



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

**Uma introdução à Análise de Fourier:
construindo sons através de funções
trigonométricas**

André Calcagniti Padilha



RIO CLARO
2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Uma introdução à Análise de Fourier: construindo sons através de funções trigonométricas

André Calcagniti Padilha

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo

Rio Claro
2022

P123i

Padilha, André Calcagniti

Uma introdução à Análise de Fourier : construindo sons através de funções trigonométricas / André Calcagniti Padilha. -- Rio Claro, 2022

179 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Rawilson de Oliveira Araújo

1. Análise de Fourier. 2. Equações Diferenciais. 3. Trigonometria.
4. Som. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

André Calcagniti Padilha

UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE FOURIER: CONSTRUINDO SONS ATRAVÉS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo
Orientador

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Departamento de Matemática – UNESP

Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara
Departamento de Matemática - UNICAMP

Rio Claro, 18 de março de 2022

Dedico este estudo primeiramente a Deus, a minha família, a Daiana, meu amor, e a todos os meus irmãos e amigos

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por toda a Sua misericórdia, amor e auxílio.

A minha família, por todo o incentivo e estímulo aos estudos e formação.

A Daiana, meu amor, por estar sempre do meu lado, me ajudando nos momentos turbulentos e me reconhecendo nos momentos de celebração.

Ao meu orientador Rawlilson, por toda a paciência, dedicação, orientação e companheirismo no decorrer do trabalho.

Aos companheiros de turma e professores do PROFMAT, pelo apoio durante todos os momentos do Mestrado.

Aos meus irmãos do Grupo de Estudos Musicais, por me incentivar a entender as belas conexões entre a matemática e a música.

Finalmente, aos amigos da Usina São João, pelo suporte e compreensão dados durante os períodos de aula.

*O som nasce, cresce, propaga-se na natureza do mundo, na natureza das coisas.
Tudo é som, tudo é silêncio e contemplação.
Tudo nasce, morre e se regenera.
Tudo flui do Divino por sua própria vontade.
Tudo aquilo cuja essência é som.*

John Coltrane

Resumo

O presente trabalho tem, como proposta principal, apresentar um estudo introdutório de Análise de Fourier, unindo alguns dos conceitos estudados na teoria ao ensino de funções trigonométricas realizado no Ensino Básico. Inicialmente estudaremos a teoria fundamental das Séries de Fourier, e os principais resultados básicos. Após esta exposição inicial, estudaremos alguns tópicos mais avançados de Análise de Fourier, relacionados à convergência pontual e uniforme das séries de Fourier. Tais tópicos nos mostrarão como o estudo das séries de Fourier na história da Matemática permitiu diversos avanços, principalmente no ramo da Análise. Veremos também uma aplicação destas na resolução de uma Equação Diferencial Parcial: a equação da corda vibrante, com o intuito de estimular o leitor a procurar tópicos mais avançados na disciplina e em áreas correlatas. Finalmente, como proposta de aplicação ao Ensino Básico, relacionaremos o ensino da disciplina de Trigonometria no Ensino Médio de uma forma interdisciplinar ao ensino da Música e da Física, relacionando as funções trigonométricas com ondas sonoras musicais, através da utilização de programas como o Geogebra e Audacity.

Palavras-chave: Análise de Fourier, Equações Diferenciais, Trigonometria, Som, Timbre.

Abstract

The present work has, as main proposal, to present an introductory study of Fourier Analysis, joining some of the concepts studied in theory to the teaching of trigonometric functions carried out in Basic Education. Initially we will study the fundamental theory of Fourier Series, and the main basic results. After this initial exposition, we will study some more advanced topics of Fourier Analysis, related to the point and uniform convergence of Fourier series. Such topics will show us how the study of Fourier series in the history of Mathematics has allowed several advances, especially in the field of Analysis. We will also see an application of these in the resolution of a Partial Differential Equation: the vibrating string equation, in order to encourage the reader to look for more advanced topics in the discipline and in related areas. Finally, as a proposal of application to Basic Education, we will relate the teaching of Trigonometry in High School in an interdisciplinary way to the teaching of Music and Physics, relating trigonometric functions with musical sound waves, through the use of programs such as Geogebra and Audacity.

Keywords: Fourier Analysis, Differential Equations, Trigonometry, Sound, Timbre.

Lista de Figuras

1.1	Gráfico da função f no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$	34
1.2	Reduzida de número $n = 6$ da série de Fourier de f	34
1.3	Gráfico da função f no intervalo $[-3L, 3L]$ do Exemplo 4.	37
1.4	Reduzida de número $n = 6$ da série de Fourier da função f do Exemplo 4.	38
1.5	Gráfico da função f do Exemplo 5 no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$	39
1.6	Reduzida de número $n = 10$ da série de Fourier da função f do Exemplo 5.	40
1.7	Gráfico da função f do Exemplo 6 no intervalo $[-3, 3]$	40
1.8	Reduzida de número $n = 6$ da série de Fourier da função f do Exemplo 6.	41
1.9	Gráfico da função f_1 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 30$	45
1.10	Gráfico da função F_1 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 5$	46
1.11	Gráfico da função F_2 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 5$	46
1.12	Gráfico da função F_3 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 5$	47
2.1	A construção das funções χ e ψ_n	53
2.2	Núcleo de Dirichlet, com $n = 10$	58
2.3	Gráfico da função ψ no intervalo $[-3L, 3L]$	76
2.4	Reduzida de número $n = 15$ da série de Fourier de ψ	77
2.5	As funções L_5, L_{10}, L_{20} e L_{30}	87
2.6	As funções F_5, F_{10} e F_{15}	93
2.7	Gráfico da função f e no intervalo $[0, 2]$	101
2.8	A função seno-integral e seu ponto de máximo global.	118
2.9	A função $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ e os pontos críticos da função seno-integral.	119
2.10	O fenômeno de Gibbs.	123
3.1	O oscilador harmônico simples.	125
3.2	Gráfico da função $A \cos(ct - \varphi)$	126
3.3	Uma onda transversal em diferentes momentos: $t = 0$ e $t = t_0$	127
3.4	Uma onda longitudinal em dois momentos diferentes: $t = 0$ e $t = t_0$	128
3.5	Uma corda vibrante representada como um sistema discreto de massas.	129
3.6	Ondas longitudinais em ambas as direções, com $t = 5$	132
3.7	O tom fundamental (a) e o primeiro overtone (b) para $t = 3, 5$ e 7	136
3.8	Posição inicial da corda dedilhada.	139
3.9	Gráfico da função u	141
3.10	Posições da corda dedilhada nos instantes $t = 0, t = 4$ e $t = 8$	142
4.1	Representação gráfica das funções $x(t)$ e $\hat{x}(t)$	152
4.2	Representação gráfica dos componentes e da função complexa.	152
4.3	Representação gráfica dos componentes e da função complexa, com a fase alterada.	153

4.4	Representação gráfica no Audacity da nota A4, de $440Hz$, emitida por um saxofone tenor.	161
4.5	Padrão periódico da nota A4, e a função <i>Aumentar Zoom</i> do Audacity.	161
4.6	A função <i>Analisar Espectro de Frequência</i> do Audacity.	162
4.7	O espectro do som do A4, de $440Hz$	163
4.8	A função <i>Gerar Som</i> e a onda senoidal de $440Hz$, com amplitude 0,5.	165
4.9	As ondas senoidais de $440Hz$ e $880Hz$, tocadas simultaneamente.	166
4.10	A função <i>Silenciar</i> do Audacity.	169
4.11	A função f_1	170
4.12	A representação matemática da soma dos cinco harmônicos do som original.	171

Lista de Tabelas

4.1	Tabela com as frequências e amplitudes dos cinco primeiros harmônicos da nota A4.	163
4.2	Tabela com as frequências e amplitudes lineares dos cinco primeiros harmônicos da nota A4.	168

Sumário

Introdução	19
1 Séries de Fourier	25
1.1 Introdução	25
1.2 Funções periódicas	25
1.3 Convergência uniforme	26
1.4 Os coeficientes de Fourier	30
1.5 Série de Fourier	32
1.6 Funções pares e ímpares	35
1.7 Calculando algumas séries (interessantes) de Fourier	37
1.8 Integração de séries de Fourier	41
1.9 Forma complexa das séries de Fourier	47
1.10 Convergência das séries de Fourier	48
1.11 Estimando os coeficientes de Fourier	49
2 Estudando a convergência das séries de Fourier	51
2.1 Convergência pontual da série de Fourier	57
2.2 A desigualdade de Bessel	64
2.3 As desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski	68
2.4 Convergência uniforme da série de Fourier	73
2.5 Núcleos de Dirac	79
2.6 Teorema de aproximação de Weierstrass	86
2.7 O teorema de Fejér	91
2.8 Identidade de Parseval	97
2.9 Funções de variação limitada	100
2.10 Fenômeno de Gibbs	114
3 A corda vibrante	125
3.1 O movimento harmônico simples	125
3.2 Ondas transversais e longitudinais	127
3.3 Harmônicos e a sobreposição de tons	128
3.4 Derivando a equação da onda	128
3.5 Solução para a equação da onda	131
3.6 Ondas longitudinais	131
3.7 Sobreposição de ondas transversais	134
3.8 A corda dedilhada	139

4	O ensino da Trigonometria através do som	143
4.1	O que é som?	144
4.1.1	A fonte do som	144
4.1.2	A transmissão do som	145
4.1.3	O receptor do som	145
4.2	Vibrações	145
4.2.1	Sistema massa-mola	146
4.2.2	A representação matemática	146
4.2.3	Modos Naturais de Vibração	147
4.2.4	Sistemas Multimodais	148
4.2.5	O Diapasão	148
4.2.6	Ressonância	149
4.2.7	O Espectograma	150
4.2.8	Ondas de Som	150
4.3	Análise e Síntese de Fourier	151
4.3.1	A Onda Senoidal	151
4.3.2	Ondas Complexas	152
4.3.3	Periodicidade	153
4.3.4	Timbre	153
4.3.5	Ondas Estacionárias	154
4.3.6	Ondas estacionárias em uma corda	155
4.3.7	Pitágoras e as consonâncias	156
4.4	Proposta didática: o ensino da trigonometria através do som	157
4.4.1	O objetivo	157
4.4.2	Os recursos tecnológicos	158
4.4.3	O início da experiência	159
4.4.4	Analisando o som	160
4.4.5	O espectro do som	162
4.4.6	Produzindo sons digitais	164
4.4.7	Reconstruindo o som	167
4.4.8	Representando o som matematicamente	169
5	Considerações finais	173

Introdução

Em uma sessão histórica da Academia Francesa, em 21 de Dezembro de 1807, o matemático e engenheiro Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) anunciou uma tese surpreendente e ambiciosa: de que uma função arbitrária, definida em um intervalo finito e representada por um gráfico arbitrariamente “caprichoso”, pode ser expressa como a soma de funções trigonométricas de seno e cosseno. Tal afirmação causou espanto e incredulidade nos acadêmicos da época (dentre o eles, o famoso matemático Lagrange). Qualquer sobreposição de tais funções trigonométricas sempre resultará em funções infinitamente diferenciáveis (também chamada analíticas). Em outras palavras, dada uma função analítica, a propriedade desta ser infinitamente diferenciável permite que, em um intervalo arbitrariamente pequeno, possamos determinar de forma única seu curso, tanto no sentido à esquerda quando à direita. Desta forma, como seria possível representar qualquer gráfico arbitrário, independente de sua “forma”, através da ideia de Fourier? A afirmação do matemático francês inaugurou um novo capítulo na história da Matemática, proporcionando novas investigações e descobertas no ramo da Análise.

Apesar de sua forte afirmação, Fourier não conseguiu comprovar formalmente as provas de sua teoria. Na época, as ferramentas matemáticas não eram suficientes para tais demonstrações, que exigiam maior rigor e formalismo nas operações com séries infinitas. No entanto, isto foi um fator motivador para novas descobertas e investigações fundamentais. Primeiramente, a “arbitrariedade” das funções que podiam ser representadas pelas séries de Fourier precisavam de maiores investigações sobre suas condições. Em 1829, L. Dirichlet foi pioneiro em tais demonstrações. Em tempos mais recentes, algumas investigações sobre funções mais regulares mostraram que até mesmo séries de Fourier de funções completamente contínuas poderiam não convergir para certos pontos do intervalo de seu domínio. Um método extremamente eficaz foi desenvolvido por L. Fejér, em 1904, consistindo de um novo procedimento em somar as séries de Fourier, de forma que estas convirjam em todos os pontos do domínio de uma função (algo bem inesperado!). A única condição exigida por Féjer era que a função fosse *integrável*, não sendo necessária continuidade ou diferenciabilidade.

Uma outra extensão da classe de funções que pudessem ser representadas por séries de Fourier veio através da generalização do conceito de “integrabilidade”. B. Riemann desenvolveu a ideia de uma função ser integrável quando estudava e investigava as séries de funções trigonométricas, em 1854. O conceito de uma função ser “Riemann-integrável” foi generalizada posteriormente por Borel e Lebesgue, em 1904, também motivados em estudar a aplicabilidade das séries de Fourier em uma classe ainda maior de funções. O desenvolvimento da Matemática Moderna, desde a definição e conceitualização formal de função até a moderna Teoria da Medida, está intimamente ligada à

história das séries de Fourier.

Apesar dos refinamentos da descoberta original de Fourier pertencerem ao reino da Matemática Pura, a possibilidade de resolver diversos problemas encontrados comumente no universo físico através das vibrações puras das funções seno e cosseno teve importante repercussão em diversas áreas da Física Matemática. O próprio Fourier fez sua descoberta ao estudar a teoria de condução do calor. No entanto, sua teoria também é aplicada em problemas de Acústica, Elasticidade, Ótica, Eletricidade e Vibrações Atômicas. Em particular, a teoria das redes elétricas e suas ramificações seria inconcebível sem o método de Fourier, em especial a “integral de Fourier”, considerada a mais importante descoberta do matemático.

Exemplificaremos uma das aplicações da teoria de Fourier através de um sistema de mecanismo simples: a mola vibrante. Podemos expressar a equação diferencial da mola vibrante através da expressão

$$y'' + \alpha y' + k^2 y = p(t) \quad (1)$$

onde a função $y(t)$ representa o deslocamento da mola em função do tempo, k é a constante da mola e α é a constante de amortecimento causada pela fricção, enquanto o termo $p(t)$ representa a força de excitação.

Neste simples exemplo observamos algumas importantes características matemáticas, presentes em um grande grupo de fenômenos. Primeiramente, a equação diferencial em (1) é *linear*, pelo fato de $y(t)$ e suas derivadas (neste caso, a primeira e segunda derivadas) dependerem apenas delas mesmas, e não de seus quadrados, produtos ou outras combinações. Isto tem um significado fundamental: o *princípio da superposição*. De forma simples, este princípio diz que, se resolvemos o problema para certos $p_1(t)$ e $p_2(t)$, obtendo as soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, teremos também a solução para a força de excitação

$$p(t) = a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t), \quad (2)$$

que é dada por

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t). \quad (3)$$

Apesar de na formulação inicial os termos $p(t)$ e $y(t)$ terem significados físicos de “força de excitação” e “deslocamento”, podemos denotar mais geralmente o termo à direita $p(t)$ como a entrada e a solução $y(t)$ como a saída da equação diferencial. Desta forma, a expressão “ache a solução da equação diferencial, dado o termo à direita” pode ser reformulada como “ache a saída, dada a entrada do fenômeno”.

Em adição à linearidade da equação diferencial, observemos uma segunda propriedade fundamental: a equação diferencial possui coeficientes constantes, ou seja, os coeficientes de $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ são constantes dadas, e não expressões em função do tempo t . Isto significa que, em termos físicos, as características do sistema se mantêm inalteradas à medida que o tempo passa. Isso é de extrema importância. Podemos ter sistemas físicos em que isso não se observa: por exemplo, em uma rede elétrica a resistência pode aquecer de acordo com a passagem do tempo. Neste caso, a resistência se torna uma expressão em função do tempo, e a constante de amortecimento α se torna uma função na variável t . Não nos preocupemos neste momento com sistemas desse tipo.

Podemos testar as propriedades de nosso sistema com o seguinte experimento: como entrada, utilizaremos a função senoidal $A \sin \omega t$ ou, mais convenientemente, a função

complexa

$$p(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)$$

Considerando o fato de que a equação diferencial do sistema da mola vibrante possui coeficientes reais, a saída $y(t)$ resolverá dois problemas. Sua parte real nos dará a saída referente à entrada $p(t) = A \cos \omega t$, enquanto sua parte imaginária à entrada $p(t) = A \operatorname{sen} \omega t$.

Agora, a solução da equação diferencial

$$y'' + \alpha y' + k^2 y = Ae^{i\omega t}$$

é obtida na forma

$$y(t) = Be^{i\omega t},$$

onde a amplitude B deve satisfazer a condição

$$B(k^2 - \omega^2 + i\alpha\omega) = A,$$

e a amplitude B pode ser escrita como

$$B = \frac{A}{k^2 - \omega^2 + i\alpha\omega} = \frac{A}{k^2 - \omega^2 + i\alpha\omega} \cdot \frac{k^2 - \omega^2 - i\alpha\omega}{k^2 - \omega^2 - i\alpha\omega} = \frac{A(k^2 - \omega^2 + i\alpha\omega)}{(k^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}.$$

O número complexo B pode ser escrito em sua forma polar, como

$$B = CAe^{-i\phi},$$

onde

$$C = \frac{1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}}$$

e

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\alpha\omega}{k^2 - \omega^2}.$$

Obtemos, portanto, a solução

$$y(t) = Be^{i\omega t} = CAe^{-i\phi}e^{i\omega t} = CAe^{i(\omega t - \phi)}.$$

Comparando as duas equações

$$\begin{aligned} p(t) &= A \operatorname{sen} \omega t, \\ y(t) &= CA \operatorname{sen}(\omega t - \phi), \end{aligned} \tag{4}$$

podemos analisar o resultado da seguinte forma: *a saída para uma entrada senoidal será também senoidal, com mesma frequência mas fase e amplitude modificada.* A amplitude original A foi alterada para CA , enquanto a fase de vibração teve o ângulo alterado para ϕ . No entanto, a frequência angular de vibração ω se manteve inalterada.

Este resultado só é possível por duas condições: a *linearidade* da equação diferencial e o fato dos coeficientes serem *constantes*. Se alguma destas condições não forem satisfeitas, a relação encontrada em (4) entre a entrada e a saída não ocorrerá mais.

Apesar do sistema mola vibrante proposto em nosso exemplo ser extraordinariamente simples, serve como protótipo para um vasto número de problemas físicos. Podemos pensar que, ao invés de uma única mola, o sistema tenha um grande número de molas conectadas linearmente entre si. As constantes de amortecimento e de mola de cada um dos componentes deste sistema podem ser diferentes, mas o mesmo possui duas características em comum com nosso exemplo mais simples: as equações diferenciais que descrevem seu comportamento são lineares, e os coeficientes independem do tempo. Estas duas condições também são satisfeitas em diversos outros problemas físicos. Por exemplo, uma estrutura elástica arbitrária (no caso em que a força de excitação não é muito forte) é matematicamente equivalente a um grande número de molas acopladas. O mesmo é válido para uma rede elétrica arbitrariamente complexa, para a condução de calor em um corpo sólido, a propagação da luz em um fluido ou em um gás, entre muitos outros. Todos esses fenômenos têm algo em comum: nós temos uma força de excitação (seja ela a voltagem, uma fonte de calor ou de luz), que é a *entrada* do sistema, e observamos uma *saída* (o deslocamento elástico da estrutura em um determinado ponto, o corrente elétrica em um circuito, a temperatura em determinado ponto do sólido ou a intensidade da luz em um ponto do espaço). Para todos esse fenômenos, duas condições devem ser verificadas: (i) que o sistema satisfaça a linearidade (ou seja, que uma saída para a entrada $a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t)$ seja equivalente $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$), e (ii) que os parâmetros físicos do sistema se mantenham inalterados com o tempo t .

Atendidas essas condições, a relação de entrada-saída (4) pode ser utilizada. Mas qual a importância dessa relação? Por quê a entrada $p(t)$ deve ser dada nessa forma especial e específica? É aí que a descoberta de Fourier se torna extremamente importante. Assumamos que a entrada $p(t)$ se estenda a um certo intervalo, de $t = 0$ a $t = T$. Então, o teorema de Fourier afirma que a função $p(t)$, independente de seu “formato”, pode ser expressa como a soma de vibrações puras de seno e cosseno:

$$p(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

onde definimos

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Basta sabermos o que acontece com a função especial de entrada

$$e^{ik\omega t},$$

onde k é um número inteiro. Daí, pelo princípio de superposição, podemos obter a saída correspondente à função $p(t)$.

É claro que precisamos conhecer de qual forma podemos representar $p(t)$ como um somatório de funções trigonométricas. Fourier nos deu a solução desta questão, na forma das seguintes integrais definidas, chamadas de *coeficientes de Fourier*:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos k\omega t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin k\omega t dt.$$

Em praticamente todas as aplicações das séries de Fourier em problemas físicos situações semelhantes às anteriores se apresentam. No presente trabalho estudaremos as séries de Fourier e suas intrigantes particularidades. Em especial, estudaremos os principais teoremas de convergência das séries de Fourier e sua importante contribuição na história da Matemática e da Análise Moderna. Entenderemos quais são as condições de uma função para que sua respectiva série de Fourier convirja, seja pontualmente ou uniformemente. Nossos estudos basear-se-ão na sequência lógica de D.G. de Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 5^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Procuraremos demonstrar os resultados de forma minuciosa, trazendo materiais auxiliares para que o leitor de primeiro contato com o tema possa ter uma experiência mais “suave” no decorrer do texto. Traremos também soluções alternativas aos principais teoremas presentes no estudo, baseadas em outros materiais que podem ser encontrados na bibliografia deste trabalho.

Exemplificaremos, de forma sucinta, uma aplicação das séries de Fourier na resolução de uma Equação Diferencial Parcial clássica: o problema da corda vibrante. Finalmente, indo ao encontro do objetivo do PROFMAT, faremos uma proposta de introdução do assunto ao Ensino Médio através da representação de ondas sonoras como somas de funções trigonométricas.

Para o leitor mais interessado nos conceitos teóricos apresentados, são poucos os requisitos para uma boa compreensão do texto: os cursos tradicionais de Cálculo, noções básicas de Álgebra Linear e conceitos introdutórios de Equações Diferenciais. Um curso introdutório de Análise Real também será de grande auxílio para o leitor; no entanto, procuraremos demonstrar os principais resultados necessários no decorrer do texto.

1 Séries de Fourier

1.1 Introdução

Nossa questão central tratará de estudar as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que podem ser expressas da forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.1)$$

que, como veremos, é chamada de *série de Fourier de f* .

Antes de darmos início ao desenvolvimento da teoria, lembraremos algumas definições.

Definição 1. *Seja X um conjunto não vazio, com $X \subset \mathbb{R}$. Uma **sequência de funções** $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n , definida em X e tomando valores reais.*

Definição 2. *Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. A soma $f = \sum f_n$ de uma **série de funções** é um caso particular de um limite de uma sequência: $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, onde*

$$s_n = f_1 + \dots + f_n.$$

1.2 Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica, com período T se $f(x + T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os exemplos clássicos de funções periódicas são as funções seno e cosseno, que são de extrema importância para o estudo das séries de Fourier. Façamos a demonstração de sua periodicidade.

Se a função seno é periódica, existe $T \in \mathbb{R}$, tal que $\sin(x + T) = \sin(x)$. Usando as fórmulas de adição de seno, temos

$$\sin(x + T) = \sin(x) \cos(T) + \cos(x) \sin(T)$$

Notamos que, se $\cos(T) = 1$ e $\sin(T) = 0$, a condição $\sin(x + T) = \sin(x)$ é satisfeita. Pondo $T = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, de fato temos que $\cos(2k\pi) = 1$ e $\sin(2k\pi) = 0$, e a função seno é periódica, com período $2k\pi$.

Analogamente, é possível mostrar que o período da função cosseno também é $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Se T é um período de uma função f , então os valores $\pm 2T, \pm 3T, \pm 4T \dots$ também são períodos de f .

Chamaremos de **período fundamental** o menor valor positivo de T .

No próximo resultado, determinaremos o período fundamental das funções $\sin \frac{n\pi x}{L}$ e $\cos \frac{n\pi x}{L}$. O processo é semelhante ao que fizemos nos exemplos anteriores. Para o caso $\sin \frac{n\pi x}{L}$, devemos ter

$$\sin \frac{n\pi(x+T)}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

ou seja

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \sin \frac{n\pi T}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1.2)$$

Pondo $x = \frac{L}{2n}$ em (1.2), teremos

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} + \sin \frac{n\pi T}{L} \cos \frac{\pi}{2} &= \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} &= \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{n\pi T}{L} = 1 \end{aligned}$$

Pela relação trigonométrica fundamental ($\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$), é imediato verificar que $\sin \frac{n\pi T}{L} = 0$. Como buscamos o período fundamental de $\sin \frac{n\pi T}{L}$, buscamos o menor valor positivo de T , de forma que

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2L}{n}$$

Analogamente, utilizando a fórmula de adição de cossenos, também encontramos que o período fundamental T de $\cos \frac{n\pi T}{L}$ é $\frac{2L}{n}$.

Finalmente, enunciaremos uma propriedade sobre integrais de funções periódicas, que será útil em nossas demonstrações futuras:

Se uma função f , periódica de período T é integrável em qualquer intervalo de comprimento T , então é integrável em qualquer outro intervalo de mesmo comprimento, e o valor da integral é o mesmo, ou seja,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx, \quad (1.3)$$

para quaisquer a e b .

1.3 Convergência uniforme

Nesta seção, relembremos algumas definições e resultados da convergência de séries e seqüências. No decorrer do desenvolvimento teórico, mostraremos alguns critérios de convergência das séries de Fourier, e esta seção será oportuna para as provas futuras.

Definição 3. *Uma seqüência numérica $(a_n)_{n \geq 1}$ é dita **convergente** quando, dado um real l , para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.*

Neste caso, dizemos que l é um limite da sequência a_n , e isto poderá ser escrito como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow l.$$

Exemplo 1. A sequência a_n dada por $a_n = \frac{1}{n}$ converge para 0.

Usando a definição, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, deveremos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > n_0$$

Para isto, basta que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, e temos que $a_n \rightarrow 0$.

Definição 4. Uma *série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** se a sucessão das reduzidas (também chamadas de somas parciais) converge. A sucessão das reduzidas é aquela cujo termo geral é

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_j,$$

sendo A_n a reduzida de ordem n .

Exemplo 2. A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$, com $|\lambda| < 1$ converge.

Expandindo a reduzida de ordem n da série, teremos

$$\sum_{j=1}^n \lambda^j = \lambda^1 + \dots + \lambda^n. \quad (1.4)$$

Multiplicando a expressão (1.4) pelo fator λ , obtemos

$$\lambda \sum_{j=1}^n \lambda^j = \lambda^2 + \dots + \lambda^{n+1}. \quad (1.5)$$

E subtraindo (1.5) de (1.4), temos

$$(1 - \lambda) \sum_{j=1}^n \lambda^j = \lambda - \lambda^{n+1} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda^j = \frac{\lambda(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda},$$

sendo esta conhecida como a **fórmula de soma de progressão geométrica**.

Pelo fato de $|\lambda| < 1$, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$ e o limite da sucessão das reduzidas da série geométrica será $\frac{\lambda}{1 - \lambda}$, mostrando que a série converge.

Definição 5. Dada uma sequência de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, onde $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais definidas em um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que a sequência de funções **convergir pontualmente** para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter, para cada $x \in X$ um inteiro $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, o qual dependente de ε e de x , tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Por definição, a **série** $\sum f_n$ converge pontualmente num conjunto X se, e somente se, a sequência de suas reduzidas $s_n = f_1 + \dots + f_n$ converge pontualmente em X .

Definição 6. Diremos que uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ **convergirá uniformemente** para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

seja qual for $x \in X$.

Por definição, a **série** $\sum f_n$ converge uniformemente num conjunto X se, e somente se, a sequência de suas reduzidas $s_n = f_1 + \dots + f_n$ converge uniformemente em X .

O próximo resultado, chamado de **Teste M de Weierstrass**, é importante no estudo das séries de funções e, por consequência, em nosso estudo de séries de Fourier. Ele reduz o problema da verificação da convergência de uma série de funções ao problema de verificar a convergência de uma série numérica, que de forma geral, acaba sendo mais simples.

Para a prova do Teste-M de Weierstrass, definiremos as sequências de Cauchy, e enunciaremos um resultado importante, cuja demonstração pode ser encontrada em E. L. Lima. *Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável*. 12^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

Seja $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções. Ela se chama uma **sequência de Cauchy** quando, dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implicam $|f_m - f_n| < \varepsilon$.

Teorema 1. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Como vimos que uma série é um caso particular de um limite da sequência de suas reduzidas, temos que uma série é uniformemente convergente se, e somente se, a sequência de suas reduzidas é uma sequência de Cauchy.

Com isto, podemos enunciar o

Teorema 2. Teste-M de Weierstrass: Seja $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções. Suponhamos que existam constantes M_k , com $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$|f_k(x)| \leq M_k,$$

para todo $x \in X$ e $k \geq 1$, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty.$$

Então a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) < \infty$$

converge absolutamente e uniformemente em X .

Demonstração: Observemos primeiro que a série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge absolutamente em X , utilizando o critério de comparação com a série de termos não-negativos $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$. Seja

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Mostraremos que as reduzidas $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ convergem uniformemente para $F(x)$. De fato,

$$|F(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k,$$

onde utilizamos na passagem acima a desigualdade triangular e a primeira condição do teorema. Como a série $\sum M_k$ é convergente, a sequência de suas reduzidas é uma sequência de Cauchy, de forma que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > n > n_0$, tenhamos

$$\left| \sum_{k=n}^m M_k \right| < \varepsilon.$$

Como isto é válido para todo $m > n > n_0$, tomando n nestas condições, teremos

$$|F(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon,$$

mostrando que a série é uniformemente convergente.

□

O estudo das séries uniformemente convergentes apresenta excelentes propriedades. Enunciaremos algumas delas nas proposições seguintes.

Proposição 1. *Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas, e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então, a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.*

Proposição 2. *Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I , e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então,*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

Proposição 3. *Suponhamos que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo I convirjam pontualmente para um $x \in I$, sejam continuamente deriváveis, e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Então*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

As demonstrações das proposições acima serão omitidas nessa leitura, mas são resultados clássicos da Análise, e podem ser encontrados em diversos exemplos da literatura clássica.

1.4 Os coeficientes de Fourier

Se uma função f for expressa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.6)$$

como podemos proceder para descobrir os coeficientes a_n e b_n ? É de se esperar que tais coeficientes estejam ligados à função f . Vamos supor que a igualdade em (1.6) se verifique, e que a série **convirja uniformemente**. Pela Proposição 2 da seção anterior, a função f deve ser contínua (podendo ser integrada), periódica de período $2L$ pois, como vimos na seção 1.2, o período fundamental de $\cos \frac{\pi x}{L}$ é $2L$, que também é período para as demais funções de cosseno e seno que aparecem na série. Usando a Proposição 2 da seção anterior, integraremos ambos os lados de (1.6), obtendo

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2}a_0 dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right) dx,$$

o que equivale a

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (1.7)$$

Para obtermos os coeficientes, exploraremos os conceitos de ortogonalidade. Chamaremos duas funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ **ortogonais** em um intervalo $[a, b]$ se

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0. \quad (1.8)$$

Proposição 4. *As funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e $\sen \frac{n\pi x}{L}$ são ortogonais em relação à função constante $\varphi(x) = 1$ no intervalo $[-L, L]$.*

Demonstração Definamos em (1.8) $\varphi(x) = 1$ e $\psi(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$, e calculemos a integral no intervalo $[-L, L]$. Pelo método de substituição de variáveis, tomando $\lambda = \frac{n\pi x}{L}$ e $\frac{d\lambda}{dx} = \frac{n\pi}{L}$, teremos

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{L}{n\pi} \cos \lambda d\lambda = \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos \lambda d\lambda = \frac{L}{n\pi} (\sen \lambda) \Big|_{-n\pi}^{n\pi} = 0, \quad (1.9)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A prova para a função $\sen \frac{n\pi x}{L}$ é análoga ao demonstrado em (1.9).

□

Com isto, é possível obter o coeficiente a_0 . Notemos que em (1.7), pelo resultado da Proposição 4, as integrais $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ e $\int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} dx$ se anulam, e temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx \Rightarrow \int_{-L}^L f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 x \Big|_{-L}^L = \frac{1}{2}a_0 2L \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx = a_0. \end{aligned}$$

Para os coeficientes a_n e b_n , exploraremos algumas relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{se } n, m \geq 1; \quad (1.10)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1; \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Tais demonstrações são obtidas utilizando as identidades trigonométricas de transformação de produto em soma:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad (1.13)$$

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \quad (1.14)$$

$$\cos(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)) \quad (1.15)$$

Utilizando a mesma estratégia da Proposição 4, tem-se que, quando $a \neq b$, as funções (1.13), (1.14) e (1.15) são ortogonais. Quando $a = b$ temos, em (1.13),

$$\begin{aligned} \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos^2(a) = \frac{1}{2}(\cos(2a) + \cos(0)). \end{aligned}$$

Pondo $a = \frac{n\pi x}{L}$, teremos

$$\cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \cos(0)\right),$$

o que implica que

$$\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \cos(0) dx\right) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx = L,$$

como mostrado em (1.11), quando $n = m$. A demonstração para (1.12), no caso em que $n = m$ é análoga, e, em (1.15), quando $a = b$, teremos $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(0) = 0$, o que mostra que (1.10) é ortogonal, para todos $n, m \geq 1$.

Agora, multiplicando (1.6) por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integrando ambos os lados, teremos

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \\ &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Pelas relações de ortogonalidade, a primeira integral da expressão acima e o somatório $\sum \int_{-L}^L b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx$ se anulam, e para $n = m$ tem-se que

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = a_n L.$$

Utilizando o mesmo raciocínio, multiplicando (1.6) por $\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}$, teremos

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = b_n L.$$

Finalmente, após estas demonstrações, obtemos que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0; \quad (1.16)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 1. \quad (1.17)$$

Podemos assim apresentar a seguinte definição:

Definição 7. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado $[-L, L]$. Os números a_n , para $n \geq 0$ e b_n , para $n \geq 1$, demonstrados em (1.16) e (1.17), são denominados **coeficientes de Fourier** da função f .*

As condições de integrabilidade e integrabilidade absoluta da função f serão estudadas oportunamente no desenvolvimento da teoria, e são necessárias para que as expressões encontradas em (1.16) e (1.17) tenham sentido.

1.5 Série de Fourier

Pela Definição 3, e pelas expressões dos coeficientes encontradas em (1.16) e (1.17), podemos escrever a função f como

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.18)$$

e a expressão do lado direito será conhecida como *série de Fourier de f* .

Perguntamo-nos como será a relação entre a função f e sua respectiva série de Fourier. A igualdade nem sempre ocorre, e existem casos em que uma série de Fourier de uma função contínua poderá divergir! No que se segue, estabeleceremos algumas condições suficientes para que a igualdade entre uma função f e sua série de Fourier ocorra.

Introduziremos algumas terminologias e lembraremos de alguns fatos do Cálculo Diferencial e Integral. Quando dizemos que uma função f é integrável em um intervalo $[a, b]$, dizemos que a integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

(que pode ser imprópria) existe, ou em outras palavras, é finita. No decorrer dos temas expostos nesse texto trataremos das funções integráveis a Riemann.

Definição 8. Diremos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** se tiver no máximo um número finito de descontinuidades, sendo estas de primeira espécie, em qualquer intervalo limitado. Assim, dados $a < b$, existem $a = a_0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, tais que f seja contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 0, 1, \dots, n-1$, e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Quando os limites acima existem, mas são diferentes, dizemos que a descontinuidade é de **primeira espécie**.

Definição 9. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será **seccionalmente diferenciável** se ela e sua derivada f' forem seccionalmente contínuas.

Notemos que a derivada f' não está definida em todos os pontos; de fato, f' não existe nos pontos de descontinuidade de f . Além disso, podem existir pontos onde f é contínua, mas f' não exista.

Com essas condições e definições, apresentaremos um teorema (que será demonstrado oportunamente) que fornece condições suficientes para a convergência de uma série de Fourier de uma função f , e será útil para alguns resultados que apresentaremos.

Teorema 3. (Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então, a série de Fourier da função f (como em (1.18)) converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ (onde $f(x+0)$ e $f(x-0)$ denotam os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente, de f em um ponto x). Ou seja,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Utilizando este teorema, demonstremos a **série de Leibniz**, também conhecida como a fórmula de Leibniz para π , publicada em 1676 pelo matemático alemão, e descoberta pelo matemático indiano Madhava de Sangamagrama em meados do século XIV.

Exemplo 3. Série de Leibniz

Seja f a função definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi; \\ 0, & -\pi \leq x < 0; \\ \text{e periódica de período } 2\pi. \end{cases}$$

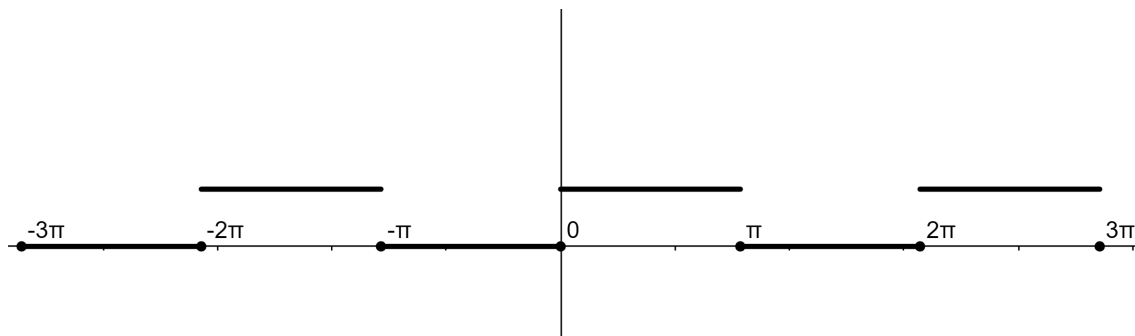


Figura 1.1: Gráfico da função f no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Calculando os coeficientes de Fourier, teremos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1$$

e, para $n \neq 0$, teremos para a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para b_n , teremos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

Notemos que, quando n é da forma $2k$, com $k \in \mathbb{N}$, temos que $\cos 2k\pi = 1$, e $b_n = 0$. Quando n é da forma $2k - 1$, temos que $\cos(2k - 1)\pi = -1$, e então

$$b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, k \in \mathbb{N}$$

Portanto, a série de Fourier da função f será:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)x]. \quad (1.19)$$

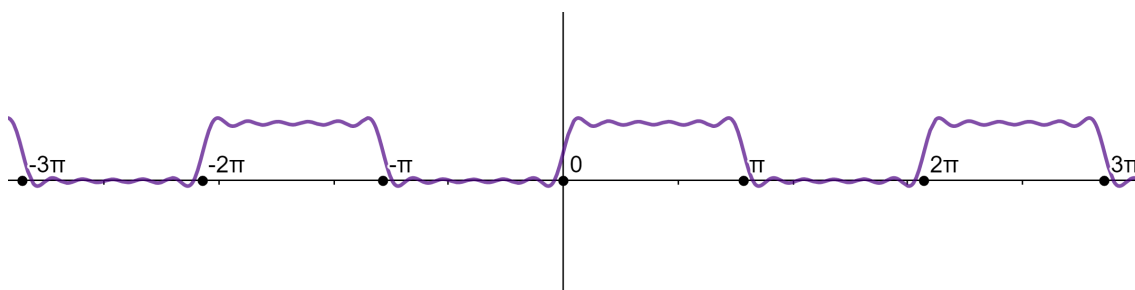


Figura 1.2: Reduzida de número $n = 6$ da série de Fourier de f .

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 1$. Usando o Teorema 3 (também chamado de Teorema de Fourier) em (1.19), teremos

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right].$$

Multiplicando ambos os lados da expressão por $\frac{\pi}{2}$, teremos

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

e daí, para k ímpar, teremos $\operatorname{sen}[(2k-1)\frac{\pi}{2}] = 1$, e para k par, $\operatorname{sen}[(2k-1)\frac{\pi}{2}] = -1$, de forma que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

sendo esta a **série de Leibniz**. Tomando a reduzida de ordem $n = 5$ da série de Leibniz, por exemplo, teremos que

$$\frac{\pi}{4} \sim 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \sim 0,8349 \Rightarrow \pi \sim 3,3396.$$

1.6 Funções pares e ímpares

Nesta seção estudaremos as propriedades das funções pares e ímpares, e de suas respectivas séries de Fourier.

Seja a função f , definida em toda a reta ou em algum $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ é uma **função par** se

$$f(-x) = f(x)$$

para todo x . Isto implica que o gráfico de qualquer função par $y = f(x)$ é simétrico em relação ao eixo y . Pela interpretação da integral como a área sob o gráfico de uma função, teremos, para as funções pares, que

$$\int_{-l}^l f(x)dx = \int_{-l}^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx = \int_{-l}^0 f(-x)dx + \int_0^l f(x)dx$$

e, com uma simples substituição de variáveis (pondo $u = -x$ e $du = -dx$), utilizando as propriedades de operações de integrais, teremos

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x)dx &= \int_l^0 -f(u)du + \int_0^l f(x)dx = -\int_l^0 f(u)du + \int_0^l f(x)dx = \\ &= \int_0^l f(u)du + \int_0^l f(x)dx = 2 \int_0^l f(x)dx \end{aligned}$$

para qualquer l de forma que f é definida e integrável no intervalo $[-l, l]$.

Dizemos que uma função f , definida em toda a reta ou em algum $X \subset \mathbb{R}$ é **ímpar** se

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo x . Em particular, para funções ímpares, temos

$$f(-0) = -f(0)$$

o que implica que $f(0) = 0$. O gráfico de uma função ímpar $y = f(x)$ é simétrico em relação à origem. Em relação à integral de uma função ímpar, temos

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x)dx &= \int_{-l}^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx = \int_{-l}^0 -f(-x)dx + \int_0^l f(x)dx = \\ &= \int_0^l f(-x)dx + \int_0^l f(x)dx. \end{aligned}$$

Usando a mesma estratégia de substituição de variáveis usada para as funções pares, teremos

$$\int_{-l}^l f(x)dx = - \int_0^l f(u)du + \int_0^l f(x)dx = 0$$

para qualquer l de forma que $f(x)$ é definida e integrável no intervalo $[-l, l]$ (em ambos os casos, a escolha da variável x ou u não interfere no cálculo da integral).

Proposição 5. *As funções seno e cosseno são ímpar e par, respectivamente.*

Utilizando as fórmulas de adição de arco, temos que

$$\sin(-\theta) = \sin(0 - \theta) = \sin(0)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(0) = -\sin(\theta),$$

e

$$\cos(-\theta) = \cos(0 - \theta) = \cos(0)\cos(\theta) + \sin(0)\sin(\theta) = \cos(\theta).$$

Com isto, temos

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{e} \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

mostrando que as funções seno e cosseno são ímpar e par, respectivamente. \square

Como consequência da definição de funções pares e ímpares, são válidas as seguintes propriedades:

- (i) O produto de duas funções pares ou ímpares é uma função par;
- (ii) O produto de uma função par por uma ímpar é uma função ímpar.

Para a prova de (i), se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são funções pares, então para $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, teremos

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)\psi(x) = f(x).$$

Quando $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ forem funções ímpares, teremos

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = [-\varphi(x)][-\psi(x)] = \varphi(x)\psi(x) = f(x).$$

Para a prova de (ii), se $\varphi(x)$ é par e $\psi(x)$ é ímpar, então

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)[-\psi(x)] = -\varphi(x)\psi(x) = -f(x).$$

Munidos destas demonstrações e propriedades, verificaremos algumas características de séries de Fourier de funções pares e ímpares.

(a) Se f for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = 0.$$

Isto se dá pois $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ é par e $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ é ímpar, e pelas propriedades discutidas acima, temos que $\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, e $\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$. Logo, a série de Fourier de uma função par é uma **série de cossenos**.

(b) Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

e a prova é análoga ao realizado em (a). Logo, a série de Fourier de uma função ímpar é uma **série de senos**.

1.7 Calculando algumas séries (interessantes) de Fourier

Com os resultados obtidos, podemos calcular algumas séries de Fourier, que nos trazem resultados interessantes.

Exemplo 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, dada por $f(x) = x^2$, para $-L \leq x \leq L$.

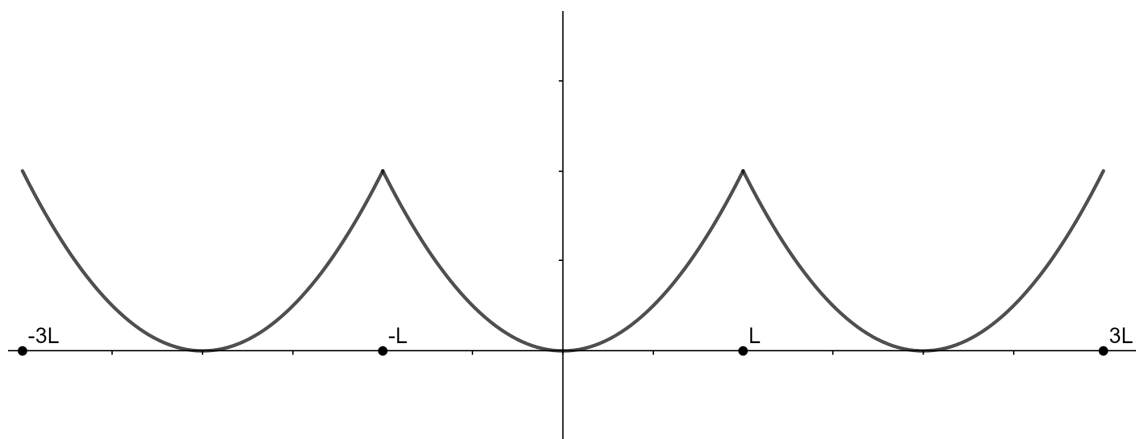


Figura 1.3: Gráfico da função f no intervalo $[-3L, 3L]$ do Exemplo 4.

