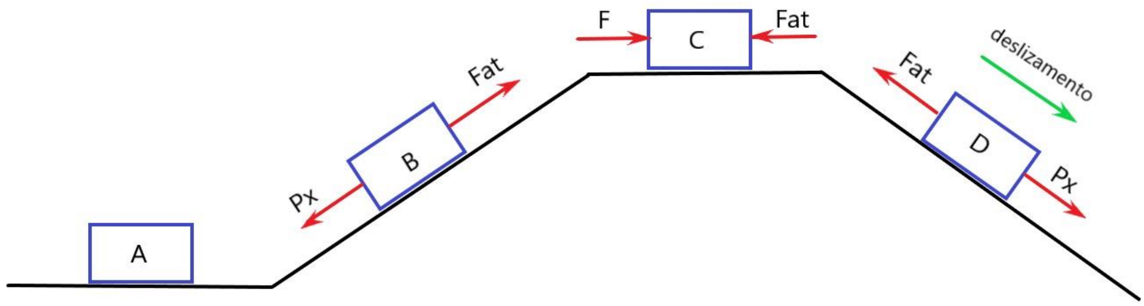
Figura 37 - Rugosidade entre as superfícies.



Fonte: elaborado pelo autor

A força de atrito se opõe ao movimento, portanto ela irá surgir apenas quando uma superfície estiver sendo forçada a deslizar sobre a outra ou quando o deslizamento já estiver ocorrendo. Isso pode ocorrer devido à atuação de uma força externa ou devido à inclinação do plano.

Figura 38 - Exemplos da atuação da Força de Atrito.



Fonte: elaborado pelo autor

Como podemos observar na Figura 37, na situação A não temos a presença da força de atrito, pois não há uma força tentando por o objeto em movimento. Na situação B o plano está inclinado e a componente do peso P_x do objeto faz uma tentativa de deslizamento, portanto surgirá uma força de atrito contrária a essa tentativa de movimento. Em C temos uma força empurrando o objeto para direita, porém ele não se moveu ainda devido a força de atrito ser igual a força que tenta empurrá-lo. E, em D, temos uma situação na qual o objeto está deslizando devido à componente da força peso P_x ter uma maior intensidade que a força de atrito. Assim, percebemos que a principal característica da força de atrito é que ela se opõe a tendência de movimento.

Como a presença da força de atrito depende do contato entre as superfícies dos corpos, ela é proporcional a Força Normal (F_N) [14] proveniente desse contato. Além disso, a força de atrito depende da rugosidade das superfícies que estão em contato. Para quantificar a aspereza entre as superfícies define-se o coeficiente de atrito (μ).

Dessa forma a definição de Força de Atrito é dada por:

$$F_{at} = F_N \cdot \mu$$

[14] Força Normal (ou simplesmente normal) é a força que uma superfície exerce sobre um objeto. Quando aplicamos uma força a uma superfície, esta exercerá sobre nós uma força de reação, na mesma direção, no entanto com sentido oposto. De acordo com a terceira lei de Newton, a força normal deve apresentar a mesma intensidade da que é aplicada na superfície, além disso, é sempre perpendicular (faz ângulo de 90°) com o plano dessa superfície.

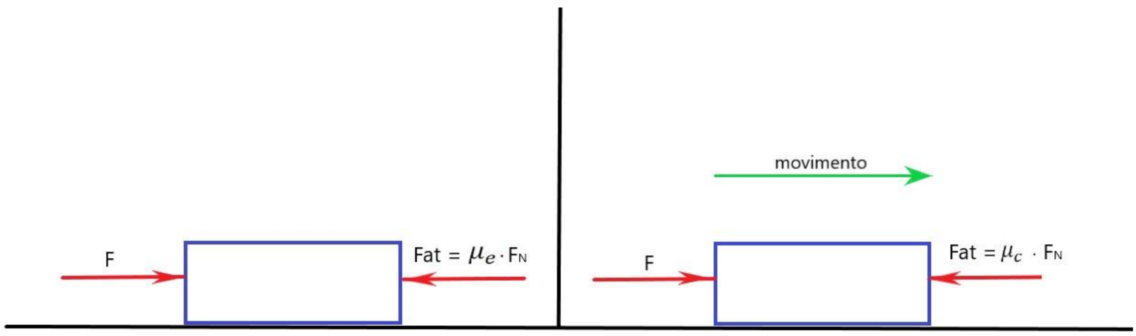
É importante salientar que a força de atrito depende apenas da força normal e do coeficiente de atrito, sendo independente da área de contato entre as superfícies.

O coeficiente de atrito μ é uma grandeza adimensional, visto que F_{at} é medida em N e F_N também é medida em N.

O coeficiente de atrito apresenta diferentes características se as superfícies em contato estiverem em repouso ou em movimento relativo entre si.

Enquanto as superfícies estiverem em repouso uma em relação à outra, estará atuando o coeficiente de atrito estático, que definiremos como μ_e. A partir do momento que as superfícies entram em movimento relativo passa a atuar o coeficiente de atrito cinético, que definiremos como μ_c.

Figura 39 - Coeficiente de atrito estático e cinético.



Fonte: elaborado pelo autor

Quando a força F começa a atuar no objeto (Figura 38) o coeficiente de atrito estático começa a existir e vai aumentando seu valor até atingir um valor máximo, ou seja, a força de atrito vai aumentando à medida que F também aumenta. Após atingir a força de atrito máxima, a força F vence a força de atrito e o objeto é posto em movimento. Nesse momento passa a atuar o coeficiente de atrito cinético. A força de atrito cinética é considerada aproximadamente constante.

