



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**ENTRE AS DOBRAS**  
**A Geometria do Origami**

CÉSARE ANTONIO GOMES GUIMARÃES

Brasília, 2021

**CÉSARE GUIMARÃES**

**ENTRE AS DOBRAS:  
A Geometria do Origami**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre

**Dissertação de Mestrado**

Orientador: Prof. Nilton Barroso

Brasília  
2021

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

GG963e Guimarães, Césare  
Entre as Dobras: A Geometria do Origami / Césare  
Guimarães; orientador Nilton Neto. -- Brasília, 2021.  
82 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em  
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. Origami. 2. Huzita-Haroti. 3. Geometria. I. Neto,  
Nilton, orient. II. Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**ENTRE AS DOBRAS**  
**A Geometria do Origami**  
por  
**Césare Guimarães**

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,  
como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 20 de agosto de 2021.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Nilton Moura Barroso Neto - Orientador (MAT/UnB)

---

Prof. Dr. Guy Grebot - Membro (MAT/UnB)

---

Prof. Dr. Jorge Carlos Lucero - (CIC/UnB)

---

Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva - (MAT/UnB)



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus.

Aos meus pais Antonio Lisboa Cardoso Guimarães e Josefa Gomes da Silva Guimarães pelos sacrifícios que fizeram para que me fosse possível percorrer o caminho até aqui.

A minha irmã, Josely Gomes Guimarães, por todo apoio e paciência.

A Daniela Bezerra Motta, que me apresentou ao mundo do origami.

Ao meu orientador Nilton Moura Barroso Neto, que me incentivou a entrar no programa PROFMAT e que foi de grande importância na conclusão desse trabalho.

Ao Pe. Cesare Lelli, cujo nome carrego, por ter ajudado muito minha família e principalmente meu pai.



# Resumo

Neste trabalho estudaremos o origami sob o ponto de vista dos axiomas de Huzita-Hatori e mostraremos que qualquer construção euclidiana com régua e compasso pode ser realizada a partir daí. Em seguida mostraremos como realizar na prática uma série dessas construções, algumas delas bem mais fáceis no contexto do origami do que na sua contrapartida euclidiana. Também veremos que os axiomas do origami permitem extrapolar as construções euclidianas e resolver três dos problemas geométricos clássicos da antiguidade: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a construção do heptágono regular. Finalizaremos com uma exposição de vários tópicos sobre origami.

# Abstract

In this work we will study origami from the Huzita-Hatori axioms viewpoint and show that any Euclidean construction with ruler and compass can be performed from these. After that we will show how to carry out a series of these constructions in practice, some of which are much easier in the context of origami than in its Euclidean counterpart. We will also see that the axioms of origami allow us to go beyond Euclidean constructions and solve three of the classic geometrical problems of antiquity: the duplication of the cube, the trisection of the angle and the construction of the regular heptagon. We end with an exposition of various topics in origami.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Construções Geométricas com Origami</b>	<b>4</b>
1.1	Um Breve Estudo Sobre Geometria Euclidiana . . . . .	4
1.2	Origami e os Axiomas de Huzita-Hatori . . . . .	10
1.3	Propriedades matemáticas dos Axiomas de Huzita-Hatori . . . . .	12
1.4	Construções Euclidianas básicas utilizando origami . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Utilizando Origami Como Ferramenta Geométrica</b>	<b>25</b>
2.1	Um quadrado de papel como uma boa referência . . . . .	25
2.2	Cônicas Duais . . . . .	30
2.2.1	Círculo . . . . .	30
2.2.2	Parábola . . . . .	31
2.2.3	Elipse . . . . .	33
2.2.4	Hipérbole . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Resolução de Equações Cúbicas com A Dobra de Beloch</b>	<b>40</b>
3.1	Tangente a Duas Parábolas . . . . .	40
3.2	Trissecção de um Ângulo . . . . .	42
3.3	Dividindo o Lado em $n$ Partes Iguais . . . . .	44
3.3.1	O Método de Fujimoto . . . . .	47
3.4	Duplicação do Cubo . . . . .	49
3.5	Heptágono Regular . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Origami: Presente e Futuro</b>	<b>58</b>
4.1	Origami Figurativos . . . . .	58
4.2	Curvas, Torções e Tesselações . . . . .	61
4.2.1	Dobras Curvas . . . . .	62
4.2.2	Tesselações . . . . .	64
4.3	De artérias a placas solares . . . . .	65

# Lista de Figuras

1.1	Reta $r$ resultante do axioma <b>O.1</b> . . . . .	13
1.2	Configuração final do axioma <b>O.2</b> . . . . .	14
1.3	Configuração inicial. . . . .	14
1.4	A dobra do axioma <b>O.3</b> no caso de retas paralelas. . . . .	15
1.5	A dobra do axioma <b>O.3</b> no caso de retas concorrentes. . . . .	15
1.6	Dobra obtida pela aplicação do axioma <b>O.4</b> . . . . .	16
1.7	Os dois pontos que correspondem a $P_2$ pela aplicação do axioma <b>O.5</b> . . . . .	17
1.8	As duas dobras possíveis após a aplicação do axioma <b>O.5</b> . . . . .	18
1.9	Configuração inicial do axioma <b>O.7</b> . . . . .	18
1.10	Resultado final após a dobra do axioma <b>O.7</b> . . . . .	19
1.11	Dobra após a utilização do axioma <b>O.1</b> . . . . .	20
1.12	Com dois pontos dados, iremos definir uma circunferência. . . . .	20
1.13	Dois dobras se interceptando. . . . .	21
1.14	Combinando os axiomas <b>O.5</b> e <b>O.4</b> . . . . .	22
1.15	O ponto $x$ de intersecção entre nossas circunferências. . . . .	22
1.16	Definindo nossos círculos . . . . .	23
1.17	Triângulo auxiliar para acharmos nosso ponto de intersecção . . . . .	23
1.18	Uma solução para achar $R + r$ e $R - r$ . . . . .	24
2.1	Referência que usaremos como o papel quadrado . . . . .	26
2.2	Construindo uma <i>Dobra de Quina</i> no passo 2, perceba a ponta que se forma no ponto $P_1$ . . . . .	27
2.3	Aproximação de triângulo equilátero, em vermelho a reta feita pela régua no passo 3. . . . .	27
2.4	Movendo $P_2$ sobre o lado direito, perceba os ângulos $\alpha$ e $\delta$ . . . . .	28
2.5	Malhas $2 \times 2$ e $4 \times 4$ , perceba a divisão das colunas e linhas no diagrama da direita. . . . .	29
2.6	<i>Pixel Art</i> de Mario Bros; uma <i>malha</i> $16 \times 16$ é necessária. . . . .	30
2.7	A dobra resultante da aplicação do axioma <b>O.5</b> é uma reta tangente de uma parábola. . . . .	31
2.8	Encontrando o ponto $P$ tangente à parábola. . . . .	32

2.9	Mostrando a unicidade de $P$ , triângulo $\Delta P_2'P''P'$ possui dois ângulos retos na base . . . . .	32
2.10	Construção da parábola dual, em cinza nossas dobras . . . . .	33
2.11	Passos da construção, por último visualizamos nossa elipse. . . . .	33
2.12	Configuração para o estudo da elipse. . . . .	34
2.13	Achando o ponto $P_3$ sobre a elipse. . . . .	34
2.14	A elipse dual com todos os seus dados. . . . .	36
2.15	Passos da construção das retas tangentes da hipérbole; por último visualizamos nossa hipérbole em azul. . . . .	37
2.16	Encontrando o ponto $P_3$ sobre a hipérbole . . . . .	39
2.17	A hipérbole com todos os seus dados, omitimos as dobras. . . . .	39
3.1	Duas parábolas podem ter até três tangentes comuns. . . . .	42
3.2	A trissecção de um ângulo com origami. . . . .	43
3.3	Demonstrando a trissecção de um ângulo com origami. . . . .	44
3.4	Como dividir um papel em $n = 2^k$ partes iguais. . . . .	45
3.5	Como dividir um papel em partes iguais. . . . .	45
3.6	Como dividir um papel em partes iguais (continuação). . . . .	46
3.7	Primeira iteração do método de Fujimoto para dividir um papel em 5 partes iguais. Sempre usando a margem esquerda da tira como referência. . . . .	49
3.8	Dobrando um papel quadrado para duplicar o cubo. . . . .	50
3.9	Demonstrando a duplicação do cubo com origami. . . . .	50
3.10	As 7 raízes da unidade no plano complexo formam um heptágono regular. . . . .	52
3.11	Dobrando dois pontos sobre duas retas para construir $t = 2 \cos(2\pi/7)$ . . . . .	54
3.12	Dobrando o heptágono regular a partir de uma folha de papel quadrada. . . . .	56
4.1	Os padrões de vincos, as bases e os modelos finalizados do cisne, peixe, grou e sapo tradicionais . . . . .	59
4.2	Akira Yoshizawa e algumas de suas obras . . . . .	59
4.3	Poliedro representando o coelho de Stanford, a <i>Crease Pattern</i> construída pelo <i>Origamizer</i> e o modelo dobrado por Tomohiro Tachi. . . . .	60
4.4	Modelo <i>Flying Crane</i> , <i>OPUS 563</i> e seu <i>Crease Pattern</i> , interpretação do grou de Robert Lang. . . . .	61
4.5	Modelos de Paul Jackson e Vincent Floderer, membro do grupo Le Crimp, respectivamente. . . . .	62
4.6	Modelos de David "Gachepapier" e Victor Coeurjoly, respectivamente. . . . .	62
4.7	Modelos de Thomas Hull e Erick Demaine respectivamente. . . . .	63
4.8	Huffman com seu modelo <i>hexagonal column with cusps</i> . . . . .	63
4.9	No topo, modelos de Jun Mitani e Philip Chapman-Bell respectivamente, abaixo de Ekaterina Lukasheva. . . . .	64

4.10 Modelos de Rebecca Giesecking e Cheng Chit Leong respectivamente. . .	64
4.11 A esquerda, Chris Palmer e uma de suas <i>shadowfolds</i> , a direita uma fronha com a mesma técnica produzida por Robin Scholz. . . . .	65
4.12 No topo, modelos de Beth Johnson e Joel Cooper respectivamente, abaixo de Melina Hermsen. . . . .	66
4.13 A esquerda,sistema acústico desenvolvido por Xuyou Yang, a direita o coelho de Stanford dobrado com metal por Tomohiro Tachi . . . . .	67
4.14 Tomohiro Tachi em sua cadeira dobrável e robô auto-dobrável, respec- tivamente . . . . .	67

# Introdução

Suspeita-se que a prática de dobrar papel, comumente conhecida como “origami”, tenha origem com a própria criação do papel, por volta de 105 a.C., na China. Porém, é reconhecido que o Japão foi o país que mais desenvolveu e de onde essa arte difundiu-se pelo mundo ocidental, especialmente após a segunda guerra mundial quando a cultura japonesa abriu-se para o mundo nos mais variados aspectos. O papel foi introduzido no Japão no fim do século VI por monges budistas e era considerado uma mercadoria cara e luxuosa utilizado notoriamente em arquitetura. Naquela época, alguns modelos de origami já haviam sido incorporados em cerimônias religiosas; essa influência traduz-se na palavra *Kami*, que significa papel, e é um homônimo para a palavra “Deus” ou “espírito”.

As técnicas de como produzir papel chegaram ao mundo árabe por volta do século VIII, e por volta do século XII os árabes levaram-nas à Espanha. Os árabes eram muçulmanos e sua religião proibia a criação de figuras representativas, daí o origami ser utilizado nessa cultura como um método para estudar as formas geométricas naturais e as propriedades da atividade de dobrar papel. Os espanhóis foram além da geometria e desenvolveram o que chamaram de papiroflexia, que lhes permitia estudar e produzir modelos e figuras do dia a dia.

O primeiro trabalho escrito sobre origami apareceu em 1797, a publicação *Senbazuru Oriката* (Dobra dos mil grou), um marco importante pois originalmente os japoneses transmitiam as instruções dos modelos oralmente, o que no mais das vezes implicava na preservação apenas dos modelos mais simples. O termo origami vem da junção das palavras *Ori*, significando “dobra”, e *Kami*, que como vimos significa “papel”; anteriormente era usado o termo *Oriката*, algo como “dobrar formas”.

Um dos grandes contribuidores para os desenvolvimento e difusão do origami foi o artista japonês *Akira Yoshizawa*, considerado o pai do origami moderno. Além de ampliar o catálogo de modelos possíveis, mestre *Yoshizawa* juntamente com o estadunidense *Sam Randlett*, desenvolveu a simbologia básica para a diagramação do origami que é utilizada até os dias atuais. As exposições das obras de *Yoshizawa* no Japão e pelo mundo levaram o origami para uma vasta quantidade de pessoas das mais variadas culturas, propiciando a conseqüente criação de vários grupos associados, sendo alguns dos mais destacados o *British Origami Society* (BOS), o *Vietnam Origami Group* (VOG),

as convenções japonesas *Origami Tanteidan* e o italiano *Centro Diffusione Origami*; na Espanha temos ainda a *Escuela Museo Origami Zaragoza*, entre outros.

Com relação a estudos matemáticos sobre origami, é preciso mencionar o trabalho *Geometric Exercises in Paper Folding* pelo indiano T. Sundara Row, publicado em 1893. Nele, o autor mostra como realizar algumas construções geométricas através da dobra de papel e ainda exibe uma aproximação para a trisseção de um dado ângulo. Nas últimas décadas observou-se um enorme crescimento no uso da matemática para a exploração das potencialidades do origami e o estudo de suas propriedades de maneira mais precisa; por exemplo: um dos grandes problemas técnicos envolvendo viagens espaciais consistia no transporte de painéis solares ao espaço, pois grande parte dos equipamentos eletrônicos dependem da luz solar para funcionar adequadamente; para levá-los em uma astronave era necessário reduzir seu tamanho e, após reduzidos por algum artifício, necessita-se que sejam descompactados com pouco esforço. Uma solução para esse problema utiliza métodos de origami e matemática, tendo sido proposta pelo astrofísico japonês Koryo Miura – a dobra de Miura (*Miura fold*) tem todas as características desejadas.

O aumento no interesse e a especialização do estudo dos origamis, aliados ao seu relevante interesse prático para o desenvolvimento de tecnologias revolucionárias, paulatinamente levou à realização de conferências criadas especificamente para debater origami ao redor do mundo. De especial importância é a *International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (OSME) que tem como objetivo reunir os últimos estudos que exploram a relação entre origami, matemática, ciência e educação; após cada conferência realizada, um livro contendo todos os artigos apresentados é publicado; neles encontramos um vasto estudo sobre o estado da arte do origami que se amplia consideravelmente ano após ano.

O trabalho ora apresentado esforça-se para expor algumas das potencialidades do origami, especialmente no que diz respeito ao estudo da geometria. Com foco na parte prática buscamos também jamais perder de vista a teoria matemática subjacente às dobras. Esse trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 enunciaremos e analisaremos os axiomas do origami (de dobra simples) para em seguida mostrar que eles permitem realizar todas as construções euclidianas com régua e compasso. No capítulo 2 iniciaremos o estudo das aplicações do origami mostrando como utilizá-lo para resolver alguns problemas matemáticos simples – em particular veremos como usar dobras para construir parábolas, elipses e hipérbolas de maneira elementar. No capítulo 3 analisaremos uma dobra descoberta pela matemática italiana Margharita Piazzolla Beloch (1879-1976) e mostraremos que tal dobra nos permite realizar construções que não são possíveis com régua e compasso Euclidianos. Por fim, no capítulo 4, faremos uma breve exposição sobre o origami como um todo nos dias atuais, desde sua perspectiva como uma forma de arte até sua imensa utilidade em tecnologias modernas.

# Capítulo 1

## Construções Geométricas com Origami

Neste capítulo iremos relembrar a Geometria Euclidiana, seus postulados e o sentido preciso no qual podemos afirmar que uma construção geométrica qualifica-se como *euclidiana*. Em seguida apresentaremos os axiomas do origami, conhecidos como Axiomas de Huzita-Hatori, e mostraremos que as construções euclidianas podem ser obtidas a partir de tais axiomas.

### 1.1 Um Breve Estudo Sobre Geometria Euclidiana

Denominamos Geometria Euclidiana a geometria baseada nos postulados de Euclides de Alexandria, matemático grego que viveu por volta do século III a.C. Sua obra, *Os Elementos*, foi utilizada como principal meio de ensino de matemática durante séculos. Dividido em treze livros, *Os Elementos* discorre não somente sobre geometria, mas trás consigo relevantes estudos sobre outras áreas da matemática como teoria dos números, geometria espacial, análise dos irracionais (incomensuráveis), entre outros.

O primeiro livro dos Elementos começa abruptamente com uma lista de definições cujo objetivo primeiro é criar uma imagem mental dos objetos geométricos na mente do leitor. Em seguida, Euclides apresenta cinco postulados da geometria plana que usaria, junto com as regras da lógica, em suas demonstrações. Relembremos esses postulados:

**P.1** *É possível traçar uma reta passando por dois pontos dados;*

**P.2** *É possível prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;*

**P.3** *É possível traçar um círculo com centro em qualquer ponto e com qualquer raio;*

**P.4** *Todos os ângulos retos são iguais;*

**P.5** *Se uma linha reta intercepta duas outras linhas retas e determina de um mesmo lado ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas duas*

*linhas retas, se prolongadas, encontrar-se-ão no lado que estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.*

Esses simples postulados serviram de base para toda construção abordada nos *Elementos* e sustentam todo o peso das 465 proposições que encontramos nos *Elementos*<sup>1</sup>, muitas delas sobre construções geométricas. Muito já foi dito e debatido sobre os postulados de Euclides; pela sua relevância histórica, vale mencionar brevemente sobre o 5º postulado que afirma, em outras palavras, que se duas retas são interceptadas por uma transversal e formam ângulos de um mesmo lado cuja soma é diferente de 180°, então essas retas não são paralelas. Por acreditarem ser menos intuitivo que os outros quatro e presumindo um certo nível de hesitação da parte de Euclides em utilizá-lo em suas demonstrações – o que ocorre apenas na proposição 29 do livro I – diversos matemáticos ao longo dos séculos tentaram demonstrá-lo como um teorema a partir dos quatro primeiros, esforços dos quais emergiram as primeiras geometrias não-euclidianas da história. Para mais detalhes sobre esses e outros assuntos relacionados, o leitor interessado pode consultar [5].

Chegando às construções geométricas, baseados nos postulados de Euclides e em análises das construções propostas no *Elementos*, convencionou-se definir o uso da régua e do compasso euclidiano a partir das seguintes construções básicas:

**E.1** *Traçar uma reta passando por dois pontos dados;*

**E.2** *Traçar um círculo com centro em um determinado ponto e com um determinado raio;*

**E.3** *Determinar o ponto de intersecção de duas retas;*

**E.4** *Determinar o ponto de intersecção de um círculo e uma reta;*

**E.5** *Determinar o ponto de intersecção de dois círculos.*

Qualquer objeto geométrico que possa ser obtido pela repetição finita de tais construções básicas é dita uma construção com régua e compasso Euclidianos [5]. Esclareça-se de uma vez por todas que um problema de construção geométrica está bem posto quando prescrevemos uma coleção de pontos do plano  $\mathcal{P}$  como dados iniciais e perguntamos que objetos geométricos podem ser construídos a partir daí com as regras acima. É comum tomar dois pontos como dados iniciais (definindo um segmento unitário) e assim será feito no restante desse trabalho.

Note que a régua Euclidiana não possui marcação, isso significa que não podemos usar a régua euclidiana para transportar distâncias, uso corriqueiro da régua em situações práticas, logo usaremos apenas para construções de retas – por esse motivo

---

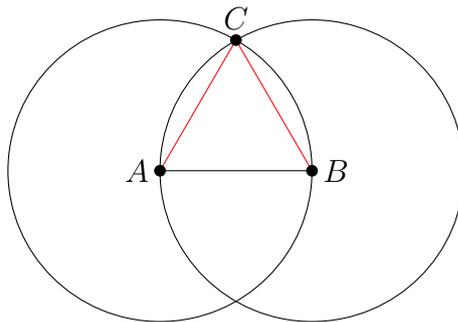
<sup>1</sup>Vale salientar que além dos postulados aqui citados, Euclides enuncia e utiliza 5 noções comuns e alguns fatos não explicitamente afirmados, como a propriedade de intersecção de círculos utilizada na sua primeira proposição, por exemplo.

em inglês a régua euclidiana é chamada de *straightedge*, algo como “borda lisa” em contraste com a palavra *ruler* que refere-se à régua graduada tão utilizada no desenho geométrico.

A princípio, o compasso euclidiano também não pode ser usado para transportar distâncias para diferentes regiões do plano, por esse motivo costumamos dizer que o compasso euclidiano colapsa ou fecha-se quando é levantado do papel. Tal característica pode parecer uma desvantagem considerável do compasso euclidiano em relação ao compasso usual, entretanto as duas ferramentas revelam-se equivalentes, isto é, podemos realizar o transporte de um segmento para uma semirreta dada, de acordo com a terceira proposição do primeiro livro dos *Elementos*. Para mais informações veja [3].

