



Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS A PARTIR DE
UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

Jandir Luiz Pereira dos Santos

Rio de Janeiro
2021

UNIRIO



Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS A PARTIR DE
UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

Professora Orientadora: Prof. Dra. Aline Caetano da Silva Bernardes

Rio de Janeiro

2021

UNIRIO

Catálogo informatizado pelo(a) autor(a)

S237 Santos, Jandir Luiz Pereira dos
UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE
PITÁGORAS A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA /
Jandir Luiz Pereira dos Santos. -- Rio de Janeiro,
2021.
86

Orientadora: Aline Caetano da Silva Bernardes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do
Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação
em Matemática, 2021.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Matemática
problematizada. 3. História da Matemática no ensino
de matemática. 4. Perspectiva da história no ensino
de matemática. 5. Práticas matemáticas históricas.
I. Silva Bernardes, Aline Caetano da, orient. II.
Título.

Jandir Luiz Pereira dos Santos

UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS A
PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

Trabalho de Conclusão de
Curso apresentado ao
Programa de Pós-graduação
em Matemática PROFMAT
da UNIRIO, como requisito
para a obtenção do grau de
MESTRE em Matemática.


Aprovada em 27/10/2021

BANCA EXAMINADORA


**ALINE CAETANO DA SILVA
BERNARDES:07611974785**

Assinado de forma digital por ALINE CAETANO
DA SILVA BERNARDES:07611974785
Dados: 2022.01.06 00:29:15 -03'00'

Prof. Dra. Aline Caetano da Silva Bernardes (UniRio)

Documento assinado digitalmente
 Michel Cambrainha de Paula
Data: 09/01/2022 12:04:45-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Michel Cambrainha de Paula (UniRio)

Documento assinado digitalmente
 CLEBER HAUBRICHS DOS SANTOS
Data: 06/01/2022 20:41:01-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Cleber Haubrichs dos Santos (IFRJ)

Agradecimentos

A Deus, por me dar saúde e persistência para manter o foco ao longo de todo processo de construção do mestrado.

A minha esposa Andreia Rodrigues dos Santos que me apoiou ao longo da trajetória e não me deixou desanimar em nenhum momento, sempre com muito carinho e amor. Muito obrigado por tudo. Te amo minha vida.

Aos meus filhos Júlia e Luiz Felipe que são minha inspiração para me dedicar cada dia mais e buscar ser uma referência e que tenham em mente nunca desistam, mesmo com toda adversidade da vida. Amo vocês.

Aos meus pais que nunca mediram esforços para me dar as melhores condições possíveis para que eu pudesse estudar e lembro-me das conversas onde sempre me disseram que conhecimento ninguém tira e hoje carrego comigo a importância do estudo na minha vida pessoal e profissional. Que Deus os abençoe cada dia mais, amo vocês.

A esta excelente profissional que esteve ao meu lado todo tempo e com muita sabedoria e serenidade sempre foi cirúrgica em suas observações. Te agradeço muito querida professora Aline Caetano, pois desde o primeiro dia de aula eu não tive dúvida de que era você a pessoa ideal para me acompanhar. Para você, querida professora, tenho gratidão eterna por me conduzir até aqui. Você foi perfeita e maravilhosa. Que possa ter mais oportunidade de trabalhar com você.

Aos meus queridos alunos, ao Externato Hilmar por me darem essa oportunidade de dar um olhar diferente para Matemática no dia a dia escolar.

A todos que de alguma forma colaboram para esse trabalho.

Resumo

No presente trabalho, apresentamos uma proposta de ensino para o Teorema de Pitágoras com o objetivo de romper com a visão da matemática não problematizada, em que os conceitos e processos são apresentados como verdades inquestionáveis, prontas e acabadas. Nessa visão, a matemática está ao alcance apenas de pessoas com talento inato, que conseguem produzi-la e reproduzi-la. No lugar disso, buscamos promover uma matemática mais problematizada e inclusiva, que vai além da aplicação de fórmulas em exercícios de resposta fechada e incentiva o estudante a refletir sobre conceitos e processos. Para isso, exploramos três práticas históricas: a da escola pitagórica com os números figurados, a da matemática chinesa em torno do problema de base e de altura e a de Euclides, relativa ao uso do teorema (Livro I de Os Elementos). Nossa proposta é composta por uma série de atividades, implementadas na plataforma Desmos, que foram aplicadas em uma unidade escolar, com estudantes voluntários do Ensino Médio. A escolha por esse teorema deve-se ao fato de ser um tema recorrente na Educação Básica. A experiência proporcionou uma reflexão sobre a forma com a qual o teorema foi utilizado nas civilizações em que as práticas se desenvolveram. Isso levou os estudantes a produzirem diferentes sentidos para o teorema e perceber que o conhecimento em torno dele vai muito além de aplicar uma fórmula para determinar um dos lados de um triângulo retângulo. Os resultados encontrados levam-nos a acreditar que uma abordagem problematizadora da matemática pode auxiliar significativamente a compreensão do teorema e que a história da matemática tem potencial para promover essa abordagem.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, matemática problematizada, história da matemática no ensino de matemática.

Abstract

In the present work, we present a teaching proposal for the Pythagorean Theorem with the objective of breaking with the unproblematic view of mathematics, in which concepts and processes are presented as unquestionable truths, ready and finished. In this view, mathematics is available only to people with innate talent, who are able to produce and reproduce it. Instead, we seek to promote a more problematized and inclusive mathematics, which goes beyond the application of formulas in closed-response exercises and encourages the student to reflect on concepts and processes. For this, we explore three historical practices: that of the Pythagorean school with figured numbers, that of Chinese mathematics around the base and height problem, and that of Euclid, concerning the use of the theorem (Book I of The Elements). Our proposal comprises a series of activities, implemented on the Desmos platform, which were applied in a school unit, with volunteer high school students. The choice for this theorem is due to the fact that it is a recurrent theme in Basic Education. The experience provided a reflection on the way in which the theorem was used in the civilizations in which the practices developed. This led students to produce different meanings for the theorem and realize that knowledge around it goes far beyond applying a formula to determine one side of a right triangle. The results found lead us to believe that a problematizing approach to mathematics can significantly help to understand the theorem and that the history of mathematics has the potential to promote this approach.

Keywords: Pythagoras Theorem, problematized mathematics, history of mathematics in mathematics teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	9
CAPÍTULO I– Perspectivas Teóricas.....	14
1.1. Matemática problematizada x matemática não problematizada.....	14
1.2. Perspectiva da história no ensino de matemática.....	18
1.3. Práticas históricas.....	20
1.3.1. Práticas matemáticas da Escola pitagórica.....	21
1.3.2. Práticas matemáticas chinesas no período do século I da Era comum.....	25
1.3.3. Práticas matemáticas de Euclides em Os elementos.....	28
CAPÍTULO II - METODOLOGIA DA PESQUISA.....	31
CAPÍTULO III - ATIVIDADES PROPOSTAS E ANÁLISE DAS RESPOSTAS.....	35
3.1. Local e participantes	35
3.2. As atividades aplicadas em sala de aula.....	36
3.3. Questionário inicial	37
3.4. Atividade 1: <u>Escola Pitagórica</u>	38
3.5. Atividade 2: <u>Problema Chinês</u>	48
3.6. Atividade 3: <u>Demonstração de Euclides</u>	57
3.7. Questionário Final	59
3.8. Algumas reflexões sobre a experiência	62
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	68
APÊNDICES.....	69

INTRODUÇÃO

Quando falamos em ensino de matemática sempre nos deparamos com muitos obstáculos como falta de contextualização, dificuldades operacionais e sensação de que os conceitos simplesmente surgiram sem nenhum processo histórico de desenvolvimento - sujeito a mudanças, a influências sociais e culturais, entre outros, para de fato chegar aos livros didáticos. Justamente pensando na importância e dando relevância ao contexto histórico, elaboramos uma proposta que integra a história da matemática ao ensino de matemática.

Um tema muito frequente no dia-a-dia do professor de matemática é o Teorema de Pitágoras, mesmo tendo várias demonstrações e atividades, ainda assim, no fim, os alunos fixam somente a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, sem saber muitas das vezes o que significa. Partindo disso, buscou-se desenvolver uma proposta de ensino para o Teorema de Pitágoras a partir de uma perspectiva histórica.

Acreditamos que ao trazer momentos do desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras e não somente a operacionalização do teorema, poderá levar os alunos a refletirem e questionarem, não só sobre sua relevância, como também sobre seus diferentes usos ao longo do tempo e de diferentes práticas.

Tomando os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs):

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural (BRASIL, 1998, p. 42).

Podemos observar que a História da Matemática é proposta como uma perspectiva no processo de ensino-aprendizagem, com o intuito de desenvolver atitudes e valores nos educandos em relação ao conhecimento matemático desenvolvido por várias culturas e povos no transcorrer da história.

No que diz respeito ao ensino de matemática, o pesquisador Victor Giraldo considera-o marcado por uma visão não problematizada, ou seja, baseando-se apenas na consideração da “matemática estabelecida”, como uma referência de conhecimento “*que sempre foi e sempre será da forma que é hoje, ou que evolui linearmente de um estado visto como "mais atrasado" para um estado "mais avançado", por meio da inspiração isolada de "gênios com talento inato"*” (Giraldo, 2019, p. 8, grifos no original).

Além disso, Giraldo (2019, p.10) coloca que: “A visão da matemática como “ciência do rigor e da certeza” corresponde a um retrato estático da matemática, e não a suas formas históricas e sociais de produção”. De acordo com Giraldo (2019), a visão não problematizada do ensino de matemática pode contribuir para uma imagem negativa dessa ciência por parte dos estudantes:

A matemática é produzida historicamente pela “inspiração isolada de gênios inatos”. Então, seu entendimento só é acessível a pessoas com “talento inato”. Isto é, aqueles que não nascem com “talento matemático” jamais serão bons em matemática. O trabalho do professor de matemática seria, então, apenas identificar os estudantes “talentosos” e separá-los dos “fracos”. (Giraldo, 2019, p. 10, grifos no original)

Em contrapartida, partimos de uma proposta de uma matemática problematizada que “privilegia a produção de sentidos e de afetos” (Giraldo, 2019, p. 8) e não somente fazer “exposição de fatos, procedimentos e informações.” (Giraldo, 2019, p. 8). Sem fazer com que o teorema trabalhado corra o risco do conteúdo ficar incompleto ou raso para alguém que participe, esse ponto é importante no momento de organizar uma proposta que tenha essa viés problematizadora, uma vez que “uma abordagem que ultrapasse a exposição de fatos e procedimentos estabelecidos, poderia implicar em um “enfraquecimento” ou em uma “superficialização” do conteúdo.” (Giraldo, 2019, p. 8).

Motivados pelas reflexões trazidas por Giraldo, o presente trabalho também buscou investigar que contribuições a história da matemática pode trazer para o ensino do Teorema de Pitágoras. A ideia foi desenvolver uma proposta de ensino que rompa com a visão não problematizada da matemática e, portanto, que buscasse promover uma exposição problematizada da matemática. Para isso, momentos do desenvolvimento histórico, que podem ser relacionados ao tema

proposto, foram selecionados. Desse modo, colocamos a seguinte questão de pesquisa: *Usar momentos do desenvolvimento histórico dos conceitos referentes ao Teorema Pitágoras pode auxiliar a desenvolver uma visão problematizada sobre esse teorema?*

Entendemos que a história da matemática é adequada para a nossa proposta, pelo fato de apresentar diferentes práticas culturais e sociais (Roque, 2012) que ajudam a contrapor com a matemática não problematizada. E assim, os estudantes terão contato com formas diferentes de fazer matemática.

É comum que os alunos pensem que, em qualquer conteúdo programático de exatas, especialmente a Matemática, as aulas resultam em fórmulas para serem aplicadas em exercícios já determinados pelos docentes, que muitas vezes há pouca ou nenhuma conexão com a realidade.

É interessante que o aluno possa perceber que os conteúdos apresentados nos livros didáticos não surgiram do jeito que hoje conhecemos, muito pelo contrário, os conteúdos passam por diferentes escritas e abordagens ao longo dos tempos. A história mostra que não existe uma matemática única e absoluta que foi progressivamente descoberta ao longo dos tempos. O que existem são práticas matemáticas que se manifestaram dentro de contextos culturais específicos, em diferentes civilizações, territórios e períodos da história. Essas práticas possuem um contexto específico de desenvolvimento. Assim, a matemática apresentada nos livros didáticos não nasceu pronta e acabada. Com isso, uma perspectiva histórica poderá ampliar a visão dos alunos e contribuir para desconstruir a ideia pronta de aprender e desenvolver matemática por meio de fórmulas e exercícios somente.

Para os alunos, sujeitos da pesquisa, esperamos que a experiência com a história da matemática possa proporcionar uma visão diversificada sobre o Teorema de Pitágoras, a partir do contato com algumas das práticas culturais em torno desse teorema ou que podem ser associadas a ele com as lentes do presente.

A proposta de ensino para o Teorema de Pitágoras apresentada nesta pesquisa também foi inspirada pelas ideias de Fumikazu Saito (2018). No contexto do uso da história da matemática no ensino de matemática, Saito chama a atenção

para a importância de ter um olhar crítico para o tipo de narrativa histórica utilizada. Esse pesquisador diferencia dois tipos de perspectiva histórica, denominadas por ele como tradicional e atualizada. Sobre perspectiva tradicional temos que ela “ênfatisa apenas a coerência interna do discurso matemático, tendo como ponto de partida o que nós entendemos por matemática nos dias de hoje.” (Saito, 2018, p. 608). E sobre a perspectiva atualizada temos uma abordagem que “valoriza os contextos de elaboração, transformação, transmissão e disseminação do conhecimento matemático em diferentes épocas e culturas” (Saito, 2018, p. 608).

Apesar de partir de um conteúdo do currículo, buscamos alinhar-nos à perspectiva histórica atualizada. Exploramos os diferentes raciocínios e procedimentos que permeiam algumas práticas históricas em torno do Teorema de Pitágoras, da forma mais próxima possível com a qual são apresentadas em fontes históricas primárias e secundárias. Além disso, o que determinou a escolha das práticas a serem exploradas foi justamente os diferentes procedimentos e raciocínios para contrapor com os atuais.

Esperamos que a proposta de ensino leve os participantes a perceber a existência de diferentes formas do uso do que hoje é conhecido como Teorema de Pitágoras. Esperamos também que eles possam perceber que a matemática muda ao longo do tempo, em particular, o Teorema de Pitágoras é diferente em cada uma das práticas estudadas. Esperamos ainda que com a realização das atividades propostas, junto da apresentação histórica dos momentos determinados, os participantes possam problematizar o teorema.

Em relação aos professores, esperamos que a proposta ofereça um material que possa auxiliar o desenvolvimento desse tópico do currículo de matemática da Educação Básica - o Teorema de Pitágoras. Esperamos ainda que os docentes possam entender o conceito de visão problematizada acerca do Teorema de Pitágoras e que essa visão possa nortear outras discussões e atividades na sala de aula, seja presencial ou online.

O presente trabalho traz no primeiro capítulo as referências teóricas que embasam nossa proposta e apresentamos as práticas históricas escolhidas para

serem exploradas nas atividades; no segundo capítulo, temos a metodologia utilizada para o desenho das atividades, para a coleta e para a análise dos dados; no terceiro capítulo, apresentamos o local onde a proposta foi aplicada, o questionário inicial, as atividades aplicadas, o questionário final e refletimos sobre as respostas apresentadas pelo alunos. Finalizamos, fazendo as considerações finais sobre a pesquisa como um todo.

CAPÍTULO I – PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Com a intenção de trazer uma referência para as discussões que foram levados para a sala de aula no momento de apresentar a proposta de ensino para os alunos, aqui trazemos as ideias que nortearam a nossa pesquisa, coleta de informações e a futura análise de resultados e as considerações a serem feitas.

1.1 Matemática problematizada x matemática não problematizada

Para desenvolver esta seção tomaremos como referência dois textos: o primeiro do livro “O Saber do Professor de Matemática Ultrapassando a Dicotomia Entre Didática e Conteúdo”, em que no capítulo I Tatiana Roque e Victor Giraldo falam sobre a “História e Tecnologia na Construção de um ambiente Problemático para o Ensino de Matemática” e o segundo o texto de Victor Giraldo “Que Matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada”.