A força de atrito é máxima quando o coeficiente de atrito estático atinge seu valor máximo, isto é

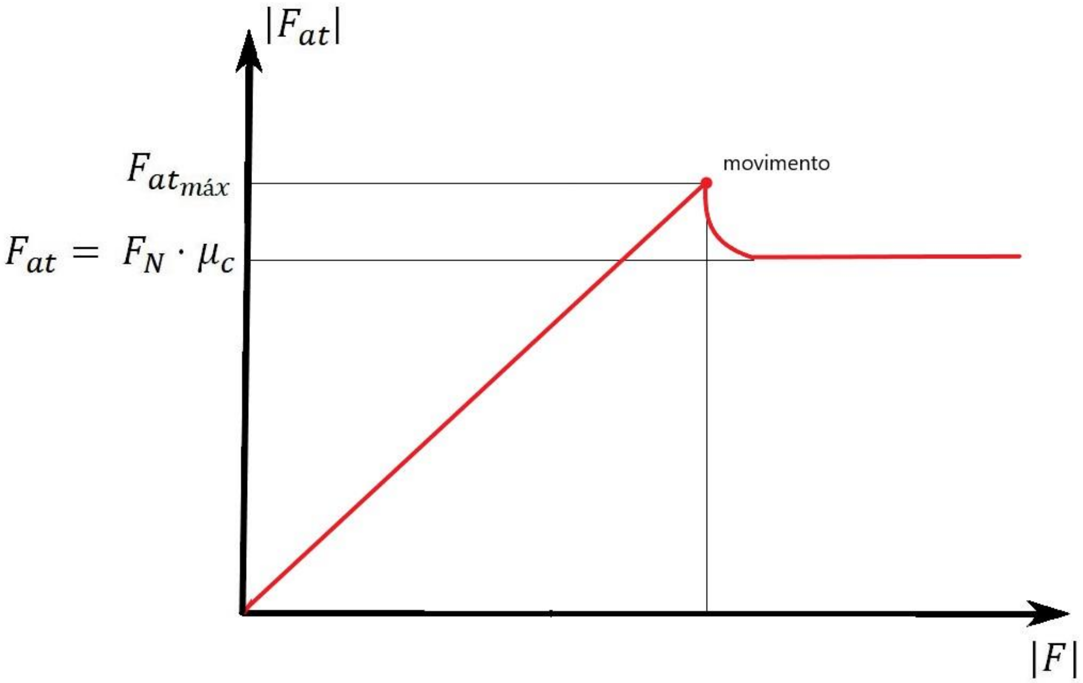
$$F_{at_{máx}} = F_N \cdot \mu_{e_{máx}} \quad ,$$

isto ocorre na iminência do movimento.

Empiricamente, é possível verificar que $\mu_c < \mu_{e_{máx}}$.

O gráfico abaixo mostra o comportamento da força de atrito em relação à atuação de F.

Figura 40 - Gráfico da força de atrito em função de F.



Fonte: elaborado pelo autor

Enquanto não há a força F tentando mover o objeto à força de atrito é nula, isso explica o gráfico iniciar no ponto (0,0). Quando a força F começa a atuar a força de atrito é igual a F (em módulo) até que a força de atrito atinja o seu valor máximo ($F_{at_{máx}}$) e fique na iminência do movimento. Dado início ao movimento passa a atuar o coeficiente de atrito cinético e a força de atrito é aproximadamente constate e igual a

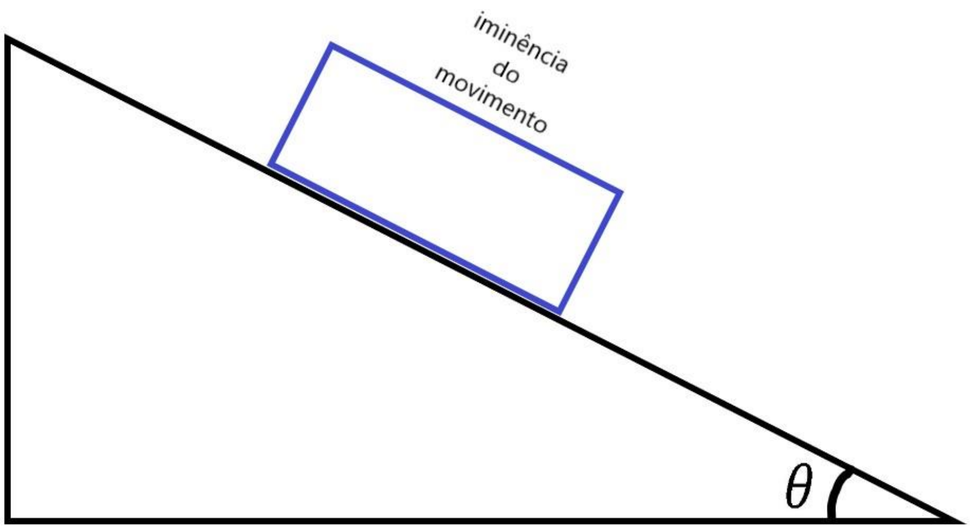
$$F_{at} = F_N \cdot \mu_c$$

É importante lembrar que os coeficientes de atrito dependem das duas superfícies que estão em contato e não apenas da superfície cujo objeto será apoiado, portanto não faz sentido calcular o coeficiente de atrito de uma superfície sem saber nada sobre a superfície do objeto que será posto sobre ela.