Para ilustrar tudo que explicamos até aqui, considere a primeira proposição dos *Elementos*: dado um segmento  $AB$ , construir um triângulo equilátero que possui  $AB$  como lado.

Euclides inicia seu argumento aplicando a construção básica **E.3** para traçar dois círculos: um de centro em  $A$  e raio  $AB$  e outro de centro em  $B$  e raio  $BA$ , conforme a figura abaixo.



Pelo item **E.5** podemos determinar um ponto  $C$  no qual esses círculos se interceptam (embora Euclides não tenha enunciado explicitamente um postulado que garanta tal fato); como  $AC = BC = AB$ , temos que o triângulo formado pelos pontos  $A, B$  e  $C$  é equilátero. Resumindo: como dados iniciais temos o segmento  $AB$  e a partir daí, utilizando os passos **E.3** e **E.5**, alcançamos o objetivo do processo de construção.

Ao longo do tempo algumas falhas lógicas foram descobertas nos argumentos utilizados por Euclides. Por exemplo, na proposição discutida acima, não há nada explicitamente afirmado nos postulados propostos que garanta a existência do ponto  $C$ , por mais que esse fato pareça “claro” pela construção realizada. A fim de corrigir esse e outros deslizes semelhantes, a partir da segunda metade do século XIX matemáticos como Moritz Pasch (1843-1930), Guiseppe Peano (1858-1932), Mario Pieri (1860-1913), David Hilbert (1862-1943) e mais recentemente George Birkhoff (1884-1944) trabalharam e contribuíram decisivamente para o aperfeiçoamento de um sistema axiomático rigoroso para geometria e outras áreas da matemática.

Os postulados de Hilbert da geometria euclidiana, particularmente, tratam de um

conceito primitivo denotado como “congruente a”. Subjacente ao conceito está o intuito de mimetizar a noção empírica de segmentos de mesmo comprimento. Formalmente isso é feito observando que os axiomas da geometria garantem que o conceito é uma relação de equivalência na classe dos segmentos. Isso significa que essa classe fica dividida em classes de equivalência disjuntas, todos os segmentos em uma mesma classe são congruentes entre si.

**Definição 1.** *A classe de equivalência do segmento  $AB$  é denotada por  $[AB]$  e definida como a medida do segmento  $AB$ .*

Intuitivamente, podemos dizer que a medida de um segmento é aquilo que todos os segmentos congruentes a ele têm em comum. Baseado nisso podemos provar a seguinte proposição:

**Proposição 1.** *Suponha que tenham sido dados os segmentos  $AB$ ,  $CD$  e um segmento unitário. Podemos construir com régua e compasso euclidianos segmentos que denotaremos por  $AB + CD$ ,  $AB - CD$ ,  $AB \times CD$ ,  $\frac{AB}{CD}$  e  $\sqrt{AB}$ , cujas medidas serão  $[AB] + [CD]$ ,  $[AB] - [CD]$ ,  $[AB] \times [CD]$ ,  $\frac{[AB]}{[CD]}$  e  $\sqrt{[AB]}$ , respectivamente.*

É possível mostrar que o conjunto das classes de equivalência dos segmentos forma o conjunto dos números positivos de um corpo ordenado  $\mathbb{K}$ . Para mais informações veja [15, p. 165].

Partindo de um segmento unitário, pelas operações de soma, subtração, produto e quociente podemos construir segmentos cujas medidas correspondem a um subconjunto de  $\mathbb{K}$  isomórfico a  $\mathbb{Q}$ . A extração de raiz quadrada permite exceder o conjunto dos números racionais; podemos, por exemplo, construir segmentos de medida  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  $\sqrt{\sqrt{2}}$ , etc.

Para saber quais são todas as construções possíveis com régua e compasso euclidiano convém reformular a proposição acima em um contexto algébrico, o que é possível com o auxílio da geometria analítica. Nesse contexto, um corpo dado  $\mathbb{K}$  permite definir o plano cartesiano  $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  no qual podemos definir os conceitos primitivos da geometria; as propriedades algébricas de  $\mathbb{K}$  permitem demonstrar os axiomas da geometria<sup>2</sup>. Por essa razão dizemos que a geometria analítica sobre  $\mathbb{K}$  é um modelo para a geometria euclidiana plana.

**Teorema 1** (Descartes). *Suponha que  $\mathbb{K}$  é um corpo ordenado euclidiano<sup>3</sup>. Seja ainda  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  uma coleção de pontos no plano cartesiano  $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Então, se é possível construir o ponto  $P = (x, y)$  com régua e compasso euclidianos, as coordenadas de  $P$  podem ser obtidas das coordenadas dos pontos dados por aplicações sucessivas, porém finitas, das operações  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  e a extração de raiz quadrada de número positivo.*

<sup>2</sup>Para que todos os axiomas de Hilbert sejam obtidos como teoremas,  $\mathbb{K}$  deve ser um corpo ordenado euclidiano. Para maiores informações veja [20].

<sup>3</sup>Um corpo ordenado é dito euclidiano se todo número positivo tem raiz quadrada em  $\mathbb{K}$ .

Para descobrir quais segmentos ou números são construíveis com régua e compasso euclidianos definimos:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{k_1}) = \{a + b\sqrt{k_1} : a \in \mathbb{Q} \text{ e } b \in \mathbb{Q}\},$$

Em que  $k_1 \in \mathbb{Q}$  e  $\sqrt{k_1} \notin \mathbb{Q}$ , sujeitos às operações

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{k_1}) + (a' + b'\sqrt{k_1}) &= (a + a') + (b + b')\sqrt{k_1}, \\ (a + b\sqrt{k_1}) \times (a' + b'\sqrt{k_1}) &= (aa' + k_1bb') + (ab' + a'b)\sqrt{k_1}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Note ainda que a diferença entre elementos de  $\mathbb{Q}(\sqrt{k_1})$  é um novo elemento de  $\mathbb{Q}(\sqrt{k_1})$  e para a divisão temos:

$$\frac{a + b\sqrt{k_1}}{c + d\sqrt{k_1}} = \frac{(a + b\sqrt{k_1})(c - d\sqrt{k_1})}{(c + d\sqrt{k_1})(c - d\sqrt{k_1})} = \frac{ac - k_1bd}{c^2 - k_1d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - k_1d^2}\sqrt{k_1}.$$

Não é difícil demonstrar que  $\mathbb{Q}(\sqrt{k_1})$  é um subcorpo ordenado de  $\mathbb{Q}$ . Se denotamos  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{k_1})$  temos que  $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1$ . Podemos fazer uma nova extensão  $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{k_2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2})$  em que  $k_2 \in \mathbb{K}_1$  mas  $\sqrt{k_2} \notin \mathbb{K}_1$  definida como:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_2 &= \{a + b\sqrt{k_2} : a \in \mathbb{K}_1 \text{ e } b \in \mathbb{K}_1\} \\ &= \{a' + b'\sqrt{k_1} + c'\sqrt{k_2} + d'\sqrt{k_1k_2} : a' \in \mathbb{Q}, b' \in \mathbb{Q}, c' \in \mathbb{Q}, d' \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

e daí teremos

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2.$$

Prosseguindo dessa forma construímos torres de subcorpos ordenados de  $\mathbb{R}$  da forma

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$$

em que  $\mathbb{K}_i$  é uma extensão do corpo  $\mathbb{K}_{i-1}$  e os elementos  $\mathbb{K}_i$  são da forma  $a + b\sqrt{k_i}$  em que  $a, b$  e  $k_i$  são elementos de  $\mathbb{K}_{i-1}$  e  $\sqrt{k_i} \notin \mathbb{K}_{i-1}$ .

**Definição 2.** Um número é dito **construível** se está em  $\mathbb{K}_i$ , para algum  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Como um exemplo, mostremos que o número

$$\sqrt{6} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5}$$

é construível. Para isso, peguemos  $k_1 = 2$  e daí temos que  $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ; note que  $k_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{K}_1$  pois, caso contrário, existiriam  $a$  e  $b$  em  $\mathbb{Q}$  tais que:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}.$$

Elevando ao quadrado temos

$$1 + \sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}.$$

Comparando as partes dependentes e independentes de  $\sqrt{2}$  nos lados da equação chegamos ao sistema

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1, \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

Subtraindo as equações obtemos  $(a - b)^2 = -b^2$ , o que é uma contradição.

Consideramos então uma segunda extensão  $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$  e ainda assim não alcançamos o número  $\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}$ , pois  $\sqrt{3} \notin \mathbb{K}_2$ . Tomamos então uma terceira extensão por  $k_3 = 3$ . Note que  $3 \in \mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$  e, portanto, a *fortiori*,  $3 \in \mathbb{K}_2$ ; daí chegamos a  $\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}$ . Tomamos uma quarta extensão por  $k_4 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}$  e chegamos a  $\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3} + 5}$ . Por fim, tomamos uma quinta extensão por  $k_5 = \sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3} + 5}$  e chegamos ao número desejado pois  $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \in \mathbb{K}_5$ .

Agora considere o número construível  $x = \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ . Podemos reescrevê-lo como  $x - \sqrt{2} = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ . Elevando ao quadrado obtemos

$$(x - \sqrt{2})^2 = 3 + \sqrt{2},$$

ou seja,

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2},$$

ou seja,

$$x^2 - 1 = (2x + 1)\sqrt{2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e rearranjando os termos, teremos finalmente

$$x^4 - 10x^2 - 8x - 1 = 0.$$

Esse processo demonstra que  $x$  é a raiz de uma equação algébrica com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ . Dizemos que um número é algébrico se ele é raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, isto é, se ele satisfaz uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

em que  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  são números inteiros,  $n \geq 1$  e  $a_0 \neq 0$ .

Está claro que o procedimento acima, aplicado para o número  $\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ , poderia ser levado a cabo para qualquer número construível. Essa observação permite concluir o seguinte resultado fundamental:

**Proposição 2.** *Todo número construível é algébrico.*

Tendo estabelecido esse fato, podemos nos perguntar quanto à recíproca desse fato: será que todo número algébrico é um número construível? Uma resposta negativa para essa questão foi dada pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848):

**Lema** (P. L. Wantzel, 1837). *Se um polinômio cúbico com coeficientes racionais não possui uma raiz racional, então nenhuma de suas raízes é um número construível.*

O artigo de Wantzel passou 50 anos despercebido pela comunidade internacional e a sua primeira citação parece ter ocorrido na tese de doutorado do matemático dinamarquês Julius Petersen (1839-1910). Entretanto, nele encontramos a chave para a solução definitiva de alguns dos mais importantes problemas de construção geométrica da matemática grega:

1. **A Duplicação do Cubo:** Construir um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado – depende da solução de  $x^3 - 2 = 0$ .
2. **A Trissecção do Ângulo:** Dado um ângulo qualquer, dividi-lo em 3 partes iguais – depende da solução de  $x^3 - 3x + 1 = 0$ .
3. **O Heptágono Regular:** Construir um polígono regular de 7 lados – depende da solução de  $x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$ .

Pode-se verificar que nenhuma das equações acima possui solução racional e o lema de Wantzel garante que esses problemas não podem ser resolvidos com instrumentos euclidianos. Para maiores detalhes, o leitor interessado pode consultar [7].

Terminamos por aqui esse rápido estudo sobre geometria e construções euclidianas e esperamos com isso ter dado ao leitor uma ideia, ainda que superficial, da teoria matemática subjacente a essas construções. Neste ponto observamos que se for possível realizar as construções básicas **E.1-E.5** com origami, isso implicaria que conseguimos construir qualquer objeto geométrico euclidiano com dobras, bastando seguir os algoritmos apresentados por Euclides. É isso que demonstraremos nas seções que seguem.

## 1.2 Origami e os Axiomas de Huzita-Hatori

Neste momento é preciso esclarecer algumas dúvidas que podem surgir quando falamos de construção geométrica utilizando origami. Ao realizar dobraduras, encontramos algumas dificuldades técnicas que vão desde a qualidade e espessura do papel passando pela dificuldade para sobrepor um ponto sobre outro devido à falta de transparência, as marcações que permanecem no papel mesmo quando não são mais necessárias dificultando o processo, para citar apenas algumas. Problemas práticos de mesma natureza surgem quando tratamos de construções com régua e compasso; entretanto, do ponto de vista matemático, não se de quão simples ou com que precisão determinada construção pode ser realizada, mas apenas se ela é possível teoricamente. O mesmo se passa com o origami e, por esse motivo, suporemos que o nosso papel possui espessura zero, que ele é perfeitamente transparente (o que nos ajuda a sobrepor pontos) e que marcações de dobras indesejadas são “apagadas”. Assumimos ainda que o papel não pode ser esticado, contraído, cortado ou apresentar auto-interseções. Alguns desses

pressupostos podem ser obtidos utilizando “papel vegetal”, que é relativamente fino e transparente, porém nele as marcações ficam muito visíveis.

Tendo esclarecido alguns pontos sobre o papel ideal, que chamaremos de “plano” e que utilizaremos nas construções, prossigamos apresentando os axiomas do origami. Esses axiomas, também conhecidos como axiomas de Huzita-Hatori ou de Huzita-Justin, descrevem os tipos de dobras simples que podemos fazer utilizando origami. O adjetivo “simples” refere-se ao fato de que quando desdobramos o papel observamos que apenas uma nova dobra foi feita. Vale mencionar que existem vários estudos sobre origami que permitem várias dobras em um único passo, conhecidas como *multi-fold*; porém, para o estudo em questão, focaremos no origami de dobras simples, pelo menos nesse primeiro momento.

No contexto dos axiomas do origami, as palavras “reta” e “dobra” são sinônimas; como no caso da geometria euclidiana, supomos que as retas bem como o plano são formados por pontos. Os axiomas que enunciaremos abaixo são os análogos das regras **E.1-E.5** para construções com régua e compasso. São eles:

- O.1** *Dados dois pontos distintos no plano  $P_1$  e  $P_2$ , existe uma dobra única que passa por ambos os pontos;*
- O.2** *Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe uma única dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$ ;*
- O.3** *Dadas duas retas distintas  $r_1$  e  $r_2$ , existi no máximo duas dobras que coloca  $r_1$  sobre  $r_2$ ;*
- O.4** *Dados uma reta  $r_1$  e um ponto  $P_1$  existe uma dobra única que passa por  $P_1$  e que leva  $r_1$  sobre ela mesma;*
- O.5** *Dados uma reta  $r_1$  e dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , pode existir no máximo duas dobras que colocam  $P_2$  sobre  $r_1$  e que passe por  $P_1$ ;*
- O.6** *Dados duas retas  $r_1$  e  $r_2$  e dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , pode existir no máximo três dobras que colocam  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ ;*
- O.7** *Dados duas retas  $r_1$  e  $r_2$  e um ponto  $P_1$ , pode existir uma dobra que colocam  $P_1$  sobre  $r_1$  e que leva  $r_2$  sobre ela mesma.*

Nesse ponto convidamos o leitor a pegar um pedaço de papel e tentar executar cada um dos axiomas listados acima. Os axiomas **O.1-O.7** foram descobertos pelo francês Jacques Justin em 1986 [12], entretanto passaram despercebidos pela comunidade científica. Os seis primeiros foram redescobertos por Humiaki Huzita (1924-2005) em 1989 [11] e o axioma **O.7** foi redescoberto em 2002 por Koshiro Hatori de acordo com [1].

O físico estadunidense Robert Lang demonstrou que esses sete axiomas são completos, no sentido de serem todas as operações que geram dobras simples obtidas pelo alinhamento de pontos e retas previamente construídos. Seus resultados sobre o assunto podem ser encontrados em [1, 17]. Em 2017, o matemático Jorge C. Lucero propôs em [18] um oitavo axioma como se segue:

**O.8** *Dado uma reta  $r$  no plano, existe uma dobra sobre tal reta;*

Uma análise dos axiomas listados acima explica o porquê das hipóteses teóricas sobre o papel: seria muito difícil, por exemplo, sobrepor ponto sobre ponto em um papel comum pela falta de transparência; por mais que o façamos, uma experiência simples torna evidente as dificuldades práticas na execução da dobra.

Por fim, vale a pena notar que, a depender da posição dos pontos e retas, as dobras dadas pelos axiomas **O.5**, **O.6** e **O.7** podem não existir, o que leva à discussão se tais construções são realmente “axiomas”. Seguindo a convenção adotada na maior parte dos textos que tratam do assunto, continuaremos a chamá-los por tal nome.

### 1.3 Propriedades matemáticas dos Axiomas de Huzita-Hatori

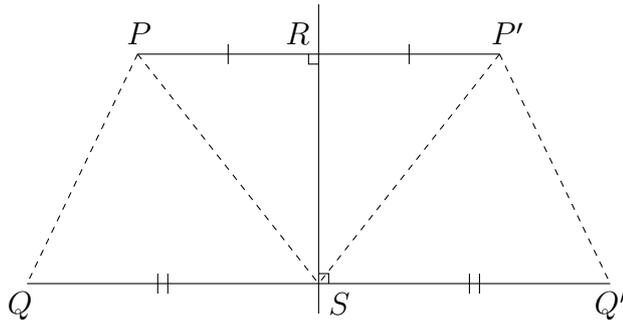
Queremos utilizar os axiomas de origami para produzir as construções básicas de Euclides, mas antes disso precisamos obter um melhor entendimento sobre nossas dobras. Sempre que necessário utilizaremos Geometria Analítica para facilitar nosso estudo e começaremos com uma propriedade inerente a todas as dobras resultantes dos axiomas: a propriedade de reflexão.

**Definição 3.** *A reflexão em relação a uma reta  $r$  é uma aplicação  $\sigma_r$  que associa a cada ponto  $P$  do plano, que não está sobre  $r$ , o ponto  $P'$  tal que  $r$  é a reta mediatriz do segmento  $PP'$  e que fixa os pontos de  $r$ . Em outras palavras:*

$$\sigma_r(P) = \begin{cases} P, & P \in r, \\ P', & P \notin r. \end{cases}$$

Na figura abaixo, os pontos  $P$  e  $Q$  são levados nos pontos  $P'$  e  $Q'$  pela reflexão  $\sigma_r$ .

Por definição de  $\sigma_r$  temos que os triângulos  $PRS$  e  $P'RS$  são congruentes por lado-ângulo-lado; em particular obtemos  $PS \cong P'S$  e  $\angle PSR \cong \angle P'SR$ . Como os ângulos  $\angle QSR$  e  $\angle Q'SR$  são retos, segue que  $\angle QSP \cong \angle Q'SP'$  e daí, novamente por lado-ângulo-lado, concluímos que os triângulos  $PQS$  e  $P'Q'S$  são congruentes. Isso significa que  $PQ \cong P'Q'$ . O caso em que  $P$  e  $Q$  estão em lados opostos de  $r$  é semelhante e deixamos sua verificação a cargo do leitor diligente. Tudo isso junto garante que a reflexão  $\sigma_r$  é uma isometria do plano.



No contexto da geometria analítica, dizemos que  $\sigma_r$  preserva as distâncias e lembramos ao leitor que se  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  são dois pontos do plano cartesiano a distância entre eles é definida como

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Nossas suposições feitas sobre o papel (plano) garantem que ao dobrá-lo ao longo da reta  $r$ , os pontos são mapeados de acordo com a aplicação  $\sigma_r$ . Deixamos isso claro porque as propriedades geométricas da aplicação  $\sigma_r$  serão importantes na demonstração de algumas propriedades das dobras de origami. Feitas essas considerações, comecemos nossa análise dos axiomas:

**O.1** *Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  distintos no plano, existe uma dobra única que passe por ambos os pontos.*

Esse axioma é o símile do primeiro postulado de Euclides no contexto do origami. Começamos com a configuração abaixo:

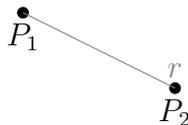


Figura 1.1: Reta  $r$  resultante do axioma O.1.

Supondo que  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , como nossa dobra é dada pela reta  $r_1$  que passa por ambos os pontos, sua equação pode ser facilmente calculada pelos métodos da geometria analítica para a qual obtemos

$$y = \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + \left( \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \right). \quad (1.2)$$

Está claro que a equação da reta fica univocamente determinada pelas coordenadas dos pontos dados, fato que reflete a unicidade da dobra. Note que a fórmula acima tem sentido apenas quando  $x_1 \neq x_2$ ; quando  $x_1 = x_2 = k$ , a reta em questão tem equação  $x = k$ .

**O.2** *Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  distintos, existe uma única dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$ .*

Com a mesma configuração do axioma anterior, considere os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ . A dobra representa uma reta  $r$  que deve refletir  $P_1$  em  $P_2$ . Pela propriedade de reflexão, sabemos que a reta  $r$  é a mediatriz do segmento  $P_1P_2$ , ou seja, é a perpendicular que passa pelo ponto médio de  $P_1P_2$  denotado por  $P_m$ . A equação dessa dobra pode ser facilmente obtida por geometria analítica: nas condições supostas temos que a reta  $r$  passa por

$$P_m = \left( \frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

e tem inclinação dada pelo negativo do inverso da inclinação de (1.2), logo deve ser

$$y = - \left( \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \right) x + \left( \frac{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)}{2(y_2 - y_1)} \right) \quad (1.3)$$

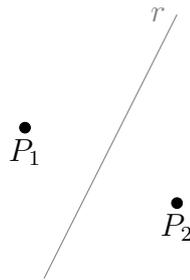


Figura 1.2: Configuração final do axioma O.2.