Calculemos sua série de Fourier. Como f é par (pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$), teremos uma série de cossenos, com coeficientes

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{2}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{2L^2}{3}$$

e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Usando o método de substituição de variáveis, pondo $y = \frac{n\pi x}{L}$, e $dy = \frac{n\pi}{L} dx$, teremos

$$a_n = \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos y dy.$$

Daí, pelo método de integração por partes, teremos

$$\int_0^{n\pi} y^2 \cos y dy = y^2 \operatorname{sen} y \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 2y \operatorname{sen} y dy = -2 \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y dy,$$

e integrando o termo à direita da igualdade,

$$\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y dy = -y \cos y \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos y dy = -n\pi \cos n\pi + \operatorname{sen} y \Big|_0^{n\pi} = -n\pi \cos n\pi,$$

de forma que

$$\int_0^{n\pi} y^2 \cos y dy = 2n\pi \cos n\pi.$$

Então

$$a_n = \frac{4L^2}{n^3\pi^3} n\pi \cos n\pi = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n,$$

pois $\cos n\pi$ oscila entre -1 , para n da forma $2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, e 1 , para n da forma $2k$.

Portanto, a série de Fourier da função f será

$$f(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (1.20)$$

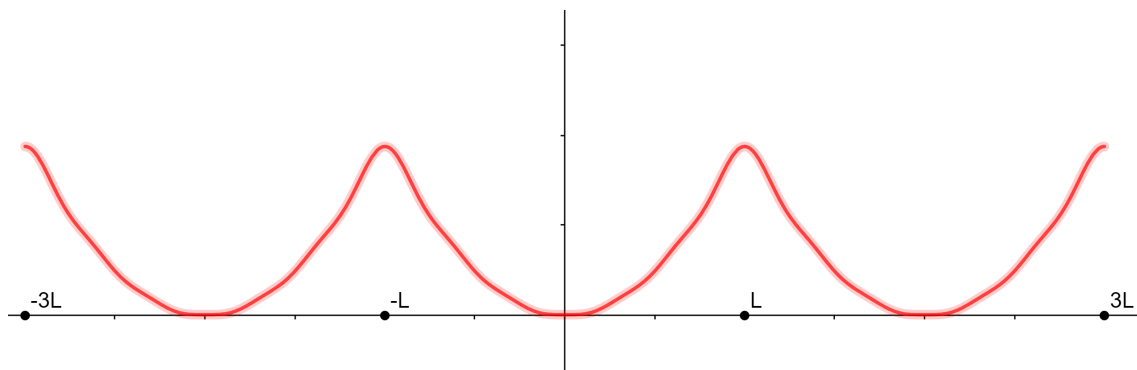


Figura 1.4: Reduzida de número $n = 6$ da série de Fourier da função f do Exemplo 4.

Usando o Teorema de Fourier em (1.20), pondo $x = L$, teremos

$$L^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(-1)^n \cos n\pi = 1$, e podemos reescrever nossa expressão como

$$L^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{2L^2}{3} = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ou seja

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots$$

e esta é conhecida como a resolução do problema de Basiléia, proposto por Pietro Mengoli e resolvido por Leonhard Euler, em 1735.

Exemplo 5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π , dada por $f(x) = x$, para $-\pi < x < \pi$.

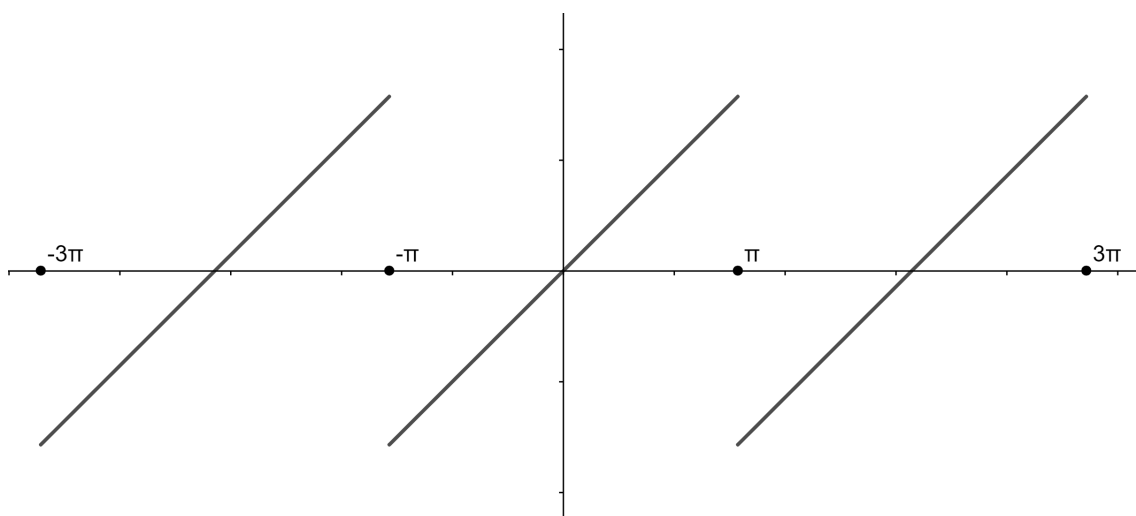


Figura 1.5: Gráfico da função f do Exemplo 5 no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Temos que $f(x)$ é uma função ímpar, suave, e com descontinuidades nos pontos $x = (2k + 1)\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. Logo, pelo demonstrado na seção 1.6, a série de Fourier será uma série de senos, e podemos calcular seus coeficientes, de forma que

$$a_n = 0, (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx,$$

e então, usando integração por partes, teremos,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx &= -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \\ &= -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2} \operatorname{sen} y \Big|_0^{n\pi} = -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

onde usamos $y = nx$ como substituição de variável.

Então, a série de Fourier de f será

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx,$$

que pode ser escrita, utilizando o Teorema de Fourier, como

$$x = 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots \right).$$

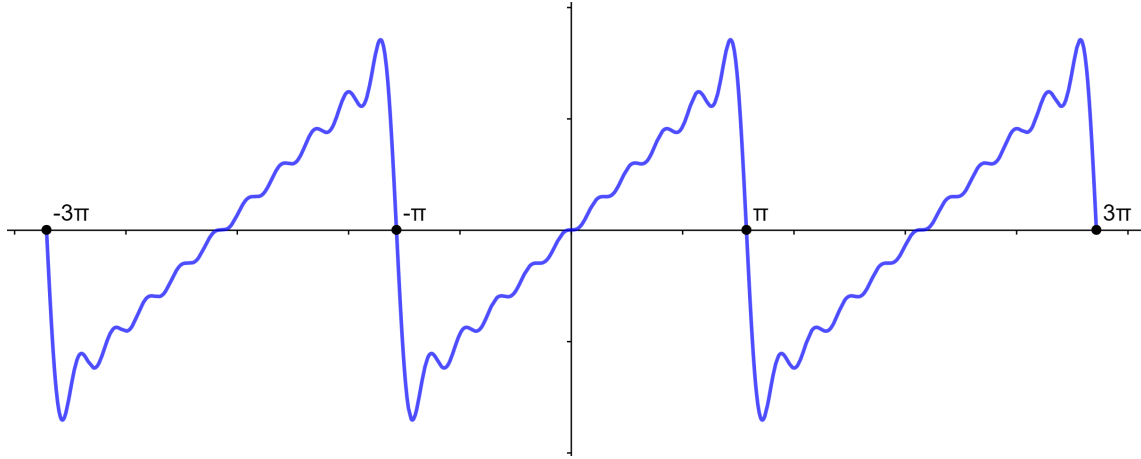


Figura 1.6: Reduzida de número $n = 10$ da série de Fourier da função f do Exemplo 5.

Exemplo 6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica, de período 2, dada por $f(x) = |x|$, para $-1 \leq x < 1$. Esta é uma função suave por partes, e contínua em todos os pontos.

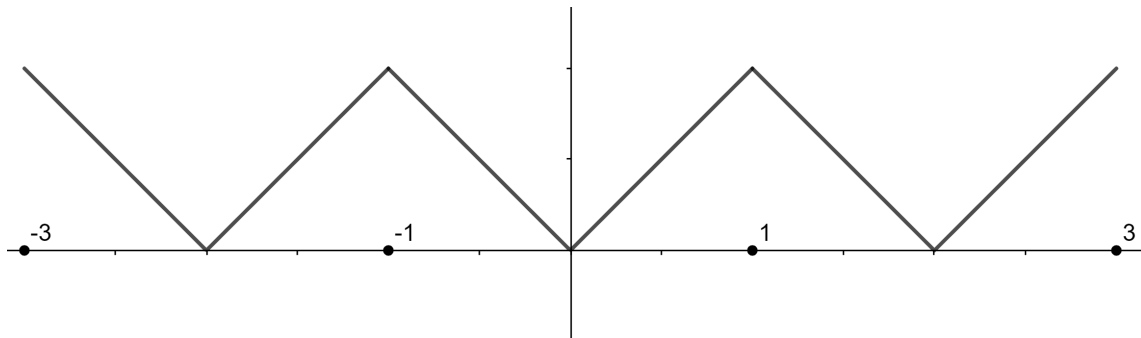


Figura 1.7: Gráfico da função f do Exemplo 6 no intervalo $[-3, 3]$.

Pela propriedade da função modular, é fácil verificar que f é uma função par ($f(-x) = |x| = f(x)$), e então podemos utilizar os resultados obtidos para as séries de Fourier de funções pares.

Temos que

$$a_0 = \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1$$

$$a_n = \int_{-1}^1 |x| \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx.$$

Usando integração por partes e substituição de variáveis,

$$a_n = 2 \left[\left(x \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \operatorname{sen} n\pi x dx \right] = 2 \left[-\frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} \operatorname{sen} u du \right],$$

onde $u = n\pi x$ ($dx = \frac{du}{n\pi}$). Então,

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2} \cos u \Big|_0^{n\pi} = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

Pelo fato de f ser par, então $b_n = 0$. Portanto, a série de Fourier de f pode ser escrita como

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$$

Notamos que, quando n é ímpar, $(-1)^n - 1 = -2$, e quando n é par, $(-1)^n - 1 = 0$. Logo,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)\pi x].$$

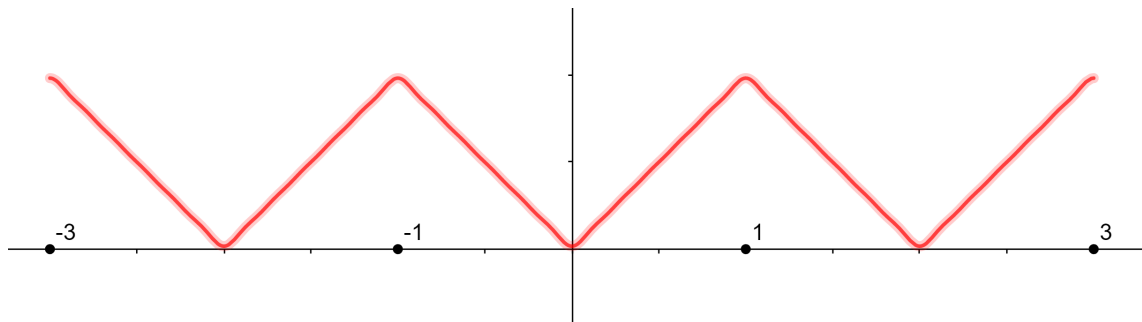


Figura 1.8: Reduzida de número $n = 6$ da série de Fourier da função f do Exemplo 6.

Usando o Teorema de Fourier na série encontrada, pondo $x = 0$ (e pelo fato de $f(x) = 0$), encontramos um interessante valor de convergência:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou seja,

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

1.8 Integração de séries de Fourier

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos um teorema muito interessante e de grande utilidade, relacionado à integral de uma função f e à de sua respectiva série de Fourier.

Teorema 4. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $2L$ e seccionalmente contínua, tal que a expressão*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

é a sua série de Fourier. Então,

i) a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de f , ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_a^b \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right);$$

ii) a função $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt$ é periódica de período $2L$, contínua, tem derivada F' seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

e

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx.$$

Demonstração: Seja f uma função cumprindo as condições do teorema. Suponhamos inicialmente que sua série de Fourier convirja uniformemente para f . Então, usando a Proposição 2, concluímos que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right). \quad (1.21)$$

Mostraremos que a expressão em (1.21) será válida mesmo se a série de Fourier não convergir uniformemente para f , ou até mesmo se não convergir para f .

Inicialmente definamos a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pela expressão

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt, \quad (1.22)$$

que é contínua. Isto se dá pois, como por hipótese f é seccionalmente contínua, o conjunto de descontinuidades de seu domínio de integração possui medida nula. Logo, f é integrável e limitada (e, por consequência, a expressão $f - \frac{a_0}{2}$ também). Existe uma constante M tal que $|f(x) - \frac{a_0}{2}| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} |F(b) - F(a)| &= \left| \int_0^b \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt - \int_0^a \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \right| = \\ &= \left| \int_0^b \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_a^0 \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \right| = \left| \int_a^b \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b \left| f(t) - \frac{a_0}{2} \right| dt \leq \int_a^b |M| dt = M|b - a|, \end{aligned}$$

mostrando que F é lipschitziana e, portanto, contínua.

Pelo teorema fundamental do Cálculo, temos que $F'(x)$ existe em todos os pontos onde f é contínua e $F'(x) = f(x)$ nesses pontos. Logo, $F'(x)$ é seccionalmente contínua. Além disso, F é periódica de período $2L$, pois

$$\begin{aligned} F(x+2L) - F(x) &= \int_0^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt - \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_0^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_x^0 \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_x^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt. \end{aligned}$$

Então, utilizando a propriedade de integrais de funções periódicas, sendo $f - \frac{a_0}{2}$ periódica de período $2L$, teremos

$$\int_x^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt. \quad (1.23)$$

Podemos concluir que a expressão em (1.23) é igual a zero, pelo fato do coeficiente $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$ (ou $a_0 L = \int_{-L}^L f(t) dt$), e que a integral

$$\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt = \frac{a_0}{2} t \Big|_{-L}^L = a_0 L.$$

Logo, em (1.23), teremos

$$\int_{-L}^L \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L f(t) dt - \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt = a_0 L - a_0 L = 0.$$

Concluindo que $F(x+2L) - F(x) = 0$, temos que F é contínua, com derivada F' contínua por partes e periódica de período $2L$. Pelo Teorema 3, temos que

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

e os coeficientes A_n e B_n são dados por

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0,$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 1.$$

Como temos a derivada de F bem definida, podemos utilizar a fórmula de integração por partes para estimar os coeficientes de Fourier de F com os de f . Sendo $\cos \frac{n\pi x}{L}$ a derivada de $\frac{L}{n\pi} \sen \frac{n\pi x}{L}$, teremos

$$A_n = \frac{1}{L} \left[F(x) \frac{L}{n\pi} \sen \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right].$$

Pelo fato do primeiro termo da expressão se anular, teremos

$$A_n = -\frac{1}{L} \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \sen \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx,$$

e pelo fato de $\int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx = b_n L$, temos que

$$A_n = \frac{-L}{n\pi} b_n, n \geq 1.$$

Fazendo o processo de forma semelhante para B_n , sendo $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ a derivada de $\frac{-L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L}$

$$B_n = \frac{1}{L} \left[-F(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right],$$

e pela periodicidade de F , sabendo que $F(L) = F(-L)$, pela paridade da função cosseno ($\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$) e que $\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = a_n L$, obtemos que

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, n \geq 1.$$

Para calcular o coeficiente A_0 , tomando $x = 0$ em (1.22), temos que

$$F(0) = \int_0^0 \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = 0$$

e então a série de Fourier de $F(0)$ será

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \frac{A_0}{2} = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \Rightarrow A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Sendo $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt$, usando as expressões dos coeficientes da série de Fourier de F , obtemos

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.24)$$

e isto também pode ser escrito como

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^x b_n \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \right). \quad (1.25)$$

Observamos que, resolvendo as integrais do lado direito da igualdade em (1.25), obtemos (1.24) (deixamos esse resultado a cargo do leitor).

Fazendo $x = a$ e $x = b$ em (1.25), e então fazendo $\int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt$, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt &= \int_0^b \frac{a_0}{2} dt - \int_0^a \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_0^b a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt - \int_0^a a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\int_0^b b_n \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt - \int_0^a b_n \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \right) \right] = \\ &= \int_0^b \frac{a_0}{2} dt + \int_a^0 \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_0^b a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_a^0 a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\int_0^b b_n \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt + \int_a^0 b_n \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \right) \right] \\ &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_a^b \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

o que nos fornece a expressão de (1.21), concluindo nossa demonstração.

Observação 1. O teorema demonstrado toma uma forma prática, útil para aplicações. Se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right),$$

então, usando a igualdade em ii), temos

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \sen \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Faremos agora uma aplicação interessante dessa propriedade. Consideraremos todas as funções dos exemplos abaixo como funções periódicas, de período $2L$. Seja $f_1(x) = x$, para $-L \leq x \leq L$. Fazendo uma simples adaptação no Exemplo 5 (alterando o período da função de 2π para $2L$), temos que

$$f_1(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sen \frac{n\pi x}{L}.$$

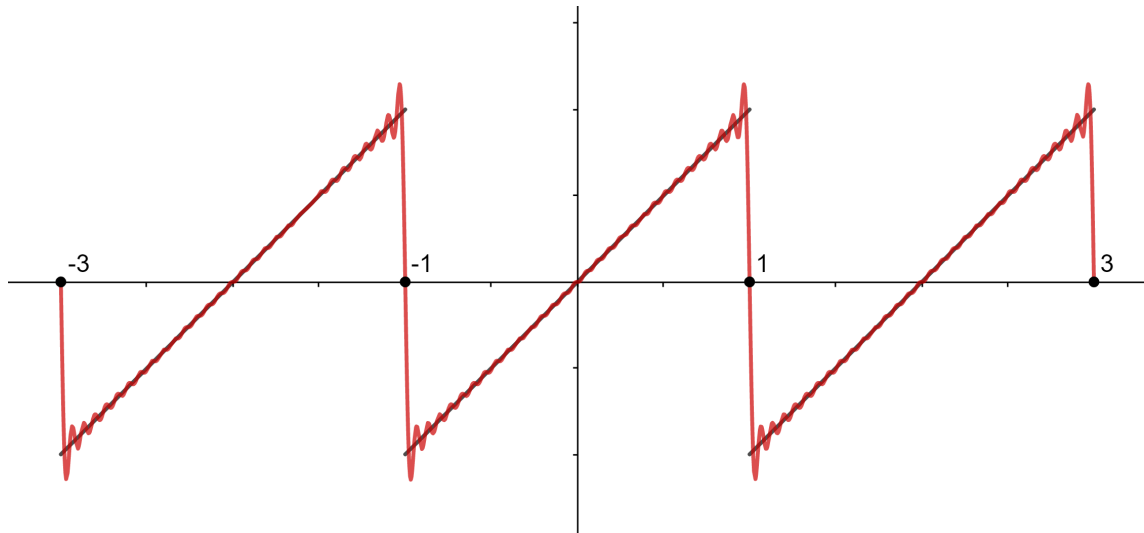


Figura 1.9: Gráfico da função f_1 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 30$.

Observação 2. Consideraremos por simplicidade, nos gráficos das funções estudadas nesses exemplos, $L = 1$.

Sendo o coeficiente $\frac{a_0}{2} = 0$, podemos calcular, usando o Teorema 4,

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

e

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L F_1(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2L} \frac{x^3}{6} \Big|_{-L}^L = \frac{L^2}{6}$$

e então, usando o item ii) do teorema, e sabendo que os coeficientes de Fourier da f_1 , $a_n = 0$ e $b_n = \frac{2L(-1)^{(n+1)}}{n}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= \frac{L^2}{6} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2L}{\pi} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) = \\ \frac{x^2}{2} &= \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (1.26)$$

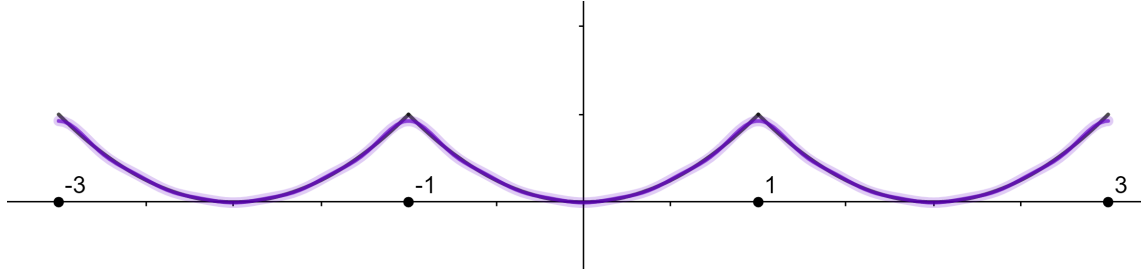


Figura 1.10: Gráfico da função F_1 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 5$.

Usando novamente o teorema em (1.26), definindo $f_2 = \frac{x^2}{2}$, e sendo seus coeficientes $a_0 = \frac{L^2}{6}$, $a_n = \frac{2L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2}$ e $b_n = 0$, teremos

$$F_2(x) = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{L^2}{6} \right) dt = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{L^2}{6} t \right) \Big|_0^x = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{6} x,$$

e

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{6} x \right) dx = \frac{1}{2L} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{L^2}{12} x^2 \right) \Big|_{-L}^L = -\frac{L^3}{48} - \left(-\frac{L^3}{48} \right) = 0.$$

Consequimos, portanto, obter a série de Fourier da função $F_2(x)$, utilizando os coeficientes de f_2 :

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{6} x &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) = \\ \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{6} x &= \frac{2L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (1.27)$$

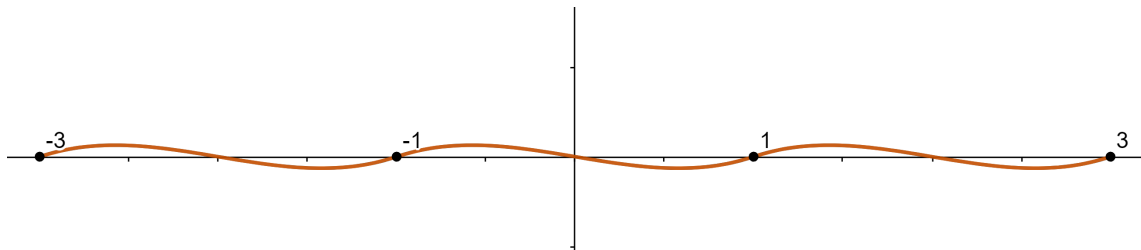


Figura 1.11: Gráfico da função F_2 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 5$.

Usaremos novamente o teorema, chamando $f_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{6} x$, e seus coeficientes $a_0 = 0$, $a_n = 0$ e $b_n = \frac{2L^3}{\pi^3} \frac{(-1)^n}{n^3}$, e então

$$F_3(x) = \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - \frac{L^2}{6} t \right) dt = \frac{t^4}{24} - \frac{L^2 t^2}{12} \Big|_0^x = \frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12},$$

e

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left(\frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12} \right) dx = \frac{1}{2L} \left(\frac{x^5}{120} - \frac{L^2 x^3}{36} \right) \Big|_{-L}^L = \frac{-7L^4}{360},$$

obtendo então a série de Fourier de $F_3(x)$

$$\frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12} = -\frac{7L^4}{360} + \frac{2L^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^4} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leq x \leq L. \quad (1.28)$$



Figura 1.12: Gráfico da função F_3 e sua reduzida da série de Fourier de número $n = 5$.

Pondo $x = L$ em (1.28), observamos um interessante resultado de convergência:

$$-\frac{L^4}{24} = -\frac{7L^4}{360} + \frac{2L^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^4} \cos(n\pi)$$

É fácil verificar que $(-1)^{(n+1)} \cos(n\pi) = -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e então

$$-\frac{8L^4}{360} = -\frac{2L^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \implies \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

1.9 Forma complexa das séries de Fourier

Veremos agora como expressar a série de Fourier em sua forma complexa. Esta expressão, também chamada de forma exponencial das séries de Fourier, é comumente utilizada, e será útil para algumas demonstrações futuras de nosso estudo. Utilizando a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

onde $i = \sqrt{-1}$, teremos as seguintes consequências

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta + \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{2} = \cos \theta \quad (1.29)$$

e

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta - (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{2i} = \operatorname{sen} \theta. \quad (1.30)$$

Podemos, portanto, escrever os termos de uma série de Fourier como

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} &= a_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{\frac{-in\pi x}{L}}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{\frac{-in\pi x}{L}}}{2i} \right) = \\ &= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{-in\pi x}{L}}. \end{aligned}$$

Chamaremos o coeficiente de $e^{\frac{in\pi x}{L}}$ de c_n , que é dado por

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n}{2} + \frac{-2ib_n}{-4i^2} = \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

Utilizando os coeficientes de Fourier, a última igualdade pode ser escrita como

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \end{aligned}$$

e então, usando a notação de Euler,

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx.$$

Podemos definir também

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Portanto, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então sua respectiva série de Fourier, escrita na forma complexa, será

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

1.10 Convergência das séries de Fourier

Nas seções estudadas anteriormente, vimos que, dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período $2L$, são exigidas condições mínimas para o cálculo de sua série de Fourier: que f seja integrável e absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$. Definiremos essas condições, e outras necessárias para a convergência da série de Fourier de uma função f .

A integral utilizada em nossos estudos é a integral de Riemann, seja no sentido de integrais definidas ou integrais impróprias.

Diremos que f será absolutamente integrável se $|f|$ (seu valor absoluto) for integrável.

Para conveniência em nossos enunciados futuros, adotaremos a seguinte notação:

Definição 10. *A função f será uma função de classe \mathcal{L}^1 quando for integrável e absolutamente integrável.*

Com isso, estudaremos o próximo resultado: se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função \mathcal{L}^1 , então seus respectivos coeficientes de Fourier estarão bem definidos.

1.11 Estimando os coeficientes de Fourier

Com as definições da seção anterior, podemos obter certas estimativas dos coeficientes de Fourier de uma função f dada, a partir de certas hipóteses sobre a derivabilidade da mesma.

Suponhamos que f seja periódica, de período $2L$, de classe \mathcal{L}^1 . É possível obter imediatamente estimativas de seus coeficientes de Fourier, de forma que

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$$

e

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

onde usamos, nas desigualdades apresentadas, que as funções seno e cosseno são limitadas, em valor absoluto, por 1. Logo, com a hipótese de f ser de classe \mathcal{L}^1 , existe uma constante $M = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$ tal que

$$|a_n| \leq M, \quad |b_n| \leq M, \text{ para todo } n.$$

Suponhamos agora que a função f dada seja derivável, e que a derivada f' também seja de classe \mathcal{L}^1 . Usando o método de integração por partes, para $n \geq 1$, teremos

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx,$$

e usando o fato da função $\sen \frac{n\pi x}{L}$ se anular nos valores $x = L$ e $x = -L$, obtemos

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx. \tag{1.31}$$

Tomando os valores absolutos,

$$|a_n| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Analogamente, fazendo para os coeficientes b_n

$$Lb_n = \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-L}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

ou seja,

$$Lb_n = \frac{-L}{n\pi} (f(L) \cos n\pi - f(-L) \cos(-n\pi)) + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

e pela paridade da função co-seno ($\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$) e periodicidade da função f ($f(-L) = f(L)$), o primeiro termo da expressão acima se anula, de forma que

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (1.32)$$

Usando os valores em módulo,

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Concluimos que, na hipótese de f ser contínua, com derivada de classe \mathcal{L}^1 , definindo agora a constante $M = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$, teremos que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots$$

Notemos que, nestes casos, as estimativas dependerão de n , diferente das estimativas do primeiro caso.

Suponhamos agora que a função f dada tenha primeira derivada contínua, e segunda derivada de classe \mathcal{L}^1 . Podemos melhorar as estimativas, utilizando integração por partes em (1.31) e (1.32). Integrando a expressão (1.31) por partes, teremos

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left(-f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right),$$

e usando o mesmo raciocínio da estimativa acima (a paridade da função cosseno e periodicidade da f'), obtemos

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Tomando valores absolutos,

$$|a_n| = \left| \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Analogamente, integrando a expressão (1.32) por partes,

$$|b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Tomando, portanto, a constante $M = \frac{L}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$, teremos

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (1.33)$$

e obtemos uma estimativa para os coeficientes de Fourier quando f possui primeira derivada contínua e segunda derivada de classe \mathcal{L}^1 .

No próximo capítulo trataremos dos principais resultados de convergência pontual e uniforme das séries de Fourier.

2 Estudando a convergência das séries de Fourier

Nas próximas seções estudaremos algumas condições e testes para a convergência das séries de Fourier. Antes, enunciaremos e demonstraremos dois teoremas que serão de grande utilidade em nossas demonstrações e resultados.

Teorema 5. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon$$

e

$$\psi(a) = \psi(b) = 0.$$

Demonstração: (i) No primeiro caso, suponhamos que f seja limitada e integrável. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

tal que

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.1)$$

com $m_j = \inf \{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$. Definamos a função χ como

$$\chi(x) = m_j, \quad \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad \text{e para cada } j = 0, 1, 2, \dots$$

Podemos, portanto, substituir o somatório na expressão (2.1) pela integral de χ em $[a, b]$, de forma que

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \chi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)] dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Notemos que o gráfico da função χ será formado por k retângulos, de altura m_j , e base $(x_j - x_{j-1})$, para $1 \leq j \leq k$.

Definamos agora a função ψ_n , onde “substituiremos” os retângulos da função χ por trapézios de mesma base (ou seja, os intervalos da partição) e lados inclinados. Chamaremos o menor ângulo formado entre as retas que contêm os lados dos trapézios e o eixo das abscissas de “ n ”. É fácil notar geometricamente que a diferença entre as áreas dos retângulos da função χ e da função ψ_n serão dois triângulos retângulos de

altura m_j e base a metade da diferença entre a base inferior ($x_j - x_{j-1}$) e base superior dos trapézios construídos. Como possuímos os ângulos internos da base inferior dos trapézios, é possível calcular a base dos triângulos em questão (chamaremos-as de b):

$$\operatorname{tg}(n) = \frac{m_j}{b} \implies b = \frac{m_j}{\operatorname{tg}(n)}, \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq k.$$

Portanto, usando a fórmula da área do triângulo, para cada intervalo da partição, a diferença da área entre o retângulo e o trapézio será dada por

$$2\left(\frac{\text{base x altura}}{2}\right) = 2\left(\frac{m_j^2}{2 \operatorname{tg}(n)}\right) = \frac{m_j^2}{\operatorname{tg}(n)}.$$

Temos, portanto,

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\operatorname{tg}(n)}. \quad (2.3)$$

Como por hipótese f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$ (por consequência, $m_j \leq M$, para todo j). Disto, em (2.3), teremos

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \sum_{j=1}^k \frac{M^2}{\operatorname{tg}(n)} = \frac{kM^2}{\operatorname{tg}(n)}.$$

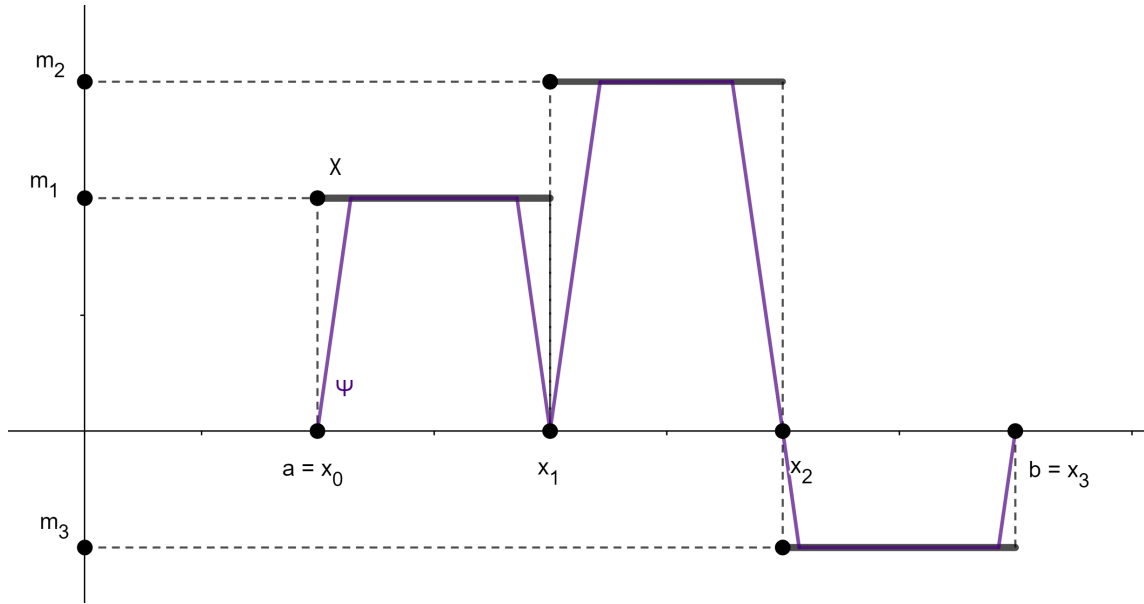
Pelo fato de $\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(n) = +\infty$, e por k estar fixado, existirá um n tal que $\operatorname{tg}(n) > \frac{2kM^2}{\varepsilon}$, e daí

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.4)$$

De (2.1) e (2.4) temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a) = \psi(b) = 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx &= \int_a^b |f(x) - \chi(x) + \chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \\ &\int_a^b |f(x) - \chi(x)| dx + \int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

sendo ψ_n a função ψ anunciada no teorema.


 Figura 2.1: A construção das funções χ e ψ_n .

(ii) Suponhamos que f não seja limitada, mas seja integrável, e absolutamente integrável, no sentido das integrais impróprias definidas anteriormente. Consideraremos o caso em que f se torna ilimitada apenas nas vizinhanças de a e b (os demais casos podem ser tratados de forma semelhante, separando o intervalo de integração nos intervalos que contenham os pontos em que f se torna ilimitada, e em intervalos que não contenham, e usando o mesmo raciocínio abaixo). Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| &= \left| \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx \right| = \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como f é limitada e integrável em $[a + \delta, b - \delta]$, como visto em (i), existe uma função contínua $\psi_n : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a + \delta) = \psi_n(b - \delta) = 0$, tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.6)$$

Definiremos a função $\tilde{\psi}_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x), & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta; \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a + \delta \text{ e } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

Teremos, portanto,

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}_n(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi_n(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx,$$

e então, usando as desigualdades de (2.5) e (2.6),

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}_n(x)| dx < \varepsilon,$$

completando a demonstração do Teorema 5.

Para finalizar, faremos algumas observações pertinentes ao estudo das séries de Fourier. O teorema que demonstramos diz que, dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, do tipo \mathcal{L}^1 , existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

Suponhamos agora que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $2L$, de tipo \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódicas de período $2L$ (podendo tomar $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$ para todo n), de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

Teorema 6. Lema de Riemann-Lebesgue: *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 . Temos que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos mx dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin mx dx = 0,$$

onde $m \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Dividamos em dois casos:

i) Suponhamos que f seja limitada, ou seja, que exista $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Lembrando do critério de integrabilidade de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P do intervalo $[a, b]$

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon,$$

onde

$$S(f; P) = \sum_{j=1}^k M_j (x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup[f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j],$$

$$s(f; P) = \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf[f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j],$$

com $1 \leq j \leq n$, e \sup e \inf significando o supremo e o ínfimo de f em cada intervalo da partição P , respectivamente. Em palavras, $s(f; P)$ e $S(f; P)$ são as somas inferiores e superiores associadas à partição P . Demonstraremos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin mx dx = 0$.

Consideremos a partição do intervalo $[a, b]$ determinada pelos pontos $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(mx) dx &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) + f(x_j) - f(x_j)] \operatorname{sen}(mx) dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j) \operatorname{sen}(mx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(mx) dx \\
&= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(mx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(mx) dx. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(mx) dx = \frac{-\cos(mx)}{m} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j}.$$

Como $-1 \leq \cos(mx) \leq 1$, temos $-2 \leq \cos(mx_{j-1}) - \cos(mx_j) \leq 2$, de forma que

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(mx) dx \right| = \left| \frac{\cos(mx_{j-1}) - \cos(mx_j)}{m} \right| \leq \frac{2}{m}.$$

Além disso, como $f(x) \leq M$, para todo x , temos que

$$\sum_{j=1}^n f(x_j) \leq \sum_{j=1}^n M = nM.$$

Usando estes resultados no primeiro termo da expressão (2.7), temos

$$\left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(mx) dx \right| \leq \frac{2nM}{m}. \quad (2.8)$$

Para o segundo termo da expressão (2.7), pela limitação da função seno em valor absoluto, e que

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \quad \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j.$$

Teremos, portanto,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(mx) dx \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [M_j - m_j] dx \right| = \\
&= \sum_{j=1}^n [M_j - m_j] (x_j - x_{j-1}). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Usando (2.8) e (2.9) em (2.7), teremos

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(mx) dx \right| \leq \frac{2nM}{m} + \sum_{j=1}^n [M_j - m_j] (x_j - x_{j-1}).$$

O somatório na expressão acima nada mais é do que a diferença entre as somas superiores e inferiores da partição construída. Como f é integrável por hipótese, é possível tomar uma partição de $[a, b]$ determinada por pontos $x_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, tomemos um n de forma que

$$\sum_{j=1}^n [M_j - m_j](x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixando esse n , tomaremos um m_0 tal que $\frac{2nM}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $m > m_0$. Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(mx) dx \right| < \varepsilon.$$

A demonstração para o caso $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} mx dx = 0$ é análogo.

ii) Suponhamos que f seja um função \mathcal{L}^1 qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

usando o Teorema 5. Pelo fato de toda função contínua em um compacto ser limitada e integrável, podemos aplicar o resultado de i) tal que exista um m_0 e, para todo $m > m_0$, tenhamos

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(mx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com algumas manipulações, teremos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(mx) dx &= \int_a^b [\psi(x) + f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(mx) dx = \\ &= \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(mx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(mx) dx. \end{aligned}$$

Mais uma vez, pela limitação da função seno em valor absoluto, e pela desigualdade triangular, teremos

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(mx) dx \right| \leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(mx) dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon,$$

completando a demonstração do lema de Riemann-Lebesgue.

Unindo os resultados da seção 1.11 e o lema de Riemman-Lebesgue, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 7. *Os coeficientes de Fourier de uma função absolutamente integrável se aproximam de zero à medida que $n \rightarrow \infty$.*

Nos casos em que a condição da função ser absolutamente integrável não for satisfeita, seus respectivos coeficientes de Fourier podem não convergir a zero, à medida que $n \rightarrow \infty$.

2.1 Convergência pontual da série de Fourier

Iniciaremos nossos estudos dando condições suficientes sobre uma função f que garantam a convergência de sua série de Fourier num ponto x fixado para o valor $f(x)$ ou para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, nos casos em que x é um ponto de descontinuidade da f . Construiremos uma hipótese sobre o comportamento de f nas vizinhanças do ponto x , além das condições mínimas tratadas nas seções anteriores. Estimaremos o valor

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \quad (2.10)$$

onde $s_n(x)$ é a soma parcial da série de Fourier de f , dada por

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right).$$

Utilizando as expressões conhecidas dos coeficientes de Fourier, as propriedades de integrais e somatórios, e a identidade trigonométrica $\cos a \cos b + \sen a \sen b = \cos(a-b)$, teremos para $s_n(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(y) \cos \frac{k\pi y}{L}] dy \cos \frac{k\pi x}{L} + \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(y) \sen \frac{k\pi y}{L}] dy \sen \frac{k\pi x}{L} \right) \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi y}{L} + \sen \frac{k\pi x}{L} \sen \frac{k\pi y}{L} \right) \right] f(y) dy \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(x-y)}{L} \right] f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A expressão entre os colchetes acima é conhecida como **núcleo de Dirichlet**, e iremos denotá-la como

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (2.12)$$

Podemos reescrever a expressão (2.11) como

$$\int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy.$$

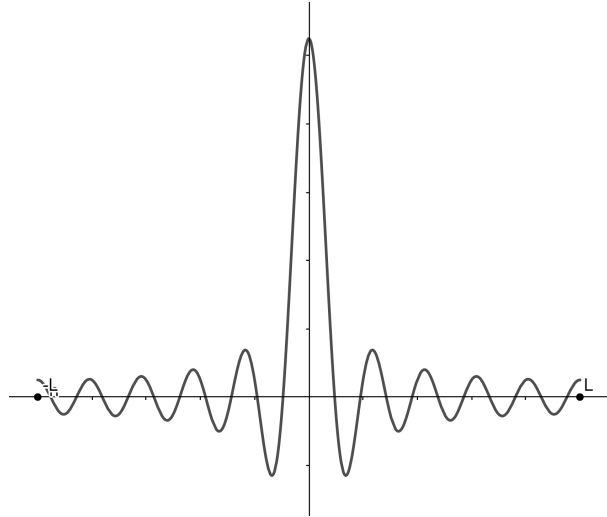


Figura 2.2: Núcleo de Dirichlet, com $n = 10$.

Lema 2.1. *O núcleo de Dirichlet possui as seguintes propriedades:*

- i) $D_n(x)$ é uma função par.*
- ii) $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$.*
- iii) $D_n(x)$ é uma função contínua.*
- iv) $D_n(x)$ é uma função periódica, de período $2L$.*
- v) $D_n(0) = \frac{(n+\frac{1}{2})}{L}$.*
- vi) Vale a seguinte expressão de $D_n(x)$ para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$*

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{2L}}. \quad (2.13)$$

Demonstração: Demonstraremos *ii)*, *v)* e *vi)*. É imediato verificar *i)* e *iii)*, pela paridade e continuidade da função cosseno, e *iv)* pela periodicidade da função $\cos \frac{k\pi x}{L}$ no período $2L$, como visto na seção 1.2.

Para *ii)*, lembrando as relações de ortogonalidade da Proposição 4, temos que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, integrando o núcleo de Dirichlet no intervalo $[-L, L]$, teremos

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) dx.$$

Utilizando as propriedades de operações com integrais, podemos reescrever a expressão à direita da igualdade como

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{1}{2} dx + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx.$$

Como o segundo membro da expressão se anula para todo k , temos que

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2L} \Big|_{-L}^L = 1.$$

Para $v)$, temos que

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 0 \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right).$$

Finalmente, para $vi)$, utilizaremos a expressão

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos k\theta.$$

Lembrando da fórmula de Euler, podemos reescrever a expressão como

$$S_n(\theta) = \Re \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) = \Re \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right),$$

onde o símbolo $\Re(z)$ significa tomar a parte real do número z . Pela validade da fórmula da soma de progressão geométrica para números complexos, temos

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad \text{para } z \neq 1.$$

Portanto, teremos

$$S_n(\theta) = \Re \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \Re \left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta})}{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} \right) = \Re \left(\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right),$$

para $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ (pois, para estes valores de θ , o denominador da expressão se anula). Utilizando as propriedades da fórmula de Euler, em que $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$ e $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \operatorname{sen} \varphi$, e a propriedade das função cosseno e seno serem par e ímpar, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} &= \frac{\cos \left(\frac{-\theta}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{-\theta}{2} \right)}{2i \operatorname{sen} \left(\frac{-\theta}{2} \right)} + \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] + i \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{2i \operatorname{sen} \left(\frac{-\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{-\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] + \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{2i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Com isto, temos

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= \Re \left(\frac{-\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] + \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{2i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

e usando esse resultado no núcleo de Dirichlet, obtemos de imediato $vi)$.

Utilizando na expressão em (2.11) os resultados de (2.12) e (2.13), fazendo a substituição da variável $y = x - t$, teremos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t)f(x-t)dt. \quad (2.14)$$

Como mostrado na propriedade *iv*), D_n e f são funções periódicas, de período $2L$, e calcular a última integral em (2.14) é equivalente a calcular (pela propriedade de integrais de funções periódicas em (1.3))

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t)f(x-t)dt. \quad (2.15)$$

Então, reescreveremos (2.15) como

$$\int_{-L}^0 D_n(t)f(x-t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt,$$

e fazendo uma simples substituição de variáveis na primeira integral (pondo $t = -t$, com $dt = -dt$ e $t = -L \Rightarrow -t = L$), teremos

$$s_n(x) = - \int_L^0 D_n(-t)f(x+t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt.$$

Pela propriedade *i*) de D_n ser par, temos que $D_n(t) = D_n(-t)$. Usando a propriedade de inversão de intervalos em integrais, teremos

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t)f(x+t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt = \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt. \quad (2.16)$$

Observação 3. A expressão encontrada em (2.16) permite que escrevamos a *enésima reduzida da série de Fourier de uma função f avaliada no ponto x na forma da integral*

$$\int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt.$$

Tal resultado será de extrema importância na demonstração do Princípio de Localização de Riemann, quando falarmos sobre funções de variação limitada.