Quando um objeto está apoiado sobre um plano inclinado e se encontra na iminência do deslizamento, o coeficiente de atrito estático máximo é igual a tangente do ângulo de inclinação que o plano forma com a horizontal.

$$\mu_{e_{máx}} = tg(\theta)$$

Figura 41 - Relação entre o coeficiente de atrito estático máximo e a tangente do ângulo de inclinação.



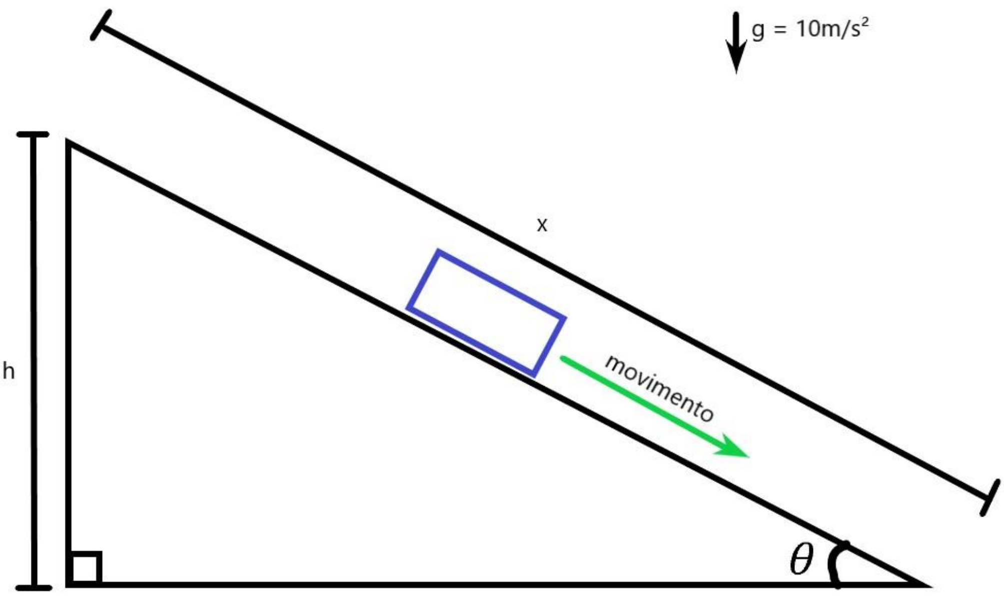
Fonte: elaborado pelo autor

Quando o movimento de deslizamento é iniciado passa a atuar o coeficiente de atrito cinético, que pode ser calculado pela expressão:

$$\mu_c = tg(\theta) - \frac{2x}{g\ t^2 \cdot \cos(\theta)}$$

Onde, g é a gravidade e vale aproximadamente $10\,m/s^2$, , x é o comprimento da rampa, t é o tempo gasto para o objeto percorrer x e θ é o ângulo de inclinação do plano inclinado quando o objeto começa a deslizar.

Figura 42 - Relação entre o coeficiente de atrito cinético e as grandezas físicas após iniciado o movimento.



Fonte: elaborado pelo autor

Neste experimento chegaremos a esses resultados através dos passos da Modelagem Matemática.

No entanto, para se chegar a esses resultados, são necessários alguns conhecimentos básicos da Física Clássica, como as famosas três Leis de Newton e ter conhecimento das equações do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV).

Vamos expor, de uma forma bem simplificada, esses conhecimentos prévios.

I) Leis de Newton

1- Lei da Inércia: um corpo tende a manter-se em repouso ou em movimento retilíneo uniforme até que uma força resultante não nula atue sobre ele.

2- Lei Fundamental da Dinâmica: a força resultante em um corpo é diretamente proporcional ao produto de sua massa pela aceleração.

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

3- Lei da ação e reação: para cada força de ação surgirá uma força de reação com mesma intensidade, mesma direção, porém com sentido oposto.

II) Equações do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV)

1- Função horária da posição

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

2- Função horária da velocidade

$$v = v_0 + at$$

onde x é a posição do móvel no instante de tempo t, x_0 é a posição inicial, v_0 é a velocidade inicial e a é a aceleração tida como constante e não nula para esse tipo de movimento.

Para maiores detalhes sobre esses conceitos, o leitor pode consultar o livro HALLIDAY, David; Resnik Robert, Krane, Denneth S. **Física 1.** 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, volume 1, 1996. 326 p.

Vamos agora iniciar o processo de modelagem matemática.

1- Escolha do Tema: coeficiente de atrito

O atrito é responsável por diversas situações do cotidiano. Muitas vezes pensamos no atrito como algo negativo, mas uma simples caminhada depende extremamente do atrito. Quando andamos, empurramos o chão para trás com os pés, e o chão, por sua vez, exerce uma força de atrito sobre os pés, empurrando-o para frente. Se não houvesse o atrito, ao tentar andar, ficaríamos deslizando no chão sem sair do lugar.