O primeiro tem como proposta apresentar como um dos obstáculos para o desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo está relacionado a uma visão não problematizada da matemática. Ou seja, tanto na escola assim como no ensino superior, os conteúdos são apresentados, em geral, de maneira não problematizada, isto é, *“sua existência, sua importância e seu papel na matemática contemporânea são assumidos como dados arbitrariamente, sem que sejam levadas em consideração as demandas e tensões que impulsionaram sua gênese.”* (Roque & Giraldo, 2014, p. 14, grifos no original). O segundo tem como proposta debater sobre a importância da matemática para a formação de professores “promovendo um deslocamento do lugar usual de *dicotomizações e hierarquizações tanto nas propostas e nas concepções* como nas formas de pensar”. (Giraldo, 2019, p.3, grifos no original)

O foco será na noção da perspectiva problematizada da matemática, a qual foi introduzida em (Roque e Giraldo, 2014) e depois foi retomada por (Giraldo, 2019). Antes de dizer o que significa tal perspectiva, é importante compreender o que é considerado como “problema” na matemática, para que possamos nortear a proposta a ser desenvolvida. Desta forma,

A gênese e o desenvolvimento das ideias matemáticas se dão em um *ambiente problemático* por natureza, no sentido de que são motivados por problemas, externos ou internos à própria matemática. O adjetivo “problemático” possui, normalmente, uma acepção negativa: “aquilo que traz um problema”, como algo que introduz um inconveniente, de resultado duvidoso, ou seja, aquilo que traz uma complicação que deve ser contornada. Assim, uma situação problemática seria uma situação intrincada (e possivelmente indesejada). A palavra “problema” é empregada em sua acepção comum, como um obstáculo, como algo difícil de explicar ou de resolver. Mas em matemática este termo adquire outra conotação: um problema é uma situação que deve ser resolvida por algum método, técnica ou ferramenta matemática. O significado de “problemático” que queremos destacar aqui é a de um contexto composto por problemas, que são o motor da matemática. (Roque e Giraldo, 2014, p. 15, grifos no original)

Partindo disto, devemos entender o funcionamento no ambiente educacional e quais as expectativas dos alunos. Vale lembrar que a ideia de melhoria só tem sentido à medida que os alunos dão um retorno satisfatório dentro dos temas abordados. É muito comum a falta de interesse dos alunos no ensino de matemática, justamente pelo fato de enfatizar e os mesmos conceberem a matemática que já se fez e que se apresenta como um saber acabado. Tal concepção ou visão pode passar a impressão de que não há espaço para alguma novidade, considerando um ambiente educacional com alunos protagonistas. Assim,

Mas como os alunos poderiam entrar em contato com a matemática que se faz hoje, se sua linguagem é complexa e especializada? *Como poderíamos, então, reaproximar o ensino da matemática do ambiente problemático da gênese de seus conceitos, restaurando os vínculos entre o ensino e a própria atividade de produção da matemática?* (Roque e Giraldo, 2014, p. 20, grifos no original)

A história da matemática pode ser útil justamente para que as ideias supracitadas sejam contempladas, assim concordamos com (Roque e Giraldo, 2014, p.16, grifos no original) de que “[...] que o uso da história da matemática e das

tecnologias computacionais na formação de professores pode ser um caminho para essa recontextualização, ou *reproblematização*.”

Ainda segue,

É justamente para a superação desta dificuldade que a história da matemática pode ter um papel. Como ensinamos, na realidade, uma matemática que já foi desenvolvida há muitos anos, podemos olhar para o momento em que se criaram os objetos e em que se demonstraram os resultados que hoje consideramos clássicos, buscando enxergar as dificuldades com as quais os matemáticos tiveram que se deparar e as ferramentas que tiveram que inventar para vencê-las. (Roque e Giraldo, 2014, p. 20)

Percebendo que o interesse dos alunos com os temas desenvolvidos vem diminuindo ao longo dos anos, trazer a história da matemática na rotina do ensino pode ser um caminho para retomar o interesse pela matemática. Perceber que o processo de construção tem uma história, pode estimular o estudante a se sentir parte da construção do conhecimento. Visto que,

A história da matemática é importante para o ensino porque nos permite inverter a ordem lógica da exposição e substituí-la pela ordem da invenção, prevenindo-nos de confundir a matemática já feita com o modo como ela foi feita através dos séculos. A matemática se constitui, até hoje, a partir de problemas, que podem ser problemas externos ou internos. São problemas que aproximam a matemática da experiência e que constituem o campo intuitivo do matemático. Sendo assim, por meio da história da matemática é possível recuperar o ambiente problemático em que seus objetos foram definidos, seus métodos inventados e seus teoremas demonstrados, enfatizando que a matemática se relaciona, de modo concreto, com os seus problemas.

O estudo dos problemas da história da matemática pode fornecer o lado “concreto” da atividade matemática que tanto buscamos. Tornar a matemática mais concreta não precisa passar, necessariamente, por aproximá-la de atividades cotidianas como ir ao mercado, interpretar um gráfico no jornal ou analisar as formas geométricas da natureza. A matemática evolui, muitas vezes, por demandas internas, que não possuem nenhuma relação com o senso comum ou com os fenômenos naturais. É claro que o trabalho matemático está sempre inserido em um campo cultural e sofre influências de fatores externos (sejam estes sociais, políticos ou outros). (Roque e Giraldo, 2014, p. 21)

Acreditando que a história da matemática é importante, pelos motivos apresentados, cabe analisar o que ela traria de positivo no processo de ensino-aprendizagem. Nessa direção, Victor Giraldo traz a noção de matemática problematizada x matemática não problematizada:

Pelo termo matemática não problematizada, referimo-nos a uma concepção da matemática estabelecida, como um corpo de conhecimentos que sempre foi e sempre será da forma que é hoje, ou que evolui linearmente de um estado “mais atrasado” para um estado “mais avançado”, por meio da inspiração isolada de “gênios com talento inato”. Por matemática problematizada, em contrapartida, entendemos uma concepção de possibilidades matemáticas, situadas em diversos contextos e práticas históricas e sociais de produção e de mobilização de saberes e de formas de estar no mundo. Uma abordagem de matemática de forma problematizada privilegia a produção de sentidos e de afetos, em lugar da exposição de fatos, procedimentos e informações. (Giraldo, 2019, p.8)

É com essa ideia que há a possibilidade de mostrar para os alunos que a matemática sempre esteve muito mais próxima deles do que poderiam imaginar. O fato da matemática ter uma história e que ainda continua a se desenvolver traz de imediato a questão do erro nas construções de teoremas entre outras ideias dentro do campo da matemática. Desta forma,

Ao contrário, os desenvolvimentos históricos da matemática como ciência são, em geral, permeados de incerteza e de erro. Um exemplo bastante evidente é o das Geometrias não Euclidianas, cujo desenvolvimento histórico e a consolidação como área de pesquisa foram impulsionados pelos erros nas tentativas de demonstração do Postulado das Paralelas como teorema. (Giraldo, 2019, p.9)

Há a necessidade do aluno acreditar que aprender matemática é para todos, que apesar de ser tratada como um ciência do rigor e da certeza, ela teve e tem a incerteza fazendo parte do seu desenvolvimento. É importante também que eles saibam que questões sociais e políticas fazem parte e também influenciam seu desenvolvimento. Ainda seguindo,

- A matemática é uma “ciência do rigor”. Então, seu ensino deve ser “rigoroso”.
- A matemática é uma “ciência da certeza”. Então, seu ensino não deve dar lugar para o “erro”.
- O conhecimento matemático é “organizado em teoremas”. Então, seu ensino deve privilegiar a “apresentação de respostas”.
- A matemática é produzida historicamente pela “inspiração isolada de gênios inatos”. Então, seu entendimento só é acessível a pessoas com “talento inato”.
- Isto é, aqueles que não nascem com “talento matemático” jamais serão bons em matemática. O trabalho do professor de matemática seria, então, apenas identificar os estudantes “talentosos” e separá-los dos “fracos”.

- A matemática é uma “ciência neutra”. Então, seu ensino deve ser “isento de política”. (Giraldo, 2019, p.10, grifos no original)

Tomando como referência a dicotomia matemática problematizada x matemática não problematizada, buscamos explorar algumas práticas históricas, as quais podemos com as lentes atuais associar ao Teorema de Pitágoras. Desse modo, esperamos contribuir para desenvolver uma visão problematizada sobre o Teorema de Pitágoras.

1.2 Perspectiva da história no ensino de matemática

Referenciando o livro “História da Matemática. Uma visão crítica, desfazendo lendas”, de Tatiana Roque e, também, o artigo “A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática” de Fumikazu Saito, trazemos uma discussão sobre a importância do uso da história da matemática na rotina do processo de ensino e aprendizagem da educação básica.

No dia a dia da sala de aula é notório o afastamento dos alunos no que tange os conteúdos de matemática da educação básica, por diversos motivos, como por exemplo, exercícios que reforçam o uso de fórmulas e temas que necessitam de muita abstração fazem com que os alunos fiquem cada vez mais distantes e conseqüentemente sem vontade de aprender ou até mesmo contribuir no processo de ensino aprendizagem. Segundo Roque,

Muitas vezes, o contato com seus conceitos e ferramentas torna-se difícil, pois a imagem que se tem dessa disciplina é marcada por seu caráter mecânico, abstrato e formal, o que produz uma sensação de distância na maioria das pessoas. (Roque, 2012, p.46)

E quando se fala em ter a história da matemática como auxílio para o desenvolvimento de temas, deve-se ter uma responsabilidade muito grande com o *que* vai ser apresentado e *como* vai ser apresentado, pois isso também pode colaborar e fundamentar as ideias já mencionadas que permeiam a imagem que os alunos têm da matemática. Reforçando isso,

Um de nossos principais objetivos aqui é mostrar que o modo tradicional de contar a história da matemática ajudou a construir esta visão: a de que a

matemática seria um saber unificado envolvendo quantidades, números ou grandezas geométricas. Quase todos os livros disponíveis em português que narram sua história seguem uma abordagem retrospectiva, que parte dos conceitos tais como os conhecemos hoje para investigar sua origem. Assim, surgem afirmações como “o primeiro a descobrir esta fórmula foi o matemático X”; ou “este resultado já estava presente na obra de Y, ou na época de Z”. (Roque, 2012, p.46)

A forma como se é narrada, principalmente nos livros, dando importância para momentos específicos, dando datas e com a preocupação em nomear teoremas não auxilia no processo de ensino aprendizagem, pois cria uma imagem deturpada da matemática onde, por exemplo, os povos antigos não teriam um papel importante na construção do conhecimento. A história nesse contexto pode ser utilizada, segundo Roque, para:

[...] exibir um conjunto de práticas, muitas vezes desordenadas, que, apesar de distintas das atuais, também podem ser ditas “matemáticas”. Quando encarado como uma prática múltipla e diversa, esse conhecimento se apresenta composto por ferramentas, técnicas e resultados desenvolvidos por pessoas em momentos e contextos específicos, com suas próprias razões para fazer matemática e com ideias singulares sobre o que isso significa. (Roque, 2012, p.46)

Deve-se ter cuidado de evitar trazer para os alunos narrativas da matemática do passado, baseadas apenas nas lentes do presente. Para isso, deve-se tentar se envolver nos problemas que caracterizavam o pensamento de certa época, considerando não só os fatores científicos, mas também culturais, sociais e filosóficos. Ainda sobre isso, Roque versa que,

O intuito é tornar disponível, para os leitores brasileiros, uma parte das discussões sobre um novo modo de ver a matemática do passado, desfazendo a imagem romantizada e heroica que a envolve e que tem sido reproduzida pela mitificação de sua história. Talvez assim se possam romper certas barreiras psicológicas, tornando possível até mesmo que um público mais amplo venha a gostar mais dessa disciplina. (Roque, 2012, p. 49)

A proposta deste trabalho é que fuja de algumas ideias já mencionadas: a) de que só os gênios são prestigiados, b) de que a matemática não tem espaço para erros, c) e de que ela se desenvolve de maneira linear. Sobre isso Saito diz:

Do ponto de vista historiográfico, essas narrativas são essencialmente lineares e progressistas no sentido positivista do termo. Elas são caracteristicamente panorâmicas e abrangem grandes períodos históricos, geralmente da antiguidade clássica até o século XX. Além disso, ao enfatizar apenas as descobertas e enaltecer os gênios e os precursores da

matemática moderna, tais narrativas referem-se apenas a história daquilo que deu certo, legitimando a ideia de que só havia um único caminho para a matemática moderna. (Saito, 2008, p.608)

E quando observamos a forma como a história é apresentada de modo tradicional para os professores torna a matemática “presentista”, onde a ênfase está na coerência no discurso matemático, tendo como ponto de partida o que alunos e professores entendem por matemática. Parece ser mais interessante assim trabalhar com uma visão dita atualizada, onde o professor e aluno terão a possibilidade de buscar o contexto da época e fazer uma análise que valorize todo o processo, desde a escolha da época até a disseminação do mesmo. Desta forma:

Diferentemente, da vertente historiográfica atualizada, cuja abordagem valoriza os contextos de elaboração, transformação, transmissão e disseminação do conhecimento matemático em diferentes épocas e culturas, a perspectiva historiográfica tradicional enfatiza apenas a coerência interna do discurso matemático, tendo como ponto de partida o que nós entendemos por matemática nos dias de hoje. (Saito, 2018, p.608)

Ainda sobre as narrativas atualizadas da história da matemática, Saito diz:

Essas narrativas, diferentemente das tradicionais, partem do pressuposto de que a matemática atual não se confunde com essa mesma matemática no passado. Ao darem ênfase nos processos da construção do saber matemático, inserindo-o em malhas contextuais mais amplas, de modo a dar significado ao fazer matemático de diferentes épocas e culturas, tais narrativas propuseram compreender as “matemáticas” do passado tais como elas eram vistas no passado, e não como elas deveriam ser vistas segundo uma perspectiva filosófica ou matemática pré-concebida. (Saito, 2018, p. 614)

Com essa perspectiva, o presente trabalho buscou desenvolver uma proposta de ensino, explorando três diferentes práticas históricas acerca do Teorema de Pitágoras. Esperamos que tal proposta contribua para desenvolver uma visão problematizada da matemática, em particular do Teorema de Pitágoras.

1.3. Práticas históricas

Nesta seção, apresentamos as práticas usadas para elaborar as atividades e um pouco do contexto histórico no qual elas foram desenvolvidas. Foram

selecionadas três práticas que podemos relacionar com o que hoje entendemos por Teorema de Pitágoras:

- As práticas em torno dos números figurados, na Escola Pitagórica, que floresceu no Período Helênico clássico, por volta do século V a.E.C. (ROQUE, 2012);
- As práticas da matemática chinesa no século I da Era Comum (CHEMLA, 2005);
- E as práticas em torno do emprego de equivalência de áreas e das operações geométricas com áreas, sem atribuir números às medidas em jogo, que foram registradas no livro “Os Elementos” de Euclides redigido no século III a.E.C. (ROQUE, 2012).

Como o objetivo é problematizar o teorema e o seu uso, buscamos selecionar práticas distintas de como o teorema é usado nos dias de hoje.

1.3.1. Práticas matemáticas da Escola Pitagórica, que floresceu no Período Helênico clássico, por volta do século V a.E.C.

Segundo Roque (2012), não há consenso sobre a existência de um homem chamado Pitágoras, o que é uma revelação surpreendente, uma vez que um teorema que leva seu nome é apresentado em livros didáticos de Matemática de forma muito consistente para meninos e meninas na faixa etária de 13/14 anos e é aplicado em muitas situações ao longo da matemática escolar. O que não deixa margem para duvidar da existência de Pitágoras. No entanto, de acordo com Roque:

É interessante observar que Eudemo não menciona Pitágoras, mas somente os “pitagóricos”. Ou seja, Proclus pode ter sido responsável por uma síntese que mistura as ideias de Eudemo sobre a pureza dos métodos pitagóricos com a atribuição desses feitos a um homem, Pitágoras. Era conveniente, para Proclus, reconhecer aí os fundamentos de seu próprio platonismo. A escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras. (Roque, 2012, p. 50)

A matemática da escola pitagórica possuía uma característica visual, aos números eram atribuídas representações de acordo com as relações que se queria

exaltar. Os pitagóricos possuíam uma filosofia própria, em que os números ajudavam a explicar a natureza ao seu redor, o cosmo, acreditando que tudo que pudesse ser delimitado, poderia, então, ser contado. Ou seja, qualquer coisa que pudesse ser organizada e distinguida, poderia ser contada. Um exemplo para este pensamento é apresentado por Roque:

Pensando nas gotas de água no mar, o que é preciso para que possam ser contadas? Que permitam ser delimitadas, distinguidas umas das outras. Se isso for viável, ainda que seja muito difícil contá-las, as gotas de água do mar serão passíveis de serem contadas. (Roque, 2012, p.114)

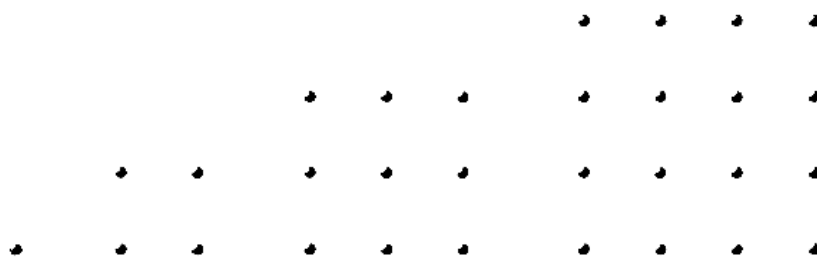
O Um não era considerado um número e sim um referencial para o surgimento de todos os números e até mesmos dos seres. Para cada organização, havia o menor número e os demais estavam ligados. Cada organização representava uma ordem diferente, com relações próprias. As figuras 1, 2 e 3 ilustram exemplos de diferentes configurações:

Figura 1 - Números triangulares



Fonte: Roque (2012)

Figura 2 – Números quadrados



Fonte: Roque (2012)

Figura 3 – Números pentagonais



Fonte: Roque (2012)

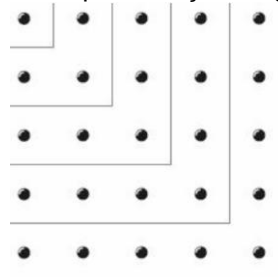
A configuração, explorada na elaboração de uma atividade, foi a configuração de pontinhos dos números quadrados. Uma observação importante para a discussão de como gerar triplas pitagóricas - portanto, relacionada por nós ao Teorema de Pitágoras, é apontada por Roque:

...é possível passar de um número quadrado a um número quadrado imediatamente maior adicionando-se a sequência dos números ímpares.