Voltando à expressão (2.10)

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

pela propriedade *ii*) e pela paridade de D_n , temos

$$\int_0^L D_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Podemos reescrever $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ como

$$[f(x+0) + f(x-0)] \int_0^L D_n(t)dt = \int_0^L D_n(t)[f(x+0) + f(x-0)]dt. \quad (2.17)$$

Logo, usando (2.16) e (2.17), podemos reescrever e_n como

$$\begin{aligned}
 e_n(x) &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \int_0^L D_n(t)[f(x+0) + f(x-0)]dt = \\
 &= \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]\}dt. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Utilizaremos a expressão (2.18) para a prova do resultado de convergência pontual abaixo.

Teorema 8. (*Teste de Dini*). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $2L$, do tipo \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Fixado um ponto x em $[-L, L]$, e suponhamos que existam $f(x+0)$ e $f(x-0)$ e que exista $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty, \quad (2.19)$$

com

$$g(x,t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]$$

Então o valor $e_n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $s_n(x) \rightarrow \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração: Decomponemos o valor $e_n(x)$, separando o intervalo de integração em duas partes, com um δ tal que $0 < \delta < L$ e utilizando a função $g(x,t)$ definida acima, de forma que

$$\begin{aligned}
 e_n(x) &= \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]\}dt \\
 &= \int_0^\delta D_n(t)g(x,t)dt + \int_\delta^L D_n(t)g(x,t)dt
 \end{aligned}$$

Multiplicando o integrando da primeira integral da igualdade à direita por $\frac{t}{t}$, e substituindo a expressão $D_n(t)$ na segunda integral pela encontrada na propriedade *vi*) do Lema 2.1 do núcleo de Dirichlet, teremos

$$e_n(x) = \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt + \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x,t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt. \quad (2.20)$$

Para a primeira integral, tomaremos um $\delta > 0$ de forma conveniente para que o valor da integral seja pequeno e usaremos a expressão (2.19) da hipótese do Teste de Dini. Para a segunda integral, utilizaremos o Lema de Riemann-Lebesgue (Teorema 6). Notemos que

$$|t D_n(t)| = \left| t \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \right| \leq \left| \frac{t}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \right|,$$

sendo a desigualdade válida pela limitação em valor absoluto da função seno. Para estimarmos a função à direita da desigualdade, primeiramente veremos o caso quando $t \rightarrow 0$. Pela indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, utilizaremos l'Hôpital, de forma que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} = \frac{1}{2L} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(t)}{\frac{d}{dt} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L} \right)} = \frac{1}{2L} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\pi}{2L} \cos \frac{\pi t}{2L}} = \frac{1}{\pi}.$$

Faremos o teste da primeira derivada para $t \in [0, L]$, de forma que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \right) = \frac{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L} - \pi t \cos \frac{\pi t}{2L}}{4L^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi t}{2L}}.$$

Como o denominador da primeira derivada é não-negativo, analisaremos o comportamento da função do numerador. Temos

$$\frac{d}{dt} \left(2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L} - \pi t \cos \frac{\pi t}{2L} \right) = \frac{\pi^2 t \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}}{2L} \geq 0,$$

para $t \in [0, L]$, mostrando que o numerador da primeira derivada é uma função não-decrescente neste intervalo. Como para $t = 0$, temos

$$2L \operatorname{sen} 0 - 0\pi \cos 0 = 0,$$

a primeira derivada de $\frac{t}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}}$ é não negativa, e portanto, a função é não-decrescente. Pondo $t = L$, teremos

$$\frac{L}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi L}{2L}} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, podemos obter a estimativa

$$|tD_n(t)| \leq \left| \frac{t}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{para } t \in [0, L]. \quad (2.21)$$

Agora, usando a hipótese (2.19) dado $\varepsilon > 0$, é possível tomar um $\delta < \min(L, \eta)$, de forma que

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \varepsilon.$$

Unindo este resultado com a desigualdade encontrada em (2.21), teremos

$$\left| \int_0^\delta tD_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \int_0^\delta |tD_n(t)| \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.22)$$

Fixando δ , analisaremos a segunda integral. Para utilizar o Lema de Riemann-Lebesgue, verificaremos se a função

$$\frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}}, \quad t \in [\delta, L], \quad (2.23)$$

é integrável. É imediato verificar, por sua construção, que $g(x, t)$ é integrável. E como $\delta > 0$, a função $2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}$ nunca se anula em $[\delta, L]$. Logo, a função em (2.23) é integrável. Portanto, para um n suficientemente grande, podemos aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue, de forma que

$$\left| \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.24)$$

Utilizando (2.22) e (2.24) na expressão (2.20), o Teste de Dini está provado. \square

A utilidade deste teste está na obtenção de condições suficientes para a convergência da série de Fourier, que podem ser verificadas abaixo:

i) Suponha que f seja uma função Hölder contínua na vizinhança de um ponto x , ou seja, existem constantes $\alpha > 0, \delta > 0$ e $K > 0$ tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\alpha, \quad \text{para } t, s \in [x - \delta, x + \delta]. \quad (2.25)$$

Esta desigualdade implica que f seja contínua em x e, portanto, $f(x + 0) = f(x - 0) = f(x)$ (os limites laterais da f são iguais ao próprio valor de f nesse ponto). Utilizando este fato, temos

$$\begin{aligned} |g(x, t)| &= |[f(x + t) - f(x)] + [f(x - t) - f(x)]| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| \\ &\leq K|(x + t) - x|^\alpha + K|(x - t) - x|^\alpha = 2Kt^\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \int_0^\delta \frac{2Kt^\alpha}{t} dt = 2K \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt < \infty,$$

sendo isto válido para $\alpha > 0$, e a hipótese (2.19) do Teste de Dini é verificada.

ii) Suponhamos que f tenha derivada no ponto x . Neste caso, a desigualdade encontrada em (2.25) pode ser verificada com $\alpha = 1$, e a função é dita **lipschitziana**. O resultado segue imediato de *i*).

iii) Suponhamos que f seja seccionalmente contínua e que as razões incrementais

$$\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} \quad \text{e} \quad \frac{f(x + t) - f(x - 0)}{t}$$

sejam limitadas para um $t > 0$ suficientemente pequeno. Em outras palavras, é o mesmo que dizer que existe um $K > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} \right| \leq K \quad \text{e} \quad \left| \frac{f(x + t) - f(x - 0)}{t} \right| \leq K.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| &= \left| \left[\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} \right] + \left[\frac{f(x + t) - f(x - 0)}{t} \right] \right| \leq \\ &\left| \frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} \right| + \left| \frac{f(x + t) - f(x - 0)}{t} \right| \leq 2K. \end{aligned}$$

Portanto, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, teremos

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \int_0^\delta 2K dt = 2K\delta < \infty,$$

e a condição de Dini se verifica. Isso estabelece a validade do Teorema de Fourier (Teorema 3).

2.2 A desigualdade de Bessel

Demonstraremos nesta seção que as reduzidas s_n da série de Fourier de uma função f de quadrado integrável são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam f em média quadrática. Para isso, necessitamos de algumas definições e observações prévias.

Definição 11. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **quadrado integrável** se f e $|f|^2$ forem integráveis. Neste caso, nomearemos a função como tipo \mathcal{L}^2 .

Algumas observações pertinentes em relação às funções \mathcal{L}^2 :

i) Se f for uma função limitada e integrável a Riemann, então f será de quadrado integrável. Sendo f limitada em um intervalo $[a, b]$, designemos $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ em $[a, b]$, de forma que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \int_a^b M^2 dx = M^2(b-a).$$

ii) No caso de f não ser limitada, pode acontecer de f ser uma função \mathcal{L}^1 , mas não \mathcal{L}^2 . Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $0 < x < 1$ é do tipo \mathcal{L}^1 , mas

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2,$$

e

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty,$$

mostrando que f não é de tipo \mathcal{L}^2 , pelo fato da integral de $\frac{1}{x}$ ser divergente em $0 < x < 1$.

iii) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for \mathcal{L}^2 (onde $[a, b]$ for um intervalo limitado), então f é necessariamente \mathcal{L}^1 . Utilizaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais, que será demonstrada futuramente em nosso estudo.

Definição 12. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Sejam f e g funções \mathcal{L}^2 em um intervalo $[a, b]$. Então fg é absolutamente integrável e

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Utilizando a desigualdade, pondo $g(x) = 1$, teremos

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}},$$

o que comprova a observação iii).

Definição 13. Uma sucessão (f_n) de funções de tipo \mathcal{L}^2 , em um intervalo $[a, b]$, **converge, em média quadrática**, para uma função f de tipo \mathcal{L}^2 se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0,$$

e escrevemos

$$\text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

em $[a, b]$, onde l.i.m. é a sigla da expressão limit in (the) mean (limite na média).

Chamaremos a expressão

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$$

de **erro quadrático** na aproximação de f por f_n .

Voltemos à questão inicial da seção. Consideremos um polinômio trigonométrico de ordem n :

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right).$$

Designemos por

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx$$

e

$$\hat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx,$$

os erros médios quadráticos, na aproximação de f pelas reduzidas s_n da série de Fourier e do polinômio t_n , respectivamente, no intervalo $[-L, L]$.

Mostraremos que $e_n \leq \hat{e}_n$. Para isso, desenvolveremos inicialmente a expressão $|t_n(x) - f(x)|^2$ de \hat{e}_n . Notemos que

$$|t_n(x) - f(x)|^2 = (t_n(x))^2 - 2t_n(x)f(x) + (f(x))^2, \quad (2.26)$$

e daí, usando os coeficientes de t_n e os da série de Fourier de f , teremos

$$\begin{aligned} (t_n(x))^2 &= \left(\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 \\ &= \frac{c_0^2}{4} + c_0 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right) \right)^2 \\ &= \frac{c_0^2}{4} + c_0 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right) + \sum_{k=1}^n \left(c_k^2 \cos^2 \frac{k\pi x}{L} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} d_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right) + \sum_{k=1}^n \left(d_k^2 \sen^2 \frac{k\pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Integrando $\int_{-L}^L (t_n(x))^2 dx$, pelas propriedades de operação com integrais, e explorando as relações de ortogonalidade, teremos

$$i) \int_{-L}^L \frac{c_0^2}{4} dx = \frac{c_0^2}{4} x \Big|_{-L}^L = \frac{c_0^2}{4} 2L = \frac{L}{2} c_0^2,$$

$$\begin{aligned}
& ii) \int_{-L}^L c_0 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx \\
&= \int_{-L}^L c_0 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right) dx + \int_{-L}^L c_0 \sum_{k=1}^n \left(d_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx \\
&= \sum_{k=1}^n c_0 c_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx + \sum_{k=1}^n c_0 d_k \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx.
\end{aligned}$$

Usando as relações de ortogonalidade de (1.9) $\left(\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = 0 \right)$, temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{-L}^L c_0 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx = 0. \\
& iii) \int_{-L}^L \sum_{k=1}^n \left(c_k^2 \cos^2 \frac{k\pi x}{L} \right) dx = \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_{-L}^L \cos^2 \frac{k\pi x}{L} dx
\end{aligned}$$

e pelas relações de ortogonalidade de (1.11) $\left(\int_{-L}^L \cos^2 \frac{k\pi x}{L} dx = L \right)$, temos

$$\int_{-L}^L \sum_{k=1}^n \left(c_k^2 \cos^2 \frac{k\pi x}{L} \right) dx = L \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Fazendo o processo de forma análoga, usando a ortogonalidade de (1.12), temos que

$$\int_{-L}^L \sum_{k=1}^n \left(d_k^2 \sin^2 \frac{k\pi x}{L} \right) dx = L \sum_{k=1}^n d_k^2.$$

$$iv) \int_{-L}^L 2 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} d_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx = 2 \sum_{k=1}^n c_k d_k \int_{-L}^L \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx,$$

e explorando a ortogonalidade de (1.10) $\left(\int_{-L}^L \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx = 0 \right)$, temos

$$\int_{-L}^L 2 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} d_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx = 0.$$

Utilizando *i)* a *iv)*, teremos

$$\int_{-L}^L (t_n(x))^2 dx = \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2), \quad (2.27)$$

mostrando que t_n é do tipo \mathcal{L}^2 . Continuando nossa demonstração, analisaremos o termo $2t_n(x)f(x)$. Expressaremos f pelos coeficientes de sua série de Fourier; isto é possível pois, pelo fato de f ser do tipo \mathcal{L}^2 , pela observação *iii)* da Definição 12, f será também do tipo \mathcal{L}^1 , e como visto no Teorema 8, a série de Fourier converge pontualmente para f . Teremos, portanto,

$$\begin{aligned}
& 2 \left[\left(\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) \right) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right] \\
&= 2 \left[\frac{c_0 a_0}{4} + \frac{c_0}{2} \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) + \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) \right. \\
&+ \sum_{k=1}^n a_k c_k \cos^2 \frac{k\pi x}{L} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) + \sum_{k=1}^n \left(b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} c_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \left(b_k d_k \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\
&= \frac{c_0 a_0}{2} + c_0 \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) + a_0 \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) \\
&+ 2 \sum_{k=1}^n \left(a_k c_k \cos^2 \frac{k\pi x}{L} \right) + 2 \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) + 2 \sum_{k=1}^n \left(b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} c_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^n \left(b_k d_k \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi x}{L} \right).
\end{aligned}$$

Integrando $\int_{-L}^L 2t_n(x)f(x)dx$ e, por consequência, os termos da expressão na igualdade anterior (como no processo realizado para o termo $(t_n(x))^2$), pelas relações de ortogonalidade o segundo, terceiro, o quinto e o sexto termo se anulam, e

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L \frac{c_0 a_0}{2} dx &= L a_0 c_0, \\
\int_{-L}^L \left(2 \sum_{k=1}^n a_k c_k \cos^2 \frac{k\pi x}{L} \right) dx &= 2L \sum_{k=1}^n a_k c_k, \\
\int_{-L}^L \left(2 \sum_{k=1}^n b_k d_k \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi x}{L} \right) dx &= 2L \sum_{k=1}^n b_k d_k.
\end{aligned}$$

Usando os resultados anteriores, encontramos que

$$\int_{-L}^L 2t_n(x)f(x)dx = L a_0 c_0 + 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k). \quad (2.28)$$

Finalmente, utilizando (2.26), (2.27) e (2.28) em \hat{e}_n , teremos

$$\hat{e}_n = \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - L a_0 c_0 - 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k).$$

Utilizando a técnica de completar quadrados,

$$\begin{aligned}
\hat{e}_n &= \frac{L}{2}(c_0^2 - 2c_0a_0 + a_0^2) + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 2c_k a_k + a_k^2) + L \sum_{k=1}^n (d_k^2 - 2d_k b_k + b_k^2) \\
&\quad + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \\
&= \frac{L}{2}(c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \\
&\quad - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

É imediato verificar que o menor valor possível de \hat{e}_n é obtido quando $c_0 = a_0, c_k = a_k, d_k = b_k$, para $k = 1, \dots, n$. Neste caso \hat{e}_n coincidirá com e_n (ou seja, os coeficientes do polinômio t_n coincidirão com as reduzidas da série de Fourier de f). E, em geral, $e_n \leq \hat{e}_n$, como queríamos demonstrar.

Observamos que, por definição, $e_n \geq 0$. Logo,

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \tag{2.30}$$

(esta expressão pode ser obtida pondo $c_0 = a_0, c_k = a_k, d_k = b_k$ em (2.29)). Daí,

$$\frac{La_0^2}{2} + L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \implies \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx,$$

sendo esta última expressão conhecida como **desigualdade de Bessel**.

2.3 As desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski

Enunciaremos e demonstraremos nesta seção as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Minkowski (a primeira utilizada na seção anterior).

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Sejam $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ dois vetores do \mathbb{R}^n . Então, a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do \mathbb{R}^n tem a forma

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.31}$$

Desigualdade de Minkowski: Dados dois vetores $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ do \mathbb{R}^n , a desigualdade

$$\left[\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.32}$$

é conhecida como desigualdade do triângulo ou desigualdade de Minkowski.

Antes de iniciarmos as demonstrações, relembremos alguns conceitos e definições de vetores no \mathbb{R}^2 . Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetores de \mathbb{R}^2 com componentes não negativas. O produto escalar entre esses vetores é definido pela expressão

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2. \quad (2.33)$$

Chamaremos de $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ a **norma** ou comprimento do vetor \vec{u} . Chamando de θ e γ os ângulos que os vetores \vec{u} e \vec{v} formam, respectivamente, com o semieixo positivo dos x , podemos reescrever as componentes dos vetores como

$$\vec{u} = (|\vec{u}| \cos \theta, \quad |\vec{u}| \sin \theta)$$

e

$$\vec{v} = (|\vec{v}| \cos \gamma, \quad |\vec{v}| \sin \gamma).$$

O produto escalar pode ser escrito como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \cos \gamma + |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta \sin \gamma = |\vec{u}||\vec{v}|(\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma).$$

Utilizando a fórmula de subtração de cossenos, $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, teremos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta - \gamma). \quad (2.34)$$

Igualando (2.33) e (2.34), teremos

$$u_1v_1 + u_2v_2 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta - \gamma) \leq |\vec{u}||\vec{v}|,$$

pela limitação da função cosseno. Ou seja,

$$u_1v_1 + u_2v_2 \leq (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}}(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.35)$$

Tomando vetores (a_1, a_2) e (b_1, b_2) quaisquer de \mathbb{R}^2 , pela desigualdade triangular, temos

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq |a_1||b_1| + |a_2||b_2|.$$

Aplicando a desigualdade (2.35) aos vetores $(|a_1|, |a_2|)$ e $(|b_1|, |b_2|)$, obtemos

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq |a_1||b_1| + |a_2||b_2| \leq (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

sendo esta a *desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do \mathbb{R}^2* .

Demonstraremos agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.31) para os vetores do \mathbb{R}^n . Tomando vetores $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $t\vec{b}$, onde $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, consideraremos a expressão

$$\sum_{j=1}^n (a_j + tb_j)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2t \sum_{j=1}^n a_j b_j + t^2 \sum_{j=1}^n b_j^2.$$

Notamos, primeiramente, que o primeiro membro da igualdade acima será sempre não negativo, para todo $t \in \mathbb{R}$. Pensaremos no segundo membro da igualdade como uma

função quadrática em t , com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, com $\alpha = \sum_{j=1}^n b_j^2$, $\beta = 2 \sum_{j=1}^n a_j b_j$ e $\gamma = \sum_{j=1}^n a_j^2$. Como $\alpha \geq 0$, a parábola de f terá concavidade voltada para cima. Para que a condição do primeiro termo seja não negativo, a parábola deverá ter uma ou nenhuma raiz real (ou seja, os valores de f devem ser não negativos em todo seu domínio). Para isso, devemos ter o discriminante $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} \left(2 \sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) &\leq 0 \Leftrightarrow 4 \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 \leq 4 \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) \Leftrightarrow \left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

mostrando a desigualdade de Cauchy-Schwarz. A igualdade ocorre se, e somente se, os vetores são múltiplos (ou linearmente dependentes).

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de quadrado integrável. A **desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções do tipo \mathcal{L}^2** se dá pela expressão

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A demonstração nesse caso é feita de forma análoga ao caso dos vetores do \mathbb{R}^n . Basta considerar a expressão

$$\int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx,$$

de forma que

$$\int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx = \int_a^b (f(x))^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + t^2 \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

Pensemos na expressão acima como uma função quadrática em t , com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, e os coeficientes $\alpha = \int_a^b (g(x))^2 dx$, $\beta = 2 \int_a^b f(x)g(x)dx$ e $\gamma = \int_a^b (f(x))^2 dx$. Com isto, basta proceder de forma semelhante à demonstração para os vetores do \mathbb{R}^n , e o resultado é imediato.

Para a demonstração da desigualdade de Minkowski (2.32), lembremos que, dados vetores $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ e $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ em \mathbb{R}^n , suas respectivas normas serão

$$\|\vec{w}\| = \left(\sum_{j=1}^n w_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \|\vec{z}\| = \left(\sum_{j=1}^n z_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

respectivamente. Pelas propriedades de operação com vetores, temos que

$$\vec{w} + \vec{z} = (w_1 + z_1, \dots, w_n + z_n),$$

e sua norma será

$$\|\vec{w} + \vec{z}\| = \left[\sum_{j=1}^n (w_j + z_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.36)$$

Poderemos, portanto, escrever a desigualdade (2.32) como

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \left[\sum_{j=1}^n (w_j + z_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\vec{u}| + |\vec{v}|,$$

podendo ser chamada também de **desigualdade do triângulo**.

Elevando a identidade em (2.36) ao quadrado, temos que

$$\sum_{j=1}^n (w_j + z_j)^2 = \sum_{j=1}^n w_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n w_j z_j + \sum_{j=1}^n z_j^2. \quad (2.37)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que o segundo termo do lado direito da última igualdade satisfaz

$$2 \sum_{j=1}^n w_j z_j \leq 2 \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo essa desigualdade em (2.37), teremos

$$\sum_{j=1}^n (w_j + z_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n w_j^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n z_j^2.$$

Observemos que o termo à direita na desigualdade pode ser reescrito como

$$\sum_{j=1}^n w_j^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n z_j^2 = \left[\left(\sum_{j=1}^n w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$

de forma que

$$\sum_{j=1}^n (w_j + z_j)^2 \leq \left[\left(\sum_{j=1}^n w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os termos da desigualdade, obtemos a **desigualdade de Minkowski**:

$$\left[\sum_{j=1}^n (w_j + z_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como fizemos para a desigualdade de Cauchy-Schwarz, é possível demonstrar a desigualdade de Minkowski para funções do tipo \mathcal{L}^2 . Para isto, tomando a identidade

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no termo $2 \int_a^b f(x)g(x) dx$ (analogamente ao que fizemos na demonstração para os vetores do \mathbb{R}^n), obtemos

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Enunciaremos e demonstraremos uma proposição que nos remete ao Teorema 5, mas agora com funções do tipo \mathcal{L}^2 .

Proposição 6. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função do tipo \mathcal{L}^2 . Então existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

Demonstração: Dividamos em dois casos.

i) Suponhamos que f seja limitada. Como f é \mathcal{L}^2 , pela observação *iii)* da Definição 11, f também será do tipo \mathcal{L}^1 . O Teorema 5 nos garante que, dado um $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a) = \psi(b) = 0$, limitada, e uma constante $M > 0$ tal que

$$|\psi(x)| \leq M \quad \text{e} \quad |f(x)| \leq M,$$

para todo $x \in [a, b]$, e

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (2.38)$$

Com essas majorações de f e ψ , podemos escrever, usando a desigualdade triangular,

$$|f(x) - \psi(x)| = |f(x) + (-\psi(x))| \leq |f(x)| + |-\psi(x)| = |f(x)| + |\psi(x)| \leq 2M. \quad (2.39)$$

Finalmente, usando os resultados de (2.38) e (2.39), obteremos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x) - \psi(x)| |f(x) - \psi(x)| dx \leq \\ &2M \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração para o caso *i)*.

ii) Suponhamos que f não seja limitada. Faremos a demonstração com um caso particular, mas o caso geral é feito de forma análoga. Tomaremos o caso em que f se torne ilimitada nas vizinhanças de a e b . Dado $\varepsilon > 0$, escolheremos um $\delta > 0$ tal que

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.40)$$

Usando a parte *i)* já demonstrada, determinaremos uma função $\psi : [a+\delta, b-\delta] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $\psi(a+\delta) = \psi(b-\delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.41)$$

Definindo a função

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{para } a+\delta < x < b-\delta; \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a+\delta \quad \text{e} \quad b-\delta \leq x \leq b, \end{cases}$$

obtemos, usando (2.40) e (2.41),

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração, e podemos enunciar o corolário abaixo, que será útil para a demonstração de alguns resultados em nossos estudos.

Corolário: Suponhamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função periódica, de período $2L$ e de quadrado integrável em $[-L, L]$. Então, existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódicas de período $2L$ (tomando $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$, para todo n), tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

2.4 Convergência uniforme da série de Fourier

Estudaremos nesta seção condições que garantam a convergência uniforme da série de Fourier de uma função f , periódica de período $2L$. Para isto, aplicaremos o teste M de Weierstrass (visto na Seção 1.3). Pelo fato de

$$\left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |a_n| \quad \text{e} \quad \left| b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |b_n|$$

(pela limitação das funções seno e cosseno), verificaremos em quais condições a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \tag{2.42}$$

converge.

Lembremos, da Seção 1.11, pela expressão em (1.33), em que provamos que caso a função f tenha derivada primeira contínua e sua derivada segunda seja uma função \mathcal{L}^1 , então a série em (2.42) é majorada pela série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} + \frac{M}{n^2} = 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

E então, pelo Exemplo 4, a série acima converge.

Podemos provar a convergência de (2.42) sob algumas condições com menos restrições em f . Enunciaremos e provaremos o seguinte resultado:

Teorema 9. (Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier): *Seja f uma função periódica, de período $2L$, contínua e com derivada primeira do tipo \mathcal{L}^2 . Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f .*

Demonstração: Suponhamos que f seja contínua, e que sua derivada primeira seja uma função de tipo \mathcal{L}^2 . Então, usando as relações (1.31) e (1.32), estudadas na estimativa dos coeficientes de Fourier, teremos

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.43)$$

Pelo fato de podermos expressar o coeficiente b'_n da derivada de f como

$$b'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

podemos reescrever (2.43) como

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b'_n. \quad (2.44)$$

De forma análoga, para b_n , teremos

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{n\pi} a'_n, \quad (2.45)$$

onde a'_n é o coeficiente da primeira derivada de f , da forma

$$a'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Usando (2.44) e (2.45), teremos a reduzida da série de (2.42) como

$$\sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) = \sum_{j=1}^n \frac{L}{j\pi} |b'_j| + \frac{L}{j\pi} |a'_j| = \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|).$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do \mathbb{R}^n , obtemos

$$\frac{L}{\pi} \left| \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|) \right| \leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.46)$$

Usaremos um resultado auxiliar, através da desigualdade

$$(|a| + |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2). \quad (2.47)$$

Isto é facilmente verificado, usando o fato de que

$$(|a| - |b|)^2 \geq 0 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 \geq 2|a||b|,$$

desenvolvendo (2.47), teremos

$$|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2 \Rightarrow 2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2,$$

e o resultado é imediato. Usando-o no segundo membro de (2.46), obtemos a majoração

$$\frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[2 \sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, a série (2.42) é majorada por

$$\frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.48)$$

Pela desigualdade de Bessel, demonstrada na Seção 2.2, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx - \frac{(a'_0)^2}{2} \iff \\ \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx - \frac{(a'_0)^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

mostrando que ambas as séries em (2.48) convergem, e concluindo a demonstração do teorema. \square

O teorema acima exige que f seja contínua em toda a reta. Quanto à derivada de f , pode ser descontínua, e até mesmo ilimitada nas vizinhanças de pontos isolados. Se f for descontínua em um ponto x_0 , a série de Fourier não poderá convergir uniformemente para f em nenhum intervalo que contenha x_0 . Isto ocorre pois, conforme Proposição 1, o limite uniforme de uma sucessão das reduzidas $s_n(x)$ da série de Fourier que são funções contínuas, também é uma função contínua, que seria a própria f . Portanto, para a convergência uniforme de f em toda a reta, a função f necessariamente deve ser contínua. Naturalmente, surge uma questão: e se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, sua série de Fourier convergirá uniformemente para f neste intervalo $[a, b]$? Veremos isto no próximo resultado.

Teorema 10. Segundo Teorema sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier: *Seja f periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira é do tipo \mathcal{L}^2 . Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado, que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Para a demonstração, utilizaremos o próximo lema.

Lema 2.2. *Seja ψ uma função periódica, de período $2L$, definida por:*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right), & \text{para } -L \leq x < 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{para } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Então, a série de Fourier de ψ converge uniformemente para ψ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$, para $n \in \mathbb{Z}$.

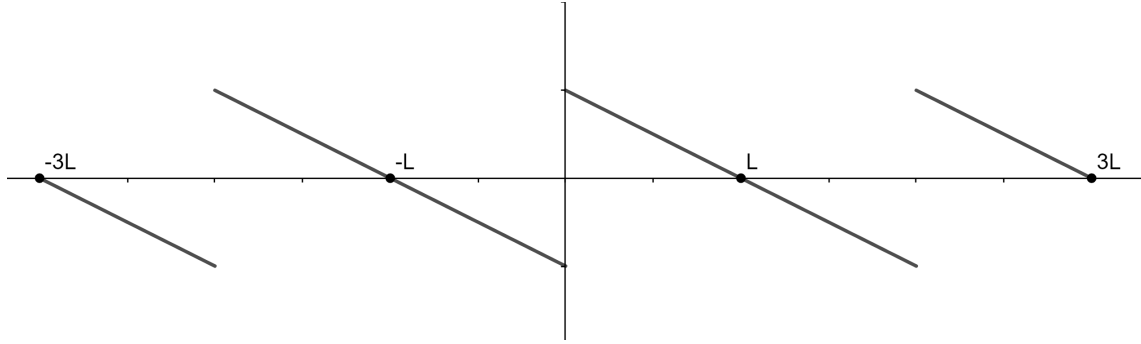


Figura 2.3: Gráfico da função ψ no intervalo $[-3L, 3L]$.

Demonstração: Calcularemos a série de Fourier da função ψ . Primeiramente notemos que, para $0 < x \leq L$, teremos

$$\psi(-x) = -\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{-x}{L} \right) \right] = -\left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] = -\psi(x),$$

mostrando que a função ψ é ímpar. Usando as propriedades dos coeficientes de Fourier de uma função ímpar, temos $a_n = 0$ e

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{1}{L^2} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (2.49)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcularemos as duas integrais da igualdade acima separadamente. Temos que

$$i) \quad \frac{1}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \right) = -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

e

$$\begin{aligned} ii) \quad \frac{1}{L^2} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{L^2} \left[\left(-\frac{Lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \right) + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L = -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi), \end{aligned}$$

onde em *i*) usamos substituição de variáveis e em *ii*) o método de integração por partes. Usando os dois resultados em (2.49), encontramos que

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1) - \left[-\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi) \right] = \frac{1}{n\pi}.$$

Portanto podemos escrever a série de Fourier de ψ como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.50)$$

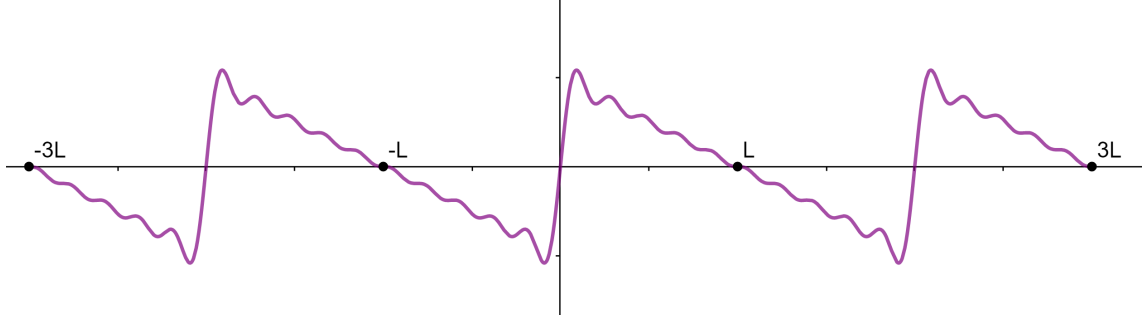


Figura 2.4: Reduzida de número $n = 15$ da série de Fourier de ψ .

Se provarmos que para qualquer $\delta > 0$ a série em (2.50) converge uniformemente para $0 < \delta \leq |x| \leq L$, o Lema 2.2 estará provado. Para isso, escreveremos a série em (2.50) tomando a parte imaginária da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \tag{2.51}$$

onde $\theta = \frac{\pi x}{L}$. Mostraremos que a série converge uniformemente para $\theta \in [\gamma, \pi]$, com $\gamma > 0$.

Definamos a expressão

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta},$$

de forma que

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k e^{ij\theta} - \sum_{j=1}^{k-1} e^{ij\theta} \right) = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)]. \tag{2.52}$$

Como

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} e^{ij\theta} \right) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \left(\frac{1}{j+1} \sum_{l=1}^j e^{il\theta} \right) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta),$$

obtemos em (2.52)

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)] = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_k(\theta) - \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_k(\theta) - \left[\left(\sum_{k=m-1}^{n-1} \frac{1}{k+1} E_k(\theta) \right) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \right] \\ &\quad + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_k(\theta) - \sum_{k=m}^n \frac{1}{k+1} E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \quad (2.53)$$

Utilizando a fórmula de soma de progressões geométricas, temos, para $0 < \theta < 2\pi$,

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Como a norma do número complexo $|e^{i\phi}| = 1$, para todo $\phi \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} |E_n(\theta)| &= \frac{|e^{i\theta} + (-e^{i(n+1)\theta})|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{|e^{i\theta}| + |e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \\ &= \frac{2}{|e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})|} = \frac{2}{|e^{\frac{i\theta}{2}}| |e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}|} = \frac{2}{|e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}|}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Lembrando da consequência direta da fórmula de Euler

$$\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \text{sen } \phi,$$

teremos em (2.54)

$$|E_n(\theta)| \leq \frac{2}{|2i \text{sen } \frac{\theta}{2}|} = \frac{2}{|2i| |\text{sen } \frac{\theta}{2}|} = \frac{1}{\text{sen } \frac{\theta}{2}}. \quad (2.55)$$

Finalmente, substituindo (2.53) e (2.55) em (2.51), teremos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\text{sen } \frac{\theta}{2}} \left[\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right]. \quad (2.56)$$

Usando a propriedade da soma telescópica

$$\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1},$$

na expressão entre parênteses da desigualdade em (2.56), teremos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\text{sen } \frac{\theta}{2}} \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \text{sen } \frac{\theta}{2}}.$$

Pela relação $0 < \gamma \leq \theta \leq \pi$, temos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} &\implies \text{sen } \frac{\gamma}{2} \leq \text{sen } \frac{\theta}{2} \leq \text{sen } \frac{\pi}{2} \implies \frac{1}{\text{sen } \frac{\gamma}{2}} \geq \frac{1}{\text{sen } \frac{\theta}{2}} \geq \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{2}} \\ &\implies \frac{2}{m \text{sen } \frac{\gamma}{2}} \geq \frac{2}{m \text{sen } \frac{\theta}{2}} \geq \frac{2}{m \text{sen } \frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

De forma que

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \text{sen } \frac{\theta}{2}} \leq \frac{2}{m \text{sen } \frac{\gamma}{2}}. \quad (2.57)$$

Para o que falta, mostraremos que a sequência $a_m = \frac{1}{m} \rightarrow 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, fixemos $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m_0 > \frac{2}{\varepsilon \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}}$, e temos que

$$m > m_0 \Rightarrow m > \frac{2}{\varepsilon \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}}{2} \Rightarrow |a_m - 0| < \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}}{2}$$

Agora, para $m, n > m_0$, aplicando o resultado encontrado anterior para a sequência a_m na expressão em (2.57), teremos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{m} \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}} < \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}}{2} \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}} = \varepsilon.$$

Portanto, pelo critério de Cauchy, a série em (2.51) converge uniformemente, e a demonstração do Lema 2.2 está completa.

Observações: A passagem utilizada em (2.53) é conhecida como **fórmula de Abel de adição por partes**. Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões e $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, temos

$$\sum_{k=m}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + \frac{1}{n+1} B_n - \frac{1}{m} B_{m-1}.$$

Com os resultados demonstrados, poderemos provar o Teorema 10.

Demonstração do Teorema 10: Sejam x_1, \dots, x_k , os pontos do intervalo $[-L, L]$ em que f é descontínua. Seja $\omega_j = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$, com $j = 1, \dots, k$, de forma que $\omega_1, \dots, \omega_k$ sejam os saltos de f nos seus pontos de descontinuidade (ω_j é a diferença entre o limite lateral à direita e à esquerda de um ponto de descontinuidade x_j). Fixado um j , a função $\omega_j \psi(x - x_j)$ será descontínua em todos os pontos da forma $x_j \pm 2Ln$, para $n \in \mathbb{Z}$, e o salto nesses pontos é ω_j .

Desta forma, a função $f(x) - \omega_j \psi(x - x_j)$ será contínua no ponto ω_j e em todos os pontos onde f já é contínua. Para a eliminação de todas as descontinuidades, repetimos esse processo k vezes e teremos a função

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k \omega_j \psi(x - x_j),$$

contínua para todo x . Aplicando o Teorema 9, podemos ver que a série de Fourier de g converge uniformemente para g em toda a reta. Pela demonstração do Lema 2.2, a série de Fourier da função $\psi(x - x_j)$ converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma $x_j \pm 2Ln$. Pelo fato da série de Fourier de f ser a soma das séries de Fourier das funções g e $\omega_j \psi(x - x_j)$, para $j = 1, \dots, k$, ela convergirá uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma $x_j \pm 2Ln$, para $j = 1, \dots, k$ e $n \in \mathbb{Z}$, que são os pontos de descontinuidade da função f , completando a demonstração do Teorema 10.

2.5 Núcleos de Dirac

Nesta seção estudaremos a **função δ de Dirac**, também conhecida como **função de impulso unitário**. Ela é definida tendo as seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (2.59)$$

As definições nos causam estranheza pois, a rigor, δ não é uma função, pois (se fosse) deveria associar a cada número real um outro número real, e ∞ não é um número! Além disso, como $\delta(x) = 0$ em toda a reta (com exceção do ponto $x = 0$, a integral deveria ser igual a zero, e não um). E apesar dessas características excêntricas da função, ela se mostra útil em algumas aplicações, como na Mecânica Ondulatória.

Uma propriedade muito importante da função δ é: se ψ for uma função real contínua e que se anule em um intervalo limitado, teremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \psi(0). \quad (2.60)$$

A expressão em (2.60) é questionável: o integrando não é uma função, e portanto, não poderia ser integrado. Veremos, nesta seção, como justificar a expressão em questão.

Nossa ideia será tomar uma sucessão de funções contínuas $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenha as seguintes propriedades:

- (D1) $k_n(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (D2) $\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x)dx = 1$;
- (D3) dados $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$\int_{|x|>\eta} k_n(x)dx < \varepsilon.$$

Estas propriedades implicam que, a medida que n cresce, as áreas debaixo de $k_n(x)$ se acumulam junto ao eixo dos x . Intuitivamente, podemos entender as funções k_n como aproximações de δ . E então podemos definir a expressão em (2.60) como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x)\psi(x)dx. \quad (2.61)$$

Mostraremos que, com a expressão definida em (2.61), a expressão em 2.60 estará correta. Precisaremos de uma definição prévia.

Definição 14. Uma sucessão de funções $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínuas, que satisfaçam as condições (D1), (D2) e (D3) definidas anteriormente é chamada de uma **sucessão de núcleos de Dirac**.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 7. Seja $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua, não negativa, tal que $0 < \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)dx < \infty$. Particularmente, a integral será finita se $k(x)$ se anular fora de um intervalo limitado.

A última afirmação se justifica pelo fato que, dado um intervalo $I = [a, b]$ tal que $k(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus I$, podemos dividir o intervalo I em subintervalos da forma $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_n, b]$, onde x_1, \dots, x_n são os pontos de descontinuidade de k . Como k é contínua nestes subintervalos, é integrável, e como se anula fora do intervalo I , teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)dx = \int_a^b k(x)dx = \int_a^{x_1} k(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} k(x)dx + \dots + \int_{x_n}^{x_b} k(x)dx < \infty,$$

mostrando que a integral é finita.

Denotemos $\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)dx$. Então, as funções

$$k_n(x) = \frac{n}{\alpha} k(nx)$$

formam uma sucessão de núcleos de Dirac. Vejamos que as três propriedades são satisfeitas.

A propriedade (D1) é satisfeita pela própria definição da função $k(x)$. Como $k(x) \geq 0$ e $0 < \alpha < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$k_n(x) = \frac{n}{\alpha} k(nx) \geq 0,$$

satisfazendo (D1).

Para (D2), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\alpha} k(nx)dx = \frac{n}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} k(nx)dx.$$

Utilizando o método de substituição de variáveis, fazendo $u = nx$ (e $\frac{du}{n} = dx$), teremos

$$\frac{n}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} k(nx)dx = \frac{n}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u) \frac{du}{n} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u)du = 1,$$

como $\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} k(u)du$. Logo, a propriedade (D2) é satisfeita.

Para a demonstração de (D3), notemos que, com uma simples substituição de variáveis, temos

$$\int_{|x|>\eta} k_n(x)dx = \frac{n}{\alpha} \int_{|x|>\eta} k(nx)dx = \frac{1}{\alpha} \int_{|s|>n\eta} k(s)ds.$$

Pelo fato de $\int_{-\infty}^{+\infty} k(s)ds < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\int_{|s|>r} k(s)ds < \varepsilon\alpha.$$

Para provar esta afirmação, suponhamos que, para todo $r > 0$, tenhamos

$$\int_{|s|>r} k(s)ds \geq \varepsilon\alpha.$$

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} k(s)ds < \infty$, para cada $r > 0$ escolhido, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\int_{|s|\leq r} k(s)ds = M.$$

Daí,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(s)ds = \int_{|s| \leq r} k(s)ds + \int_{|s| > r} k(s)ds \geq M + \varepsilon\alpha > M.$$

Logo, nenhum M (associado a qualquer $r \in \mathbb{R}$ escolhido) pode ser cota superior da integral $\int_{-\infty}^{+\infty} k(s)ds$, o que contraria o fato desta ser finita.

Dado um $n_0 \in \mathbb{N}$, tomando $r < n_0\eta$, para todo $n \geq n_0$, teremos $r < n\eta$, de forma que

$$\int_{|s| > n\eta} k(s)ds < \varepsilon\alpha.$$

Intuitivamente podemos pensar na última passagem da seguinte forma: se a integral da função k é menor do que um valor $\varepsilon\alpha > 0$ dado fora de um intervalo limitado $I_1 = [-r, r]$, então também será menor fora de um intervalo $I_2 = [-n\eta, n\eta]$, tal que $I_1 \subset I_2$. Teremos então

$$\int_{|x| > \eta} k_n(x)dx = \frac{1}{\alpha} \int_{|s| > n\eta} k(s)ds < \varepsilon,$$

mostrando que (D3) é satisfeita.

Através do enunciado a seguir, demonstraremos a propriedade básica dos núcleos de Dirac.

Teorema 11. *Sejam (k_n) uma sucessão de núcleos de Dirac e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e limitada. Então,*

(a) *as funções f_n dadas abaixo estão bem definidas,*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x-s)f(s)ds; \quad (2.62)$$

(b) *supondo que k_n seja uma função par, temos, para cada x ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2};$$

(c) *a sucessão (f_n) converge uniformemente para f em todo intervalo limitado fechado I que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Antes de prosseguirmos com a demonstração, definiremos a expressão em (2.62) como o **produto de convolução** das funções k_n e f , e usaremos $f_n = k_n * f$ para denotá-lo. O produto de convolução pode também ser definido para outras classes de funções. Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ forem funções absolutamente integráveis, e uma delas for limitada, então $f * g$ está bem definido. Uma propriedade importante e interessante do produto de convolução é que

$$f * g = g * f$$

Para demonstrá-la, notemos que, para a integral

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)ds,$$

fazendo uma simples substituição de variáveis $u = x - s$ ($du = -ds$), teremos

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)f(u)du = g * f, \quad (2.63)$$

mostrando a validade da propriedade.

Demonstração do Teorema 11: Demonstremos cada um dos itens do teorema. Para (a), notemos que o integrando na expressão (2.62) é uma função seccionalmente contínua, para cada x fixado e integrável. Como f é uma função limitada por hipótese, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

E então, em (2.62), teremos

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x-s)f(s)ds \right| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x-s)ds$$

(a ausência do módulo se dá pois, por definição, $k_n \geq 0$). Substituindo variáveis, com $y = x - s$ ($dy = -ds$), teremos

$$M \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x-s)ds = M \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(y)dy.$$

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(y)dy = 1$, é imediato que a integral em (2.62) é bem definida e, por consequência, as funções f_n .

