UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROFMAT

JOILSON SENA DE SOUSA

O PROBLEMA DE NEUSIS E OS ELEMENTOS DE EUCLIDES:

Uma proposta de investigação para o ensino da geometria.

Santarém-Pará

2021

JOILSON SENA DE SOUSA

O PROBLEMA DE NEUSIS E OS ELEMENTOS DE EUCLIDES:

Uma proposta de investigação para o ensino da geometria.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação para obtenção do título de Mestre em Matemática; Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação.

Orientador: Prof. Dr. Cassio André Sousa da Silva.
Coorientador: Prof. MSc. Miguel Angelo M. de Sousa

Santarém-Pará

2021

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas (SIBI) da UFOPA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFOPA - Biblioteca Unidade Rondon

Sousa, Joilson Sena de.
O problema de Neusis e os elementos de Euclides: uma proposta de investigação para o ensino da geometria / Joilson Sena de Sousa. - Santarém, 2021.
46fl.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação). Universidade Federal do Oeste do Pará-UFOPA. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.
Orientadores: Cassio André Sousa da Silva, Miguel Angelo M. de Sousa.

1. Trissecção. 2. Geometria. 3. Neusis. 4. Euclides. I. Silva, Cassio André Sousa da. II. Sousa, Miguel Angelo M. III. Título.
UFOPACampus Rondon CDD 23.ed. 516

Elaborado por Selma Maria Souza - CRB-CRB2/1096

JOILSON SENA DE SOUSA

O PROBLEMA DE NEUSIS E OS ELEMENTOS DE EUCLIDES:
Uma proposta de investigação para o ensino da geometria.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação para obtenção do título de Mestre em Matemática; Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação.

Orientador: Prof. Dr. Cassio André Sousa da Silva.
Coorientador: Prof. MSc. Miguel Angelo M. de Sousa

Dissertação defendida e aprovada em 12/10/2021 pela comissão julgadora:

____
Prof. Dr. Cassio Andre Sousa da Silva
Universidade Federal do Oeste do Pará

____
Prof. MSc. Miguel Angelo Moraes de Sousa
Universidade Federal do Oeste do Pará

____
Prof. Dr. José Antonio Oliveira Aquino
Universidade Federal do Oeste do Pará

____
Prof. Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma
Universidade Federal do Pará

Dedico a Deus e à minha família.

AGRADECIMENTOS

* A Deus, por mais uma etapa vencida com saúde e fé.

* A minha esposa Maria Ivanubia, por estar sempre ao meu lado.

* A minha família que me deu forças com palavras e orações.

* Aos meus irmãos, Evaldo e Evandro, por me permitirem partir em busca deste objetivo.

* Aos meus orientadores, Professor Cássio e Professor Miguel, pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho e também durante o curso.

* Aos professores do curso que sempre me apoiaram e trataram com respeito.

* Ao meu amigo, professor Dennison, por ser meu eterno incentivador.

* À SBM e ao PROFMAT-UFOPA pela oportunidade que me foi concedida de cursar esta pós-graduação.

* E aos meus colegas de turma que dividiram comigo os dias de luta dessa caminhada.

RESUMO

As tentativas frustradas de resolução do problema da trissecção de um ângulo qualquer resultaram em inúmeras descobertas matemáticas e serviram de fonte para o surgimento de novas ideias e caminhos desconhecidos, é neste universo de tentativas e erros que se encontra este trabalho. Por meio do problema de neusis, assim definido pelos gregos, será estudado o desafio de trissectar (encontrar a terça parte) um ângulo qualquer utilizando apenas régua e compasso, aplicando a base teórica dos postulados descritos no primeiro livro (ou capítulo) da mais famosa obra de Euclides: "Os elementos". Mesmo sabendo que Wantzel comprovara ser uma tarefa matematicamente impossível de ser executada, tem-se como objetivo trissectar o ângulo, utilizando apenas régua e compasso, por meio da aplicação deste problema. Para isso, foram feitos apanhados teóricos das proposições do livro I de Euclides, da história sobre a trissecção, assim como das aplicações já conhecidas para o problema de neusis. Utilizando esses apanhados teóricos, no método de tentativa e erro, foi encontrada uma nova forma de se fazer algumas trissecções exatas e também satisfatórias aproximações para ângulos agudos, sempre obedecendo às regras de construção dos elementos euclidianos. Os apanhados teóricos, as trissecções exatas e as aproximações foram organizados para apresentação seguindo o roteiro de uma sequência didática não rígida, visando aplicação como proposta de ensino de geometria para o ensino fundamental, médio ou superior. Ao final do trabalho são apresentados alguns exercícios de trisseções exatas e também de algumas aproximações, o apêndice B mostra uma estrutura de sequência didática com o tema deste trabalho para auxiliar o professor que desejar utilizá-lo como suporte para o ensino da geometria.

Palavras – Chave: Trissecção. Euclides. Geometria. Neusis.

ABSTRACT

The frustrated attempts to solve the problem of the trisection of any angle resulted in innumerable mathematical discoveries and served as a source for the emergence of new ideas and unknown paths. It is in this universe of trial and error that this research is found. Even knowing that Wantzel had proven it to be a mathematically impossible task to perform, we will study the challenge of trisecting (finding the third part) any angle using only a ruler and compass, through the neusis problem, as defined by the Greeks, by applying the theoretical basis of the postulates described in the first book (or chapter) of Euclid's most famous work: "The elements". For this purpose, we made a theoretical overview of the propositions of Euclid's book I, the history of trisection, as well as the already known applications for the neusis problem. By using these frameworks as a theoretical background, in the trial-and-error method, we have found not only a new way to make some exact trisections but satisfactory approximations for acute angles as well, always obeying the construction rules of the Euclidean elements. The theoretical overviews, the exact trisections and the approximations were organized for presentation following the script of a non-rigid didactic sequence, aiming to be applied as a geometry teaching proposal for elementary, high school or college. At the end of this paper, we present some exercises of exact trisections and some approximations. Appendix B shows a didactic sequence structure with the theme of this research to assist the teacher who wishes to use it as a support for teaching geometry.

Keywords: Trisection. Euclides. Geometry. Neusis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este estudo sobre a trissecção de um ângulo qualquer utilizando os elementos euclidianos tem como meta a trissecção por meio do problema de neusis, de modo que o processo de investigação ocorra pelos moldes de uma sequência didática, passível de aplicação no ensino da geometria a nível fundamental, médio ou superior. Como sequência didática será considerada a seguinte definição geral:

> [...] uma sequência didática é uma unidade de trabalho durante a qual os alunos devem colocar em prática suas competências (habilidades e atitudes requeridas para o exercício de uma função) assimiladas, consolidadas, adquiridas anteriormente e não perfeitamente estabilizadas e primordialmente para aquisição de novas competências (NUNES S.; NUNES V., 2019)

Esta estrutura de sequência didática, apresentada por Nunes S. e Nunes V. (2019), baseia-se na teoria das situações didáticas (TSD), e pode ser resumidamente dividida em três fases: imersão e familiarização textual, conceitualização e descontextualização e reinvestimento, essas fases visam imergir o estudante ao processo de contextualização, conceitualização e aplicação dos conceitos abordados. A disposição dos capítulos deste trabalho segue este roteiro de atividade, ao final é apresentada uma estrutura de sequência didática não rígida (passível de adaptações) com o tema apresentado, veja apêndice B.

Buscando ambientar o leitor aos temas que serão abordados, este capítulo apresenta uma breve contextualização sobre a importância das tentativas de trissecção, a importância da obra de Euclides para o desenvolvimento da geometria e o que torna o problema de neusis um caminho possível para a trissecção, obedecendo às regras apresentadas. Esta ambientação se faz necessária devido à dinâmica que envolve a construção da trissecção, assim como a existência de uma possível relação de causa e efeito entre a necessidade de se trissectar um ângulo qualquer e os postulados contidos na obra de Euclides. O problema de neusis também surge como consequência desta necessidade, o leitor interessado em mais detalhes sobre estes temas pode consultar Boyer (1974) e Eves (2011).

1.1 A trissecção

A trissecção de um ângulo qualquer é um problema que surgiu aproximadamente no século III a.C, dizemos uma aproximação devido a não se ter registros de como ou quando exatamente surgiu a necessidade de se fazer a trissecção. Esse período, considerado por Boyer (1974) como a idade heroica da matemática, foi um dos mais produtivos para o desenvolvimento do pensar matemático. Apesar dos poucos recursos, foi nessa época que alguns matemáticos oriundos das escolas jônicas e pitagóricas se debruçaram sobre problemas avançados da geometria, fundamentando os trabalhos posteriores a essa época.

Dentre os problemas estudados três se mostraram desafiadores e sem solução. A duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo utilizando apenas régua e compasso perduraram por mais de dois milênios até que se demonstrasse uma possível impossibilidade de construção. Este "fracasso" em alcançar o objetivo não ofuscou o período de pesquisas dedicado aos três problemas, visto que os frutos dessa busca resultaram em trabalhos como o "Os Elementos", de Euclides de Alexandria.

Somente no século XIX, mas precisamente em 1837, o discreto matemático francês Pierre Laurent Wantzel, filho de um militar e uma do lar, publicou no journal de mathématiques o artigo Recherches sur les moyens de reconnaítre si um proble'me de géometrie peut se résoudre avec lá régle et la compas (Pesquisa sobre os meios de reconhecer se um problema pode ser resolvido por meio de régua e compasso) afirmando a impossibilidade de se trissectar um ângulo qualquer utilizando apenas régua e compasso. Wantzel não era o primeiro a afirmar essa impossibilidade, visto que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss já tinha feito essa mesma afirmação, sem apresentar provas (BARBOSA, 2011).

Para embasar sua afirmação, Wantzel expressou o problema de forma algébrica e mostrou que os problemas geométricos que possuem solução com o uso exclusivo de régua e compasso sempre podem ser traduzidos através de equações de grau $2^n (n \in N)$ e depois mostrou que a solução para o problema da trissecção depende da equação cúbica irredutível $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$, uma equação de grau 3, diferente de $2^n (n \in N)$, provando a impossibilidade de se fazer a trissecção de um ângulo agudo qualquer utilizando apenas régua e compasso (BARBOSA, 2011).

A força motriz que impulsiona a continuar estudando a trissecção, mesmo diante de uma possível impossibilidade, está bem definida na seguinte afirmação: "A idade heroica fracassou em seu objetivo imediato, sob as regras, mas seus esforços foram coroados por brilhante sucesso em outros pontos" (BOYER, 1974, p. 48). Entendo que buscar a trissecção utilizando régua e compasso pode resultar não só em alcançar o objetivo almejado como também construir um trabalho que possa servir futuramente como base para outros desenvolvimentos matemáticos, além de servir como eficaz abordagem educacional para o ensino da geometria.

1.2 A obra “Os Elementos”

A geometria tem como maior referência o matemático Euclides de Alexandria (Século III a.C), que ao escrever o livro "Os elementos" deu origem ao que é conhecido como geometria Euclidiana. Os primeiros registros históricos de desenhos geométricos vêm de muito antes de Euclides, o papiro de Rhind com data de 1650 a.C já continha desenhos geométricos para apresentar os cálculos sobre áreas, mas somente com Euclides a geometria ganhou forma, conceitos e proposições que permitem sua aplicação de forma eficaz e sistêmica. Euclides, assim como os matemáticos da idade heroica, também não obteve êxito ao buscar a solução para os três problemas clássicos da matemática, porém, sua obra abrange desde a definição de ponto até o raciocínio lógico e os incomensuráveis, sendo utilizada como principal fundamentação teórica para trabalhos geométricos por mais de dois mil anos, e que também fundamentará o desenvolvimento deste trabalho.

Segundo Commandino (1944), a obra é composta por treze livros que contêm 465 proposições. O livro I contém 48 proposições e inicia mostrando as definições, postulados e axiomas que fundamentam a geometria, seguem com os postulados sobre triângulos, retas, paralelogramos e áreas, e se encerra com o teorema de Pitágoras, veja apêndice A. Todos os axiomas, postulados e proposições do livro satisfazem as regras de utilização dos elementos euclidianos e isso permite utilizá-los nas construções apresentadas nos tópicos seguintes.

1.3 O Problema de neusis

Neste trabalho, aborda-se o problema de neusis que, segundo Eves (2011, p. 138), foi aplicado por Nicomedes no desenvolvimento da Conchóide e, segundo Roque (2012), foi aplicado por Arquimedes na tentativa da trissecção por meio da espiral. Este problema, em sua aplicação original, não segue as regras de resolução dos elementos euclidianos, tanto na abordagem de Nicomedes, apresentada por Eves (2011), como na abordagem de Arquimedes apresentada por Roque (2012), o problema é aplicado utilizando régua graduada, ação incompatível com as regras de resolução, e isso diferencia as aplicações citadas das aplicações presentes neste trabalho.

Com a utilização de régua graduada, o problema perde parte do sentido, visto que o nome “problema de neusis” tem como significado, em tradução livre, o problema de construir um segmento que satisfaça as condições apresentadas e APONTE para o vértice do ângulo. Não é incomum encontrar quem veja neusis como mais um matemático grego, devido ao nome do problema, e é compreensível, uma vez que os elementos de Euclides, a conchóide de Nicomedes e a aspiral de Arquimedes são obras dos matemáticos Euclides, Nicomedes e Arquimedes, respectivamente. Porém, que fique claro, neusis não foi um matemático grego, e o nome do problema tem relação com a necessidade de o segmento criado apontar para o vértice do ângulo.

Essa necessidade de resolução da trissecção, utilizando régua não graduada e compasso, se dá pelo fato de o compasso e a régua não graduada representarem figuras geométricas clássicas de alto grau de perfeição, a reta e o círculo. A resolução dos problemas clássicos da geometria, por meio da utilização de elementos essencialmente geométricos, era o objetivo almejado e por isso as resoluções apresentadas tinham por condição a utilização dos elementos euclidianos obedecendo às regras de sua utilização, Roque (2012).

A contextualização do problema de neusis, juntamente com as regras de resolução citadas acima, é apresentada a seguir.