**O.3** *Dadas duas retas distintas  $r_1$  e  $r_2$ , existi no máximo duas dobras que coloca  $r_1$  sobre  $r_2$ .*

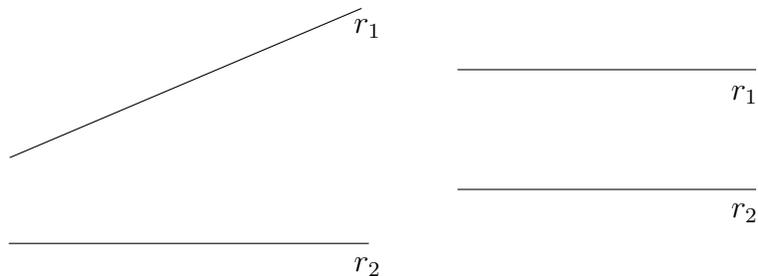


Figura 1.3: Configuração inicial.

Supondo inicialmente que as retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas, serão iguais os ângulos indicados na figura 1.4, logo  $r$  e  $r_1$  serão paralelas pois formam alternos internos

iguais, de onde segue que  $r$  também será paralela a  $r_2$ . Resumindo:  $r$  é a paralela comum que passa pelo ponto médio da perpendicular  $PP'$  (ou  $QQ'$ ).

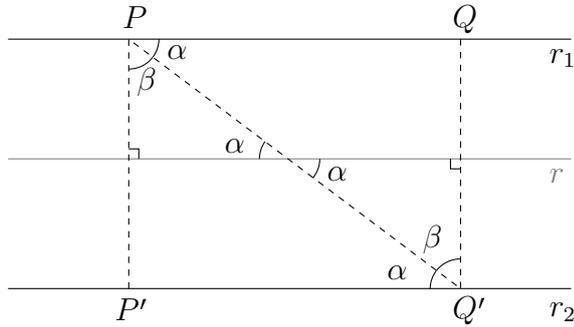


Figura 1.4: A dobra do axioma **O.3** no caso de retas paralelas.

Se  $r_1$  e  $r_2$  não são paralelas, suponha que elas encontrem-se em um ponto  $O$ ; a dobra correspondente necessariamente passa por  $O$ , pois esse ponto é fixado pela reflexão  $r$ . Se  $P$  e  $\sigma_r(P) = P'$  são pontos correspondentes, então os triângulos  $POR$  e  $P'OR$  ilustrados na figura 1.5 são congruentes por lado-ângulo-lado, de onde concluímos que  $\angle POR = \angle P'OR$ , isto é,  $r$  contém a bissetriz do ângulo formado por  $r_1$  e  $r_2$ .

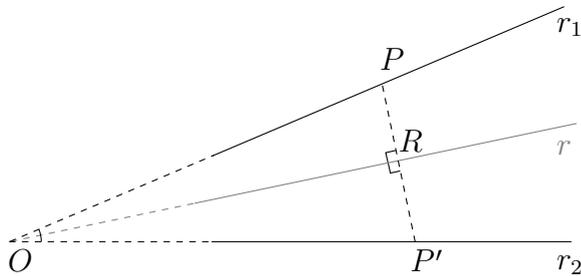


Figura 1.5: A dobra do axioma **O.3** no caso de retas concorrentes.

**O.4** *Dados uma reta  $r_1$  e um ponto  $P_1$  existe uma dobra única que passe por  $P_1$  e que leve a reta  $r_1$  sobre ela mesma.*

Pelas propriedades da reflexão conclui-se imediatamente que a dobra dada pelo axioma **O.4** corresponde à reta perpendicular a  $r_1$  passando por  $P_1$ . No contexto da geometria analítica, se  $r_1$  tem equação  $y = a_1x + b_1$  e  $P_1 = (x_1, y_1)$ , a dobra  $r$  é dada por:

$$y = -\frac{x}{a_1} + \frac{x_1 + y_1 a_1}{a_1}. \quad (1.4)$$

**O.5** *Dados uma reta  $r_1$  e dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , pode existir no máximo duas dobras que colocam  $P_2$  sobre  $r_1$  e que passe por  $P_1$ .*

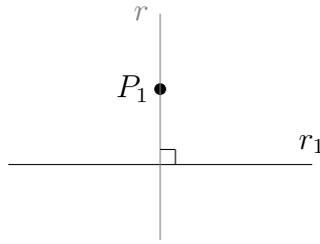
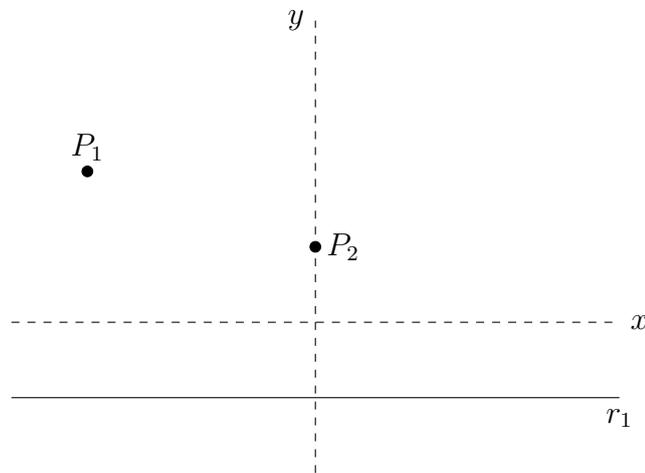


Figura 1.6: Dobra obtida pela aplicação do axioma **O.4**.

Sem perda de generalidade e com o intuito de simplificar os cálculos, posicionamos nosso sistema de coordenadas de tal forma que  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (0, a)$  e  $r_1$  seja a reta horizontal  $y = -a$ , conforme a figura abaixo.



Se  $r$  é a dobra dada pelo axioma **O.5** e  $\sigma_r(P_2) = P'_2$ , então os pontos  $P_2$  e  $P'_2$  pertencem a circunferência  $C$  de centro  $P_1$  e raio  $R = d(P_1, P_2) = d(P_1, P'_2)$ , ou seja,

$$R = \sqrt{x_1^2 + (a - y_1)^2}.$$

Nossa circunferência  $C$  tem equação

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2.$$

O ponto  $P'_2$  é obtido pela intersecção de  $C$  com a reta  $r_1$ , logo pode ser determinado algebricamente substituindo-se  $y = -a$  na expressão acima, de onde obtém-se a seguinte equação quadrática

$$x^2 - 2x_1x + 4ay_1 = 0.$$

Isso faz todo o sentido, pois uma circunferência e uma reta podem ter nenhum, um ou dois pontos de intersecção o que garante, na prática, a existência de até duas dobras com as propriedades desejadas! Resolvendo nossa equação para

encontrar os valores de  $x$  possíveis, descobrimos que nosso  $P'_2$  assume uma das formas abaixo

$$\left(x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4ay_1}, -a\right),$$

cada uma correspondente a uma dobra diferente. Essa situação está representada na figura 1.7. Podemos encontrar a equação das retas  $r_+$  e  $r_-$  que representam as

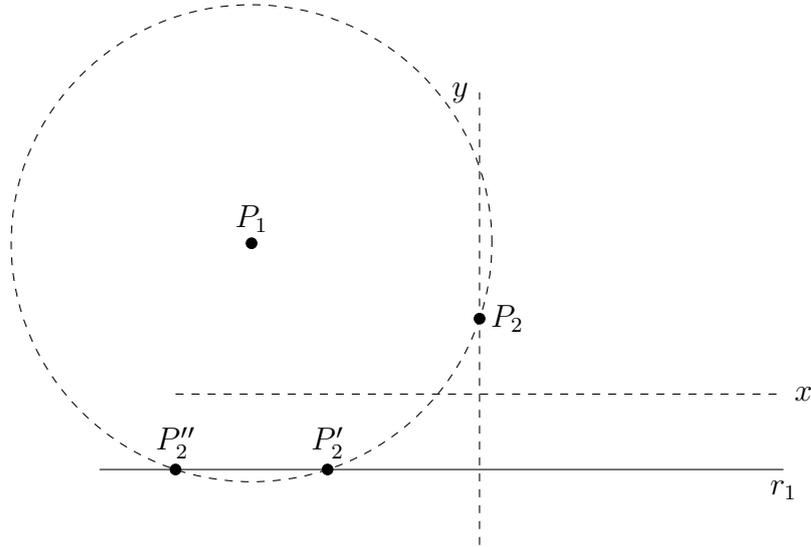


Figura 1.7: Os dois pontos que correspondem a  $P_2$  pela aplicação do axioma **O.5**.

nossas dobras e para isso basta lembrar que essas retas são, respectivamente, às mediatrizes dos segmentos  $P_2P'_2$  e  $P_2P''_2$ , logo passam pelos seus pontos médios  $P_{m,\pm}$  e têm coeficientes angulares  $m_{\pm}$  iguais aos inversos negativos das inclinações das retas  $P_2P'_2$  e  $P_2P''_2$ . Alguns cálculos simples mostram que

$$P_{m,\pm} = \left(\frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4ay_1}}{2}, 0\right),$$

$$m_{\pm} = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4ay_1}}{2a},$$

de onde podemos facilmente obter as equações de  $r_+$  e  $r_-$

$$y_{\pm} = \left(\frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4ay_1}}{2a}\right)x + \frac{2ay_1 \pm x_1\sqrt{x_1^2 - 4ay_1} - x_1^2}{2a}.$$

Na prática, ao executar a dobra do axioma **O.5**, somente construímos as retas  $r_+$  e  $r_-$ . Para obter nossos pontos  $P'_2$  e  $P''_2$ , basta usar o axioma **O.4** com as retas  $r_+$  e  $r_-$  e o ponto  $P_2$  como referência. Portanto, temos que o uso combinado dos axiomas **O.4** e **O.5** nos dá a intersecção de uma circunferência com uma reta.

É bom notar que os cinco primeiros axiomas não dão ao origami nenhuma vantagem em relação ao uso de régua e compasso euclidianos, pois até aqui vimos que

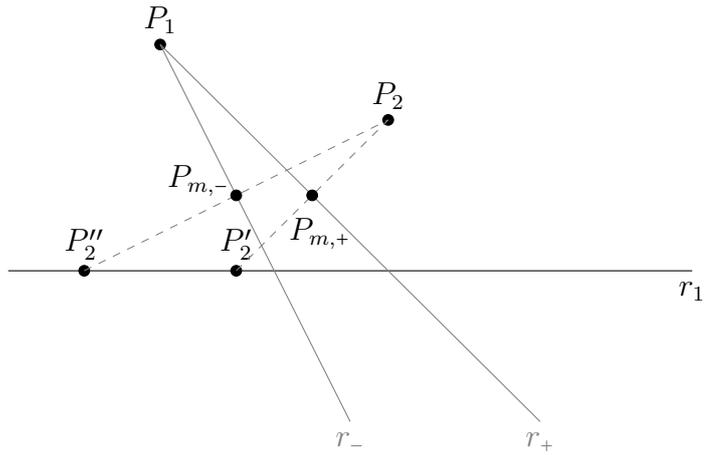


Figura 1.8: As duas dobras possíveis após a aplicação do axioma **O.5**.

para obter as dobras e pontos de intersecção basta resolver equações quadráticas. A diferença fundamental ocorre quando introduzimos o próximo axioma.

**O.6** *Dados duas retas  $r_1$  e  $r_2$  e dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , pode existir no máximo três dobras que colocam  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ .*

O resultado da exploração matemática da dobra resultante desse axioma leva à conclusão que o origami permite resolver equações cúbicas. Como equações quárticas são resolvidas por redução a cúbicas, podemos resolver equações de grau 4 com o origami <sup>4</sup>. Teremos um capítulo dedicado ao estudo de tal dobra, chamada dobra de Beloch em homenagem a matemática italiana que a descobriu.

**O.7** *Dados duas retas  $r_1$  e  $r_2$  e um ponto  $P_1$ , pode existir uma dobra que colocam  $P_1$  sobre  $r_1$  e que leva  $r_2$  sobre ela mesma.*

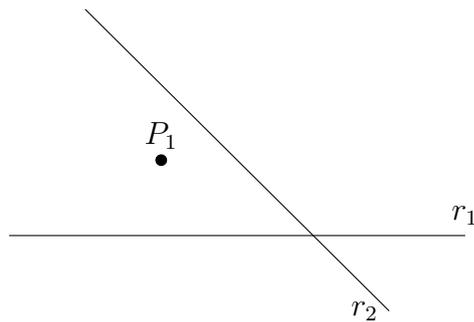


Figura 1.9: Configuração inicial do axioma **O.7**.

Considerando as retas, não paralelas,  $r_1 : y = a_1x + b_1$ ,  $r_2 : y = a_2x + b_2$ , e o ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , a reta  $r : y = mx + k$  representará nossa dobra resultante do axioma.

<sup>4</sup>Em 1989, Huzita e Scimemi demonstraram que não podemos ir além das equações quárticas com os axiomas **O.1-O.7**

Consideremos  $P'_1 = (x'_1, y'_1)$  tal que  $\sigma_r(P_1) = P'_1$ . Temos que  $r \perp r_2$  e o ponto  $P_m$ , ponto médio entre os pontos  $P_1$  e  $P'_1$ , pertence a reta  $r$ .

Sabemos que  $m = -\frac{1}{a_2}$  pelo fato de  $r \perp r_2$ , porém  $r$  também é perpendicular à reta que passa por  $P_1$  e  $P'_1$ , logo temos:

$$m \left( \frac{y'_1 - y_1}{x'_1 - x_1} \right) = -1$$

ou seja,

$$\frac{1}{a_2} = \frac{(x'_1 - x_1)}{a_1 x'_1 + b_1 - y_1},$$

ou seja,

$$x'_1 = \frac{a_2 x_1 + b_1 - y_1}{a_2 - a_1}.$$

Com isso conseguimos facilmente determinar  $y'_1$  e  $P_m$ :

$$y'_1 = a_1 \left( \frac{a_2 x_1 + b_1 - y_1}{a_2 - a_1} \right) + b_1$$

$$P_m = \left( \frac{(a_2 - a_1)x_1 + a_2 x_1 + b_1 - y_1}{2(a_2 - a_1)}, \frac{(a_2 - a_1)(y_1 + b_1) + a_1(a_2 x_1 + b_1 - y_1)}{2(a_2 - a_1)} \right)$$

Possuímos todas as informações para encontrar nossa reta  $r$ . Como nossas expressões não são fáceis de serem lidas, apresentar nossa equação para a reta de pouco adiantaria para uma maior compreensão. Por esse motivo omitiremos nossa equação final, mas caso haja desejo de ser obtê-la, basta substituir os valores que encontramos na fórmula geral da reta, dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

em que  $m$  é o coeficiente angular da reta e as variáveis  $x_0, y_0$  são as coordenadas de algum ponto pertencente a reta. Por fim, ficamos com a construção da figura 1.10.

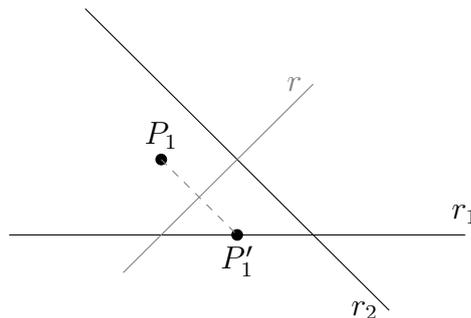


Figura 1.10: Resultado final após a dobra do axioma **O.7**.

Findo esse breve estudo sobre os axiomas, utilizaremos nosso conhecimento adquirido para obtermos nossas construções básicas de Euclides, vale ressaltar que ainda temos que retornar ao *axioma O.6* e estudá-lo mais profundamente.

## 1.4 Construções Euclidianas básicas utilizando origami

Mostraremos a seguir como obter nossas construções básicas de Euclides com origami e como o leitor atento já pode ter notado, grande parte desse objetivo já foi alcançado na seção anterior. Como antes, utilizaremos geometria analítica quando houver necessidade de um maior esclarecimento sobre a nossa construção.

No que se segue enumeramos cada uma das construções euclidianas básicas e mostraremos como cada uma delas pode ser realizada com os axiomas do origami. Começemos nosso estudo.

1. *Traçar uma reta passando por dois pontos dados;*

Dados os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , precisamos apenas aplicar o axioma 1 com tais pontos como referência:

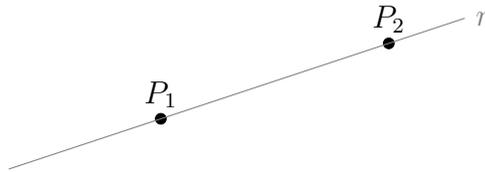


Figura 1.11: Dobra após a utilização do axioma **O.1**.

2. *Traçar uma circunferência com centro em um determinado ponto e com um determinado raio;*

Dois pontos dados  $P_1$  e  $P_2$  definem uma circunferência  $\Gamma$  que tem um dos pontos como centro e raio  $R = P_1P_2$ . Como vimos no estudo do axioma 5, não precisamos necessariamente visualizar a circunferência para utilizá-la.

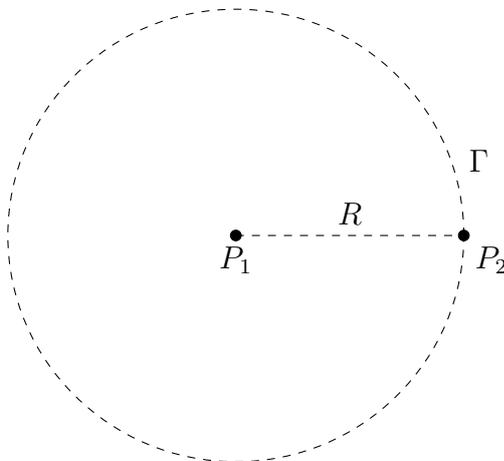


Figura 1.12: Com dois pontos dados, iremos definir uma circunferência.

3. *Determinar o ponto de intersecção de duas retas;*

É equivalente a encontrar a intersecção entre duas dobras definidas pelas retas  $r_1$  e  $r_2$ .

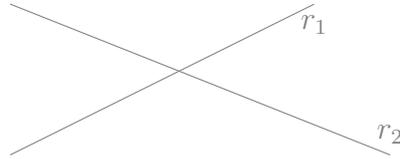


Figura 1.13: Duas dobras se interceptando.

4. *Determinar o ponto de intersecção de uma circunferência e uma reta;*

Essa construção foi discutida quando analisamos o axioma **O.5**:  $P_1$  e  $P_2$  definem a circunferência e a reta era definida por  $r_1$ , conforme a figura 1.7. Com isso conseguimos encontrar a equação para dobrar  $P_2$  sobre  $P'_2$ , que é a reflexão de  $P_2$  por essa dobra. Faltava mostrar como encontrar na prática o ponto  $P'_2$ , propusemos que bastava utilizar o axioma **O.4**, tendo a dobra e o ponto  $P_2$  como nossa referência.

**O.4** *Dados uma reta  $r_1$  e um ponto  $P_1$  existe uma dobra única que passe por  $P_1$  e que seja perpendicular a  $r_1$ ;*

Precisamos mostrar que a reta perpendicular à dobra que passa por  $P_2$  irá intersectar a reta  $r_1$  em  $P'_2$ . Embora esse fato esteja evidente pelas propriedades geométricas da dobra, o verificaremos com o auxílio da geometria analítica. Para isso usaremos a equação da dobra que encontramos, representada pela reta  $r_+$ , que mostramos ter a forma

$$y = \left( \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - 4ay_1}}{2a} \right) x + \frac{2ay_1 - x_1 \sqrt{x_1^2 - 4ay_1} - x_1^2}{2a}.$$

Logo, a reta  $r_p$  que passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $r_2$ , tem a forma

$$y = \left( \frac{-4a}{2x_1 + 2\sqrt{x_1^2 - 4ay_1}} \right) x + a.$$

Fazendo os cálculos para encontrar a intersecção de  $r_1 : y = -a$  e  $r_p$  descobrimos facilmente que  $r_1 \cap r_p = \{P'_2\}$ .

5. *Determinar o ponto de intersecção entre duas circunferências.*

Consideremos as circunferências:

$$\begin{cases} \Gamma_1 : x^2 + y^2 = R^2, \\ \Gamma_2 : (x - d)^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

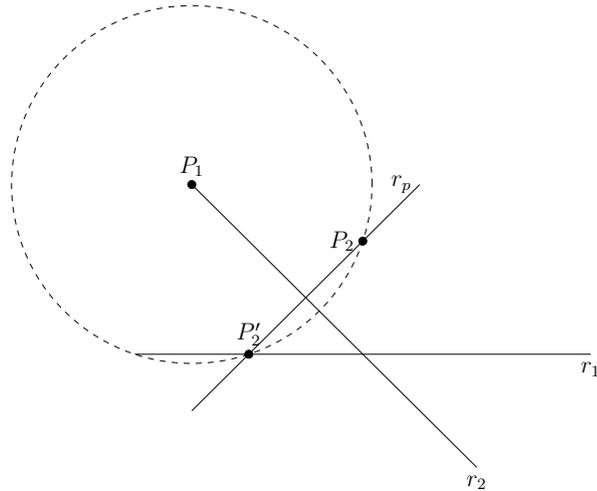


Figura 1.14: Combinando os axiomas **O.5** e **O.4**.