...os números ímpares são dados pelos contornos em forma de L, os gnomons dos pitagóricos... (Roque, 2012, p. 117)

Podemos observar tal colocação na Figura 4:

Figura 4 – Representação do *gnomon*



Fonte: Roque (2012)

Ainda segundo Roque (2012, p. 122): “O problema das triplas pitagóricas é fornecer triplas constando de dois números quadrados e um terceiro número quadrado que seja a soma dos dois primeiros”. A Figura 4 indica a existência de um mecanismo para encontrar triplas pitagóricas.

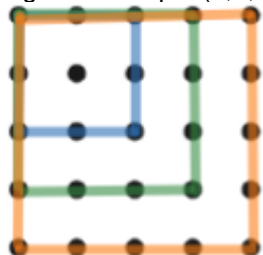
Desse modo, o Teorema de Pitágoras é um resultado baseado num padrão numérico, já inserido no contexto da escola pitagórica. Segundo Roque (2012), não deve ter tido uma demonstração geométrica apresentada pela escola pitagórica, o

que é comumente afirmado em muitos livros didáticos (e.g. Leonardo (2016) e Dante (2016)). Acredita-se que tal resultado tenha sido alcançado pelo uso do *gnomom*, onde as configurações que iam sendo geradas, em alguns casos solucionavam o problema. Observa-se que, pelo método da escola pitagórica, o menor dos valores em uma tripla pitagórica sempre é um número ímpar. Assim, o Teorema de Pitágoras, seria para a escola pitagórica um resultado aritmético, diferente do que é apresentado nos livros didáticos de Matemática. O método para solucionar o problema das triplas pitagóricas não garante a validade do teorema em todos os casos, uma vez que infinitas triplas ficam de fora. Temos que levar em conta o contexto em que os pitagóricos se situavam, apenas números naturais eram considerados números. Sobre isso, Roque diz:

O método usado para encontrar triplas pitagóricas não é suficiente para assegurar a validade geométrica do teorema “de Pitágoras” em todos os casos. Tal método permite gerar algumas triplas, como (3, 4, 5), mas não todas as triplas de números que podem medir os lados de um triângulo retângulo, sobretudo porque essas medidas não são necessariamente dadas por números naturais. (Roque, 2012, p. 124)

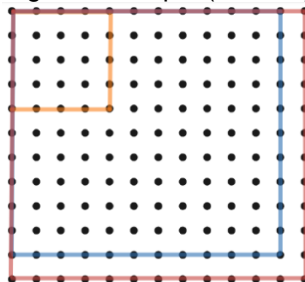
Ilustramos a seguir o procedimento da escola pitagórica para determinar triplas pitagóricas em dois exemplos: (3,4,5) e (5,12,13):

Figura 5 – Tripla (3,4,5)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 – Tripla (5,12,13)



Fonte: Elaborado pelo autor

Observando a figura 5, temos:

- i) Que o *gnomom* azul (contendo 5 pontos) formará uma configuração quadrada, incluindo o próprio *gnomom* azul, contendo 9 pontos;
- ii) Da mesma forma o *gnomom* verde (contendo 7 pontos) formará uma configuração quadrada, incluindo o próprio *gnomom* verde, contendo 16 pontos;
- iii) Por último o *gnomom* laranja (contendo 9 pontos) formará uma configuração quadrada, incluindo o próprio *gnomom* laranja, contendo 25 pontos.

Como o total de pontos está relacionado ao lado do quadrado e seguindo a definição de tripla pitagórica a figura ilustra a tripla (3,4,5), pois o total de pontos da configuração quadrada com 9 pontos junto com a configuração quadrada com 16 terá como resultado a configuração quadrada com 25 pontos. Usando os termos atuais que $3^2+4^2=5^2$. Seguindo a mesma ideia a figura 6 vai relacionar a tripla (5,12 e 13) que em termos atuais representaríamos como $5^2+12^2=13^2$.

Tal procedimento inspirou uma atividade para a presente proposta, por trazer um contexto aritmético relacionado ao Teorema de Pitágoras, onde vimos ter potencial para problematizar o teorema. A revelação de que não se sabe ao certo se existiu um homem chamado Pitágoras também é um elemento interessante para a problematização do teorema e também para questionar o que parece ser uma verdade absoluta.

1.3.2. Práticas matemáticas chinesas no período do século I da Era comum

O potencial histórico da prática chinesa, em nosso ponto de vista, começa pelo simples entendimento do nome *The Gnomon of the Zhou* e pelo conhecimento de uma cultura totalmente diferente da nossa. Já o potencial didático está no método da base e da altura, o qual propicia uma aplicação do Teorema de Pitágoras com uma abordagem geométrica. Além disso, tal método inspira uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

A escolha por uma prática matemática chinesa se deve ao desejo de buscar uma prática que pudesse ser associada ao Teorema de Pitágoras, situada fora da Europa mediterrânea. Outro aspecto é salientar como o conhecimento acerca do teorema era praticado em outras civilizações e em outras épocas.

A prática que vamos apresentar é inserida no contexto da geometria plana, envolvendo conceitos que os estudantes já estão de certa forma familiarizados, como a nomenclatura dos polígonos, o cálculo de áreas etc. A prática chinesa é, também, uma oportunidade de retomar esses conceitos. O material escolhido para nossa referência de estudo sobre a matemática chinesa é o artigo de Karine Chemla (2005), intitulado “Geometrical Figures and Generality in Ancient China and Beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra”. Neste artigo, a pesquisadora traz uma contribuição para o estudo das figuras geométricas e o seu papel na matemática da China antiga. Chemla (2005) defende que há uma mudança na natureza e no uso de figuras geométricas na matemática chinesa entre o início da era comum e o século III da era comum. O exemplo que norteia a discussão é um diagrama que ilustra o procedimento para determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo, juntamente com um algoritmo que orienta as etapas desse procedimento - o procedimento da base e da altura. Uma das fontes primárias utilizadas pela pesquisadora é a cópia feita por Zhao Shuang - com comentários acrescentados por ele - da obra intitulada “The Gnomon of the Zhou”. Não se sabe ao certo quando essa obra foi criada, de acordo com Chemla :

Estudiosos modernos também discordam sobre o modo de composição e o tempo de conclusão de O Gnomon de Zhou. Qian Baocong 1963, 4, argumenta que o livro foi composto por volta de 100 a.C. Em contraste, Cullen 1996, 139-56, lista os argumentos a favor da tese de que consiste em uma coleção de textos escritos em diferentes períodos de tempo e mais tarde reunidos. Ele avalia possíveis datas para cada um deles, considerando a abertura seção ser a mais recente de todas e ter sido composta por ocasião da conferência convocada por Wang Mang no Tribunal no ano 5 d.C. Não considero as evidências reunidas em Li Jimin 1993a convincentes o suficiente para aceitar sua conclusão de que esta parte de O Gnomon de Zhou pode datar do décimo primeiro ou do século XII a.C. No entanto, como ficará claro a seguir, acho que seu artigo oferece novos insights importantes para a interpretação do texto.¹ (Chemla, 2005, p. 124, tradução nossa)

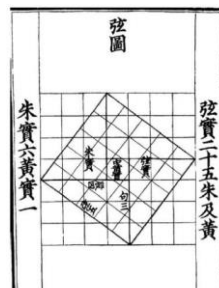
¹ Modern scholars also disagree on the mode of composition and the time of completion of The Gnomon of the Zhou. Qian Baocong 1963, 4, argues that the book was composed around 100 B.C.E. In contrast, Cullen 1996, 139–56, lists arguments in favor of the thesis that it consists of a collection of

Sobre o procedimento de base e de altura, entende-se um procedimento que visa determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo, onde os catetos são conhecidos, entretanto não há a utilização de fórmula como fazemos hoje. Esse uso de fórmulas inviabiliza a forma de pensar sobre outras perspectivas e trazer discussões para sala de aula com embasamento histórico. A riqueza da perspectiva histórica nesta prática se dará em vários momentos aqui apresentados para futuramente analisar a contribuição para a aprendizagem do “Teorema de Pitágoras” dentro da perspectiva da matemática problematizada, segundo Chemla:

[...] o procedimento que O Gnomon de Zhou demonstra estar na base do conhecimento astronômico apresentado nele: o “Procedimento da base e da altura”, que, em nossos termos, corresponde ao denominado “teorema de Pitágoras”.² (Chemla, 2005, p. 127, tradução nossa)

Vamos ter como referência a cópia feita pelo matemático chinês Zhao Shuang, sendo ele o comentador desta obra. Estamos nos baseando numa edição de 1213. A possível representação do procedimento descrito na figura a seguir.

Figura 7: Ilustração do procedimento de base e de altura, de acordo com a edição de 1213 do Gnomon of the Zhou.



Fonte: Chemla (2005)

texts written at different time periods and later gathered together. He evaluates possible dates for each of them, considering the opening section to be the most recent of them all and having been composed for the occasion of the conference convened by Wang Mang at the Court in the year 5 C.E. I do not find the evidence gathered in Li Jimin 1993a compelling enough to accept his conclusion that this part of The Gnomon of the Zhou may date from the eleventh or the twelfth century B.C.E. However, as will become clear below, I find that his paper offers important new insights for the interpretation of the text.
² [...] the procedure that The Gnomon of the Zhou demonstrates to be at the basis of the astronomical knowledge presented in it: the “Procedure of the base and the height,” which, in our terms, corresponds to the so-called “Pythagorean theorem.”

Baseado nessa prática, nosso objetivo é apresentar um procedimento para determinar o valor da hipotenusa, sendo dados a base e a altura do triângulo retângulo. O exemplo explorado na atividade que elaboramos utiliza um triângulo de catetos 3 e 4 e hipotenusa 5, números que compõem a primeira tripla pitagórica determinada pelo método da escola pitagórica. Assim, teremos um novo procedimento para determinar a mesma tripla pitagórica. No entanto, o procedimento situa-se no contexto de uma prática matemática, de uma outra época e de uma civilização culturalmente diferente daquela em que a escola pitagórica se situa. Tais elementos históricos também contribuíram para fazer o contraponto entre as práticas.

1.3.3. Práticas matemáticas de Euclides registradas no livro “Os Elementos” redigido no século III a.E.C.

Para apresentar a prática de Euclides, a qual podemos relacionar com o Teorema de Pitágoras, mais uma vez baseamo-nos em Roque (2012). Os Elementos de Euclides é uma obra bastante conhecida por ser associada à introdução do método axiomático-dedutivo e pelo fato de as demonstrações envolverem construções feitas apenas com régua e compasso:

As narrativas sobre os *Elementos* reproduzem, assim, dois mitos, ambos de inspiração platônica: a necessidade de expor a matemática com base no método axiomático-dedutivo e a restrição das construções geométricas às que podem ser realizadas com régua e compasso. (Roque, 2012, p. 154)

Nosso foco para apresentar esta seção está no livro I, mais especificamente, numa das últimas proposições apresentadas nesse livro: o resultado que podemos associar ao Teorema de Pitágoras, incluindo uma ilustração (figura 9) que é muito comum de aparecer em livros didáticos, seja para apresentar o teorema ou até mesmo para exemplificar a tripla pitagórica (3,4,5):

Proposição I-47

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto. (Roque, 2012, p. 174)

É importante mencionar que a relação de igualdade estabelecida entre o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto - ou seja, o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo - e entre os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto - ou seja, os quadrados construídos sobre os catetos do triângulo - trata da equivalência de áreas entre o primeiro quadrado e os dois últimos. Em outras palavras, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo dado.

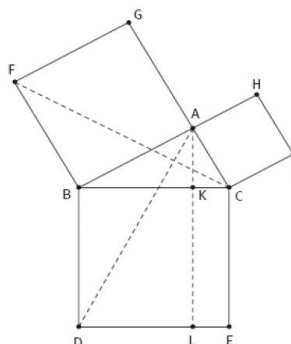
Outro detalhe importante é a necessidade de outras proposições, que passariam a ser resultados válidos para demonstrar o referido “Teorema”, são eles:

I 4: Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais; as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais. (Roque, 2012, p. 172)

I 41: Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo. (Roque, 2012, p. 172)

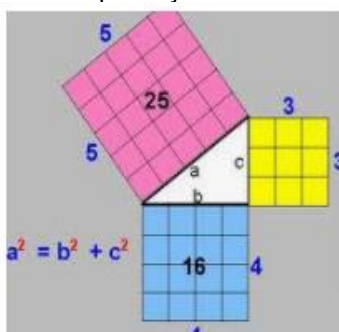
Ainda tendo o suporte da Proposição I-45 a qual coloca o problema de construir com um ângulo retilíneo dado um paralelogramo igual a uma figura retilínea, que corresponde a nossa definição moderna de polígonos, temos a possibilidade de ter um paralelogramo com mesma área de um polígono qualquer dado. E a Proposição II- 14, a qual coloca o problema de construir um quadrado equivalente a um polígono dado e o Teorema de Pitágoras aqui é aplicado a essa proposição para somar quadrados. Dá para perceber que Os Elementos é uma fonte histórica que não é tão simples de analisar, mas é um grande desafio e enriqueceria bastante as perspectivas que os alunos têm e o que podem vir a agregar quando começarem a desenvolver a atividade. A Figura 8 ilustra os passos iniciais para a demonstração de Euclides para o “Teorema de Pitágoras” e a Figura 9 é utilizada em livros didáticos para exemplificar a relação entre os lados de um triângulo retângulo, expressa pelo teorema.

Figura 8 – Representação para a demonstração de Euclides.



Fonte: <http://diegovelasquez.webcindario.com/pitagorico.htm>

Figura 9 - Exemplificação em livros didáticos.



Fonte: <http://masonerialaimprintadebenjamin.blogspot.com/2010/10/la-proposicion-47-de-euclides-o-teorema.html>

As práticas históricas de operações com áreas são importantes de se apresentar na educação básica, pois trazem uma gama de discussões sobre o pensamento matemático. Destacamos que essa prática também traz uma abordagem geométrica para o teorema, assim como a prática chinesa. No entanto, há uma diferença fundamental: Euclides não atribui números às medidas lineares e de superfície. Esse é o diferencial dessa prática e, em nosso ponto de vista, aí está o potencial didático para problematizar o teorema.

Embora a Escola Pitagórica e Os Elementos de Euclides sejam ambos episódios do longo Período Helênico, um no século V a.E.C. e outro no século III a.E.C., no livro de Euclides a proposição I.47 não é chamada de “Teorema de Pitágoras” e muito menos associada às práticas da escola pitagórica.

CAPÍTULO II - METODOLOGIA DA PESQUISA

Nosso principal objetivo de pesquisa é investigar que contribuições a história da matemática pode trazer para o ensino do Teorema de Pitágoras e nossa hipótese é que a história pode contribuir para desconstruir a visão não problematizada do ensino de matemática. Visando a contribuir para a discussão de como promover uma visão mais problematizada da matemática e de seus conceitos (Giraldo, 2019), foi elaborada uma proposta de ensino do Teorema de Pitágoras, com base em algumas práticas históricas que podemos associar com esse teorema. Além disso, aplicamos essa proposta com um grupo de 17 estudantes voluntários. Desse modo, entendemos que esta pesquisa é de natureza aplicada e de abordagem qualitativa.

Esta pesquisa também se orienta pelos métodos de uma pesquisa-ação, pois segundo Malheiros:

...a pesquisa-ação tem por premissa a intervenção no fenômeno estudado, daí seu nome. Neste modelo uma intervenção é feita em uma determinada realidade para que, em seguida, seus resultados sejam avaliados. (Malheiros, 2011, p. 108)

O mesmo ainda segue na mesma página:

A pesquisa-ação é extremamente útil em educação. Ela é aplicada para se testar novos modelos de ensino, alterações de currículo, formulação de estratégias de aprendizagem, métodos de avaliação, formação de professores, definição de modalidades de cursos, dentre diversos outros aspectos. Seu objetivo é aumentar o conhecimento acerca de um determinado assunto. (Malheiros, 2011, p. 108)

Para a geração de dados, contamos com três instrumentos de coleta de dados: i) um questionário online, aplicado no início do estudo de campo, ii) as respostas dos estudantes às atividades propostas e iii) um questionário online, aplicado ao final do estudo de campo, ambos os questionários inicial e final foram elaborados usando o aplicativo Google Formulários e estão disponibilizados nos Apêndices A e B.

O questionário inicial teve como o objetivo sondar se os participantes gostam de matemática, se já tiveram algum contato com história da matemática, o que sabem sobre o Teorema de Pitágoras e a receptividade para uma proposta de

ensino com perspectiva histórica. Foi elaborado com 6 questões: 4 questões objetivas e 2 questões abertas. O questionário³ pode ser acessado na íntegra (juntamente com as respostas e sem a identificação dos estudantes) no Apêndice A.

No momento de aplicar as atividades desenvolvidas, estávamos vivenciando o ensino remoto. Desse modo, todo o contato com os estudantes - participantes da pesquisa - ocorreria por meio de encontros síncronos. Como os participantes foram voluntários, evitamos propor atividades assíncronas para não os sobrecarregar. Dado o contexto do ensino remoto e buscando uma forma mais atrativa de implementar as atividades, optamos pela ferramenta Desmos.