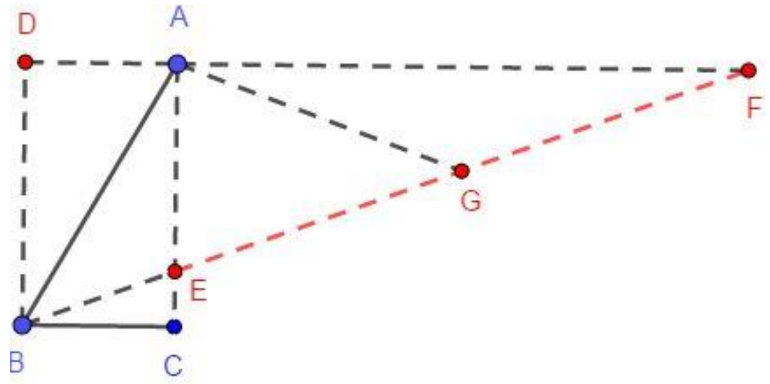
O referido problema consiste na seguinte afirmação:

Qualquer ângulo $A\hat{B}C$ agudo (figuras 1 e 2), com $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{BC}$, pode ser tomado como o ângulo entre uma diagonal $\overline{BA}$ e um lado $\overline{BC}$ de um retângulo BCAD. Considerando uma linha reta que contém B e corta $\overline{CA}$ no ponto E, e o prolongamento $\overrightarrow{DA}$ no ponto F tal que $\overline{EF} = 2(\overline{BA})$, tem-se que:

Figura 1 - Ângulo qualquer

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 2 - Problema de neusis



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Se G é o ponto médio de $\overline{EF}$, então $\overline{EG} = \overline{GF} = \overline{BA} = \overline{GA}$.

Logo, $A\hat{B}G = A\hat{G}B = G\hat{A}F + G\hat{F}A = 2G\hat{F}A = 2G\hat{B}C$.

Portanto, $A\hat{B}G = 2G\hat{B}C$ e o segmento $\overline{BEF}$ trissecciona o ângulo $A\hat{B}C$ (EVES, 2011, p. 137). Essa demonstração será revista na seção dois deste trabalho utilizando os postulados de Euclides.

Com isso, o problema se resume a construir um segmento $\overline{EF}$ de comprimento $2(\overline{BA})$, entre $\overline{AC}$ e o prolongamento $\overline{DA}$, de modo que $\overline{FE}$ aponte para o ponto B. Vale ressaltar que o verbo apontar, em grego, segundo Eves (2011), se escrevia *neuein* inspirando o nome dado ao problema.

Para resolver este problema utilizando apenas régua e compasso é necessário obedecer às duas regras de utilização destes instrumentos, que são conhecidos como os instrumentos Euclidianos, são elas:

- Com a régua é permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados.

- Com o compasso é permitido traçar uma circunferência com centro em um ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado.

Estas regras transformam a busca pela solução em um jogo fascinante e absorvente, visto que a partir do ângulo dado tem-se que chegar até ao segmento $\overline{EF}$ citado com a limitação de apenas dois movimentos, podendo ser repetidos ilimitadamente. Para isso, se tratando de um problema de geometria com utilização dos instrumentos euclidianos, será aplicado como suporte teórico o primeiro livro da mais famosa obra de Euclides: “Os Elementos”, nele constam as proposições acerca de retas, triângulos, quadriláteros, círculos e ângulos, julga-se não haver nada mais apropriado para fundamentar a experiência.

Esse “jogo” de construções, aplicado ao problema de neusis, pode ser trabalhado nos anos iniciais do ensino da geometria objetivando familiarizar os alunos aos postulados de Euclides e sua importante obra. Tal aplicação estaria presente neste trabalho caso o ano de sua produção não fosse o ano de 2021, ano de pandemia do Covid-19 no Brasil, ficando aberta a possibilidade de aplicação futura.

1.4 Desenvolvimentos do trabalho

Para apreciação, o trabalho está dividido em quatro seções. Na primeira seção são apresentadas as contextualizações sobre a trissecção, à obra euclidiana e o problema de neusis; a dinâmica de resolução utilizando apenas régua e compasso; a base teórica aplicada na resolução e a organização do desenvolvimento. Na segunda seção faz-se um breve histórico sobre o surgimento de Euclides na história da matemática, o problema de neusis, a construção e a demonstração do problema utilizando as proposições do livro I da obra “Os Elementos”. Na terceira seção são demonstrados, utilizando o problema de neusis, os casos em que podemos trissectar um ângulo de forma exata e como podemos trissectar, de forma aproximada, um ângulo agudo qualquer. Na quarta e última seção apresentam-se as considerações finais sobre as construções, postulados e teoremas apresentados.

2 OS POSTULADOS DE EUCLIDES E O PROBLEMA DE NEUSIS

As trissecções e aproximações apresentadas no próximo capítulo deste trabalho são fundamentadas na obra de Euclides e no problema de neusis. Por essa razão, este capítulo apresenta quem foi Euclides de Alexandria, como ele surgiu na história da matemática e as construções utilizando os elementos euclidianos, respeitando as regras de construção que permitem utilizar tal problema nas trissecções e aproximações apresentadas.

2.1 Euclides de Alexandria

Euclides de Alexandria foi o matemático responsável pelo departamento de matemática da Universidade de Alexandria, criada durante o período heroico citado por Boyer (1974), e seu surgimento coincide com o surgimento desta universidade. Eves (2011) traz uma contextualização do surgimento da universidade e consequentemente do surgimento de Euclides na história da matemática. Segundo este autor, a cidade de Alexandria foi fundada em 332 a.C, no Egito, pelo rei Alexandre - O Grande - durante a expansão de seu império, império esse que foi disputado e dividido entre seus líderes militares após sua morte, ocorrida em 323 a.C. Após alguns anos de disputa, precisamente dezessete anos depois, coube ao cientista grego Ptolomeu governar o Egito, região que continha a cidade de Alexandria, e fez de Alexandria sua capital. Para atrair os sábios ao seu território e adquirir vantagem intelectual frente aos demais governantes, Ptolomeu construiu o que seria a maior universidade da época, a Universidade de Alexandria, concluindo os trabalhos no ano 300 a.c.

A Universidade criada tinha entre seus atrativos salas de aula, laboratórios e sortida biblioteca que era o seu sustentáculo. Ptolomeu escolheu o matemático platônico e escritor grego Euclides de Alexandria para dirigir o departamento de matemática, e assim surgiu na história da matemática aquele que viria a ser considerado o pai da geometria. Não há registros sobre o nascimento ou morte de Euclides, nem mesmo sobre suas características físicas e por isso não se sabe de onde veio ou se para algum outro lugar ele foi além da cidade de Alexandria, o que se sabe é que a obra produzida por ele mudou o curso do estudo matemático. Vale ressaltar que neste período Euclides produziu outras obras importantes para o estudo da matemática, mas sua principal contribuição e que também é objeto deste trabalho, é a obra “Os Elementos”.

2.2 O Problema de neusis como solução da trissecção.

Antes de apresentar o problema de neusis como um caminho possível para a trissecção de um ângulo agudo qualquer, é necessário apresentar a construção do problema obedecendo às regras de utilização dos instrumentos euclidianos, esta construção é o tema abordado neste tópico e serão feitas aplicações das seguintes definições, postulados e proposições do livro I de Euclides (COMMANDINO, 1944).

Definições:

I – Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.

IV – Linha reta é aquela que está posta igualmente entre suas extremidades.

VIII – Ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas que se tocam em uma superfície plana, sem estarem em direitura uma com a outra.

X – Quando uma linha reta, caindo sobre outra linha reta, fizer com esta, dois ângulos iguais, um de uma, e outro de outra parte, cada um desses ângulos iguais se chama ângulo reto; e a linha incidente se diz perpendicular à outra linha sobre a qual cai.

XII – Ângulo agudo é o que é menor que o ângulo reto.

Postulados:

I - Pode-se, como coisa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto, uma linha reta.

III – E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo.

Proposições:

I – Sobre uma linha reta determinada descrever um triângulo equilátero.

IX – Dividir em duas partes iguais um ângulo retilíneo dado.

X – Dividir em duas partes iguais uma linha reta de um comprimento dado.

XI – De um ponto dado em uma linha reta dada levantar uma perpendicular sobre a mesma reta dada.

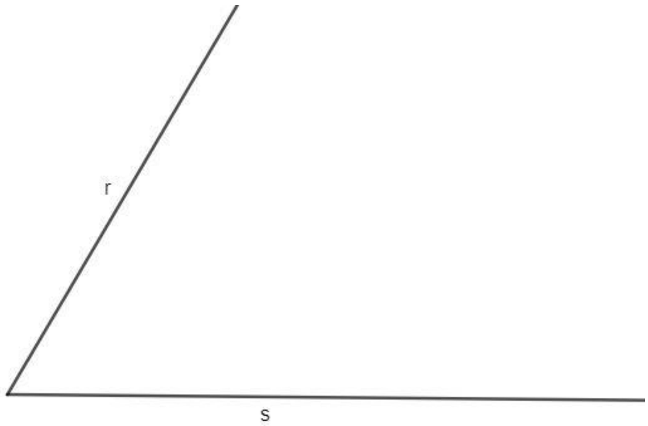
XII – Conduzir uma perpendicular sobre uma linha reta dada indefinita de um ponto dado fora dela.

2.2.1 Construção do Problema.

Fazendo uso do exposto acima, considere a seguinte construção.

Sejam r e s duas linhas retas que se tocam em uma superfície plana formando um ângulo agudo qualquer conforme as definições IV, VIII, X e XII do livro I (figura 3)

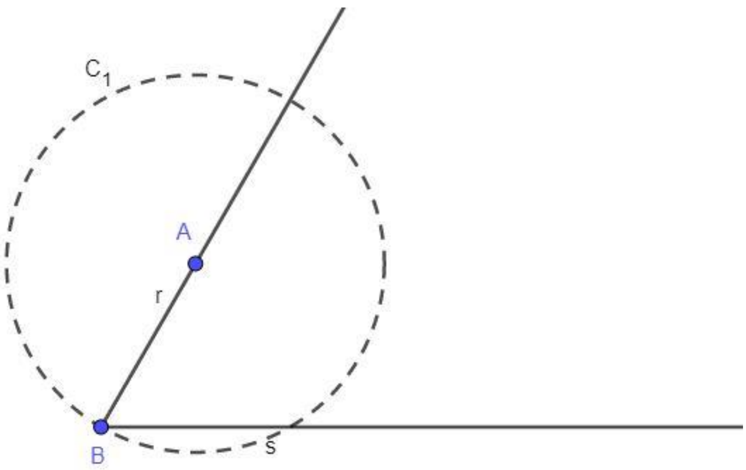
Figura 3 - Linhas retas r e s



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Marcando o ponto B na interseção das linhas r e s, e marcando um ponto A qualquer na linha r, pode-se descrever o círculo C_1 de centro A e intervalo $\overline{AB}$ conforme definição I e postulado III do livro I (figura 4)

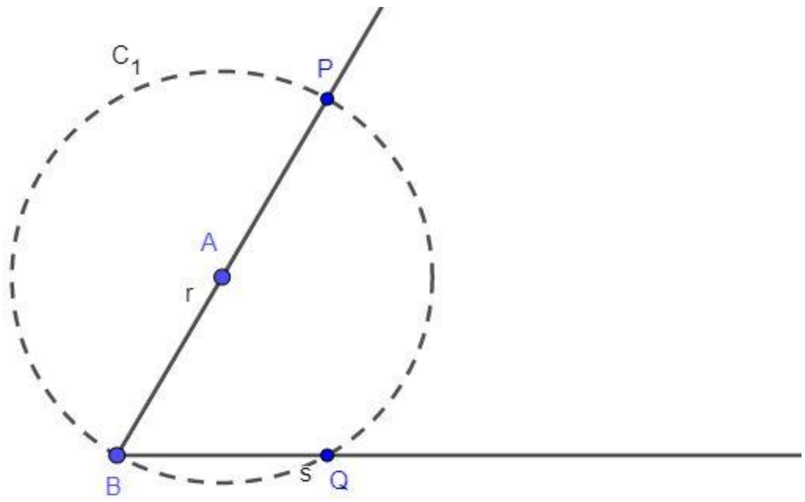
Figura 4 - Círculo C_1



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Marca-se o ponto P na interseção de C_1 com a linha r e marca-se o ponto Q na interseção de C_1 com a linha s (figura 5).

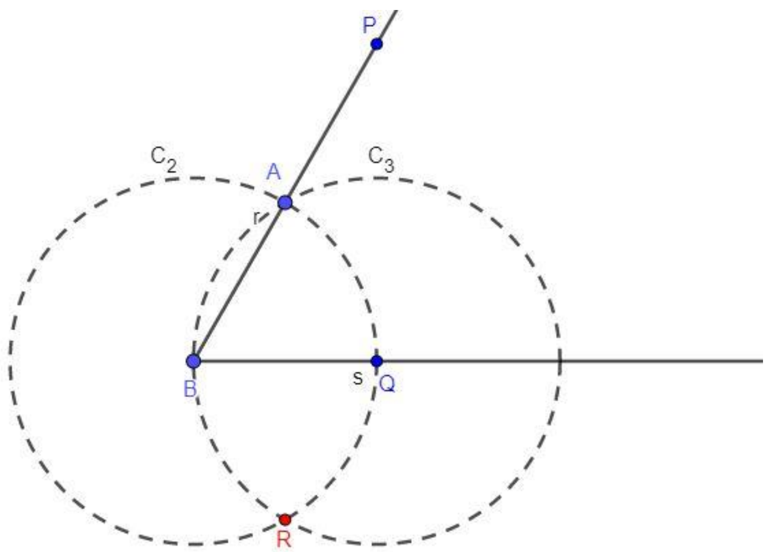
Figura 5 - Pontos P e Q



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Com o centro no ponto B e intervalo $\overline{BQ}$ descreve-se o círculo C_2, com o centro no ponto Q e intervalo $\overline{QB}$ descreve-se o círculo C_3 e marcam-se os pontos R e A' nas interseções de C_2 com C_3 (figura 6). Note que neste exemplo o ponto A' coincidiu com o ponto A, mesmo que isso não ocorra, a construção permanece válida.