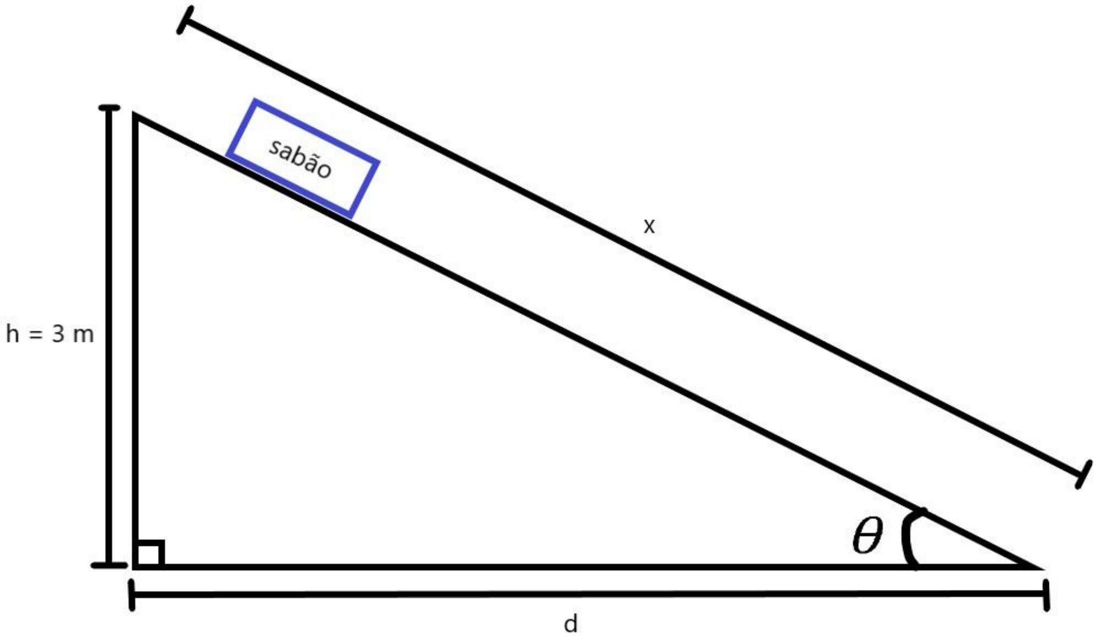
Sem o atrito não conseguiríamos segurar nenhum objeto e nem a roda de um carro conseguiria rolar e impulsioná-lo para frente. Pois é o atrito do pneu com o asfalto que faz com que ele se mova, caso contrário a roda ficaria deslizando sem sair do lugar. Essas são situações em que o atrito é importante e por isso vamos estudá-lo nesse experimento.

2- Situação Problema

Numa pequena fábrica de sabão da cidade o proprietário se depara com o seguinte problema: o sabão é produzido no 1º andar que fica a 3 m de altura do solo e as caixas devem descer por uma rampa até o térreo apenas por deslizamento. As caixas de sabão possuem 500g cada uma e devem chegar ao solo sem que fiquem emperradas no meio da rampa. É do interesse do proprietário conhecer o coeficiente de atrito estático máximo entre a rampa e as caixas de sabão, o ângulo θ mínimo formado entre a rampa e o chão para que as caixas deslizem, bem como o comprimento da rampa e a distância que o seu ponto de apoio vai ficar da parede. Resolvido essa parte do problema, as caixas entrarão em movimento deslizante assim que forem apoiadas sobre a rampa. Surgirão então mais dois problemas: qual o coeficiente de atrito cinético atuante e com que velocidade as caixas vão chegar ao final da rampa?

A Figura 43 ilustra bem o problema:

Figura 43 - Esquema do problema da fábrica.



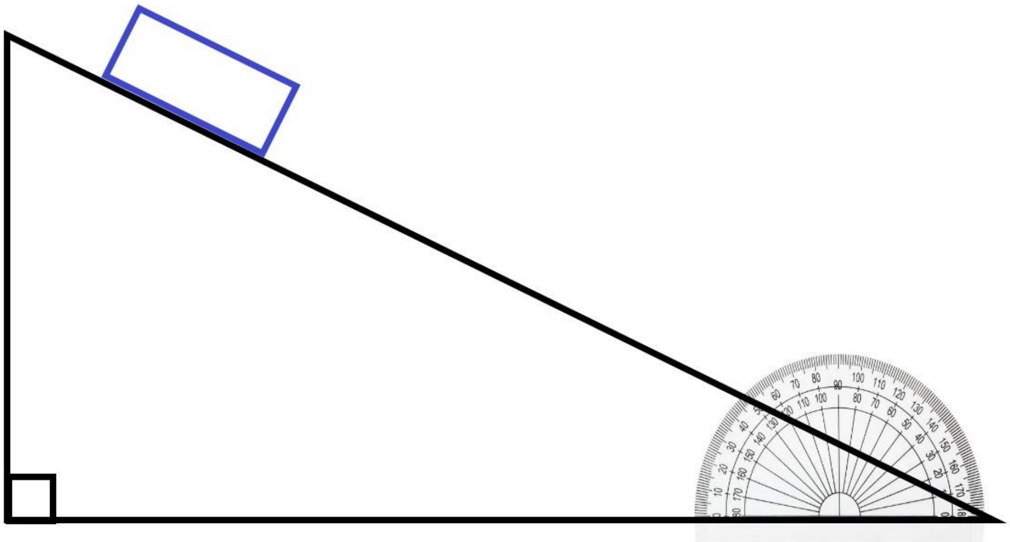
Fonte: elaborado pelo autor

3- Coleta de dados

O professor deve levar a turma ao local para conferir a altura de onde as caixas de sabão vão descer e o ângulo que a parede faz com a horizontal, que deve ser de 90°. Uma amostra do material que vai deslizar bem como uma amostra do pedaço da rampa deve ser recolhida.

Um experimento conforme o esquema (Figura 43) deve ser montado com o material recolhido:

Figura 44 - Esquema do experimento do coeficiente de atrito.