Ao longo das aulas de Números e Funções Reais no ProfMat, tive a oportunidade de conhecer tal ferramenta e perceber algumas vantagens que favoreceriam a aplicação das atividades. Levando em conta que o período da pesquisa foi realizado em um período de atividades remotas, o controle do andamento da atividade seria fundamental por questão de organização; o acompanhamento de cada aluno etapa por etapa também era possível, cabendo até alguma intervenção; mesmo distante há a possibilidade de compartilhar as respostas dos alunos criando um ambiente de cooperação mútua, a questão do anonimato também é um ponto forte, pois o professor tem o conhecimento de quem está fazendo, mas os demais participantes da atividade não, fazendo com que possíveis situações de constrangimento reduzam bastante. E há também inúmeras possibilidades de criar atividades que sejam atrativas para os alunos, as quais podem ser inclusive realizadas nos seus smartphones. Tomando como referência Antunes e Cambrainha (2020), esses pesquisadores ratificam a minha preferência quando dizem:

... deparamo-nos com a plataforma Desmos (www.desmos.com), e logo fomos capturados pelo seu conteúdo, apresentação e funcionalidades - especialmente pelo potencial que percebemos em promover uma transformação digital profunda, em nossa visão, mudando a forma como conceber, planejar e executar as aulas de matemática com auxílio de tecnologias e da internet. (Antunes e Cambrainha, 2020, pág. 5)

³ Link de acesso à versão online do questionário inicial: <https://forms.gle/U4Ey14tQUanb4MbP9>

Foram elaboradas 3 atividades no DESMOS: uma explorando a prática dos pitagóricos, outra explorando a prática da matemática chinesa em torno do Teorema de Pitágoras e outra explorando a prática euclidiana em torno do teorema. Cada uma delas começa uma tela de apresentação, uma tela com uma breve referência histórica, as telas com as atividades propriamente ditas e a última tela de finalização, onde se pergunta o que achou da atividade e o que entendeu da atividade. As atividades serão apresentadas na íntegra no capítulo III, juntamente com a análise.

O questionário final teve como o objetivo verificar o que mais chamou a atenção dos participantes em relação às duas atividades aplicadas, o que teria mudado sobre o Teorema de Pitágoras, o que eles teriam a dizer sobre Pitágoras, se apresentar o contexto histórico e as problemáticas referentes ao assunto, poderia melhor auxiliar na aprendizagem do tema proposto e como as atividades podem ser melhoradas. Foi elaborado com 5 questões abertas. O questionário⁴ pode ser acessado na íntegra (juntamente com as respostas e sem a identificação dos estudantes) no Apêndice B.

Reconhecemos que o objeto desta pesquisa é a proposta de ensino para o Teorema de Pitágoras. Assim, não investigaremos os sujeitos da pesquisa, que são os estudantes. Ou seja, não investigaremos individualmente se eles aprenderam melhor o Teorema de Pitágoras com a nossa proposta, mas sim, investigaremos se a proposta atingiu o objetivo de promover uma matemática mais problematizada a partir do engajamento nas atividades e do feedback dos estudantes para a proposta (questionário final).

O projeto para esta pesquisa foi submetido ao comitê de ética da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro e foi aprovado. O projeto está cadastrado na Plataforma Brasil⁵. Os estudantes receberam e assinaram o Termo de Assentimento (Apêndice I) e os responsáveis receberam e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice J).

⁴ Link de acesso à versão online do questionário final: <https://forms.gle/zdUc5TpDwfxVqNyw9>

⁵ O número de identificação da pesquisa na Plataforma Brasil é 47067621.3.0000.5285.

Apresentamos uma análise dos dados gerados pelos questionários e pelas atividades, buscando observar se os estudantes problematizaram o Teorema de Pitágoras. Para isso, procuramos identificar que sentidos os estudantes produziram para o teorema, ou seja, se eles construíram outros significados para o teorema. Além disso, tentamos identificar nas falas dos estudantes elementos que indicassem a percepção de uma historicidade no desenvolvimento da matemática, em particular, de uma historicidade em torno do Teorema de Pitágoras. Em outras palavras, buscamos identificar elementos que sugerissem a percepção de que:

- i) A matemática muda ao longo do tempo, em particular, o Teorema de Pitágoras é diferente em cada uma das práticas estudadas;
- ii) Os conceitos matemáticos têm uma história, ou seja, a matemática tem uma história e não está pronta e acabada;
- iii) Há dúvidas sobre a existência de um homem chamado Pitágoras, conforme aponta Roque (2012);
- iv) Não existe uma matemática única e absoluta que foi progressivamente descoberta ao longo dos tempos. O que existem são práticas matemáticas que se manifestaram dentro de contextos culturais específicos, em diferentes civilizações, territórios e períodos da história.

CAPÍTULO III - ATIVIDADES PROPOSTAS E ANÁLISE DAS RESPOSTAS

Neste capítulo, apresentamos o local onde a proposta de ensino foi aplicada, o quantitativo de alunos que participaram, a quantidade de encontros para a aplicação das atividades, a descrição de cada atividade na íntegra, algumas telas das atividades, algumas telas com as respostas dos alunos que autorizaram o uso das informações e apresentamos uma análise simplificada com base nas respostas apresentadas. As atividades na íntegra estão apresentadas nos Apêndices C, D e E.

3.1 Local e participantes

Participaram da aplicação das atividades alunos da 1ª série a 3ª série do Ensino Médio da unidade escolar Externato Hilmar, localizada na rua Dr. Nilo Peçanha, 1031, Nova Cidade - CEP: 24445-300, no município de São Gonçalo, no estado do Rio de Janeiro. A escola atende alunos da educação infantil, ensino fundamental e ensino médio regular. No momento em que este trabalho estava sendo desenvolvido, estávamos vivenciando o ensino híbrido, o que demandava o desenvolvimento de atividades para o ensino remoto e também para o presencial, aumentando assim o desafio. A escolha da escola foi pelo fato de o autor deste trabalho ser professor das três turmas, pela flexibilidade oferecida pela escola para o ensino do tema e, conseqüentemente, pela facilidade na aplicação das atividades.

A nível de uso de informações por questões do Comitê de Ética, ressaltamos que 17 alunos participaram da aplicação das atividades, mas apenas 12 alunos da 3ª série do Ensino Médio permitiram o uso de suas informações. Na próxima seção, apresentamos as informações e comentários sobre o questionário inicial aplicado.

Os apelidos dados aos estudantes que preservam o anonimato deles foram escolhidos automaticamente pelo Desmos, sendo nomes de matemáticos de épocas e civilizações distintas.

3.2 Respostas ao questionário inicial

No questionário inicial (Apêndice A), buscou-se avaliar o interesse pela Matemática, o conhecimento sobre a história da matemática e sobre o Teorema de Pitágoras e a expectativa para desenvolver uma proposta de ensino com perspectiva histórica.

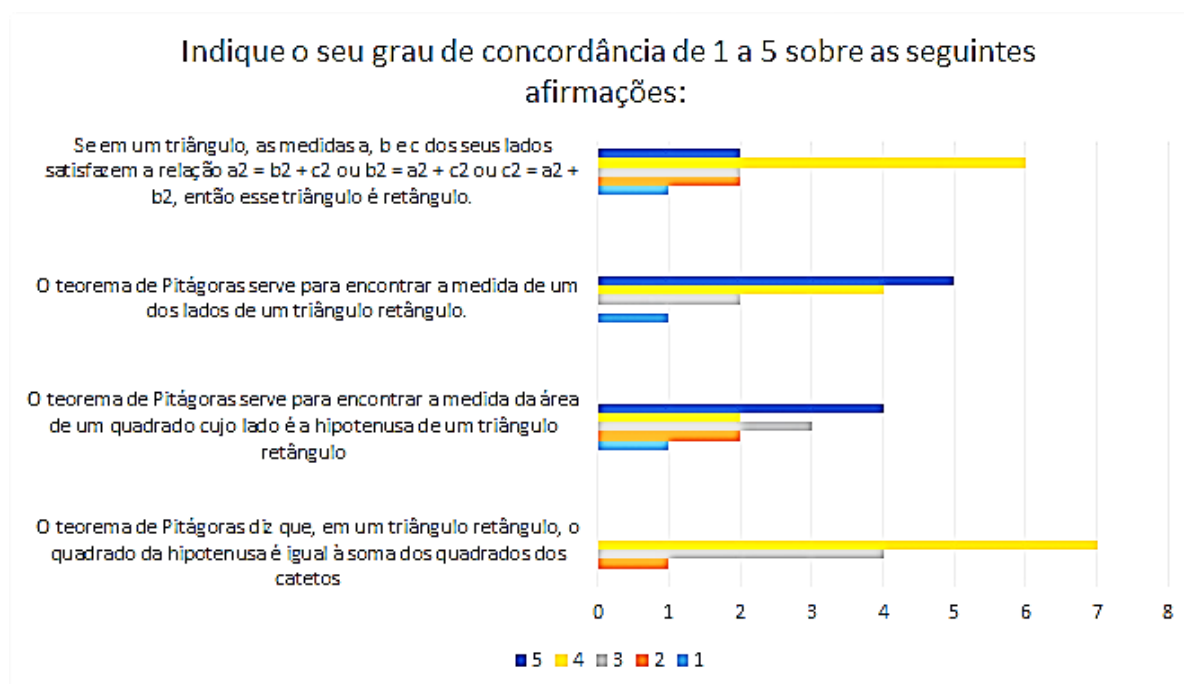
A primeira pergunta pede para indicar a intensidade (de 1 a 5, onde 1 indica que não gosta e 5 indica que gosta muito) que expressa o quanto o estudante gosta de Matemática. Dos 12 estudantes, 1 estudante marcou o nível 1; 5 estudantes marcaram o nível 2, o qual indica que a pessoa tem pouca afinidade com a disciplina; 2 estudantes marcaram o nível 3, o qual indica que a pessoa não gosta, nem desgosta da disciplina; 4 estudantes marcaram o nível 4 e nenhum estudante marcou o nível 5.

A segunda pergunta requer do estudante informar se já leu alguma coisa sobre história da matemática antes de participar desse estudo. Dos 12 estudantes, 10 estudantes marcaram que não tinham lido nada até o presente trabalho e 2 alunos tinham lido algo sobre. A terceira pergunta pede que se informe qual foi a leitura prévia sobre história da matemática. Dentre as duas respostas, um dos participantes respondeu “[...] li sobre a origem, como surgiu, a matemática no Império Babilônico, no Egito Antigo, na Grécia...”. E finalizando a terceira pergunta, para aqueles que responderam “sim”, se teriam gostado do que leram.

Ainda neste mesmo formulário, na quarta pergunta, são apresentadas algumas afirmações sobre o Teorema de Pitágoras, a fim de verificar o nível de concordância e conhecimento do tema em questão (de 1 a 5, onde 1 indica que você é totalmente contra a afirmação e 5 indica que você concorda totalmente.). Cabe aqui dizer que se trata de um conteúdo visto nos anos finais do ensino fundamental desta unidade escolar. Podemos observar algumas informações:

Sobre a pergunta 4:

Gráfico 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que na afirmativa “O Teorema de Pitágoras diz que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”, que tem referência geométrica, nenhum dos participantes concordou totalmente, e a que diz “Se em um triângulo, as medidas a, b e c dos seus lados satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$ ou $b^2 = a^2 + c^2$ ou $c^2 = a^2 + b^2$, então esse triângulo é retângulo.”, que é a recíproca do Teorema de Pitágoras, tem como maioria das respostas a concordância parcial. Observamos que, em geral, os livros didáticos não apresentam a recíproca do teorema.

3.3. As atividades e sua aplicação

A presente proposta foi dividida em quatro encontros, sendo um deles o encontro final onde foi feito o preenchimento do último formulário (Apêndice B) e as considerações finais feitas pelos alunos sobre as atividades. A proposta inicial era fazer o trabalho com três atividades; contudo, para não comprometer o calendário da

unidade escolar foram aplicadas duas atividades. Mesmo não sendo aplicada a atividade 3, consideramos importante apresentá-la, devida toda pesquisa e desenvolvimento acerca da mesma. Além disso, vale lembrar que um dos objetivos é criar um material para os professores desenvolverem o conteúdo curricular e aprimorarem cada vez mais. Cada atividade conta com uma parte histórica que, de maneira direta ou indireta, se remetem ao Teorema de Pitágoras. Todas as atividades foram implementadas na plataforma Desmos, o que facilitou a obtenção de registros para análise posterior e a interação entre os alunos. A grande maioria dos alunos fez uso do celular na realização das atividades. A seguir, apresentamos as atividades e uma análise simplificada das respostas dos estudantes.

3.4 Atividade 1: **Escola Pitagórica**

Esta atividade foi realizada em 2 encontros com a participação de 17 alunos e foi proposta com o objetivo de:

- i) Experimentar a prática da escola pitagórica com os números e sua representação figurada;
- ii) Explorar o modo como os pitagóricos deduziam relações entre os números, com base na representação dos números como configurações espaciais de pontinhos;
- iii) Em particular, explorar como as triplas pitagóricas eram obtidas a partir da junção de um número quadrado perfeito com um *gnomon* (que representa um número ímpar);
- iv) Explorar o método da escola pitagórica para determinar triplas pitagóricas por meio da fórmula apresentada em Roque (2012, p. 114).

A atividade foi apresentada em 10 páginas do Desmos, tendo a seguinte estrutura:

Quadro 1 - Estrutura da primeira atividade no Desmos.

Página	Tarefa a ser desenvolvida
1	Página de abertura
2	Introdução ao contexto histórico da escola pitagórica e de suas práticas com os números, por meio das configurações espaciais de pontinhos.
3	Descrição do que é um <i>gnomon</i> .
4	Tarefa para representar alguns <i>gnomons</i> em uma malha de pontos e preencher uma tabela com o intuito de relacionar os pontos do <i>gnomon</i> com o número quadrado associado.
5	Tarefa para preencher uma tabela com total de pontos da figura anterior, número de pontos somente do <i>gnomom</i> atual e o total de pontos da figura atual, sem o recurso de representar em uma malha.
6	Destacar como a sequência recursiva de números quadrados está sendo formada.
7	Relacionar a sequência recursiva de números quadrados com a obtenção de triplas pitagóricas.
8	Tarefa para determinar uma tripla pitagórica, usando o recurso do <i>gnomon</i> para formar números quadrados.
9	Apresentar uma fórmula que permite determinar triplas pitagóricas.
10	Registrar um <i>feedback</i> da atividade

Fonte: Elaborado pelo autor

A atividade pode ser vista na íntegra no Apêndice C.

No primeiro encontro, houve uma conversa sobre a proposta metodológica, o porquê da escolha desse tema, as expectativas da troca de conhecimento, o que conheciam sobre história da matemática, durando em torno de 10 minutos; houve a aplicação do questionário inicial, em que as dúvidas que viessem a aparecer poderiam ser apresentadas. Passadas essas etapas, foi feita uma introdução histórica sobre a maneira de lidar com os números, o significado filosófico dos números para a escola pitagórica, assim como a apresentação da configuração de pontinhos e passando para a tarefa foi apresentada o *gnomon* e a lógica para descoberta de outros. Já no encontro seguinte demos continuidade para ir determinando as configurações quadradas pelo uso do *gnomon*, a explicação do que seria uma tripla pitagórica, algumas páginas com situações para que os alunos pudessem descobrir algumas triplas pitagóricas e uma fórmula para determinar as triplas partindo do menor número quadrado e sendo o mesmo ímpar e por fim o feedback dos alunos sobre as tarefas e sobre o método trabalhado pela escola pitagórica.

A seguir, comentaremos as respostas dos estudantes a algumas das tarefas da atividade, com o intuito de ilustrar como os estudantes interagiram com a prática dos pitagóricos, por meio da adaptação que elaboramos. Selecionamos as tarefas que julgamos serem as mais significativas para a prática dos pitagóricos acerca dos números figurados e da determinação de triplas pitagóricas.

Na página 4 da atividade, os estudantes puderam representar em uma malha alguns *gnomons*. Em seguida, preencheram uma tabela com as informações referentes a 6 elementos da sequência de números quadrados. A maioria dos alunos (14 de 16) preencheu corretamente a tabela. Abaixo, ilustramos uma das respostas corretas.

Figura 10: resposta de Liu Hiu a tarefa de representar alguns *gnomons* e relacionar os pontos do *gnomon* com o número quadrado associado.

Entendendo as triplas pitagóricas

Você seria capaz de marcar o gnomom 4, gnomom 5, gnomom 6 e o gnomom 7?

Sugestão: Varie as cores para facilitar a visualização.

Você deve ter notado que os números da sequência acima estão dispostos segundo uma forma geométrica. Preencha a tabela abaixo para entender um pouco mais o processo de formação dos números dessa sequência.

gnomon (ordem do elemento da tabela)	Total de pontos do gnomom	Número total de pontos (incluindo o gnomom)
1	3	4
2	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	49
7	13	64

Qual a figura geométrica formada ao acrescentar um novo gnomom?

quadrado

Fonte: Elaborado pelo autor

Na página 8 da atividade, os estudantes foram solicitados a determinar qual seria a próxima tripla pitagórica que poderia ser obtida pelo processo de formar a sequência de números quadrados, acrescentando-se um *gnomon*. Na página anterior, pedia-se para observar que a tripla (3, 4, 5) pode ser obtida no 5º número quadrado, ou seja: a partir do quadrado de lado 4, acrescenta-se o *gnomon* 9 e obtém-se o quadrado de lado 5. A próxima tripla pitagórica a ser obtida é no 13º elemento da sequência de números quadrados: (5, 12, 13).