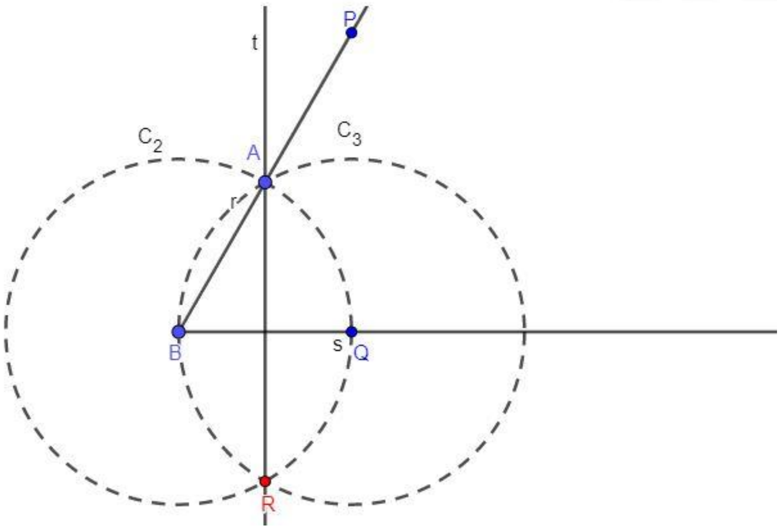
Figura 6 - Círculos C_2 e C_3



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

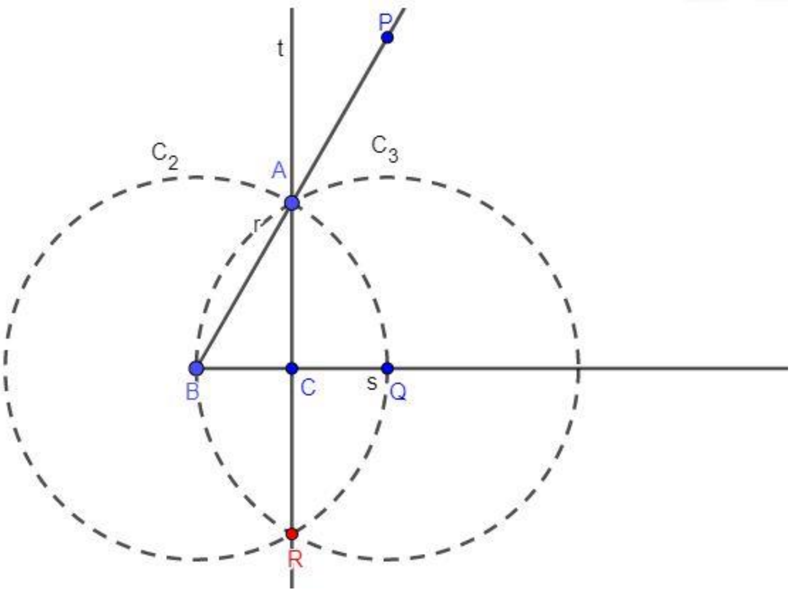
De acordo com o postulado I do livro I, é possível traçar a linha reta t que contêm os pontos A e R e marcar o ponto C na interseção da linha t com a linha s (figuras 7 e 8). O ponto C é ponto médio do segmento $\overline{BQ}$.

Figura 7 - Reta t



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

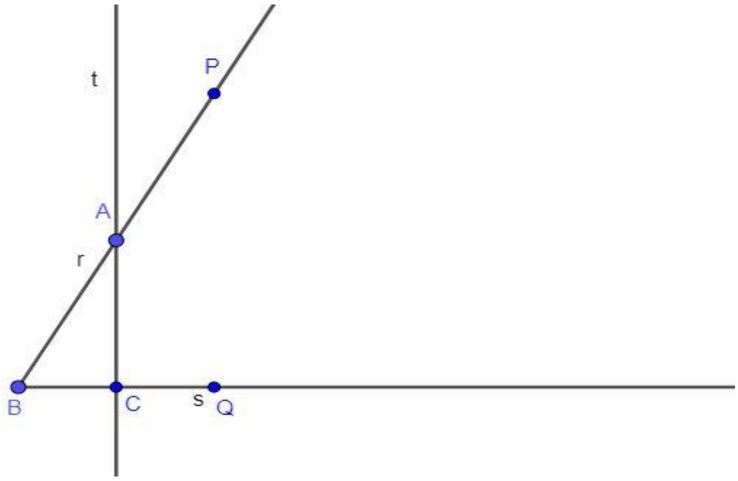
Figura 8 - Ponto C



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

De acordo com as proposições I, IX, X e XII do livro I, a linha reta t é perpendicular à linha reta s (figura 9)

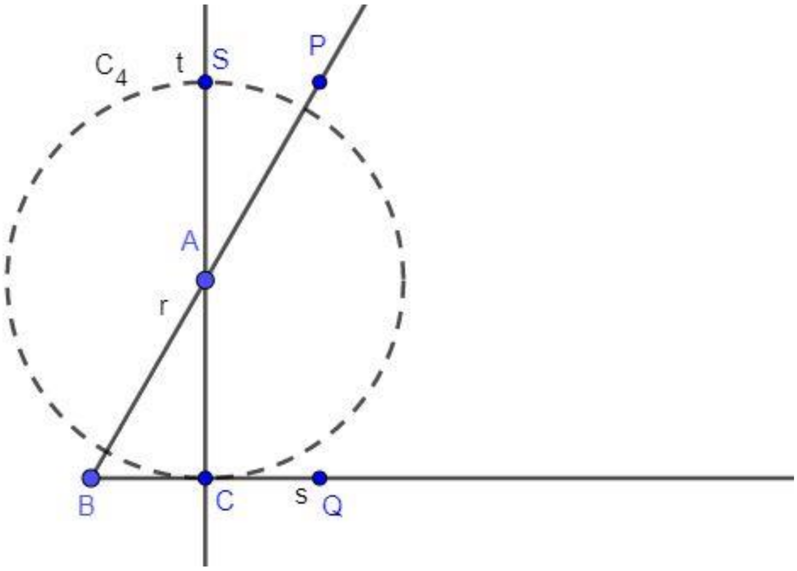
Figura 9 - Reta t perpendicular a reta s



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Com o centro no ponto A e intervalo $\overline{AC}$, descreve-se o círculo C_4 e marca-se o ponto S na interseção da linha reta t com o círculo C_4, note que o ponto C também é interseção de t com C_4 (figura 10).

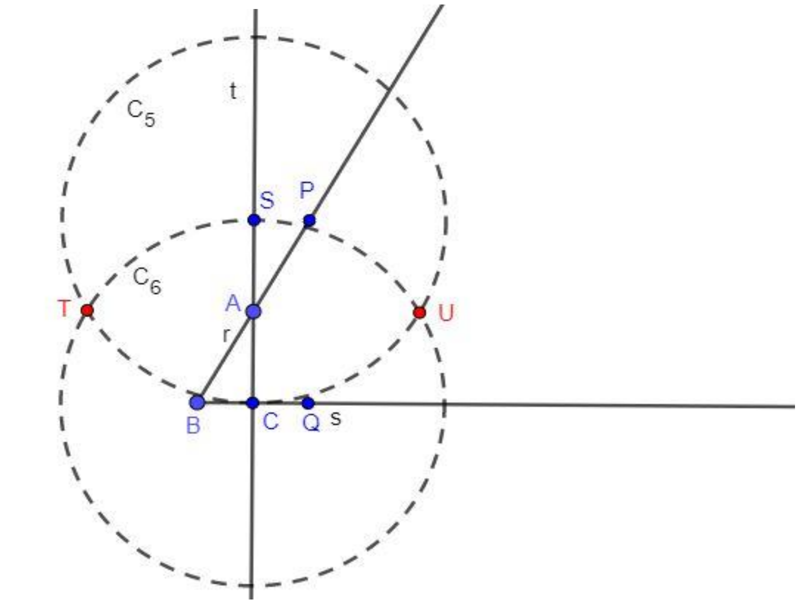
Figura 10 – Círculo C_4 e ponto S.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Com o centro no ponto S e intervalo $\overline{SC}$ descreve-se o círculo C_5, com o centro no ponto C e intervalo $\overline{CS}$ descreve-se o círculo C_6 e marcam-se os pontos T e U nas interseções de C_5 com C_6 (figura 11).

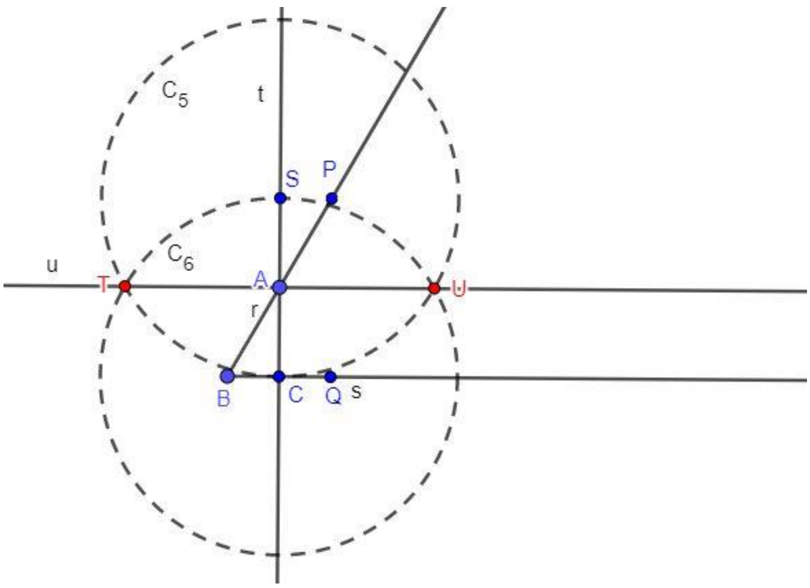
Figura 11 - Círculos C_5 e C_6



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Traçando a linha reta u que contém os pontos T e U, tem-se que a linha reta u também contém o ponto A (figuras 12).

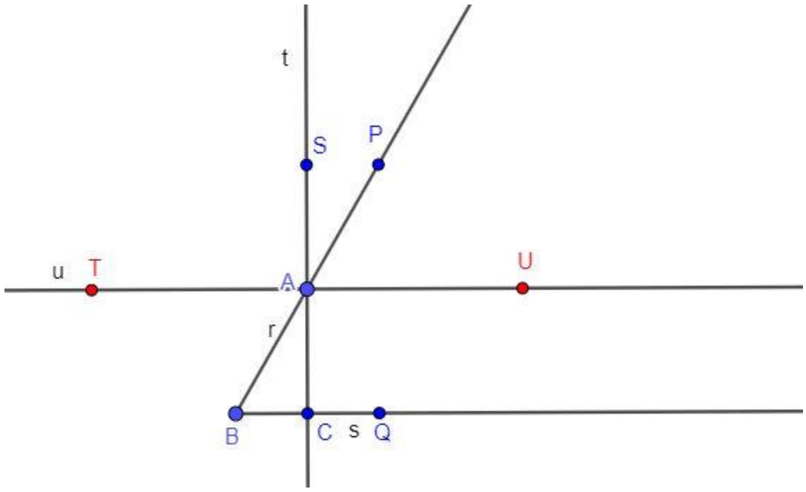
Figura 12 - Linha reta u



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

De acordo com as proposições I, IX, X e XI do livro I, a linha reta u é perpendicular à linha reta t e assim ela é paralela à reta s (figura 13).

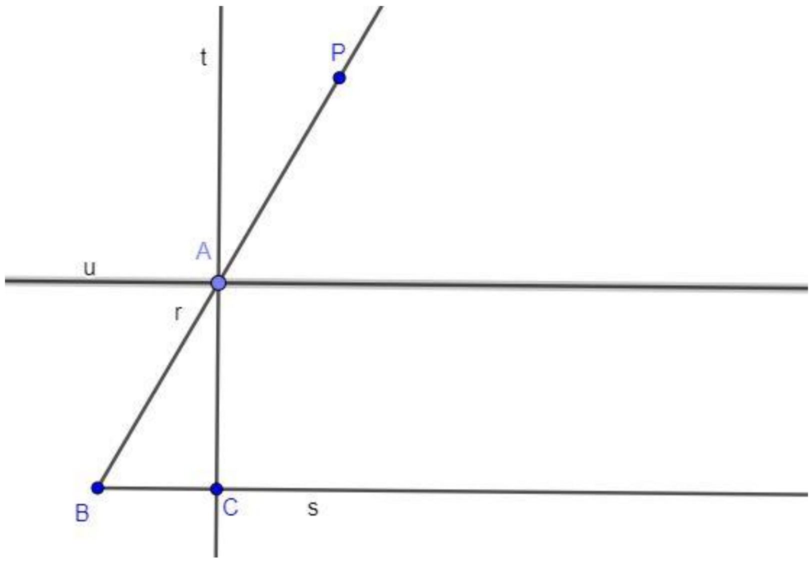
Figura 13 - Linha reta u perpendicular a t e paralela a s



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

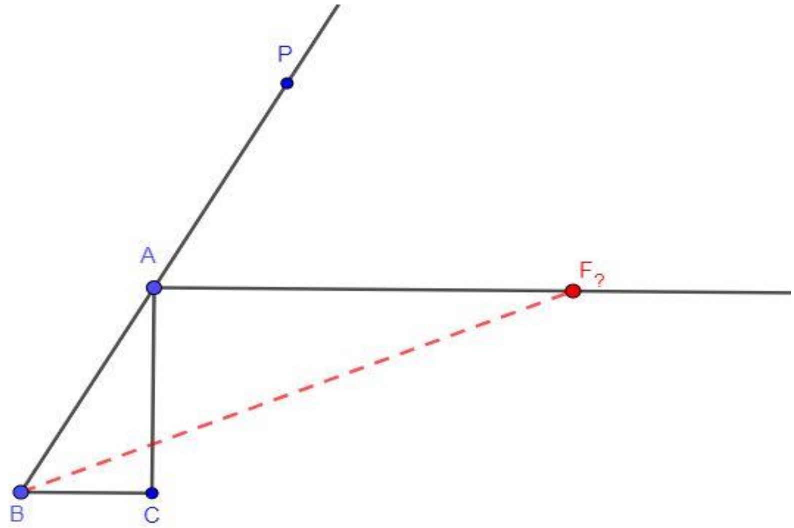
Desta forma, foi construído o problema de neusis utilizando apenas régua e compasso obedecendo às regras impostas para sua utilização (figuras 14 e 15).

Figura 14 - Construção do problema de neusis



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 15 - O problema de neusis



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

As construções que demonstram o problema de neusis como possível solução para a trissecção de um ângulo agudo qualquer serão apresentadas no tópico seguinte.

2.2.2 Demonstração.

Para apresentar as demonstrações deste tópico, serão feitas aplicações das seguintes definições, axiomas e proposições do livro I de Euclides (COMMANDINO,1944).

Definições:

VIII – Ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas que se tocam em uma superfície plana, sem estarem em direitura uma com a outra.

X – Quando uma linha reta, caindo sobre outra linha reta, fizer com esta, dois ângulos iguais, um de uma, e outro de outra parte, cada um desses ângulos iguais se chama ângulo reto; e a linha incidente se diz perpendicular à outra linha sobre a qual cai.

XXI – As triláteras são aquelas que são formadas com três linhas retas.