Fonte: elaborado pelo autor

O aluno deve apoiar o objeto (caixa de sabão) sobre a rampa feita do mesmo material da original. Em seguida deve ir aumentando o ângulo entre a rampa e o solo até que a caixa comece a deslizar. Em seguida deve retornar ao ângulo ligeiramente anterior no qual o objeto ficará na iminência do movimento. Com o auxílio de um transferidor, esse ângulo deve ser anotado.

No nosso exemplo, vamos considerar esse ângulo igual a 30°.

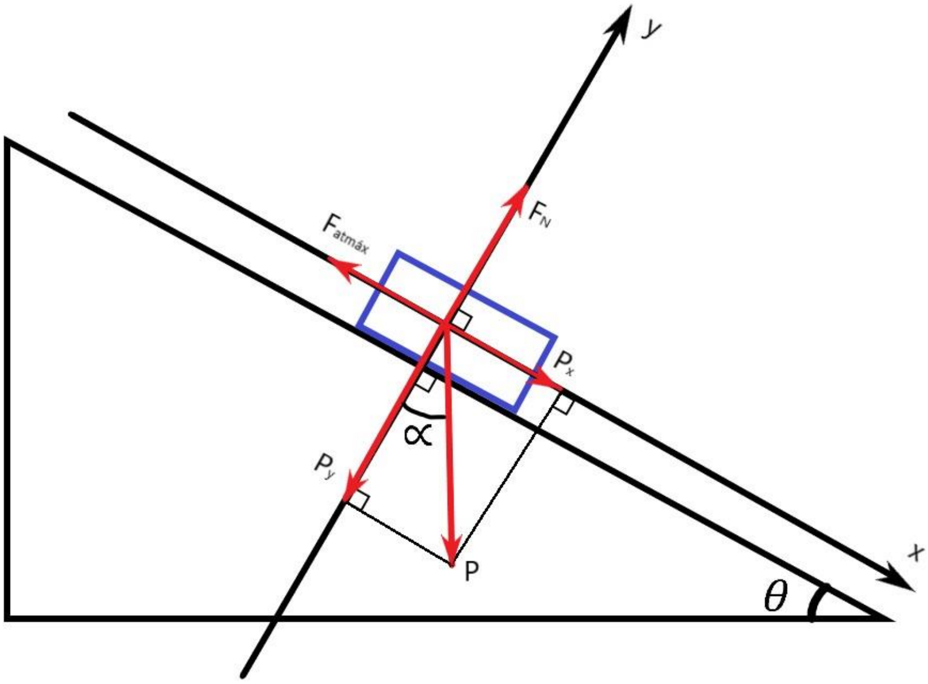
4- Simplificação dos dados

Esse passo será pulado por enquanto porque ainda não temos nenhum dado para simplificar.

5- Criação do Modelo Matemático

O primeiro passo para a criação do modelo matemático é o desenho da situação com a presença das forças atuantes na caixa de sabão. Vamos considerar, primeiro, a situação na qual a caixa está prestes a deslizar sobre a rampa, mas ainda está em repouso em relação a ela, ou seja, estamos no caso onde está atuando a força de atrito máxima. Para desenhar as forças (vetores) vamos utilizar o plano cartesiano e, para facilitar, vamos esboçá-lo com a mesma inclinação do plano inclinado da Figura 43:

Figura 45 - Esboço das forças atuantes na caixa de sabão.



Fonte: elaborado pelo autor

Como podemos ver, a força de atrito é a força contrária ao movimento de deslizamento da caixa, a força normal é a força que a superfície de contato exerce na caixa e, portanto, é perpendicular ao plano da rampa, e a força peso é a força que o centro de gravidade do planeta Terra exerce na caixa, sendo sua magnitude igual a

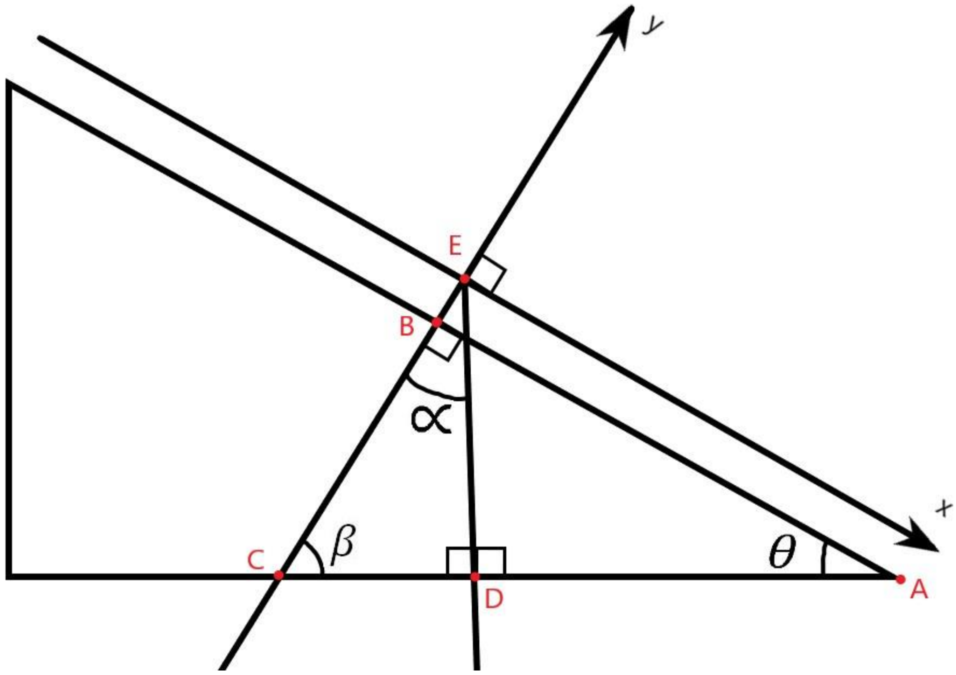
$$P = m \cdot g \quad ,$$

onde m é a massa e g é a gravidade, que vale, aproximadamente, $10 m/s^2$.