Abaixo, ilustramos com algumas das respostas apresentadas à tarefa da página 8. Nesta tarefa, 2 alunos conseguiram determinar a próxima tripla pitagórica.

Figura 11: resposta de Candice Price a tarefa para determinar uma tripla pitagórica, usando o recurso do *gnomon* para formar números quadrados.

Você como um pitagórico...

Você observou que na figura anterior que os números 3, 4 e 5 formam uma tripla pitagórica. Você conseguiria dizer qual será a próxima tripla pitagórica encontrada por meio desse processo de acrescentar um *gnomon* a figura anterior? Explique o teu raciocínio com as tuas palavras.

Tripla pitagórica 5, 12 e 13. A partir da contagem da quantidade de pontos em um GNOMON específico (no caso, o 13), procurei observar 2 anteriores cuja soma dos quadrados resultasse $13^2 = 169$.

$$\begin{aligned}5^2 + 12^2 &= 13^2 \\25 + 144 &= 169 \\169 &= 169\end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12: resposta de Terence Tao a tarefa para determinar uma tripla pitagórica, usando o recurso do *gnomon* para formar números quadrados.

Você como um pitagórico...

Você observou que na figura anterior que os números 3, 4 e 5 formam uma tripla pitagórica. Você conseguiria dizer qual será a próxima tripla pitagórica encontrada por meio desse processo de acrescentar um *gnomon* a figura anterior? Explique o teu raciocínio com as tuas palavras.

9, 12 e 15


a justificativa é que a menor tripla pitagórica é 3, 4 e 5, ou seja, todas as outras seguirão um padrão de aumento, uma progressão, uma proporcionalidade. dito isso, ao multiplicar-se a tripla mínima por 3, obtém-se a próxima tripla pitagórica pois segue todos os requisitos: começa com número ímpar, é proporcional pois todos os números foram multiplicados por 3, ou seja, todas as medidas.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 13: resposta Pamela.H. Parris a tarefa para determinar uma tripla pitagórica, usando o recurso do *gnomon* para formar números quadrados.

Você como um pitagórico...

Você observou que na figura anterior que os números 3,4 e 5 formam uma tripla pitagórica. Você conseguiria dizer qual será a próxima tripla pitagórica encontrada por meio desse processo de acrescentar um *gnomon* a figura anterior? Explique o teu raciocínio com as tuas palavras.




Eu não consegui enxergar a tripla pitagórica na última atividade, já que as somas da primeira e da segunda não deram o mesmo resultado da terceira Logo, não tenho um raciocínio formado para achar uma tripla pitagórica

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 14: resposta Liu Hui a tarefa para determinar uma tripla pitagórica, usando o recurso do *gnomon* para formar números quadrados.

Você como um pitagórico...

Você observou que na figura anterior que os números 3,4 e 5 formam uma tripla pitagórica. Você conseguiria dizer qual será a próxima tripla pitagórica encontrada por meio desse processo de acrescentar um *gnomon* a figura anterior? Explique o teu raciocínio com as tuas palavras.



A próxima tripla pitagórica deveria ser 6, mas ao pegarmos $16 + 25$ teríamos o resultado 41, e não 36, então que seria o certo para a tripla.

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 11, vemos que Candice Price determinou a tripla (5, 12, 13), a qual é obtida pelo processo de acrescentar o *gnomon*. Já Terence Tao, apresentou outro raciocínio, quando forneceu como resposta a tripla (9, 12, 15) (Figura 12). Esse aluno percebeu que múltiplos inteiros de 3, de 4 e de 5, poderiam formar triplas pitagóricas. Assim, ele não usou o processo baseado no acréscimo do *gnomon* a um número quadrado. Na Figura 13, apresentamos uma das respostas que não conseguiram alcançar a abstração necessária para encontrar triplas sem auxílio de algum recurso extra, como o próprio alunos relatou. Na figura 14 tivemos o caso de

um aluno que tentou, abstratamente, raciocinar para determinar qual seria a próxima tripla, ele esperava que a próxima tripla fosse (4,5,6) comparando a soma dos pontinhos de cada número quadrado relacionado, mas a resposta esperada era a tripla (5,12,13).

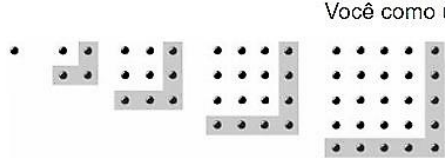
Na página 9 da atividade, exploramos uma fórmula para obtenção de triplas pitagóricas, apresentada por Roque (2012), que traduz o processo da escola pitagórica, considerando a um número ímpar, em termos atuais, seria:

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

Na tarefa dessa página, partindo de um número ímpar, os estudantes foram solicitados a verificar por meio da fórmula quais triplas seriam pitagóricas. As respostas esperadas eram (5,12,13) e (9,40,41). Abaixo, ilustramos com algumas respostas apresentadas a esta tarefa. A maioria dos estudantes que responderam (10 de 13 respostas) conseguiu determinar pelo menos 1 tripla pitagórica. Dentre as triplas corretas, a opção (5,12,13) foi marcada pela maior parte dos mesmos (8 das 13 respostas).

Figura 15: resposta de Katherine Jhonson ao uso da fórmula que permite determinar triplas pitagóricas.

Você como um pitagórico...



Há um método direto para encontrar triplas pitagóricas por meio da fórmula abaixo:

Considerando a é um número ímpar.

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

Usando o método Pitagórico, quais as triplas são pitagóricas?

(Selecione tudo que se aplica.)

(7, 24, 29)

(5, 12, 13)

(23, 29, 33)

(13, 35, 37)

(9, 40, 41)

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 16: resposta Liu Hui ao uso da fórmula que permite determinar triplas pitagóricas. Você como um pitagórico...

•  Há um método direto para encontrar triplas pitagóricas por meio da fórmula abaixo:

Considerando a é um número ímpar.

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

Usando o método Pitagórico, quais as triplas são pitagóricas?

(Selecione tudo que se aplica.)

(7, 24, 29)

(9, 40, 41)

(5, 12, 13)

(13, 35, 37)

(23, 29, 33)

Fonte: Elaborado pelo autor

Na página 10 da atividade, os estudantes foram solicitados para dar um *feedback* sobre o entendimento dos procedimentos da escola pitagórica na obtenção de triplas, assim como a opinião sobre a atividade como um todo. Apresentamos abaixo algumas respostas.

Figura 17: resposta de Terence Tao ao registro de *feedback* da atividade.

Finalizando nossa atividade.

O que você entendeu com esta atividade?



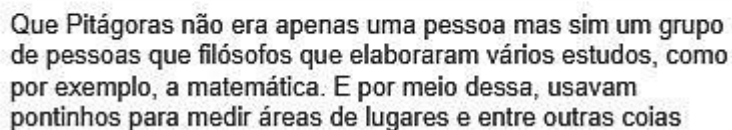
Entendi que a matéria que nos é passada na escola possui um embasamento bastante profundo por trás, acaba que assim é mais fácil de entender o motivo da fórmula existir. Acho que fica bem melhor do que somente decorar que existe o teorema de Pitágoras.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 18: resposta de Pamela E. Harris ao registro de *feedback* da atividade.

Finalizando nossa atividade.

O que você entendeu com esta atividade?



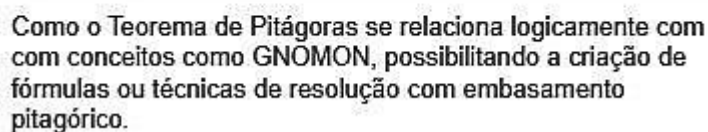
Que Pitágoras não era apenas uma pessoa mas sim um grupo de pessoas que filósofos que elaboraram vários estudos, como por exemplo, a matemática. E por meio dessa, usavam pontinhos para medir áreas de lugares e entre outras coisas

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 19: resposta de Candice Price ao registro de *feedback* da atividade.

Finalizando nossa atividade.

O que você entendeu com esta atividade?




Como o Teorema de Pitágoras se relaciona logicamente com com conceitos como GNOMON, possibilitando a criação de fórmulas ou técnicas de resolução com embasamento pitagórico.

Fonte: Elaborado pelo autor

As respostas acima ilustram os sentidos que alguns participantes produziram para o Teorema de Pitágoras e para a prática da escola pitagórica acerca dos números figurados. Para Terence Tao (Figura 17), essa prática e seu contexto histórico trouxe sentido para o estudo do teorema. Já para Pamella E. Harris (Figura 18), o que a afetou na atividade foi descobrir que não se trata de uma pessoa (Pitágoras), mas de um grupo de pessoas (a escola pitagórica). Candice Price (Figura 19) associou o teorema com a técnica do *gnomon* com a fórmula que traduz o processo de determinar triplas pitagóricas.

Para finalizar a primeira atividade, perguntamos aos estudantes sua opinião sobre a mesma.


Figura 20: resposta de Liu Hui ao registro de *feedback* da atividade.
O que você achou da atividade?



Muito bom, aprendi coisas que eu nunca teria o interesse de pesquisar, e percebi que o teorema de pitágoras não é apenas triangulos, e sim uma coisa maior.

Fonte: Elaborado pelo autor


Figura 21: resposta de Terence Tao ao registro de *feedback* da atividade.
O que você achou da atividade?



Achei muito boa! Além de explicar e exemplificar as fórmulas, o exercício auxilia na formação de um pensamento matemático, o que realmente faltava em mim kkkk

Fonte: Elaborado pelo autor.


Figura 22: resposta de Ada Lovelace ao registro de *feedback* da atividade.
O que você achou da atividade?



Achei interessante demais. Toda dinâmica da atividade chegou a entreter todos nós. Mesmo sendo um cálculo matemático, que pode causar dificuldades.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 23: resposta de Katherine Johnson ao registro de *feedback* da atividade.
O que você achou da atividade?



achei muito boa, foi uma nova forma de ver o teorema de pitágoras e conseguir entender melhor.

Fonte: Elaborado pelo autor

Todos os participantes desta primeira atividade 9 sinalizaram que gostaram da atividade. As respostas nas figuras 20 a 23 ilustram essa receptividade positiva.

Nesta atividade, houve um engajamento interessante por parte dos alunos, pela quantidade de respostas apresentadas ao longo da atividade e pelos

comentários finais. Podemos afirmar que os alunos se interessaram pela aritmética de pontos para trabalhar o “Teorema de Pitágoras”. O que chamou a atenção foi o pedido de trazer mais sobre outras configurações de pontos, deixando claro o interesse pelas produções deixadas pela escola pitagórica, despertando o interesse dos alunos pelo contexto histórico e suas aplicações.

3.5 Atividade 2: **Problema Chinês no período do século I da Era comum**

Esta atividade foi realizada em 2 encontros com a participação de 17 alunos e foi proposta com o objetivo de:

- i) Experimentar uma prática, que podemos associar ao Teorema de Pitágoras, elaborada pelos chineses em torno do início da nossa era, ou seja, por uma civilização não-ocidental;
- ii) Explorar o “problema de base e de altura” apresentado no livro “O gnomom de Zhou”, que visa determinar a medida da hipotenusa do triângulo retângulo formado pela “base” e pela “altura”, conhecido como procedimento *gougu*;
- iii) Relacionar o resultado obtido com a primeira tripla pitagórica na primeira atividade: (3,4,5);
- iv) Ter contato com uma perspectiva geométrica do Teorema de Pitágoras.

A atividade foi apresentada em 12 páginas do Desmos, tendo como estrutura o que apresentamos na Tabela 2. A atividade pode ser vista na íntegra no Apêndice D.

Quadro 2 - Estrutura da segunda atividade no Desmos.

Página	Tarefa a ser desenvolvida
1	Página de abertura

2	Introdução ao contexto histórico da prática, no caso, do problema chinês e algumas curiosidades sobre esse problema.
3	Apresentação da versão do problema a ser utilizado, no caso a versão publicada no ano de 1213 e o significados dos caracteres presentes.
4	Apresentação da unidade de medida a ser utilizado ao longo da atividade.
5	Tarefa para responder sobre a figura geométrica que aparece com os lados na cor preta, responder qual o valor da sua área e dividir esta figura seguindo a tarefa solicitada.
6	Seguindo a divisão proposta na tarefa anterior, a tarefa é determinar o valor da área de cada retângulo formado e o valor da área de cada triângulo.
7	Tarefa para responder sobre a figura geométrica que aparece com os lados na cor verde, responder qual o valor da sua área.
8	Tarefa para determinar a medida do segmento na cor verde (hipotenusa).
9	Tarefa para responder que tipo de triângulo foi formado e qual a medida dos três lados de cada triângulo.
10	Tarefa para responder se houve a percepção do resultado da tarefa anterior com as triplas pitagóricas.
11	Apresentação da relação do problema chinês com a fórmula atual do Teorema de Pitágoras.
12	Registrar um <i>feedback</i> da atividade.

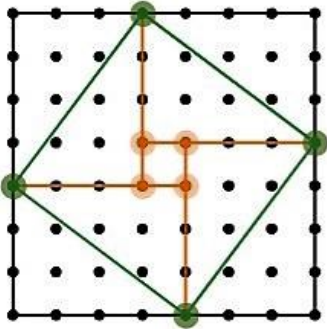
Fonte: Elaborado pelo autor

No primeiro encontro houve uma conversa sobre a proposta metodológica, o porquê da escolha dessa perspectiva, as expectativas da troca de conhecimento,

durando em torno de 10 minutos. Passadas essas etapas, foi feita uma introdução histórica sobre a questão do nome, os livros que retratavam problemas de matemática, astronomia entre outras questões, assim como o problema da base pela altura servia de suporte para resolver problemas que estão ligados a triângulo retângulo passando e a lógica para descoberta dos valores envolvidos. Já no encontro seguinte demos continuidade para ir determinando as medidas da base, da altura e da hipotenusa, a relação com a primeira tripla pitagórica (3,4,5), e por fim o feedback dos alunos sobre as tarefas e sobre o método trabalhado na prática chinesa. A seguir, comentaremos as respostas dos estudantes a algumas das tarefas da atividade, com o intuito de ilustrar como os estudantes interagiram com a prática chinesa no período do século I da Era comum, por meio da adaptação que elaboramos. Selecionamos as tarefas que julgamos serem as mais significativas para a prática chinesa no período do século I da Era comum acerca da descoberta da hipotenusa, por meio da base e da altura.

Na página 5 da atividade, os estudantes puderam verificar que a figura geométrica representa o quadrilátero de lado na cor preta. Em seguida, determinaram área desta figura e fizeram a divisão desta figura seguindo as orientações estabelecidas. A maioria dos alunos (10 de 16) respondeu corretamente à primeira pergunta. Na segunda pergunta, das 9 respostas 4 foram corretas. E na divisão proposta, foram 3 respostas corretas de 9 apresentadas. Abaixo, ilustramos uma das respostas corretas (Figura 24) e uma das respostas erradas (Figura 25).

Figura 24: respostas da Vi Hart a tarefa sobre a figura geométrica que aparece com os lados na cor preta, responder qual o valor da sua área e dividir esta figura seguindo a tarefa solicitada.
Que venha o desafio...



Você seria capaz de dizer que figura é formada pelos lados na cor preta?

QUADRADO

TRAPÉZIO

TRIÂNGULO

Qual seria a área desta figura?

Agora vamos começar?

A proposta é:

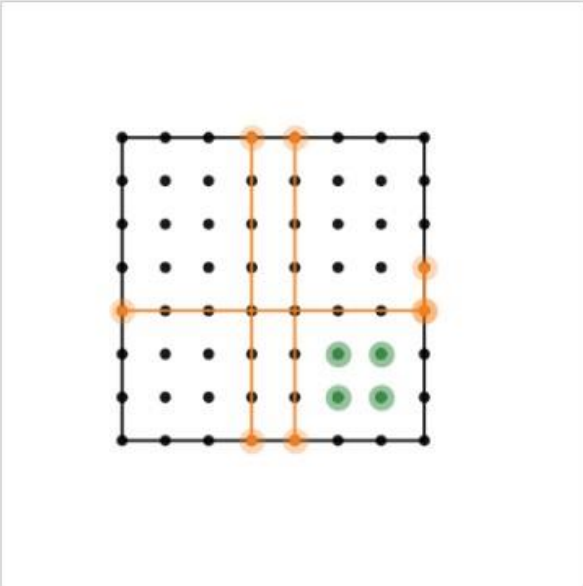
- 1) Fazer 4 retângulos de 3 x 4 usando os segmentos laranja;
- 2) Traçar as diagonais dos retângulos, partindo de cada vértice laranja, com os segmentos verde para formar um quadrilátero.

E aí será que você consegue?

Relate quais as tuas dificuldades e as tuas impressões na construção desta etapa.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 25: respostas da Christina Eubanks a tarefa sobre a figura geométrica aparece com os lados na cor preta, responder qual o valor da sua área e dividir esta figura seguindo a tarefa solicitada. Que venha o desafio...



Você seria capaz de dizer que figura é formada pelos lados na cor preta?

QUADRADO
 TRAPÉZIO
 TRIÂNGULO

Qual seria a área desta figura?

64

✓

Agora vamos começar?

A proposta é:

- 1) Fazer 4 retângulos de 3 x 4 usando os segmentos laranja;
- 2) Traçar as diagonais dos retângulos, partindo de cada vértice laranja, com os segmentos verde para formar um quadrilátero.

E aí será que você consegue?

Relate quais as tuas dificuldades e as tuas impressões na construção desta etapa.