XXV – Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais.

XXVII – Triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto.

Axioma:

VII – E aquelas, que são metades de uma mesma quantidade, são também iguais.

Proposições:

V – Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos que estão sob a base são iguais, e produzidos os lados iguais, os ângulos que se formam debaixo da base, são também iguais.

XXI – Se, Sobre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas retas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão ângulo maior do que o ângulo que fica oposto ao lado, sobre cujos extremos estão postas as ditas retas.

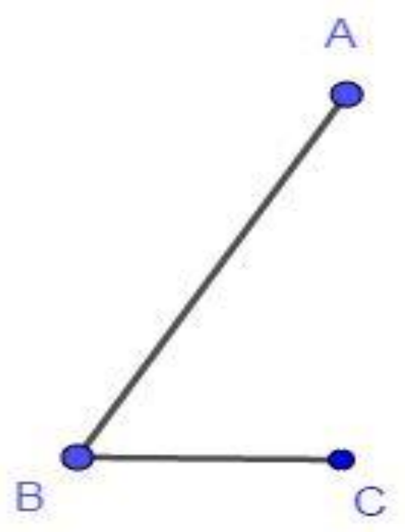
XXIX – Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si, o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos.

XXXII – Em todo triângulo, produzido um lado qualquer, o ângulo externo é igual aos dois internos e opostos e os três ângulos internos de um triângulo qualquer são iguais a dois retos.

XXXVIII – Os triângulos que estão sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

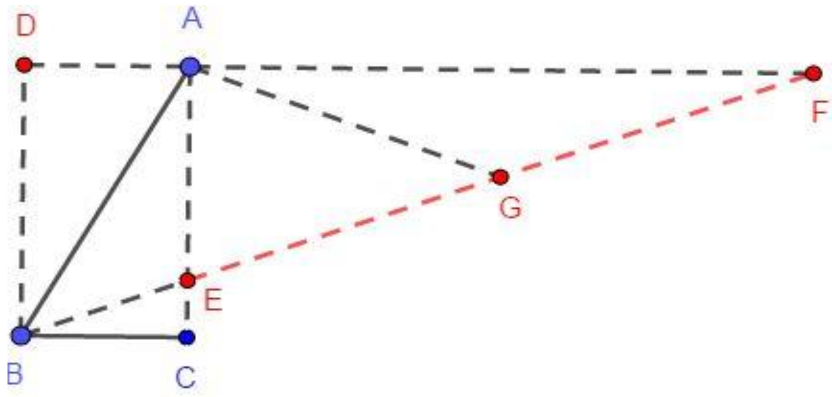
Como apresentado na primeira seção, em qualquer ângulo $A\hat{B}C$ agudo (figuras 16 e 17), é possível colocar $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{BC}$, e tomar $A\hat{B}C$ como o ângulo entre uma diagonal $\overline{BA}$ e um lado $\overline{BC}$ de um retângulo BCAD. Considerando uma linha reta que contém B e corta $\overline{CA}$ no ponto E, e o prolongamento $\overrightarrow{DA}$ no ponto F tal que $\overline{EF} = 2(\overline{BA})$ tem-se a trissecção através do problema de neusis como demonstrado a seguir.

Figura 16 - Ângulo agudo qualquer.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 17 - Problema de neusis.



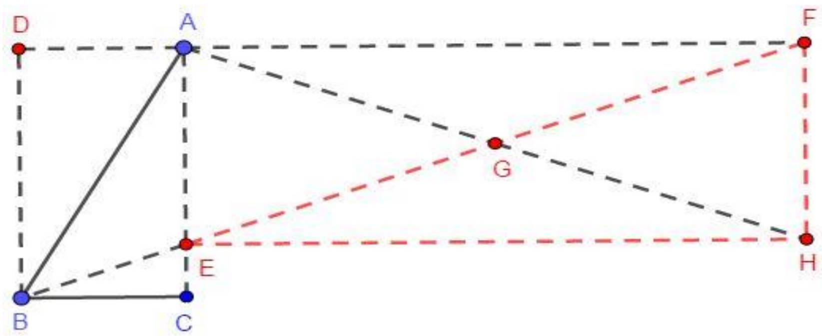
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Utilizando os postulados de Euclides é possível afirmar que:

Pelas definições X, XXI e XXVII; axioma VII e proposição XXXVIII do livro I, se G é o ponto médio de $\overline{EF}$, então $\overline{EG} = \overline{GF} = \overline{AG} = \overline{AB}$.

Note que, traçando a linha reta paralela à $\overline{AF}$ que contém E, a paralela à $\overline{AE}$ que contém F e traçando o prolongamento $\overrightarrow{AG}$, pode-se marcar o ponto H como a interseção das linhas retas e do prolongamento traçado. Assim, é possível construir os segmentos $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{GH}$ criando o paralelogramo EHFA (figura 18)

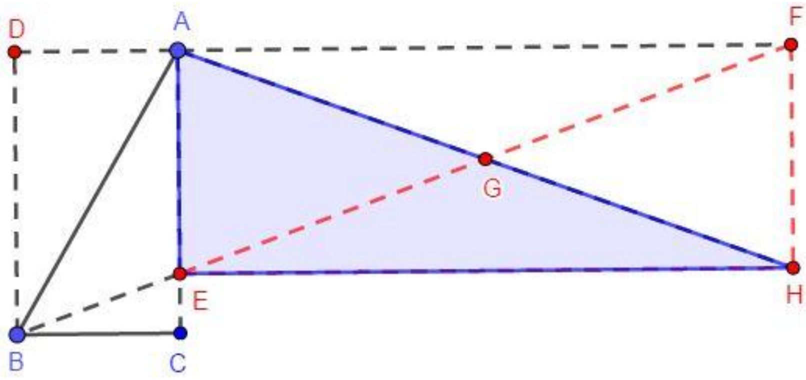
Figura 18 - Paralelogramo EHFA



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

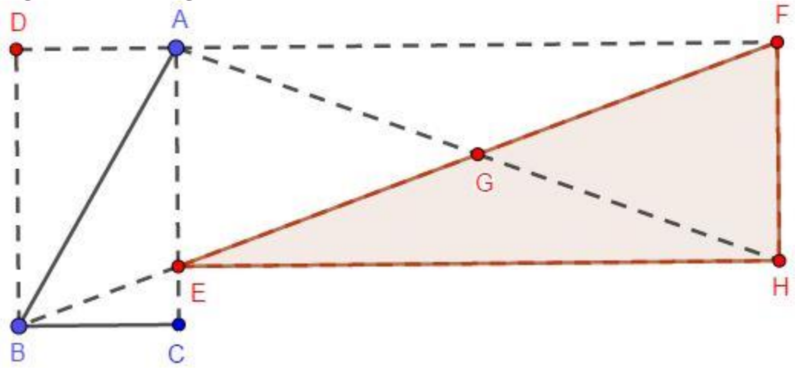
Pelos postulados de Euclides, proposição XXXVIII do livro I, os triângulos AEH e FHE são iguais, visto que estão sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas (figuras 19 e 20).

Figura 19 - Triângulo AEH



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

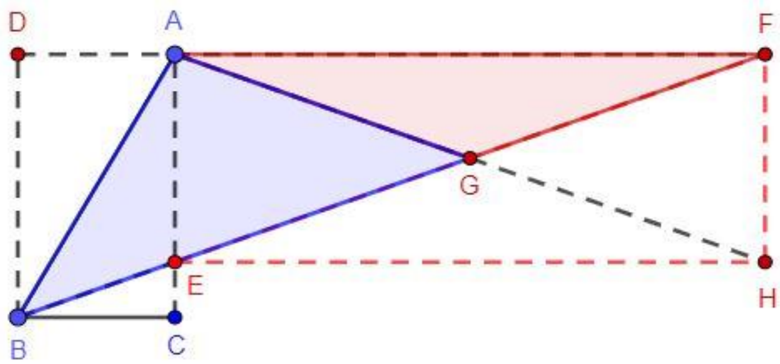
Figura 20 - Triângulo FHE



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Com isso, é possível afirmar que os seguimentos $\overline{AH}$ e $\overline{FE}$ são iguais. Sendo G o ponto médio de $\overline{FE}$, então G também é ponto médio de $\overline{AH}$, e assim $\overline{FG}$ é igual a $\overline{AG}$, sendo também igual a $\overline{AB}$. Portanto, os triângulos BAG e FGA são isósceles, conforme definição XXV do livro I (figura 21).

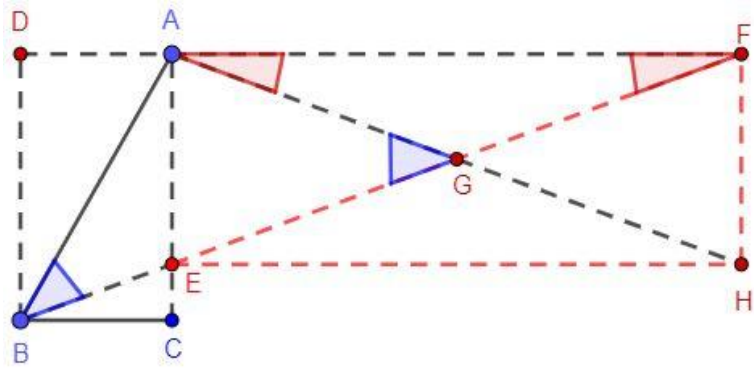
Figura 21- Triângulos isósceles



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Pela proposição V do livro I, sendo os triângulos BAG e FGA isósceles, é possível afirmar que $A\hat{B}G = A\hat{G}B$ e $G\hat{A}F = G\hat{F}A$, pois são ângulos que estão sobre a base de triângulos isósceles, e se $G\hat{A}F = G\hat{F}A$, pode-se concluir que $G\hat{A}F + G\hat{F}A = 2G\hat{F}A$ (figura 22).

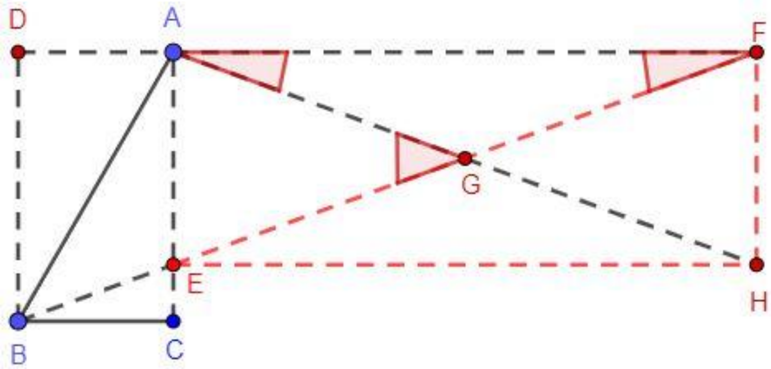
Figura 22 - Ângulos iguais



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A proposição XXXII, do livro I, diz que produzindo um lado qualquer de um triângulo, o ângulo externo formado é igual à soma dos dois internos opostos, ou seja, sendo $\overline{GE}$ a produção sobre o lado $\overline{FG}$ do triângulo FGA, é possível afirmar que o ângulo $A\hat{G}B$ é igual à soma $G\hat{A}F + G\hat{F}A$ que por sua vez é igual à $2G\hat{F}A$ (figura 23).

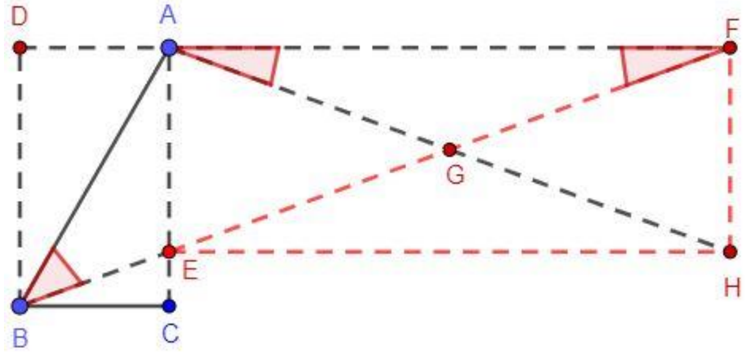
Figura 23 - Ângulo externo 1.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Sendo $A\hat{G}B$ igual ao $A\hat{B}G$, tem-se que $A\hat{B}G = 2G\hat{F}A$ (Figura 24).

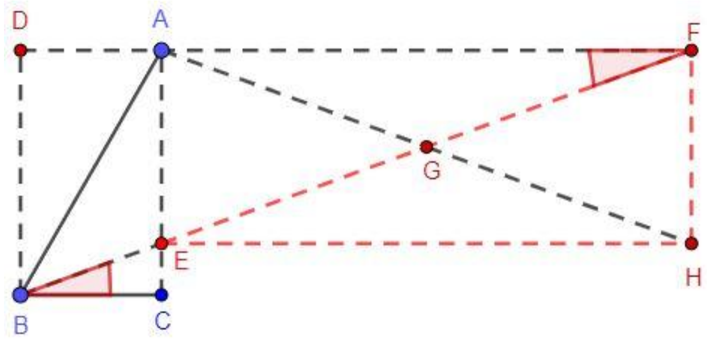
Figura 24 - Ângulo externo 2.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Note que o segmento $\overline{DF}$ é paralelo ao segmento $\overline{BC}$ e ambos são cortados pelo segmento $\overline{BF}$, com isso os ângulos $G\hat{F}A$ e $G\hat{B}C$ são iguais, visto que são alternos, conforme a proposição XXIX do livro I de Euclides (figura 25)

Figura 25 - Ângulos alternos

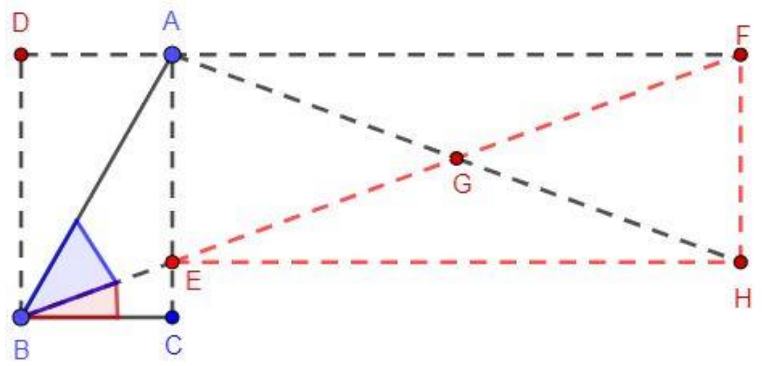


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Pelas definições VIII, XXI e XXV; e as proposições V, XXI, XXIX e XXXII do livro I, tem-se que $A\hat{B}G = A\hat{G}B = G\hat{A}F + G\hat{F}A = 2G\hat{F}A = 2G\hat{B}C$.