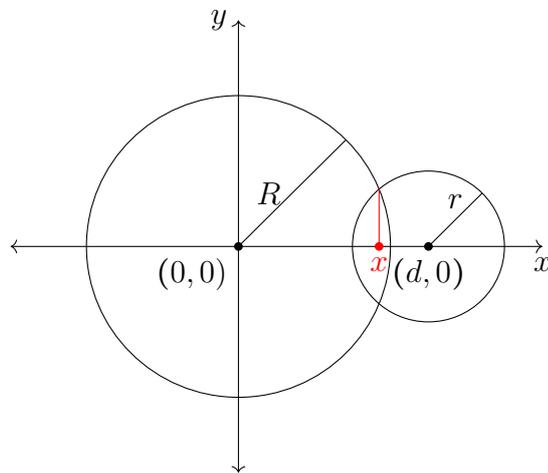


Figura 1.15: O ponto  $x$  de intersecção entre nossas circunferências.

Subtraindo uma equação da outra conseguimos

$$x = \frac{R^2 - r^2 + d^2}{2d}. \quad (1.5)$$

Obtivemos dessa forma a coordenada  $x$  do ponto de intersecção. Nosso objetivo será encontrar uma construção geométrica com origami que nos dê tal ponto. Como já explicado, dois pontos distintos no plano definem uma circunferência; suponhamos, portanto, que os pontos,  $A$ ,  $B$  definam a circunferência  $\Gamma_1$  e que os pontos  $C$  e  $D$  definam a circunferência  $\Gamma_2$ ; a distância entre os centros das circunferências será  $d(A, C) = d$ , o que nos leva para a seguinte configuração.

Um método viável para encontrar  $x$  consiste na criação de um triângulo retângulo na forma ilustrada pela figura 1.17. Por semelhança de triângulos, achamos que  $k$  é dado por:

$$k = \frac{R^2 - r^2}{d}.$$

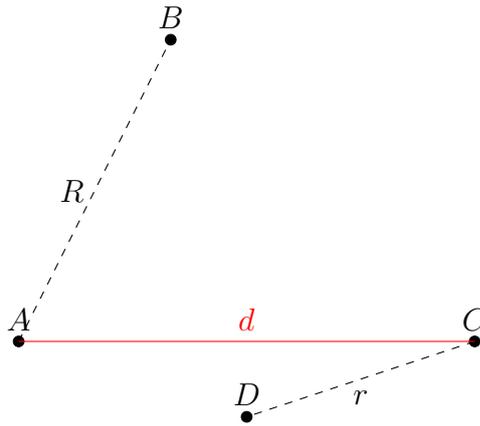


Figura 1.16: Definindo nossos círculos

Tendo obtido o segmento  $k$ , adicionando o segmento  $d$  e dividindo ao meio, obtemos

$$\frac{k + d}{2} = \frac{R^2 - r^2 + d^2}{2d}.$$

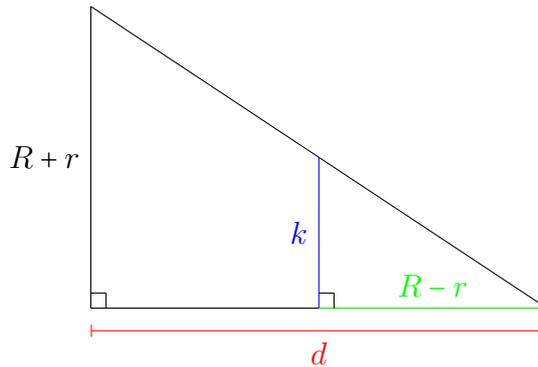


Figura 1.17: Triângulo auxiliar para acharmos nosso ponto de intersecção

Logo, obtemos nossa coordenada  $x$  da intersecção do eixo  $x$  com a reta definida pelos pontos da intersecção das circunferências. Na figura 1.18 mostramos um meio de obter os segmentos  $R + r$  e  $R - r$  a partir da configuração inicial.

O restante da construção pode ser realizado sem dificuldades e o deixamos como um bom exercício para que o leitor acostume-se com construções utilizando dobras. Dessa forma concluímos o intento de mostrar como podemos obter as construções básicas de Euclides com dobras de papel. Um exercício interessante consiste em pegar alguma construção euclidiana e fazê-la utilizando régua e compasso para em seguida fazê-la com dobras, analisando em que situações um método é mais prático que o outro ou quando podemos combinar os dois métodos para ajudar na construção de algum objeto geométrico. É exatamente isso que faremos no próximo capítulo.

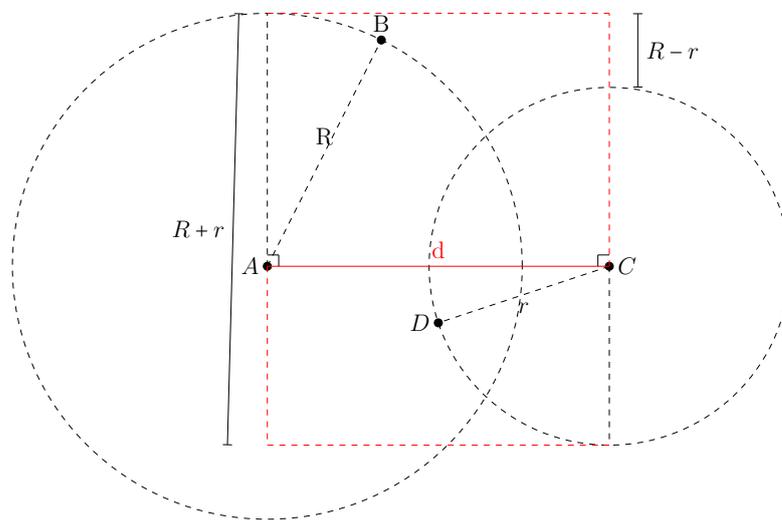


Figura 1.18: Uma solução para achar  $R + r$  e  $R - r$

## Capítulo 2

# Utilizando Origami Como Ferramenta Geométrica

Neste capítulo iremos estudar algumas construções geométricas que podem ser obtidas quando utilizamos as técnicas de origami. Começaremos analisando como podemos usar dobras e um papel quadrado para ajudar os alunos a se familiarizar com a ideia de origami como uma ferramenta matemática e como eles podem utilizá-lo do mesmo modo que utilizam régua e compasso. Aos poucos aumentaremos a complexidade das formas geométricas construídas, mostrando como obter as cônicas com mais facilidade do que com métodos euclidianos. Essas construções constituem bons exercícios e servem como um preparo para o próximo capítulo, onde veremos construções possíveis com origami porém impossíveis com a régua e o compasso de Euclides.

### 2.1 Um quadrado de papel como uma boa referência

Se por acaso o leitor já fez algum trabalho que envolvia origami, as chances de ter utilizado um pedaço de papel na forma de um quadrado são altas. Tradicionalmente os origamis são feitos a partir de uma folha de papel quadrada e não se sabe os motivos exatos dessa escolha, mas podemos enumerar alguns plausíveis: (i) o quadrado é uma forma atraente e pelo seu elevado nível de simetria facilita a elaboração dos modelos (ii) possui lados retilíneos e ângulos internos retos congruentes, o que facilita o alinhamento com outras retas e pontos (iii) na prática é uma figura fácil de se obter a partir de um papel qualquer como a folha de um caderno ou uma folha A4 (quem nunca o fez por qualquer motivo que seja!) e (iv) do ponto de vista matemático pode ser associado a um pedaço do plano cartesiano o que pode ser de grande valia para a solução de problemas geométricos específicos.

Começemos nossas construções por uma questão que deixamos como exercício no capítulo 1, a construção de um triângulo equilátero.

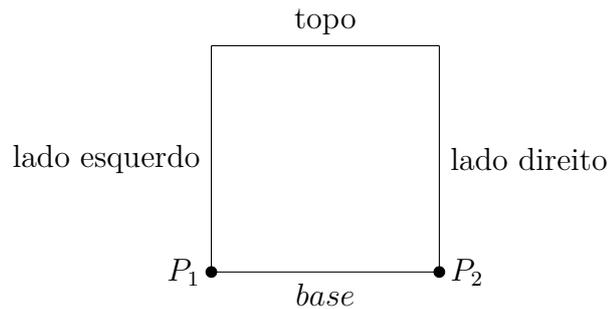


Figura 2.1: Referência que usaremos como o papel quadrado

**Questão 1.** *Dado um pedaço de papel quadrado, construa um triângulo equilátero utilizando apenas dobras.*

Como já vimos no capítulo anterior, seria possível mimetizar o algoritmo de Euclides para construir tal triângulo com origami, porém gostaríamos de obter uma maneira que utilize dobras de uma forma mais eficiente. Imaginemos nosso pedaço de papel quadrado, considerando os cantos da base do quadrado como os pontos  $P_1$  e  $P_2$ :

Descreveremos um algoritmo utilizando origami para obter tal construção:

1. Dobre  $P_1$  sobre  $P_2$  (axioma **O.2**), produzindo uma dobra  $r_1$  no meio do papel;
2. Utilize o axioma **O.5** para refletir  $P_2$  na reta  $r_1$  do meio, mantendo o ponto  $P_1$  estático. Produzindo assim outra dobra, chamaremos de  $r_2$ ;
3. Utilize o axioma **O.4** com a reta  $r_2$  e o ponto  $P_2$ . Faça uma dobra que intersecte a dobra do meio, chamaremos tal intersecção de  $P_3$ ;
4. Termine o triângulo utilizando o axioma **O.1** com os pontos  $P_1$  e  $P_3$ .

Com o conhecimento já adquirido sobre os axiomas de Huzita-Hatori, não é difícil demonstrar que tal triângulo é equilátero, um professor que esteja fazendo tal atividade em sala de aula pode pedir aos alunos que demonstrem tal fato. Uma observação necessária é o fato que a construção apresentada, por mais simples que possa parecer, não é trivial e isso se deve a um tipo de dobra necessária nessa construção, a *dobra de quina*:

**Definição.** *Quando uma dobra contém algum dos vértices do quadrado, a chamaremos de dobra de quina*

Uma dobra de quina não é muito complicada de se fazer quando ela é construída ao se alinhar duas retas. Por exemplo, para dobrar a diagonal do quadrado precisamos construir a bissetriz (axioma **O.3**) de dois lados adjacentes, o que não é difícil na prática. A dificuldade surge quando não temos outra reta para alinhar; um exemplo é o segundo passo da construção dada, onde apenas sabemos que devemos alinhar o ponto

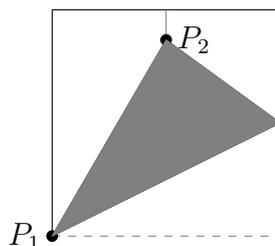


Figura 2.2: Construindo uma *Dobra de Quina* no passo 2, perceba a ponta que se forma no ponto  $P_1$ .

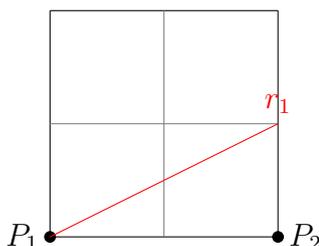


Figura 2.3: Aproximação de triângulo equilátero, em vermelho a reta feita pela régua no passo 3.

$P_2$  com nossa reta do meio deixando nosso ponto  $P_1$  fixo, o que constitui o passo mais complicado da construção. Portanto, não se preocupe quando houver alguma dificuldade para fazer tal dobra; se em um primeiro momento houver muita dificuldade, a construção pode ser modificada adicionando o uso de régua para aproximar o triângulo equilátero como se segue:

1. Dobre  $P_1$  sobre  $P_2$  (axioma **O.2**), produzindo uma dobra no meio do papel;
2. Dobre a base sobre o topo, produzindo outra dobra no meio do papel e perpendicular a dobra feita no passo 1;
3. Com régua, crie uma reta do ponto  $P_1$  até o meio do lado direito, como na figura 2.3, chamaremos essa reta de  $r_1$ ;
4. Utilize o axioma **O.4** com a reta  $r_1$  e o ponto  $P_2$ . Faça uma dobra que intersecte a dobra do meio, chamaremos tal intersecção de  $P_3$ ;
5. Termine o triângulo utilizando o axioma 1 com os pontos  $P_1$  e  $P_3$ .

Uma vez realizada tal construção, o triângulo formado parecerá muito com um equilátero. Um bom exercício para os alunos consiste em demonstrar o porquê tal triângulo *não é* equilátero. Além de revisar conceitos de trigonometria isso irá ensinar aos alunos a não tirar conclusões apenas pela aparência do objeto.

Quando observamos nossa construção no papel, percebemos que seria possível ser mais eficiente em nossa construção utilizando mais do nosso quadrado. Propomos então a seguinte pergunta:

**Questão 2.** *Em um quadrado, qual o triângulo equilátero com área máxima.*

Sabemos que tal triângulo deve ter lado maior que o lado do quadrado mas menor que sua diagonal. Podemos ir aumentando gradualmente o tamanho do segmento  $P_1P_2$  do triângulo, fazendo com que o ponto  $P_2$  suba em direção ao topo do papel percorrendo o lado direito, criando um ângulo  $\alpha$  entre a base do quadrado e o segmento  $P_1P_2$ , sendo esse nosso novo lado do triângulo. Com um pouco de análise podemos perceber que  $0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ , bastando ver que quando começamos ( $\alpha = 0^\circ$ ), temos que o ângulo  $\delta$  definido pelo lado esquerdo do quadrado e o lado esquerdo do triângulo começa em  $30^\circ$ , pois os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a  $60^\circ$ ; enquanto  $\alpha$  vai aumentando,  $\delta$  vai diminuindo até o momento em que  $\alpha = \delta = 15^\circ$  ponto no qual, devido a simetria do quadrado, a situação passada por  $\alpha$  se repete em relação a  $\delta$ .

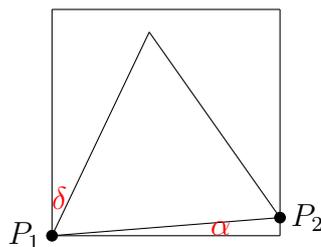


Figura 2.4: Movendo  $P_2$  sobre o lado direito, percebe-se os ângulos  $\alpha$  e  $\delta$ .

Precisamos achar uma fórmula para a área do nosso triângulo que dependa do ângulo  $\alpha$ . Utilizando trigonometria e considerando que nosso quadrado possui lado unitário encontramos a fórmula

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \sec^2(\alpha). \quad (2.1)$$

Como  $\sec(\alpha)$  é o inverso do  $\cos(\alpha)$ , e como o  $\cos(\alpha)$  é decrescente no intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ , temos que  $\sec(\alpha)$  é crescente em tal intervalo, logo nossa fórmula para a área também é crescente no intervalo e conseqüentemente temos que nosso triângulo máximo ocorre quando  $\alpha = 15^\circ$ . Portanto, só precisamos construir um ângulo de  $15^\circ$  para acharmos o triângulo máximo e deixamos esse exercício a cargo do leitor (Dica: Qual o ângulo formado pela base e a dobra de quina que fizemos no passo 2?).

Aproveitando que falamos de área, podemos prosseguir com outra construção que é trabalhosa com régua mas fácil quando usamos um pedaço de papel quadrado e origami. Com tal construção podemos falar de potências de 2, área de um quadrado, plano cartesiano e fatoração de números em seus fatores primos (teorema fundamental da aritmética). Tal construção é a obtenção de uma *malha quadrada*.

**Questão 3.** *Dado um pedaço de papel quadrado, construa uma malha quadrada.*

Se olharmos a figura 2.3 perceberemos que foi necessário fazer uma pequena malha quadrada  $2 \times 2$ , significando que cada lado foi dividido por 2, e para isso nos dobramos a base sobre o topo, e o lado direito sobre o lado esquerdo. A construção de uma *malha quadrada* que possua mais quadrados é feita simplesmente repetindo o processo, com a diferença que, dessa vez, queremos fazer a malha  $2 \times 2$  nos quadrados menores, o que pode ser obtido dobrando-se cada linha e cada coluna de nossa malha ao meio. Segue um breve diagrama de como se obter uma malha quadrada  $4 \times 4$ , veja a figura 2.5:

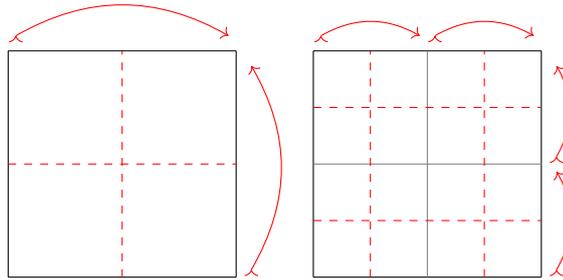


Figura 2.5: Malhas  $2 \times 2$  e  $4 \times 4$ , perceba a divisão das colunas e linhas no diagrama da direita.

Se continuássemos o processo, obteríamos uma malha  $8 \times 8$ ; prosseguindo teríamos  $16 \times 16$  e assim por diante. Percebemos que nossa malha terá a forma  $2^n \times 2^n$  quando repetimos o processo  $n$  vezes. Uma atividade que pode ser apresentada em sala de aula, que explora localizar pontos no plano cartesiano e que também envolve a matéria de Artes é fazer desenho no estilo *pixel art*, baseados em malhas, bastando o aluno descobrir o local e a cor que um certo quadrado deve ser pintado. Definindo que cada quadrado, pertencente a malha, possua área igual a 1, poderíamos perguntar qual a área do desenho que fizeram, podendo ser um desenho próprio do aluno ou algum proposto pelo professor. Mostramos um exemplo de *pixel art* do personagem de jogos eletrônicos Mario.

Uma questão que pode ser levantada aos alunos é a seguinte: como fazer uma malha cujas dimensões não são potências de 2? Por exemplo, uma malha  $3 \times 3$ ? Uma resposta válida na prática consiste simplesmente em construir uma malha  $4 \times 4$  e depois cortar uma coluna e uma linha para obter o que foi pedido. De fato, quando estamos lidando com modelos de origami que demandam, por exemplo, um *grid* de  $7 \times 7$ , é muito mais fácil construir uma malha de  $8 \times 8$  e cortá-la, do que usar o algoritmo para dividir os lados do quadrado em 7 partes iguais (veja seção 3.3 à frente). Como outra aplicação interessante desse exemplo de dobra, o professor pode pedir aos alunos que construam uma malha  $6 \times 6$ , dando a dica que eles precisarão, primeiramente, dividir um quadrado em terços. Como  $6 = 2 \times 3$ , espera-se que os alunos percebam que após a divisão em 3 partes basta dividir as linhas e colunas ao meio; essa seria uma forma lúdica de

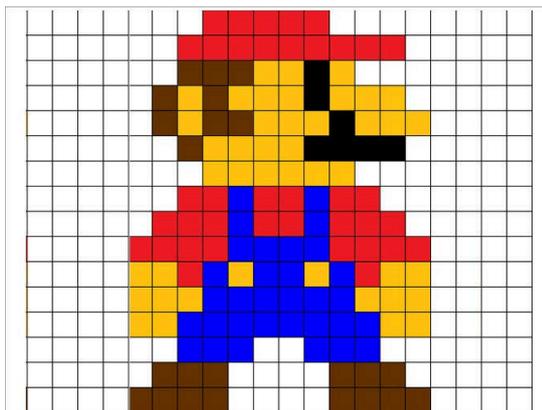


Figura 2.6: *Pixel Art* de Mario Bros; uma *malha*  $16 \times 16$  é necessária.

apresentar a ideia de fatoração de um número em seus fatores primos.

Perceba que nossas construções até agora não foram de grande complexidade, porém já conseguimos observar um pouco da força do origami: imagine fazer uma *malha* usando apenas régua e compasso... Algo nada trivial! Em seguida iremos mostrar como a utilização combinada de régua e compasso com origami facilita a construção de objetos mais complexos e belos.

## 2.2 Cônicas Duais

Nessa seção iremos estudar como podemos construir as retas tangentes a circunferências, parábolas, elipses e hipérbolas, ou seja, as cônicas serão obtidas como envelopes das suas tangentes. Quando visualizamos uma cônica como um envelope a chamamos de *cônica dual*. Das cônicas mencionadas, só discutiremos nesse momento sobre as construções das três últimas, o motivo ficará mais claro no capítulo seguinte. Àqueles interessados em levar a cabo as construções ora descritas, aconselhamos utilizar papel vegetal, pois o efeito que as dobras produzem nesse papel deixam nossas construções muito mais belas. Porém, se não estiver à disposição, qualquer folha retangular servirá a esse propósito. Começemos nosso estudo.

### 2.2.1 Círculo

Dissemos que o origami pode facilitar certas construções geométricas que são difíceis com régua e compasso, porém o *circunferência* é uma exceção. Enquanto podemos construir facilmente uma circunferência com compasso, com origami iremos considerar aproximações de tal por polígonos com número “grande” de lados, a mesma ideia que foi usada na Antiguidade para determinar o perímetro da circunferência. Logo, nesse caso, não estaremos construindo o envelope propriamente dito.