Eu conseguir fazer 2 retângulos e 2 quadrado, mas não consegui fazer 4 retângulos de jeito nenhum.

Fonte: Elaborado pelo autor

Na página 9 da atividade, os estudantes foram solicitados a classificar o tipo de triângulo com um dos lados verde e dizer quais as medidas dos seus lados. Das 5 respostas apresentadas, apenas 1 acertou completamente. Abaixo, ilustramos com algumas das respostas apresentadas à tarefa da página 9.

Figura 26: respostas da Srinivasa R a tarefa sobre que tipo de triângulo foi formado e qual a medida dos três lados de cada triângulo.

Pensando e descobrindo

Observando o triângulo que tem como um de seus lados o segmento verde, responda:

que tipo de triângulo seria esse?

ACUTÂNGULO

RETÂNGULO

OBTUSÂNGULO

Ainda observando o triângulo formando cujo um dos lados é o segmento verde.

Quais seriam as medidas de seus 3 lados?

3, 4 e 5

Editar minha resposta

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 27: respostas de Liu Hui a tarefa sobre que tipo de triângulo foi formado e qual a medida dos três lados de cada triângulo.

Pensando e descobrindo

Observando o triângulo que tem como um de seus lados o segmento verde, responda:

que tipo de triângulo seria esse?

ACUTÂNGULO

RETÂNGULO

OBTUSÂNGULO

Ainda observando o triângulo formando cujo um dos lados é o segmento verde.

Quais seriam as medidas de seus 3 lados?

9

Editar minha resposta


Fonte: Elaborado pelo autor

Na página 10 da atividade, após a atividade sobre a escola pitagórica e com decorrer das tarefas, o objetivo é verificar se o estudante consegue relacionar as duas atividades. Um dos aspectos a ser verificado é a relação com a tripla pitagórica. Das 6 respostas apresentadas, apenas 5 delas disseram perceber alguma relação entre as duas práticas desenvolvidas. Abaixo, ilustramos com algumas respostas apresentadas à tarefa da página 10.


Figura 28: resposta de Julio Cesar de Mello sobre a percepção do resultado da tarefa anterior com as triplas pitagóricas.

Conseguiu perceber a relação entre o resultado do problema chinês e as triplas pitagóricas?

Qual seria?



A tripla pitagórica é uma sequência de três números inteiros positivos que satisfazem o famoso Teorema de Pitágoras. Em outras palavras, se a sequência (a, b, c) é uma tripla pitagórica, então o triângulo de lados a, b, c é um triângulo retângulo. Por exemplo, (3, 4, 5) e (5, 12, 13) são triplas pitagóricas




Fonte: do próprio autor.


Figura 29: resposta de Srinivasa R. sobre a percepção do resultado da tarefa anterior com as triplas pitagóricas.

Conseguiu perceber a relação entre o resultado do problema chinês e as triplas pitagóricas?

Qual seria?



A tripla pitagórica é uma sequência de três números inteiros positivos que satisfazem o famoso Teorema de Pitágoras. Em outras palavras, se a sequência (a, b, c) é uma tripla pitagórica, então o triângulo de lados a, b, c é um triângulo retângulo. Por exemplo, (3, 4, 5) e (5, 12, 13) são triplas pitagóricas



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 30: resposta de Argelia Velez-Rodriguez sobre a percepção do resultado da tarefa anterior com as triplas pitagóricas.

Conseguiu perceber a relação entre o resultado do problema chinês e as triplas pitagóricas?

Qual seria?

Fonte: Elaborado pelo autor

Na página 12, os estudantes foram solicitados para dar um *feedback* sobre o entendimento dos procedimentos no problema da base e altura para determinar o valor da hipotenusa, assim como a opinião sobre a atividade como um todo.

Figura 31: respostas de Liu Hui ao registro de *feedback* da atividade.

Finalizando a nossa atividade

O que você entendeu do problema chinês?

podemos fazer um retângulo virar um quadrado, e virar um triângulo podendo calcular a altura, os lados e a base dessas figuras.

O que você achou dessa atividade?

boa, serviu para abrir mais a mente e entender que a matemática não é apenas cálculos, mas conseguindo abrir a mente, conseguimos chegar a uma lógica sem necessitar de uma fórmula.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 32: respostas da Srinivasa R. ao registro de *feedback* da atividade.

Finalizando a nossa atividade

O que você entendeu do problema chinês?



O problema chinês da base e altura estabeleceu uma relação que desenvolve o teorema de Pitágoras além da fórmula, ilustrando os processos e chegando, por fim, na construção dos conceitos pitagóricos.

O que você achou dessa atividade?



Muito interessante. Apesar de algumas dificuldades no início, com a utilização dos recursos, a atividade me ajudou a construir uma linha de pensamento que foi se conectando. Os exercícios seguiram uma ordem sequencial dinâmica, que também contribuiu com o entendimento. Em suma, me trouxe uma nova visão do teorema, gostei bastante.

Fonte: Elaborado pelo autor


As respostas acima (Figuras 31 e 32) ilustram os sentidos que dois estudantes produziram para o Teorema de Pitágoras e para a prática chinesa, a partir da segunda atividade. Para Liu Hui (Figura 31), o que chamou a atenção foi o procedimento de decomposição do retângulo inicial dado para formar um quadrado, em que aparecem 4 triângulos retângulos congruentes. Assim, a atividade mostrou, a partir da prática chinesa, que há outros processos de resolução para determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo, diferentes de aplicar uma fórmula. Podemos dizer o mesmo da resposta de Srinivasa R. (Figura 32).

Aqui vale trazer a resposta de quem não conseguiu desenvolver a proposta de tarefa:

Figura 33: respostas de Julio Cesar de Mello e Souza ao registro de *feedback* da atividade.


Finalizando a nossa atividade

O que você entendeu do problema chinês?



Eu não consegui entender muito sobre o problema chinês

O que você achou dessa atividade?



Achei essa atividade muito difícil de se fazer

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta atividade, houve uma menor participação dos alunos, pela quantidade de respostas registradas ao longo da atividade. Apesar de 17 estudantes estarem presentes (conectados) e de terem participado da introdução da atividade e das discussões, inclusive expondo suas ideias, apenas 12 estudantes fizeram as tarefas da atividade, registrando suas respostas e no feedback apenas 6 alunos deixaram seus registros. Acreditamos que o fato de ter um contexto mais geométrico fez com que o retorno fosse menor. O que chamou a atenção foram os erros básicos em geometria plana como por exemplo não reconhecer o tipo de triângulo relacionado na atividade proposta, dadas as opções: acutângulo, retângulo e obtusângulo, e também a dificuldade de interagir com a ferramenta do DESMOS para desenhar na malha de pontos. Por necessitar de mais ferramentas do programa em questão, seria bom reservar um momento para apresentar noções iniciais do seu uso e deixar os estudantes explorarem. Esse momento inicial poderia amenizar as dificuldades com os recursos do Desmos. Além disso, os enunciados podem ser revisados para deixar mais claro a tarefa pretendida.

3.6 Atividade 3: **Demonstração de Euclides**

Como mencionado, não houve tempo hábil para aplicação desta atividade, contudo todo roteiro foi montado e esta atividade foi proposta com o objetivo de:

- i) Experimentar a prática de Euclides, de natureza geométrica, em torno do “Teorema de Pitágoras”;
- ii) Explorar como o “Teorema de Pitágoras” era entendido e usado por Euclides, ou seja, para somar áreas “geometricamente”, sem atribuir medidas numéricas aos lados das figuras ou fórmula.

A atividade foi apresentada em 11 páginas do Desmos, tendo como estrutura:

Quadro 3 - Estrutura da terceira atividade no Desmos.

Página	Tarefa a ser desenvolvida
1	Página de abertura
2	Apresentação da Proposição I-47 do livro os Elementos de Euclides.
3	Apresentação das proposições I-4 e I-41, as quais são utilizadas na demonstração da Proposição I-47 e, portanto, darão suporte ao longo da atividade.
4	Tarefa para traçar segmentos, verificar a posição entre eles, à luz da Proposição I-41, verificar a relação entre o triângulo e o quadrilátero propostos.
5	Tarefa para traçar segmentos, verificar a posição entre elas, à luz do I-41, verificar a relação entre o triângulo e o quadrilátero propostos.
6	Tarefa para relacionar os triângulos mencionados, à luz da Proposição I-4, relacionar os referidos quadrado e retângulo.
7	Tarefa para determinar dois triângulos diferentes e obter a mesma relação entre os referidos quadrado e retângulo, como na tarefa anterior, sem apoio de qualquer figura.
8	Tarefa para determinar dois triângulos diferentes para obter a mesma relação entre os referidos quadrado e retângulo, como na tarefa anterior.

9	Tarefa para responder que tipo operação acontece entre os quadriláteros relacionados, determinar outros quadriláteros que justifiquem a mesma operação.
10	Associação entre a demonstração de Euclides e a fórmula atual do Teorema de Pitágoras.
11	Registrar um Feedback da atividade.

Fonte: Elaborado pelo autor

A atividade pode ser vista na íntegra no Apêndice E. Todo material está preparado e pronto para aplicação em uma outra oportunidade e ficará à disposição da escola e para qualquer docente que queira desenvolver a proposta.

3.7 Questionário final

Vale aqui retomar que o questionário final (Apêndice B) teve como o objetivo verificar o que mais chamou a atenção dos participantes em relação às duas atividades aplicadas, o que teria mudado sobre o Teorema de Pitágoras, o que eles teriam a dizer sobre Pitágoras, se apresentar o contexto histórico e as problemáticas referentes ao assunto, poderia melhor auxiliar na aprendizagem do tema proposto e como as atividades podem ser melhoradas. Obtivemos 8 respostas para este questionário final.

A primeira pergunta pede para comentar o que mais chamou a sua atenção nas atividades “escola pitagórica” e o “problema chinês”.

- 1) O que mais chamou a sua atenção nas atividades “escola pitagórica” e o “problema chinês”?

Apresentamos algumas respostas que se destacaram para nós.

O que mais me chamou atenção foi a melhora do meu aprendizado e do meu pensamento cognitivo, que é impossibilitada quando apresenta-se somente o processo final. (Terence Tao)

O que me chamou atenção é que eles são totalmente opostos um do outro, o "problema chinês" é mais complicado e você tem que ter mais atenção por conta das figuras e dos traços, já a "escala pitagórica" é mais fácil de entender pois são apenas pontinhos. (Wen-Tsun Wu)

As semelhanças entre os estudos. Ambos trabalharam a partir de diferentes pontos de partida e chegaram em resultados que apresentavam certas similaridades. (Candice Price)

A resposta de Terence Tao destacou-se para nós porque o estudante atribui a melhora no seu aprendizado ao estudo das práticas e diz que não há melhora quando se apresenta somente o processo final, o qual interpretamos como a igualdade expressa pelo Teorema de Pitágoras. Já as respostas de Wen-Tsun Wu e Candice Price chamaram nossa atenção porque trazem ideias contraditórias. Enquanto o primeiro aponta que as duas práticas são opostas (no sentido de uma ser difícil e a outra ser fácil), a segunda aponta possíveis semelhanças.

A segunda pergunta questiona se alguma coisa mudou para o estudante em relação ao Teorema de Pitágoras.

- 2) Alguma coisa mudou para você em relação ao Teorema de Pitágoras? Explique o máximo que quiser.

Sobre a pergunta 2, as respostas que nos chamaram a atenção foram:

Sim, porque eu aprendi de uma forma diferente da escola, foi uma lógica diferente. (Katherine Johnson)

Achei mais interessante por conta do problema chinês, porém um pouco difícil de entender. (Madhava)

Sim. Obtive uma visão mais ampla, com o contexto histórico e a construção do pensamento por trás das relações estabelecidas pelo teorema. (Candice Price)

A resposta de Katherine Johnson destacou-se para nós por observar que as atividades trouxeram uma abordagem sob uma perspectiva que comumente não é apresentada. O que é comumente apresentado é a fórmula e a sua aplicação para resolver exercícios, deixando de lado a reflexão sobre o tema apresentado; para Madhava foi o destaque em relação à prática chinesa, mesmo relatando que teve

dificuldade, e para Candice Price a relevância de trazer a perspectiva histórica em ambas as práticas, para contribuir significativamente na construção de conhecimento acerca do Teorema de Pitágoras. Ou seja, a resposta de Candice Price sugere que há muito mais do que o que se aprende na escola sobre o teorema.

Na terceira pergunta, queríamos verificar qual o posicionamento dos estudantes sobre a existência de um homem chamado Pitágoras.

3) Depois das atividades aplicadas, o que podemos falar sobre Pitágoras?

Sobre a pergunta 3, o tipo de resposta que nos chamou a atenção foi:

Que é um grupo de filósofos e não só um filósofo. (Pamela E. Harris)

A resposta de Pamela E. Harris se destaca pela percepção de que o Teorema de Pitágoras, segundo Roque (2012), não foi atribuído a uma pessoa como comumente é apresentado, inclusive sendo o nome do teorema.

Já a quarta pergunta questiona se apresentar o contexto histórico e as problemáticas referentes ao assunto poderia melhor auxiliar na aprendizagem do tema proposto.

4) Apresentar o contexto histórico e as problemáticas referentes ao assunto, poderia melhor auxiliar na aprendizagem do tema proposto? Explique, caso queira.

Observado o enunciado da quarta questão, destacamos as seguintes respostas:

Sim, dá uma linha pelo qual o pensamento deve seguir. Apresentar dessa maneira nos dá direção e prepara, ao longo das etapas, o nosso cognitivo. (Terence Tao)

Sim, é importante entender o contexto histórico e as problemáticas para uma boa aprendizagem. (Madhava)

Todas as 8 respostas foram unânimes em dizer que “sim”. A resposta de Terence Tao destacou-se para nós por sugerir que a apresentação das “etapas” do desenvolvimento do teorema traz sentido para o seu aprendizado. Já a resposta da Madhava aponta que o conhecer o contexto histórico é importante para a aprendizagem.

Por fim, a quinta e última pergunta pede sugestões para melhorar as atividades. Abaixo, apresentamos a pergunta e trazemos algumas respostas que nos pareceram interessantes:

5) Como você acha que as atividades podem ser melhoradas? Deixe suas críticas e sugestões.

Eu estou gostando bastante das atividades do jeito que está fazendo. Porém, poderia ser mais "prático" ex: apresentar nas atividades mais sobre o contexto histórico. (Wen-Tsun Wu)

A atividade foi muito boa e dinâmica. Poderia até ter uma maior duração. Gostei muito, e no momento não tenho nada a sugerir sobre mais atividades. Achei completo. (Candice Price)

A resposta de Wen-Tsun Wu mostra um interesse por mais informações acerca do contexto histórico. A resposta de Candice Price nos faz refletir sobre a questão de um planejamento demandando mais tempo, talvez no início do ano letivo, pois ali tem-se a noção das aulas totais a serem trabalhadas ao longo do ano letivo, por isso nesse momento daria para melhor distribuir os encontros.

Com essas informações e as etapas anteriores, aqui apresentadas, vamos para a próxima seção onde faremos algumas reflexões sobre a experiência.

3.8. Algumas reflexões sobre a experiência

Ao longo da proposta aplicada podemos perceber o empenho e interesse por parte dos participantes, baseando-se em algumas respostas apresentadas no feedback em cada atividade.

No início do levantamento de informações pelo formulário inicial (Apêndice A) chamou a atenção o fato de somente 2 alunos relatarem alguma experiência de leitura com referência à história da matemática, tratando-se de alunos do Ensino Médio. Isso nos faz questionar se as informações sobre História da Matemática que vários livros didáticos apresentam são lidas pelos estudantes na escola básica (Haubrichs e Bernardes, 2020).

Em relação às atividades e como a experiência afetou os participantes, podemos dizer que o contato com duas práticas históricas os levou a produzir outros sentidos para o Teorema de Pitágoras. Em nossa interpretação, essa produção de sentidos indica, sutilmente, que os participantes também problematizaram o teorema.

Os estudantes acharam as atividades interessantes porque mostraram que há outros processos e problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras e também que o conhecimento acerca do Teorema de Pitágoras não se resume a uma fórmula e a sua aplicação para determinar um dos lados de um triângulo retângulo (veja, por exemplo, figuras 17, 20, 21, 31 e 32).

Um dos sentidos produzidos pelos estudantes pode ser observado, ainda que sutilmente, em respostas que sugerem a percepção de que o teorema não tem como fim a aplicação de fórmulas por meio de exercícios, fugindo do esperado para eles. Para ilustrar, retomamos a observação de Terence Tao feita no questionário final em sua quarta pergunta:

Sim, porque o nosso pensamento não fica apenas limitado em fórmulas e mais fórmulas é uma forma diferente de ser visto aquela matéria. (Terence Tao)

A prática da escola pitagórica de deduzir relações numéricas a partir de configurações espaciais de pontos, mais especificamente a determinação de triplas pitagóricas a partir de números quadrados, marcou os estudantes e mostrou um contexto diferente do geométrico com o qual eles estão familiarizados - ou seja, de determinar um dos lados de um triângulo retângulo. Desse modo, contribuiu para os estudantes produzirem um sentido diferente acerca do teorema.

Já a prática da matemática chinesa em torno do problema de base e de altura em que fazendo um processo de decomposição e recomposição de retângulos há a construção de um quadrado, onde a medida do seu lado exibe a resposta da hipotenusa sendo este formado pelos lados do retângulo original, chamou a atenção dos estudantes o fato de mesmo sendo uma prática de fácil percepção geométrica em que vai relacionar o triângulo retângulo, não houve a necessidade do uso de fórmula para determinar o valor da hipotenusa, chamando a atenção para o

processo realizado até o resultado esperado. Mais uma vez contribuindo para os estudantes produzirem um sentido diferente acerca do teorema.