Com o exposto até aqui, foi demonstrado que o ângulo $A\hat{B}G$ é igual ao $2G\hat{F}A$ e o $G\hat{F}A$ é igual ao $G\hat{B}C$, com isso o ângulo $A\hat{B}G$ mede o dobro do ângulo $G\hat{B}C$ (figura 26).

Figura 26 - Trissecção de um ângulo agudo qualquer



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Portanto, $A\hat{B}G = 2G\hat{B}C$ e o segmento $\overline{BEF}$ trissecciona o ângulo $A\hat{B}C$.

Como demonstrado, os postulados de Euclides garantem que se for traçado o segmento $\overline{BEF}$ de modo que $\overline{EF}$ seja equivalente a $2\overline{BA}$, estará feita a trissecção do ângulo $A\hat{B}C$. Portanto, o problema da trissecção se resume a construir um segmento $\overline{EF}$ de comprimento $2\overline{BA}$ entre $\overline{AC}$ e o prolongamento $\overline{DA}$, de modo que $\overrightarrow{FE}$ aponte para o ponto B.

3 TRISSECÇÕES E APROXIMAÇÕES

Fazendo uso das construções apresentadas nos capítulos anteriores, este capítulo apresenta os resultados obtidos, de modo experimental investigativo, através da aplicação do problema de neusis juntamente com os postulados de Euclides na tentativa de se trissectar um ângulo qualquer. Nele constam as construções nos casos em que se obteve uma trissecção exata, nos casos em que se obteve uma aproximação e o que se pode concluir sobre as possibilidades de generalização para trissecção de um ângulo qualquer.

3.1 Trissecções exatas

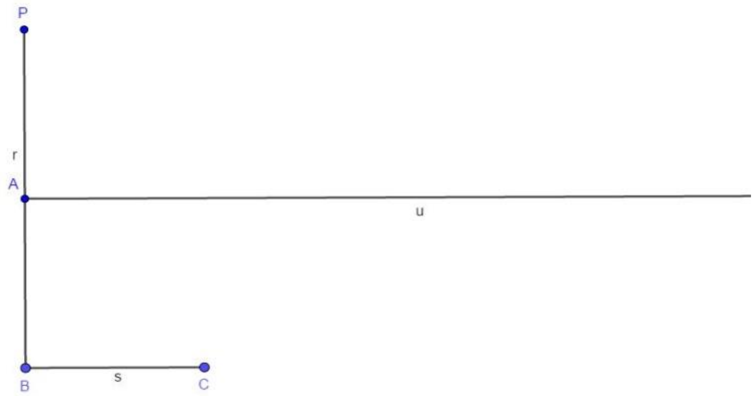
Antes de apresentar as construções, será feito um breve esclarecimento sobre o porquê de se trissectar um ângulo agudo qualquer, visto que o círculo trigonométrico não é composto apenas por ângulos agudos. O plano cartesiano permite dividir o círculo em quatro ângulos de noventa graus cada um e será mostrado a seguir que o ângulo de noventa graus tem trissecção imediata com a aplicação do problema de neusis. Com isso, o desafio que resta é conseguir trissectar o ângulo agudo de medida igual ou menor que trinta graus, visto que todos os ângulos maiores que este serão o resultado de algum de seus múltiplos somado a um ângulo agudo menor que ele. Este desafio é o que será apresentado neste tópico utilizando o aplicativo geogebra para fazer, quando necessário, as aferições de aproximação.

Já foi demonstrado que o problema de neusis é um caminho possível para a trissecção de um ângulo agudo qualquer, também foi apresentado que esta demonstração de trissecção utilizando este problema está condicionada ao segmento $\overline{EF}$ de medida igual ao segmento $\overline{BP}$. Com isso, o ponto de partida será o problema de neusis construído, e será utilizado este segmento de medida $\overline{BP}$ para localizar o ponto F procurado,

Primeiro será demonstrado à trissecção de um ângulo com medida igual a 90º.

Seja $A\hat{B}C$ o ângulo reto compreendido pelas retas r e s (figura 27)

Figura 27 - Ângulo reto $A =$

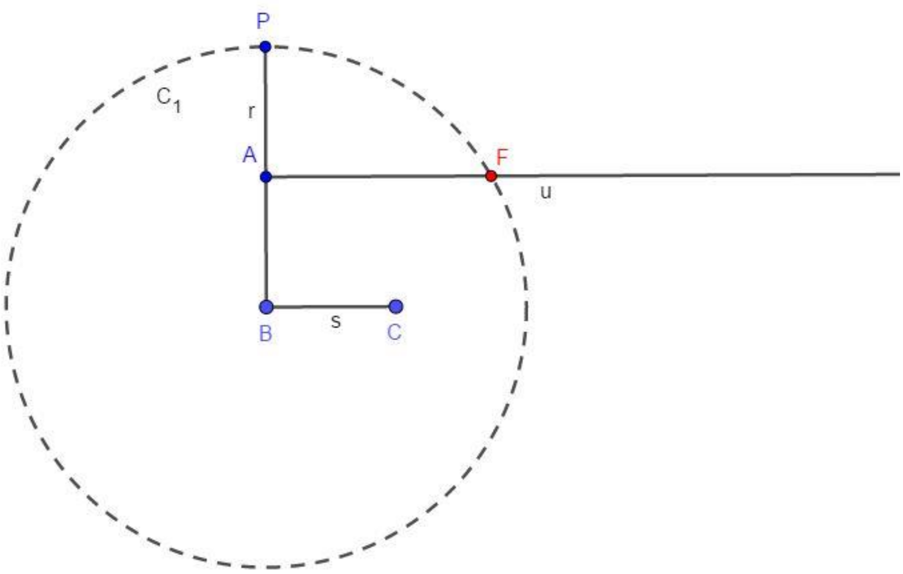


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Note que a figura 27 traz a estrutura do problema de neusis, construído no tópico anterior, em que o segmento $\overline{AP}$ tem medida igual ao segmento $\overline{AB}$ e a reta u é paralela à reta s.

Com o centro no ponto B e intervalo $\overline{BP}$ descreve-se o círculo C_1 e marca-se o ponto F na interseção de C_1 com a reta u (figura 28).

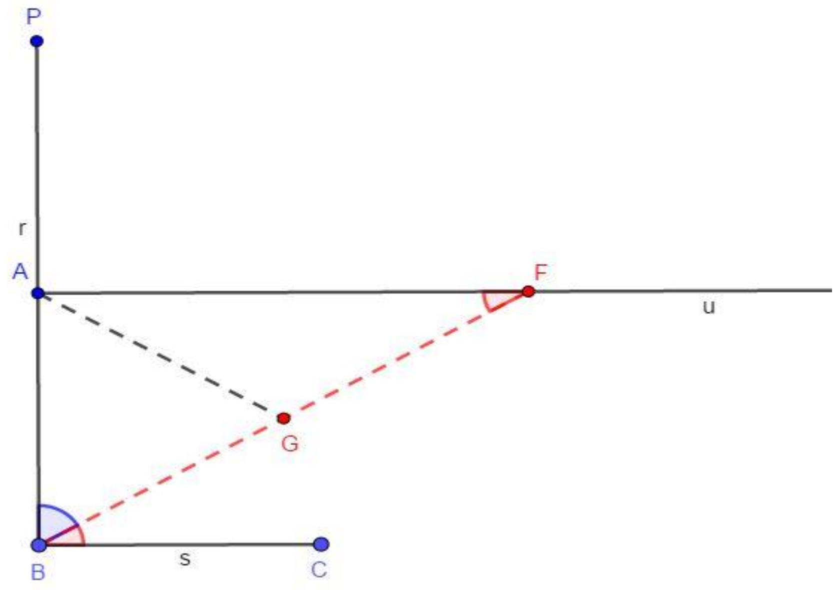
Figura 28 - Círculo C_1



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

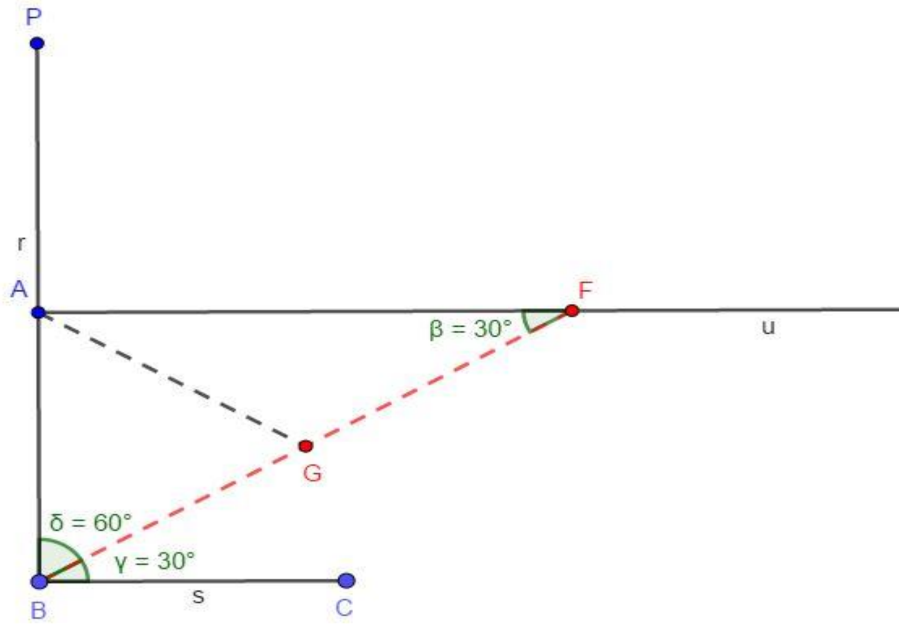
Traçando o segmento $\overline{BF}$ e o segmento $\overline{AG}$, onde G é o ponto médio de $\overline{BF}$, tem-se que o ponto F encontrado trissecta o ângulo reto dado, como podemos aferir com a utilização das propriedades já apresentadas ou do aplicativo geogebra (figuras 29 e 30).

Figura 29 – Segmentos $\overline{BF}$ e $\overline{AG}$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 30 - Trissecção do ângulo reto.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Pode-se utilizar a mesma construção para trissectar o ângulo de 45º. Para isso, serão aplicadas as seguintes proposições do livro I de Euclides (COMMANDINO,1944).

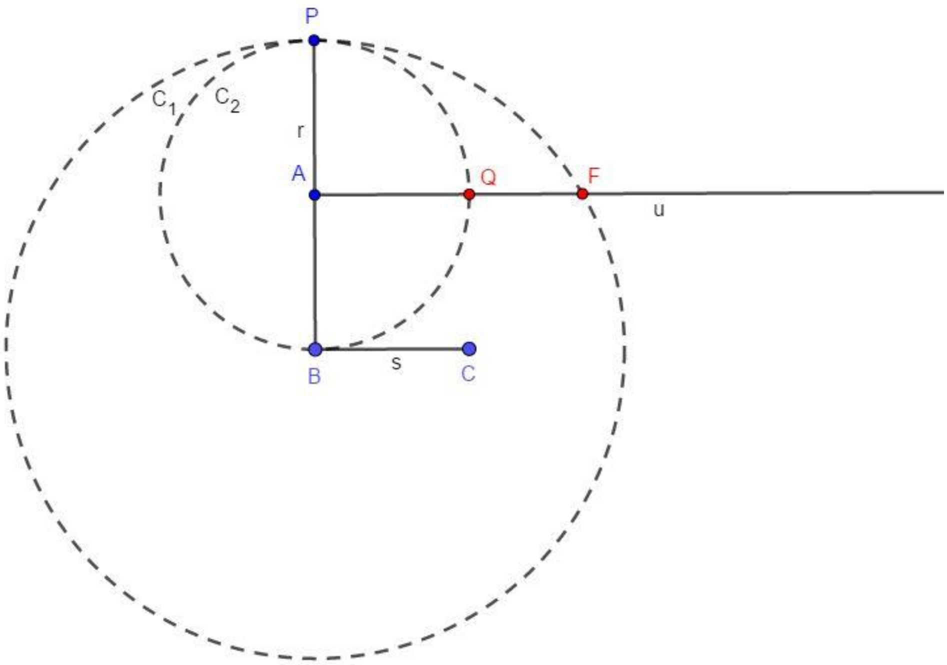
Proposições:

IX – Dividir em duas partes iguais um ângulo retilíneo dado.

XLVI - Sobre uma linha reta dada, descrever um quadrado.

Com o centro no ponto A e intervalo $\overline{AB}$ descreve-se o círculo C_2 e marca-se o ponto Q na interseção de C_2 com a reta u (figura 31).

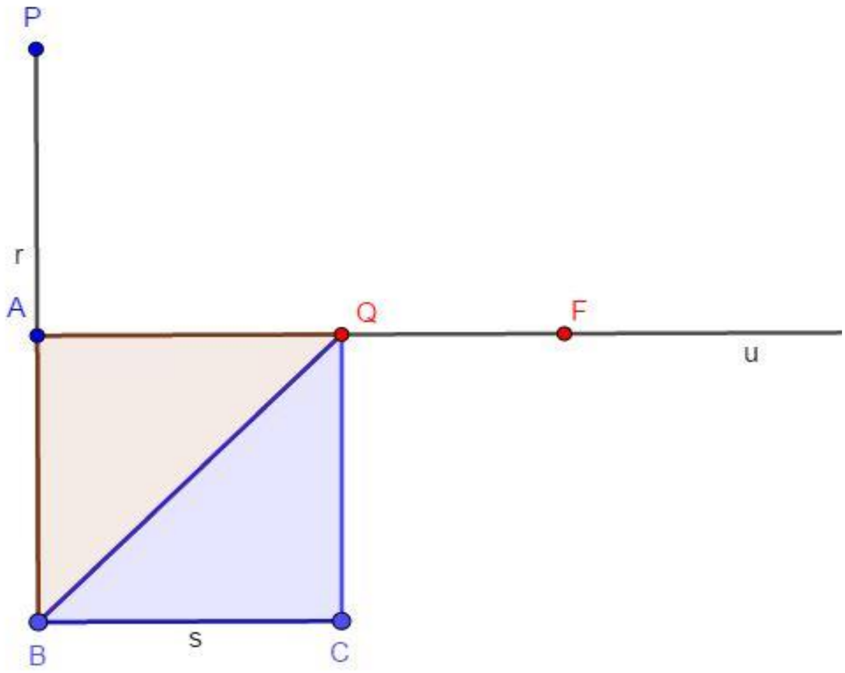
Figura 31 - Círculo C_2



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Note que o segmento $\overline{BQ}$ é diagonal de um quadrado de lado $\overline{AB}$, proposições IX e XLVI do livro I, e assim é correto afirmar que o ângulo $A\hat{B}Q$ = $C\hat{B}Q$ = 45º (figura 32).