Para a demonstração de (b), por conveniência, denotaremos

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Obteremos uma majoração de $f_n(x) - \bar{f}(x)$. Pela propriedade $f * g = g * f$ do produto de convolução, reescreveremos (2.62) como

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)f(x-s)ds. \quad (2.64)$$

Usando a expressão encontrada em (2.64) e a condição (D2) ($\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)ds = 1$) dos núcleos de Dirac, podemos escrever

$$\begin{aligned} f_n(x) - \bar{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)f(x-s)ds - \bar{f}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)f(x-s)ds - \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)\bar{f}(x)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Para a majoração da integral à direita na igualdade em (2.65), quebraremos-la em duas partes. Tomando um $\delta > 0$ (cuja escolha será condicionada mais adiante), teremos

$$f_n(x) - \bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds$$

$$= \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds = I_1 + I_2.$$

Como, por definição, k_n é uma função par, usando as propriedades $k_n(x) = k_n(-x)$ e $\int_{-l}^l k_n(x)dx = 2 \int_0^l k_n(x)dx$ em I_2 , teremos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds = \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)\bar{f}(x)ds = \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - 2 \int_0^{\delta} k_n(s)\bar{f}(x)ds \\ &= \int_{-\delta}^0 k_n(s)f(x-s)ds + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - 2 \int_0^{\delta} k_n(s)\bar{f}(x)ds. \end{aligned}$$

Utilizando o método de substituição de variáveis na primeira integral da última igualdade acima, fazendo $s = -s$ (e $ds = -ds$), utilizando a paridade da função k_n , teremos

$$\begin{aligned} &\int_{\delta}^0 k_n(-s)f(x+s)(-ds) + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - 2 \int_0^{\delta} k_n(s)\bar{f}(x)ds \\ &= - \int_{\delta}^0 k_n(s)f(x+s)(ds) + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - 2 \int_0^{\delta} k_n(s)\bar{f}(x)ds \\ &= \int_0^{\delta} k_n(s)f(x+s)(ds) + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - 2 \int_0^{\delta} k_n(s)\bar{f}(x)ds \\ &= \int_0^{\delta} k_n(s)f(x+s)ds + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - 2 \int_0^{\delta} k_n(s)\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]ds \\ &= \int_0^{\delta} k_n(s)f(x+s)ds + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+0) + f(x-0)]ds \\ &= \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+s) - f(x+0)]ds + \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x-0)]ds. \quad (2.66) \end{aligned}$$

Ressaltamos que, nas passagens de (2.66), também usamos o fato que $\bar{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$. Tomando o valor absoluto em (2.66), e usando a desigualdade triangular, teremos

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+s) - f(x+0)]ds + \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x-0)]ds \right| \\ &\leq \int_0^{\delta} k_n(s)|f(x+s) - f(x+0)|ds + \int_0^{\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x-0)|ds. \quad (2.67) \end{aligned}$$

Pelo fato de f ser seccionalmente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para $0 < s < \delta$,

$$|f(x+s) - f(x+0)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(x-s) - f(x-0)| < \varepsilon,$$

de forma que, em (2.67), teremos

$$|I_2| \leq 2\varepsilon \int_0^\delta k_n(s)ds = \varepsilon \int_{-\delta}^\delta k_n(s)ds \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)ds = \varepsilon. \quad (2.68)$$

Com essa definição de δ , podemos majorar I_1 . Como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x . Então, na expressão de I_1

$$\begin{aligned} |f(x-s) - \bar{f}(x)| &\leq |f(x-s)| + \frac{1}{2}|f(x+0) + f(x-0)| \\ &\leq |f(x-s)| + \frac{1}{2}|f(x+0)| + \frac{1}{2}|f(x-0)| \leq M + \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = 2M, \end{aligned}$$

de forma que

$$|I_1| = \int_{|s|>\delta} k_n(s)|f(x-s) - \bar{f}(x)|ds \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds.$$

Disto, pela condição (D3) dos núcleos de Dirac, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, a expressão $\int_{|s|>\delta} k_n(s)ds < \varepsilon$, e temos

$$|I_1| \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds \leq 2M\varepsilon. \quad (2.69)$$

Usando (2.68) e (2.69) em (2.65), dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, temos

$$|f_n(x) - \bar{f}(x)| = |I_1 + I_2| \leq |I_1| + |I_2| \leq \varepsilon + 2M\varepsilon = (1 + 2M)\varepsilon,$$

provando o item (b).

Para a demonstração de (c), usaremos a ideia em (b), decompondo uma integral similar a (2.65) em duas partes. Sejam a e b as extremidades de um intervalo I (ou seja, $I = [a, b]$). É possível tomar um $\eta > 0$ tal que o intervalo fechado $I' = [a + \eta, b - \eta]$ não contenha pontos de descontinuidade da função f . Com isso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in I'$ tais que $|x_1 - x_2| < \delta$, então $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, que nada mais é do que a continuidade uniforme de f (este é um resultado clássico de Análise que diz que toda função contínua definida em um intervalo compacto é uniformemente contínua). Decompondo a expressão em (2.65), temos

$$f_n(x) - f(x) = \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds$$

e então,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds, \quad (2.70)$$

onde usamos o fato de f ser limitada no primeiro termo à direita da desigualdade em (2.70).

Dado um $\varepsilon > 0$, podemos tomar $0 < \delta < \eta$, de forma que $x - s$ variará no intervalo I' se x percorrer I . Pela continuidade uniforme de f em I' , teremos

$$|f(x-s) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para } |s| \leq \delta$$

Usando este resultado na segunda integral de (2.70), teremos

$$\int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds \leq \varepsilon \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)ds \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)ds = \varepsilon,$$

onde usamos a propriedade (D2) dos núcleos de Dirac na última passagem acima. Para a majoração da primeira integral do lado direito de (2.70), usaremos a propriedade (D3) dos núcleos de Dirac. Pelo resultado demonstrado anteriormente, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{|s| \leq \delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds \leq \varepsilon,$$

e (usando agora a propriedade (D3)) existe n_0 tal que

$$\int_{|s| > \delta} k_n(s)ds \leq \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Logo, com os dois resultados anteriores, temos que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq 2M \int_{|s| > \delta} k_n(s)ds + \int_{|s| \leq \delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon = (2M+1)\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in I$ e $n \geq n_0$. Isso garante a convergência uniforme de f_n para f em I' , a demonstração de (c) e a prova do Teorema 11.

Voltemos à função δ de Dirac, e ao resultado de (2.60). Se ψ for uma função contínua e limitada, pelos itens (a) e (b) do Teorema 11, temos

$$\psi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x-s)\psi(s)ds$$

e

$$\lim_{n \rightarrow 0} \psi_n(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2} = \psi(x),$$

pela continuidade de ψ . Pondo $x = 0$, e pelo fato dos núcleos serem funções pares (ou seja $k_n(-x) = k_n(x)$), teremos

$$\psi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(-s)\psi(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(s)\psi(s)ds,$$

obtendo a expressão (2.60).

2.6 Teorema de aproximação de Weierstrass

Podemos determinar um polinômio conhecendo um número finito de parâmetros, conhecidos como coeficientes deste polinômio. Isto torna os polinômios uma classe de funções contínuas e muito simples. No entanto, para que uma função contínua qualquer seja considerada conhecida, devemos saber os valores em todos os pontos de seu domínio. Em muitos casos, entretanto, necessitamos apenas de valores aproximados. Dito isto, o teorema de Weierstrass da aproximação por polinômios se mostrará bastante útil.

Teorema 12. (Weierstrass). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua. Então, existe uma sucessão de polinômios P_n que converge uniformemente para f em $[a, b]$.*

de forma que

$$\int_{-1}^1 L_n(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^n}{c_n} dx = \frac{1}{c_n} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{c_n}{c_n} = 1$$

e a propriedade (D2) também é satisfeita.

Para a demonstração de (D3), observemos que, para $0 \leq x \leq 1$, temos

$$1 \leq 1+x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq (1+x)^n \leq 2^n$$

e, pela paridade de $(1-x^2)^n$,

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 [(1-x)(1+x)]^n dx \\ &= 2 \int_0^1 (1-x)^n (1+x)^n dx \geq 2 \int_0^1 (1-x)^n dx = 2 \left[\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 \right] = \frac{2}{n+1}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Tomando $0 < \delta < 1$, pela paridade da função L_n , e pelo fato da função se anular nos intervalos $|x| > 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\delta} L_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{-\delta} L_n(x) dx + \int_{\delta}^{\infty} L_n(x) dx \\ &= \int_{-1}^{-\delta} L_n(x) dx + \int_{\delta}^1 L_n(x) dx = 2 \int_{\delta}^1 L_n(x) dx = 2 \int_{\delta}^1 \frac{(1-x^2)^n}{c_n} dx. \end{aligned}$$

Calculando a primeira derivada de $(1-x^2)^n$, obtemos $[(1-x^2)^n]' = -2xn(1-x^2)^{n-1}$, mostrando que a expressão é decrescente para $0 < x < 1$. Disto, vem que

$$\int_{|x|>\delta} L_n(x) dx \leq \frac{2}{c_n} (1-\delta^2)^n (1-\delta).$$

A expressão acima pode ser interpretada como a desigualdade entre a área sob o gráfico da função L_n nos intervalos $(-\infty, -\delta)$ e $(\delta, +\infty)$ e a área do retângulo de base $2(1-\delta)$ e altura $\frac{(1-\delta^2)^n}{c_n}$, que é o valor máximo da função L_n para $|x| \geq \delta$. Disto, usando o resultado de (2.72) na desigualdade, teremos

$$\int_{|x|>\delta} L_n(x) dx \leq (n+1)(1-\delta^2)^n (1-\delta). \quad (2.73)$$

Dados $0 < \delta < 1$ e $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que é possível encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o segundo membro de (2.73) seja $< \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Para isso, mostraremos que existe um n_0 de forma que

$$(n_0+1)(1-\delta^2)^{n_0}(1-\delta) < \varepsilon,$$

e que, para todo $n > n_0$,

$$(n+1)(1-\delta^2)^n(1-\delta) \leq (n_0+1)(1-\delta^2)^{n_0}(1-\delta).$$

Para a primeira das desigualdades, temos

$$(1 - \delta^2)^{n_0}(1 - \delta) < \frac{\varepsilon}{n_0 + 1}.$$

Como $0 < \delta < 1$, temos

$$0 < \delta^2 < \delta \Rightarrow -\delta^2 > -\delta \Rightarrow 1 - \delta^2 > 1 - \delta \Rightarrow (1 - \delta^2)^{n_0} > (1 - \delta)^{n_0},$$

de forma que

$$(1 - \delta)^{n_0+1} < (1 - \delta^2)^{n_0}(1 - \delta) < \frac{\varepsilon}{n_0 + 1} \Rightarrow (1 - \delta) < \left(\frac{\varepsilon}{n_0 + 1}\right)^{\frac{1}{n_0+1}}$$

$$\Rightarrow \ln(1 - \delta) < \frac{1}{n_0 + 1} \ln\left(\frac{\varepsilon}{n_0 + 1}\right) < \ln\left(\frac{\varepsilon}{n_0 + 1}\right) = \ln(\varepsilon) - \ln(n_0 + 1)$$

$$\Rightarrow \ln(n_0 + 1) < \ln(\varepsilon) - \ln(1 - \delta) = \ln\left(\frac{\varepsilon}{1 - \delta}\right) \Rightarrow e^{\ln(n_0+1)} < e^{\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\delta}\right)}$$

$$\Rightarrow n_0 + 1 < \frac{\varepsilon}{1 - \delta} \Rightarrow n_0 < \frac{\varepsilon}{1 - \delta} - 1$$

Para garantir a existência desse $n_0 \in \mathbb{N}$, será necessária a condição de que

$$\frac{\varepsilon}{1 - \delta} - 1 > 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{1 - \delta} > 2 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \delta \Rightarrow \delta > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para a segunda desigualdade, queremos

$$(n + 1)(1 - \delta^2)^n \leq (n_0 + 1)(1 - \delta^2)^{n_0}.$$

Como para todo $n > n_0$ temos

$$\frac{n_0 + 1}{n + 1} < n_0 + 1,$$

teremos

$$(1 - \delta^2)^{n-n_0} \leq \frac{n_0 + 1}{n + 1} < n_0 + 1 \Rightarrow n_0 > (1 - \delta^2)^{n-n_0} - 1,$$

o que é trivialmente satisfeito para $0 < \delta < 1$.

Portanto, sendo

$$n_0 < \frac{\varepsilon}{1 - \delta} - 1, \quad \text{com } \delta > 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

as condições serão satisfeitas. Teremos

$$\int_{|x|>\delta} L_n(x) dx \leq (n + 1)(1 - \delta^2)^n(1 - \delta) \leq (n_0 + 1)(1 - \delta^2)^{n_0}(1 - \delta) < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, e (D3) está satisfeita, mostrando que a função L_n é um tipo de núcleo de Dirac.

Demonstração do Teorema 12: inicialmente, tomaremos o caso em que $[a, b] = [0, 1]$ e $f(0) = f(1) = 0$. Definamos a função

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1, \end{cases}$$

que é contínua e limitada em toda a reta. A seguir, definamos as funções

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_n(x-s)F(s)ds, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pelo resultado do Teorema 11, essas funções convergem uniformemente para $f(x)$ em $[0, 1]$. Para concluir a demonstração, provaremos, para todo $n \in \mathbb{N}$, que $F_n(x)$ é um polinômio em x , quando $x \in [0, 1]$. Primeiramente, observemos que

$$F_n(x) = \int_0^1 L_n(x-s)F(s)ds.$$

Para $x \in [0, 1]$, temos que $|x-s| \leq 1$. Isto implica que, para tais x , utilizando a definição do núcleo de Landau em (2.71),

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{[1-(x-s)^2]^n}{c_n} f(s)ds = \frac{1}{c_n} \int_0^1 [1-(x-s)^2]^n f(s)ds.$$

Ao desenvolver a potência do integrando da expressão anterior, temos que

$$\begin{aligned} [1-(x-s)^2]^n &= (1+2xs-x^2-s^2)^n = \\ &= 1 + \binom{n}{1}(2xs-x^2-s^2) + \binom{n}{2}(2xs-x^2-s^2)^2 \\ &+ \cdots + \binom{n}{n-1}(2xs-x^2-s^2)^{n-1} + (2xs-x^2-s^2)^n. \end{aligned}$$

Observamos que temos termos mistos, e que dependem ou não de s , de forma que podemos obter $F_n(x)$ como uma soma de integrais da forma

$$a_j x^j \int_0^1 s^j f(s)ds,$$

para $j = 0, 1, \dots, 2n$, e isto mostra que F_n é um polinômio de grau $2n$.

Se $[a, b] \neq [0, 1]$, consideremos a função

$$g(y) = f([b-a]y + a),$$

para $y \in [0, 1]$. É imediato notar que g é contínua, $g(0) = f(a)$ e $g(1) = f(b)$. Portanto, se tivermos uma sucessão de polinômios $P_n(y)$ que convirjam uniformemente para $g(y)$, então os polinômios

$$Q_n(x) = P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

convergirão uniformemente para $f(x)$ em $[a, b]$.

Para finalizar, se $g(0)$ e/ou $g(1)$ não forem igual a zero, consideraremos a função

$$h(y) = g(y) - g(0) - y[g(1) - g(0)],$$

que é contínua em $[0, 1]$ e $h(0) = h(1) = 0$. Logo, se tivermos uma sucessão de polinômios $R_n(y)$ convergindo uniformemente $h(y)$, então os polinômios

$$P_n(y) = R_n(y) + g(0) + y[g(1) - g(0)]$$

convergirão uniformemente para $g(y)$. \square

Uma questão natural que surge é: provamos que $F_n(x)$ é um polinômio em x para $x \in [0, 1]$; por que não para todo x em \mathbb{R} ? Isto ocorre pois F_n não é analítica em todos os pontos da reta. Sendo L_n e f contínuas, segue-se que apenas a convolução $L_n * f$, que é a função F_n , é contínua em toda a reta.

2.7 O teorema de Fejér

É natural, ao estudarmos Análise, nos “agraciarmos” mais com as séries convergentes, achando-as mais úteis que as divergentes, que não nos parecem tão interessantes em um primeiro momento. Este conceito faz com que não percebamos que as séries divergentes são utilizadas, e muito se pode fazer com elas. Esta seção nos trará um exemplo da situação.

A convergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um conceito definido de uma forma bem particular. Tomando a sucessão de reduzidas $A_n = \sum_{j=1}^n a_j$, dizemos que a série converge se a sucessão (A_n) converge, e este é um resultado bastante útil e clássico no estudo das séries. Veremos que é possível utilizar outros tipos de convergência de série, e introduziremos um exemplo a seguir.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ diverge. Usando a definição da sucessão de reduzidas nessa série, o resultado da divergência é imediato (para n da forma $2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}$, o valor das reduzidas será 1. Para n da forma $2k$, o valor será 0, o que mostra a divergência). No entanto, alguns matemáticos observaram que, tomando a média aritmética da sucessão das reduzidas, esta converge para $1/2$. Sendo as reduzidas $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 1, A_4 = 0, \dots$, e as médias aritméticas

$$\sigma_n = \frac{A_1 + \dots + A_n}{n}$$

são

$$\sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \quad \text{e} \quad \sigma_{2n} = \frac{n}{2n},$$

formando uma sucessão σ_n , convergindo para $1/2$. Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 15. Dizemos que uma série é **Cesàro-somável** quando as médias aritméticas das reduzidas de uma série convergem.

É fácil verificar que toda série convergente no sentido comum é Cesàro-somável, e a soma destas séries é igual ao limite da sucessão das médias aritméticas de suas reduzidas. De fato, seja s uma série que convirja para S , s_n sua reduzida de ordem n e σ_n a média aritmética da soma de sua reduzidas até ordem n , ou seja,

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \dots + s_n}{n}.$$

Denotemos $t_n = s_n - S$, $\tau_n = \sigma_n - S$. Teremos então

$$\tau_n = \frac{t_1 + \dots + t_n}{n}. \tag{2.74}$$

Queremos mostrar que $\tau_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Escolhamos $A > 0$ de forma que $|t_n| \leq A$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$, $|t_n| < \varepsilon$. Tomando $n > N$ em (2.74), teremos

$$|\tau_n| \leq \frac{|t_1| + \dots + |t_N|}{n} + \frac{|t_{N+1}| + \dots + |t_n|}{n} < \frac{NA}{n} + \varepsilon.$$

Então, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\tau_n| \leq \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_n| \rightarrow 0$. Por este motivo o conceito de somabilidade de Cesàro é útil: ele torna somáveis séries que divergem, sem alterar o caráter das que já convergem.

Analisemos a somabilidade de Cesàro em relação às séries de Fourier. Vimos que uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica, de período $2L$, pode ser representada por uma série de Fourier, que nem sempre convergirá no sentido comum. Veremos que essa série é Cesàro-somável, e através do teorema de Fejér, estudaremos sobre as convergências nos pontos de descontinuidade de f .

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e periódica, de período $2L$. A reduzida de sua série de Fourier $s_n(x)$, de ordem n , é dada por

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right),$$

e σ_{n+1} é a média aritmética de s_0, s_1, \dots, s_n , isto é

$$\sigma_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}(s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)).$$

Por (2.11) e (2.12), podemos reescrever s_n como

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy,$$

onde

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}}, \quad (2.75)$$

para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$. Portanto, as médias aritméticas também podem ser representadas por uma integral,

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(x-y)f(y)dy, \quad (2.76)$$

onde

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad (2.77)$$

e essa expressão é conhecida como **núcleo de Fejér**.

Enunciaremos e demonstraremos o próximo lema, que será fundamental para a prova do teorema central dessa seção.

Lema 2.3. *O núcleo $F_{n+1}(x)$ de Fejér é uma função par, contínua, periódica de período $2L$, que pode ser expressa como*

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2, \quad (2.78)$$

para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$ e tal que

$$F_{n+1}(0) = \frac{n+1}{2L}, \quad (2.79)$$

para $x = 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

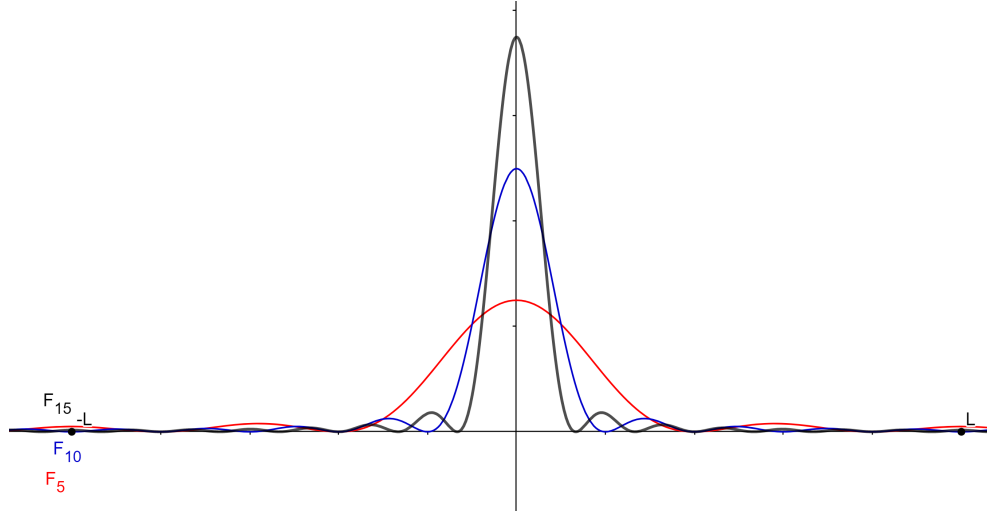


Figura 2.6: As funções F_5 , F_{10} e F_{15} .

Demonstração. Como o núcleo $F_{n+1}(x)$ é um somatório de núcleos de Dirichlet, pelas propriedades i), iii) e iv) do Lema 2.1, segue-se diretamente que F_{n+1} é contínua, par e periódica de período $2L$. Das expressões em (2.75) e (2.77), temos

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2L} \frac{\text{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}} = \frac{1}{2L(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\text{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}}. \quad (2.80)$$

Para demonstrarmos (2.78), obteremos uma expressão para

$$A(\theta) = \sum_{k=0}^n \text{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \theta \right].$$

Usando a fórmula de Euler, notamos que $A(\theta)$ é a parte imaginária de

$$\sum_{k=0}^n e^{i[k+(1/2)]\theta} = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} e^{i\theta/2} = e^{i\theta/2} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}.$$

Usando a fórmula de soma de progressão geométrica para números complexos, teremos

$$e^{i\theta/2} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta/2} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(1 - e^{i(n+1)\theta})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}.$$

Usando uma consequência da fórmula de Euler, vista em (1.30),

$$\frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i} = \text{sen}(\theta/2) \Rightarrow \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}{2i} = -\text{sen}(\theta/2) \Leftrightarrow e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2} = -2i \text{sen}(\theta/2),$$

teremos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{i[k+(1/2)]\theta} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{-2i \operatorname{sen}(\theta/2)} = \frac{1 - \cos[(n+1)\theta] - i \operatorname{sen}[(n+1)\theta]}{-2i \operatorname{sen}(\theta/2)} \cdot \frac{2i \operatorname{sen}(\theta/2)}{2i \operatorname{sen}(\theta/2)} \\ &= \frac{2i \operatorname{sen}(\theta/2)(1 - \cos[(n+1)\theta])}{4 \operatorname{sen}^2(\theta/2)} + \frac{2 \operatorname{sen}(\theta/2) \operatorname{sen}[(n+1)\theta]}{4 \operatorname{sen}^2(\theta/2)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}[(n+1)\theta]}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)} + \frac{i(1 - \cos[(n+1)\theta])}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)}. \end{aligned}$$

Daí, tomando a parte imaginária dessa expressão, teremos

$$A(\theta) = \frac{1 - \cos[(n+1)\theta]}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.$$

Usando a fórmula de transformação de produto em soma

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)],$$

com $a = b$,

$$\operatorname{sen}^2(a) = -\frac{1}{2}[\cos(2a) - \cos(0)] = \frac{1}{2}[1 - \cos(2a)].$$

Então,

$$1 - \cos[(n+1)\theta] = 2 \operatorname{sen}^2 \left[\frac{(n+1)\theta}{2} \right].$$

Podemos reescrever $A(\theta)$ como

$$A(\theta) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{(n+1)\theta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} = \frac{\left[\operatorname{sen} \frac{(n+1)\theta}{2} \right]^2}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}},$$

sendo isto válido para $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \dots$. Fazendo $\theta = \frac{\pi x}{L}$, e substituindo em (2.80), temos

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \frac{1}{2L(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} = \frac{1}{2L(n+1)} \frac{\left[\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L} \right]^2}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \\ &= \frac{1}{2L(n+1)} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2, \end{aligned}$$

obtendo a expressão em (2.78).

Para obtermos (2.79), lembremos da propriedade $v)$ do Lema 2.1

$$D_k(0) = \frac{1}{L} \left(k + \frac{1}{2} \right)$$

de forma que, pondo $x = 0$ em (2.77), teremos

$$F_{n+1}(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{L} \left(k + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{L(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L(n+1)} \left(\sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{L(n+1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{L(n+1)} \left(\frac{(n+1)^2}{2} \right) = \frac{n+1}{2L},
\end{aligned}$$

obtendo (2.79). □

Com os resultados do Lema 2.3, poderemos demonstrar o teorema abaixo.

Teorema 13. (Fejér). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua, periódica de período $2L$. Então,*

(i) *para cada x ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)],$$

(ii) *a sucessão (σ_n) converge uniformemente para f em todo intervalo fechado I que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Demonstração. Inicialmente, pela propriedade do produto de convolução

$$f * g = g * f,$$

utilizaremos a expressão em (2.76)

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(x-y) f(y) dy.$$

Definamos as funções

$$\Phi_{n+1}(x) = \begin{cases} F_{n+1}(x), & -L \leq x \leq L, \\ 0, & |x| > L, \end{cases}$$

de forma que

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n+1}(y) f(x-y) dy. \quad (2.81)$$

Com isto, provaremos que (Φ_{n+1}) é uma sucessão de núcleos de Dirac, e aplicaremos o Teorema 11.

Para a propriedade (D1), vemos que, de fato, $\Phi_{n+1}(x) = 0$, para $|x| > L$, e $\Phi_{n+1}(x) = F_{n+1}(x)$, para $-L \leq x \leq L$. As expressões de F_{n+1} (2.78) e (2.79) são não negativas, mostrando que $\Phi_{n+1}(x) \geq 0$, e (D1) é satisfeita.

Para a propriedade (D2), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n+1}(x) dx = \int_{-L}^L F_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-L}^L D_k(x) dx,$$

onde usamos (2.77) na segunda passagem. Utilizando a propriedade *ii*) do Lema 2.1, onde

$$\int_{-L}^L D_k(x) dx = 1,$$

teremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-L}^L D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1,$$

e a propriedade (D2) está provada.

Para verificarmos a propriedade (D3), sejam dados $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$. Dividamos em dois casos. Para $\delta \geq L$, a função Φ_{n+1} se anula no intervalo $|x| > \delta$, de forma que

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_{n+1}(x) dx = 0,$$

e o resultado é imediato.

Para $0 < \delta < L$, pela paridade de F_{n+1} , temos

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_{n+1}(x) dx = \int_{|x|>\delta} F_{n+1}(x) dx = 2 \int_{\delta}^{+\infty} F_{n+1}(x) dx = 2 \int_{\delta}^L F_{n+1}(x) dx. \quad (2.82)$$

Usando a expressão

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2,$$

e a limitação da função seno, teremos

$$F_{n+1}(x) \leq \frac{1}{2L(n+1) \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L} \right)^2}.$$

Para um $x \in [\delta, L]$, pelo fato da função $\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}$ ser crescente nesse período, temos,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} \leq \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L} \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L}},$$

de forma a obtermos a majoração

$$F_{n+1}(x) \leq \frac{1}{2L(n+1) \left(\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2}.$$

Substituindo a última desigualdade em (2.82), teremos

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\delta} \Phi_{n+1}(x) dx &\leq 2 \int_{\delta}^L \frac{1}{2L(n+1) \left(\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2} dx = \frac{1}{L(n+1) \left(\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2} \int_{\delta}^L dx \\ &= \frac{L - \delta}{L(n+1) \left(\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, para n suficientemente grande, podendo tomá-lo de forma que

$$n > \frac{L - \delta - \varepsilon L \left(\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2}{\varepsilon L \left(\operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2},$$

teremos

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_{n+1}(x) dx < \varepsilon.$$

Portanto, a condição (D3) dos núcleos de Dirac está satisfeita. Portanto, podemos aplicar o teorema 11, e a demonstração do teorema de Féjer está completa. \square

2.8 Identidade de Parseval

Lembrando de um resultado da Seção 2.2, através da expressão (2.30)

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

podemos perceber que as duas assertivas abaixo são equivalentes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0 \tag{2.83}$$

e

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \tag{2.84}$$

A relação em (2.84) é conhecida como **identidade de Parseval**. Mostraremos que (2.83) ocorre, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx = 0 \tag{2.85}$$

para toda função f de tipo \mathcal{L}^2 no intervalo $[-L, L]$. Como consequência, a identidade de Parseval será válida para tais funções, e a expressão em (2.85) também pode ser escrita como

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) \right],$$

onde l.i.m. denota o limite na média, conforme visto na Definição 13.

Teorema 14. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, de quadrado integrável no intervalo $[-L, L]$. Então, a série de Fourier de f converge em média quadrática (conforme Definição 13) para f , ou seja, a relação (2.85) é válida.*

Demonstração. *Caso i)* Se f é contínua, pelo teorema de Fejér da seção anterior, a sucessão (σ_n) das médias aritméticas das reduzidas s_n converge uniformemente para f em $[-L, L]$, ou seja

$$\max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como a diferença em módulo $|\sigma_n(x) - f(x)|$ assume um valor máximo no intervalo $[-L, L]$, de forma que

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)|.$$

Logo,

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L \max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx = 2L \left[\max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)| \right]^2.$$

Portanto,

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.86)$$

Por outro lado, utilizando os resultados da Seção 2.2, pela expressão (2.29), onde provamos que as reduzidas s_n da série de Fourier de uma função f do tipo \mathcal{L}^2 são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam f em média quadrática, sendo $\sigma_n(x)$ um polinômio trigonométrico de ordem n , temos que

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx$$

e, juntando com (2.86), obtemos (2.85).

Caso ii) Para demonstrar o caso geral, pelos resultados da Seção 2.3, Proposição 6, sabemos que toda função f de quadrado integrável pode ser aproximada em média quadrática por uma sucessão de funções contínuas ψ_n . Além disso, se f for uma função periódica de período $2L$, então ψ_n também o será. Para a demonstração do teorema, dado $\varepsilon > 0$, provaremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (2.87)$$

Pela Proposição 6, existe uma sucessão de funções $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e periódicas de período $2L$, e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$,

$$\int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (2.88)$$

Sendo ψ_n uma função contínua, podemos aplicar em (2.88) o caso *i)* demonstrado anteriormente. Denotando \tilde{s}_n como a reduzida de ordem n da série de Fourier de ψ , existe um $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para $n \geq \tilde{n}_0$

$$\int_{-L}^L |\psi_n(x) - \tilde{s}_n|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (2.89)$$

Usando a desigualdade de Minkowsky explorada na Seção 2.3, temos, para $n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$,

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_a^b |f(x) - \psi(x) + \psi(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b |\psi(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo (2.88) e (2.89) nos termos à direita da desigualdade, temos que

$$\left[\int_a^b |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies$$

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx < \varepsilon^2 < \varepsilon,$$

para $\varepsilon < 1$.

Mais uma vez, usando os resultados da Seção 2.2, como \tilde{s}_n é um polinômio trigonométrico de ordem n , teremos

$$\int_{-L}^L |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx < \varepsilon,$$

para $n \geq \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$. Essa é a expressão da tese em (2.87), concluindo a demonstração do teorema. \square

Antes de enunciarmos os próximos teoremas, utilizando as relações de ortogonalidade exploradas anteriormente, definiremos os conceitos de sistemas ortogonais e ortonormais. Um conjunto ψ_n de funções de quadrado integrável em $[-L, L]$ é chamado um **sistema ortogonal**, se

$$\int_{-L}^L \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0, \quad \text{se } n \neq m,$$

$$\int_{-L}^L \psi_n^2(x)dx \neq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O sistema recebe o nome de **ortonormal** se

$$\int_{-L}^L \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0, \quad \text{se } n \neq m,$$

$$\int_{-L}^L \psi_n^2(x)dx = 1,$$

para todo n . Pela Proposição 4, o sistema trigonométrico

$$1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{L}, \sin \frac{k\pi x}{L}, \dots$$

é ortogonal.

Pelas relações de ortogonalidade em (1.11) e (1.12)

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = L, \quad \text{se } n = m \geq 1,$$

e

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = L, \quad \text{se } n = m \geq 1.$$

Então, o sistema

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi x}{L}, \dots, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{k\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{k\pi x}{L}, \dots \quad (2.90)$$

é ortonormal.

Um **sistema ortonormal** é **completo** se, para toda função f do tipo \mathcal{L}^2 em $[-L, L]$, tivermos

$$\int_{-L}^L f\psi_n = 0, \quad \text{para todo } n, \quad (2.91)$$

então $f = 0$. Dizer $f = 0$ significa que $f(x) = 0$ em todos os pontos de continuidade da função f .

Com estas definições, podemos enunciar os próximos teoremas.

Teorema 15. *O sistema trigonométrico (2.90) é completo.*

Demonstração. Isto decorrerá imediatamente da identidade de Parseval. Utilizando a expressão em (2.91) suponhamos que todos os coeficientes de Fourier de f se anulam. Tomemos $a_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que

$$0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

onde na última passagem usamos os termos $\frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}$ do sistema trigonométrico (2.90).

Analogamente suponhamos que os coeficientes $b_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que todos os coeficientes de Fourier de f se anularão no sistema trigonométrico (2.90). Mostraremos que $f = 0$.

Usando o fato de todos os coeficientes da série de Fourier de f se anularem, utilizando a identidade de Parseval, e a expressão em (2.84), teremos

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = 0,$$

e isto implica que $f = 0$. □

Teorema 16. *(Unicidade da Série de Fourier). Sejam f e g funções periódicas de período $2L$ e de quadrado integrável em $[-L, L]$. Suponha que suas séries de Fourier sejam as mesmas. Então $f = g$ (ou seja, $f(x) = g(x)$ em todos os pontos de continuidade de f e g).*

Demonstração. Seja $h = f - g$. Como os coeficientes de f e g são os mesmos, então $\int_{-L}^L h \psi_n = 0$, para todas as ψ_n do sistema trigonométrico. Pelo teorema 15, $h = 0$, e a demonstração está completa. □

2.9 Funções de variação limitada

Apresentaremos mais um teste de convergência pontual das séries de Fourier, que não contém e nem está contido no teste de Dini. Chamado de teste de Jordan, usa o conceito de função de variação limitada.

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de **variação limitada** se existe uma constante M tal que, para qualquer partição

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

do intervalo $[a, b]$, tenhamos

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M. \tag{2.92}$$

A menor das constantes M que pode ser usada em (2.92), para todas as partições, é chamada de variação de f em $[a, b]$, e a designaremos por $V[a, b]$.

Mostraremos que existem funções contínuas que não são de variação limitada.

Exemplo 8. Definamos a função

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{se } x \in (0, 2], \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

contínua no intervalo $[0, 2]$. Neste intervalo, a função f **não é de variação limitada**.

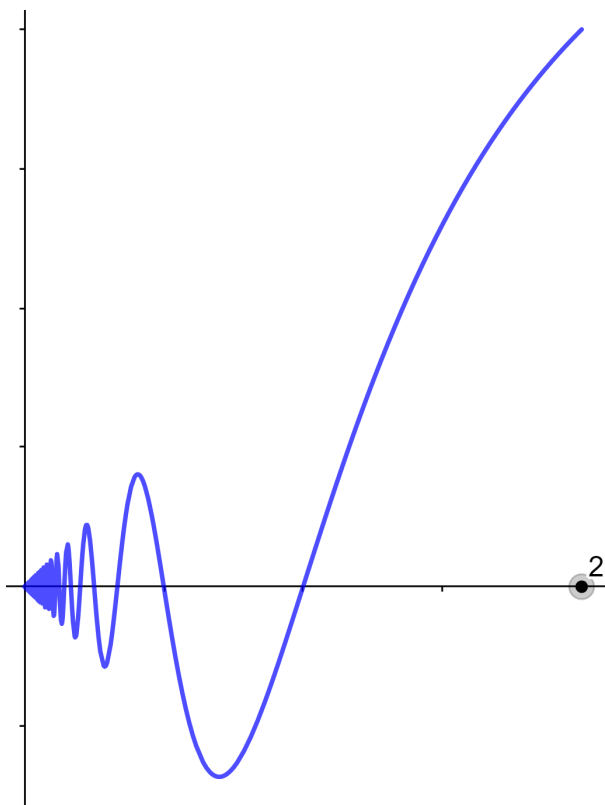


Figura 2.7: Gráfico da função f e no intervalo $[0, 2]$.

No intervalo $(0, 2]$, é de fácil verificação que as funções $g(x) = x$, $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $\varphi(x) = \frac{\pi}{x}$ são contínuas. Como o produto e a composição de funções contínuas são contínuas, temos que

$$g(x) \cdot h(\varphi(x)) = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right),$$

definida em $(0, 2]$ é contínua. Basta mostrarmos, portanto, a continuidade no ponto $x = 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon$ de forma que $x \in (0, \delta)$. Como a função $|\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})| \leq 1$, para todo $x \neq 0$, teremos

$$x \in (0, \delta) \Rightarrow \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

Em outras palavras, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0),$$

mostrando que f é contínua em $[0, 2]$.

Construamos agora uma partição

$$0, \frac{2}{2n-1}, \frac{2}{2n-3}, \dots, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2, \quad (2.93)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Com esta construção, teremos, pela identidade trigonométrica $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$, para n ímpar,

$$\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{2n-1}}\right) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(n\pi) = 1$$

e

$$\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{2n-3}}\right) = \sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cos(n\pi) = -1.$$

Para n par, teremos (com raciocínio análogo ao acima)

$$\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{2n-1}}\right) = -1$$

e

$$\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{2n-3}}\right) = 1.$$

Portanto, quando x for da forma $\frac{2}{2n-1}$, teremos

$$x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \mp \frac{2}{2n-1},$$

(o sinal positivo e negativo alternando quando n for par e ímpar, respectivamente). Para x da forma $\frac{2}{2n-3}$,

$$x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pm \frac{2}{2n-3}.$$

Desta forma, para todo $n \geq 2$, tomando os pontos x como os da partição em (2.93), teremos

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{2}{2n-3}\right) - f\left(\frac{2}{2n-1}\right) \right| &= \left| \pm \frac{2}{2n-3} - \left(\mp \frac{2}{2n-1} \right) \right| \\ &= \left| \pm \left(\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1} \right) \right| = \frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão em (2.92), obtemos

$$\left(2 + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \dots + \left(\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}\right) + \frac{2}{2n-1}. \quad (2.94)$$

Utilizaremos um resultado auxiliar para demonstrarmos que f não é de variação limitada. Mostraremos que

$$\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1} > \frac{1}{n-1},$$

para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Para isso, utilizaremos o princípio de indução. Inicialmente, notemos que

$$\begin{aligned} 2n - 1 > 2n - 3 &\Rightarrow \frac{1}{2n - 1} < \frac{1}{2n - 3} \Rightarrow \frac{2}{2n - 1} < \frac{2}{2n - 3} \Rightarrow \frac{2}{2n - 1} + \frac{2}{2n - 1} \\ &< \frac{2}{2n - 3} + \frac{2}{2n - 1}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Basta mostrarmos, portanto, que

$$\frac{4}{2n - 1} = \frac{2}{2n - 1} + \frac{2}{2n - 1} > \frac{1}{n - 1} \Rightarrow 4n - 4 > 2n - 1, \quad (2.96)$$

para todo $n \geq 2$. Para $n = 2$, temos que $4 > 3$, e a assertiva é válida. Suponhamos que também é válida para algum $k \in \mathbb{N}$, de forma que $4k - 4 > 2k - 1$, (ou seja, $4k > 2k + 3$). Para $k + 1$, teremos

$$4(k + 1) - 4 = 4k > 2k + 3 > 2k + 1 = 2(k + 1) - 1,$$

mostrando que a afirmação é válida para todo $n \geq 2$.

Finalmente, utilizando a expressão em (2.94), a desigualdade em (2.95), o resultado de (2.96) e o fato (de fácil demonstração) de que $\frac{2}{2n-1} > \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} &\left(2 + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \dots + \left(\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}\right) + \frac{2}{2n-1} \\ > \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) + \dots + \left(\frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n-1}\right) + \frac{2}{2n-1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Como a série harmônica é divergente, essa soma pode se tornar arbitrariamente grande, desde que n seja suficientemente grande. Mostramos, portanto, que não podemos tomar uma constante M para qualquer partição do domínio de f de forma que se verifique a expressão em (2.92).

Existem também funções descontínuas que são de variação limitada.

Exemplo 9. *Seja a função $g(x) = 0$, se $0 \leq x < 1$ e $g(x) = 1$, se $1 \leq x \leq 2$. A função será identicamente nula no intervalo $[0, 1)$, e constante no intervalo $[1, 2]$, portanto*

$$\sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq 1,$$

para qualquer partição de $[0, 2]$, e g , que é descontínua no ponto $x = 1$, é de variação limitada.

Qualquer função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada, com $V[a, b] = |f(b) - f(a)|$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f é não-decrescente. Portanto, para quaisquer $x, y \in [a, b]$, com $x < y$, teremos $f(x) \leq f(y)$. Daí, para qualquer partição de $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| &= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| = \\ &= (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1})) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a) = \\ &= |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

O próximo lema, relacionado às funções de variação limitada, será utilizado no próximo teorema, um importante resultado no estudo dessa classe de funções.

Lema 2.4. *Suponhamos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada.*

Se $a \leq x \leq y \leq b$, então

$$V[a, y] = V[a, x] + V[x, y] \quad (2.97)$$

Demonstração: Se $x = a$ ou $y = x$, a igualdade é evidente, pois $V[x, x] = 0$. Suponhamos $a < x < y$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar uma partição P de $[a, y]$, com $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = y$, de forma que

$$V[a, y] - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V[a, y]. \quad (2.98)$$

Se x não é um dos extremos x_i dos intervalos da partição P , podemos refiná-la, acrescentando-o aos pontos da partição, e a desigualdade acima continua sendo válida. O segundo membro de (2.97) é, então, o supremo de todas as somas que figuram em (2.98). Chamando $x = x_k$ na partição P , teremos

$$V[a, y] - \varepsilon \leq V[a, x] + V[x, y] \leq V[a, y].$$

Como ε é arbitrário, o lema está demonstrado. \square

Para a demonstração do próximo teorema, utilizaremos dois resultados de Análise sobre funções monótonas.

Lema 2.5. *Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Para todo $x_i \in (a, b)$, existem $L = \lim_{x \rightarrow x_i^+} g(x)$ e $M = \lim_{x \rightarrow x_i^-} g(x)$. Para os casos das extremidades, existem $L' = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ e $M' = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$. Ou seja, existem sempre os limites laterais de uma função monótona limitada.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente. Para um certo $x_i \in (a, b)$, temos que $g(x_i) = L = \inf\{g(x); x \in [a, b], x > x_i\}$. Isso implica que, dado $\varepsilon > 0$, $L + \varepsilon$ não é cota inferior do conjunto $\{g(x); x \in [a, b], x > x_i\}$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $x_i + \delta \in [a, b]$, e $L \leq g(x_i + \delta) \leq L + \varepsilon$. Como g é não-decrescente, para $x \in (x_i, x_i + \delta) \Rightarrow L \leq g(x) \leq L + \varepsilon$, sendo esta a definição de limite lateral à direita. O processo é análogo para o limite lateral à esquerda. Obviamente, para os extremos a e b , existem apenas os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente. \square

Lema 2.6. *Seja g monótona em (a, b) . Então, o conjunto de pontos de (a, b) em que g é descontínua é no máximo enumerável.*

Demonstração: Seja g uma função crescente, sem perda de generalidade. Denotemos como E o conjunto dos pontos em que g é descontínua. Mostremos que este conjunto é, no máximo, enumerável. A cada ponto $x \in E$, associaremos um número racional $r(x)$ de forma que

$$g(x - 0) < r(x) < g(x + 0).$$

Se $x_1 < x_2$, temos que $g(x_1 + 0) \leq g(x_2 - 0)$, de forma que $r_1(x) \neq r_2(x)$. É possível, portanto, estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto E dos pontos de descontinuidade e um subconjunto dos racionais, que no máximo é enumerável. \square

Teorema 17. *Qualquer função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada é a diferença de duas funções monotônicas:*

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(V[a, x] + f(x)), \quad f_2(x) = \frac{1}{2}(V[a, x] - f(x)).$$

Além disso, toda função de variação limitada tem no máximo um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade.

Demonstração: De fato, escrevamos

$$2f_1(x) = V[a, x] + f(x)$$

e

$$2f_2(x) = V[a, x] - f(x).$$

Para dois pontos x_i e x_j pertencentes a uma partição qualquer de $[a, b]$, tais que

$$a \leq x_i \leq x_j \leq b,$$

temos que

$$2f_1(x_j) - 2f_1(x_i) = V[a, x_j] + f(x_j) - V[a, x_i] - f(x_i) = V[x_i, x_j] + f(x_j) - f(x_i)$$

e

$$2f_2(x_j) - 2f_2(x_i) = V[a, x_j] - f(x_j) - V[a, x_i] + f(x_i) = V[x_i, x_j] - f(x_j) + f(x_i),$$

onde utilizamos o Lema 2.4 na passagem acima. Como $|f(x_j) - f(x_i)| \leq V[x_i, x_j]$, as funções f_1 e f_2 são ambas não-decrescentes e, portanto, monótonas.

A segunda afirmação é demonstrada através dos resultados dos Lemas 2.5 e 2.6. Com estes, vemos que sempre existem os limites laterais das funções f_1 e f_2 do resultado anterior, e estes são de primeira espécie. Como a função f original pode ser expressa como a diferença de f_1 e f_2 , f possuirá no máximo um conjunto enumerável de pontos de descontinuidades, e o teorema está provado. \square

O lema abaixo, também sobre funções de variação limitada, será utilizado posteriormente como resultado auxiliar no Teste de Jordan.

Lema 2.7. *Sejam f e g funções de variação limitada em $[a, b]$ e seja k uma constante arbitrária. Então,*

i) kf é de variação limitada em $[a, b]$

ii) $f + g$ e $f - g$ são de variação limitada em $[a, b]$

Demonstração: Para *i)*, tomando uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, sendo $V(f, [a, b])$ a variação limitada de f em um intervalo $[a, b]$, temos

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V(f, [a, b]).$$

Para uma constante $k \in \mathbb{R}$ multiplicando a função f , teremos

$$\sum_{i=1}^n |kf(x_i) - kf(x_{i-1})| = |k| \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |k|V(f, [a, b]),$$

mostrando que kf é de variação limitada.