Outro aspecto que marcou os participantes foi a percepção de que o Teorema de Pitágoras não é um conhecimento produzido por apenas um homem, o que vemos como uma consequência do contato com duas práticas situadas em diferentes épocas e civilizações e com usos distintos do teorema. Aliás, a dúvida sobre a existência de um homem chamado Pitágoras (Roque, 2012) também marcou os estudantes.

De uma certa forma, ainda que não tenha ficado muito claro para eles, esses sentidos que eles produziram servem para nós como um indício de que eles também problematizaram o Teorema de Pitágoras. Isso foi confirmado em algumas respostas do questionário final, como as respostas de Wen-Tsun Wu e de Candice Price à pergunta 1, de Pamela E. Harris à pergunta 3 e a resposta de Madhava à pergunta 4.

Notamos que o recurso de desenhar na grade de pontos do Desmos trouxe algumas dificuldades para os participantes. Além disso, observamos uma maior dificuldade por parte dos estudantes na segunda atividade por conta do contexto geométrico envolvido. A segunda atividade requer um conhecimento prévio de geometria plana. A administração do tempo para cada atividade deve ser revista. No caso da ferramenta Desmos, reservar um momento inicial para apresentar as ferramentas necessárias para trabalhar e deixar os alunos testarem para seguir com a prática chinesa pode fazer uma diferença na fluidez das tarefas dessa atividade. Sobre o tempo, pode ser organizado no início do ano letivo para turmas de 9º ano do ensino fundamental, 1ª série do ensino médio e a 3ª série do ensino médio, uma vez que se trata de um conteúdo da educação básica. Seria interessante que houvesse um tempo maior para a aplicação das atividades, nesse caso, mais informação histórica poderia ser incluída.

Após as observações aqui expostas, traremos na próxima seção as considerações sobre a proposta desenvolvida e quais conclusões chegamos diante dos dados coletados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa aqui relatada teve como objetivo investigar que contribuições a história da matemática pode trazer para o ensino do Teorema de Pitágoras. Inspiramo-nos na noção de matemática problematizada trazida por Giraldo (2019) e por Roque e Giraldo (2014) e, também, na perspectiva atualizada da história trazida por Saito (2018). O problema da pesquisa foi formulado por meio da seguinte questão: *Usar momentos do desenvolvimento histórico dos conceitos referentes ao Teorema Pitágoras pode auxiliar a desenvolver uma visão problematizada sobre esse teorema?*

Uma proposta de ensino para o Teorema de Pitágoras foi elaborada com três rodadas de atividades, as quais exploram três práticas históricas: As práticas em torno dos números figurados, na Escola Pitagórica, que floresceu no Período Helênico clássico, por volta do século V a.E.C. (Roque, 2012), As práticas da matemática chinesa em torno do problema da base e da altura, no século I da Era Comum (Chemla, 2005) e as práticas em torno do emprego de equivalência de áreas e das operações geométricas com áreas, sem atribuir números às medidas em jogo, que foram registradas no livro “Os Elementos” de Euclides redigido no século III a.E.C. (Roque, 2012).

As duas primeiras atividades foram aplicadas com um grupo de 17 estudantes voluntários de uma escola da rede privada do município de São Gonçalo, que à época estavam cursando o Ensino Médio.

Nossos objetivos gerais com as atividades foram: levar os alunos a refletirem sobre a existência de diferentes formas do uso do Teorema de Pitágoras ao longo da história e perceber que o próprio Teorema de Pitágoras tem uma história, ou seja, a matemática tem uma história, que se desenvolve ao longo dos anos e por meio de demandas internas e externas à matemática. Com isso, esperávamos que os participantes problematizassem o teorema.

Em relação à receptividade dos estudantes com a proposta, podemos dizer, baseados no questionário final, que eles acreditam que a história da matemática pode ajudá-los a aprender matemática, por trazer uma abordagem diferenciada e por

sair da rotina de ser apresentado a uma fórmula a ser utilizada em exercícios de aplicação. Descobrir que há outros processos e problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras foi um fator que despertou o interesse dos estudantes. Por outro lado, percebemos que o engajamento com a primeira atividade (a prática da escola pitagórica) foi maior do que com a segunda atividade (a prática da matemática chinesa com o problema de base e de altura). As causas que identificamos foram dificuldades com a geometria e dificuldades com o recurso do Desmos de desenhar na malha de pontos. Fazer uma atividade básica no Desmos para apresentar os recursos que serão usados na prática chinesa fazendo-os manusear pode colaborar com o desenvolvimento da prática referida. Como as referências geométricas dentro da prática chinesa são básicas, acreditamos que uma revisão no encontro em que a atividade no Desmos for realizada pode contribuir para o melhor proveito da prática.

O contato com as práticas históricas contribuíram para que os estudantes produzissem diferentes sentidos para o teorema. Esses sentidos apontam para a percepção de que o teorema nem sempre teve como fim a aplicação de fórmulas por meio de exercícios. Como na atividade sobre a escola pitagórica temos:

Como o Teorema de Pitágoras se relaciona logicamente com com conceitos como GNOMON, possibilitando a criação de fórmulas ou técnicas de resolução com embasamento pitagórico. (Candice Price)

Aprenderi como funciona a formação de um teorema de Pitagórica não é só aquela fórmula tem muita coisa antes pra chegar na fórmula. (Julio Cesar de Mello e Souza)

E na prática chinesa:

As triplas pitagóricas se relacionam com as medidas dos lados de triângulos retângulos, de modo que a demonstração do problema chinês ilustrasse estes conceitos de maneira similar, só que em um espaço geométrico e trabalhando diretamente com as figuras formadas. (Srinivasa Ramanujan)

Esses sentidos que os estudantes produziram são, para nós, indícios de que eles problematizaram o Teorema de Pitágoras.

Retomando a questão de pesquisa, podemos dizer que a história da matemática tem potencial para promover uma matemática mais problematizada, pois sabendo que “Uma abordagem de matemática de forma problematizada privilegia a

produção de sentidos e de afetos” (Giraldo,2019, p.8) e ao analisar essa produção de sentidos trazidas pelos estudantes, por meio das respostas aqui apresentadas, nos faz acreditar que a nossa proposta de ensino contribuiu para a problematização da matemática.

Mesmo acreditando que a história da matemática tem potencial para promover uma matemática mais problematizada, que os estudantes tenham problematizado o tema e que a nossa proposta de ensino contribuiu para uma visão problematizada, ainda há a necessidade de mais estudo, pois aqui realizamos apenas duas atividades em que a segunda não teve um engajamento tão participativo quanto a primeira. Há a necessidade de se conduzir mais pesquisas com outros temas da Educação Básica, onde a referência para as atividades propostas seja a perspectiva histórica. E partindo dessas pesquisas, poderemos tentar analisar os sentidos produzidos pelos envolvidos, e que caracterizem cada vez mais a problematização nas aulas de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MALHEIROS, Bruno Taranto. **Metodologia em pesquisa em educação**. 1ª edição. Rio de Janeiro. Editora LTC, 2011

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 3ª edição. Volume I. São Paulo. Editora Ática, 2016.

LEONARDO, Fábio Martins. **Conexões com a matemática**. Volume I. 3ª edição. São Paulo. Editora moderna, 2016.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1ª edição. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; GIRALDO, Victor. **O Saber do Professor de Matemática - Ultrapassando a Dicotomia Entre Didática e Conteúdo**. 1ª edição. Rio de Janeiro. Editora : Ciência Moderna, 2014.

CHEMLA, Karine. **Geometrical Figures and Generality in Ancient China and Beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra**. Volume 18, n. 1. Março 2005. p. 123- 166.

SAITO, Fumikazu. A pesquisa histórica e a filosófica na educação matemática, **Edição Especial Temática: História, Filosofia e Educação Matemática Sinop**, volume 9, n. 2, ago./out. 2018. p. 604-618.

ANTUNES, Gladston; CAMBRAINHA, Michel. Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem. Em: **IV Simpósio nacional da formação do professor de matemática**, 2020.

GIRALDO, Victor. Que matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada. Em: **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Cuiabá, julho de 2019.

HAUBRICHS, Cléber; BERNARDES, Aline. Inserções de história em livros didáticos de matemática: elaborando um instrumento de coleta de dados. Em: **17º Seminário Nacional de Ciência e da Tecnologia**, 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília (1998).

APÊNDICES

Apêndice A – Questionário inicial

1) Selecione abaixo um nível para indicar a intensidade com a qual você gosta de Matemática. 1: indica que você não gosta de nada em matemática; 2: indica que você tem pouca afinidade com matemática; 3: indica que é indiferente pra você, ou seja, você não gosta, nem desgosta, 4: indica que tem afinidade com matemática, 5: indica que você gosta muito de tudo que estudou de matemática.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2) Você já leu alguma coisa sobre história da matemática antes de participar desse estudo?

3) Caso você tenha respondido sim à questão 2, responda:

- a. O que você já leu sobre história da matemática?
- b. O que você aprendeu com a leitura?
- c. Você gostou do que leu?

4) Indique o seu grau de concordância de 1 a 5 sobre as seguintes afirmações:

Indique o seu grau de concordância de 1 a 5 sobre as seguintes afirmações: O nível 1 indica que você é totalmente contra essa afirmação, 2 desconhece a afirmação, o nível 3 indica que você é indiferente, 4 concorda parcialmente e o nível 5 indica que você concorda totalmente.

Afirmação	1	2	3	4	5
O teorema de Pitágoras diz que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.					
O teorema de Pitágoras serve para encontrar a medida da área de um quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo					

retângulo					
O teorema de Pitágoras serve para encontrar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo.					
Se em um triângulo, as medidas a, b e c dos seus lados satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$ ou $b^2 = a^2 + c^2$ ou $c^2 = a^2 + b^2$, então esse triângulo é retângulo.					

5) Apresente uma situação da vida real em que o teorema de Pitágoras poderia ser aplicado.

6) Como você classificaria o seu nível de interesse na participação da proposta a ser desenvolvido com história da matemática: 1: Indica sem expectativa; 2: Indica que tem pouca expectativa; 3: indica que é indiferente pra você; 4: indica um nível normal de expectativa, por se tratar um conteúdo da grade curricular, 5: indica uma grande expectativa.

a. 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Apêndice B - Questionário final

1) O que mais chamou a sua atenção nas atividades “escola pitagórica” e o “problema chinês”?

Nas últimas semanas, vocês vivenciaram a prática dos pitagóricos com a aritmética de pontinhos e a prática dos chineses através do problema de base e de altura. Nós relacionamos essas práticas ao que conhecemos hoje por Teorema de Pitágoras.

2) Alguma coisa mudou para você em relação ao teorema de Pitágoras? Explique o máximo que quiser.

3) Depois das atividades aplicadas, o que podemos falar sobre Pitágoras?

4) Apresentar o contexto histórico e as problemáticas referentes ao assunto, poderia melhor auxiliar na aprendizagem do tema proposto? Explique, caso queira.

5) Como você acha que as atividades podem ser melhoradas? Deixe suas críticas e sugestões.

Apêndice C

Atividades 1 na íntegra

A escola pitagórica e o Teorema de Pitágoras

ATIVIDADE 1



CONHECENDO A HISTÓRIA.



Hoje se sabe que essa tal relação era conhecida por diversos povos mais antigos do que os gregos e pode ter sido um saber comum na época de Pitágoras em torno do século IV a E.C.

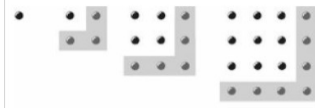
A referência do trabalho da escola pitagórica eram as triplas pitagóricas.

E qual era a ideia?

É fornecer triplas constando de dois números quadrados e um terceiro número quadrado que seja a soma dos dois primeiros. Essas triplas são constituídas por números inteiros.

E como funcionava?

Conhecendo o GNOMOM



Conhecia -se como gnomom como sendo sinônimo de números ímpares que ia acrescentando a cada numero associado

Observe um exemplo de um gnomom.

Partindo da unidade, acrescenta-se o primeiro gnomom.

E por ai segue...

Observando a sequência qual a quantidade de pontos do próximo gnomom? Explique a sua lógica.

10

0 alunos

9

0 alunos

7

0 alunos

8

0 alunos

6

0 alunos

Entendendo as triplas pitagóricas

Respostas Sobrepor Exibir plano de fundo

Você seria capaz de marcar o gnomom 4, gnomom 5, gnomom 6 e o gnomom 7?

Sugestão: *Varie as cores para facilitar a visualização.*

Você deve ter notado que os números da sequência acima estão dispostos segundo uma forma geométrica. Preencha a tabela abaixo para entender um pouco mais o processo de formação dos números dessa sequência.

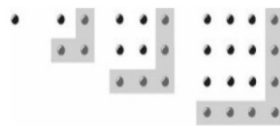
Respostas Original

Nenhuma resposta até agora...

Qual a figura geométrica formada ao acrescentar um novo gnomom?

Nenhuma resposta até agora...

Pensando como os Pitagóricos



Preencha a tabela abaixo. Ao terminar, veja se você percebe alguma relação entre os elementos de cada linha da tabela.

Respostas Original

Nenhuma resposta até agora...

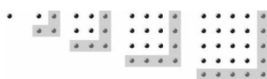
Vale observar:

$1^2 + 3 = 2^2$ $2^2 + 5 = 3^2$ $3^2 + 7 = 4^2$
 ... $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Os pitagóricos deduziam relações entre números a partir da observação visual dos números representados por pontinhos, organizados segundo uma configuração espacial, como a forma geométrica que você deve ter observado na sequência explorada nas telas anteriores.

E qual a relação que isso tem com o Teorema de "Pitágoras"?

O Teorema é de Pitágoras?



Um tripla numérica é considerada um tripla pitagórica quando: o maior entre os três números quadrados é a soma de outros dois números quadrados.

No contexto da escola pitagórica essas triplas são constituídas por números naturais, com exceção do zero.

Observando a figura, você seria capaz de determinar alguma tripla pitagórica? Que tripla seria essa?

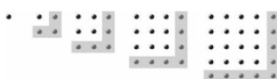
Observação: a tripla é formada pelo número de pontos associado a cada um dos lados dos quadrados envolvidos.

Você como um pitagórico...

Você observou que na figura anterior que os números 3,4 e 5 formam uma tripla pitagórica. Você conseguiria dizer qual será a próxima tripla pitagórica encontrada por meio desse processo de acrescentar um gnomom a figura anterior? Explique o teu raciocínio com as tuas palavras.

Nenhuma resposta até agora...

Você como um pitagórico...



Há um método direto para encontrar triplas pitagóricas por meio da fórmula abaixo:

Considerando a é um número impar.

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

Usando o método Pitagórico, quais as triplas são pitagóricas?

(5, 12, 13)

(7, 24, 29)

(9, 40, 41)

(13, 35, 37)

(23, 29, 33)

Depois de entendermos como funcionava a ideia da triplas pitagóricas, vamos vale observar:

Em linguagem atual, conhecendo o método para obtenção de triplas pitagóricas, podemos traduzir o método dos Pitagóricos como:

Após a realização da atividade, Sabemos que $a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$.

Considerando que $\frac{a^2-1}{2}$ e $\frac{a^2+1}{2}$ se relacionam com algum quadrado então tomando $\frac{a^2-1}{2} = b$ e $\frac{a^2+1}{2} = c$, qual resultado teremos?

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Lembrando que os Pitagóricos trabalhavam com números naturais e que a é um número impar.

Finalizando nossa atividade.

O que você entendeu com esta atividade?

Nenhuma resposta até agora...

O que você achou da atividade?

Nenhuma resposta até agora...

Apêndice D

Atividade 2 na íntegra

O teorema de Pitágoras e os chineses

ATIVIDADE 2



O teorema de Pitágoras e os chineses



O Gnomon de Zhou (Zhoubi)

Era um livro que relaciona pensamentos e problemas de matemática e de astronomia.

Os historiadores acreditam ser do século 1 antes da Era Comum e o século 1 depois da Era Comum, embora não se tenha consenso.

Vamos ter como referência a cópia feita pelo matemático chinês Zhao Shuang, sendo ele o comentarista desta obra.

Estamos nos baseando numa edição de 1213.

O termo Zhou refere-se à antiga dinastia Zhou (1046–256 a. E. C.), sendo esta a dinastia mais duradoura da China.

O termo *bi* refere-se ao gnômon do relógio de sol.

Referência:

Chemla, K. 2005. Geometrical Figures and Generality in Ancient China and Beyond. Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra

O teorema de Pitágoras e os chineses



O Gnomon de Zhou (Zhoubi)

Neste livro é apresentado um procedimento chamado o procedimento da base e da altura. E o objetivo de procedimento é determinar a medida do lado do triângulo formado por essa base e por essa altura.

Na China é chamado de "teorema de gougu"

gou significa base.

gu significa altura.

O dois caracteres na parte superior: *xian tu*, indicam que esta é a "Figura da hipotenusa".

O demais caracteres são as explicações do procedimento lidos da direita para a esquerda.

Aprendendo a construir no Desmos...

Respostas Sobrepor Exibir original

Aqui vamos aprender a mexer como segmentos para o melhor entendimento da atividade.