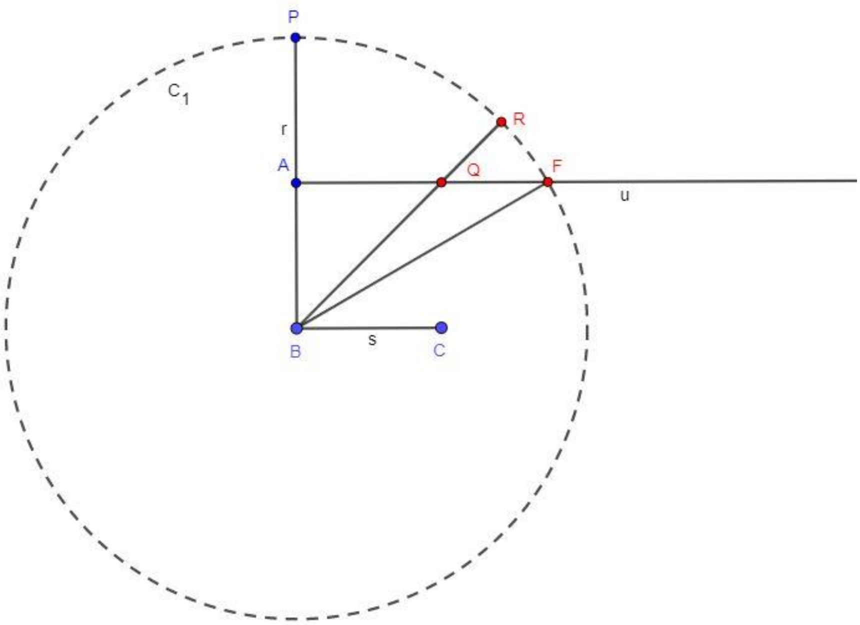
Figura 32 - Quadrado BCQA



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Traçando o segmento $\overline{BF}$ e o segmento $\overline{BQ}$, pode-se marcar o ponto R na interseção de C_1 com o prolongamento do segmento $\overrightarrow{BQ}$ formando o ângulo F$\hat{B}R$ (figura 33)

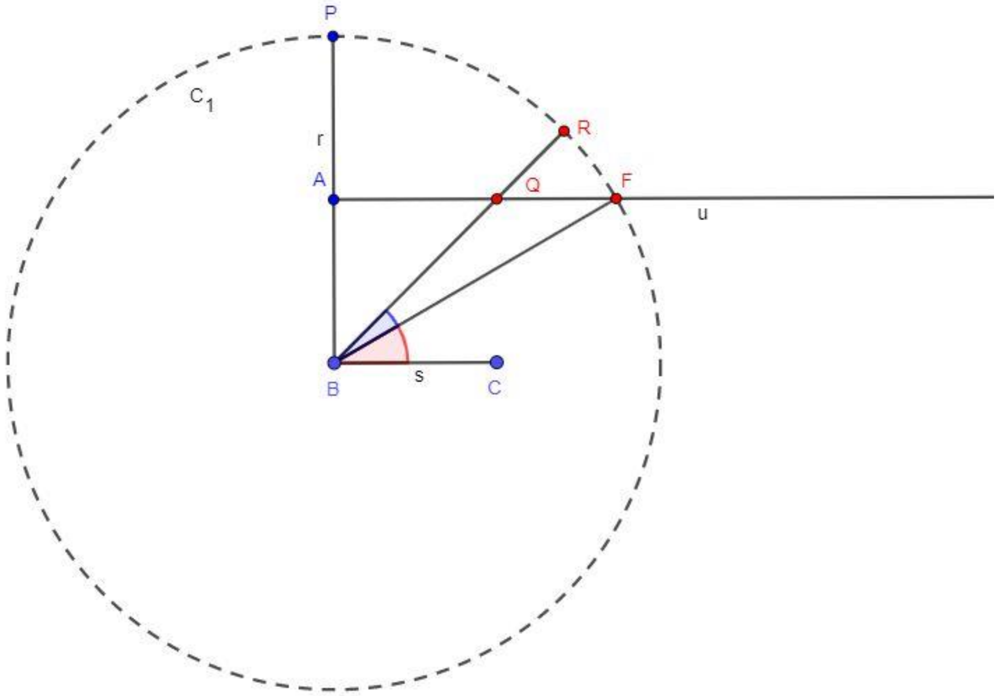
Figura 33 - Ângulo $F\hat{B}R$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Sendo o ângulo $C\hat{B}R$ de medida 45º e o ângulo $C\hat{B}F$ de medida 30º, tem-se que o ângulo F$\hat{B}R$ mede 15º. Desta forma, foi construída a trissecção do ângulo de 45º (figura 34)

Figura 34 - Trissecção do ângulo de 45º

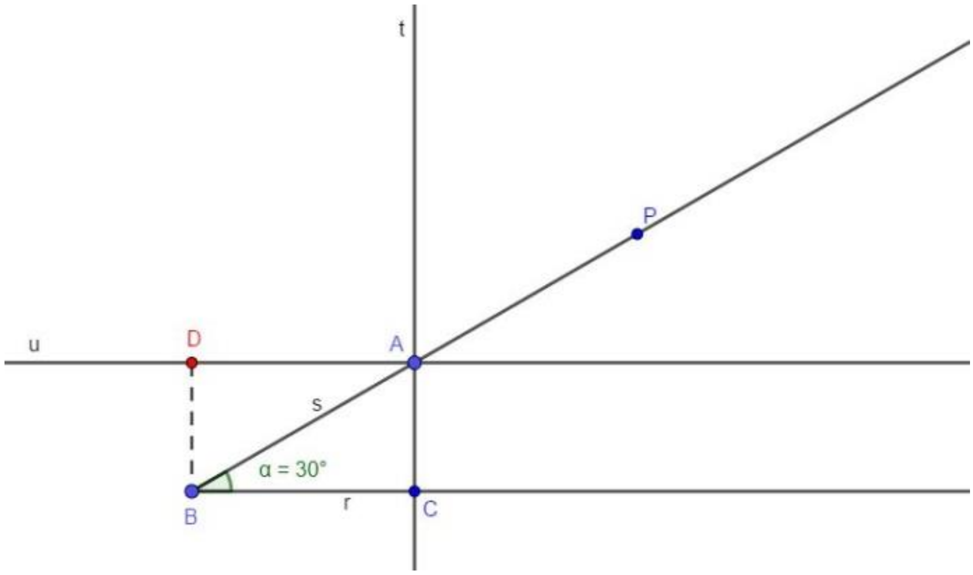


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

3.2 Aproximações

Até este momento, foi construído o problema de neusis e, através deste, foi trissectado o ângulo reto e o ângulo agudo de medida 45º. Feito isto, resta trissectar o ângulo de medida igual ou menor que 30º, pelo motivo já mencionado no início deste tópico, e para isso, será utilizado o problema de neusis aplicado ao ângulo de 30º conforme figura 35.

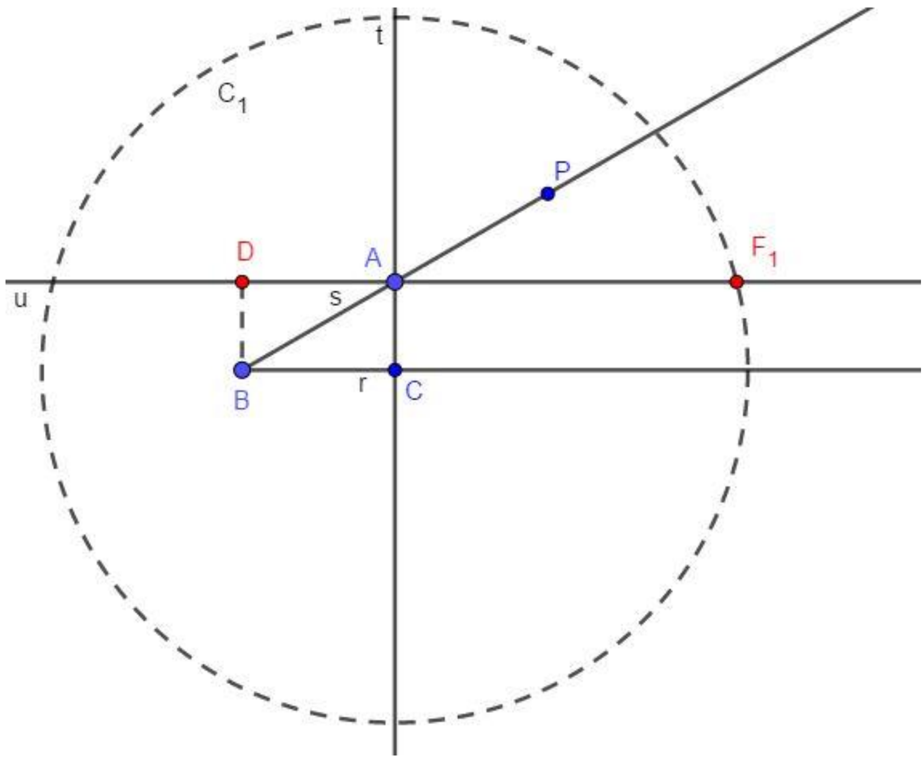
Figura 35 - Problema de neusis aplicado ao ângulo de medida 30º



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A partir daí, com o centro no ponto C e intervalo $\overline{BP}$, descreve-se o círculo C_1 e marca-se o ponto F_1 na interseção de C_1 com o prolongamento do segmento $\overrightarrow{DA}$ (figura 36).

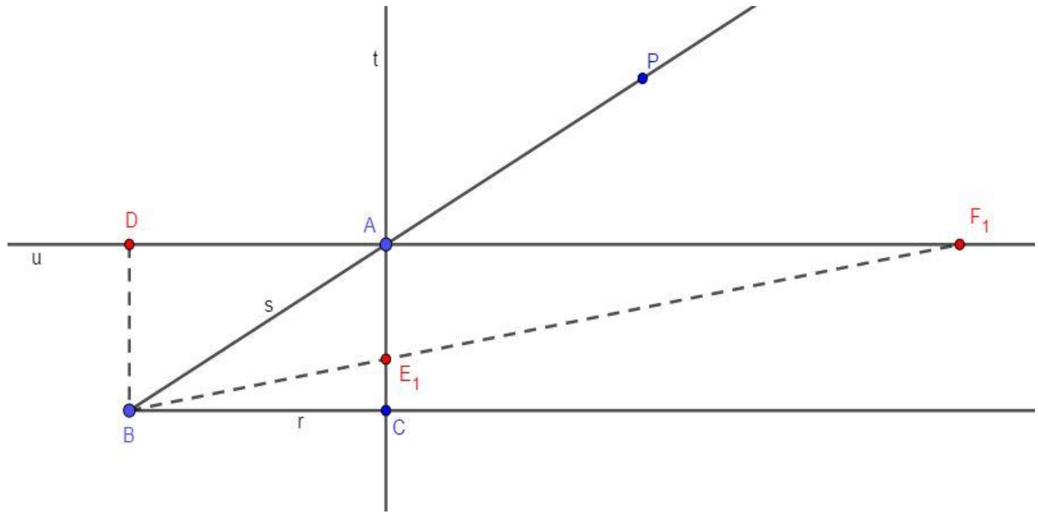
Figura 36 - Ponto F_1



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Traçando o segmento $\overline{BF_1}$, marca-se o ponto E_1 na interseção dos segmentos $\overline{BF_1}$ e $\overline{AC}$ (figura 37)

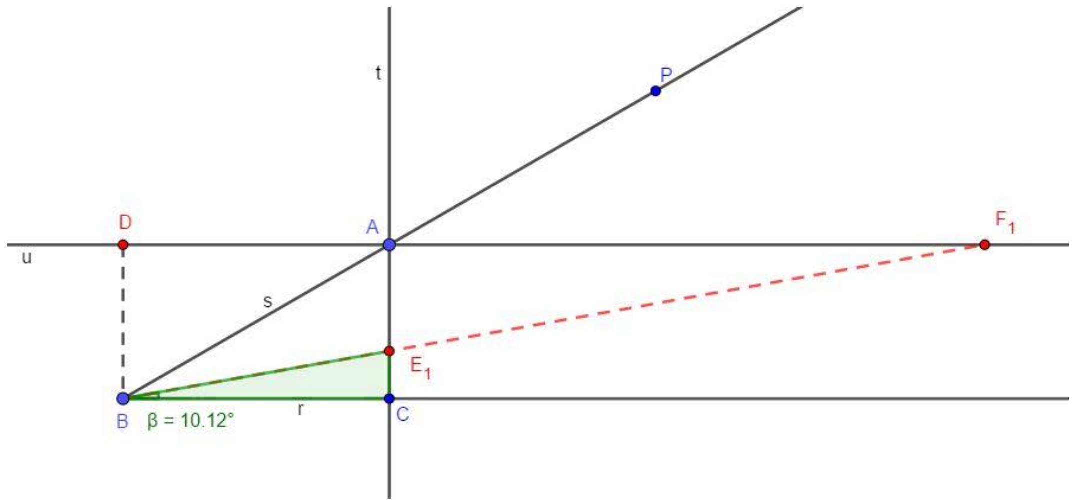
Figura 37 - Ponto E_1



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Utilizando o aplicativo geogebra, regulado com precisão de duas casas decimais, nota-se uma aproximação de trissecção, mas não ocorre uma trissecção imediata como nos casos do ângulo reto e de medida 45º como é possível observar na figura 38.