A força peso pode ser decomposta em suas componentes x e y. Porém, para isso, precisamos saber quanto vale o ângulo α da Figura 44.

Prolongando a reta que contem o vetor P, temos os triângulos ABC e EDC. Chamemos de β o ângulo formado entre o eixo y e o solo.

Figura 46 - Usando a soma dos ângulos internos de um triângulo para determinar α.



Fonte: elaborado pelo autor

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos que, no triângulo ABC:

$$\theta + 90° + \beta = 180°$$
$$\Rightarrow \beta = 90° - \theta \qquad \text{(I)}$$

No triângulo EDC, temos

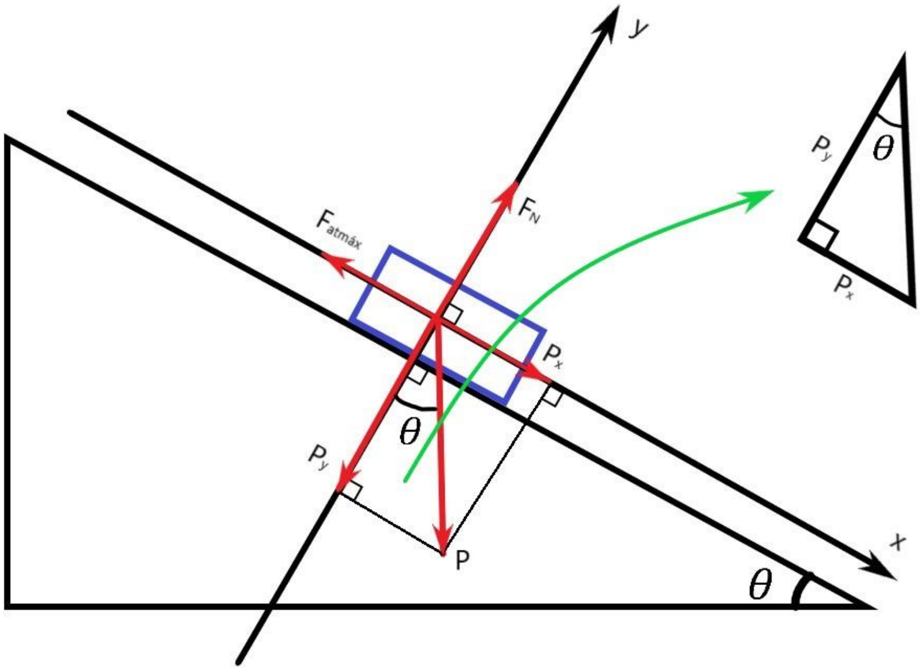
$$\alpha + 90° + \beta = 180°$$
$$\Rightarrow \beta = 90° - \alpha \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), temos que

$$90° - \theta = 90° - \alpha \Rightarrow \alpha = \theta$$

Dessa forma, temos o triângulo retângulo, cujos catetos são iguais a P_x e P_y·, e a hipotenusa igual a P.

Figura 47 - Decompondo a força peso (P).



Fonte: elaborado pelo autor

Aplicando-se as razões trigonométricas do triangulo retângulo, temos

$$sen(\theta) = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P\,sen(\theta)$$

e

$$\cos(\theta) = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P\cos(\theta)$$

Aplicando a segunda lei de Newton no eixo y, temos

$$F_R = m \cdot a$$

$$F_N - P_y = m \cdot 0$$

$$F_N = P_y$$

$$F_N = P\cos(\theta)$$

Aplicando a segunda lei de Newton no eixo x, temos

$$F_R = m \cdot a$$

$$P_x - F_{at_{máx}} = m \cdot 0$$

$$P_x = F_{at_{máx}}$$

$$F_{at_{máx}} = P\,\text{sen}(\theta)$$

A aceleração a foi considerada igual a zero, pois não há movimento do objeto em relação ao eixo y assim como não há movimento em relação ao eixo x, pois estamos considerando que o objeto ainda não está deslizando e, nesse caso, está agindo o coeficiente de atrito estático máximo.

Pela definição de força de atrito máxima, temos que

$$F_{at_{máx}} = F_N \cdot \mu_{e_{máx}}$$

$$P\,\text{sen}(\theta) = P\,cos(\theta) \cdot \mu_{e_{máx}}$$

$$\mu_{e_{máx}} = \frac{P\,\text{sen}(\theta)}{P\,cos(\theta)}$$

$$\mu_{e_{máx}} = tg(\theta)$$

Portanto, o coeficiente de atrito estático máximo é igual ao ângulo de inclinação θ quando o objeto está na iminência do deslizamento.

Vamos agora obter um modelo matemático para o coeficiente de atrito cinético, sou seja, o objeto já em movimento.