- 1) Usando os segmentos laranja construa um quadrilátero qualquer.
- 2) Usando os segmentos verde construa um triângulo qualquer.

Observação 1: Os segmentos pode mudar de tamanho.

Observação 2: Para movimentar o segmento basta arrastar cada uma das extremidades para o local desejado.

Vale observar:

Respostas Sobrepor Exibir original

Vamos tomar a medida de A até B como medida padrão de valor 1.

Da mesma forma que a medida de C até D terá a medida padrão de valor 1.

Que venha o desafio...

Respostas Sobrepor Exibir original

Você seria capaz de dizer que figura é formada pelos lados na cor preta?

QUADRADO

0 alunos

TRAPÉZIO

0 alunos

TRIÂNGULO

0 alunos

Agora vamos começar?

A proposta é:

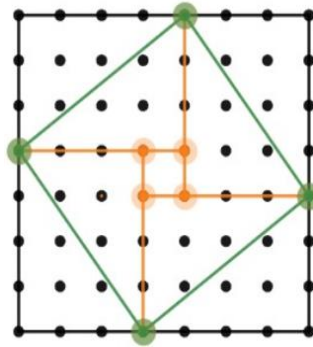
- 1) Fazer 4 retângulos de 3 x 4 usando os segmentos laranja. De tal forma que dois lados do retângulo serão na cor preta e dois lados do retângulo serão na cor laranja;
- 2) Traçar as diagonais dos retângulos, partindo de cada vértice laranja, com os segmentos verde para formar um quadrilátero.

E aí será que você consegue?

Relate quais as tuas dificuldades e as tuas impressões na construção desta etapa.

Observação: Os segmentos mudam de tamanho.

Pensando e descobrindo

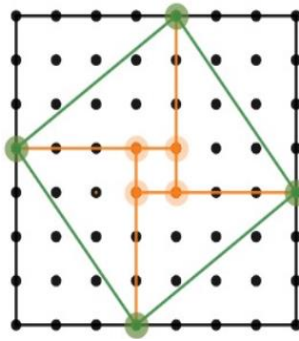


Tomando a referência o padrão de medida visto anteriormente, qual seria o valor da área de cada retângulo?

Nenhuma resposta até agora...
Qual o valor da área de cada triângulo?

Nenhuma resposta até agora...

Pensando e descobrindo



Qual a área do quadrilátero com os lados na cor verde?

Nenhuma resposta até agora...
Você seria capaz de dizer que quadrilátero foi formado pelas diagonais de cada retângulo? Que quadrilátero seria?

SIM

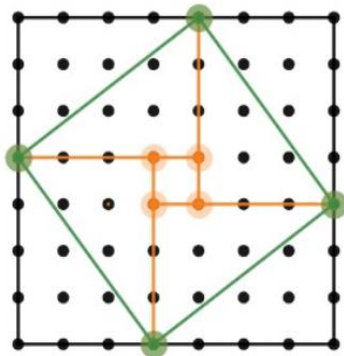
0 alunos

NÃO

0 alunos

Nenhuma resposta até agora...

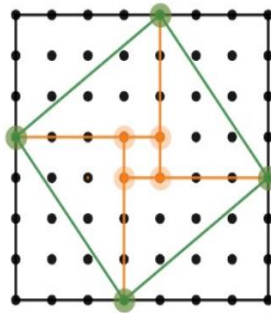
colocar a área pra ajustar



Qual a medida do segmento verde?

Nenhuma resposta até agora...

Pensando e descobrindo



Observando o triângulo que tem como um de seus lados o segmento verde, responda:

que tipo de triângulo seria esse?

ACUTÂNGULO

0 alunos

RETÂNGULO

0 alunos

OBTUSÂNGULO

0 alunos

Ainda observando o triângulo formando cujo um dos lados é o segmento verde.

Quais seriam as medidas de seus 3 lados?

Nenhuma resposta até agora...

Conseguiu perceber a relação entre o resultado do problema chinês e as triplas pitagóricas?

SIM

0 alunos

NÃO

0 alunos

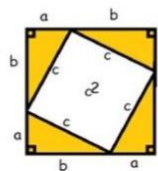
Qual seria?

Nenhuma resposta até agora...

O teorema de "Pitágoras" e os chineses

Após a nossa atividade vamos analisar o algebrismo por detrás.

Podemos olhar a figura final da forma a seguir:



O quadrado maior teria área dada por: $(a + b)^2$.

Que também pode ser escrito por: $c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$ ou melhor $c^2 + 2a \cdot b$.

Assim $(a + b)^2 = c^2 + 2a \cdot b$, lembrando que $(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$, desta forma: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = c^2 + 2a \cdot b$, subtraindo $2a \cdot b$ em ambos os lados temos,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Finalizando a nossa atividade

O que você entendeu do problema chinês?

Nenhuma resposta até agora...

O que você achou dessa atividade?

Nenhuma resposta até agora...

Apêndice E

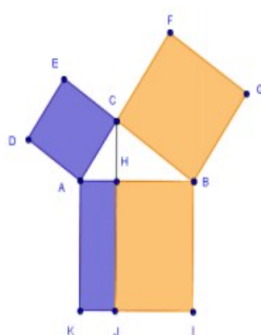
Atividade 3 na íntegra

Teorema de "Pitágoras" por Euclides

ATIVIDADE 3



Teorema de "Pitágoras" por Euclides

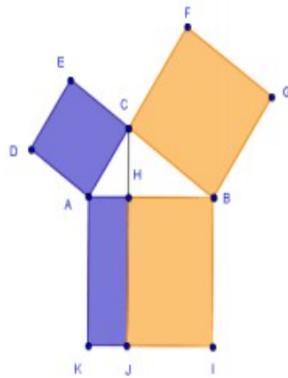


O Teorema de Pitágoras foi muito bem empregado por Euclides, esse mesmo da geometria Euclidiana, com o intuito de resolver problemas de adição de área de quadrados. E em várias de suas demonstrações essa chama a atenção, conhecida com I.47:

"Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto."

Usando apenas régua e compasso mostrar que cada quadrado vale um retângulo que juntos dariam o quadrado do lado oposto ao ângulo reto.

Teorema de "Pitágoras" por Euclides



Alguns resultados que vão nos ajudar na nossa caminhada.

I-4: Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais; as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais. (congruência LAL)

I - 41: Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo. (por estarem entre as mesmas paralelas terão a mesma altura)

Demonstrando o problema 47 de Euclides

Construa os triângulos ABD e as semirretas AD e EC.

Observando as semirretas AD e EC o que você acha sobre suas posições entre si?
(Sugestão: use cores diferentes para facilitar a visualização)

De acordo com sua resposta, justifique com as suas palavras o porquê.

Como ADEC é um quadrado e as semirretas estão dois opostos desse quadrado, então elas são paralelas entre si.

De acordo com o resultado I 41 e Observando o triângulo ADB e o quadrado ACED, o que podemos afirmar sobre eles?

O triângulo tem metade da área do quadrado.

[Editar minha resposta](#)

Demonstrando o problema 47 de Euclides

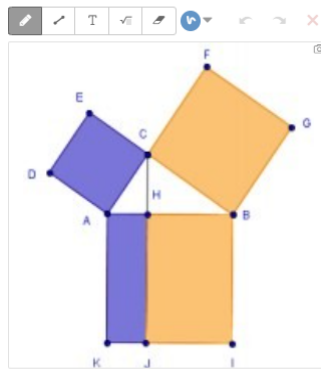
Construa os triângulos ACK e as semirretas CH e AK.

Observando as semirretas CH e AK o que você acha sobre suas posições entre si?
(Sugestão: use cores diferentes para facilitar a visualização)

De acordo com sua resposta, justifique com as suas palavras o porquê.

Observando o resultado I 41, qual a relação entre o triângulo ACK e o retângulo AHKJ?

Demonstrando o problema 47 de Euclides



Construa os triângulos ADB e ACK.

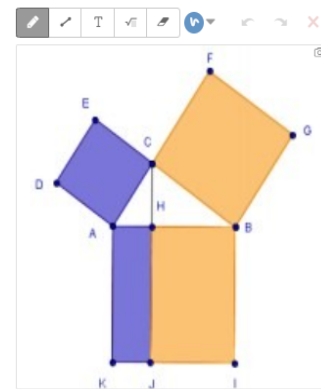
Sugestão: Construa os triângulos com cores diferentes, para facilitar a visualização.

Observando o resultado 1.4, O que podemos afirmar sobre esses dois triângulos? Explique do teu jeito o porquê.

Observando as construções anteriores e que foi feita agora. Você seria de dizer qual relação sobre o a área do quadrado ACED e a área do retângulo AHKJ? Justifique.

 Enviar

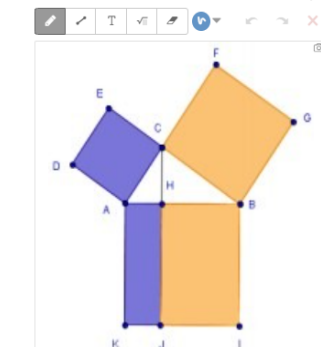
Demonstrando o problema 47 de Euclides



Seguindo a mesma lógica, quais dois triângulos você adotaria pra justificar a mesma relação entre o quadrado BCFG e o retângulo BIJH? (Faça o desenho para auxiliar)

 Enviar

Demonstrando o problema 47 de Euclides



Construa os triângulos GBA e CBI.

Sugestão: Construa os triângulos com cores diferentes, para facilitar a visualização.

Observando o resultado 1.4, O que podemos afirmar sobre esses dois triângulos? Explique do teu jeito o porquê.

Seguindo a mesma lógica das construções anteriores, Você seria de dizer qual relação sobre o a área do quadrado BCFG e o retângulo BIJH? Justifique.

 Enviar

Demonstrando o problema 47 de Euclides

Observando a relação entre o quadrado ACDE com o retângulo AKJH e a relação entre o quadrado BCFG com o retângulo BIHJ.

O quadrado ABIK representaria qual operação?

- adição.
- subtração.
- multiplicação.
- divisão.

Entre quais quadriláteros?

(MAIS DE UMA SOLUÇÃO É POSSÍVEL)

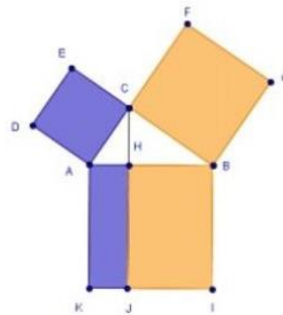
(Selecione tudo que se aplica.)

- AKJH e BIHJ
- ACDE e BIHJ
- AKJH e BCFG
- ACDE e BCFG

Conclusão da demonstração do problema 47 de Euclides.

Após os resultados podemos observar mais vez.

Considere lado $\overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$, temos como áreas $ACDE = a^2$, $BCFG = b^2$ e $ABIK = c^2$. Agora com o conhecimento do 1.47, concluímos:





$$a^2 + b^2 = c^2$$

Lembrando que não havia números aqui, toda construção era feita com régua (sem referência a alguma unidade padronizada) e compasso.


Finalizando nossa atividade.


O que você aprendeu com a atividade?





O que você achou da atividade?



 Enviar

Apêndice F

Link atividade 1:

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/600daef42c72970d66eb5eed?lang=pt-BR>

Anexo GI

Link atividade 2:

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/60a1660aba032707a04c7d91?lang=pt-BR>

Anexo H

Link atividade 3:

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/60a165ecc03fad079fb8e050?lang=pt-BR>

Anexo I

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado para participar da pesquisa **DESENVOLVIMENTO DE UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA**. Caso os teus responsáveis deixem você participar, queremos fazer com que você perceba a existência de diferentes formas do uso do que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras, que o teorema de Pitágoras tem uma história e que se desenvolve ao longo dos anos por meio de suas aplicações e possa entender o que seria a visão problematizada do Teorema. Os alunos que irão participar dessa pesquisa têm em torno de 14 a 18 anos de idade. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito teu e não terá nenhum problema se desistir. A pesquisa será feita em casa, onde os alunos vão participar de modo online, por conta da Pandemia. Para isso, nos encontraremos pelo MEET e faremos atividades usando o DESMOS. Mas há algo de ruim nisso: o risco no atraso do calendário da escola e na matéria também. Caso aconteça algo errado, você pode me procurar pelo telefone (21)99272-5656 ou pelo e-mail: jandirluizpsantos@gmail.com. Mas há coisas boas que podem acontecer como ter a possibilidade de conhecer novidades sobre o Teorema de Pitágoras, conhecer povos que já usavam o Teorema sem ter ouvido falar de Pitágoras e entender como eles usavam no dia a dia. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você der. Os resultados da pesquisa serão publicados, mas sem identificar os alunos que participaram da pesquisa. Quando terminarmos a pesquisa falarei dos resultados para você, sendo enviado para o e-mail que você escolher e uma cópia da pesquisa também. Se você tiver alguma dúvida, pode me procurar. Eu escrevi os contatos na parte de cima desse texto.

Eu _____ aceito participar da pesquisa **DESENVOLVIMENTO DE UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA**,

que tem os objetivos: perceber a existência de diferentes formas do uso do que hoje conhecido como Teorema de Pitágoras, que o teorema de Pitágoras tem uma história que se desenvolve ao longo dos anos por meio de suas aplicações e entender o que seria a visão problematizada do Teorema. Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir que ninguém vai ficar furioso. Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis. Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

São Gonçalo, ____ de _____ de 2021.

Assinatura do menor

Apêndice J

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

A pesquisa “UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA” visa desenvolver uma proposta para o ensino do Teorema de Pitágoras em uma turma da 1ª série e uma turma da 3ª série do Ensino Médio, com base em alguns momentos da história da matemática.

O objetivo da pesquisa é desenvolver um material que promova uma visão problematizada da matemática sobre o Teorema, mostrando aos estudantes que a matemática não é uma ciência estática ou imutável.

A pesquisa será realizada através da participação voluntária de estudantes da 1ª série e da 3ª série do ensino Médio, em 4 encontros.

Nesses encontros, os estudantes realizarão atividades a cerca práticas de 3 momentos distintos de civilizações que já faziam uso do “Teorema de Pitágoras” e

comparar com aplicação no material didático atual dos participantes.

As atividades serão implementadas na plataforma Desmos, para isso, os estudantes usarão seus celulares ou mesmo um computador. Não será preciso instalar nenhum aplicativo.

As atividades serão anônimas, garantindo privacidade e sigilo quanto ao nome ou qualquer informação que possa revelar sua identidade.

POR SER TRATAR DE UMA METODOLOGIA DIFERENCIADA DE EXPOR O CONTEÚDO E PROMOVER UMA VISÃO PROBLEMATIZADA, HÁ O RISCO NO ATRASO DO CALENDÁRIO ESCOLAR E INCLUSIVE EM ALGUNS CONTEÚDOS DA GRADE CURRICULAR.

Os benefícios seriam ter a possibilidade de conhecer novidades sobre o Teorema de Pitágoras, conhecer povos que já usavam o Teorema sem ter ouvido falar de Pitágoras e entender como eles usavam no dia a dia.

Como a proposta de pesquisa será realizada durante o ano letivo e dentro da grade curricular não terá qualquer gasto para realização das atividades propostas.

Durante todo o período da pesquisa você tem o direito de tirar qualquer dúvida ou pedir qualquer esclarecimento, bastando para isso entrar em contato com o pesquisador ou com o Comitê de Ética em Pesquisa.

Você tem o direito garantido de não aceitar participar ou de retirar a sua permissão, a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo, retaliação pela sua decisão ou qualquer prejuízo em seu rendimento escolar.

Ao participar da pesquisa você tem direito a uma via do TCLE, caso queira, e pode entrar em contato com o pesquisador e/ou o Comitê de Ética responsável pela autorização da pesquisa.

Após a conclusão da pesquisa e publicação os mesmo, os participantes terão acesso ao documento publicado, seja por meio de link, por cópia ou e-mail, caso queira.

Em cumprimento da resolução 466/12, assumo seguir toda burocracia pertinente e vigente.

Caso seja de interesse do participante entrar em contato com o pesquisador responsável deverá entrar em contato através do e-mail: jandirluizpsantos@gmail.com ou com o CEP responsável pela aprovação da pesquisa pelo e-mail cep@unirio.br. Ou pelo telefone: (21)99272-5656.

Pesquisador responsável: Jandir Luiz Pereira dos Santos
Professor de Matemática habilitado pela UERJ-FFP em São Gonçalo - 23 de julho de 2008 sob registro 033795.

Identidade: 13226951-7 - IFP
CPF: 095334077-51

Assinatura:

Tendo sido esclarecidas todas as informações quanto ao estudo, manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

Eu concordo em participar deste estudo.

Nome do participante: _____

Assinatura do responsável: _____

Data: _____

Como a unidade de ensino, onde se desenvolverá as atividades, funciona atualmente no regime híbrido, haverá a solicitação do consentimento de modo eletrônico por meio de um formulário, onde após a leitura do TLCE para concordar ou não em participar bastará clicar em concordar que o participante ele completará as informações solicitadas e receberá uma cópia do formulário por meio do e-mail a seu critério. Caso clique em não participar, o participante encerra a pesquisa neste ato.

Segue o link para acesso:

<https://forms.gle/d7tgY7kPouhhQPFCa>

Contato do CEP/UNIRIO:

Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO, Avenida Pasteur, 296 subsolo do prédio da Nutrição – Urca – Rio de Janeiro – RJ – Cep: 22290-240, no telefone 2542-7796 ou e-mail cep@unirio.br.