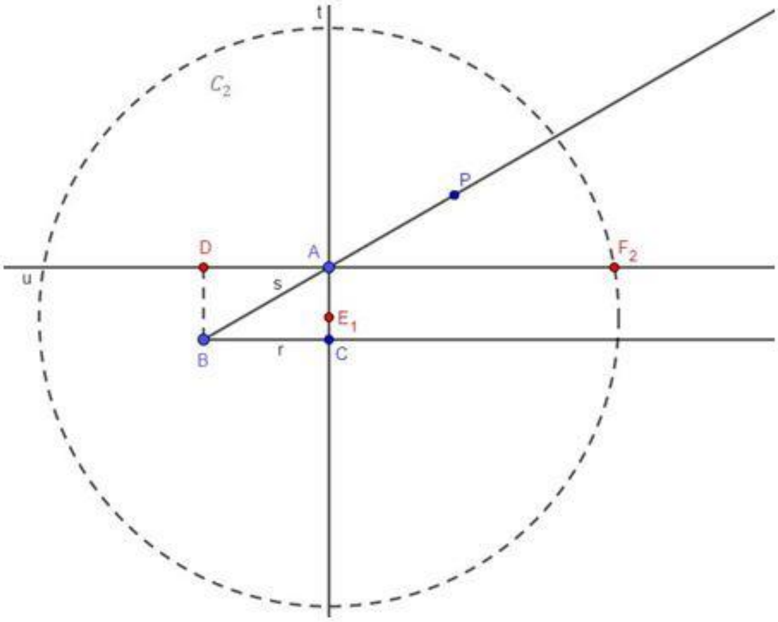
Figura 38 - Aferição do ponto F_1 com duas casas decimais



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Repetindo a construção com o centro no ponto E_1 e intervalo $\overline{BP}$, descreve-se o círculo C_2 e marca-se o ponto F_2 na interseção de C_2 com o prolongamento do segmento $\overrightarrow{DA}$ (figura 39)

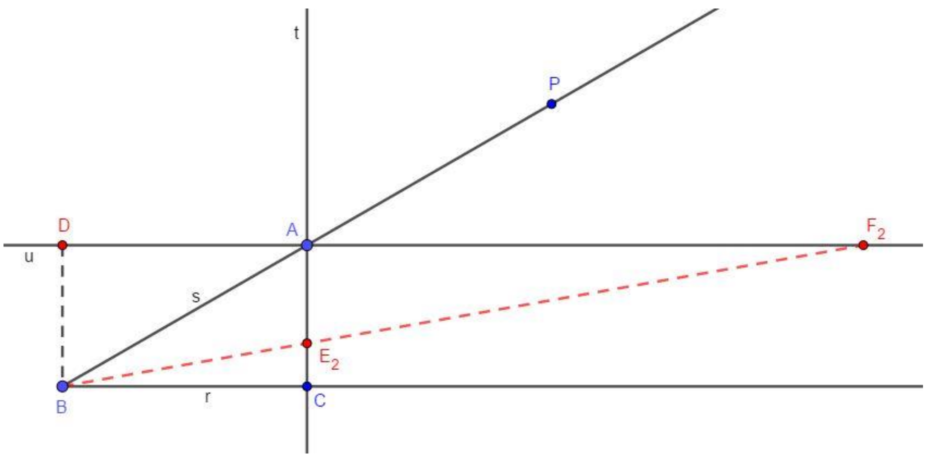
Figura 39 - Ponto F_2



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Traçando o segmento $\overline{BF_2}$, marca-se o ponto E_2 na interseção de $\overline{BF_2}$ com o segmento $\overline{AC}$ (figura 40).

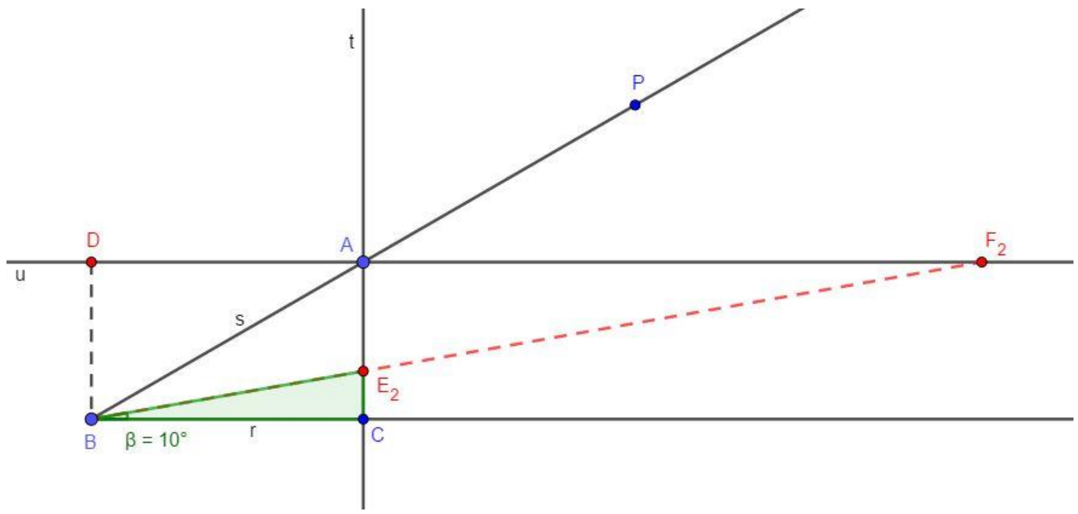
Figura 40 - Ponto E_2



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

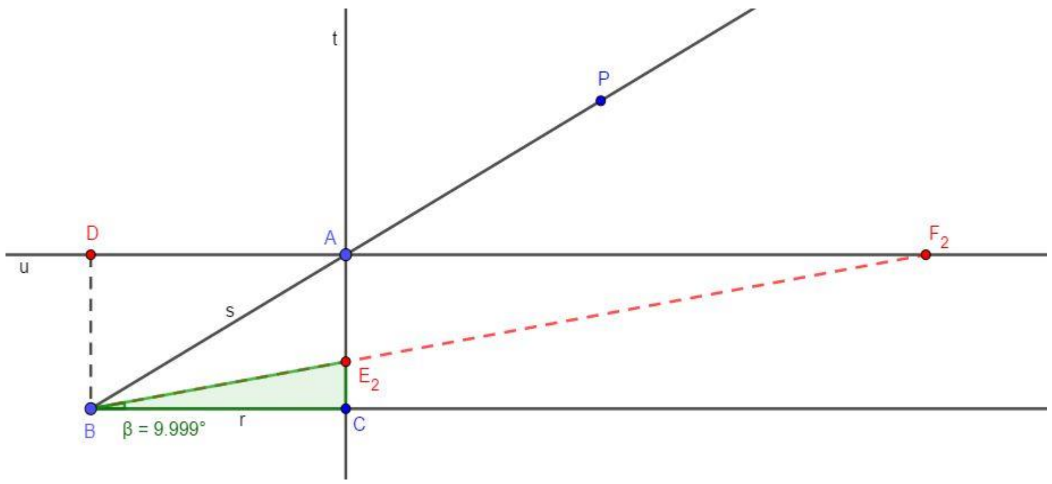
Utilizando o aplicativo geogebra, regulado com precisão de duas casas decimais, o ângulo aparece como trissectado (figura 41). Isso indica que a repetição do mecanismo de construção aproximou a trissecção do ponto F que se deseja encontrar permitindo aumentar a precisão de aferição para três casas decimais (figura 42).

Figura 41 - Aferição do ponto F_2 com duas casas decimais



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

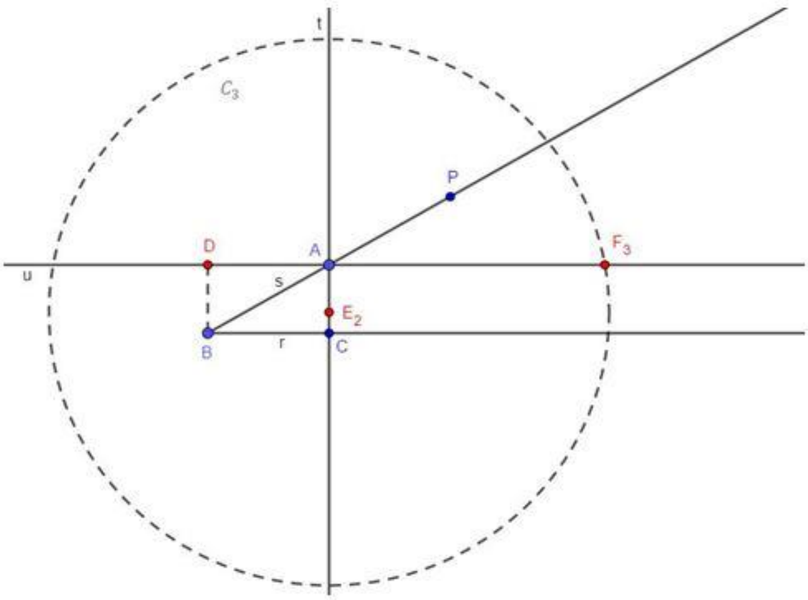
Figura 42 - Aferição do ponto F_2 com três casas decimais



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Repetindo o processo de construção uma última vez, com o centro no ponto E_2 e intervalo $\overline{BP}$, descreve-se o círculo C_3 e marca-se o ponto F_3 na interseção de C_3 com o prolongamento do segmento $\overrightarrow{DA}$ (figura 43).

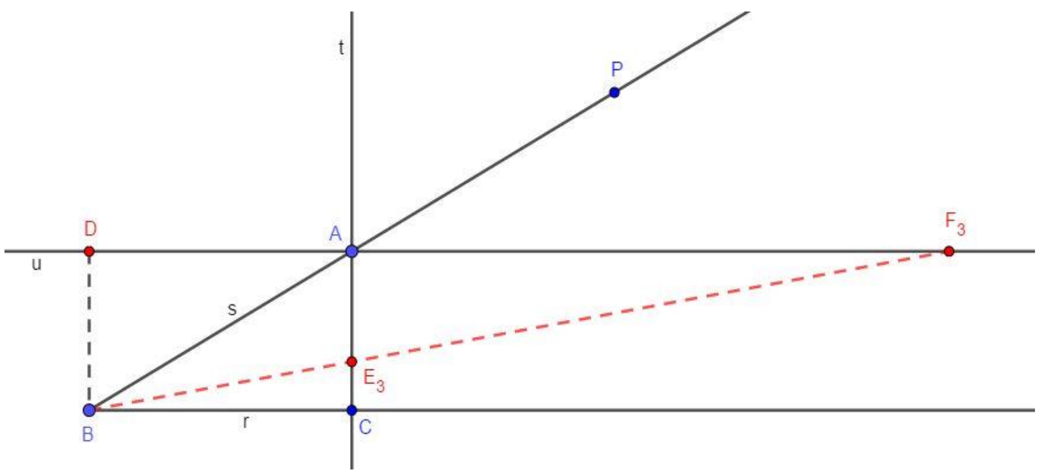
Figura 43 - Ponto F_3



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Traçando o segmento $\overline{BF_3}$, marca-se o ponto E_3 na interseção de $\overline{BF_3}$ com o segmento $\overline{AC}$ (Figura 44).

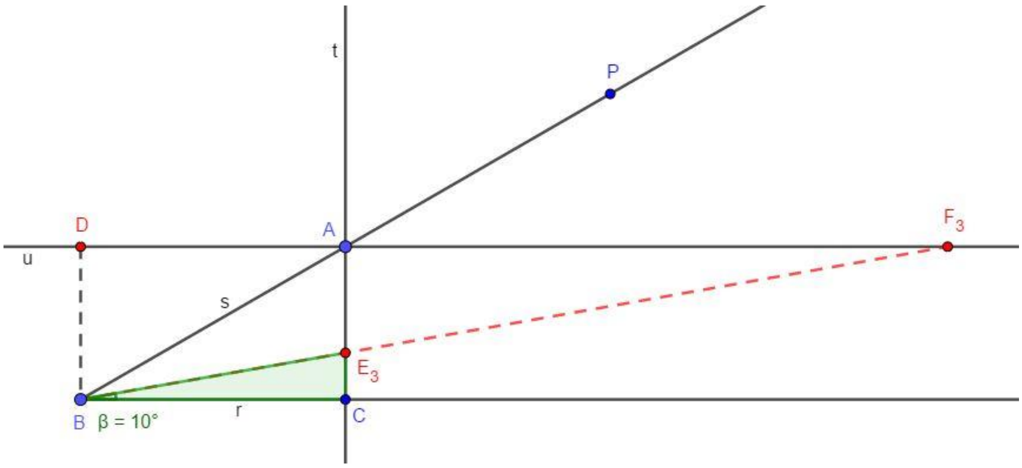
Figura 44 - Ponto E_3



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

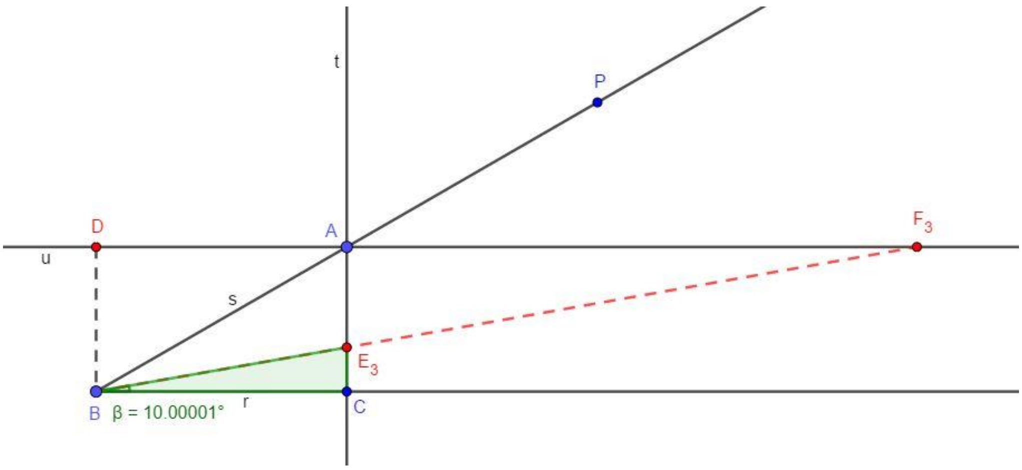
Utilizando o aplicativo geogebra, regulado com precisão de três casas decimais, o ângulo aparece como trissectado (figura 45). Isso indica que novamente a repetição do mecanismo de construção aproximou a trissecção do ponto F que se deseja encontrar permitindo aumentar a precisão de aferição para cinco casas decimais (figura 46).

Figura 45 - Aferição do ponto F_3 com três casas decimais



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 46 - Aferição do ponto F_3 com cinco casas decimais



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Note que, partindo do ponto C, descreveu-se um círculo de intervalo $\overline{BP}$ que forneceu um ponto F_1, de F_1 foi traçado um segmento até o ponto B que permitiu encontrar o ponto E_1, do ponto E_1 descreveu-se um novo círculo de mesmo intervalo para encontrar um novo ponto F_2, de F_2 foi traçado um novo segmento até o ponto B para encontrar um novo ponto E_2, e assim pode-se reiniciar o processo de construção quantas vezes se queira fazer.