Aplicando a segunda Lei de Newton ao eixo x, temos

$$F_R = m\,a$$

$$P_x - F_{at_c} = m\,a$$

$$P\,sen(\theta) - \mu_c \cdot P\cos(\theta) = m\,a$$

$$m\,g\,sen(\theta) - \mu_c \cdot m\,g\cos(\theta) = m\,a$$

$$g\,sen(\theta) - \mu_c \cdot\ g\cos(\theta) =\ a \qquad \text{(III)}$$

Precisamos agora de uma expressão para a que dependa do tempo t. Pela função horária da posição de um móvel em MRUV, temos que

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = 0 + 0 + \frac{at^2}{2}$$

$$a = \frac{2x}{t^2} \qquad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV), temos

$$g\ sen(\theta) - \mu_c \cdot\ g\cos(\theta) = \frac{2x}{t^2}$$

$$\mu_c \cdot\ g\cos(\theta) = g\ sen(\theta) - \frac{2x}{t^2}$$

$$\mu_c = \left(g\ sen(\theta) - \frac{2x}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{g\cos(\theta)}$$

$$\mu_c = tg(\theta) - \frac{2x}{g\ t^2 \cdot \cos(\theta)}$$

6- Resolução do Problema

De posse do modelo matemático, vamos agora à solução do problema.

Vimos que o coeficiente de atrito máximo é igual à tangente do ângulo no qual o objeto fica na iminência do movimento. Portanto

$$\mu_{e_{máx}} = tg(\theta) = tg(30°) \approx 0{,}58$$

Como queremos que as caixas de sabão deslizem, a montagem na fábrica será feita com um ângulo maior que 30°. Usaremos 31°.

Portanto, pelo triângulo da Figura 42, temos

$$sen(31°) = \frac{3}{x} \Rightarrow x \approx 5{,}83\ m$$

e

$$\cos(31°) = \frac{d}{5{,}83} \Rightarrow d \approx 5\ m$$

A parte estática o problema foi resolvida. Vamos, agora, resolver a parte dinâmica, ou seja, quando as caixas estão em movimento.

Após a rampa ser colocada no lugar na fábrica, o professor deve retornar com os alunos para medir o tempo que as caixas levam para descer a rampa, ou seja, percorrer x.

A medida deve ser feita com um cronômetro várias vezes e depois um tratamento estatístico deve ser feito com os valores, conforme feito na seção 4.3.

No nosso exemplo vamos considerar que esse tempo médio foi de $1{,}8\ s$.

Dessa forma

$$\mu_c = tg(\theta) - \frac{2x}{g\ t^2 \cdot \cos(\theta)}$$

$$\mu_c = tg(31°) - \frac{2 \cdot 5,83}{10 \cdot\ 1,8^2 \cdot \cos(31°)}$$

$$\mu_c \approx 0,18$$

Para calcular a velocidade v com a qual as caixas chegam ao final da rampa podemos usar as equações do MRUV.

Pela equação (IV)

$$a = \frac{2 \cdot 5,83}{1,8^2} \approx 3,6\ m/s^2$$

E, finalizando o problema, temos

$$v = v_0 + at$$

$$v = 0 + 3,6 \cdot 1,8 \approx 6,48\ m/s$$

7- Análise crítica da solução

Na resolução desse problema com as técnicas da modelagem matemática os alunos serão capazes de desenvolver modelos matemáticos para o cálculo dos coeficientes de atrito estático e dinâmico, bem como interpretar os gráficos e unir a linguagem matemática ao fenômeno físico observado.

Durante o experimento o aluno pode apreender os conceitos de decomposição de forças apenas observando os triângulos retângulos sem precisar decorar nenhuma “fórmula pronta” presentes nos livros de Física do ensino médio.

As razões trigonométricas do triângulo retângulo também foram trabalhadas nessa atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização da Modelagem Matemática como um recurso didático para o estudo dos fenômenos físicos pode contribuir para a evolução dos conceitos cognitivos pré-existentes no intelecto dos estudantes e para o desenvolvimento de novos conceitos, proporcionando uma aprendizagem satisfatória e transformando o estudante num protagonista da sua evolução.

Esperamos, através dos experimentos aqui apresentados, estar contribuindo para a reflexão a respeito do uso da Modelagem Matemática em sala de aula, tendo como objetivo principal dar um significado à teoria e, assim, contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Também podemos destacar que a Modelagem Matemática aqui apresentada pode ser amplamente utilizada na elaboração de estudos interdisciplinares, buscando relacionar as Ciências da Natureza e suas tecnologias com a Matemática, objetivando dar significado a aprendizagem básica.

Finalizamos ressaltando que esse trabalho sobre Modelagem Matemática permite a adaptação dos experimentos pelos professores a sua realidade e ao nível de ensino no qual atua. Portanto esse trabalho deve ser visto como uma fonte de inspiração para que os professores atuantes desenvolvam as técnicas da Modelagem cada vez mais, melhorando os rumos da educação matemática no Brasil.

REFERÊNCIAS

A BRIEF HISTORY OF THE KILOGRAM, AND WHY SCIENTISTS ARE READY TO REVISE IT. Quartz Media, 2021. Disponível em: <https://qz.com/1458672/the-history-of-the-international-prototype-kilogram/>. Acesso em: 15 de set. de 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Matemática**. In: ALMEIDA, L. M . W.; SILVA, K. P. **Modelagem Matemática em foco.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014. p. 1-21.

BALANÇA DE WATT. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Balan%C3%A7a_de_watt>. Acesso em: 19 de set. de 2021.