Em breve veremos como construir um heptágono regular; um octógono regular seria

mais fácil, porém já sabemos que um heptágono regular não pode ser construído usando régua e compasso euclidianos, logo será um bom exercício mostrar como construí-lo com origami.

### 2.2.2 Parábola

Uma propriedade importante da dobra obtida pela aplicação do axioma **O.5** e que não é aparente pelo que vimos até aqui, diz respeito ao fato que ela é uma reta tangente de uma parábola. Mais precisamente, dados os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e a reta  $r_1$ , ao dobrar o papel de modo que a reta resultante  $r$  passe por  $P_1$  e o ponto  $P_2$  seja levado no ponto  $P'_2$  sobre a reta  $r_1$ , obtemos a reta tangente à parábola  $f$  que tem foco em  $P_2$  e reta diretriz  $r_1$ . Veja a figura 2.7.

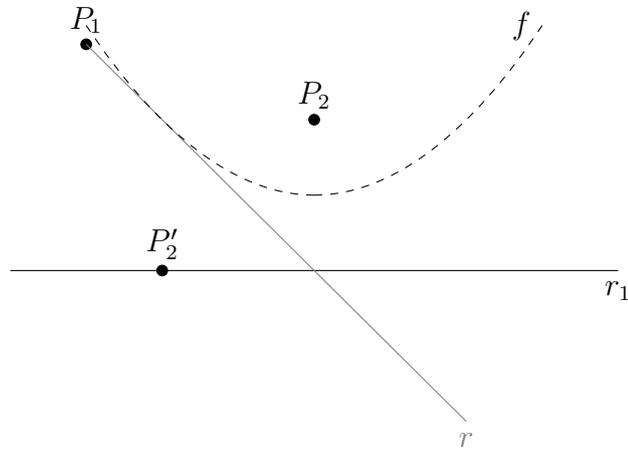


Figura 2.7: A dobra resultante da aplicação do axioma **O.5** é uma reta tangente de uma parábola.

Para ver isso, uma vez construídos  $r$  e  $P'_2$ , tracemos uma perpendicular a reta  $r_1$  pelo ponto  $P'_2$ . Tal perpendicular irá intersectar  $r$  no ponto  $P$ . Como  $P \in r$ , temos que  $d(P, P_2) = d(P, P'_2)$  e como  $PP'_2 \perp r_1$  temos que  $d(P, P'_2) = d(P, r_1)$ , logo  $P \in f$ .

Devemos mostrar que  $P$  é o único ponto da reta  $r$  que pertence a parábola. Procedendo por contradição, imaginemos que exista outro ponto  $P' \in r \cap f$ ; supondo que a reta perpendicular a  $r_1$  e que passe por  $P'$  intersecta  $r_1$  em  $P''$ , a distância entre  $P'$  e  $P''$  é igual a distância de  $P'$  até a reta  $r_1$ , logo temos que, como  $P' \in f$ ,  $d(P', P'') = d(P', P_2)$  (veja a figura 2.9). Com isso temos que o triângulo  $P'_2P'P''$ , é isósceles, pois  $d(P'_2, P') = d(P', P_2) = d(P', P'')$ , logo os ângulos  $\angle P'P''P'_2$  e  $\angle P'P'_2P''$  são congruentes, mas isso é impossível, pois  $\angle P'P''P'_2$  é um ângulo reto, portanto  $r$  é tangente a  $f$ .

Verificado esse fato, nossa construção é bem direta, bastando dobrar uma reta dada sobre um ponto dado várias vezes. Por exemplo, se começamos com um pedaço de papel quadrado, basta seguir o seguinte algoritmo:

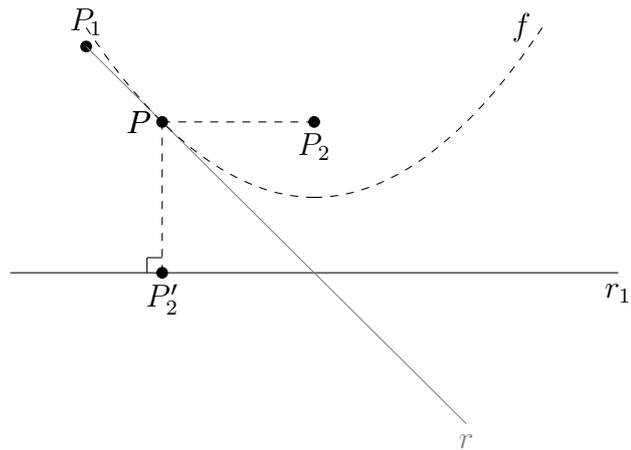


Figura 2.8: Encontrando o ponto  $P$  tangente à parábola.

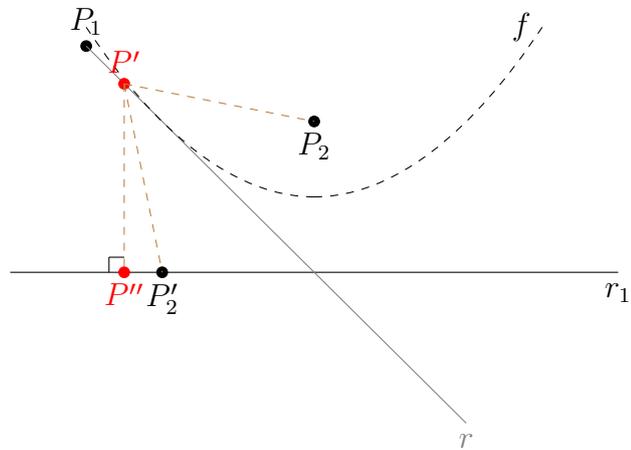


Figura 2.9: Mostrando a unicidade de  $P$ , triângulo  $\Delta P'_2 P'' P'$  possui dois ângulos retos na base

1. Marque algum ponto  $P_1$  no papel;
2. Escolha um dos lados do papel para ser sua reta diretriz, marque vários pontos sobre tal lado e prossiga dobrando-os sobre o ponto  $P_1$ .

Nesse caso, o formato do papel tem pouca relevância. Um pequeno diagrama da construção é apresentado na figura 2.10. Obviamente quanto mais pontos na reta forem escolhidos, mais bela e aparente ficará nossa parábola dual. Mesmo com poucos pontos, no diagrama utilizamos cinco, já obtemos um bom resultado. Os alunos podem explorar o que acontece com a forma da parábola quando a posição do ponto  $P_1$  varia no papel.

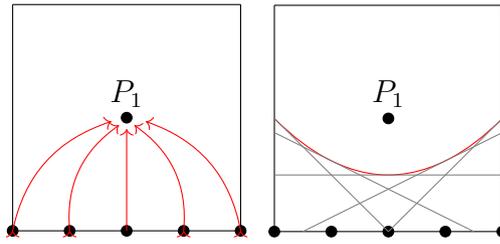


Figura 2.10: Construção da parábola dual, em cinza nossas dobras

### 2.2.3 Elipse

Neste momento precisaremos da ajuda de um compasso para facilitar nossa construção, pois nosso algoritmo necessita de pontos pertencentes a uma circunferência. Se houver interesse de construir a elipse dual utilizando somente origami, é possível, bastando para isso aproximar a circunferência por algum polígono e utilizar os vértices dele como os pontos da circunferência; porém a quantidade de dobras no papel comprometerá tremendamente a visualização, logo aconselhamos vigorosamente o uso de um compasso. Corte um círculo de papel e em seguida use o algoritmo apresentado para construir a elipse dual:

1. Escolha um ponto  $P_1$  interno ao circunferência;
2. Marque pontos na circunferência e dobre-os sobre o ponto  $P_1$ ;

Apresentamos um diagrama simples da construção na figura 2.11.

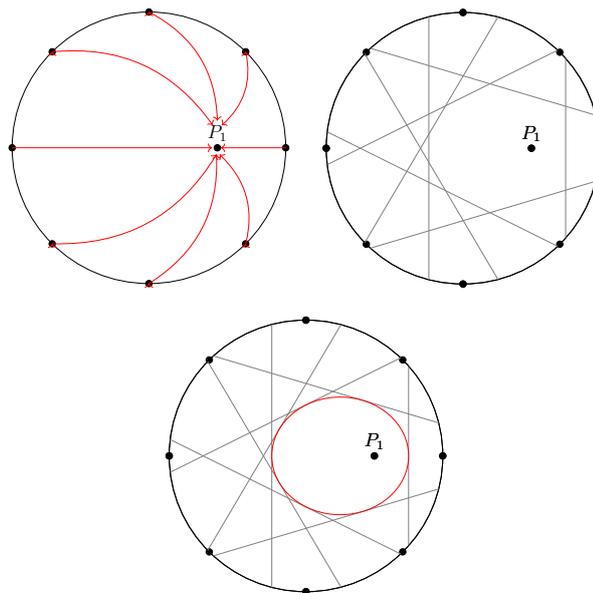


Figura 2.11: Passos da construção, por último visualizamos nossa elipse.

Conseguimos ter uma noção da elipse no nosso diagrama, porém não tão boa como no caso da parábola. Para uma melhor visualização recomendamos a escolha de uma quantidade maior de pontos. Nos falta demonstrar que nossa construção realmente nos dá tangentes a uma elipse. Após demonstrarmos, seremos capazes de determinar todas as propriedades geométricas da elipse que estamos construindo.

Mais uma vez iremos posicionar nosso sistema de coordenadas para que o ponto  $P_1$  fique sobre o eixo  $x$  e possua coordenadas  $(d, 0)$ , também iremos supor que nosso círculo possua raio  $R$ , em acordo com a figura 2.12.

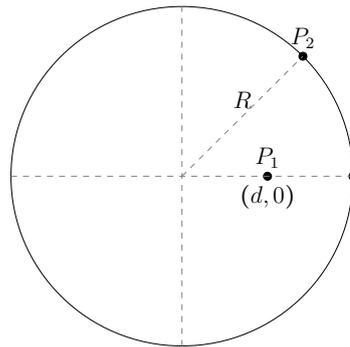


Figura 2.12: Configuração para o estudo da elipse.

Começemos provando que os focos da elipse são o ponto  $P_1$  e a origem  $O = (0, 0)$ . Lembre que uma dobra da elipse dual é obtida tomando um ponto da circunferência, digamos  $P_2$ , e levando-o sobre o ponto  $P_1$  escolhido no seu interior; dessa forma criamos uma reta  $r_1$  que conjecturamos ser uma tangente a nossa elipse. Para provar isso considere os seguintes passos:

1. Dobre o ponto  $P_2$  sobre  $P_1$ , criando a dobra  $r_1$ ;
2. Trace o raio de  $P_2$  até a origem;
3. A intersecção do raio com  $r_1$  será o ponto de tangência, chamaremos de  $P_3$ .

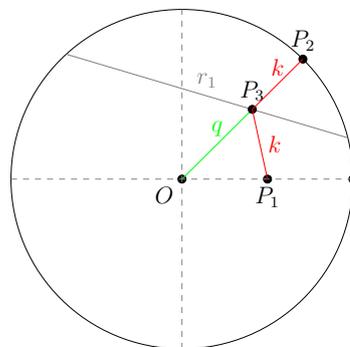


Figura 2.13: Achando o ponto  $P_3$  sobre a elipse.

Com a construção dada, obtemos o ponto  $P_3$ ; como tal ponto está na reta  $r_1$ , que é a mediatriz do segmento, temos que a distância de  $P_1$  a  $P_3$  deve ser igual à distância de  $P_3$  a  $P_2$ , que denotaremos por  $k$ . Chamaremos de  $q$  a distância da origem ao ponto  $P_3$  e daí temos que  $R = q + k$  pois os pontos  $P_2$  e  $P_3$  estão sobre a mesma reta, conforme a figura 2.13. Isso significa que  $d(O, P_3) + d(P_3, P_1) = q + k = R$ , ou seja,  $P_3$  está sobre a elipse de focos em  $O$  e  $P_1$ . A mesma espécie de raciocínio utilizado no caso da parábola garante que esse é o único ponto na reta que pertence a *elipse*, pois, para um outro ponto qualquer, teríamos a soma das distâncias (do ponto a  $O$  e  $P_1$ ) maior que o raio. Portanto, os pontos que construímos pertencem a uma elipse com focos na origem e em  $P_1$ , pois as somas das distâncias dos pontos até os focos será constante igual ao raio do nosso círculo. Com isso e lembrando que se temos os pontos  $P = (x, y)$  e  $P' = (x', y')$  temos que  $P + P' = (x + x', y + y')$ , conseguimos descobrir os dados da nossa *elipse* como se segue:

#### 1. Centro:

O centro  $O'$  é o ponto médio do segmento que tem extremidade nos focos da elipse, logo é dado por

$$O' = \frac{1}{2}(O + P_1) = \left(\frac{d}{2}, 0\right).$$

#### 2. Distância Focal:

Como temos nosso centro, é fácil descobrir a distância do centro da elipse até o foco

$$c = d(O', P_1) = \sqrt{\left(d - \frac{d}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \frac{d}{2}.$$

#### 3. Eixo Maior

Podemos achar nosso eixo maior sabendo que a soma das distâncias dos pontos ao foco é igual a  $R$ . Isso é o mesmo que  $2a = R$ , ou seja,

$$a = \frac{R}{2}.$$

#### 4. Eixo Menor

Com o eixo maior e a distância focal, podemos encontrar nosso eixo menor

$$b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{R^2 - d^2}{4},$$

portanto nosso eixo menor é

$$b = \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{2}.$$

Com isso conseguimos encontrar todas as informações da elipse aproximada pelas tangentes, a mostramos na figura 2.14 . Deixaremos a cargo do leitor o exercício de encontrar a equação exata de tal elipse. Pelas nossas fórmulas percebemos que se escolhermos um ponto que está sobre a circunferência, ou seja,  $d = R$ , nossa elipse estará completamente achatada e todas as nossas dobras serão diâmetros do círculo. Note ainda que se  $d = 0$ , isto é se  $P_1 = O = (0, 0)$ , então  $a = b = \frac{R}{2}$ , ou seja, obtemos o envelope de um círculo cujo raio é a metade do raio do círculo dado inicialmente. Obviamente não há qualquer vantagem nessa construção pois, desde o princípio, já dispusemos de um compasso para traçar uma circunferência no papel.

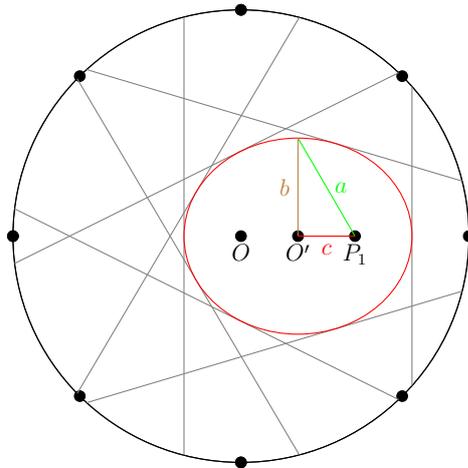


Figura 2.14: A elipse dual com todos os seus dados.

Como curiosidade destacamos ao leitor que a elipse dual estudada acima é parte de uma solução genial proposta pelo lendário físico estadunidense Richard Feynman (1918-1988) para a questão sobre o formato das órbitas dos planetas em torno do sol. Para maiores detalhes o leitor curioso pode acessar o vídeo correspondente pela ligação <https://www.youtube.com/watch?v=xdIjYBtbnvZU> (em inglês).

## 2.2.4 Hipérbole

Para essa construção, bem como para as anteriores, sugerimos a utilização de *papel vegetal* ou qualquer outro papel suficientemente transparente que nos ajude a realizar nossa construção; o uso de compasso será necessário novamente. Segue o algoritmo para a hipérbole dual que está representada na figura 2.15.

1. Sobre um pedaço de papel retangular, trace uma circunferência (não use muito espaço do papel);
2. Escolha um ponto  $P_1$  exterior ao círculo;
3. Marque pontos sobre a circunferência e dobre-os sobre  $P_1$ .

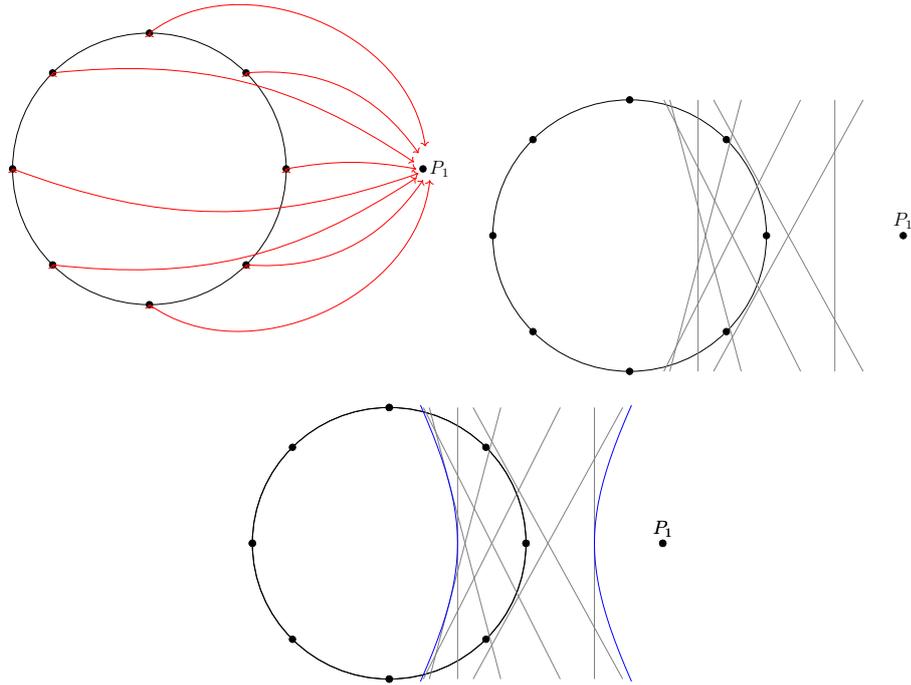


Figura 2.15: Passos da construção das retas tangentes da hipérbole; por último visualizamos nossa hipérbole em azul.

Mais uma vez é preciso mostrar que tal construção nos dá as tangentes de uma hipérbole. Usaremos as mesmas notações do caso anterior, a saber, o centro do círculo será a origem  $O = (0, 0)$ , seu raio será  $R$  e o ponto  $P_1$  estará sobre o eixo  $x$  com coordenadas  $(d, 0)$ . Como no caso da elipse, verificaremos que as dobras obtidas pelo algoritmo acima são as retas tangentes de uma hipérbole com focos na origem  $O$  e no ponto  $P_1$ . Nesse intuito, demonstraremos que há um único ponto  $P_3$  sobre cada dobra tal que a diferença entre as distâncias de  $P_3$  aos focos é igual ao raio da circunferência traçada. Para determinar o ponto  $P_3$  basta utilizar o algoritmo que se segue:

1. Escolha um ponto  $P_2$  sobre a circunferência e dobre-o sobre o ponto  $P_1$ , construindo a dobra  $r_1$ ;
2. Construa a reta que passe pela origem e pelo ponto  $P_2$  até que intersecte a reta  $r_1$  no ponto  $P_3$ , como mostrado na figura 2.16.

Como o ponto  $P_3$  está sobre a mediatriz do segmento  $P_1P_2$ , temos que  $d(P_1, P_3) = d(P_3, P_2) = k$  e como a distância entre a origem e  $P_3$  é  $d(O, P_3) = R + k$ , obtemos imediatamente que  $d(O, P_3) - d(P_3, P_1) = R + k - k = R$ ; isso significa que o ponto  $P_3$  está sobre a hipérbole que tem focos em  $O = (0, 0)$  e  $P_1 = (d, 0)$ . Como nos casos anteriores, para provar a unicidade do ponto  $P_3$  pode-se considerar um outro ponto  $P'$  na reta  $r_1$ ; construindo o triângulo  $OP_2P'$  é fácil mostrar que para esse novo ponto a diferença

entre as distâncias será diferente do raio. Portanto, todos os pontos construídos por esse algoritmo pertencem a uma hipérbole com focos em  $O$  e  $P_1$ .

Feito isso, achemos os dados de nossa hipérbole:

1. **Centro:**

O centro  $O'$  é o ponto médio do segmento que tem extremidades nos focos, logo é dado por

$$O' = \frac{1}{2}(O + P_1) = \left(\frac{d}{2}, 0\right).$$

2. **Distância Focal:**

Como temos nosso centro, fica fácil descobrir que a distância do centro da hipérbole até o foco, a assim referida distância focal, é dada por

$$c = d(O', P_1) = \sqrt{\left(d - \frac{d}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \frac{d}{2}.$$

3. **Eixo Real:**

Podemos achar nosso eixo real  $2a$  sabendo que a diferença das distâncias de um ponto aos focos é igual a  $R$ , isto é

$$a = \frac{R}{2}.$$

4. **Eixo Imaginário:**

Com o eixo real e a distância focal podemos encontrar nosso eixo imaginário. Para isso, note que

$$b^2 = c^2 - a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{4},$$

de onde obtemos

$$b = \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{4}.$$

Mostramos a hipérbole que está sendo aproximada na figura 2.17. Com isso concluímos a construção das cônicas duais utilizando uma combinação de dobras e compasso. Acreditamos que os métodos descritos acima, além de lúdicos, são mais fáceis de ser seguidos em sala de aula por professores e alunos do que aqueles tradicionalmente utilizados envolvendo pregos e um cordão. A principal desvantagem da utilização do origami é que, no fundo, construímos retas tangentes e não os objetos em si. Prosseguiremos agora para o próximo capítulo do trabalho no qual abordaremos o assunto que estávamos adiando: o estudo matemático de axioma **O.6**.