Para *ii*), tomando a mesma partição que na demonstração em *i*), e utilizando as propriedades da desigualdade triangular, teremos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b]) \end{aligned}$$

mostrando que $f + g$ é de variação limitada. Para o caso $f - g$, basta aplicar a propriedade *i*) em g , pondo $k = -1$, de modo que $-g$ será de variação limitada. Daí, usando a propriedade vista acima, de que a soma de duas funções de variação limitada é de variação limitada, o caso $f - g$ está demonstrado. \square

Para a demonstração do Teste de Jordan, será necessário usar dois resultados, o *Princípio de Localização de Riemann* e o *Segundo Teorema do Valor Médio*. Para a demonstração do primeiro, será necessário um resultado auxiliar, que será demonstrado no lema abaixo.

Lema 2.8. *Sejam φ uma função do tipo \mathcal{L}^1 e ψ uma função limitada e integrável, definidas em um intervalo $[a, b]$. Então, o produto $\varphi\psi$ é \mathcal{L}^1 .*

Demonstração: Antes da demonstração, faremos uma definição equivalente para funções do tipo \mathcal{L}^1 . Dizer que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo \mathcal{L}^1 é equivalente a

$$\int_a^b |f|dx < \infty.$$

Sendo ψ uma função limitada, existe uma constante $M > 0$ tal que $|\psi| \leq M$ em todo seu domínio. Logo, para o produto $\varphi\psi$, teremos

$$\int_a^b |\varphi\psi|dx \leq \int_a^b M|\varphi|dx = M \int_a^b |\varphi|dx < \infty.$$

Concluimos, portanto, que $|\varphi \cdot \psi|$ é integrável. Logo, $\varphi \cdot \psi$ é do tipo \mathcal{L}^1 , e provamos o resultado. \square

Teorema 18. (*Princípio da Localização de Riemann*). *Seja f uma função \mathcal{L}^1 periódica de período $2L$. Então, sua série de Fourier em um ponto $x \in [-L, L]$ convergirá para $s(x)$ se, e só se, existir $0 < \lambda \leq L$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\lambda \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{L}}{t} g(x, t) dt = 0, \quad (2.99)$$

onde

$$g(x, t) = f(x + t) + f(x - t) - 2s(x),$$

e $s(x)$ denota a série de Fourier da função f no ponto x .

Observação 4. Nas hipóteses do teorema acima, não é necessária a existência dos limites laterais de f . Por esta razão, a função g difere da expressão definida previamente no teste de Dini.

Demonstração. Usando a expressão em (2.16) para a n -ésima soma parcial da série de Fourier de f , vemos que a série de Fourier de f converge para $s(x)$ se, e só se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt = 0 \tag{2.100}$$

De fato, desenvolvendo a integral na expressão em (2.100), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)]dt = \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \int_0^L D_n(t)2s(x)dt \end{aligned} \tag{2.101}$$

Lembremos de um resultado demonstrado na expressão em (2.16)

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt, \tag{2.102}$$

Utilizando as propriedades *i)* e *ii)* do Lema 2.1, referente ao núcleo de Dirichlet, temos que

$$\int_0^L D_n(t)dt = \frac{1}{2},$$

e como $s(x)$ independe de t , temos que

$$\int_0^L D_n(t)2s(x)dt = 2s(x) \int_0^L D_n(t)dt = \frac{2s(x)}{2} = s(x). \tag{2.103}$$

Substituindo (2.102) e (2.103) na expressão em (2.101), temos

$$\int_0^L D_n(t)g(x, t)dt = s_n(x) - s(x)$$

Passando o limite na igualdade encontrada, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(x) - s(x)).$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$$

(ou seja, o limite das reduzidas de uma série de Fourier quando $n \rightarrow \infty$ é a própria série de Fourier), teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(x) - s(x)) = s(x) - s(x) = 0,$$

e mostramos que a expressão em (2.100) é válida.

Utilizaremos um resultado demonstrado na expressão em (2.24). Por construção, a expressão $g(x, t)$ é integrável em relação à variável t . De fato, como

$$g(x, t) = f(x + t) + f(x - t) - 2s(x),$$

por hipótese f é \mathcal{L}^1 , e $s(x)$ independe de t .

Para qualquer $\lambda \in (0, L)$ o denominador da expressão $\frac{g(x,t)}{\text{sen} \frac{\pi t}{2L}}$ nunca se anula quando t varia em (λ, L) , e portanto é integrável. Logo, podemos aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue na expressão abaixo, de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda}^L D_n(t)g(x, t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{\lambda}^L \text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{\text{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt = 0. \quad (2.104)$$

Separando os limites de integração na expressão em (2.100), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt &= \int_0^{\lambda} D_n(t)g(x, t)dt + \int_{\lambda}^L D_n(t)g(x, t)dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{\lambda} D_n(t)g(x, t)dt &= \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt - \int_{\lambda}^L D_n(t)g(x, t)dt. \end{aligned}$$

Passando o limite com $n \rightarrow \infty$ na expressão acima, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} D_n(t)g(x, t)dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^L D_n(t)g(x, t)dt - \int_{\lambda}^L D_n(t)g(x, t)dt \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda}^L D_n(t)g(x, t)dt \end{aligned}$$

Utilizando os resultados dos limites encontrados nas expressões em (2.100) e (2.104) na última igualdade, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} D_n(t)g(x, t)dt = 0 - 0$$

Portanto, a convergência da série de Fourier para $s(x)$ equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} D_n(t)g(x, t)dt = 0, \quad (2.105)$$

para algum $\lambda \in (0, L)$.

Consideremos agora a função

$$h(t) = \frac{1}{\text{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{2L}},$$

que é contínua para $0 < t \leq \lambda \leq L$. Analisaremos o comportamento de h quando $t \rightarrow 0^+$. Simplificando a expressão de h , temos

$$h(t) = \frac{\frac{\pi t}{2L} - \text{sen} \frac{\pi t}{2L}}{\text{sen} \frac{\pi t}{2L} \cdot \frac{\pi t}{2L}}$$

Quando $t \rightarrow 0^+$, a expressão em h se torna uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Podemos aplicar a regra de l'Hôpital, de forma que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{2L} - \frac{\pi \cos \frac{\pi t}{2L}}{2L}}{\frac{\pi \sin \frac{\pi t}{2L}}{2L} + \frac{\pi^2 t \cos \frac{\pi t}{2L}}{4L^2}}.$$

Novamente teremos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, e aplicaremos novamente l'Hôpital.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2L}}{4L^2}}{\frac{\pi^2 \cos \frac{\pi t}{2L}}{2L^2} - \frac{\pi^3 t \sin \frac{\pi t}{2L}}{8L^3}} = \frac{0}{\frac{\pi^2}{2L^2}} = 0$$

Portanto, $h \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Logo, h é contínua e limitada no intervalo $(0, L)$, portanto integrável.

Portanto, pelo Lema 2.8, o produto $h(t)g(x, t)$ é \mathcal{L}^1 , e é possível aplicar o lema de Riemann-Lebesgue, de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] h(t)g(x, t) dt = 0 \quad (2.106)$$

Expandindo a expressão de $h(t)$ na integral do limite acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] h(t)g(x, t) dt &= \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{2L}} \right) g(x, t) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt - \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{\frac{\pi t}{2L}} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{t} dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{t} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt - \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] h(t)g(x, t) dt. \end{aligned}$$

Passando o limite de $n \rightarrow \infty$ na igualdade acima, teremos

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] h(t)g(x, t) dt \end{aligned}$$

Utilizando os resultados dos limites encontrados em (2.105) e (2.106) nas duas últimas integrais da igualdade acima, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{t} dt = 0 - 0. \quad (2.107)$$

A igualdade em (2.107) é possível se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\lambda \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L}}{t} g(x, t) dt = 0,$$

e o teorema está provado. \square

Relembremos agora um resultado de um teorema sobre condições de integrabilidade, cuja demonstração pode ser encontrada em E. L. Lima. *Curso de Análise*. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976, e que será usado no resultado do próximo lema.

Teorema 19. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) f é integrável;
- (2) Para todo $\varepsilon > 0$ existem partições P, Q do intervalo $[a, b]$ tais que $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$;
- (3) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P do intervalo $[a, b]$ tais que $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$;
- (4) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = t_0, t_1, \dots, t_n$ do intervalo $[a, b]$ tal que $\sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$, e $\omega_i = M_i - m_i$ a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (e M_i e m_i os valores máximo e mínimo, respectivamente, de f neste intervalo).

Para a prova do Segundo Teorema do Valor Médio, será utilizado o resultado do lema abaixo.

Lema 2.9. *Toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, seja f não-decrescente e não-constante. Dado $\varepsilon > 0$, construímos uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, cujos intervalos têm todos comprimento menor que $\varepsilon/[f(b) - f(a)]$. Para cada $i = 1, \dots, n$, denotemos $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ a oscilação (a diferença dos valores máximo e mínimo) de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição P . Teremos, portanto, $\sum w_i = f(b) - f(a)$, de forma que

$$\sum w_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum w_i = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot f(b) - f(a) = \varepsilon.$$

Logo, f é integrável. \square

Antes de demonstrarmos o Segundo Teorema do Valor Médio, enunciaremos o Teorema do Valor Intermediário (que será usado nesta demonstração) e o Teorema do Valor Médio. As provas destes poderão ser encontradas em W. Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971.

Teorema 20. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Teorema 21. *(Teorema do Valor Médio para Integrais) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Lema 2.10. *(Segundo Teorema do Valor Médio). Sejam $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa em $(a, b]$ e não decrescente e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 . Então, existe $\delta \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b gf dx = g(a + 0) \int_a^\delta f dx + g(b - 0) \int_\delta^b f dx. \quad (2.108)$$

Demonstração. Demonstraremos (2.108) para o caso em que $g(a+0) = 0$, e o caso geral se seguirá deste, aplicando-o à função $g(x) - g(a+0)$. A função

$$F(t) = \int_t^b f(x)dx$$

é uma função contínua em $[a, b]$.

Sejam agora M e m o máximo e mínimo de F em $[a, b]$, respectivamente. Observemos que a existência de $g(b-0)$ é garantida pelo fato de g ser não decrescente em $[a, b]$, assumindo seus valores mínimo e máximo em $g(a)$ e $g(b)$, respectivamente (estes valores podem ser os mesmos, no caso de g ser constante). Logo, existe uma constante W tal que $|g(x)| \leq W$, para todo $x \in [a, b]$. A função g , portanto, é monótona e limitada, e a existência dos limites laterais é garantida pelo Lema 2.5. Desta forma, $g(b-0)F(t)$ é contínua em $[a, b]$, e o resultado será consequência do Teorema do Valor Intermediário se mostrarmos que

$$mg(b-0) \leq \int_a^b g f dx \leq Mg(b-0). \quad (2.109)$$

Por outro lado, temos

$$\int_a^b \varphi f dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{jA}{n} f dx = \frac{A}{n} \sum_{j=1}^n j \int_{x_{j-1}}^{x_j} f dx.$$

Usando a função $F(t)$ definida anteriormente, temos

$$F(x_{j-1}) - F(x_j) = \int_{x_{j-1}}^b f dx - \int_{x_j}^b f dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f dx + \int_b^{x_j} f dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f dx,$$

de forma que

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi f dx &= \frac{A}{n} \sum_{j=1}^n j [F(x_{j-1}) - F(x_j)] = \frac{A}{n} \left(\sum_{j=1}^n j F(x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n j F(x_j) \right) \\ &= \frac{A}{n} \left(F(x_0) + \sum_{j=2}^n j F(x_{j-1}) - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) F(x_{j-1}) \right) \\ &= \frac{A}{n} \left(F(x_0) + \sum_{j=2}^n j F(x_{j-1}) - \sum_{j=2}^n (j-1) F(x_{j-1}) - n F(x_n) \right) \\ &= \frac{A}{n} \left(F(x_0) + \sum_{j=2}^n j F(x_{j-1}) - \sum_{j=2}^n (j-1) F(x_{j-1}) - n \int_b^b f(x) dx \right) \\ &= \frac{A}{n} \left(F(x_0) + \sum_{j=2}^n j F(x_{j-1}) - \sum_{j=2}^n (j-1) F(x_{j-1}) \right) \\ &= \frac{A}{n} \left(F(x_0) + \sum_{j=2}^n [j - (j-1)] F(x_{j-1}) \right) = \frac{A}{n} [F(x_0) + \sum_{j=2}^n F(x_{j-1})]. \end{aligned}$$

Daí, sendo m e M os valores mínimo e máximo, respectivamente, de F em $[a, b]$, se segue que

$$Am = \frac{A}{n} \sum_{j=1}^n m \leq \frac{A}{n} [F(x_0) + \sum_{j=2}^n F(x_{j-1})] \leq \frac{A}{n} \sum_{j=1}^n M = AM,$$

de forma que

$$Am \leq \int_a^b \varphi f dx \leq AM. \quad (2.110)$$

Então, usando (??) e (2.110), e o resultado auxiliar de que

$$\begin{aligned} (\varphi(x) - g(x)) \cdot f(x) &\leq (\varphi(x) - g(x)) \cdot |f(x)| \\ \Rightarrow -(\varphi(x) - g(x)) \cdot |f(x)| &\leq -(\varphi(x) - g(x)) \cdot f(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$ (usando o fato de $\varphi(x) - g(x)$ ser não negativo), teremos

$$\begin{aligned} Am - \frac{A}{n} \int_a^b |f| dx &\leq \int_a^b \varphi f dx - \int_a^b (\varphi - g) |f| dx \leq \int_a^b \varphi f dx - \int_a^b (\varphi - g) f dx \\ &= \int_a^b (\varphi - \varphi + g) f dx = \int_a^b g f dx. \end{aligned}$$

Além disso, sabendo que

$$(g(x) - \varphi(x)) \cdot f(x) \leq |g(x) - \varphi(x)| \cdot |f(x)|,$$

para todo $x \in [a, b]$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b g f dx &= \int_a^b (g - \varphi + \varphi) f dx = \int_a^b \varphi f dx + \int_a^b (g - \varphi) f dx \\ &\leq \int_a^b \varphi f dx + \int_a^b |g - \varphi| |f| dx \leq AM + \frac{A}{n} \int_a^b |f| dx, \end{aligned}$$

de forma que

$$Am - \frac{A}{n} \int_a^b |f| dx \leq \int_a^b g f dx \leq AM + \frac{A}{n} \int_a^b |f| dx.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos a expressão em (2.109), demonstrando o lema. \square

Observação 5. A relação em (2.108) é válida se substituirmos a hipótese de g pela de esta ser não-crescente. Basta substituir x por $-x$ na demonstração anterior.

Aplicação. Afirmamos que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| \leq M. \quad (2.111)$$

para $b > a \geq 1$. Pelo limite trigonométrico fundamental, quando $x \rightarrow 0$, $\operatorname{sen} x/x \rightarrow 1$. Um resultado clássico do Cálculo diz que o quociente de funções contínuas é contínua em todos os pontos aonde o denominador não se anula. Logo, o integrando $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é

contínuo. Usando o Lema 2.10, pondo $g = \frac{1}{x}$ e $f = \text{sen } x$ na expressão (2.108), existirá um $\delta > a$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{\text{sen } x}{x} dx \right| &= \left| \frac{1}{a} \int_a^\delta \text{sen } x dx + \frac{1}{b} \int_\delta^b \text{sen } x dx \right| = \left| \frac{1}{a} \left(-\cos x \Big|_a^\delta \right) + \frac{1}{b} \left(-\cos x \Big|_\delta^b \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{a} \left(\cos a - \cos \delta \right) + \frac{1}{b} \left(\cos \delta - \cos b \right) \right| \leq \frac{1}{a} |\cos a - \cos \delta| + \frac{1}{b} |\cos \delta - \cos b| = \\ &= \frac{1}{a} |\cos a + (-\cos \delta)| + \frac{1}{b} |\cos \delta + (-\cos b)| \leq \frac{1}{a} |\cos a| + \frac{1}{a} |-\cos \delta| + \frac{1}{b} |\cos \delta| + \frac{1}{b} |-\cos b| \\ &= \frac{1}{a} |\cos a| + \frac{1}{a} |\cos \delta| + \frac{1}{b} |\cos \delta| + \frac{1}{b} |\cos b| < 4, \end{aligned}$$

o que mostra que a assertiva é verdadeira. Nas passagens acima, usamos a desigualdade triangular, a limitação da função cosseno ($|\cos x| \leq 1$) e o fato de $a \geq 1$ e $b > 1$ implicar em $\frac{1}{a} \leq 1$ e $\frac{1}{b} < 1$.

Com estes dois resultados, podemos enunciar e demonstrar o teste de Jordan.

Teorema 22. (*Teste de Jordan*). *Seja f uma função de variação limitada e periódica de período $2L$. Então, sua série de Fourier converge para $[f(x+0) + f(x-0)]/2$.*

Demonstração. Aplicaremos o Teorema 18, definindo

$$g(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0).$$

Para cada x fixado, pela hipótese de f ser de variação limitada, utilizando as propriedades do Lema 2.7, a função g é de variação limitada em t . Pelo Teorema 17, existem funções não-negativas monótonas e não-decrescentes $g_1(t)$ e $g_2(t)$ tais que $g(x, t) = g_1(t) - g_2(t)$ e $g_1(0+0) = g_2(0+0) = 0$. A segunda igualdade (em que os limites laterais à direita no ponto $t = 0$ das funções g_1 e g_2 é igual a zero) se justifica pelo fato de que, para um x fixado,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x-t) - f(x+0) - f(x-0) \\ &= f(x+0) + f(x-0) - f(x+0) - f(x-0) = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} g_2(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g_2(t)$$

Caso $\lim_{t \rightarrow 0^+} g_i(t) = a \neq 0$, para $i = 1, 2$, basta substituí-las pela função $g'_i(t) = g_i(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} g_i(t)$, de forma a garantirmos a condição

$$g_1(0+0) = g_2(0+0) = 0.$$

Pelo Teorema 18, basta demonstrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} g_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.112)$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $0 < \lambda < L$ tal que $|g_i(t)| < \frac{\varepsilon}{M}$, para $t \in (0, \lambda)$, e M é a constante em (2.111). Podemos, portanto, decompor a integral em (2.112) como

$$\int_0^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} g_i(t) dt + \int_\lambda^L \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} g_i(t) dt.$$

Em virtude do Lema de Riemann-Lebesgue, o segundo termo da expressão acima tende a 0 quando $n \rightarrow \infty$. Para estimarmos a primeira integral, utilizaremos o Lema 2.10, tomando $\delta \in (0, \lambda)$, tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} g_i(t) dt \\ &= g_i(0+0) \int_0^\delta \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} dt + g_i(\lambda-0) \int_\delta^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} dt \\ &= 0 + g_i(\lambda-0) \int_\delta^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} dt = g_i(\lambda-0) \int_\delta^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} dt, \end{aligned}$$

em virtude de $g_i(0+0) = 0$, para $i = 1, 2$. Fazendo uma substituição de variáveis, pondo $y = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L}$ (e $dy = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} dt$), teremos

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} g_i(t) dt &= g_i(\lambda-0) \int_\delta^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} dt \\ &= g_i(\lambda-0) \int_{(n+1/2)\pi\delta/L}^{(n+1/2)\pi\lambda/L} \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi}{Ly} \text{sen } y \frac{Ldy}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} \\ &= g_i(\lambda-0) \int_{(n+1/2)\pi\delta/L}^{(n+1/2)\pi\lambda/L} \frac{\text{sen } y}{y} dy. \end{aligned}$$

Como $|g_i(t)| < \frac{\varepsilon}{M}$, para $t \in (0, \lambda)$, e usando o resultado em (2.111), teremos

$$\int_0^\lambda \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{t} g_i(t) dt = g_i(\lambda-0) \int_{(n+1/2)\pi\delta/L}^{(n+1/2)\pi\lambda/L} \frac{\text{sen } y}{y} dy < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

e o teorema está demonstrado. \square

2.10 Fenômeno de Gibbs

Consideremos uma função f periódica, de período $2L$, seccionalmente contínua e de forma que sua primeira derivada seja integrável e absolutamente integrável. Pelo Teorema 10, sua série de Fourier converge uniformemente em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f . Portanto, se o intervalo contiver um ponto de descontinuidade, a convergência em tal intervalo não pode ser uniforme, como visto na Proposição 1. Sendo ξ um ponto de descontinuidade de f , o **fenômeno de Gibbs** mostra um aspecto curioso da convergência da série de Fourier na vizinhança deste ponto. Designando por $\omega_n(\xi, \varepsilon)$ a diferença entre o máximo e o mínimo da soma

parcial $s_n(x)$ no intervalo $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, veremos que $\omega_n(\xi, \varepsilon)$ não aproxima o salto de f em ξ (isto é, a diferença $f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$), não importando quão pequeno seja ε . Estudaremos, através de uma função ψ definida anteriormente no Lema 2.2, que a soma parcial da sua série de Fourier ultrapassa o valor máximo de ψ na vizinhança de 0. E veremos que os gráficos das somas parciais na vizinhança do ponto $x = 0$ se aproximam de um segmento do eixo y , que é maior do que $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, e esse intervalo é chamado de **intervalo de Gibbs**.

Seja ξ um ponto onde f tem um salto de descontinuidade. Um ponto (ξ, y) pertencerá ao intervalo de Gibbs em $x = \xi$ se existirem sucessões (n_k) de inteiros positivos e $x_k \rightarrow \xi$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}(x_k) = y.$$

Lema 2.11. *O intervalo de Gibbs da função ψ definida no Lema 2.2, no ponto $x = 0$ é o conjunto dos y , tais que*

$$|y| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau.$$

Demonstração. Conforme calculado em (2.50), a n -ésima soma parcial da série de Fourier de ψ pode ser expressada como

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{sen } \frac{k\pi x}{L}.$$

Utilizando a integral abaixo, e calculando-a através do método de substituição de variáveis,

$$\int_0^x \cos \frac{k\pi t}{L} dt = \frac{L}{k\pi} \int_0^{k\pi x/L} \cos u du = \frac{L}{k\pi} \text{sen } u \Big|_0^{k\pi x/L} = \frac{L}{k\pi} \text{sen } \frac{k\pi x}{L},$$

podemos reescrever a expressão de s_n como

$$s_n(x) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \int_0^x \cos \frac{k\pi t}{L} dt.$$

Usando a expressão do núcleo de Dirichlet dada por (2.12), temos

$$\begin{aligned} \int_0^x D_n(t) dt &= \int_0^x \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi t}{L} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{2L} dt + \int_0^x \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi t}{L} dt = \\ &= \frac{x}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \int_0^x \cos \frac{k\pi t}{L} dt. \end{aligned}$$

Então, podemos reescrever $s_n(x)$ como

$$s_n(x) = \int_0^x D_n(t) dt - \frac{x}{2L}.$$

Usando a expressão (2.13) da propriedade vi) do núcleo de Dirichlet, teremos

$$s_n(x) = \int_0^x \frac{1}{2L} \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{\text{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt - \frac{x}{2L} = \frac{1}{2L} \int_0^x \frac{\frac{\pi t}{2L} \text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{\text{sen} \frac{\pi t}{2L} \frac{\pi t}{2L}} dt - \frac{x}{2L}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2L} \int_0^x \left(1 + \frac{\frac{\pi t}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - 1 \right) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{\frac{\pi t}{2L}} dt - \frac{x}{2L} \\
&= \frac{1}{2L} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{\frac{\pi t}{2L}} dt + \frac{1}{2L} \int_0^x \left(\frac{\frac{\pi t}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - 1 \right) \frac{\operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{\frac{\pi t}{2L}} dt - \frac{x}{2L} = \\
&\frac{1}{2L} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{\frac{\pi t}{2L}} dt + \frac{1}{2L} \int_0^x \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{L}} \right) \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] dt - \frac{x}{2L}. \quad (2.113)
\end{aligned}$$

Analisaremos os comportamentos das integrais acima quando $x \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$. Para a última integral, definamos a função

$$g(t) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{L}}, \quad (2.114)$$

Como visto na demonstração do Teorema 18, a função g é contínua em $0 < |t| < L$ e $g(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Mostraremos que o integrando da segunda integral em (2.113) tende a zero quando $x \rightarrow 0$, uniformemente em n .

Para provar tal informação, tomaremos um t de forma que $0 < t \leq x$. O fato de que

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$$

implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{L}} \right| < \varepsilon.$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, para todo t cumprindo a condição $0 < |t| < \delta$, teremos

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{L}} \right) \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \right| = \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{L}} \right| \left| \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \right| \\
&< \varepsilon \left| \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \right|,
\end{aligned}$$

e daí, pela limitação da função seno, temos

$$\left| \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{L}} \right) \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \right| < \varepsilon,$$

mostrando que o integrando converge uniformemente para zero, para todo t que satisfaça a condição dada e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para a primeira integral, usando substituição de variáveis, com

$$\tau = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \quad \text{e} \quad d\tau = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} dt.$$

Então,

$$\frac{1}{2L} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right]}{\frac{\pi t}{2L}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{[n+(1/2)]\pi x/L} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} d\tau.$$

Para prosseguiremos, façamos a seguinte observação, que pode ser facilmente verificada:

Observação 6. Dado α , $-\infty \leq \alpha \leq \infty$, existirá uma sucessão $x_n \rightarrow 0$ tal que

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x_n}{L} \rightarrow \alpha.$$

De fato, basta tomar a sucessão $x_n = \frac{L\alpha}{(n+\frac{1}{2})\pi}$, e a demonstração é imediata.

Usando esta observação, podemos concluir que, para a sucessão (x_n) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau. \quad (2.115)$$

A título de curiosidade, a integral presente em (2.115) define a função

$$\text{Si}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau$$

é conhecida como a função **seno-integral**, muito importante no estudo da transformada de Fourier e outras aplicações.

É imediato que a função $\text{Si}(\alpha)$ é uma função ímpar. De fato, sendo

$$\text{Si}(-\alpha) = \int_0^{-\alpha} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau,$$

usando substituição de variáveis, ponto $u = -\tau$ ($du = -d\tau$, e pelo fato da função seno ser ímpar, teremos

$$\begin{aligned} \text{Si}(-\alpha) &= \int_0^{-\alpha} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau = \int_0^\alpha -\frac{\text{sen}(-u)}{-u} du = - \int_0^\alpha \frac{-\text{sen } u}{-u} du = \\ &= - \int_0^\alpha \frac{\text{sen } u}{u} du = -\text{Si}(\alpha), \end{aligned}$$

mostrando que a função é ímpar.

Tomando

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{Si}(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau$$

teremos a expressão conhecida como **integral de Dirichlet**, cujo valor apresenta um resultado interessante: $\frac{\pi}{2}$.

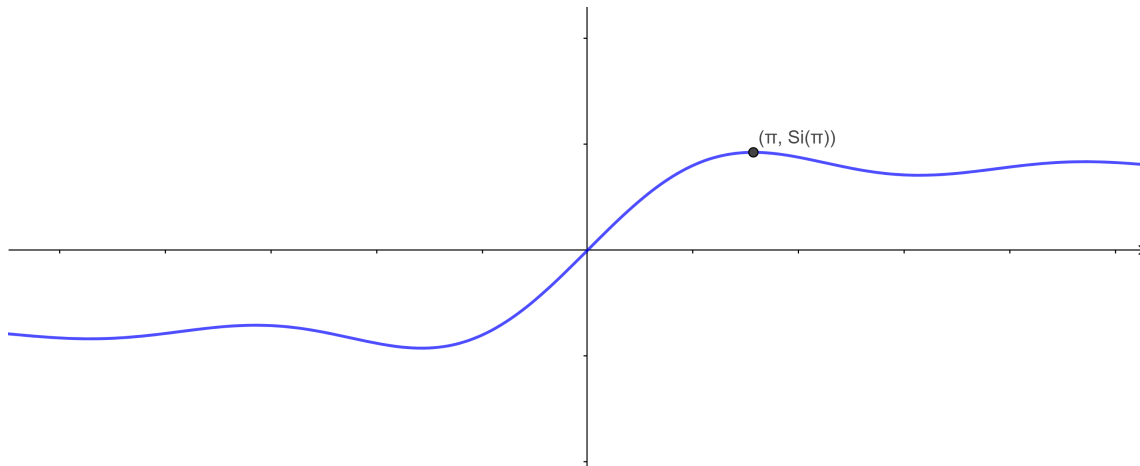


Figura 2.8: A função seno-integral e seu ponto de máximo global.

Observando o gráfico da função $(\sin \tau)/\tau$ e interpretando-a como a primeira derivada da função $\text{Si}(\alpha)$, encontraremos seu ponto de máximo global, e veremos que o valor máximo da função ocorre em $\alpha = \pi$.

Para isso, utilizaremos o lema enunciado abaixo. Antes, façamos uma definição:

Definição 16. Partição pontilhada: *partilhar uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ é escolher, em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, com $i = 1, \dots, n$, um ponto ξ_i . Portanto, $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$.*

Lema 2.12. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Dada uma sequência (P_n^*) de partições pontilhadas, com $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n^*| = 0$, resulta que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum(f; P_n^*)$.*

Demonstração: Pelos resultados clássicos de Análise referente à integrais, temos que, para qualquer partição pontilhada P_n^* ,

$$s(f; P_n) \leq \sum(f; P_n^*) \leq S(f; P_n) \quad (2.116)$$

onde s e S denotam, respectivamente, as somas inferiores e superiores da função f em relação à partição P_n , e $\sum(f; P_n^*)$ a soma de Riemann de f em relação à mesma partição pontilhada. Além disso, temos que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} s(f; P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P) = \int_a^b f(x)dx, \quad (2.117)$$

para qualquer partição P , com $|P|$ denotando a norma da partição.

Daí, sendo P_n e P_n^* sequências de partições (e seus respectivos pontilhamentos) com os mesmos subintervalos de partição, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n^*| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n| = 0$ (ou seja, a norma das partições da sequência (P_n^*) tendem a zero quando n tende a infinito). Passando o limite com $n \rightarrow \infty$ em (2.116) e o resultado em (2.117), teremos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum(f; P_n^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Pelo teorema do confronto, demonstramos que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum(f; P_n^*).$$

□

Para a demonstração do ponto máximo global da função seno-integral, primeiramente notemos que os pontos críticos da função

$$\text{Si}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau$$

são os pontos nos quais sua derivada se anula, ou seja,

$$\frac{\text{sen } \tau}{\tau} = 0.$$

Estes pontos são da forma $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

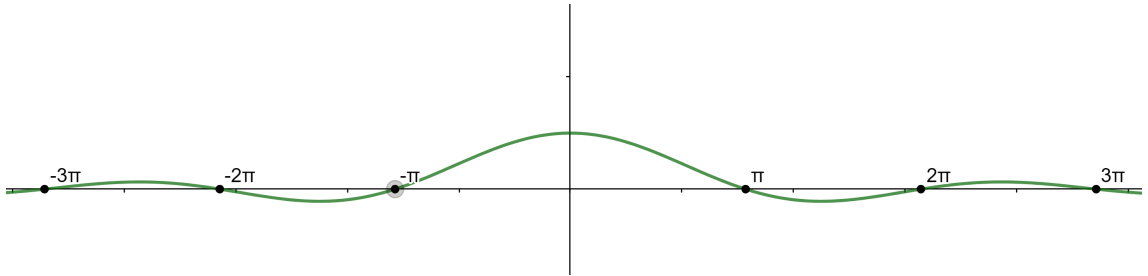


Figura 2.9: A função $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ e os pontos críticos da função seno-integral.

Para analisar se $\alpha = 0$ é ponto crítico da função seno-integral, calculemos a derivada nesse ponto usando a definição de limite. Teremos

$$\text{Si}'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{Si}(\alpha) - \text{Si}(0)}{\alpha - 0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau - \int_0^0 \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau}{\alpha}.$$

Pela continuidade da integral, temos

$$\text{Si}'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau}{\alpha} = \frac{\int_0^0 \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau}{0}.$$

Pela indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ encontrada, usaremos a regra de l'Hôpital, obtendo, da expressão acima,

$$\text{Si}'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau \right)}{\frac{d}{d\alpha}(\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = 1,$$

mostrando que $\alpha = 0$ não é ponto crítico da função.

Por simplicidade (e pelo fato da função ser ímpar), consideraremos $k > 0$. Para analisarmos se tais pontos críticos são de máximo ou mínimo local, utilizemos a segunda derivada da função seno-integral (equivalente à primeira derivada do integrando $\frac{\text{sen } \tau}{\tau}$), de forma que, pela regra do quociente, teremos

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\text{sen } \tau}{\tau} \right) = \frac{\cos(\tau)\tau - \text{sen}(\tau)}{\tau^2} = \frac{\cos \tau}{\tau} - \frac{\text{sen } \tau}{\tau^2}$$

Para os pontos da forma $k\pi$, com k ímpar, teremos

$$\frac{\cos k\pi}{k\pi} - \frac{\operatorname{sen} k\pi}{k^2\pi^2} = \frac{-1}{k\pi},$$

e esses pontos serão de máximo local. Analogamente, para k par, teremos

$$\frac{\cos k\pi}{k\pi} - \frac{\operatorname{sen} k\pi}{k^2\pi^2} = \frac{1}{k\pi},$$

e estes serão de mínimo local.

Tomemos um intervalo da forma $[k\pi, (k+2)\pi]$, com k ímpar. Para τ pertencente aos intervalos da forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, temos que

$$\operatorname{sen} \tau < 0.$$

Tomando $\tau > 0$ teremos, para $\tau \in (k\pi, (k+1)\pi)$

$$\frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} < 0.$$

Utilizando o mesmo raciocínio, pela positividade da função seno nos intervalos da forma $((k+1)\pi, (k+2)\pi)$ teremos, para um τ pertencente a este intervalo,

$$\frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} > 0.$$

Consideramos os intervalos da forma $[k\pi, (k+2)\pi]$ tais que $k\pi > 0$. Como a função $\frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau}$ é integrável, podemos utilizar o Lema 2.12, construindo uma sequência de partições da forma

$$P_n = \left\{ k\pi, \left(k + \frac{1}{n}\right)\pi, \left(k + \frac{2}{n}\right)\pi, \dots, \left(k + \frac{n}{n}\right)\pi, \right. \\ \left. \left(k + \frac{n+1}{n}\right)\pi, \left(k + \frac{n+2}{n}\right)\pi, \dots, \left(k + \frac{2n}{n}\right)\pi \right\}$$

Pela construção, cada intervalo da partição P_n tem comprimento igual a $\frac{\pi}{n}$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0.$$

Toda partição P_n possuirá fixos os pontos dos extremos $(k\pi$ e $(k+2)\pi)$ e o ponto médio do intervalo $((k+1)\pi)$.

Uma observação interessante é que da forma que construímos a sequência das partições, para $n \geq 2$, para cada ponto $\left(k + \frac{j}{n}\right)\pi \in (k\pi, (k+1)\pi)$, com $1 \leq j \leq n-1$, é feita uma translação de comprimento π , obtendo os pontos da forma $\left(k + \frac{n+j}{n}\right)\pi \in ((k+1)\pi, (k+2)\pi)$.

Consideraremos a partir de agora, sem perda de generalidade, as partições de nossa sequência (P_n) com $n \geq 2$. Pontilhemos a partição P_n da seguinte forma: para cada subintervalo da forma

$$\left[\left(k + \frac{i-1}{n}\right)\pi, \left(k + \frac{i}{n}\right)\pi \right],$$

com $1 \leq i \leq 2n$, escolheremos os pontos $\xi_i = \left(k + \frac{i}{n}\right)\pi$. Pela observação anterior, temos que os pontos da forma ξ_{n+r} , com $1 \leq r \leq n$ são obtidos fazendo

$$\xi_r + \pi = \xi_{n+r},$$

Por facilidade de notação, chamaremos $n+r = s$. Daí, $\xi_r + \pi = \xi_s$.

Lembrando da propriedade trigonométrica, de que $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}(x)$, teremos, para $1 \leq r \leq n$ e $n+1 \leq s \leq 2n$, com $s = n+r$,

$$\text{sen}(\xi_s) = \text{sen}(\xi_r + \pi) = -\text{sen}(\xi_r). \quad (2.118)$$

Para todo $r \neq n$, a construção da nossa partição faz com que os pontos da forma ξ_r pertençam aos intervalos da forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, com k ímpar, e teremos

$$\text{sen}(\xi_r) < 0.$$

De forma análoga, observamos que $\text{sen}(\xi_s) > 0$, para todo $s \neq 2n$ (nos casos dos pontos ξ_n e ξ_{2n} , $\text{sen}(\xi_n) = \text{sen}(\xi_{2n}) = 0$).

Além disso, como $\xi_r < \xi_s = \xi_r + \pi$, temos

$$\frac{1}{\xi_s} < \frac{1}{\xi_r}.$$

Como vimos que $\text{sen}(\xi_s) > 0$, para todo $s \neq 2n$, e usando (2.118), temos, para todo $r \neq n, s \neq 2n$ definidos anteriormente,

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(\xi_s)}{\xi_s} < \frac{\text{sen}(\xi_r)}{\xi_r} &\Rightarrow \frac{\text{sen}(\xi_s)}{\xi_s} < \frac{-\text{sen}(\xi_r)}{\xi_r} \\ \Rightarrow \frac{\text{sen}(\xi_r)}{\xi_r} + \frac{\text{sen}(\xi_s)}{\xi_s} < \frac{\text{sen}(\xi_r)}{\xi_r} + \frac{-\text{sen}(\xi_r)}{\xi_r} &\Rightarrow \frac{\text{sen}(\xi_r)}{\xi_r} + \frac{\text{sen}(\xi_{n+r})}{\xi_{n+r}} < 0. \end{aligned}$$

Agora, usando a soma de Riemann para a partição pontilhada construída, e usando o resultado demonstrado anteriormente, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} \frac{\text{sen} \xi_i}{\xi_i} \cdot \frac{\pi}{n} &= \sum_{r=1}^n \frac{\text{sen} \xi_r}{\xi_r} \cdot \frac{\pi}{n} + \sum_{s=n+1}^{2n} \frac{\text{sen} \xi_s}{\xi_s} \cdot \frac{\pi}{n} \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\frac{\text{sen} \xi_r}{\xi_r} + \frac{\text{sen} \xi_{n+r}}{\xi_{n+r}} \right) \cdot \frac{\pi}{n} < 0. \end{aligned}$$

Notemos que, na última passagem, usamos o fato de que, para cada r fixado, teremos $s = n+r$.

A desigualdade é válida para qualquer partição pontilhada do intervalo da forma $[k\pi, (k+2)\pi]$ da sequência construída. Denotando

$$\sum (f; P_n^*) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\text{sen} \xi_i}{\xi_i} \cdot \frac{\pi}{n},$$

e então, usando novamente o Lema 2.12, temos para todo $k \in \mathbb{N}$ e ímpar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum (f; P_n^*) = \int_{k\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau < 0. \quad (2.119)$$

Observação: o fato de termos tomados as partições P_n^* com $n \geq 2$ se justifica pelo fato de que, para P_1^* , usando a observação demonstrada anteriormente de que $\text{sen}(\xi_1) = \text{sen}(\xi_n) = \text{sen}(\xi_{2n}) = \text{sen}(\xi_2) = 0$, teremos

$$\sum (f; P_1^*) = \sum_{i=1}^2 \frac{\text{sen } \xi_i}{\xi_i} \cdot \frac{\pi}{1} = \frac{\text{sen } \xi_1}{\xi_1} \cdot \pi + \frac{\text{sen } \xi_2}{\xi_2} \cdot \pi = 0.$$

Além disso, como nos interessamos nas partições P_n em que $n \rightarrow \infty$, podemos tomar, sem perda de generalidade, $n \geq 2$.

Conforme demonstrado anteriormente, os pontos de máximo local da função seno-integral são os da forma $(2n+1)\pi$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para $n \neq 0$, teremos

$$\begin{aligned} \text{Si}((2n+1)\pi) &= \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau \\ &= \int_0^\pi \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau + \int_\pi^{3\pi} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau + \dots + \int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau < \int_0^\pi \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau = \text{Si}(\pi), \end{aligned}$$

e mostramos, de fato, que dentre os pontos de máximo local da função seno-integral, o ponto em que a função assume seu valor máximo é no ponto $\alpha = \pi$, sendo este o ponto de máximo global. Notemos que, na última desigualdade, usamos o resultado encontrado em (2.119).

Dando continuidade à demonstração, por (2.115), segue que o intervalo de Gibbs contém o intervalo

$$I = \left[-\frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi), \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) \right] \cong [-0,5445, 0,5445].$$

Para a conclusão da demonstração, usando a Observação 6, observemos que, dado um ponto y pertencente ao intervalo de Gibbs, existe α tal que

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \text{Si}(\alpha),$$

como queríamos demonstrar. \square

Observemos que o comprimento do intervalo de Gibbs para a função ψ no ponto $x = 0$ é igual a 1,089. Como o pulo de descontinuidade da função ψ no ponto $x = 0$ é igual ao valor 1, isto mostra que as aproximações por séries de Fourier ultrapassam cerca de 9% da função ψ na vizinhança deste ponto.

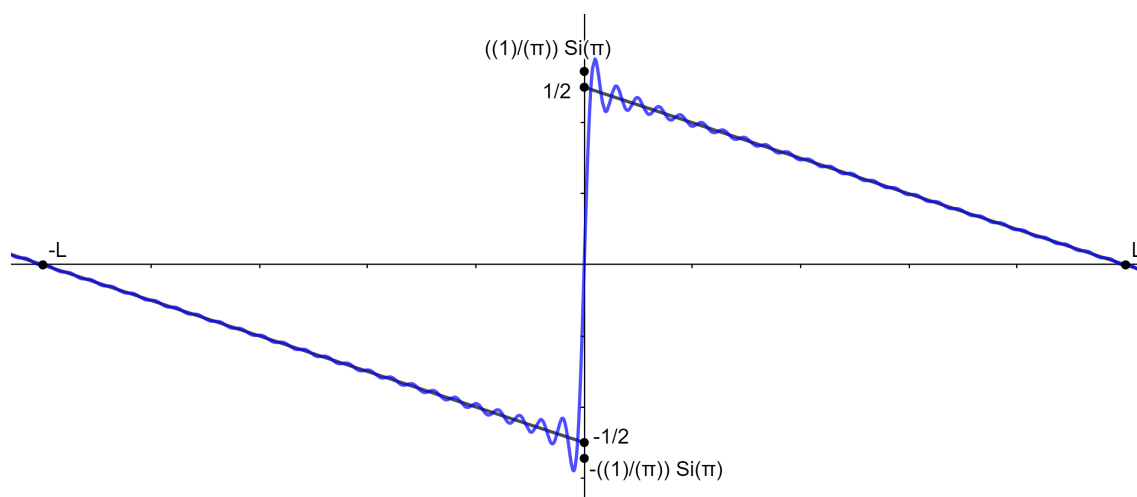


Figura 2.10: O fenômeno de Gibbs.

Teorema 23. *Seja f uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua, com derivada primeira integrável e absolutamente integrável. Então, o intervalo de Gibbs de f no ponto de descontinuidade ξ é o conjunto dos y tais que*

$$\left| y - \frac{f(\xi + 0) + f(\xi - 0)}{2} \right| \leq \frac{\omega}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau,$$

onde $\omega = |f(\xi + 0) - f(\xi - 0)|$ é o salto de f no ponto ξ .

Demonstração. Observemos que a função

$$g(x) = f(x) - [f(\xi + 0) + f(\xi - 0)]\psi(x - \xi)$$

é contínua nas vizinhanças de ξ . Como a série de Fourier de g converge uniformemente nesse intervalo, então o intervalo de Gibbs de f é o mesmo da função $\omega\psi$, completando o resultado. \square

3 A corda vibrante

O problema consiste em estudar o movimento de uma corda fixada em suas extremidades e que possa vibrar livremente. Podemos pensar em um sistema físico como as cordas de um instrumento musical (um violão, por exemplo). Descrevamos brevemente alguns fenômenos físicos que serão a base de nosso estudo. São eles:

- o movimento harmônico simples,
- ondas transversais e longitudinais,
- harmônicos e sobreposição de tons.

Entender esses fatos empíricos observados nesses fenômenos motivará a abordagem matemática das cordas vibrantes.

3.1 O movimento harmônico simples

O movimento harmônico simples descreve o comportamento do sistema oscilatório mais básico (o oscilador harmônico simples), e é uma introdução natural do estudo das vibrações. Consideremos uma massa m acoplada a uma mola horizontal, e esta acoplada a uma parede fixa. Assumiremos também que o sistema está sobre uma superfície sem fricção.

Escolheremos um eixo cuja origem coincida com o centro da massa em seu repouso (ou seja, a mola não está nem esticada nem comprimida). Quando a massa é deslocada de seu estado inicial de equilíbrio e solta, inicia-se o **movimento harmônico simples**. Tal movimento poderá ser descrito matematicamente, assim que encontrarmos a equação diferencial que o descreve.

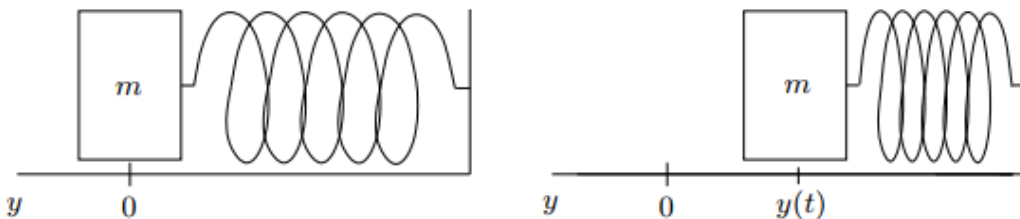


Figura 3.1: O oscilador harmônico simples.