Após duas repetições a aproximação de trissecção atinge uma precisão de quatro casas decimais. Com isso, tendo ainda a possibilidade para infinitas repetições, pode-se considerar que há solução por meio do cálculo infinitesimal e da sistematização das repetições, fazendo com que a trissecção através do problema de neusis seja uma ferramenta de abordagem educacional para o nível de ensino fundamental, médio e também superior.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho de investigação da trissecção utilizando régua e compasso, por meio da aplicação do problema de neusis, mostrou claramente um desenvolvimento compatível com as fases que compõem a estrutura da sequência didática, nos moldes da teoria das situações didáticas. A ambientação do estudante através da história de Euclides, assim como das tentativas de trissecção, que tem como uma das consequências o surgimento do problema de neusis, o deixa consciente de como surgiram grande parte dos conceitos que serão abordados no decorrer da atividade de construção do problema. Depois de estar contextualizado quanto ao motivo de se investigar a trissecção, o estudante adentra a fase de utilização dos conceitos por meio da construção e pela prova de validade do problema de neusis como solução válida para a trissecção. Em seguida, são apresentados ao estudante alguns modelos de construções de trissecções exatas e aproximadas, para que ele internalize os conceitos estudados, e por fim, ele é estimulado a elaborar seu próprio método de investigação, buscando a institucionalização dos conhecimentos adquiridos.

Com as construções apresentadas, pode-se considerar três seções úteis para abordagens educacionais utilizando o problema de neusis e a trissecção do ângulo. A primeira seção é a construção do problema de neusis, em que são abordados conceitos sobre ângulos, círculos, perpendicularidade e paralelismo. A segunda seção é a demonstração do problema de neusis como um caminho possível para a trissecção, na qual são abordados conceitos sobre paralelogramo, congruência de triângulos, triângulos isósceles, ângulo externo e ângulos alternos. A terceira seção é a investigação da trissecção do ângulo através do problema de neusis, em que é possível apresentar as trissecções exatas e trissecções aproximadas, além de apresentar aos alunos o aplicativo Geogebra e o cálculo infinitesimal.

O que as três seções têm em comum é o fato de proporcionar o ensino por meio de investigação, colocando o estudante no centro do processo de ensino-aprendizagem. É fornecido ao estudante um problema desafiador, as regras de resolução, um clássico literário para auxiliá-lo na investigação, uma ferramenta tecnológica para aferir os resultados e a supervisão de um tutor para responder aos seus questionamentos, deixando ao aluno a responsabilidade de organizar as informações dadas e elaborar seu projeto de resolução do problema. Com o exposto, conclui-se que a tentativa de trissecção do ângulo, mediante o problema de neusis, é uma atraente e eficaz proposta de abordagem educacional para o ensino da geometria.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Paulo Carneiro; ASSIS NETO, Fernando Raul. Pierre Laurent Wantzel: o último capítulo de dois dos três problemas clássicos. In: IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTORIA DA MATEMÁTICA, 9.,2011, Sergipe. Anais eletrônico do IX Seminário Nacional de História da Matemática: Sergipe: SBHMat, 2011.p. 1-9.Disponível em: http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/indicecom.php.Acesso em: 4 out.2021.

BOYER, Carl Benjamin, 1906- História da matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

COMMANDINO, Frederico. Euclides - Elementos de Geometria. São Paulo: Edições Cultura, 1944 ISBN - Não indicado Fonte: Biblioteca do Clube de Engenharia da Bahia Obra digitalizada por: Neuziton Torres Rapadura - neuzitontr@terra.com.br Colaboração voluntária.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática/Howard Eves. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed.- Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

NUNES, Roberto da Silva; NUNES, José Messildo Viana. MODELOS CONSTITUTIVOS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS: enfoque na Teoria das Situações Didáticas. Revista Exitus, Santarém/Pa, v. 9, n. 1, p. 148-174, jan.-mar. 2019.

ROQUE, Tatiana. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Edição digital. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

WANTZEL, Pierre L. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Journal de Mathématiques pures et appliquées,v.2, p. 366-372, 1837.

APÊNDICE

APÊNDICE A - LIVRO I DA OBRA OS ELEMENTOS

*** Definições**

I – Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.

II – Linha é o que tem comprimento e largura.

III – As extremidades das linhas são pontos.

IV – Linha reta é aquela que está posta igualmente entre suas extremidades.

V – Superfície é o que tem comprimento e largura.

VI – As extremidades das superfícies são linhas.

VII – Superfície plana é aquela sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

VIII – Ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas que se tocam em uma superfície plana, sem estarem em direitura uma com a outra.

IX – Ângulo plano e retilíneo é a inclinação recíproca de duas linhas retas que se encontram e não estão em direitura uma com a outra. Se alguns ângulos existirem no mesmo ponto B, cada um vem indicado com três letras do alfabeto; a que estiver no vértice do ângulo, isto é, no ponto no qual se encontram as retas que formam o ângulo, põe-se no meio das outras. Assim, o ângulo feito pelas retas AB e CB representar-se-á com as letras ABC, ou CBA; O ângulo formado pelas retas AB, DB, com as letras ABD, ou DBA; e o ângulo que fazem as retas DB, CB, com as letras DBC, ou CBD. Mas se um ângulo estiver separado de outro qualquer, poder-se-á marcar com a mesma letra, que estiver no vértice, como o ângulo no ponto E.

X – Quando uma linha reta, caindo sobre outra linha reta, fizer com esta, dois ângulos iguais, um de uma, e outro de outra parte, cada um desses ângulos iguais se chama ângulo reto; e a linha incidente se diz perpendicular à outra linha sobre a qual cai.

XI – Ângulo obtuso é o que é maior que o ângulo reto.

XII – Ângulo agudo é o que é menor que o ângulo reto.

XIII – Termo se diz aquilo que é extremidade de alguma coisa.

XIV – Figura é um espaço fechado por um ou mais termos.

XV – Círculo é uma figura plana fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todas as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da figura se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.

XVI – O dito ponto se chama centro do círculo.

XVII – Diâmetro do círculo é uma linha reta, que passa pelo centro, e que se termina por ambas as partes na circunferência.

XVIII – Semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e aquela parte da circunferência do círculo, que é cortada pelo diâmetro.

XIX – Segmento de círculo é uma figura compreendida entre uma linha reta, e uma porção da circunferência.

XX – Figuras retilíneas são as que são formadas com linhas retas.

XXI – As triláteras são aquelas que são formadas com três linhas retas.

XXII – As quadriláteras são aquelas que são formadas por quatro linhas retas.

XXIII – As multiláteras são aquelas que são formadas por mais de quatro linhas retas.

XXIV – Entre as figuras triláteras, o triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais.

XXV – Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais.

XXVI – Triângulo escaleno é o que tem os três lados desiguais.

XXVII – Triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto.

XXVIII - Triângulo obtusângulo é o que tem um ângulo obtuso.

XXIX – O triângulo acutângulo é o que tem todos os Ângulos agudos.

XXX – Entre as figuras quadriláteras, o quadrado é o que é juntamente equilátero e retângulo.

XXXI – A figura, que de uma parte for mais comprida, pode ser retângula, mas não equilátera.

XXXII – Rombo, é uma figura equilátera e não retângula.

XXXIII – Romboide é uma figura, que tendo os lados opostos iguais, nem é equilátera nem equiângula.

XXXIV – Todas as mais figuras quadriláteras, que não são as referidas, se chamam trapézios.

XXXV – Linhas paralelas, ou equidistantes, são linhas retas, que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar.

*** Postulados**

I - Pode-se, como coisa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto, uma linha reta.

II - E que, de uma linha reta determinada, se continuem em direitura de si mesma, até onde seja necessário.

III – E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo.

*** Axiomas**

I – As coisas, que são iguais a uma terceira, são iguais entre si.

II – Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.

III – E se de coisas iguais se tiram outras iguais, os restos serão iguais.

IV – E se a coisas desiguais se juntam outras iguais, os todos serão desiguais.

V – E se, de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.

VI – As quantidades, das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguais.

VII – E aquelas, que são metades de uma mesma quantidade, são também iguais.

VIII – Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com a outra, são iguais.

IX – O todo é maior do que qualquer de suas partes.

X – Duas linhas retas não compreendem espaço.

XI – Todos os ângulos retos são iguais.

XII – E se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos. Estes sinais =, >, <, de que os matemáticos usam frequentemente, servem para dar brevidade

O sinal < significa que o primeiro termo é menor que o segundo.

A = B Significa que A é igual a B.

A > B significa que A é maior que B.

A < B significa que A é menor que B.

*** Proposições**

I – Sobre uma linha reta determinada descrever um triângulo equilátero.

II – De um ponto dado, tirar uma reta igual a outra reta dada.

III – Dadas duas linhas retas desiguais, cortar da linha maior uma parte igual a linha menor.

IV – Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos compreendidos por estes lados forem também iguais; as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.

V – Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos que estão sob a base são iguais, e produzidos os lados iguais, os ângulos que se formam debaixo da base, são também iguais.

VI – Se dois ângulos de um triângulo forem iguais, os lados opostos a estes ângulos iguais, serão também iguais.

VII – Sobre a mesma base e da mesma parte não se podem construir dois triângulos diferentes que tenham outros lados iguais, isto é, os dois que partem de um mesmo termo da base, e os outros dois que partem do outro, não podem ser iguais.

VIII – Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e as bases também iguais, os ângulos compreendidos pelos lados iguais serão também iguais.

IX – Dividir em duas partes iguais um ângulo retilíneo dado.

X – Dividir em duas partes iguais uma linha reta de um comprimento dado.

XI – De um ponto dado em uma linha reta dada levantar uma perpendicular sobre a mesma reta dada.

XII – Conduzir uma perpendicular sobre uma linha reta dada indefinita de um ponto dado fora dela.

XIII – Uma linha reta, caindo sobre outra linha reta, faz com esta ou dois ângulos retos, ou dois ângulos iguais a dois retos.

XIV – Se em um ponto de uma linha reta qualquer concorrem de partes opostas duas retas, fazendo com a primeira reta os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas que concorrem para o dito ponto, estarão em direitura uma da outra.

XV – Se duas linhas retas reciprocamente se cortarem, farão os ângulos verticalmente opostos iguais entre si.

XVI – Produzido um lado qualquer de qualquer triângulo, o ângulo externo sempre é maior que cada um os ângulos internos e opostos.

XVII – Dois ângulos de um triângulo qualquer, tomados de qualquer modo que se quiser, são menores que dois retos.

XVIII – Em qualquer triângulo, o lado maior opõe-se ao ângulo maior.

XIX - Em qualquer triângulo, a ângulo maior fica oposto ao lado maior.

XX – Em qualquer triângulo, dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro.

XXI – Se, Sobre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas retas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão ângulo maior do que o ângulo que fica oposto ao lado, sobre cujos extremos estão postas as ditas retas.

XXII – Construir um triângulo com três linhas retas iguais a três outras dadas, entre as quais duas, tomadas como se quiser, sejam sempre maiores que a terceira.

XXIII – Em um ponto de uma linha reta dada, formar um triângulo retilíneo a outro ângulo retilíneo dado.

XXIV – Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor.

XXV – Se em dois triângulos forem dois lados de um iguais a dois lados do outro, cada um a cada um, e for a base de um triângulo maior que a base de outro, aquele dos ângulos compreendidos pelos lados iguais, que ficar oposto à base maior, será maior que o outro oposto à base menor.

XXVI – Se em dois triângulos, dois ângulos de um forem iguais a dois ângulos de outro, cada um a cada um, e um lado do primeiro igual a um lado do outro, e forem estes lados ou adjacentes, ou opostos a ângulos iguais, os outros lados dos dois triângulos serão iguais aos outros lados, cada um a cada um, e também o terceiro ângulo será igual ao terceiro.

XXVII – Se uma reta, cortando outras duas retas, fizer com elas os ângulos alternos iguais, as mesmas duas retas serão paralelas.

XXVIII – Se uma reta cortar outras duas, e fizer ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, ou também dois internos da mesma parte iguais a dois retos, as mesmas retas serão paralelas.

XXIX – Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si, o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos.

XXX – As linhas retas, que são paralelas a uma mesma linha reta, são paralelas entre si.

XXXI – De um ponto dado, conduzir uma linha reta paralela à outra linha reta dada.

XXXII – Em todo triângulo, produzido um lado qualquer, o ângulo externo é igual aos dois internos e opostos e os três ângulos internos de um triângulo qualquer são iguais a dois retos.

XXXIII – As retas que da mesma parte estão postas entre as extremidades de duas outras retas iguais e paralelas, são também iguais e paralelas.

XXXIV - Os lados e os ângulos opostos dos espaços formados com linhas paralelas, ou paralelogramos, são iguais; e todo o espaço paralelogramo fica dividido pela diagonal em duas partes iguais.

XXXV – Os paralelogramos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

XXXVI – Os paralelogramos que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

XXXVII – Os triângulos que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

XXXVIII – Os triângulos que estão sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

XXXIX – Os triângulos iguais postos sobre a mesma base e da mesma parte, estão entre as mesmas paralelas.

XL – Os triângulos iguais postos sobre bases iguais e da mesma parte, estão entre as mesmas paralelas.

XLI – Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo.

XLII – Construir um paralelogramo, que seja igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro dado.

XLIII – Em qualquer paralelogramo, os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si.

XLIV – Sobre uma linha reta dada, construir um paralelogramo igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado.

XLV – Construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com um ângulo igual a outro ângulo dado.

XLVI - Sobre uma linha reta dada, descrever um quadrado.

XLVII – Em todo triângulo retângulo, o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados que fazem o mesmo ângulo reto.

XLVIII – Se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual aos quadrados dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados é reto.

APÊNDICE B – PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ESTRUTURA DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NÃO RÍGIDA	
Tema	Trissecção de um ângulo agudo, utilizando régua e compasso, aplicando o problema de neusis.
Categoria	Situação a explorar: Explorar noções relacionadas a pontos, retas, ângulos, triângulos, retângulos, quadrados, cálculo infinitesimal e o aplicativo geogebra.
Objetivo	Criar, utilizando régua e compasso, um segmento que trisseccione um ângulo aplicando o problema de neusis.
Duração	A ser definida pelo professor
Materiais	Régua, compasso, lápis, borracha e aplicativo geogebra.
Instruções	- Com a régua é permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. - Com o compasso é permitido traçar uma circunferência com centro em um ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado.
Avaliação	Contínua: O professor avalia o desenvolvimento do aprendizado ao longo da atividade.