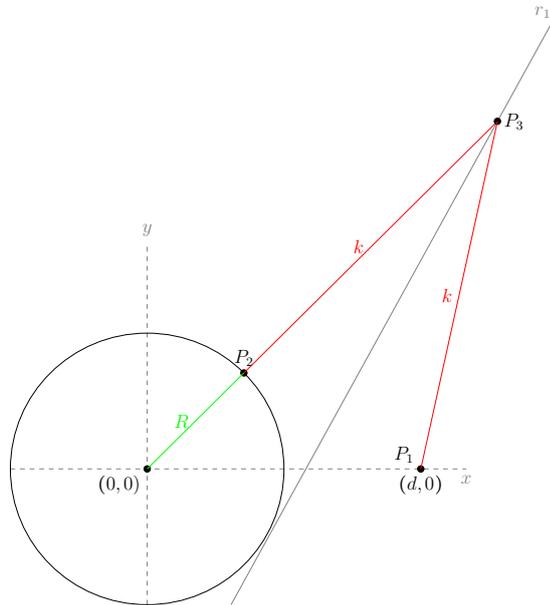


Figura 2.16: Encontrando o ponto  $P_3$  sobre a hipérbole

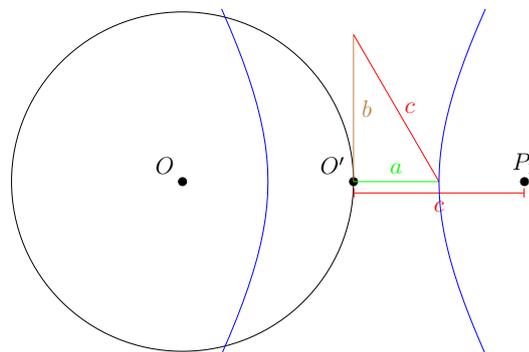


Figura 2.17: A hipérbole com todos os seus dados, omitimos as dobras.

## Capítulo 3

# Resolução de Equações Cúbicas com A Dobra de Beloch

Neste capítulo mostraremos que os axiomas do origami permitem resolver uma equação cúbica qualquer, fato que os põe acima dos instrumentos euclidianos como ferramenta para construções geométricas; particularmente, estudaremos o axioma **O.6** cuja dobra resultante foi proposta e estudada pela matemática italiana Marguerita Piazzola Beloch (1879-1976). Neste capítulo mostraremos também como utilizar o origami para resolver três problemas clássicos de construção geométrica: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a construção do heptágono regular; incidentalmente veremos algumas técnicas para dobrar uma folha de papel em um número arbitrário, porém finito, de partes iguais.

### 3.1 Tangente a Duas Parábolas

No capítulo 2, quando analisamos o axioma **O.5**, vimos que ao dobrar um ponto  $P$  sobre uma reta  $r$  obtemos uma reta tangente à parábola  $f$  que possui diretriz  $r$  e foco  $P$ . Dito isso, lembremos do sexto axioma de Huzita-Hatori:

**O.6** *Dados duas retas  $r_1$  e  $r_2$  e dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , pode existir no máximo três dobras que colocam  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ .*

Usando o mesmo raciocínio que utilizamos ao analisar o axioma **O.5**, vemos que tal dobra, doravante chamada “dobra de Beloch”, representa uma reta que tangencia duas parábolas simultaneamente. Utilizando novamente as ferramentas da geometria analítica, mostraremos que podem existir até três tangentes comuns a duas parábolas distintas observando que em determinadas circunstâncias os coeficientes angulares de tais tangentes são soluções de uma equação cúbica. Para nosso estudo iremos posicionar

nossas parábolas de tal forma que uma delas, chamada de  $f_1$ , possua a forma  $y = A'x^2$ , deixando a outra, chamada  $f_2$ , na forma mais geral o que significa geometricamente que pode estar rotacionada em relação às coordenadas adotadas. Dito de outra forma, nossas parábolas têm equações

$$\begin{cases} f_1 : & y - A'x^2 = 0, \\ f_2 : & Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \end{cases}$$

Devemos lembrar que  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  representa a forma geral de uma cônica e para que tal equação nos dê uma parábola precisamos que

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Uma reta  $r : y = mx + n$  pode interceptar uma parábola em até dois pontos. Matematicamente isso pode ser observado substituindo-se  $y = mx + n$  na expressão de  $f_1$  ou  $f_2$  e estudando a equação quadrática resultante; quando tal equação tem uma raiz dupla, ou seja, quando seu discriminante é igual a zero, a reta  $r$  é tangente à referida parábola. Portanto, a condição para que  $r$  seja tangente à parábola  $f_1$  é que a equação quadrática

$$-A'x^2 + mx + n = 0,$$

tenha discriminante nulo, isto é,

$$\Delta = m^2 - 4(-A')n = 0,$$

ou ainda,

$$n = \frac{-m^2}{4A'}.$$

Para simplificar nossos cálculos e facilitar o entendimento, iremos supor que  $A' = \frac{1}{4}$ , com isso chegamos a

$$n = -m^2.$$

o que garante que nossa reta  $r$  possui a forma  $r : y = mx - m^2 = m(x - m)$ . Substituindo essa última expressão na equação da parábola  $f_2$  temos

$$Ax^2 + Bx(mx - m^2) + C(mx - m^2)^2 + Dx + E(mx - m^2) + F = 0.$$

Após algum trabalho algébrico, chegamos a seguinte equação quadrática em  $x$

$$(A + Bm + Cm^2)x^2 + (-2Cm^3 - Bm^2 + Em + D)x + (Cm^4 - Em^2 + F) = 0.$$

E, novamente, como nosso ponto deve ser único, precisamos impor  $\Delta = 0$ , logo

$$\Delta = (-2Cm^3 - Bm^2 + Em + D)^2 - 4(A + Bm + Cm^2)(Cm^4 - Em^2 + F) = 0.$$

Mais uma vez fazendo todo o trabalho algébrico necessário e lembrando que  $B^2 - 4AC = 0$ , finalmente encontramos a nossa equação

$$(2EB - 4DC)m^3 + (E^2 + 4EA - 2(DB + 2CF))m^2 + 2(D - 2DF)m + (D^2 - 4AF) = 0.$$

Portanto a dobra de Beloch nos dá a solução para uma equação cúbica, e é exatamente essa dobra que nos permite obter construções geométricas que não podíamos obter utilizando apenas régua e compasso euclidianos. Por mais que tenhamos mostrado que tal dobra equivale a resolução de uma equação cúbica, é natural o desejo do leitor por um método simples e prático para solucionar uma dada equação cúbica usando dobras. Não iremos nos aprofundar em tal estudo, porém o artigo [10] exibe uma maneira simples de utilizar a dobra de Beloch para solucionar uma dada equação cúbica a partir de um método desenvolvido pelo engenheiro e oficial militar austríaco Eduard Lill (1830-1900) para encontrar raízes de polinômios; uma excelente ilustração e explicação do método pode ser acessada em <https://www.youtube.com/watch?v=IUC-8P0zXe8>, em inglês com legendas em espanhol. Tendo esclarecido tal dúvida, prossigamos neste momento resolvendo as construções geométricas que dissemos ser impossível com régua e compasso euclidianos e conseqüentemente a equações cúbicas que as regem.

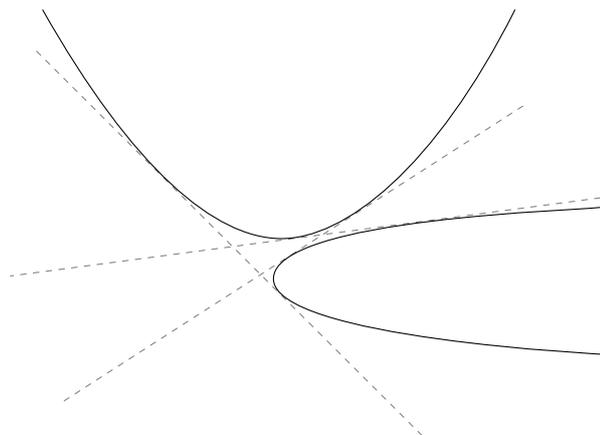


Figura 3.1: Duas parábolas podem ter até três tangentes comuns.

## 3.2 Trissecção de um Ângulo

Como vimos, essa é uma das construções que não conseguimos realizar para um ângulo arbitrário quando utilizamos apenas régua e compasso euclidianos. O algoritmo que segue mostra como realizar essa construção com origami a partir de uma folha de papel quadrado. Os passos descritos estão ilustrados esquematicamente na figura 3.2.

1. Produza uma dobra  $r_1$  que passa por um dos vértices do quadrado, construindo um ângulo arbitrário  $\theta$  que tem a base do quadrado e essa dobra como lados;

2. Dobre ao meio o papel, dobrando a base sobre o topo, como indicado no diagrama, chamaremos de  $B$  o ponto em que tal dobra intersecta o lado que contem  $A$ ;
3. Dobre a base sobre a dobra feita no passo anterior construindo a linha  $r_2$ , mediatriz do segmento  $AB$ ;
4. Utilizando o axioma O.6, dobre  $A$  sobre  $r_2$  e  $B$  sobre  $r_1$ , a reta formada pela dobra chamaremos de  $r_3$ ;
5. Marque o ponto para o qual  $A$  foi refletido; pode usar caneta ou fazer uma pequena dobra. Chamaremos tal ponto de  $A'$ ;
6. O ângulo formado pela base e a reta  $AA'$  é um terço do ângulo  $\theta$ .

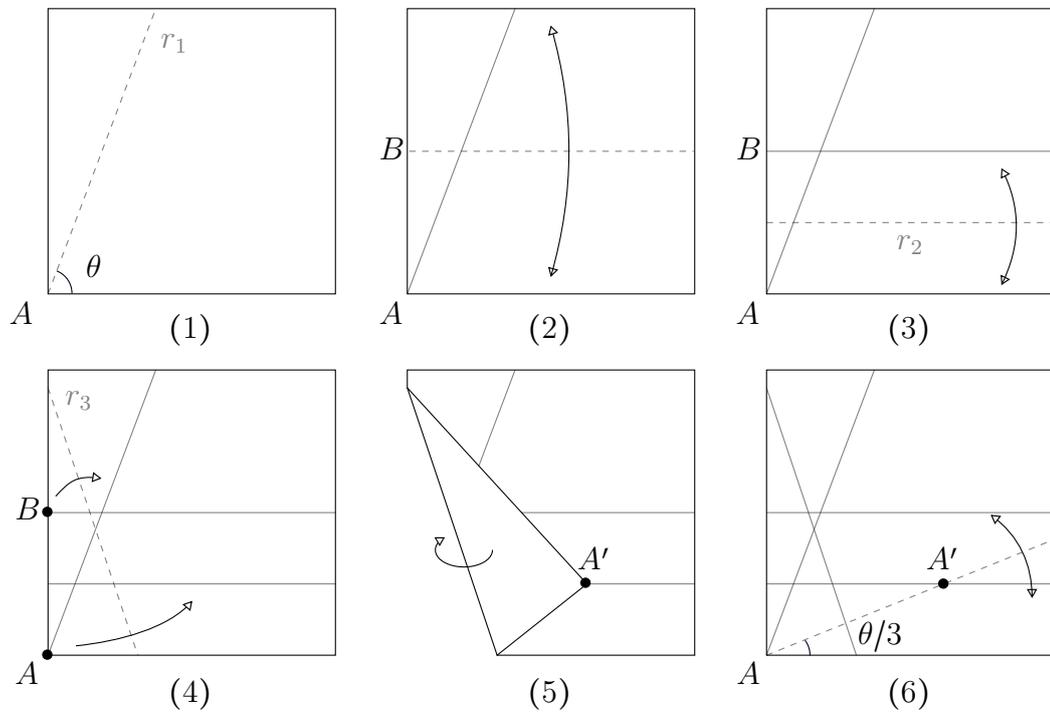


Figura 3.2: A trisseção de um ângulo com origami.

Podemos adicionar mais um passo ao algoritmo acima que seria dobrar a reta  $r_1$  sobre a reta  $AA'$ , o que nos daria todos os terços do ângulo  $\theta$ .

Claro que ainda se faz necessário mostrar que tal construção está correta. Para isso, notemos que como  $r_2$  é a mediatriz do segmento  $AB$  e como  $A' \in r_2$ , concluímos que o triângulo  $BAA'$  é isósceles e, conseqüentemente, a reta  $r_2$  contém a bissetriz do ângulo  $BA'A$ . Além disso, o ângulo formado pela reta  $r_2$  e o segmento  $AA'$  é alterno-interno em relação ao ângulo  $\alpha$ , pois a reta  $r_2$  é paralela à base do quadrado; isso implica que  $\angle AA'B = 2\alpha$ . Veja a figura 3.3 abaixo.

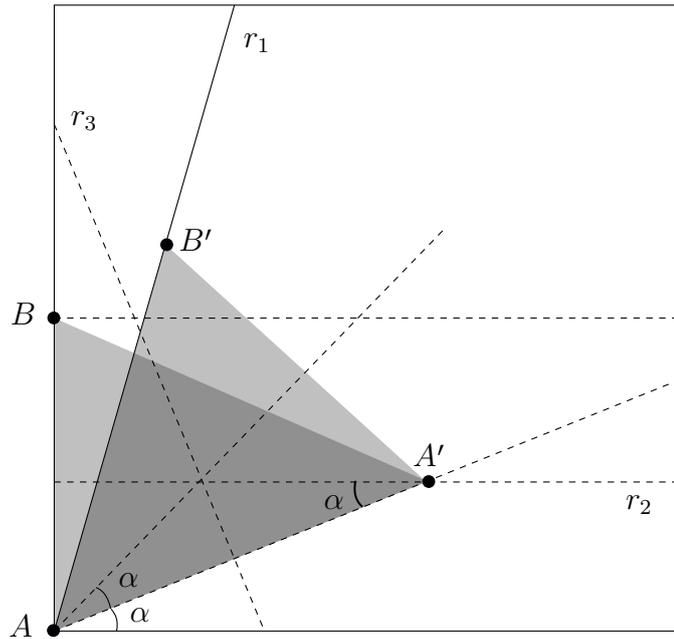


Figura 3.3: Demonstrando a trisseção de um ângulo com origami.

O quadrilátero  $ABB'A'$  é um trapézio isósceles, pois  $AA'$  é paralela a  $BB'$  (ambas perpendiculares a  $r$ ) e, pela propriedade de isometria da reflexão, os segmentos  $AB$  e  $A'B'$  são congruentes. Daí temos que  $\angle BAA' \cong \angle B'A'A$  e que os triângulos  $BAA'$  e  $B'A'A$  são congruentes pelo esquema lado-ângulo-lado. Particularmente,  $\angle A'AB' = 2\alpha$  e daí  $\theta = 3\alpha$ , como queríamos demonstrar.

O argumento que acima demonstra que origami permite trissecar qualquer ângulo que esteja no primeiro quadrante. Para trissecar ângulos maiores que  $90^\circ$  é necessário transformá-los em outros equivalentes no primeiro quadrante, um problema que pode ser resolvido facilmente com o auxílio de reflexões (experimental!). Com essa última observação concluímos a trisseção do ângulo com origami. Na próxima seção mostraremos como resolver o problema da duplicação do cubo, porém antes precisamos saber como dividir o lado de um quadrado em terços. Vejamos.

### 3.3 Dividindo o Lado em $n$ Partes Iguais

Por mais que nossa necessidade seja dividir o lado de nosso quadrado em terços, aproveitaremos tal oportunidade para apresentarmos uma maneira de dividi-lo em  $n$  partes iguais, dessa forma respondendo a uma indagação que fizemos no capítulo 2. O caso  $n = 2^k$  já foi mostrado, bastando dobrar ao meio o papel e repetir esse processo quantas vezes for necessário. Na figura 3.4 um rápido diagrama é mostrado, lembrando que não estamos interessados em construir uma malha, mas sim em dividir o lado em partes iguais.

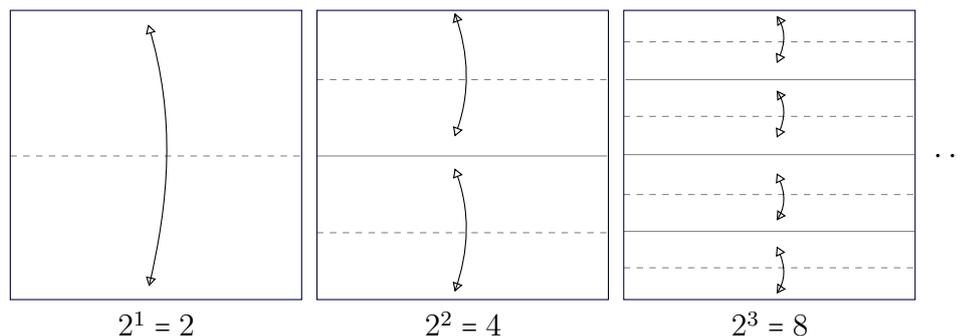


Figura 3.4: Como dividir um papel em  $n = 2^k$  partes iguais.

Doravante, iremos considerar um quadrado de lado  $a$  e mostraremos que dado um segmento  $\frac{a}{n}$  podemos construir com origami um segmento  $\frac{a}{2n-1}$ ; em outras palavras, se o lado do quadrado está inicialmente dividido em  $n$  partes, podemos dividi-lo em  $2n-1$  partes iguais. Particularmente, o caso  $n = 2$  nos dá a divisão em terços procurada. Nosso quadrado terá vértices nas coordenadas  $(0, 0), (0, a), (a, a), P_1 = (a, 0)$  e dado que possuímos o ponto  $P_2 = (\frac{a}{n}, a)$  podemos encontrar o ponto  $(0, \frac{a}{2n-1})$  com o seguinte algoritmo:

1. Dobre o ponto  $P_1$  sobre o ponto  $P_2$ ;
2. Com o papel dobrado, marque o ponto  $P_3$  onde a base intersecta o lado esquerdo;
3. O ponto  $P_3$  é o nosso ponto desejado.

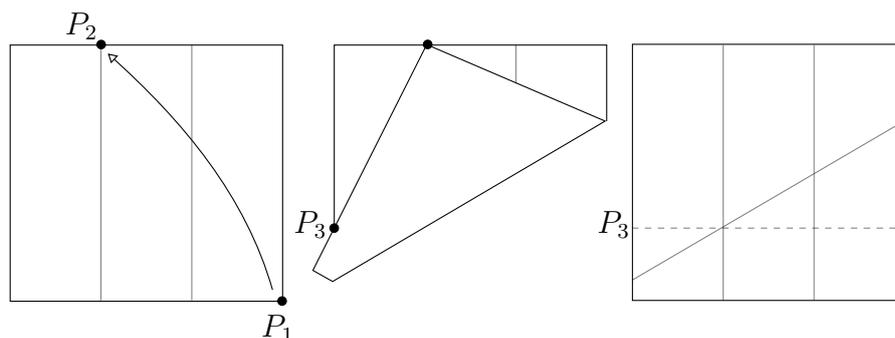


Figura 3.5: Como dividir um papel em partes iguais.

Primeiro iremos encontrar a equação da reta  $r$  que corresponde à dobra feita. Sabemos que o axioma **O.2** foi utilizado no primeiro passo, ou seja, estamos dobrando a mediatriz do segmento  $P_1P_2$ . Utilizando a fórmula que calculamos quando analisamos os axiomas do origami no capítulo 1, encontramos que tal dobra possui a forma

$$y = \left( \frac{n-1}{n} \right) x + \frac{a}{2n^2}.$$

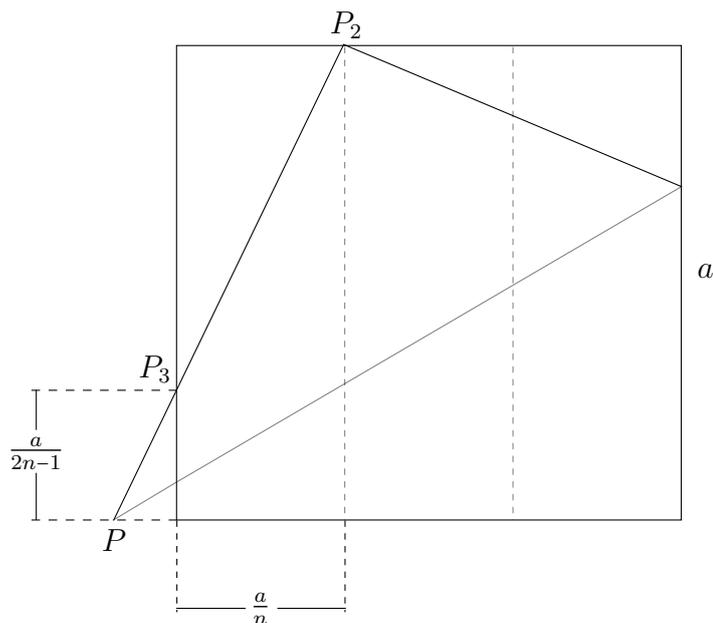


Figura 3.6: Como dividir um papel em partes iguais (continuação).