Seja $y(t)$ a função que descreve o movimento da massa em um tempo t . Assumiremos que a mola é ideal, ou seja, que satisfaça a lei de Hooke: a força restauradora

F exercida pela mola é dada por $F = -ky(t)$. A constante $k > 0$ é uma quantidade física chamada de *constante da mola*. Aplicando a lei de Newton (força = massa \times aceleração), obtemos

$$-ky(t) = my''(t),$$

onde a notação y'' denota a segunda derivada de y em relação a t . Pondo $c = \sqrt{k/m}$, a equação diferencial de segunda ordem se torna

$$y''(t) + c^2y(t) = 0. \quad (3.1)$$

A solução geral de (3.1) é dada por

$$y(t) = a \cos ct + b \operatorname{sen} ct,$$

onde a e b são constantes (maiores detalhes sobre essa solução podem ser encontrados em G. F. Simmons. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. 2ª ed. New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991).

Na expressão de $y(t)$, a quantidade c é dada (pois depende da massa e do coeficiente de mola), mas a e b podem ser quaisquer números reais. Para determinar uma solução particular da equação, devemos impor duas condições iniciais para determinar as constantes desconhecidas a e b . Por exemplo, se forem dados $y(0)$ e $y'(0)$, ou seja, a posição e velocidade inicial da massa, então a solução do problema físico será única e dada por

$$y(t) = y(0) \cos ct + \frac{y'(0)}{c} \operatorname{sen} ct.$$

É possível verificar também que existem constantes $A > 0$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ tais que

$$a \cos ct + b \operatorname{sen} ct = A \cos(ct - \varphi).$$

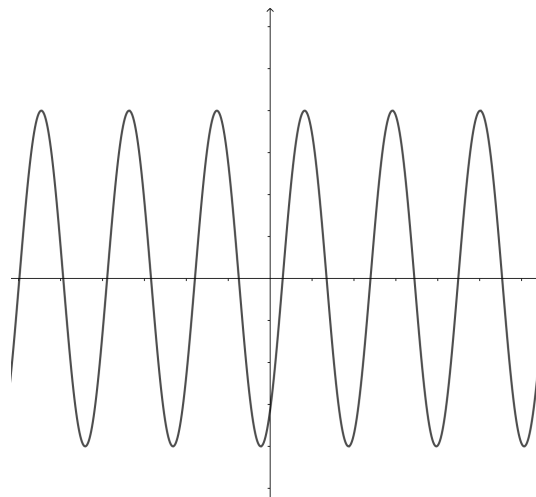


Figura 3.2: Gráfico da função $A \cos(ct - \varphi)$.

Pela interpretação física dada acima, a constante $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ é chamada de *amplitude* do movimento, c é sua *frequência natural*, φ sua *fase* (unicamente determinada por um múltiplo inteiro de 2π), e $2\pi/c$ o *período* do movimento.

Dois observações importantes: a descrição matemática de muitos dos sistemas oscilatórios elementares (ou seja, os movimentos harmônicos simples) envolve as funções trigonométricas mais básicas, $\cos t$ e $\sin t$. Além disso, a conexão entre essas funções e os números complexos, em especial a identidade de Euler, $e^{it} = \cos t + i \sin t$, é de extrema importância no estudo desses fenômenos. A outra é que o movimento harmônico simples é expresso como uma função em relação ao tempo e com duas condições iniciais, uma determinando sua posição, e outra a velocidade (especificadas, por exemplo, no tempo $t = 0$). Essa propriedade também é presente em diversos outros sistemas oscilatórios mais gerais.

3.2 Ondas transversais e longitudinais

A corda vibrante pode ser interpretada como o movimento de uma onda unidimensional. Descreveremos dois tipos de movimentos, que podem ser representados por uma interpretação gráfica simples.

- Primeiro, consideraremos as **ondas transversais**. Nelas, existe um perfil inicial $y = \varphi(x)$ que representa a onda no tempo $t = 0$, e um fator de amplificação $\psi(t)$, em função de t , de forma que $y = u(x, t)$, com

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t).$$

A evolução desta forma de onda no decorrer do tempo pode ser vista conforme gráfico abaixo.

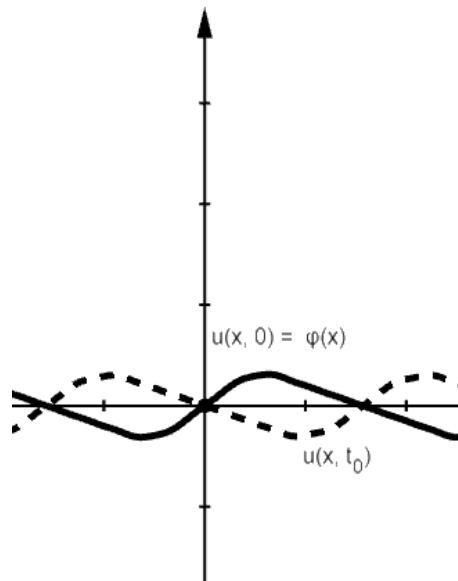


Figura 3.3: Uma onda transversal em diferentes momentos: $t = 0$ e $t = t_0$.

- Um segundo tipo de movimento de onda, comumente observado na natureza, é o das **ondas longitudinais**. Sua descrição é simples: existe um perfil inicial $F(x)$ de forma que $u(x, t) = F(x)$ quando $t = 0$. A medida que t passa, esse perfil é deslocado para a direita por ct unidades, quando c é uma constante positiva. Isto é

$$u(x, t) = F(x - ct).$$

Tal movimento também pode ser representado graficamente, conforme figura abaixo.

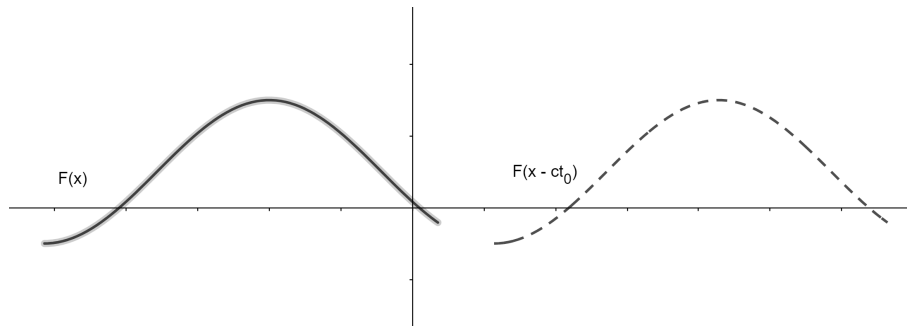


Figura 3.4: Uma onda longitudinal em dois momentos diferentes: $t = 0$ e $t = t_0$.

Como o movimento em t está em uma taxa c , essa constante representa a **velocidade** da onda.

3.3 Harmônicos e a sobreposição de tons

Façamos uma última observação física, que exploraremos com maiores detalhes posteriormente, sobre o sistema estudado. Esta observação é conhecida por músicos há muito tempo (na realidade, Pitágoras foi o “responsável” por descobrir tal conceito): a existência dos harmônicos (também chamados de *overtones*). Os **tons puros** (também chamado de fundamentais) são acompanhados pelos **harmônicos**, que são os principais responsáveis pela construção do timbre (propriedade que permite reconhecer e diferenciar os sons) de um instrumento. A ideia de combinação e sobreposição de tons é explicada matematicamente pelo conceito básico de linearidade.

Daremos ênfase ao nosso objetivo principal, entender e descrever o movimento da corda vibrante. Para isso, derivaremos a equação de onda, a equação diferencial parcial que governa o movimento da corda.

3.4 Derivando a equação da onda

Imaginemos uma corda homogênea localizada em um plano bidimensional, com coordenadas (x, y) , esticada ao longo do eixo- x entre os pontos $x = 0$ e $x = L$. Se estimularmos a vibração dessa corda, seu deslocamento $y = u(x, t)$ será uma função de x e t , e nosso objetivo será derivar a equação diferencial que determina essa função.

Para este propósito, analisaremos primeiro este problema de forma discreta. Consideremos que a corda seja dividida em um grande número N de massas (que podemos

pensar como partículas individuais), distribuídas uniformemente pelo eixo- x , de forma que a n -ésima massa tenha sua coordenada no eixo- x igual a $x_n = nL/N$. Desta forma, consideraremos que a corda vibrante será um sistema complexo de N partículas, cada uma delas oscilando *apenas na direção vertical*; no entanto, ao contrário do oscilador harmônico simples, cada uma destas partículas terá sua oscilação conectada à partícula vizinha imediata, pela tensão da corda.

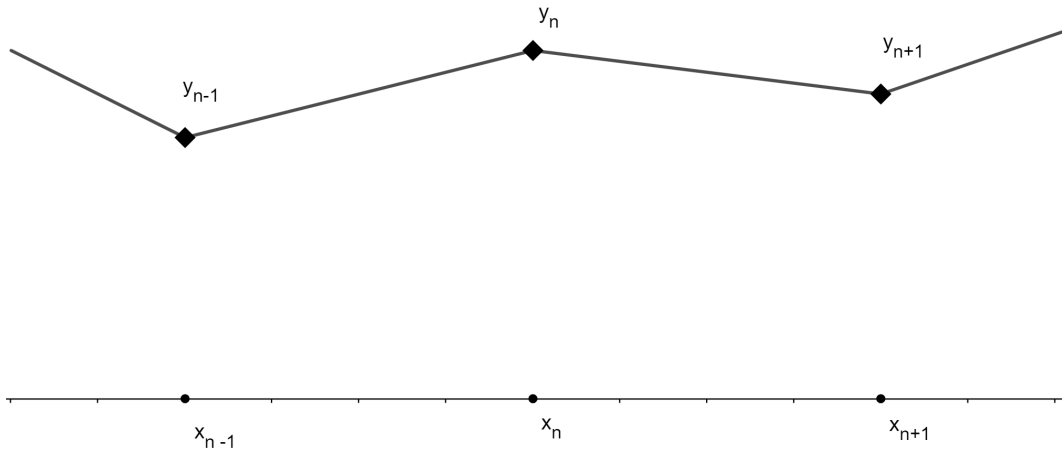


Figura 3.5: Uma corda vibrante representada como um sistema discreto de massas.

Definamos a posição de cada partícula em relação ao tempo pela função $y_n(t) = u(x_n, t)$, e denotemos $x_{n+1} - x_n = h$, com $h = L/N$. Assumindo que a corda tenha uma densidade constante $\rho > 0$. É razoável que representemos a massa de cada partícula como ρh . Pela lei de Newton, a força atuante em cada n -ésima partícula será igual a $\rho h y_n''(t)$.

Façamos agora a simples afirmação de que a força atuante é decorrente do efeito das duas partículas mais próximas, aquelas com as coordenadas x_{n-1} e x_{n+1} . Podemos assumir também que a força (ou tensão) proveniente da região à direita da n -ésima partícula é proporcional a $(y_{n+1} - y_n)/h$, onde h é a distância entre x_{n+1} e x_n . Desta forma, podemos representar a tensão como

$$\left(\frac{\tau}{h}\right)(y_{n+1} - y_n),$$

onde $\tau > 0$ é o coeficiente de tensão da corda.

Analogamente, existe uma força similar proveniente do sentido à esquerda, representada por

$$\left(\frac{\tau}{h}\right)(y_{n-1} - y_n).$$

Ao adicionar essas forças, obtemos a relação desejada entre os osciladores $y_n(t)$, expressando-as como

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h} \{y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)\}. \quad (3.2)$$

Por outro lado, usando a notação escolhida anteriormente, notamos que

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t) = u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t). \quad (3.3)$$

Por definição, para uma função $F(x)$ que possua segundas derivadas contínuas, temos que

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \rightarrow F''(x),$$

quando $h \rightarrow 0$.

Dividamos a expressão em (3.2) por h , de forma que, usando (3.3), tenhamos

$$\begin{aligned} \rho y_n''(t) &= \tau \frac{y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)}{h^2} \\ &= \tau \frac{u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t)}{h^2} \end{aligned}$$

Fazendo agora h tender a zero (ou seja, o número N de partículas tender a infinito), a expressão pode ser escrita como

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Tomando $c = \sqrt{\tau/\rho}$, podemos reescrever como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Essa relação é conhecida como **equação da onda unidimensional**, ou mais simplesmente, **equação da onda**. Veremos, oportunamente, que o coeficiente $c > 0$ é chamado de **velocidade** do movimento.

Associado a esta equação diferencial, introduziremos um observação simples, mas de grande importância: o ato de **escalar**, ou em linguagem física, *mudança de unidades*. Isto significa que podemos pensar na coordenada x como $x = aX$, onde a é uma constante positiva apropriada. Desta maneira, o intervalo $0 \leq x \leq L$ se torna $0 \leq X \leq L/a$. Semelhantemente, podemos alterar a unidade t por $t = bT$, onde b também é uma constante positiva. Pondo $U(X, T) = u(x, t)$, pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial U}{\partial X} = a \frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

De forma semelhante, podemos fazer isso para a variável t . Escolhendo a e b adequadamente, a equação da onda unidimensional é expressa por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2},$$

que possui a propriedade de que a velocidade c é igual a 1. Além disso, podemos transformar o intervalo $0 \leq x \leq L$ no intervalo $0 \leq X \leq \pi$ (esta escolha pode se mostrar conveniente na resolução de alguns problemas). Isto pode ser feito tomando $a = L/\pi$ e $b = L/(c\pi)$. Resolvendo a equação dessa forma, podemos voltar à equação original, fazendo a mudança inversa de variáveis. Desta forma, não perdemos generalidade se pensarmos na equação da onda em um intervalo $[0, \pi]$ e velocidade $c = 1$.

3.5 Solução para a equação da onda

Tendo derivado a equação da corda vibrante, explanaremos dois métodos de resolução:

- usando ondas longitudinais,
- usando a superposição de ondas transversais.

O primeiro método se mostra simples e elegante, mas não nos traz um discernimento completo do problema. Já o segundo método o faz, e possui maior abrangência de aplicação. Acreditava-se, primeiramente, que o segundo método só era possível em casos mais simples, onde a posição inicial e velocidade da corda eram dadas como superposições de ondas transversais. No entanto, como consequência das ideias de Fourier, provou-se que o problema também funciona com condições iniciais diferentes.

3.6 Ondas longitudinais

Para simplificar, e sem perda de generalidade, assumamos que $c = 1$ e $L = \pi$, de forma que a equação que desejamos resolver se torne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para $0 \leq x \leq \pi$. Observemos que, se F for uma função duas vezes diferenciável, então $u(x, t) = F(x + t)$ e $u(x, t) = F(x - t)$ resolvem a equação da onda (maiores detalhes sobre esta resolução podem ser encontrados em E. M. Stein e R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. 1ª ed. New Jersey: Princeton University Press, 2003). Isto é facilmente verificável pois, pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial F(x + t)}{\partial t} = F'(x + t),$$

e

$$\frac{\partial^2 F(x + t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F(x + t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial F'(x + t)}{\partial t} = F''(x + t).$$

Analogamente, em relação à variável x , encontramos

$$\frac{\partial^2 F(x + t)}{\partial x^2} = F''(x + t),$$

e a igualdade é válida. Para a função $F(x - t)$, temos

$$\frac{\partial F(x - t)}{\partial t} = -F'(x - t),$$

e

$$\frac{\partial^2 F(x - t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F(x - t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial (-F'(x - t))}{\partial t} = F''(x - t).$$

Para a variável x , temos

$$\frac{\partial F(x - t)}{\partial x} = F'(x - t),$$

e

$$\frac{\partial^2 F(x-t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F(x-t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial F'(x-t)}{\partial x} = F''(x-t),$$

e a igualdade também é verificada. O gráfico da função $u(x, t) = F(x-t)$ no tempo $t = 0$ é simplesmente o gráfico de F . Quando o tempo é igual a $t = 1$, o gráfico de F é transladado para a direita por 1 unidade. Podemos pensar na função $F(x-t)$ como uma onda que “viaja” para a direita com velocidade 1. Semelhantemente, $u(x, t) = F(x+t)$ pode ser pensada como uma onda que viaja para a esquerda, com velocidade constante 1.

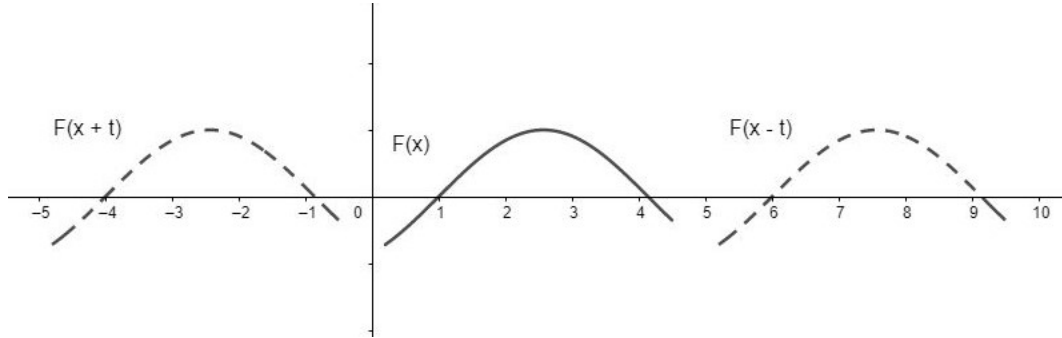


Figura 3.6: Ondas longitudinais em ambas as direções, com $t = 5$.

A breve explanação anterior sobre tons e suas combinações nos conduz à observação de que a equação da onda é **linear**. Isso significa que, se $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são soluções particulares, então $\alpha u(x, t) + \beta v(x, t)$ também é, onde α e β são constantes. Portanto, podemos sobrepor duas ondas, viajando em direções opostas, e encontrar que para funções F e G duas vezes diferenciáveis, então

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$$

é solução da equação da onda. Mostraremos que todas as soluções serão dessa forma.

Deixemos de lado, por um momento, que $0 \leq x \leq \pi$, e suponhamos que u seja uma função duas vezes diferenciável que resolva a equação da onda para todo x e t reais. Consideremos o novo conjunto de variáveis $\xi = x+t$ e $\eta = x-t$, definindo $v(\xi, \eta) = u(x, t)$. Escrevamos

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right).$$

Então, utilizando as fórmulas de mudança de variáveis, teremos

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta).$$

De forma análoga, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta).$$

Analogamente, para as segundas derivadas, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v(\xi, \eta) - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} v(\xi, \eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v(\xi, \eta) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}v(\xi, \eta) + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}v(\xi, \eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}v(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

Como a função $u(x, t)$ é solução da equação de onda, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Subtraindo (3.4) de (3.5), encontramos

$$-4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}v(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}v(\xi, \eta) = 0$$

Isso implica que, integrando duas vezes a relação encontrada, podemos escrever

$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

ou seja

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t),$$

para alguma função F e G .

Conectemos agora esse resultado com nosso problema original: a movimento físico da corda. Impondo novamente as restrições $0 \leq x \leq \pi$, a forma inicial da corda $u(x, 0) = f(x)$ e o fato de que a corda tenha suas extremidades fixas, especificamente, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para usarmos o resultado anterior, estenderemos a função f para toda a reta dos reais, colocando a condição desta ser uma função ímpar no intervalo $[-\pi, \pi]$, periódica na variável x , com período 2π , e de forma que, para todo $t \in \mathbb{R}$, tenhamos $u(x, t) = u(x + 2k\pi, t)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então, a extensão u resolverá a equação da onda para todos os reais, com $u(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como vimos, u pode ser expressa na forma $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$, e considerando $t = 0$, encontramos

$$F(x) + G(x) = f(x).$$

Como diversas escolhas de F e G satisfazem a identidade, podemos impor uma outra condição para u (semelhante às duas condições iniciais no caso do movimento harmônico simples), sendo esta a velocidade inicial da corda, que denotaremos por $g(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

onde $g(0) = g(\pi) = 0$ (pelo fato das extremidades serem fixas). Novamente expandiremos a função g para todos os reais, colocando a condição desta ser uma função ímpar no intervalo $[-\pi, \pi]$, periódica na variável x , com período 2π . Derivando a função u em relação a t , temos

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(F(x + t) + G(x - t)) = F'(x + t) - G'(x - t),$$

e podemos descrever o sistema de equações das condições iniciais

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F'(x) - G'(x) = g(x) \end{cases}$$

Diferenciando a primeira equação do sistema acima teremos

$$F'(x) + G'(x) = f'(x),$$

e somando-a com a segunda equação do sistema, teremos

$$2F'(x) = f'(x) + g(x).$$

Semelhantemente, subtraindo agora a segunda equação, encontramos

$$2G'(x) = f'(x) - g(x).$$

Integrando as duas expressões encontradas acima, teremos

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[f(x) + \int_0^x g(y) dy \right] + C_1$$

e

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[f(x) - \int_0^x g(y) dy \right] + C_2,$$

onde C_1 e C_2 são as constantes de integração. Como $F(x) + G(x) = f(x)$, é imediato, ao somar as expressões acima, que $C_1 + C_2 = 0$, e então a solução final da equação da onda com as condições iniciais terá a forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x+t) + f(x-t) \right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

A forma dessa solução é conhecida como **fórmula de d'Alembert**. Observamos que as extensões escolhidas para as funções f e g garantem que a corda sempre tenha as extremidades fixas, ou seja $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, para todo t .

Como observação final, a passagem de $t \geq 0$ para $t \in \mathbb{R}$, e depois novamente para $t \geq 0$ mostra a propriedade de reversão do tempo para a equação da onda. Em outras palavras, a solução u para a equação da onda, para $t \geq 0$ leva a uma solução u^- definida para um tempo negativo $t < 0$, simplesmente considerando $u^-(x, t) = u(x, -t)$, fato este possível pela invariância da equação da onda pela transformação $t \mapsto -t$. Tal situação não é observada em outros fenômenos físicos, como o da equação do calor.

3.7 Sobreposição de ondas transversais

Voltemos ao segundo método de resolução da equação da onda, que é baseado em duas conclusões fundamentais das observações físicas feitas previamente. Em nossas considerações sobre as ondas transversais, tentaremos chegar a soluções especiais na forma $\varphi(x)\psi(t)$. Esse procedimento, que também funciona bem para outros fenômenos, como o da condução do calor, é chamado de **separação de variáveis**, e proporciona soluções chamadas de *tons puros* ou *fundamentais*. Então, pela linearidade da equação da onda, podemos combinar esses tons puros de forma a obter combinações mais complexas de sons. Ampliando ainda mais essa ideia, podemos expressar a solução geral da equação da onda em termos de somas de soluções desta forma.

Notemos que, na equação da onda, de um lado temos apenas a diferenciação em relação à variável x , enquanto do outro lado apenas à variável t . Essa observação nos

dá uma motivação para procurar soluções da equação na forma $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ (ou seja, separar as variáveis): a de reduzir uma equação diferencial parcial em um sistema de equações diferenciais ordinárias. No caso da equação da onda, sendo u da forma mencionada, teremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t),$$

de forma que

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

É importante observarmos que o termo à esquerda da expressão acima depende apenas de t , enquanto o termo à direita apenas de x . Isso só é possível se ambos os lados da igualdade forem iguais a uma constante, que chamaremos de λ . Teremos, portanto

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \lambda \Rightarrow \psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0$$

e

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda \Rightarrow \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0,$$

e com isso o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0 \\ \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Focaremos primeiramente na resolução da primeira equação do sistema acima. Reconhecemos que sua forma é a mesma que obtemos no estudo do movimento harmônico simples. Notemos também que precisaremos apenas considerar o caso em que $\lambda < 0$, já que quando $\lambda \geq 0$ a solução ψ não sofrerá oscilação a medida que o tempo varia (a justificativa desta escolha pode ser encontrada em Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, op. cit.). Escrevamos $\lambda = -m^2$, e a solução da equação será, analogamente à solução do movimento harmônico simples, da forma

$$\psi(t) = A \cos mt + B \sin mt.$$

De maneira similar, obtemos a solução da segunda equação de (3.6), que será da forma

$$\varphi(x) = \tilde{A} \cos mx + \tilde{B} \sin mx.$$

Usaremos agora o fato de que a corda está fixa nos pontos $x = 0$ e $x = \pi$. Isso significa que $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ para todo t . Teremos, portanto,

$$0 = \varphi(0) = \tilde{A} \cos 0 + \tilde{B} \sin 0 = \tilde{A},$$

ou seja, o coeficiente $\tilde{A} = 0$.

Para $x = \pi$, teremos

$$0 = \varphi(\pi) = \tilde{B} \sin m\pi,$$

e a igualdade ocorre quando $\tilde{B} = 0$ ou $m \in \mathbb{Z}$. Se $m = 0$, a solução será identicamente nula. Para $m \leq -1$, podemos renomear as constantes e reduzir para o caso $m \geq 1$, já

que a função seno é ímpar e a cosseno par. Finalmente, chegamos no resultado de que, para cada $m \geq 1$, a função

$$u_m(x, t) = (A_m \cos mt + B_m \sen mt) \sen mx,$$

que denotaremos como a **onda transversal**, uma solução para a equação da onda. A verificação de que a expressão acima satisfaz a equação parcial é um exercício de diferenciação.

Antes de prosseguir com a análise da equação da onda, façamos uma breve discussão sobre as ondas transversais. Esta terminologia vem de analisar o gráfico da função $u_m(x, t)$, quando t é fixo. Suponhamos que $m = 1$, e que a função $u(x, t) = \cos t \sen x$. A figura abaixo nos mostra o gráfico de u para diversos valores de t .

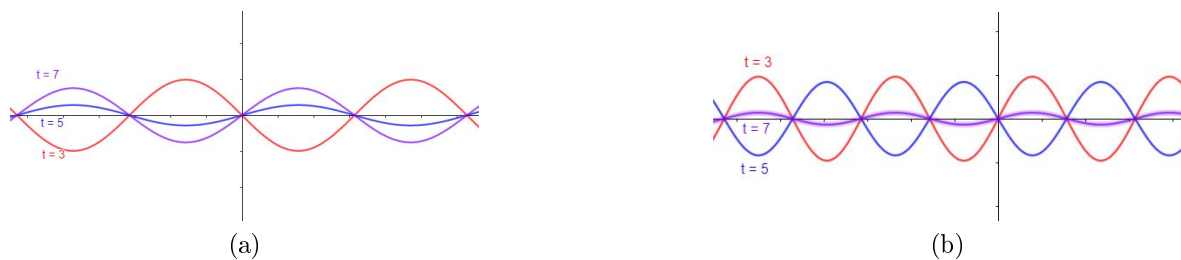


Figura 3.7: O tom fundamental (a) e o primeiro overtone (b) para $t = 3, 5$ e 7 .

O caso em que $m = 1$ corresponde ao **tom fundamental**, também chamado de **primeiro harmônico** da corda vibrante.

Para o caso em que $m = 2$, olharemos para a função $u(x, t) = \cos 2t \sen 2x$. Esta corresponde ao **primeiro overtone** ou ao **segundo harmônico**, e seu movimento é descrito na figura abaixo. Notemos que $u(\pi/2, t) = 0$, para todo t . Estes pontos, que se mantêm sem movimento, são chamados **nós**, enquanto os pontos que se movimentam e atingem a amplitude máxima são chamados de **anti-nós**.

Para maiores valores de m , obtemos mais *overtones* e harmônicos maiores. À medida que m aumenta, a frequência também o faz, e o período $2\pi/m$ se torna cada vez menor. Sendo assim, o tom fundamental é aquele que tem a menor frequência de todos os harmônicos.

Voltemos a nosso problema original. Lembremos que a equação da onda é linear, no sentido de que se u e v são soluções, então $\alpha u + \beta v$ também é, para quaisquer constantes α e β reais. Isso permite que possamos construir mais soluções, tomando combinações das ondas transversais u_m . Essa técnica, conhecida como **sobreposição**, leva-nos a construir uma solução final para a equação da onda, dada por

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sen mt) \sen mx \quad (3.7)$$

Suponhamos que a expressão acima nos dá *todas* as soluções da equação da onda. Colocando as condições iniciais da corda no tempo $t = 0$, sua posição inicial é dada pelo gráfico da função f no intervalo $[0, \pi]$, com extremidades fixas $f(0) = f(\pi) = 0$. Teremos, portanto, $u(x, 0) = f(x)$, e então

$$u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos 0 + B_m \sen 0) \sen mx = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sen mx = f(x).$$

Tais afirmações justificam a necessidade do estudo da convergência e condições necessárias das séries de Fourier. Afinal, sendo uma soma infinita, quais são as condições de convergência. E dada uma função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, com as condições iniciais acima explicitadas, é possível encontrar coeficientes A_m de forma que

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} mx = f(x) \quad (3.8)$$

Como vimos anteriormente, existe uma forma eficiente de calcular tais coeficientes, no caso em que a expressão em (3.8) é válida. Multiplicando ambos os lados da expressão por $\operatorname{sen} nx$ e integrando no intervalo $[0, \pi]$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nxdx &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} mx \right) \operatorname{sen} nxdx = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nxdx = A_n \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato provado anteriormente de que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nxdx = 0,$$

para $m \neq n$ e

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nxdx = \frac{\pi}{2}$$

para $m = n$.

Portanto, o coeficiente A_n , chamado de n -ésimo coeficiente da função seno de Fourier, é dado pela expressão

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nxdx \quad (3.9)$$

É natural questionar-se se é possível expandir tal questão para o intervalo $[-\pi, \pi]$. Se podemos expressar a função f em um intervalo $[0, \pi]$ como uma série de funções seno, essa expressão também é válida no intervalo $[-\pi, \pi]$ se estendermos a função neste intervalo, tornando-a uma função ímpar. Semelhantemente, é natural questionar-se se é possível expressar uma função par, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, como uma série de cossenos, na forma

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx$$

Mais geralmente, se uma função arbitrária F em $[-\pi, \pi]$ pode ser expressa como $f + g$, onde f é uma função ímpar e g par, seria possível expressar F como

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} mx + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx?$$

(podemos tomar, por exemplo, $f(x) = [F(x) - F(-x)]/2$ e $g(x) = [F(x) + F(-x)]/2$. A verificação de que f e g são funções ímpar e par, respectivamente, é imediata).

Usando a identidade de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, a função F pode ser expressa como

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{imx},$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx$$

(a forma de computá-lo é análoga ao procedimento que fizemos com a função seno). O termo a_n é chamado n -ésimo **coeficiente de Fourier** na forma complexa, como vimos no estudo da teoria.

Fourier, ao estudar o fenômeno físico da condução do calor, acreditava que qualquer função F poderia ser representada por uma série de funções trigonométricas, ou seja, que qualquer função é a combinação linear das funções fundamentais $\sin mx$ e $\cos mx$, onde m é um número inteiro. Como visto no estudo da convergência das séries de Fourier, no decorrer da história da Matemática e na evolução dos estudos da Análise, extraordinários matemáticos nos deram as condições necessárias para que uma função F , definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ pudesse ser representada como

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx.$$

Tais estudos e resultados foram de extrema importância no desenvolvimento de novas teorias matemáticas, e no estudo de fenômenos físicos similares.

Retornemos à equação da onda. Para formular o problema corretamente, necessitamos determinar duas condições iniciais, como indicado pelos fenômenos do movimento harmônico simples e das ondas longitudinais. Essas condições relacionam-se à posição inicial e à velocidade da corda. Ou seja, é necessário que a solução u satisfaça a equação diferencial e as duas condições

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

onde f e g são funções predeterminadas. Observemos que tais afirmações são condizentes com a expressão determinada em (3.7), requerendo que as expressões de f e g sejam expressas como

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$$

e pelo fato da g ser expressa como a derivada parcial da solução u em relação a t , quando $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (mB_m \cos mt - mA_m \sin mt) \sin mx, \end{aligned}$$

de forma que

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} (mB_m \cos 0 - mA_m \sin 0) \sin mx$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \operatorname{sen} mx.$$

3.8 A corda dedilhada

Vejam agora o problema da corda dedilhada. Por simplicidade, escolheremos unidades de forma que a corda seja localizada no intervalo $[0, \pi]$, e que satisfaça a equação da onda com $c = 1$. Assumamos que a corda é dedilhada em uma altura h , no ponto p com $0 < p < \pi$, e tenha uma velocidade inicial $g(x) = 0$. Ou seja, a posição inicial é dada pela forma triangular, conforme figura abaixo, e definida pela função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p}, & \text{para } 0 \leq x \leq p \\ \frac{h(\pi-x)}{\pi-p}, & \text{para } p \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

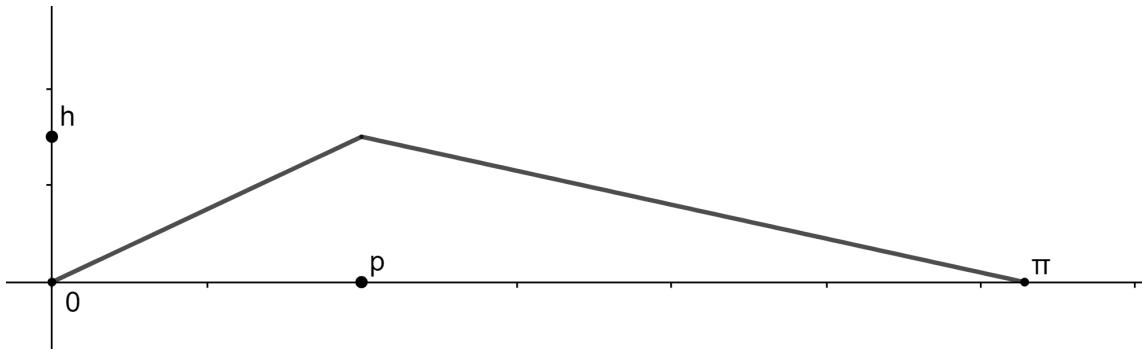


Figura 3.8: Posição inicial da corda dedilhada.

Com isso, podemos calcular os coeficientes de Fourier da função f (assumindo que possa ser determinada conforme a expressão em (3.8)). Inicialmente, dividiremos o intervalo do comprimento de corda nos subintervalos $[0, p]$ e $[p, \pi]$, de forma que, para o primeiro subintervalo

$$\int_0^p f(x) \operatorname{sen} mx dx = \int_0^p \frac{xh}{p} \operatorname{sen} mx dx = \frac{h}{p} \int_0^p x \operatorname{sen} mx dx.$$

Integraremos por partes a função $x \operatorname{sen} mx$, de forma que $\int gh' = gh - \int g'h$, tomando $g = x$ e $h = \frac{-\cos mx}{m}$, teremos $g' = 1$ e $h' = \operatorname{sen} mx$, logo

$$\begin{aligned} \int_0^p x \operatorname{sen} mx dx &= \left. \frac{-x \cos mx}{m} \right|_0^p - \int_0^p \frac{-\cos mx}{m} dx \\ &= \left. \frac{-x \cos mx}{m} \right|_0^p + \int_0^p \frac{\cos mx}{m} dx \end{aligned}$$

Resolvamos agora a integral $\int \frac{\cos mx}{m}$. Usando o método de substituição de variáveis, considerando $u = mx$ e $\frac{du}{dx} = m$ (ou seja, $dx = \frac{1}{m} du$), teremos

$$\begin{aligned} \int_0^p \frac{\cos mx}{m} dx &= \frac{1}{m} \int_0^p \cos mx dx = \frac{1}{m} \int_0^{mp} \frac{\cos u}{m} du \\ &= \frac{1}{m^2} \int_0^{mp} \cos u du = \left. \frac{\operatorname{sen} u}{m^2} \right|_0^{mp} \end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade na anterior, teremos

$$\int_0^p x \operatorname{sen} mx dx = \frac{-x \cos mx}{m} \Big|_0^p + \frac{\operatorname{sen} u}{m^2} \Big|_0^{mp} = \frac{\operatorname{sen} mp}{m^2} - \frac{p \cos mp}{m},$$

de forma que

$$\frac{h}{p} \int_0^p x \operatorname{sen} mx dx = \frac{h}{p} \left(\frac{\operatorname{sen} mp}{m^2} - \frac{p \cos mp}{m} \right) = \frac{h(\operatorname{sen} mp - mp \cos mp)}{m^2 p}.$$

Para o intervalo $[p, \pi]$, teremos

$$\int_p^\pi f(x) \operatorname{sen} mx dx = \int_p^\pi \frac{h(\pi - x)}{\pi - p} \operatorname{sen} mx dx = \frac{-h}{\pi - p} \int_p^\pi (x - \pi) \operatorname{sen} mx dx.$$

Novamente, integrando por partes, tomando $g = x - \pi$, $h = \frac{-\cos mx}{m}$, $g' = 1$ e $h' = \operatorname{sen} mx$, teremos

$$\begin{aligned} \int_p^\pi \frac{h(\pi - x)}{\pi - p} \operatorname{sen} mx dx &= - \frac{(x - \pi) \cos mx}{m} \Big|_p^\pi - \int_p^\pi \frac{-\cos mx}{m} dx \\ &= - \frac{(x - \pi) \cos mx}{m} \Big|_p^\pi + \int_p^\pi \frac{\cos mx}{m} dx \end{aligned}$$

Usando o resultado da integral anterior, temos que

$$\begin{aligned} \int_p^\pi \frac{h(\pi - x)}{\pi - p} \operatorname{sen} mx dx &= - \frac{(x - \pi) \cos mx}{m} \Big|_p^\pi + \frac{\operatorname{sen} u}{m^2} \Big|_{mp}^{m\pi} \\ &= \frac{(p - \pi) \cos mp}{m} + \frac{\operatorname{sen} m\pi}{m^2} - \frac{\operatorname{sen} mp}{m^2} = \frac{(p - \pi) \cos mp}{m} - \frac{\operatorname{sen} mp}{m^2}, \end{aligned}$$

pois $\frac{\operatorname{sen} m\pi}{m^2} = 0$, para todo m inteiro. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{-h}{\pi - p} \int_p^\pi (x - \pi) \operatorname{sen} mx dx &= \frac{-h}{\pi - p} \left(\frac{(p - \pi) \cos mp}{m} - \frac{\operatorname{sen} mp}{m^2} \right) \\ &= \frac{-h}{\pi - p} \left(\frac{m(p - \pi) \cos mp - \operatorname{sen} mp}{m^2} \right) = \frac{hm \cos mp}{m^2} + \frac{h \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2} \end{aligned}$$

Substituindo as integrais computadas em ambos os intervalos, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} mx dx &= \frac{h(\operatorname{sen} mp - mp \cos mp)}{m^2 p} + \frac{h \cos mp}{m^2} + \frac{h \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2} \\ &= \frac{h \operatorname{sen} mp}{m^2 p} - \frac{hmp \cos mp}{m^2 p} + \frac{hm \cos mp}{m^2} + \frac{h \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2} \\ &= \frac{(\pi - p)h \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2 p} + \frac{ph \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2 p} = \frac{\pi h \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2 p}. \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} mx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi h \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2 p} = \frac{2h \operatorname{sen} mp}{(\pi - p)m^2 p},$$

que é o coeficiente de Fourier da função f ,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} mx,$$

e a solução u é expressa como

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mt \operatorname{sen} mx,$$

que converge absolutamente.

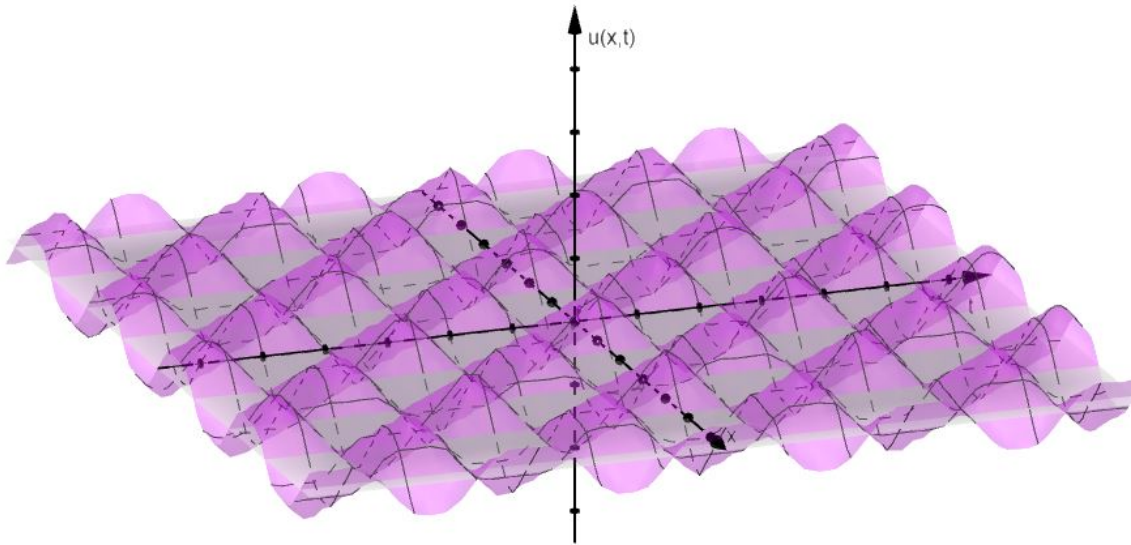


Figura 3.9: Gráfico da função u .

A solução também pode ser expressa na forma de ondas longitudinais:

$$u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Neste caso, f é definida da seguinte forma: é estendida ao intervalo $[-\pi, \pi]$, de forma que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$ (ou seja, a função é ímpar nesse intervalo), e depois estendendo-a a todos os reais, de forma que $f(x + 2k\pi) = f(x)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ (ou seja, tornando-a periódica, de período 2π).

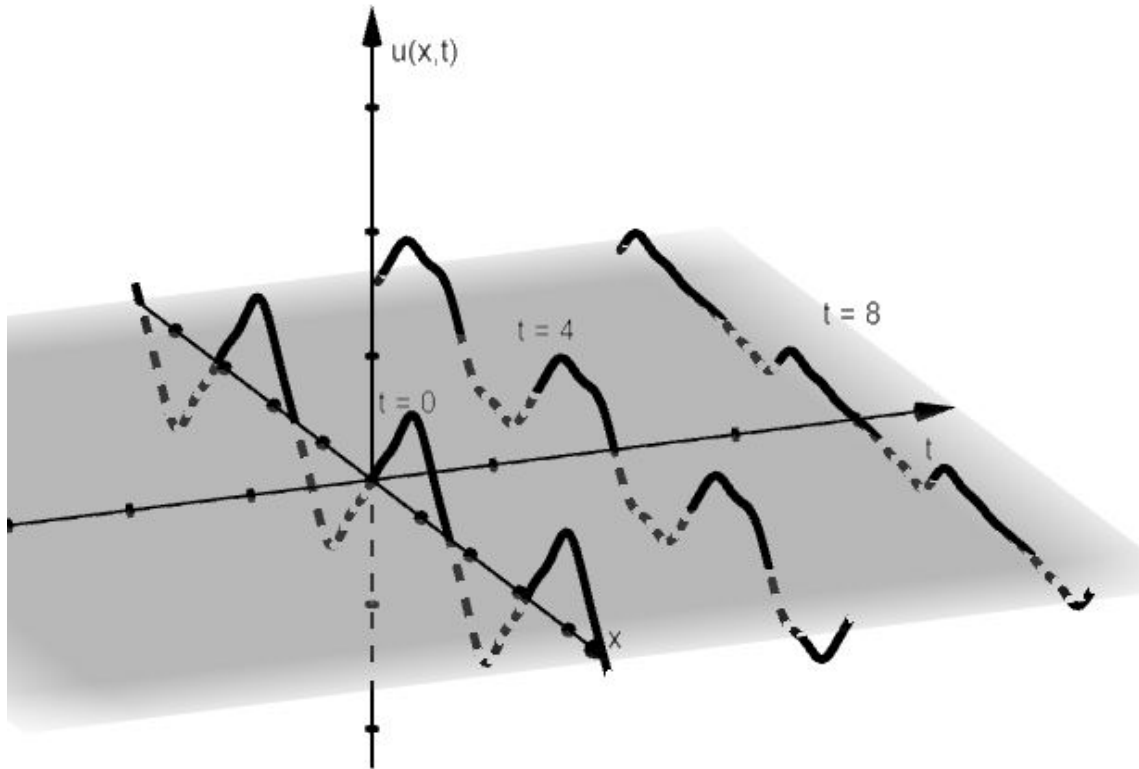


Figura 3.10: Posições da corda dedilhada nos instantes $t = 0$, $t = 4$ e $t = 8$.

Notemos que a expressão acima é obtida utilizando a expressão encontrada para u , e usando a identidade trigonométrica

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)].$$

Como observação complementar e final, notemos que a função inicial $f(x)$ para a corda dedilhada não possui segunda derivada contínua, como também a função u expressa na forma de ondas longitudinais. Dessa forma, u não é efetivamente uma solução da equação da onda, pois não satisfaz a equação diferencial parcial que determina o fenômeno! No entanto, isso é compreendido em uma evolução natural no estudo da Análise, na teoria das “soluções fracas” e das “distribuições”. De forma simplificada, a solução u resolve a equação, mas em um sentido apropriadamente generalizado. Deixamos tal comentário como caráter curioso e motivador para os leitores interessados no desenvolvimento da teoria.