BARATTO, A. C. (Organizador). **GUN – Guia para a Expressão de Incerteza e Medição.** Rio de Janeiro: IMETRO, 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática na sala de aula.** In: VIII encontro nacional de educação matemática, 2004, Recife. Anais do VIII Enem, Recife: Sbem-PE, 2004. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, Carlos Rodney. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BEAN, D. **O que é modelagem matemática?** Educação Matemática em Revista. Ed São Paulo, ano 8, n.9-10, p.49-57, abril. 2001.

BERRY, J e O'SHEA, T. Assessing Mathematical Modelling in: **International Journal of Mathematical Educations Science and Technology**, vol 13, 6, 1982.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016, Coleção contextos da ciência / coordenadores Carlos Aldemir Farias, Iran Abreu Mendes.

BRANDI, Humberto. **A redefinição das unidades do Sistema Internacional, o SI.** Na Medida, Inmetro, 2018, disponível em: <http://rweb01s.inmetro.gov.br/imprensa/namedida/2018/edic ao015-editorial-brandi.asp>

BRASIL. Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 27 de jul. de 2021.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, MEC / SEF, 1998.

BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. Bureau international des poids et mesures. **The International System of Units (SI)**, 9th edition, 2019. disponível em: <https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9.pdf>. Acesso em: 23 de set. de 2021

CAPRA, Fritjof. **O Tao da Física**. São Paulo: Cultrix, 1983.

CARTILHA DO NOVO SISTEMA INTERNACIONAL. Sociedade Brasileira de Metrologia, Rio de Janeiro, Texto adaptado de PTB Info Sheet – The new International System of Units (SI). Disponível em: <https://www.ptb.de/cms/en/presseaktuelles/brochures/brochu res-on-the-international-system-of-units-si>. html por Luciana de Sá Alves e Gelson Rocha. Acesso em: 24 de set. de 2021.

CHAVES, M. I. A.; ESPÍRITO SANTO, A. O. Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J.; BISOGNIN, E. (Org.) **Praticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.** Londrina: EDUEL, 2001, p. 161-179

CIÊNCIA PARA EDUCAÇÃO. Disponível em: <http://cienciaparaeducacao.org/pesquisador/maria-salett-biembengut/>. Acesso em: 05 de jun. de 2021.

CRISTOFOLETTI, A. **A modelagem de sistemas ambientais.** São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

DIEDRO. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Diedro>. Acesso em: 20 de Nov. de 2021.

EDUCAÇÃO É A BASE. Base nacional comum curricular, 2021. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 de maio de 2021.

ERSOY, Y; MOSCARDINI, A.O. **Mathematical Modelling Courses of Engineering Education.** Berlin: Springer – Verlag, 1994.

GRADE CURRICULAR DO CURSO DE MATEMÁTICA. Campus de Aquidauana, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Disponível em: <https://cpaq.ufms.br/matematica/grade-curricular-matematica/>. Acesso em: 10 de fev. de 2021.

HALLIDAY, David; Resnik Robert, Krane, Denneth S. **Física 1.** 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, volume 1, 1996. 326 p.

INMETRO. **Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados (VIM 2012).** Duque de Caxias, RJ : INMETRO, 2012. 94 p. Traduzido de: International Vocabulary of Metrology: Basic and general concepts and associated terms – JCGM 200:2012. 3rd. ed. 2012. Traduzido por: grupo de trabalho luso-brasileiro ISBN: 978-85-86920-09-7. Disponível em: <https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/documentos-tecnicos-em-metrologia/vim_2012.pdf/view>. Acesso em: 23 de set. de 2021.

IRITANI, M. A. **Modelação matemática tridimensional para a proteção das captações de água subterrânea.** 1998. 200f. Tese (Doutorado em Hidrogeologia) – Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

ISSAC NEWTON. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton>. Acesso em: 15 de Nov. de 2021.

KRUGGMAN, Paul. **Desarrollo, Geografía y Teoría Económica**. Tradução de Adelina Comas. Barcelona: Antoni Bosch, 1995.

MACHADO, N.J. **Educação: Projetos e Valores.** São Paulo: Escrituras, 2000.

MAKI, D. P.; THOMPSON, M., **Mathematical Models and Applications**, Englewood Cliffs N. J. Prentice – Hall, 1973.

MICHAELLIS. Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. Editora Melhoramentos, 2021. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/modelagem/>. Acesso em: 19 de Nov. de 2021.

MICROGRAPHIA. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Micrographia>. Acesso em: 15 de Nov. de 2021.

O NOVO SISTEMA DE INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI). Sociedade Brasileira de Metrologia/ Sociedade Brasileira de Física. Disponível em: <https://metrologia.org.br/wpsite/wp-

content/uploads/2019/07/Cartilha_O_novo_SI_29.06.2029.pdf>. Acesso em: 13 de set. de 2021.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, Ensino Médio. Portal do MEC. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 25 de jul. de 2021.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, Matemática. Portal do MEC. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 25 de jul. de 2021.

PIERRE DE FERMAT. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat>. Acesso em: 15 de dez. de 2021.

ROBERT HOOKE. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Robert_Hooke>. Acesso em: 15 de Nov. de 2021.

ROYAL SOCIETY. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Royal_Society>. Acesso em: 15 de Nov. de 2021.

SODRÉ, Ulysses. **Modelos Matemáticos**. Londrina: Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, 2007.

TELESCÓPIO ESPACIAL JAMES WEBB. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Telesc%C3%B3pio_Espacial_James_Webb>. Acesso em: 12 de set. de 2021.

TRANSFERIDOR. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Transferidor>. Acesso em: 22 de dez. de 2021.