O ponto  $P$  em que a reta  $r$  intercepta o eixo horizontal é dado por  $P = \left(-\frac{a}{2n(n-1)}, 0\right)$ . Assim, a equação da reta  $r_1$  que passa pelos pontos  $P$  e  $P_2$  é

$$y = \left(\frac{2n(n-1)}{2n-1}\right)x + \frac{a}{2n-1}.$$

Finalmente, resta determinar o ponto de intersecção entre  $r_1$  e o eixo  $y$  para encontrar  $P_3 = \left(0, \frac{a}{2n-1}\right)$ , como havíamos prometido. A tabela abaixo dá uma série de exemplos de divisões que podem ser obtidas com esse método.

$n$	$2n-1$
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
$\vdots$	$\vdots$

Conseguimos exibir, portanto, um algoritmo simples que pode ser utilizado, ao menos teoricamente, para dividir o lado do quadrado em um número não trivial de partes iguais. Após alguma experimentação com o método, o aluno provavelmente indagará se não seria mais conveniente usar uma régua e calculadora ou, conforme já explicado anteriormente, dobrar em potências de 2 e recortar. Em certo sentido, ele está correto. Um exemplo simples é ilustrativo: a fim de dividir em 11 partes iguais o lado do quadrado, teríamos que dividi-lo em 6 partes e para fazer essa divisão teríamos que dividi-lo inicialmente em terços para em seguida dividi-lo ao meio. Todo esse processo produziria uma quantidade muito grande de marcações no papel o que

inviabiliza, na prática, a aplicação do método; além disso há uma questão solenemente ignorada quando tratamos o origami teoricamente, mas de grande importância prática: o erro inerente a cada dobra. Mesmo com muito esforço, sempre cometemos algum erro no processo de dobrar e marcar o papel; tais erros acumulam-se após uma série de passos e podem comprometer consideravelmente o resultado do algoritmo a depender da precisão desejada na divisão.

Para dar uma ideia sobre o que estamos falando, faremos a seguir uma análise numérica do erro obtido na aplicação do nosso algoritmo. Quando dobramos o ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  sobre o ponto  $P_2 = (x_2, y_2)$ , cometemos um erro e o ponto em que dobramos  $P_1$  é, na verdade,  $P'_2 = (x_2 + \epsilon_1, y_2 + \epsilon_2)$  com  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ . Se calcularmos novamente a equação da dobra, vemos uma drástica diferença

$$y = \left( \frac{(n-1)a}{n(a+\epsilon_2)} \right) x + \left( \frac{-\epsilon_1}{a+\epsilon_2} \right) x + \left( \frac{a^2}{2n^2(a+\epsilon_2)} \right) + \left( \frac{\epsilon_1^2 n + \epsilon_2^2 n + 2a\epsilon_1 + 2a\epsilon_2 n}{2n(a+\epsilon_2)} \right).$$

Suponhamos, por exemplo, que nosso quadrado veio de uma folha A4, logo os lados seriam de 21 centímetros e que desejamos dividi-lo em terços, logo  $n = 2$ . Teoricamente a equação da dobra seria

$$y = 0.5x + 2.625.$$

Agora imaginemos que cometemos um erro de meio milímetro, ou seja, nosso ponto de referência é  $P'_2 = \left( \frac{21}{2} + 0.05, 21 + 0.05 \right)$ . Nossa equação se transforma em

$$y = 0.496x + 2.693.$$

Fazendo todos os cálculos novamente, vemos que no lugar de conseguirmos um segmento medindo 7 centímetros, um terço de 21, obtemos um segmento de comprimento 7.135 centímetros, ou seja, mais de um milímetro de erro; leve-se em conta que esse erro se propagará ao utilizarmos a dobra produzida para encontrar as demais até dividir todo o quadrado. Tudo isso sem considerar a espessura do papel e o fato de que, na prática, é muito difícil cortarmos um quadrado perfeito; em outras palavras, só estamos considerando o erro humano e mesmo assim um erro humano muito pequeno. Portanto, estamos diante de um método exato que é extremamente sensível a erros e com isso nos vem a pergunta: será que existe um método que espera de antemão um erro na dobra e que, ao mesmo tempo, seja capaz de diminuí-lo arbitrariamente?

### 3.3.1 O Método de Fujimoto

O método de Fujimoto consiste em um algoritmo que divide uma tira ou um pedaço de papel em um número ímpar de partes iguais. Tal método foi descoberto por Shuzo Fujimoto e independentemente por James Brunton cf. [3] e consiste em aproximações sucessivas com erros cada vez menores. Sem perda de generalidade suporemos que

nossa tira de papel tem comprimento unitário, em outras palavras, as extremidades da tira estão sobre os pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  do eixo horizontal.

No método de Fujimoto uma sequência de dobras é feita na tira de maneira recursiva, ou seja, cada nova dobra sendo determinada pela dobra imediatamente anterior; em cada etapa do processo a dobra atual pode ser localizada como uma fração do papel a partir da margem esquerda ou da margem direita, tanto faz. Vamos ao algoritmo:

1. Escolha o número ímpar  $n$  em que a tira será dividida e faça uma dobra naquilo que lhe parece mais aproximado de  $\frac{1}{n}$  (não é relevante com que precisão você realiza essa dobra);
2. Como  $n$  é ímpar, em um dos lados da dobra realizada no passo anterior haverá um número par de múltiplos de  $\frac{1}{n}$ . Divida esse lado ao meio;
3. Repita o processo usando a dobra obtida no passo anterior como referência; ao fim e ao cabo haverá uma dobra que produz uma aproximação mais acurada de  $\frac{1}{n}$ . O processo pode ser reiniciado para maior precisão.

Em resumo, a cada passo analisamos os lados da última dobra feita e dividimos ao meio o lado que possuir uma quantidade par de múltiplos inteiros de  $\frac{1}{n}$ . Para tornar mais clara a discussão faremos como exemplo o caso  $n = 5$ , conforme ilustrado na figura 3.7. Após realizarmos nossa primeira dobra, localizada em  $\frac{1}{5} \pm \epsilon$  a partir da extremidade esquerda, notamos que do lado direito devemos ter um segmento de comprimento  $1 - (\frac{1}{5} \pm \epsilon) = \frac{4}{5} \pm \epsilon$ . Dividindo esse lado (exatamente!?) ao meio obtemos uma nova dobra, à esquerda desta dobra temos um segmento de medida  $\frac{3}{5} \pm \frac{\epsilon}{2}$ , logo temos que dividir o lado direito novamente. Dividindo o lado direito ao meio obtemos uma nova dobra que possui no seu lado esquerda um segmento de medida  $\frac{4}{5} \pm \frac{\epsilon}{4}$ , logo dividiremos o lado esquerdo. Dividindo mais uma vez à metade encontramos um segmento a partir da extremidade esquerda que mede  $\frac{2}{5} \pm \frac{\epsilon}{8}$ . Por fim, dividindo esse segmento novamente pela metade, obtemos uma dobra que a partir da margem esquerda determina um segmento de comprimento  $\frac{1}{5} \pm \frac{\epsilon}{16}$ , ou seja, conseguimos diminuir o erro inicial em 16 partes. Poderíamos reiniciar o processo para diminuir o erro inicial em  $16 \times 16 = 256$  partes e daí por diante para a precisão desejada.

Não iremos nos aprofundar muito na análise de tal método, mas algo que vale notar um fato interessante: ao dividir em quintos encontramos aproximações para todos os múltiplos de  $\frac{1}{5}$ , ou seja, conseguimos dobras que aproximam  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{4}{5}$ ; dizemos por isso que o número 5 possui uma divisão completa de Fujimoto. Existem vários números que não possuem divisão completa; por exemplo, aplicando o método de Fujimoto para o caso  $n = 7$ , encontramos marcações aproximadas apenas para os segmentos  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{2}{7}$  e  $\frac{4}{7}$ . Se houver interesse do leitor em aprofundar seus conhecimentos nesse assunto, o artigo *Fujimoto, Number Theory, and a New Folding Technique*, por Tamara B. Veenstra, faz

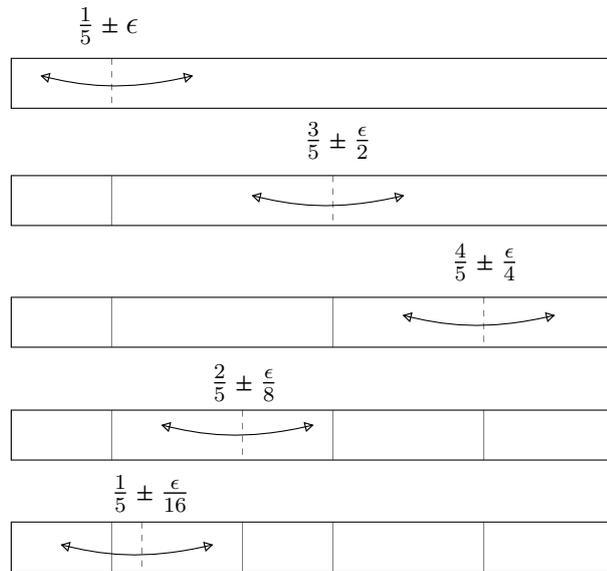


Figura 3.7: Primeira iteração do método de Fujimoto para dividir um papel em 5 partes iguais. Sempre usando a margem esquerda da tira como referência.

uma análise detalhada do método de Fujimoto conectando-o com a teoria dos números. Tal artigo pode ser encontrado no livro [15].

Aprendido como dividir o lado de um quadrado em  $n$  partes iguais usando apenas origami, podemos prosseguir para a resolução do problema de duplicação do cubo.

### 3.4 Duplicação do Cubo

De acordo com relatos de Eratóstenes (176-194 a.C.), para que os habitantes de Delos fossem salvos de uma pestilência que assolava o local o oráculo local profetizou que seria necessário duplicar o altar cúbico do deus Apolo [14]. Assim surgiu o problema da duplicação do cubo que, em sua formulação algébrica, consiste em resolver a equação

$$x^3 - 2 = 0. \tag{3.1}$$

Em outras palavras, queremos construir o número  $\sqrt[3]{2}$ . A seguir daremos uma solução com origami, porém devemos esclarecer antecipadamente que em tal solução nos permitiremos definir a unidade livremente, bem como no caso da equação acima que dá a aresta de um cubo que tem volume 2, o dobro de um cubo unitário.

Tendo esclarecido tais detalhes, considerando que os vértices de um quadrado são dados por  $V_1 = (0, 0)$ ,  $V_2 = (0, a)$ ,  $V_3 = (a, a)$  e  $V_4 = (a, 0)$ , considere o seguinte algoritmo:

1. Divida seu quadrado em terços horizontalmente, produzindo as retas  $y = \frac{a}{3}$  e  $y = \frac{2a}{3}$ ;

2. Utilize o axioma **O.6** para dobrar o ponto  $V_1$  sobre o lado oposto e o ponto  $K = (0, \frac{a}{3})$  sobre a reta  $y = \frac{2a}{3}$ , como mostra a figura 3.8;
3. Marque o ponto onde  $V_1$  é refletido no lado direito, chamemos tal ponto de  $P$ ;
4. Dado que os segmento  $PV_3$  e  $PV_4$  têm medidas  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ .

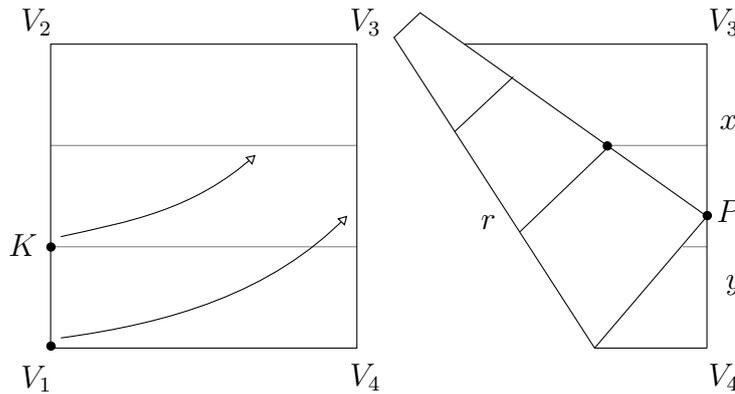


Figura 3.8: Dobrando um papel quadrado para duplicar o cubo.

Demonstremos o afirmado. A figura 3.9 nos mostra que os triângulos de vértice em  $P$  são semelhantes, de onde obtemos imediatamente que

$$\frac{\frac{x+y}{3}}{\frac{2x-y}{3}} = \frac{x+y-z}{z} \quad (3.2)$$

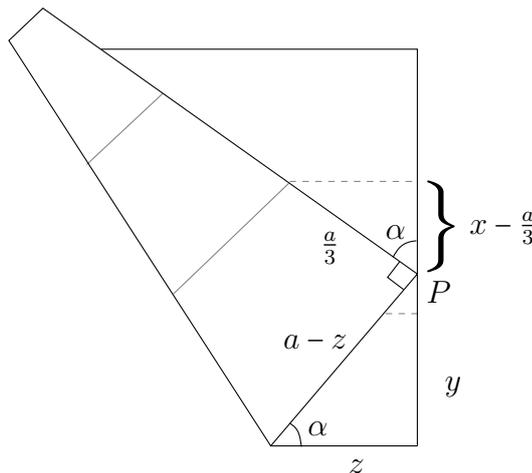


Figura 3.9: Demonstrando a duplicação do cubo com origami.

Lembrando que  $a = x + y$  e usando o teorema de Pitágoras, achamos a relação

$$[(x + y) - z]^2 = z^2 + y^2,$$

isto é,

$$(x + y)^2 - 2(x + y)z + z^2 = z^2 + y^2.$$

Isolando  $z$ , achamos a relação

$$z = \frac{x^2 + 2xy}{2(x + y)}. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.2) temos

$$\frac{\frac{x+y}{3}}{\frac{2x-y}{3}} = \frac{x + y - \frac{x^2+2xy}{2(x+y)}}{\frac{x^2+2xy}{2(x+y)}},$$

ou seja,

$$\frac{x + y}{2x - y} = \frac{2(x + y)^2 - x^2 - 2xy}{x^2 + 2xy},$$

ou seja,

$$(x + y)(x^2 + 2xy) = (x^2 + 2xy + 2y^2)(2x - y),$$

ou seja,

$$x^3 + 2x^2y + x^2y + 2xy^2 = 2x^3 + 4x^2y + 4xy^2 - x^2y - 2xy^2 - 2y^3,$$

ou seja,

$$x^3 + 3x^2y + 2xy^2 = 2x^3 + 3x^2y + 2xy^2 - 2y^3,$$

ou seja,

$$0 = x^3 - 2y^3$$

e finalmente chegamos a

$$\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}.$$

Com isso, se definirmos  $y = 1$ , temos que  $x = \sqrt[3]{2}$ . Porém, caso o leitor já tenha definido uma unidade, podemos usar o algoritmo euclidiano de divisão de segmentos e dividir o segmento  $y\sqrt[3]{2}$  por  $y$  obtendo  $\sqrt[3]{2}$  já no sistema estabelecido. Com isso só nos falta mais uma construção.

## 3.5 Heptágono Regular

No livro IV dos *Elementos*, Euclides mostra como construir polígonos regulares de 3, 4, 5 e 6 lados inscritos em uma circunferência dada. Naturalmente, o próximo passo seria a construção de um heptágono regular inscrito, o que nos leva ao último problema clássico da Antiguidade de nossa lista. Nesse momento esperamos que o leitor já esteja mais familiarizado com origami. A construção que apresentaremos exigirá um nível maior de habilidade em relação à compreensão de diagramas, sendo a mais desafiadora deste trabalho.

Usaremos a teoria de números complexos para melhor analisar o problema de construir um heptágono regular. Para isso, relembremos que as raízes de um polinômio da forma

$$z^7 - 1 = 0 \quad (3.4)$$

são os vértices de um polígono regular de 7 lados inscrito em uma circunferência de raio 1 no plano complexo. Lembrando que podemos escrever um número complexo na forma  $\rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , verifica-se que as raízes de (3.4) são dadas por

$$1, A = e^{\frac{2\pi i}{7}}, A^2 = e^{2\frac{2\pi i}{7}}, A^3 = e^{3\frac{2\pi i}{7}}, A^4 = e^{4\frac{2\pi i}{7}}, A^5 = e^{5\frac{2\pi i}{7}}, \text{ e } A^6 = e^{6\frac{2\pi i}{7}}.$$

A figura 3.10 nos ajuda a visualizar as raízes e como são simétricas. Podemos dividir

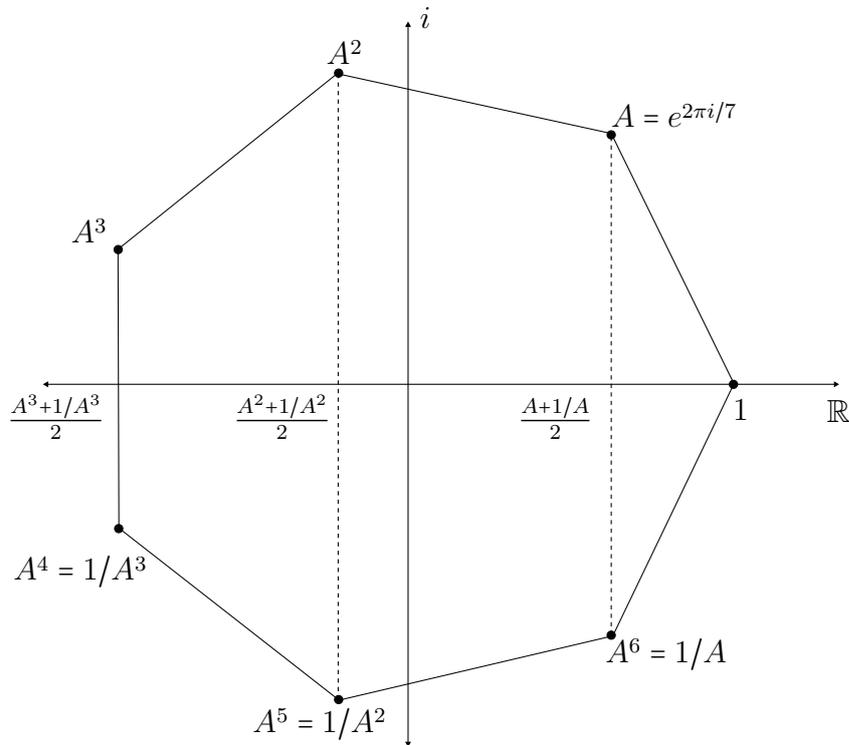


Figura 3.10: As 7 raízes da unidade no plano complexo formam um heptágono regular.

nosso polinômio por  $(z - 1)$ , transformando-o em

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Como sabemos que  $A = e^{\frac{2\pi i}{7}}$  é uma raiz, substituindo na equação de sexto grau que acabamos de encontrar, temos

$$A^6 + A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Encontramos uma equação do sexto grau. Para simplificá-la, precisamos reescrever alguns termos, mais especificamente  $A^6, A^5$  e  $A^4$ , que mostraremos ser equivalentes a

$\frac{1}{A}$ ,  $\frac{1}{A^2}$  e  $\frac{1}{A^3}$ , respectivamente. Isso é fácil de ver pois como  $A$  é raiz de  $z^7 - 1 = 0$ , obtemos

$$A^7 = 1.$$

Assim, se considerarmos  $m + n = 7$ , temos a relação  $A^m \cdot A^n = A^{m+n} = 1$  e daí

$$A^m = \frac{1}{A^n}.$$

Portanto

$$A^6 = \frac{1}{A}, A^5 = \frac{1}{A^2} \text{ e } A^4 = \frac{1}{A^3}.$$

Substituindo tais equivalências na equação (3.5) obtemos

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^3} + A^3 + A^2 + A + 1 = 0.$$

Podemos reescrever tal equação na forma

$$\left(A^3 + \frac{1}{A^3}\right) + \left(A^2 + \frac{1}{A^2}\right) + \left(A + \frac{1}{A}\right) + 1 = 0. \quad (3.6)$$

Agora relembremos o binômio de Newton para  $(A + \frac{1}{A})^3$  e  $(A + \frac{1}{A})^2$ . No primeiro caso, temos

$$\left(A + \frac{1}{A}\right)^3 = A^3 + 3A^2 \frac{1}{A} + 3A \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^3},$$

ou seja,

$$\left(A + \frac{1}{A}\right)^3 = A^3 + 3A + 3\frac{1}{A} + \frac{1}{A^3}.$$

Isolando  $(A^3 + \frac{1}{A^3})$ , temos

$$\left(A^3 + \frac{1}{A^3}\right) = \left(A + \frac{1}{A}\right)^3 - 3\left(A + \frac{1}{A}\right).$$

Repetindo o mesmo raciocínio para  $(A + \frac{1}{A})^2$ , temos

$$\left(A + \frac{1}{A}\right)^2 = A^2 + 2A \frac{1}{A} + \frac{1}{A^2}.$$

Isolando  $(A^2 + \frac{1}{A^2})$ , temos

$$\left(A^2 + \frac{1}{A^2}\right) = \left(A + \frac{1}{A}\right)^2 - 2.$$

Substituindo os resultados que acabamos de descobrir na equação (3.6) chegamos a

$$\left(A + \frac{1}{A}\right)^3 - 3\left(A + \frac{1}{A}\right) + \left(A + \frac{1}{A}\right)^2 - 2 + \left(A + \frac{1}{A}\right) + 1 = 0.$$

Rearranjando a equação, chegamos a

$$\left(A + \frac{1}{A}\right)^3 + \left(A + \frac{1}{A}\right)^2 - 2\left(A + \frac{1}{A}\right) - 1 = 0,$$

logo,  $A + \frac{1}{A}$  é raiz de uma equação cúbica da forma

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

que é exatamente a equação que dissemos ser necessária resolver no capítulo 1. Lembrando que  $\bar{A}$  é o conjugado de  $A$ , analisemos a expressão  $A + \frac{1}{A}$ :

$$A + \frac{1}{A} = A + \frac{1\bar{A}}{A\bar{A}} = A + \bar{A} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

Logo  $2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$  é raiz do nossa equação cúbica; substituindo  $(A^2 + \frac{1}{A^2})$  e  $(A^3 + \frac{1}{A^3})$  na equação, vemos que são raízes, ou seja, achamos que  $2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$  e  $2 \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$  também são raízes da equação, sendo  $2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$  a única raiz positiva. Logo, se acharmos alguma das raízes, conseguiremos construir o ângulo  $\theta = \frac{2\pi}{7}$  e com isso nosso heptágono, bastando para tal copiar algumas vezes o ângulo obtido.