4 O ensino da Trigonometria através do som

A matemática e a música possuem uma relação íntima desde os tempos da antiguidade. As ligações entre as duas ciências são das mais variadas, indo desde as interpretações puramente matemáticas (ou físicas) até as acústicas (ou musicais). Questões como os fundamentos científicos da construção e funcionamento dos instrumentos musicais e as relações harmônicas entre os sons musicais utilizam a modelagem matemática como parte fundamental na organização e entendimento desses conceitos. Além do estudo físico de conceitos como altura, intensidade, duração e timbre do som, tal relação ainda influencia nos estudos psicofísicos relacionados aos estímulos físicos e respostas fisiológicas ligados à percepção do som.

Fazendo uma breve revisão histórica, notamos diversos exemplos e referenciais de pesquisas científicas que utilizam elementos e estruturas matemáticas no estudo da acústica física e fisiológica. Os antigos gregos utilizaram a matemática para entender o som e as relações harmônicas entre as notas musicais, através de experiências com o monocórdio (como veremos mais adiante). Grande parte das regras de harmonia que utilizamos até os dias de hoje vêm das relações descobertas por Pitágoras e seus contemporâneos.

Como visto na introdução deste trabalho, na segunda metade do século XVIII o problema da vibração da corda intrigou grandes nomes da matemática, e seu estudo levou ao desenvolvimento de novas ferramentas, como as séries de Fourier, objeto central de nosso estudo. Em particular, veremos como a Análise de Fourier está diretamente relacionada a uma das quatro propriedades do som: o **timbre**.

Apesar da riqueza histórica relacionando matemática e música, observa-se que pouco deste material é utilizado no desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática. Os livros didáticos mais comumente usados possuem abordagens majoritariamente abstratas, longe da realidade dos estudantes e desconectados de experiências cotidianas, apresentando os conceitos formalmente, muitas das vezes com fórmulas prontas para resolução de problemas clássicos. Tal metodologia de ensino acaba gerando dificuldades na aprendizagem, e trazendo ainda mais desinteresse às disciplinas relacionadas. Com objetivo de mudar positivamente este cenário, alguns estudiosos da educação matemática e física propõem o desenvolvimento de oficinas pedagógicas interdisciplinares, conectando matemática e música.

Dentre alguns destes estudiosos, Abdounur, em seu artigo O. J. Abdounur. “Arquétipos e múltiplas representações: um estudo no âmbito das relações entre matemática e música”. Em: *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES"[S.l.]* 15 (1999), pp. 121–136, propõe a reconstrução de alguns experimentos

históricos, como o monocórdio de Pitágoras, estudar frações através das consonâncias perfeitas, as relações percebidas entre altura e frequência, construções de escalas clássicas, entre outras propostas didáticas. Uma de suas propostas está intimamente ligada ao presente texto: a relação entre as séries de Fourier e as séries harmônicas, fundamentais no desenvolvimento do conceito de timbre.

Há uma riqueza muito grande nas possibilidades de enriquecer o estudo da matemática utilizando como fator motivador as experiências sonoras que os alunos trazem para a sala de aula. Diante desse fato, proporemos uma atividade didática para ser aplicada no ensino das funções trigonométricas para o Ensino Médio. Resumidamente, apresentaremos os principais conceitos físicos e matemáticos relacionados ao som, que possam ser apresentados a alunos do Ensino Médio. Alguns desses conceitos também foram mencionados na seção anterior, porém decidimos abordá-los novamente para que o leitor que “pulou” o trecho anterior não perca esta parte importante do conteúdo. Além disso, a linguagem usada neste momento será muito mais apropriada à aplicação no Ensino Básico. Através de recursos tecnológicos, analisaremos as curvas de timbre de instrumentos musicais, associando a relação entre as séries de Fourier e as séries harmônicas, decompondo ondas sonoras de determinados instrumentos em ondas senoidais através da Transformada Rápida de Fourier (FFT), e recriando o som original do instrumento estudado através de sons digitais. Finalmente, analisando o espectrograma dos sons estudados, identificaremos as frequências e amplitudes de cada onda senoidal, e reconstruiremos graficamente cada onda sonora através das reduzidas das séries de Fourier.

4.1 O que é som?

Sons são fenômenos que nos rodeiam em diversos aspectos de nossa vida. No momento do nascimento de uma criança, a primeira “manifestação de vida” do bebê é o som do choro, trazendo tranquilidade e comoção para os pais. Sons permitem que nos comuniquemos uns com os outros, nos alertam sobre eventuais perigos, nos satisfazem com emoções ao apreciar uma ópera, e também podem nos irritar através de um barulho inconveniente! Mas, afinal de contas, o que é o som? Como podemos defini-lo formalmente?

De um ponto de vista fisiológico e psicológico, sons são fenômenos percebidos pelo nosso sistema auditivo, e sua respectiva interpretação pelo nosso cérebro. Podemos estudar os sons, portanto, de uma maneira bastante pessoal e emocional. No entanto, para os objetivos de nossos estudos, procuraremos uma definição mais racional e objetiva sobre o tema. Entraremos no reino da acústica. A acústica é um ramo da física que estuda ondas mecânicas em gases, líquidos e sólidos, incluindo tópicos como vibrações, sons, ultrasons e infrasons. De forma geral, a acústica estuda os **eventos acústicos**. Um evento acústico consiste de três etapas: na primeira, o som é originado por uma **fonte**. Na segunda, ocorre a **transmissão** do som por um meio. Finalmente, o som é interceptado e processado por um **receptor**. Vejamos estes conceitos com mais detalhes.

4.1.1 A fonte do som

A fonte de um som sempre é uma vibração de alguma espécie. Por exemplo, o som de um violão é iniciado pela vibração de sua(s) corda(s). A voz humana é um outro

exemplo de som, ocasionada pela vibração das cordas vocais e pelos fenômenos acústicos que ocorrem em nosso corpo. Diferentemente dos exemplos anteriores, em que as vibrações são causadas por uma ação humana, um alto-falante é um sistema vibratório, atuando como um transdutor que converte sinais eletrônicos em sinais acústicos. A invenção do alto-falante possibilitou a união entre os estudos da eletrônica e da acústica (chamamos essa união de **áudio**), responsável por um avanço tecnológico e cultural muito importante em nossa sociedade (como a transmissão de rádio e TV).

Veremos que as **vibrações** são elementos básicos no estudo da acústica; desenvolveremos suas terminologias e relações matemáticas básicas nas seções seguintes.

4.1.2 A transmissão do som

Voltemos ao exemplo do violão. Ao dedilhar (ou palhetar) as cordas de um violão, ocasionamos vibrações nessas cordas, o que faz com que o ar ao redor do objeto também vibre. Essa vibração se propaga como uma onda através do ar. Os fenômenos das ondas são amplamente estudados na física, e não é de aplicação exclusiva às ondas sonoras. O estudo das ondas caracteriza também a transmissão da luz e de ondas de rádio (através da ótica e radiação eletromagnética).

É importante ressaltar que a transmissão do som de uma fonte a um receptor não ocorre por um caminho reto; na realidade, na transmissão de uma onda sonora podem ocorrer fenômenos de reflexão (por exemplo, nas paredes de um quarto), refração (quando a onda é propagada em diferentes meios), entre outros.

4.1.3 O receptor do som

O receptor mais importante do som é nosso sistema auditivo: o ouvido e o cérebro. Por este sistema, as ondas sonoras são ouvidas, interpretadas e apreciadas. Existem, basicamente, duas matérias no estudo da audição humana: a primeira é a **anatomia** e a **fisiologia** do sistema auditivo, que descrevem as ferramentas que utilizamos como “ouvintes”. A segunda é a **psicoacústica**, que descreve as funções dessas ferramentas, convertendo ondas sonoras em percepções. Algumas destas percepções incluem a **intensidade**, **altura**, **timbre** e **localização** do som (veremos alguns destes conceitos oportunamente).

4.2 Vibrações

Como vimos, sons começam com vibrações. É natural, portanto, que iniciemos nosso estudo de acústica com o estudo das vibrações. De uma forma simples, vibrações são movimentos de “vai e vem”, podendo ser simples, como o balançar de um pêndulo, ou complexos, como a junção dos sons dos instrumentos de uma orquestra. Para as formulações matemáticas que representam essas vibrações, consideraremos e descreveremos o sistema mais simples possível: o movimento harmônico simples. Este fenômeno é estudado na física do Ensino Médio, e nos auxiliará na representação de vibrações (e futuramente das ondas sonoras) através de funções trigonométricas.

4.2.1 Sistema massa-mola

Imagine uma certa massa, pendurada verticalmente por uma mola. Se não existir nenhum movimento (ou seja, nenhuma vibração), a força da gravidade atuando sobre a massa (puxando-a para baixo) é balanceada pela força da mola (que a puxa para cima). Neste caso, a massa está em repouso, e dizemos que o sistema está em **equilíbrio**. Se a massa se afasta de sua posição de equilíbrio, dizemos que houve um **deslocamento**. Por conveniência, consideraremos que, se esse deslocamento leva a massa acima do ponto de equilíbrio, será positivo. Quando a massa está no ponto de equilíbrio, o deslocamento é zero. E caso contrário, o deslocamento será negativo.

Se o sistema massa-mola se move (vibra) livremente, sem a interferência de outras forças, a massa sofrerá um movimento harmônico simples. À medida que a massa se movimentava para cima e para baixo, seu deslocamento alterna entre positivo e negativo. O deslocamento, que chamaremos de x , pode ser reproduzido em um gráfico como uma função de variável t , que representa o tempo. Veremos em breve que esta função será uma função trigonométrica.

Chamaremos de **amplitude** o deslocamento máximo (em valor absoluto) atingido pela massa, partindo do ponto de equilíbrio. O movimento harmônico simples é um exemplo de movimento **periódico**, um movimento que se repete indefinidamente, através de um padrão básico, chamado **ciclo**. A duração deste ciclo é chamada de **período**, que é medido em uma unidade de tempo.

Surge uma questão: nesse nosso sistema ideal, como a massa pode continuar se deslocando indefinidamente? Isto ocorre por um fenômeno físico chamado **momento**. Não exploraremos este conceito em detalhes, mas imaginemos o seguinte cenário: faremos um deslocamento negativo na massa (puxando-a para baixo), esticando a mola de nosso sistema.

Com isso, existirá uma força, proveniente da mola esticada, atuando na massa e tentando trazê-la novamente ao seu ponto de equilíbrio. Quando a massa atinge exatamente o ponto de equilíbrio, não existe mais essa força atuando sobre ela. Com isso, a massa para ao atingir o ponto de equilíbrio? Sabemos que não! Por ter adquirido velocidade, e pelo corpo possuir certa quantidade de massa, o mesmo adquiriu *momento*. Devido ao momento, a massa passa o ponto de equilíbrio, em um sentido de deslocamento positivo, comprimindo a mola do sistema, e fazendo com que uma força agora atue em sentido negativo, levando a mola novamente ao ponto de equilíbrio. Novamente, após a massa passar pelo ponto de equilíbrio, adquire momento, agora em direção oposta, até atingir novamente o ponto de amplitude negativo do início de nosso cenário hipotético. Com isto é completado o primeiro ciclo, que se repete indefinidamente. O tempo necessário para completar este primeiro ciclo é um período.

Ora, mas o que tudo isso tem a ver com o som? Veremos que, ao representar ondas sonoras através de funções trigonométricas, os conceitos apresentados acima serão fundamentais para o desenvolvimento de nosso estudo. Além disso, o sistema massa-mola é uma clássica abordagem inicial para as disciplinas de ondulatória, na física, e no estudo de equações diferenciais ordinárias.

4.2.2 A representação matemática

Podemos representar matematicamente movimento harmônico simples através da função trigonométrica **seno**. Algumas vezes, o movimento harmônico simples é chamado de “movimento da onda senoidal”, e pode ser representado pela expressão

$$x(t) = A \operatorname{sen}(360t/T + \phi), \quad (4.1)$$

onde A é a amplitude, T é o período (dado em segundos) e ϕ é a fase (dada em graus ou em radianos).

Exploremos um pouco mais a expressão anterior. As unidades da amplitude A serão as mesmas das unidades de x , ou seja, das unidades de deslocamento. Em alguns casos, essa unidade pode ser representada em milímetros. Por convenção, A é sempre um número real positivo. Notemos que, caso $A = 0$, a expressão em (4.1) se torna a função identicamente nula, e não há mais o que se falar em uma expressão representativa de uma onda. Como os valores mínimos e máximos da função seno são, respectivamente, -1 e 1 , a amplitude, que multiplica a função seno, faz com que (4.1) tenha valores mínimos e máximos, respectivamente, de $-A$ e A .

O valor entre parênteses na expressão (4.1) é chamado de *argumento* da função seno, e é uma medida em ângulos. Portanto, $360t/T + \phi$ é um ângulo, e a fase ϕ é o valor do ângulo quando $t = 0$ (neste caso, ϕ é chamada de “fase inicial”). Como trataremos de ondas sonoras, os valores da variável t que nos interessam são quando $t \geq 0$.

A função seno é uma função periódica, ou seja, ela repete seu ciclo a cada vez que um ângulo é acrescentado em 360° (ou 2π radianos). Com isso, a expressão $x(t)$ mostra que, se a variável de tempo t inicia em algum valor t' , após T segundos a função repete o mesmo valor de que em t' . E por este motivo, T é chamado de período.

O inverso multiplicativo do período permite que definamos a frequência, f , de uma onda senoidal,

$$f = \frac{1}{T},$$

e as suas unidades de medidas são ciclos por segundo, ou *Hertz* (Hz). Com isso, podemos reescrever a expressão (4.1) como

$$x(t) = A \operatorname{sen}(360ft + \phi).$$

Chamaremos o argumento da função seno, $360ft + \phi$, de *fase instantânea*, representando-a pela letra Θ . Lembremos que Θ também é um ângulo, representado por graus ou radianos. Com isto, podemos reescrever novamente a expressão, de forma que

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\Theta),$$

possibilitando a separação da periodicidade da função e a dependência do tempo.

Quando duas ondas senoidais têm a mesma frequência, mas diferentes fases iniciais, diz-se que uma delas **conduz ou atrasa** a outra.

4.2.3 Modos Naturais de Vibração

O conceito apresentado nessa seção é de extrema valia no estudo da mecânica e da acústica. Informalmente, o conceito de modos de vibração já nos foi apresentado no estudo do sistema massa-mola. Neste sistema, em que o corpo de massa se movimenta em uma dimensão, dizemos que existe *um modo de vibração*. Um modo é descrito pelas seguintes propriedades:

1. **Frequência:** Um modo possui uma frequência específica. Por exemplo, o sistema massa-mola possui a frequência dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{m}},$$

onde s denota a rigidez da mola, medida em N/m (Newtons por metro). A quantidade m é a massa do corpo, normalmente medida em kg (quilogramas).

2. **Forma:** Um modo de vibração possui uma forma. No caso do sistema massa-mola, essa forma é o movimento “baixo-cima” da mola. No caso de alguns sistemas musicais, com ondas sonoras, estas formas não são tão óbvias.
3. **Amplitude:** Se aplicarmos muita energia em um modo de vibração, sua amplitude será grande. No entanto, a amplitude, efetivamente, não é uma propriedade do modo. Ela apenas sinaliza quanta “ação” ocorre em um modo de vibração.

4.2.4 Sistemas Multimodais

Como vimos, o sistema massa-mola unidimensional possui apenas um modo de vibração. A grande maioria dos sistemas estudados na física (dentre eles sistemas musicais) possuem mais de um modo. Por exemplo, utilizando duas massas e duas molas, podemos construir um sistema de dois modos de vibração, com formas e frequências diferentes. Não exploraremos melhor este conceito neste trabalho, mas, indutivamente, podemos construir sistemas com três massas e três molas que possuam três modos de vibração, com quatro massas e quatro molas, possuindo quatro modos de vibração, e assim por diante. Estes sistemas são chamados de *sistemas discretos*. No caso de sistemas musicais, como as cordas de um violão e a pele porosa de uma caixa de bateria, chamamos de *sistemas contínuos*. Tais sistemas possuem um grande número de modos; no entanto, veremos que, ao estudá-los, apenas alguns destes modos são realmente importantes para analisarmos as propriedades de um sistema. Nosso próximo exemplo, usando uma antiga ferramenta musical, ilustrará isso.

4.2.5 O Diapasão

O diapasão é uma ferramenta utilizada para afinar instrumentos e a voz humana. De material metálico, possui um formato de forquilha, e através de um golpe em sua superfície, produz uma determinada frequência, servindo como referência para afinação. A frequência mais comum de um diapasão é a de 440 Hz, sendo esta conhecida como a nota “Lá de afinação” de orquestras e grupos musicais.

Um diapasão é um sistema vibratório, com diversos modos de vibração. Veremos que um destes modos acaba tendo mais “relevância” do que os demais.

- **Modo Principal:** O modo principal de um diapasão possui a frequência de referência da ferramenta. Por exemplo, o diapasão do “Lá de afinação” possui o modo principal com a frequência de 440 Hz. Um diapasão cuja frequência do modo principal é de 256 Hz produz a nota Dó dos “tons científicos”. Como curiosidade, se duas orquestras, no momento de sua afinação, utilizarem os diapasões supracitados separadamente, soarão totalmente diferentes! Isto ocorre pois cada uma dessas frequências está atrelada a um sistema de afinação diferente: a

primeira, ao sistema de Stuttgart, e a segunda o sistema de Sauveur. O modo principal de um diapasão é referência de frequência pois possui uma sonoridade muito estável.

- **Outros Modos:** Existem outros modos de vibração em um diapasão. Estes modos possuem frequências maiores do que o modo principal. Quando um diapasão é tocado, essas frequências podem ser ouvidas; no entanto, a frequência principal é a mais evidente.
- **Adição de Modos:** Quando um sistema vibra em diversos modos simultaneamente, a vibração resultante é a soma de cada um destes modos individualmente. Como vimos em nosso estudo das séries de Fourier, este fenômeno é conhecido como “sobreposição”. O resultado desta adição é que o modo principal e os demais modos de um diapasão coexistem, e o ouvinte escuta e interpreta todos esses modos simultaneamente.
- **Amortecimento:** Em nosso estudo inicial, consideramos um sistema massa-mola ideal, sem a interferência de forças externas, cujo movimento oscilatório acontecia indefinidamente. No entanto, sabemos que o mundo real não contempla a utopia dos sistemas ideais. Portanto, forças como o atrito e resistência do ar causam o *amortecimento* desses sistemas. No caso do sistema do diapasão, os modos de vibração além do principal têm suas amplitudes reduzidas rapidamente logo após o diapasão ser tocado, pelo efeito do amortecimento. No entanto, o modo principal dura um tempo muito maior: em alguns casos, após um minuto o modo principal ainda pode ser ouvido! Neste caso, em que os demais modos foram “extintos”, o sistema se torna um sistema de um único modo.
- **Forma dos modos:** Como visto no caso de um sistema de um modo de vibração, um sistema multimodal pode ter cada um dos seus modos representados individualmente, especificando seus respectivos deslocamentos e amplitudes.

4.2.6 Ressonância

O conceito de ressonância requer que existam dois sistemas físicos: um *sistema de direção* e um *sistema dirigido*. O sistema de direção providencia energia para o sistema dirigido. Como exemplo, pensemos em um saxofone. O saxofone é um instrumento de sopro, feito de metal, de corpo tubular, em que o som é produzido através da vibração de uma palheta (de madeira ou sintética), encaixado em uma boquilha, que é soprada pelo músico. Neste caso, o sistema de direção será o conjunto boquilha-palheta, e o sistema dirigido o corpo de metal do saxofone. O corpo do saxofone vibra com a energia providenciada pela vibração da palheta, e é responsável por irradiar o som. (Não exploraremos os detalhes, mas no caso do saxofone, o próprio conjunto palheta-boquilha é um sistema de direção-sistema dirigido, tornando-se depois um único sistema de direção, se comparado ao corpo do instrumento).

A ressonância requer que o sistema dirigido tenha alguns modos de vibração. Portanto, existem frequências “especiais” em que esse sistema vibra naturalmente quando estimulado por uma energia externa. A ressonância ocorre, portanto, quando o sistema dirigido é estimulado por uma dessas “frequências especiais”, respondendo com entusiasmo e resultando em vibrações com grandes amplitudes.

4.2.7 O Espectograma

Já vimos que podemos representar uma vibração através de uma função em relação à variável tempo, em um gráfico em forma de onda. Uma representação alternativa é a **representação espectral**. Esta descreve uma vibração como uma função da frequência. Um espectograma de amplitude mostra a amplitude plotada em relação à frequência de cada modo. Veremos que o estudo da Análise de Fourier será essencial para representarmos as ondas sonoras através de um Espectograma. Através da transformada de Fourier, e de seus correspondentes algoritmos discretos (como o DFT - Discrete Fourier Transform e FFT - Fast Fourier Transform), podemos “visualizar” o som e suas frequências, e reconstruí-lo através da adição de cada um de seus modos de vibração.

4.2.8 Ondas de Som

Até o momento, vimos que podemos representar determinados sistemas de vibração através de uma função onda, ou a soma de diversas funções onda, através do princípio de sobreposição. É natural, portanto, surgir o questionamento: o que é uma onda?

Uma onda pode ser interpretada como um meio físico de propagação de energia, momento e informação, sem ocorrer o transporte de massa. Existem diferentes tipos de onda: ondas de luz, ondas de rádio, raios-X, entre outras. Apesar desta grande diversidade, as ondas apresentam algumas características em comum: elas possuem frequência, são caracterizadas com uma direção e velocidade de propagação, esta última podendo variar de acordo com o tipo de onda.

Em particular, uma onda sonora é uma pequeno distúrbio na pressão do meio de propagação. O som pode ser propagado em meios sólidos, líquidos e gasosos. Para nosso estudo, consideraremos a propagação da onda sonora no ar. Desta forma, quando uma onda sonora possui um “pico”, a pressão do ar se torna um pouco maior do que a pressão atmosférica. Em contrapartida, quando uma onda de som possui um “vale”, a pressão do ar se torna um pouco menor do que a pressão atmosférica. Essas alterações na pressão do ar, apesar de pequenas, fazem com que percebamos os sons.

Existem duas direções associadas com uma onda, a *direção de propagação* e a *direção de deslocamento*. Uma onda é dita *transversal* quando a direção de deslocamento é perpendicular à direção de propagação. Por exemplo, se amarrarmos a ponta de uma corda a um poste, e balançarmos constantemente a outra ponta, a onda será propagada na direção horizontal da corda, enquanto sua direção de deslocamento fará o movimento “cima-baixo”, perpendicular à direção de propagação. Logo, essa onda é uma onda transversal. Uma onda transversal só pode existir em um meio que ofereça certa resistência para ser “curvado”.

Uma onda é dita *longitudinal* se a direção de deslocamento é paralela à direção de propagação. Este tipo de onda só pode existir em um meio que ofereça resistência para ser comprimido. Por exemplo, o ar e a água apresentam resistência para compressão, podendo suportar ondas longitudinais. Quando o som é propagado em um meio gasoso (como o ar), a onda é longitudinal, pelo fato do ar não oferecer resistência para ser “curvado”. Analogamente, no sistema massa-mola, a onda estudada também é longitudinal.

4.3 Análise e Síntese de Fourier

Como vimos na primeira parte deste trabalho, podemos representar uma forma de onda como a soma de ondas (funções) senoidais. Esta afirmação nos introduz a dois conceitos: a síntese e a análise de Fourier.

A *Síntese de Fourier* é uma ferramenta que possibilita que uma vibração complexa possa ser criada adicionando movimentos harmônicos simples de variadas frequências. Assim, pela teoria formulada por Fourier, podemos *synthetizar* uma onda complexa através da soma de ondas senoidais.

O oposto da síntese é a *Análise de Fourier*. Nela, o processo é, de certa forma, invertido: analisando uma onda complexa, identificamos como são as ondas senoidais que a compõem. Um profissional que estuda Acústica, ao analisar uma onda sonora, pode identificar quais (e quantificar) as frequências de ondas senoidais que estão presentes nesse som complexo, de maneira única. Portanto, o teorema de Fourier nos diz que **uma onda complexa é uma soma única de ondas senoidais**.

Resumidamente, na síntese de Fourier utilizamos os espectros (funções em relação à frequência) de fase e frequência para gerar uma onda complexa (uma função em relação a tempo). Na análise de Fourier, usamos uma onda complexa para obtermos, como resultado, espectros de fase e frequência.

4.3.1 A Onda Senoidal

Como vimos, o formato de onda mais simples contém um único componente, o que a torna uma onda senoidal pura. Exploraremos mais adiante que é possível reproduzir uma onda senoidal simples digitalmente.

Suporemos um sinal senoidal, com amplitude de 60 unidades de deslocamento (não especificaremos, nesse caso, a unidade de medida), frequência de 1000 Hz e uma fase de 0° . Usando a expressão em (4.1), teremos

$$x(t) = 60 \operatorname{sen}(360 \cdot 1000t + 0). \quad (4.2)$$

Variaremos alguns parâmetros da expressão em (4.2), alterando a amplitude para 40 unidades, e a fase para 90° . Neste caso, a expressão será

$$\hat{x}(t) = 40 \operatorname{sen}(360 \cdot 1000t + 90).$$

Representando graficamente as duas funções, podemos perceber as diferenças nos formatos das ondas.

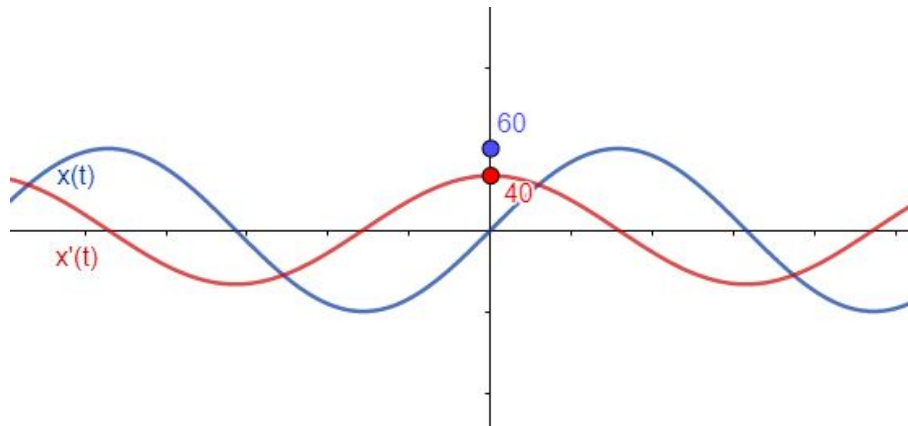


Figura 4.1: Representação gráfica das funções $x(t)$ e $\hat{x}(t)$.

4.3.2 Ondas Complexas

Como vimos, uma onda complexa é formada por uma soma de ondas senoidais. Para uma simples exemplificação, consideraremos uma onda de dois componentes. O primeiro componente será o modo fundamental de vibração, com frequência de 200 Hz e amplitude de 45 unidades. O segundo componente possui frequência de 600 Hz, e amplitude de 15 unidades. Em ambos os casos, a fase é igual a zero. Novamente, utilizando a expressão (4.1), teremos

$$x(t) = 45 \operatorname{sen}(360 \cdot 200t + 0) + 15 \operatorname{sen}(360 \cdot 600t + 0). \quad (4.3)$$

Na figura abaixo representaremos os gráficos das funções do primeiro, do segundo componente e da onda complexa (a soma de ambos os componentes), chamando-os, respectivamente, de $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x(t)$. Notemos que, para cada instante t contido no intervalo em que plotamos os gráficos, o valor de $x(t)$ da onda complexa é igual a soma dos valores de $x(t)$ dos primeiros e segundos componentes da onda.

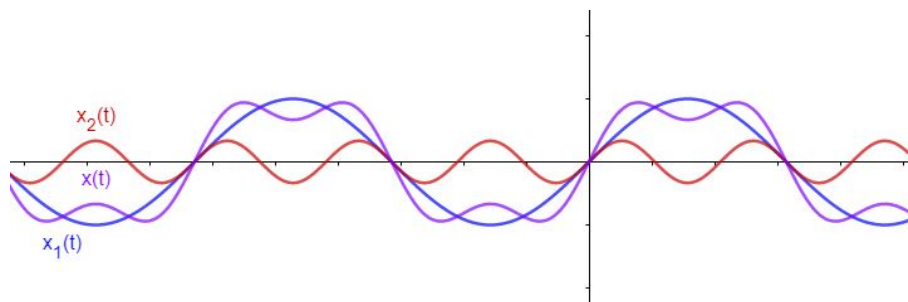


Figura 4.2: Representação gráfica dos componentes e da função complexa.

Analogamente, se alterarmos algum dos componentes de (4.3) (por exemplo, alterando a fase do segundo componente para 90°), obtemos

$$x(t) = 45 \operatorname{sen}(360 \cdot 200t + 0) + 15 \operatorname{sen}(360 \cdot 600t + 90).$$

Conforme figura abaixo, vemos que a alteração na fase do segundo componente da onda causa uma mudança substancial em relação à onda original. Curiosamente, esta mudança de fase não altera a forma como ouvimos o som representativo dessas ondas. Pela “lei de fases de Ohm”, a audição humana não percebe mudanças de fases.

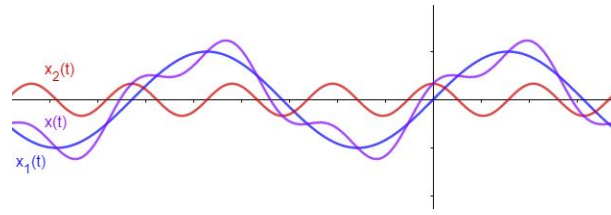


Figura 4.3: Representação gráfica dos componentes e da função complexa, com a fase alterada.

4.3.3 Periodicidade

Consideremos a onda complexa da seção anterior (sem a alteração de fase do segundo componente). Afirmamos que a periodicidade dessa onda é $1/200\text{s}$ (ou 5 ms). De fato, após 5 ms , o componente de frequência 200 Hz completa um ciclo, enquanto o componente de frequência 600 Hz completa três ciclos, e o ciclo de ambos reinicia. Essa é a base da periodicidade. O primeiro componente é o de menor frequência e, nesse caso, é também o modo fundamental da onda.

Analisemos um caso um pouco diferente. Construamos uma onda complexa, com três componentes com frequência de 400 , 600 e 800 Hz (não será necessário nos preocuparmos com a amplitude e a fase nesse caso). Após $1/400\text{s}$ ($2,5\text{ms}$), o componente de 400 Hz completa um ciclo, e o de 800 Hz completa 2 ciclos. No entanto, o componente de 600 Hz completa apenas $1,5$ ciclos, que não é um valor inteiro! Portanto, após os $2,5\text{ ms}$, o ciclo não está pronto para reiniciar. Neste caso, como faremos para descobrir o período da onda?

Para isso, utilizaremos um conceito matemático: o máximo divisor comum (m.d.c.)! Calculando o m.d.c entre 400 , 600 e 800 , encontramos o valor de 200 . No caso de um componente de 200 Hz (que neste caso está faltando na onda original), encontramos um período de $1/200\text{s}$ (ou 5 ms). E de fato, nesse período, o componente de 400 Hz da onda complexa completa 2 ciclos, o componente de 600 Hz 3 ciclos e o de 800 Hz 4 ciclos, e o ciclo da onda está pronto para reiniciar! Neste caso, a frequência de 200 Hz , mesmo não presente na onda, é chamada de *frequência fundamental*, e as frequências presentes de 400 , 600 e 800 Hz são chamadas de 2^{o} , 3^{o} e 4^{o} harmônicos, respectivamente.

Dois ou mais componentes (modos de vibração) de um tom (ou seja, de uma onda sonora) são chamados de **harmônicos** quando suas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência base. Esta, também chamada de frequência fundamental, é o primeiro harmônico; o segundo harmônico possui o dobro da frequência fundamental, o terceiro o triplo, e assim por diante.

Veremos que os harmônicos desempenham um importante papel na definição de uma propriedade do som: o *timbre*.

4.3.4 Timbre

Façamos um exercício mental. Imaginemos que dois instrumentos musicais distintos (uma guitarra e um trompete, por exemplo) produzem uma mesma nota, com *altura*, *intensidade* e *duração* idênticas (estas são três das propriedades do som, que representam sua frequência, amplitude e tempo de execução, respectivamente). Mesmo que não visualizemos a ação, conseguimos identificar, pela audição, se a nota está sendo tocada pelo primeiro ou segundo instrumento. E, mesmo que os instrumentos estejam

tocando simultaneamente, nossos ouvidos conseguem “separar” e identificar os sons individualmente. Isto é possível por uma outra propriedade do som, independente das outras três: o **timbre**.

Do ponto de vista da psicoacústica, o timbre representa a coloratura do som, possibilitando que o ouvinte classifique os sons de um modo emotivo e adjetivo: uma guitarra com distorção normalmente é associada a um som agressivo; um trompete é associado a um som majestoso; um oboé, a um som pastoral, sereno.

Como vimos anteriormente, a teoria das séries de Fourier originalmente apareceu num contexto de pesquisa de condutividade térmica e, posteriormente, veio a ser aplicada como solução para o problema da corda vibrante. A resposta da representação matemática dos componentes harmônicos de um som na análise espectral veio a ser encontrada por George Simon Ohm, em um artigo de 1843, com o título “*On the Definition of a Tone with the Associated Theory of the Siren and Simular Sound Producing Devices.*”. Fazendo uso de instrumentos como tubos sonoros e sirenes de discos, estudou as relações entre a frequência de um som e a respectiva altura percebida pelo ouvido humano. Analisou também a influência das frequências dos harmônicos de um instrumento na construção e percepção de um som complexo. Segundo Ohm, o ouvido humano analisa e interpreta os sons complexos como uma combinação de tons puros, em uma decomposição que é conhecida como **a série harmônica** do som. As descobertas de Ohm influenciaram o trabalho de outros estudiosos, como Lord Rayleigh e Helmholtz.

Tradicionalmente, o conceito de timbre é introduzido como a propriedade do som que permite com que identifiquemos sua origem (ou fonte). No entanto, procuraremos apresentar este princípio através da compreensão de que um som produzido por qualquer instrumento musical é composto por tons puros e estes, quando sobrepostos, geram o som característico do instrumento. Esta será nossa ideia fundamental para a apresentação do timbre musical.

4.3.5 Ondas Estacionárias

Ao contrário de uma onda “viajante”, uma onda estacionária não se move. Mas isto não significa que não exista variação na onda quando o tempo varia. O que ocorre é que essas mudanças ocorrem de forma diferente de uma onda “normal”.

Se tirarmos diversas “fotografias” de uma onda viajante, veremos que uma onda viajante se move rigidamente em um espaço de tempo. Se a direção de propagação da onda for da esquerda para a direita, após certo tempo, registraremos que a forma da onda se “deslocou” para a direita.

Se fizermos o mesmo procedimento com uma onda estacionária, o resultado será diferente. Após um determinado ponto, veremos que a onda não se moveu, mas sim sofreu uma *alteração em seu tamanho!* Se ordenarmos as fotografias que tiramos da onda, veremos que, após a posição inicial, a onda começa a se “achatar”, até atingir uma posição “nula”. Logo após, seu formato “segue” em direção oposta, até atingir o valor máximo (amplitude) oposto à posição original. Após este ponto, a onda começa a se achatar novamente, agora em sentido oposto ao achatamento original, e o movimento continua até atingir a amplitude original, completando um ciclo. Notemos que, após o primeiro ciclo, o formato da onda é idêntico ao formato inicial (estamos considerando neste caso um sistema ideal, sem a interferência de forças de amortecimento).

A diferença primordial entre uma onda viajante e a estacionária é que, na primeira,

todo valor no espaço de propagação da onda sofre algum tipo de deslocamento. Já na onda estacionária, existem alguns pontos no espaço onde não ocorre nenhum tipo de deslocamento. Independente da mudança na variável tempo, nesses pontos não ocorre nenhuma ação. Tais pontos são chamados de *nós*.

4.3.6 Ondas estacionárias em uma corda

Pensemos em uma corda de violão. Esta corda está esticada e presa em duas extremidades: o rastilho e a pestana do violão. Ao tocarmos esta corda, as reflexões acontecem em ambas as extremidades. Nelas, a corda não deve vibrar. Isto nos lembra de um conceito matemático que vimos no início de nosso estudo das séries de Fourier: as condições de fronteira da equação diferencial parcial da corda vibrante. Estas condições exigem que não exista nenhum deslocamento nas extremidades da corda. A onda estacionária que ocorre em uma corda de violão, obrigatoriamente, deve cumprir essas condições. E isto significa que os comprimentos de onda dos modos de vibração da corda de uma guitarra devem “caber” no comprimento da corda. Veremos isto com mais detalhes.

Suponhamos que nossa corda tenha comprimento $L = 65$ cm. O maior comprimento de onda compatível com essa corda é $\lambda = 130$ cm (1,3 m). Isto ocorre pois o comprimento de onda é exatamente o dobro do comprimento da corda, e metade da onda “se encaixa” perfeitamente na corda. Desta forma, o ciclo se completará após percorrer duas vezes o comprimento de corda, conforme explanado na seção anterior. Este será o maior comprimento de onda possível para a corda estudada, e chamaremos este modo de vibração como o *primeiro modo*. Este modo possuirá a menor frequência de som produzida por esta corda. E esta frequência depende da velocidade do som nesta corda.

Consideremos que a velocidade do som nesta corda é $v_s = 107$ m/s. Neste caso, é fácil calcular a frequência da corda:

$$f = v_s/\lambda = 107/1,3 = 82,3. \quad (4.4)$$

Como vimos, a unidade de medida da frequência será em Hertz. Esta situação proposta representa, na realidade, é a frequência fundamental produzida pela corda mais grave do violão, de 82,3 Hz, e o nome da nota associada à mesma é a nota Mi.

Como o comprimento de onda é o dobro do comprimento da corda, podemos reescrever a expressão em (4.4) como

$$f = f_1 = v_s/2L.$$

O segundo modo de vibração da corda possui um comprimento de onda que encaixa perfeitamente no comprimento da corda (ou seja, dois meio-períodos da onda se encaixam perfeitamente na corda). Analogamente, podemos calcular a frequência desse modo, considerando $\lambda = 0,65$ m:

$$f_2 = v_s/\lambda = 107/0,65 = 165 \text{ Hz.}$$

O terceiro modo possui um comprimento de onda de dois terços do comprimento da corda. Neste caso, $\lambda = \frac{2L}{3} = \frac{1,3}{3} = 0,4333\dots$ m, e sua respectiva frequência será:

$$f_3 = v_s/\lambda = 107/0,4333\dots \simeq 247 \text{ Hz.}$$

O primeiro modo não possui nenhum nó (não estamos considerando os pontos fixos das extremidades). O segundo modo, apenas um nó; o terceiro, dois nós, e assim indutivamente. Não existe um limite para o número de possíveis modos de vibração, que radiam por meio do corpo do violão. Estes diferentes modos criam os *harmônicos* de um som produzido pelo violão. O primeiro modo cria o tom fundamental, também chamado de primeiro harmônico. O segundo, cria o segundo harmônico, e assim por diante. Como vimos, a frequência de cada harmônico é um múltiplo inteiro da frequência original.

Desta forma, para a corda esticada, podemos utilizar a expressão

$$f_n = \frac{v_s}{2L} \cdot n \quad (4.5)$$

como uma maneira muito simples de calcular a frequência do n -ésimo modo (ou n -ésimo harmônico).

Apesar de não abordarmos o cálculo dos harmônicos de outros instrumentos (como instrumentos de sopro e de percussão), os mesmos possuirão modos de vibração correspondentes ao som produzido por cada instrumento. Em alguns casos, a correspondência será semelhante à da corda; em outros, a derivação não é tão simples.

4.3.7 Pitágoras e as consonâncias

Sabemos das importantíssimas contribuições de Pitágoras de Samos para a história e construção da matemática. Veremos que o filósofo e matemático grego também foi o responsável pela condução de um dos primeiros experimentos científicos da humanidade: o **monocórdio**, que permitiu a construção de escalas e harmonia tradicional da Música.

Apesar da falta de um relato histórico, diz-se que Pitágoras, ao passar por uma oficina de ferreiro (profissional que forja armas de guerra), ficou fascinado pelos sons de diferentes martelos batendo em uma bigorna, e a forma como estes se combinavam. Inicialmente, achou que os diferentes sons produzidos eram resultado de diferentes forças que o ferreiro aplicava ao martelar; no entanto, verificou que, mesmo aplicando forças menores, os martelos conservavam os mesmos sons no momento das batidas. Decidiu realizar a pesagem de quatro desses martelos (os que os respectivos sons mais combinavam entre si), achando a relação entre as unidades de peso (do mais pesado ao mais leve) de doze, nove, oito e seis unidades. Estas relações entre os pesos dos martelos fizeram com que Pitágoras idealizasse a construção do *monocórdio*.

Pitágoras, ao observar que uma corda tensionada produzia um determinado som, realizou um experimento: se ele variasse o comprimento da parte ativa da corda (por meio de um cavalete móvel, em relação a sua extremidade), obteria sons diferentes. Alguns destes sons combinavam mais com o som original da corda do que outros; Pitágoras, portanto, decidiu aplicar as relações encontradas no peso dos martelos no monocórdio.

Inicialmente, dividiu o comprimento da corda ao meio. Ao vibrá-la, percebeu que o som produzido era idêntico ao som original, porém mais agudo (no estudo da Música, isto é conhecido como *intervalo de oitava*, formado por doze semitons equidistantes).

Posteriormente, Pitágoras testou as razões $2/3$ e $3/4$ da corda, e estes sons também soavam bem! Respectivamente, esses sons representam na Música os intervalos de quinta (sete semitons) e quarta (cinco semitons). Esta descoberta possibilitou a formação de escalas musicais e de acordes (combinação de sons simultâneos), que foram a

base e fundação da teoria musical construída a partir dos séculos, e predominante nas músicas e técnicas de composição até o fim do período Clássico (século XIX).

De um ponto de vista da teoria musical e da psicoacústica, os sons que combinam “bem” são chamados de *consonâncias*, e os que não combinam, *dissonâncias*. Estes conceitos são totalmente relativos e subjetivos: por exemplo, o intervalo de sétima (seis semitons) era terminantemente proibido na era da música medieval eclesiástica, e pela sua qualidade dissonante, foi cunhado de *diabolus in musica* em meados do século XVIII. Já na estrutura harmônica do *Blues* (um estilo musical originado na região sul dos Estados Unidos, em meados de 1860), o intervalo de sétima é obrigatoriamente predominante nas progressões harmônicas utilizadas em sua forma musical. Vemos, portanto, que a classificação de dissonância ou consonância de um intervalo tem relação direta com as características e estilo de uma composição musical.

Não abordaremos com detalhes este ponto no presente trabalho, mas no estudo da disciplina de Contraponto Musical, os intervalos considerados como consonâncias perfeitas são obtidos através das frequências dos primeiros harmônicos de um som, vistos na seção 4.3.6.

4.4 Proposta didática: o ensino da trigonometria através do som

Faremos uma proposta de plano de aula para unir o ensino das funções trigonométricas com o da análise de um som musical. Nossa pretensão não é que esse plano seja obrigatoriamente aplicado da forma que propomos, mas sim que o professor em sala de aula tenha a liberdade de adaptá-lo conforme suas experiências e as dos alunos.

Como recursos necessários, perceber-se-á que nosso plano é, de certa forma, simplista. Os recursos tecnológicos necessários são aplicativos *open-source* (softwares de código aberto), com requisitos necessários mínimos exigidos de um processador. Uma sala de aula com projetor e caixa de som simples é suficiente para nosso objetivo. Vamos, portanto, apresentá-lo.

4.4.1 O objetivo

Nosso plano de aula consiste em apresentar aos alunos o conceito de um som musical (por definição, um som que possui uma frequência bem definida e reproduzível), e como este pode ser representado através de uma soma de funções trigonométricas, cada uma dessas associada a uma onda senoidal digital. Através do programa **Audacity**, analisaremos um som musical (que pode ser reproduzido na sala de aula pelo professor ou por algum dos alunos da turma, ou de alguma outra fonte da Internet), mostrando que este apresenta um padrão periódico, e que pode ser decomposto em sinais mais simples. Para tal decomposição, utilizaremos a Análise de Fourier, através do algoritmo Fast Fourier Transform (FFT), disponível no próprio programa. Nossa pretensão não é explorar o algoritmo em si, mas sim mostrar que é um recurso matemático e computacional de analisar sinais digitais (podendo ser musicais, imagens, entre outros), que permite identificar as principais frequências e amplitudes que o compõem. Após análise e decomposição desse som, geraremos ondas senoidais digitais com as respectivas frequências e amplitudes encontradas. Reproduziremos cada onda digital individualmente, e depois as uniremos, tentando identificar se a união dos sons

assemelha-se de alguma forma ao som original analisado. Analisaremos como a adição de cada uma dessas ondas senoidais à frequência fundamental (ou seja, a sobreposição dos harmônicos) influencia no som obtido.

Finalmente, através do aplicativo **Geogebra**, tentaremos reconstruir a função do som original do instrumento, representando cada onda senoidal como uma função trigonométrica, alterando suas frequências e amplitudes (e vendo qual a consequência dessas alterações no gráfico da função). Ao somar as funções trigonométricas construídas, analisaremos se o gráfico dessa nova função assemelha-se ao gráfico da onda sonora, e como isto se relaciona ao som digital construído anteriormente.

Para a construção das atividades, os estudantes não necessitam ter conhecimento musical prévio. Os conceitos de som e ondas físicas podem ser apresentados baseando-se nos conteúdos explanados anteriormente nesta seção. O ferramental matemático necessário também é mínimo: o estudante precisa apenas conhecer o conceito de função, como representá-las graficamente e uma certa familiaridade com as noções básicas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Todos os conceitos, no entanto, podem ser revistos pelo professor com os alunos, se assim o achar necessário.

4.4.2 Os recursos tecnológicos

Para nossa proposta de aula, utilizaremos dois softwares *open-source*: o **Audacity** e o **Geogebra**. As atividades que apresentaremos serão demonstradas com as interfaces desse programas. Todavia, caso o professor tenha familiaridade com programas semelhantes a estes, terá total liberdade de adaptar o plano de aula e seu formato.

O Audacity é um software livre de edição digital de áudio, disponível nas plataformas Windows, Linux, Mac e outros sistemas operacionais. O programa tem muita popularidade devido seus recursos de edição, sua grande disponibilidade em múltiplas plataformas, suporte e licença aberta que permite ao programa ser gratuito. Dentre os recursos que o Audacity apresenta, estão

- Importação e exportação em formato WAV, MP3 (via LAME, copiado separadamente), Ogg Vorbis, e outros;
- Gravação e reprodução de sons;
- Edição simplificada com Cortar, Copiar, Colar e Apagar;
- Desfazer ilimitados para qualquer passo;
- Mixagem em múltiplas faixas;
- Efeitos digitais de som e mais plug-ins de efeitos (pode-se criar novos plug-ins com a linguagem Nyquist);
- Edição de amplitude sonora em formato envelope;
- Remoção de ruídos;
- Suporte para modo multicanal, com taxa de amostragem de até 96 kHz e 24 bits por amostra;
- A habilidade de alterar a velocidade do som, sem alterar sua altura, para sincronização perfeita com vídeo (em dublagens);

- Facilidade de uso;
- Nivelador;
- Remoção de estalidos;
- Inverter áudio;
- Compressor;
- Equalizador;
- Taxa de projeto de até 384000 Hz.

O Geogebra é um aplicativo bastante conhecido (e querido) dos professores de Matemática. É um aplicativo de matemática dinâmica, que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface gráfica. Sua distribuição é livre e, semelhantemente ao Audacity, está disponível em várias plataformas. Apesar da riqueza dos recursos que ambos os programas oferecem, os necessários para as nossas atividades são de simples utilização; ao usuário, uma simples navegação pelos sistemas dos programas dará as habilidades necessárias para nossa utilização. No entanto, apresentaremos as principais telas e ações necessárias em nosso plano de aula.

4.4.3 O início da experiência

A matéria-prima necessária para o início de nossa experiência não poderia ser outra: o som! Particularmente, queremos estudar o som musical, que tem a propriedade de ter uma frequência bem definida (como vimos, medida em *Hertz*) e que possa ser reproduzido por outros instrumentos. Nossa ideia inicial é que o som seja reproduzido “ao vivo”, seja pelo professor (se este possuir algum conhecimento ou domínio de instrumentos musicais) ou algum aluno da turma que possua a habilidade com algum instrumento musical. Caso não seja possível a execução de um instrumento em sala de aula, o docente poderá utilizar algumas fontes online e gratuitas. Indicamos o website **freesound.org**, que é uma *database* colaborativa de sons que possuem Licença Criativa Comum, onde o usuário poderá pesquisar, compartilhar e fazer download de sons. Deixamos também livre para o professor utilizar sons conforme o gosto pessoal.

Nossa única recomendação é que o som utilizado possua uma frequência fixa (ou seja, não haja variação de altura no som emitido). Exemplificando, o som a ser emitido ou utilizado deverá ser de uma única nota musical, e não uma sequência de notas (escalas) ou trechos de obras. Não que não seja possível analisar tais tipos de sons complexos (na verdade, o espectro de frequência de trechos e frases musicais permitem reconhecer padrões extremamente interessantes), mas para nosso objetivo buscaremos analisar sons mais simples, que possam ser comparados com outros instrumentos executando a mesma nota musical. Como dito anteriormente, através dessa análise conseguiremos entender os aspectos físicos que diferem os timbres dos instrumentos, e para que haja uma comparação justa, os instrumentos analisados deverão executar a mesma frequência a ser comparada.

Os nossos exemplos serão dados com a execução da nota A4 (notação científica para a nota Lá de 440 Hz), através de um saxofone tenor. Tal escolha não tem motivação científica; apenas o carinho do autor por tal instrumento. Não exemplificaremos com outros instrumentos, mas o processo é análogo para qualquer um, como também para

qualquer frequência executada. Mais uma vez, o professor terá liberdade total nessas escolhas.

Sons à obra!

4.4.4 Analisando o som

Para analisar um som, o programa Audacity lê arquivos nos formatos MP3 ou WAV. Além disso, também é possível gravar um áudio na própria interface do programa, conforme orientação abaixo.

Recomendamos que o áudio utilizado tenha uma extensão mínima de 3 segundos. Este é um tempo suficiente para que os alunos possam perceber o som e suas características. Um tempo menor do que este pode distorcer a interpretação do aluno, e impossibilitar a comparação com os sons digitais que iremos criar.

Ao importarmos ou gravarmos um áudio no Audacity, o programa nos fornece imediatamente o formato da respectiva onda sonora digital. É necessário que façamos uma breve, mas importante observação: vimos que as ondas sonoras se propagam de forma contínua no tempo e no espaço. Quando representadas em formato digital, o processador converte o comportamento contínuo (também chamado de analógico) em uma série de valores discretos (por consequência, descontínuos). Tais valores são representações numéricas (binárias) que representam as amostras (também chamadas de *samples*) do som. Esta transformação é chamada de **conversão analógica/digital** (CAD). Neste caso inicial, em que tocamos um instrumentos musical e gravamos este som para que o computador o interprete, estamos convertendo um som analógico em um som digital. No momento de nosso experimento em que criarmos ondas digitais para depois reproduzi-las, faremos o processo oposto: criaremos sinais digitais representados por números binários, que serão convertidos em sinais analógicos por meio de um processo de **conversão digital/analógica** (CDA).

Não exploraremos a fundo esses assuntos, mas são de extrema importância no estudo e análise de áudio. Para os interessados em aprofundar o tema, o *Processamento Digital de Sinais* é uma vasta área de estudos de diversas áreas, como a Matemática, Engenharia Elétrica e Produção Musical. Para nosso objetivo pretendido, introduziremos um conceito importante da análise de sinais: a **amostragem**.

Como vimos, o processamento digital do áudio transforma informações contínuas em discretas. Para isso, utiliza o conceito de amostragem. Basicamente, trata-se da conversão do analógico para o digital, realizada por uma sequência de amostras da variação de voltagem do sinal original. Estas amostras são arredondadas para o número mais próximo da escala usada, e depois convertidas em números digitais binários, que são armazenados na memória do processador.

A seguinte questão surge naturalmente: qual o número de amostras devemos tomar para analisar-se um som? E de que forma faremos isso? Cada amostra é medida em um intervalo fixo de tempo. Chamaremos de **taxa de amostragem** o número de vezes em que se realiza a amostragem em determinada unidade de tempo. Convencionalmente, medimos essa taxa em *Hertz*, e tomamos a taxa de amostragem no valor de 44.100 *Hz*: ou seja, são tomadas 44.100 medidas da variação de voltagem do sinal em um segundo. Essa medida é utilizada, por exemplo, em um áudio de CD. Quanto maior a amostragem, mais precisa é a representação do sinal. E o porquê de tomarmos a taxa como 44.100 *Hz*? Pelo simples motivo de que o ouvido humano é capaz de ouvir frequências entre 20 e 20.000 *Hz*; ou seja, a taxa de amostragem escolhida é mais do

que o dobro da frequência máxima percebida por nossos ouvidos, sendo suficiente para representação dos sons que estamos acostumados a perceber.

Voltemos ao nosso experimento. Emitiremos a nota A4, de 440 Hz , com o saxofone tenor. Ao gravar esse som no programa, obtemos a seguinte representação gráfica da onda sonora, demonstrada na imagem abaixo.

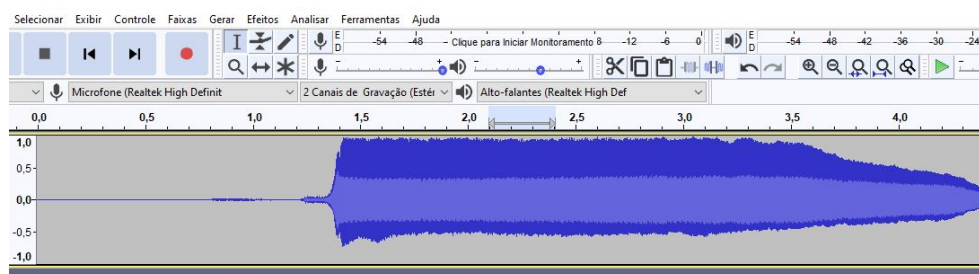


Figura 4.4: Representação gráfica no Audacity da nota A4, de 440 Hz , emitida por um saxofone tenor.

Esta imagem meio “estranha” não nos dá muitas informações sobre o som produzido. Afinal, como podemos perceber algum tipo de padrão de frequência e periodicidade nesse sinal que parece tão disforme?

Notemos que a frequência de som produzida é de 440 Hz , ou seja, o padrão de onda se repete 440 vezes por segundo! Obviamente, tentar observar tais padrões na escala apresentada pela interface do programa é uma tarefa praticamente impossível. No entanto, a riqueza de recursos do Audacity permite que ampliemos a escala do tempo, vendo com maiores detalhes o comportamento da onda em intervalos menores de tempo. Fazendo isso, podemos observar e reforçar com os alunos que é realmente possível identificar um padrão de periodicidade, e como o formato de onda encontrado assemelha-se ao gráfico de uma função trigonométrica!

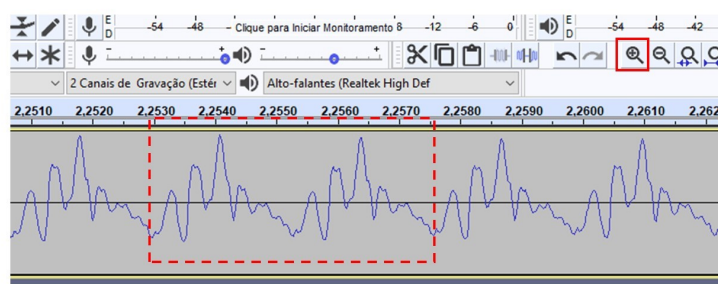


Figura 4.5: Padrão periódico da nota A4, e a função *Aumentar Zoom* do Audacity.

Até o momento, identificamos o padrão que uma onda sonora com frequência bem definida apresenta. Veremos agora como decompor essa onda sonora complexa, e como representá-la como uma sobreposição de ondas sonoras mais simples. Para tal, faremos uma Análise do Espectro de Frequência do som, utilizando um recurso do Audacity que baseia-se no algoritmo **Fast Fourier Transform**.

4.4.5 O espectro do som

Para realizar tal análise, escolheremos um intervalo de tempo em média de um segundo do som executado. Não analisaremos o período inteiro do som, pois é normal que a execução do músico/musicista possua pequenas variações durante o período tocado, e isso pode dar divergências sutis na análise das frequências. Após escolhido o período a ser analisado, usaremos a função *Analisar Espectro de Frequência* do Audacity, conforme instrução abaixo.

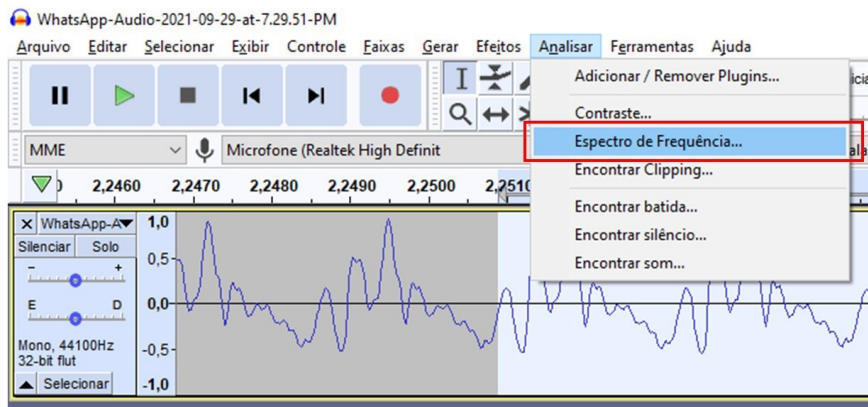


Figura 4.6: A função *Analisar Espectro de Frequência* do Audacity.

O resultado obtido é o **espectro de frequência** do som estudado. O espectro de som é uma representação de um som - geralmente uma pequena amostra de um som - em termos da quantidade de vibração em cada frequência individual. Geralmente é apresentado como um gráfico da intensidade ou pressão do som em função da frequência. A intensidade ou pressão é geralmente medida em decibéis e a frequência é medida em vibrações por segundo (ou Hertz) ou milhares de vibrações por segundo (kiloHertz, kHz). Podemos pensar na análise do espectro de som como uma receita de som: pegue essa quantidade dessa frequência, adicione essa quantidade dessa frequência, e mais um pouco da outra frequência, até que tenhamos uma boa representação de um som mais complexo.

A imagem obtida do espectro apresenta alguns picos “montanhosos”. Tais picos indicam as principais frequências que compõem o som, e suas respectivas amplitudes. Ao passarmos o mouse por cada um destes picos, o programa nos dá a frequência predominante em Hertz e sua amplitude. Cada uma dessas frequências representa um harmônico do instrumento executado: o primeiro pico representa a frequência fundamental, ou primeiro harmônico: esta é a frequência do som que nosso ouvido interpreta (ou seja, os 440 Hz). Os próximos picos representam as frequências dos próximos harmônicos que compõem o som. Tecnicamente, um som possui infinitos

harmônicos; no entanto, o leitor que acompanhou as duas primeiras partes deste texto lembrar-se-á de um teorema estudado na convergência das séries de Fourier, que diz (usando a linguagem do tema atual) que a amplitude dos harmônicos de um som aproxima-se cada vez mais de zero à medida que analisamos harmônicos cada vez mais altos (o Lema de Riemann-Lebesgue, encontrado no Teorema 6). Desta forma, para obtermos uma boa representação do som estudado (seja esta sonora ou matemática), basta analisarmos um número finito de harmônicos. Pela simplicidade do objetivo dessa proposta de aula, analisaremos até o **quinto harmônico** do som do saxofone tenor.

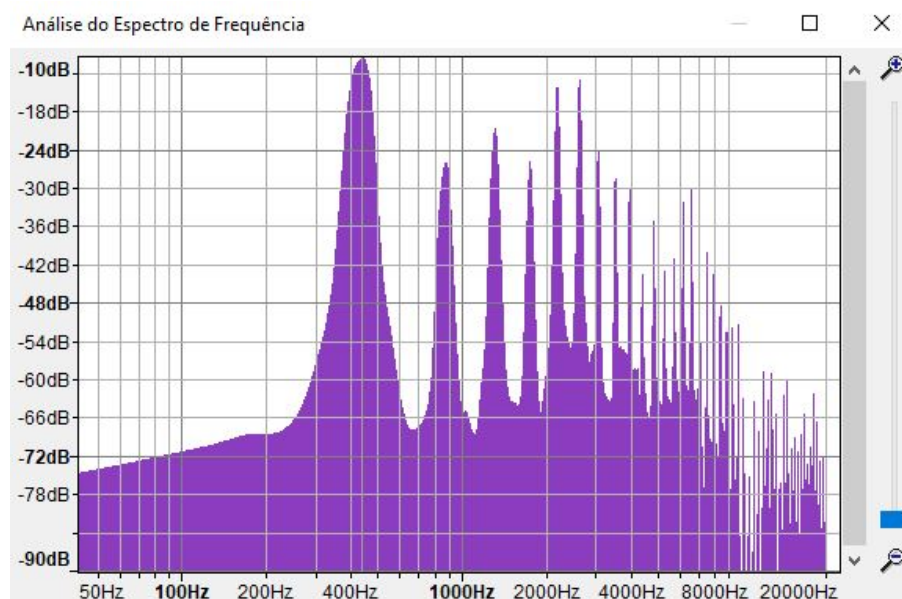


Figura 4.7: O espectro do som do A4, de 440Hz .

Utilizaremos uma tabela para nos auxiliar em nossas futuras construções. É importante que este momento seja bem explorado com os alunos, pois tais informações serão fundamentais para a construção das ondas senoidais digitais e as representações gráficas e matemáticas de tais ondas. Associaremos as frequências e amplitudes de cada harmônico com as respectivas propriedades de altura e intensidade dos sons produzidos (veremos mais adiante que a unidade de medida dB é uma grandeza relativa. No Audacity, as unidades em decibéis são dadas em valores negativos).

Frequência	Amplitude
440 Hz	-9,7 dB
880 Hz	-25,9 dB
1320 Hz	-20,6 dB
1760 Hz	-25,8 dB
2200 Hz	-13,2 dB

Tabela 4.1: Tabela com as frequências e amplitudes dos cinco primeiros harmônicos da nota A4.

4.4.6 Produzindo sons digitais

Um dos recursos mais intrigantes do Audacity é a possibilidade de programar e reproduzir ondas senoidais, especificando sua frequência e sua amplitude. A ideia é explorar junto aos alunos o que as alterações de frequência e amplitude (representadas em Hertz e decibéis, respectivamente) ocasionam nos sons produzidos. Exploraremos também qual o efeito de tocarmos estes sons simultaneamente, e se alterar as frequências das ondas muda nossa percepção de se os sons soam bem ou mal juntos (em linguagem musical, são consoantes ou dissonantes). Finalmente, reproduziremos as ondas senoidais baseadas nas frequências e amplitudes encontradas na análise do espectro do som, sobrepondo-as e vendo se o som resultante assemelha-se, de alguma forma, com o som original executado.

O programa Audacity possui a função *Gerar Tom*, que permite criar ondas digitais (no formato senoidal, quadrada e dente de serra) especificando sua frequência (Hz), amplitude (que pode variar de 0 a 1) e sua duração em segundos. Antes de representarmos os harmônicos do som estudado, nossa proposta é realizar alguns experimentos com os alunos, alterando frequências e amplitudes das ondas senoidais e vendo como essas mudanças alteram o som percebido. Neste momento, o professor poderá também explorar as alterações nos gráficos de funções senoidais quando são alteradas suas amplitudes e frequências. Tal assunto, no entanto, também será mencionado quando representarmos as ondas senoidais dos harmônicos no Geogebra.

Recomendamos que a primeira onda senoidal seja criada com a mesma frequência do som original estudado (no nosso caso, $440 Hz$). Isso possibilita que o professor explore as comparações do som digital com o som do instrumento: suas semelhanças (no caso, dar ênfase à mesma frequência / nota executada) e suas diferenças (como timbre e intensidade). Como padrão, utilizaremos a amplitude no valor de 0,5, e as diferenças em amplitudes serão nossa primeira experiência de percepção sonora. As especificações dessa onda são mostradas a seguir.

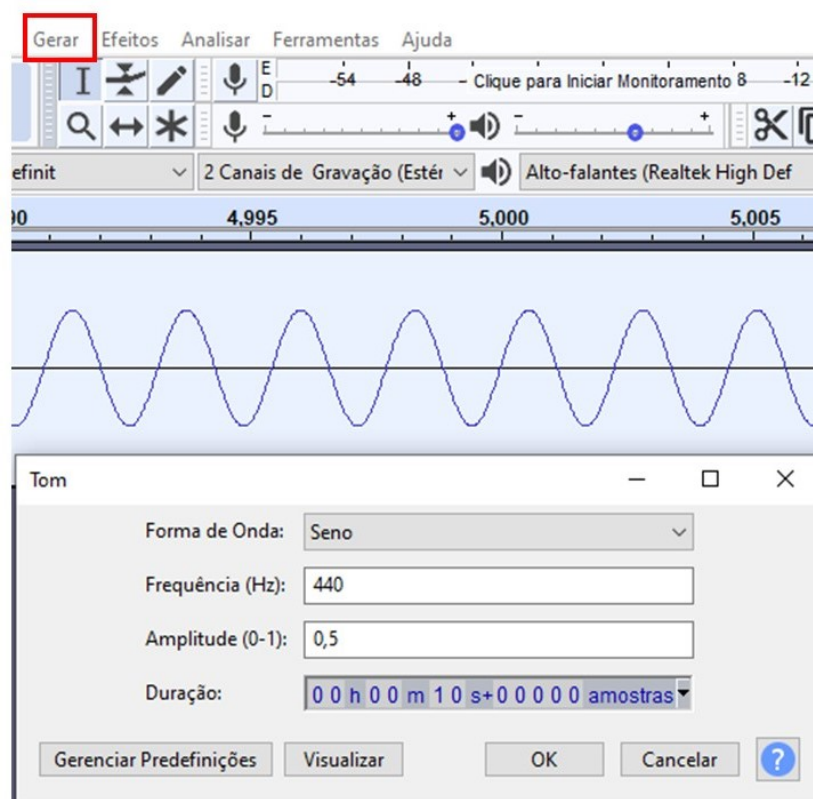


Figura 4.8: A função *Gerar Som* e a onda senoidal de 440Hz , com amplitude 0,5.

Criemos uma nova onda senoidal, de mesma frequência, mas com o dobro da amplitude original (ou seja, 1,0). Ao reproduzir o novo som, o professor poderá explorar qual a percepção da turma de alunos com essa alteração: o som ficou mais forte ou mais fraco? O volume (ou intensidade) do som foi alterado? E de que forma? Da mesma forma, o professor pode reduzir a amplitude original (para 0,25, por exemplo), e explorar essa alteração com os alunos, associando o aumento e diminuição da amplitude da onda com intensidades de som maiores e menores, respectivamente. Demos um único exemplo, mas o docente é livre para explorar esse conceito de outras formas: por exemplo, gerando ondas de frequência diferentes mas de mesma amplitudes nos faz perceber sons de diferentes alturas (diferentes notas), mas de mesma intensidade.

Estudaremos agora quais consequências que as alterações de frequência ocasionam na percepção do som. Para isso, manteremos a amplitude da onda senoidal original, e alteraremos a frequência para o dobro da frequência original (ou seja, 880 Hz , a nota $A5$). Ao reproduzirmos esse novo som individualmente, podemos explorar com os alunos qual a percepção da turma: quais as semelhanças com o som inicial (a intensidade e a semelhança das notas musicais) e quais as diferenças (se o segundo som é mais agudo - ou fino - do que o primeiro, por exemplo). Analogamente, criando uma onda senoidal com metade da frequência original (220 Hz , a nota $A3$), exploraremos se tal som é mais grave - ou grosso - que o original.

Neste momento, o professor poderá explorar o conceito de consonâncias musicais, apresentando o intervalo musical mais perfeito: o intervalo de **oitava**. Tal intervalo é obtido dobrando-se a frequência de um determinado som: em nosso exemplo, a onda senoidal de 880 Hz representa a nota musical da onda de 440 Hz tocada uma oitava acima, e a de 220 Hz uma oitava abaixo. Tais ondas digitais também poderão ser

tocadas simultaneamente, alternando-as (por exemplo, a de 440 e a de 880 Hz , a de 440 e a de 220 Hz e as três simultaneamente) e explorando suas relações de consonância: essas notas soam bem se tocadas ao mesmo tempo? A possível percepção da sala de aula será que a resposta dessa pergunta é *sim*.

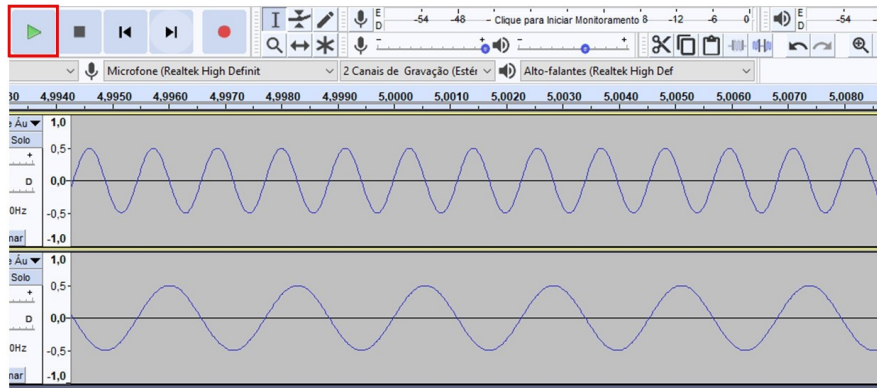


Figura 4.9: As ondas senoidais de 440 Hz e 880 Hz , tocadas simultaneamente.

Poderão ser explorados também outros intervalos e relações de consonância: o que acontece quando reproduzimos uma onda senoidal com frequência que seja um múltiplo inteiro da frequência original? Por exemplo, tomando a onda sonora de 1320 Hz (o triplo da frequência original), obtemos o intervalo de quinta (a nota $E5$), que também é considerado uma consonância musical perfeita. Qual será a percepção dos alunos? Estes sons combinam? Combinam mais ou menos do que o intervalo de oitava? As relações encontradas por Pitágoras podem ser exploradas usando o mesmo raciocínio. O intervalo de terça, por exemplo (considerado uma consonância imperfeita), pode ser obtido gerando uma onda senoidal com frequência cinco vezes maior do que a original (ou seja, 2200 Hz , a nota $C\#7$). Nota-se, no entanto, que a nota da frequência original é muito mais grave do que a atual: o professor poderá, nestes casos, dividir a frequência por múltiplos de 2, obtendo a mesma nota oitava(s) abaixo, permitindo uma melhor percepção dos alunos. Podemos, por exemplo, dividir a frequência de 2200 Hz por 4, obtendo a frequência de 550 Hz , a nota $C\#5$. Ao compararmos a razão entre essas frequências, obtemos

$$\frac{550}{440} = \frac{5}{4},$$

a razão do intervalo de terça obtida por Pitágoras. Mais uma vez questionamos a turma: esse novo intervalo obtido soa bem? Soa melhor do que os dois intervalos obtidos anteriormente?

Finalmente podemos explorar um intervalo mencionado anteriormente, que por muito tempo foi considerado um intervalo dissonante e proibido: o **trítono**. Para obter tal frequência, basta calcularmos

$$440 \cdot \sqrt{2} \approx 622, 25$$

e obtemos o intervalo de trítono (ou intervalo de quarta aumentada / quinta diminuto, a nota $D\#5$) referente à frequência de 440 Hz . Será que a turma classificará esse som

como consoante ou dissonante? Qual o sentimento que esse som traz quando o ouvimos? Tal pergunta também pode ser explorada nos outros experimentos, e o professor poderá usar da criatividade e liberdade para testar outros intervalos e frequências.

Para finalizarmos os experimentos com o Audacity, reproduziremos ondas senoidais referentes a cada um dos harmônicos do som do saxofone tenor obtidos através do espectro do som.

4.4.7 Reconstruindo o som

Após realizar os experimentos, explorando os conceitos de intensidade e frequência do som, veremos como construir o timbre do som original estudado através da sobreposição de sons senoidais mais simples, utilizando as frequências e amplitudes encontradas na análise do espectro através do programa Audacity.

Antes de gerarmos tais ondas, transformaremos as amplitudes dos harmônicos, que estão em uma escala logarítmica (a de decibéis), em uma escala linear. Tal transformação tem dois motivos: o primeiro é que a programação da amplitude no Audacity é linear; o segundo é que as amplitudes lineares nos auxiliarão na reprodução gráfica dos harmônicos e da onda sonora original através do aplicativo Geogebra.

Faremos uma breve explanação sobre os decibéis. O **decibel**, usado para mensurar o som e a oscilação na pressão dos meios que atravessa, não é uma unidade de medida! Bom, não como as unidades de medida que estamos mais acostumados: quilômetros, quilogramas, horas, entre outras. O decibel é uma *grandeza adimensional*, ou seja, não há uma unidade física que a defina. O decibel, na realidade, é um quociente de unidades e é uma grandeza relativa.

O decibel não é uma grandeza com crescimento linear: isso significa que um som de 50 *dB* (decibéis) não tem o dobro de intensidade de um som de 25 *dB*. Veremos logo adiante que é bem mais que o dobro, pois o decibel é medido em uma *escala logarítmica*. Por ser uma grandeza relativa, e não absoluta, precisa de uma comparação como referência; esta pode ser especificada ou implícita. O motivo para que a intensidade de um som seja medida em escala logarítmica é simples: a pressão, a potência e a intensidade dos sons captadas pelo ouvido humano compreendem uma extensa faixa de variação. Por exemplo, pessoas sussurrando emitem uma potência de 10^{-9} *W* (watts, uma conhecida unidade de potência). Duas pessoas brigando, discutindo energicamente, geram uma potência sonora de 10^{-3} *W*. Um conjunto tocando a quinta sinfonia de Beethoven pode gerar até 10 *W*. Já um avião a jato gera 10^5 *W*! Desta forma, as escalas logarítmicas são mais adequadas para medir tais grandezas físicas.

A fórmula utilizada para encontrar a quantidade de decibéis em um determinado som é dada por

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right),$$

onde I_{ref} é um referencial fixado. Para encontrarmos a razão de intensidade entre dois sons, usando regras simples de exponenciação, tendo o valor da diferença em decibéis e fixado um referencial, teremos

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right) \Leftrightarrow \frac{dB}{10} = \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right) \Leftrightarrow 10^{\frac{dB}{10}} = 10^{\log_{10}(I/I_{ref})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{I_{ref}} = 10^{\frac{dB}{10}}$$

Desta forma, tomando o exemplo anterior, a razão de intensidade entre dois sons cuja diferença é de 25 *dB* será de

$$\frac{I}{I_{ref}} = 10^{\frac{25}{10}} \approx 316,22,$$

ou seja, um som é aproximadamente 316,22 vezes mais intenso do que o outro!

Com tais definições, utilizando as informações da tabela dos harmônicos analisados pelo Audacity, poderemos representar as amplitudes de forma linear, encontrando as relações de intensidade (amplitude) entre os harmônicos e a frequência fundamental (que será nosso referencial fixado). Fixaremos, ao criar a onda senoidal da frequência fundamental de 440 *Hz*, a amplitude de 0,5, e as amplitudes dos próximos harmônicos podem ser encontradas, utilizando a fórmula acima, e obtendo os valores da tabela a seguir.

Frequência	Amplitude (linear)
440 Hz	0,5
880 Hz	0,011994
1320 Hz	0,040642
1760 Hz	0,012274
2200 Hz	0,223342

Tabela 4.2: Tabela com as frequências e amplitudes lineares dos cinco primeiros harmônicos da nota A4.

Com isso, criaremos as ondas senoidais digitais dos cinco primeiros harmônicos do som original executado pelo saxofone tenor. A proposta é explorarmos com a turma se os sons digitais criados assemelham-se, de alguma forma, com o som original. Para esses experimentos, o Audacity apresenta duas funções interessantes: a primeira é a possibilidade de tocar todas as ondas senoidais simultaneamente. Com isso, é possível verificar, de imediato, se os sons sobrepostos dos cinco harmônicos assemelha-se com o som original. A segunda função é a *Silenciar*, apresentada na próxima imagem.

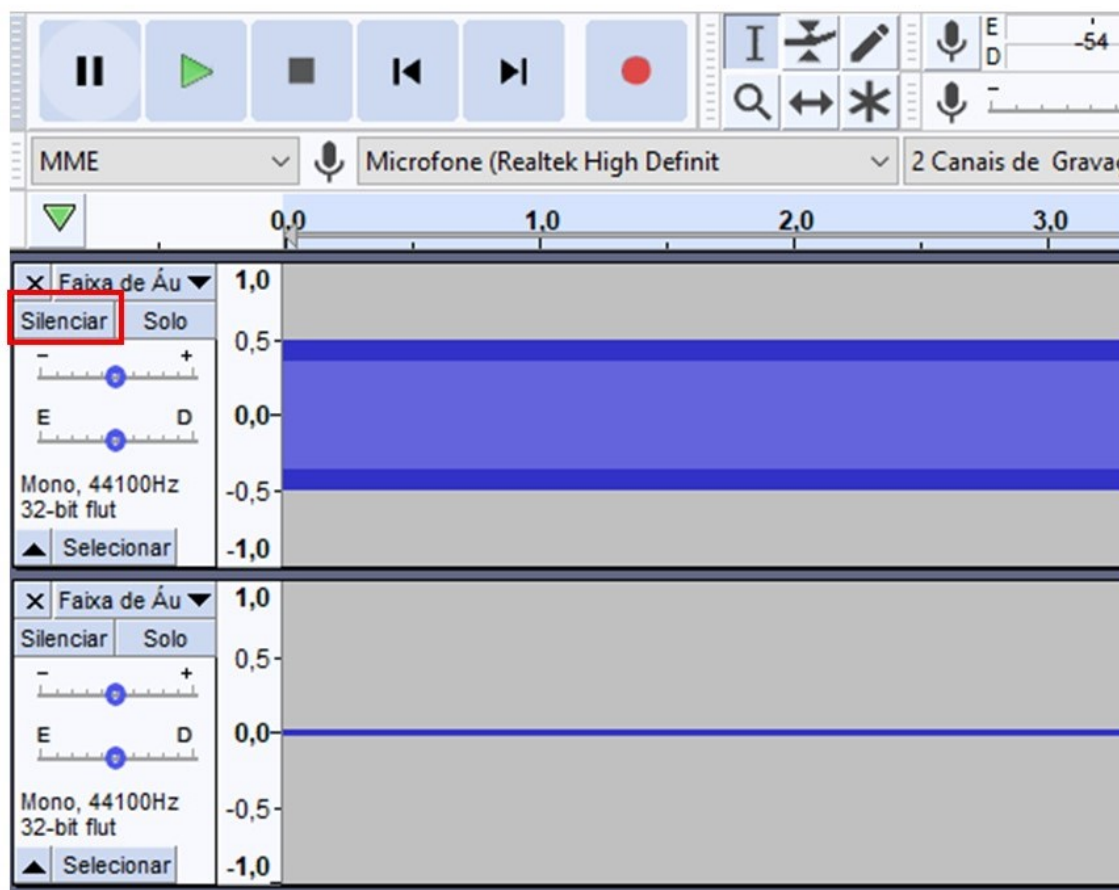


Figura 4.10: A função *Silenciar* do Audacity.

Esta função permite desconsiderar uma ou mais ondas senoidais no momento da reprodução simultânea. Isso permite identificar a influência de determinado harmônico no som resultante; o professor poderá tocar um, dois, três ou quatro harmônicos, permutando-os e explorando com a turma quais dos sons obtidos assemelham-se com o som original.

Da mesma forma que nos experimentos anteriores, o docente terá a liberdade de usar a criatividade e explorar os conceitos de timbre. O que acontecerá se alterarmos as amplitudes dos harmônicos? E se adicionarmos ainda mais harmônicos? Quais as semelhanças do som final obtido com o som original? E quais as diferenças entre os dois sons? O professor também poderá relacionar tais construções com a lógica de funcionamento de alguns instrumentos musicais modernos, como sintetizadores e controladores, mostrando alguns exemplos musicais compostos com tais instrumentos.

Finalizando nossos experimentos, veremos como representar cada um dos harmônicos encontrados graficamente e matematicamente através de funções trigonométricas. Será que, somando-as, o resultado gráfico obtido assemelha-se ao formato da onda do som original?

4.4.8 Representando o som matematicamente

No último dos nossos experimentos, representaremos as ondas senoidais dos harmônicos criadas digitalmente, utilizando as frequências e amplitudes (lineares) dos respec-

tivos harmônicos. Para isso, usaremos o aplicativo **Geogebra**, comumente utilizado no meio dos docentes de Matemática.

Uma consideração importante é que, para representar a onda senoidal da frequência fundamental de 440 Hz , utilizaremos uma espécie de **normalização**. Como vimos anteriormente, para identificar o padrão periódico da frequência fundamental, precisamos dar um “*zoom*” no eixo que representa o tempo. Da mesma forma, se quisermos representar uma função senoidal que se repete 440 vezes em uma unidade de tempo (que podemos fixar como 2π), representaríamos esta na forma

$$f(x) = \text{sen}(440x)$$

No entanto, a representação gráfica desta no Geogebra não seria favorável para analisarmos e compararmos o comportamento da onda. A razão entre as escalas dos eixos das abscissas (que representa o tempo) e o das ordenadas (que representa a amplitude, nesse caso variando de -1 a 1) seria muito discrepante, dificultando a visualização. Por simplicidade, tomaremos que a frequência fundamental de nosso som tem período 2π , de forma que, usando a amplitude fixada em $0,5$, representaremos o primeiro harmônico como

$$f_1(x) = 0,5 \cdot \text{sen}(x)$$

que, conforme imagem abaixo, é de melhor visualização e representação da onda.



Figura 4.11: A função f_1 .

Além disso, essa escolha pode ser aplicada para qualquer frequência inicial escolhida pelo professor, seja esta maior ou menor do que a que escolhemos em nosso exemplo. Como os demais harmônicos são representados por múltiplos inteiros da frequência fundamental, encontramos uma fórmula para representar cada um dos harmônicos do som original, expressa por

$$f_n(x) = a_n \cdot \text{sen}(nx), \quad (4.6)$$

onde $n \in \mathbb{Z}$ representa a razão entre a frequência do n -ésimo harmônico e a frequência fundamental, e a_n sua respectiva amplitude (transformada linearmente).

Antes de representarmos cada onda dos harmônicos individualmente, o professor poderá fazer um exercício semelhante ao de alterar as frequências e amplitudes das ondas senoidais digitais, explorando quais as consequências dessas alterações nos sons obtidos. Neste momento, no entanto, as observações serão associadas às transformações que o gráfico da função seno sofre quando alteramos sua amplitude e frequência.

Para isso, utilizaremos duas variáveis livres, a e b , onde a representará a amplitude da função, e b sua frequência. Representando a função

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(bx),$$

o professor poderá usar a ferramenta **Slider Tool** do Geogebra nas variáveis livres a e b , alterando-as e explorando com os alunos o que tais mudanças ocasionam na

amplitude e na oscilação do gráfico da função senoidal. Se achar conveniente, poderá inclusive chegar na representação dos harmônicos do som original usando a ferramenta de *slider tool*.

Faremos a representação gráfica e matemática de cada harmônico analisado do nosso som original. Usaremos a expressão em (4.6), utilizando as amplitudes e razões entre as frequências de cada um dos harmônicos. Analogamente ao que fizemos ao representar cada harmônico digitalmente com sons, faremos também com as representações matemáticas.

Inicialmente o professor poderá analisar cada função de harmônico individualmente: as diferentes amplitudes e frequências também diferenciam os gráficos entre as funções? Depois, análogo ao que fizemos no experimento de produzir sons digitais, o professor poderá somar as funções senoidais. Nesse momento, recomenda-se que seja ressaltado que o processo de somar as funções tem o mesmo efeito de tocar sons diferentes simultaneamente: a nova função obtida com a soma representa a onda sonora gerada ao tocar dois ou mais sons. E, da mesma forma, o docente poderá somar dois, três ou quatro sons, permutando-os, e verificando as semelhanças e diferenças das novas funções obtidas.

Finalmente, somaremos as funções dos cinco harmônicos do som original. O objetivo é analisar se a função obtida assemelha-se ao padrão periódico da onda acústica original, executada no saxofone tenor e gravada pelo programa Audacity. Observemos abaixo que ambas as representações apresentam semelhanças.

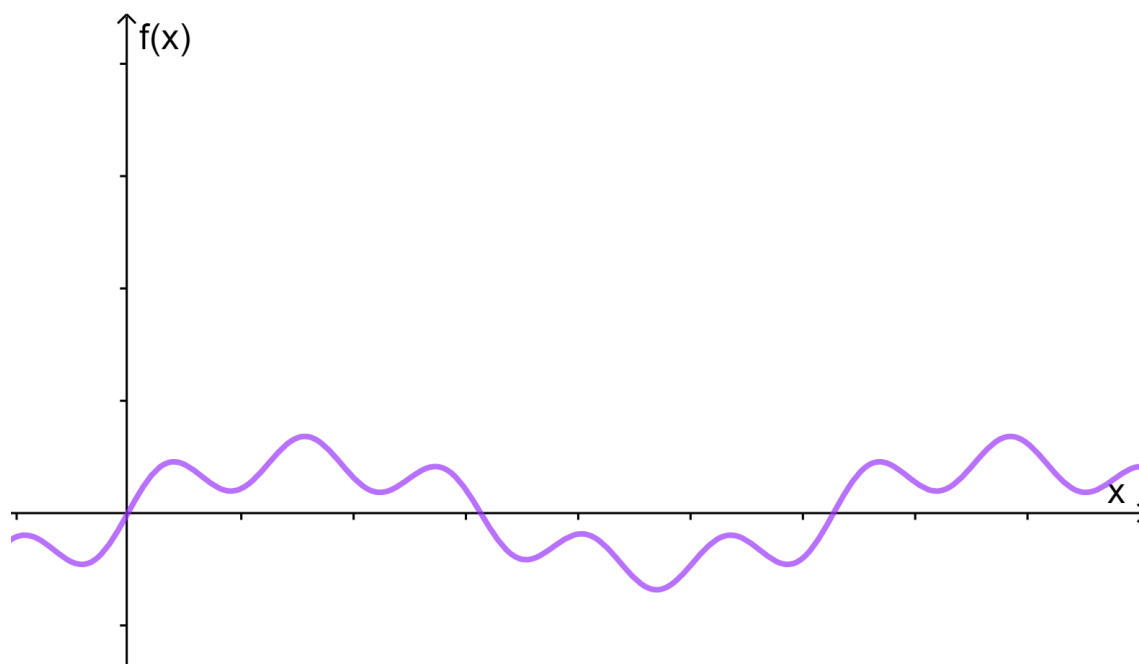


Figura 4.12: A representação matemática da soma dos cinco harmônicos do som original.

Obviamente, não são idênticas. Este fato pode ser explorado com a turma, trazendo à lembrança o conceito de que um som acústico, na realidade, é formado por infinitos harmônicos. Nosso experimento considerou apenas os cinco primeiros; por este motivo, podem existir pequenas diferenças nas representações. À medida que trabalhamos com mais harmônicos, a representação torna-se mais fiel à original.

Estes experimentos, conduzidos de forma extremamente simples, permitem mostrar

uma pequena parcela da beleza da matemática: como conceitos simples, como o de funções trigonométricas, podem unir os mais diferentes assuntos e áreas de estudo - a física, a acústica, a computação, a música, e outros. E, muito mais do que essa união, as atividades escolhidas permitem reforçar a ideia de que a matemática está em tudo ao nosso redor: naquilo que sentimos, vemos e (agora com toda a certeza) ouvimos!

5 Considerações finais

A Análise de Fourier é uma disciplina extremamente bela e elegante. Como dito anteriormente, seu estudo motivou diversos avanços nas teorias, no formalismo e rigor matemático. O estudo da convergência das séries de Fourier é uma excelente introdução aos tópicos mais avançados da análise matemática; é natural seguir com o estudo de medida e integração, equações diferenciais parciais, análise harmônica e muitas outras áreas correlatas. A presente exposição permite que o leitor familiarizado com as disciplinas do cálculo (e com alguns poucos conceitos introdutórios de análise) construa uma boa base para tal sequência de estudos, familiarizando-se com as provas mais rigorosas e formais presentes na análise.

Na terceira seção de nosso estudo vimos uma interessante aplicação das séries de Fourier: a resolução de uma equação diferencial parcial. Esta é uma das muitas aplicações possíveis, que reforça a elegância da teoria. Em outras áreas das ciências, como o processamento digital de sinais (dentre estes o próprio som, objeto de nosso estudo), as séries de Fourier mostram-se extremamente úteis.

Finalmente, como proposta do PROFMAT de aplicação ao Ensino Básico, nosso plano de aula foi construído de forma a ser livremente adaptável ao professor. A ideia principal é mostrar como as temidas funções matemáticas podem ser vistas, pelos alunos do Ensino Médio, como ferramentas para construção de conceitos de nossa realidade. A interdisciplinaridade proposta ainda permite que o plano possa ser aplicado em conjunto com outras disciplinas escolares, destacando ainda mais a importância da matemática.

Bibliografia

- Abdounur, O. J. “Arquétipos e múltiplas representações: um estudo no âmbito das relações entre matemática e música”. Em: *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES"[S.l.]* 15 (1999), pp. 121–136.
- Figureiredo, D.G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 5^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- Garrett, S. L. *Understanding Acoustics: An Experimentalist's View of Sound and Vibration*. 2^a ed. New York: ASA Press, 2020.
- Hobson, E.W. *The Theory of Functions of a Real Variable - Volume 1*. 3^a ed. New York: Dover Publications, Inc., 1957.
- *The Theory of Functions of a Real Variable - Volume 2*. 2^a ed. New York: Dover Publications, Inc., 1957.
- Jr, R. J. Iorio e V. M. Iorio. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. 1^a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- Knopp, K. *Theory and Application of Infinite Series*. 1^a ed. New York: Dover Publications, Inc., 1990.
- Lima, E. L. *Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável*. 12^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- *Curso de Análise*. 1^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.
- *Álgebra Linear*. 9^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- Neto, A. C. Muniz. *Fundamentos de Cálculo*. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática*. 1^a ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971.
- Sethares, W. A. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. 2^a ed. New York: Dover Publications, Inc., 2005.
- Simmons, G. F. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. 2^a ed. New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991.
- Stein, E. M. e R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. 1^a ed. New Jersey: Princeton University Press, 2003.
- Tolstov, G. P. *Fourier Series*. 1^a ed. New York: Dover Publications, Inc., 1976.
- Wilcox, H. J. e D. L. Myers. *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*. 1^a ed. New York: Dover Publications, Inc., 2012.