Para construirmos o segmento  $2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ , primeiro considere os pontos  $P_1 = (0, 1)$  e o ponto  $P_2 = (-1, -\frac{1}{2})$ . Utilizando a dobra de Beloch, dobramos  $P_1$  sobre o eixo  $x$  e  $P_2$  sobre o eixo  $y$  como mostra a figura 3.11, dessa forma construindo uma reta  $r$ .

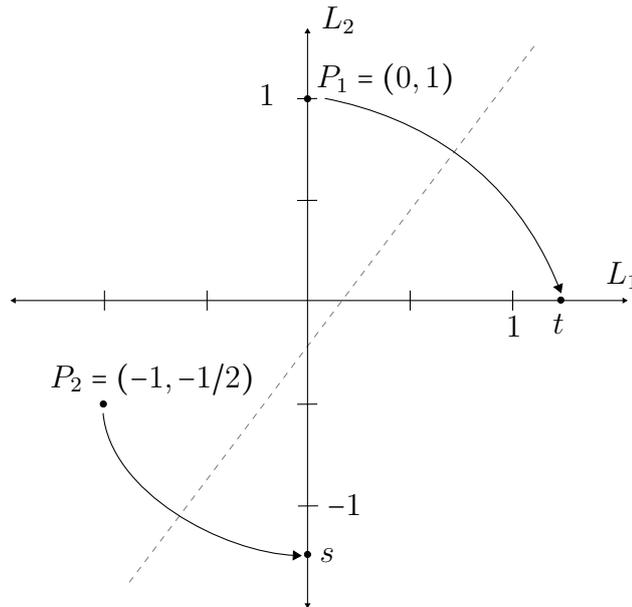


Figura 3.11: Dobrando dois pontos sobre duas retas para construir  $t = 2 \cos(2\pi/7)$ .

Supomos que o ponto  $P_1' = (t, 0)$  seja o ponto em que  $P_1$  é refletido. Utilizando a fórmula que encontramos para a dobra do axioma **O.2**, temos que  $r$  é da forma

$$y = tx + \frac{1 - t^2}{2}.$$

Analogamente, supomos que o ponto  $P_2' = (0, s)$  é o ponto em que  $P_2$  é refletido pela dobra. Utilizando novamente a fórmula do axioma **O.2**, encontramos que  $r$  é da forma

$$y = \left(\frac{-1}{s + \frac{1}{2}}\right)x + \left(\frac{-1 + s^2 - \frac{1}{4}}{2(s + \frac{1}{2})}\right),$$

ou seja,

$$y = \left( \frac{-2}{2s+1} \right) x - \frac{1}{2s+1} + \frac{2s-1}{4}.$$

Como sabemos que as equações que achamos devem ser identicamente iguais, pois definem a mesma reta  $r$ , ou seja, os coeficientes angular e linear respectivos devem ser iguais. Com isso, temos o sistema

$$\begin{cases} \left( \frac{-2}{2s+1} \right) = t, \\ -\frac{1}{2s+1} + \frac{2s-1}{4} = \frac{1-t^2}{2}. \end{cases}$$

Pela primeira igualdade, achamos a seguinte relação para  $s$

$$s = \frac{-(t+2)}{2t}.$$

Substituindo  $s$  na segunda equação pela relação que acabamos de achar, obtemos

$$\frac{t}{2} + \frac{-1-t}{2t} = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}.$$

Multiplicando toda a equação por  $2t$  e rearranjando os termos, obtemos

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0,$$

ou seja,  $t$  é solução da equação que queríamos e como  $t > 0$ , temos que  $t = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ . Com isso podemos construir nosso ângulo  $\frac{2\pi}{7}$ , bastando traçar uma perpendicular ao eixo  $x$  no ponto  $(t, 0)$  e determinar a intersecção desta perpendicular com uma circunferência de raio 2. Com isso teríamos um triângulo retângulo de hipotenusa 2 que tem um ângulo  $\theta$  cujo cateto adjacente é  $t = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ ; isso implica que  $\theta = \frac{2\pi}{7}$ , como desejado.

Abaixo apresentamos um algoritmo para dobrar o heptágono regular. A construção é devida ao matemático canadense Robert Geretschläger [6]. Supomos que o nosso quadrado possui lado medindo 4 unidades e nosso sistema de coordenadas encontra-se posicionado simetricamente em relação a esses lados; supomos ainda que já foi construída uma malha  $2 \times 2$  no papel. Segue o passo a passo ilustrado na figura 3.12:

1. Dobre ao meio a primeira linha e primeira coluna da malha  $2 \times 2$ . Mantenha o papel dobrado;
2. Dobre a base sobre o topo, fazendo uma dobra de marcação no lado esquerdo. Perceba que estamos apenas construindo os pontos  $P_1$  e  $P_2$ ;
3. Faça a dobra de Beloch utilizando os pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Mantenha o papel dobrado;
4. Dobre uma perpendicular à base que passe pelo ponto  $P'_1$ , ou seja, onde o ponto  $P_1$  foi refletido no eixo  $x$ . Chamaremos tal reta de  $L_3$ ;

5. Utilize o axioma **O.5** com os pontos  $O = (0,0)$ ,  $C = (2,0)$  e com a reta  $L_3$ , refletindo  $C$  sobre  $L_3$  no primeiro quadrante. Mantenha o papel dobrado;
6. Dobre uma perpendicular à dobra feita no ultimo passo e que passe por  $C$ . Mantenha o papel dobrado;
7. Dobre o segmento  $OC$  sobre todas as camadas de folha e, em seguida, desdobre tudo; você verá no papel que o ângulo  $\frac{2\pi}{7}$  foi construído. Repita os passos 5-7 na parte de baixo;
8. Até agora construímos os pontos equivalentes às raízes  $A$  e  $A^6$ . Agora é somente uma questão de copiar mais algumas vezes o ângulo bastando seguir o diagrama que acompanha esse passo a passo.

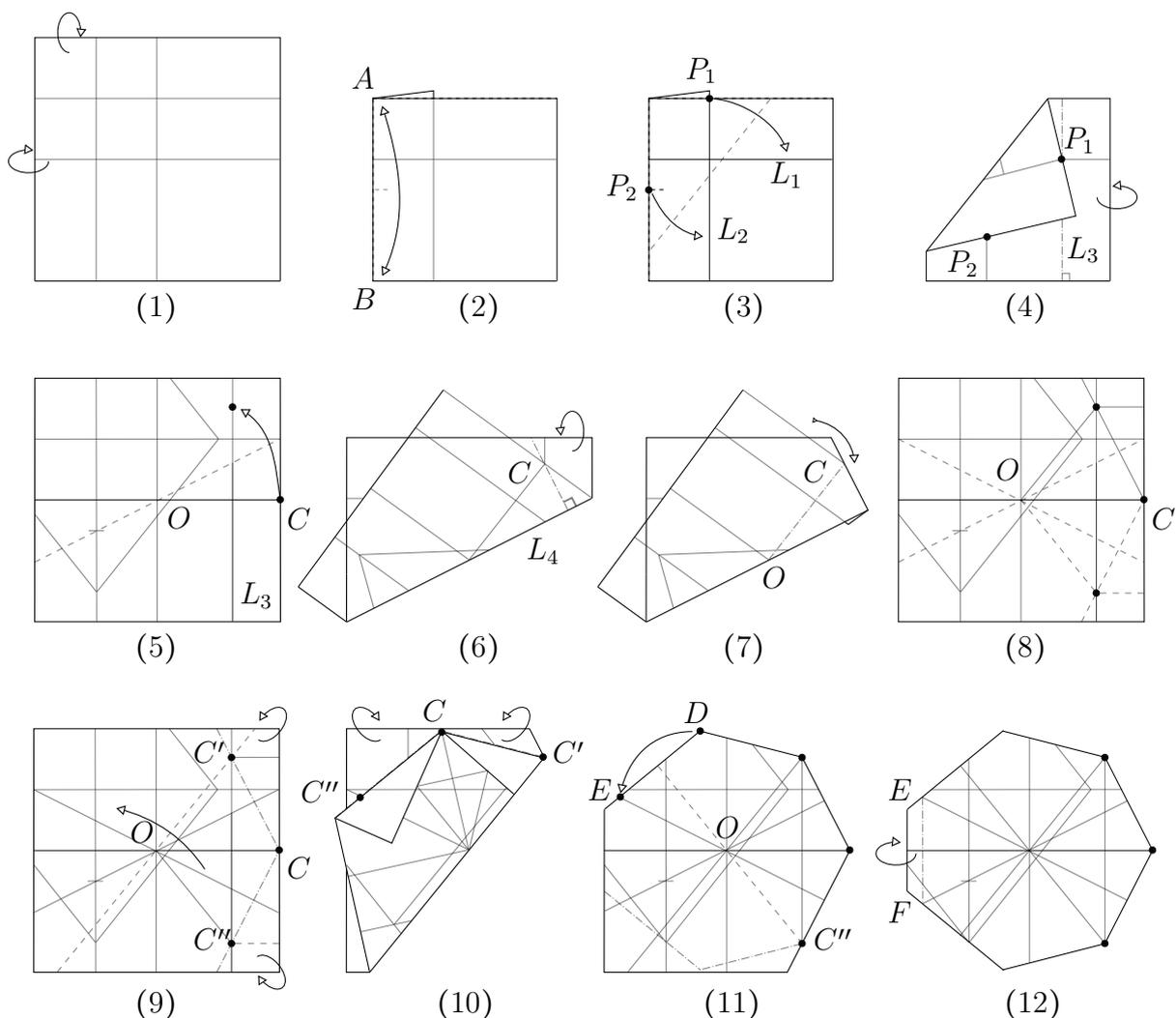


Figura 3.12: Dobrando o heptágono regular a partir de uma folha de papel quadrada.

Portanto, demonstramos como podemos construir um heptágono regular utilizando origami e assim resolvendo o nosso último problema em aberto. Caso haja dificuldade

em dobrar o heptágono, existe outro jeito de consegui-lo. Em [9], Thomas Hull aborda um método para construção de polígonos regulares usando nós com papel, sendo um desses o heptágono. Com isso concluímos nossa apresentação sobre o axioma **O.6** esperando ter mostrado seu poder em relação às construções geométricas. Como explicamos no começo desse trabalho, nosso estudo está focado na matemática das dobras simples e nesse sentido ele foi concluído. Porém, o que apresentamos até agora não passa de uma pequena fração daquilo que hoje desperta o interesse nos apaixonados pelo origami (e matemática!). Para encerrar este trabalho, no capítulo seguinte faremos uma exposição breve sobre as diversas direções em que o origami é atualmente explorado.

## Capítulo 4

# Origami: Presente e Futuro

Neste breve capítulo discorreremos sobre variados tópicos que tocam o origami, desde criações de modelos representativos até ferramentas médicas. Não temos a intenção de aprofundar o assunto, apenas trazer ao conhecimento do leitor o progresso e as diferentes perspectivas sob as quais o origami tem sido estudado nas últimas décadas.

### 4.1 Origami Figurativos

Quando mencionamos origami a maioria absoluta das pessoas jamais pensará em construções de heptágonos e tangentes a parábolas; com maior probabilidade pensará em dobraduras que representam algum objeto ou animal, quase como uma brincadeira de criança ou passatempo. Não devemos estranhar essa postura, pois o estudo aprofundado do origami é algo muito recente assim como as técnicas e algoritmos modernos para criar modelos.

Dobrar um modelo figurativo de origami geralmente envolve duas etapas: (i) dobrar a base do modelo, significando que você fez toda distribuição necessária do papel para obter as abas necessárias ou *flaps*, o que é feito construindo o padrão de vincos ou *crease-pattern* (CP) e (ii) o detalhamento ou *shaping*. Por muito tempo se “descobriam” modelos, ou seja, alguém manipulava o papel até descobrir uma sequência de dobras que julgava interessante; por este motivo os modelos tradicionais, como o grou (*tsuru* ou *crane*), possuem poucas dobras, são fáceis de serem reproduzidos e da base para a forma final precisa-se de muito pouco *shaping*.

Por volta da metade do século XX o origami teve uma grande expansão, muito se devendo pelo mestre origamista japonês Akira Yoshizawa (1911–2005) que, além de criar centenas de novos modelos, muitos desses utilizando mais de uma folha, ajudou a divulgar o origami desenvolvendo um sistema de diagramação eficiente para explicar as dobras – esse último feito teve participação do estadunidense Sam Randlett. À parte a enorme originalidade dos seus modelos, o trabalho de *Yoshizawa* destacava-se dos seus antecessores pelo o uso de uma técnica própria chamada *wet-folding* que envolve

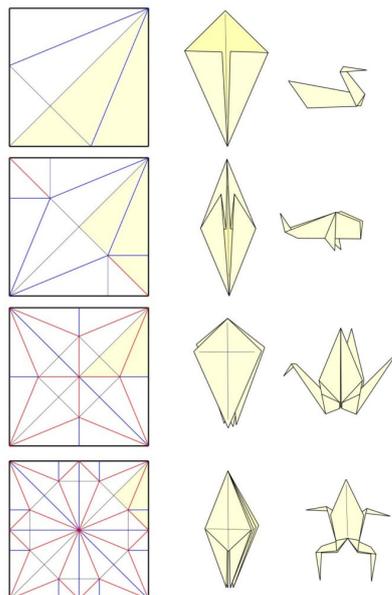


Figura 4.1: Os padrões de vincos, as bases e os modelos finalizados do cisne, peixe, grou e sapo tradicionais

“empenar” o papel de tal maneira a formar curvas; para esse fim, usava um papel de alta gramatura e o umedecia, o que facilitava seu manuseio. Os modelos de Yoshizawa também se diferenciavam pelo fato de exigir uma quantidade maior de *shaping* para chegar as suas formas finais.



Figura 4.2: Akira Yoshizawa e algumas de suas obras

A influência das obras de Yoshizawa pode ser percebida nas obras de grandes origamistas como Eric Joisel, Michael LaFosse, Giang Dinh, Sebastian Limet, Sipho Mabona, Beth Johnson, Hoang Tyen Quyet, Nguyễn Hùng Cường e David Brill, para citar alguns. Tal influência também pode ser percebida no aumento do interesse no desenvolvimento de modelos diferentes, fora das bases tradicionais. Os trabalhos de Andrey Ermakov, Emmanuel Mooser, Fumiaki Kawahata, Jun Maekawa, Jacques Justin, Jonh Montroll, Makoto Yamaguchi, Neal Elias, Robert J. Lang, Toshikazu Kawasaki e Tomoko Fuse, entre outros, ajudaram no entendimento de como o papel se comporta

ao ser dobrado e as propriedades que advém quando analisamos os *crease-patterns* dos modelos, originando assim métodos de *design* como *box-pleating*, *circle-packing* e *poligon-packing*.

Programas para auxiliar no desing de modelos também começaram a surgir, alguns exemplos são:

- \* *Tree-Maker*, feito por Robert Lang e que auxilia na construção de crease pattern baseado no método de *circle packing*;
- \* *Oripa*, *free software* para desenho de *crease pattern* ainda em desenvolvimento por Jun Mitani com auxilio de Hugo Alves Akitaya;
- \* *Origamizer*, em desenvolvimento por Erik Demaine e Tomohiro Tachi, feito para conseguir construir *crease patterns* de poliedros;
- \* *Orimath*, programa, ainda em desenvolvimento, que possui o intuito de ajudar na criação de diagramas;
- \* O sítio *erikdemaine.org*, de Erik Demaine onde, entre várias coisas, pode-se encontrar um simulador que permite a criação de um labirinto para o qual um *crease pattern* é automaticamente criado;
- \* O sítio *origamisimulator.org*, por Amanda Ghassaei, onde se pode ver em tempo real como um dado *crease pattern* é dobrado, assim como se pode fazer *upload* de um *crease pattern* próprio;
- \* O sítio *rabbitear.org*, por Robby Kraft, possui várias ferramentas gráficas que facilitam a visualização de como dobras reagem a mudança do padrão de vincos, assim como um visualizador dos axiomas de Huzita-Hatori.

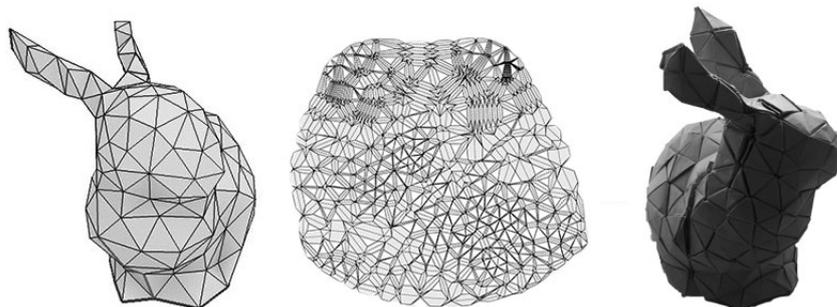


Figura 4.3: Poliedro representando o coelho de Stanford, a *Crease Pattern* construída pelo *Origamizer* e o modelo dobrado por Tomohiro Tachi.

Tais ferramentas matemáticas permitem ao designer criar modelos complexos que provavelmente seriam impossíveis de serem adquiridos por acaso, mostramos na figura 4.4 a interpretação de Robert Lang de um grou e, ao lado, seu complexo crease pattern.



Figura 4.4: Modelo *Flying Crane*, *OPUS 563* e seu *Crease Pattern*, interpretação do grou de Robert Lang.

Caso haja interesse do leitor em aprender mais sobre design de origami, os livros *Origami Design Secrets* por Robert Lang, *Origami: School of Masters* por Andrey Ermakov, a revista *Japan Origami Academic Society Special 2006* ou *JOAS Special 2006* são boas fontes de informação, porém é aconselhável já possuir um bom conhecimento de dobras para entender a maioria dos conceitos. Origamis figurativos não foram os únicos que se beneficiaram com tais estudos, pois veremos na próxima seção como origamis abstratos e geométricos também avançaram nos últimos anos.

## 4.2 Curvas, Torções e Tesselações

Assim como em outras artes, obras abstratas também fazem parte do mundo das dobras e um pioneiro nesse ramo é o origamista *Paul Jackson* com seus origamis de uma dobra que surgiram como resposta a uma pergunta de um aluno. Paul também é o pioneiro no uso de *crumble paper*, que consiste em uma técnica para amassar o papel de tal forma que ele ainda possa ser usado após o processo; tal técnica é bastante explorada pelo grupo francês *Le Crimp* que se destaca por conseguir dobrar formas que ao mesmo tempo são abstratas e orgânicas. Origamistas como David "Gachepapier", Victor Coeurjoly, Eric Gjerde e Eric Vigier, entre outros, se destacam por possuírem obras que exploram o mundo abstrato juntamente com o figurativo, produzindo assim obras únicas.

Formas geométricas abstratas também são investigadas por origamistas como Thomas Hull, Tomoko Fuse, Jorge C. Lucero, Alessandra Lamiot, Alessandro Beber, Chris K. Palmer, Erik Demaine, entre outros. Esses artistas exploram ideias variadas em matemática e física como fractais, polígonos regulares, sólidos platônicos e de revolução, muitas vezes ajudando a entender o assunto que está sendo representado. O heptágono regular que apresentamos nesse trabalho é um exemplo.

Existem certas técnicas especiais em origami que sofreram tanta evolução nos úl-

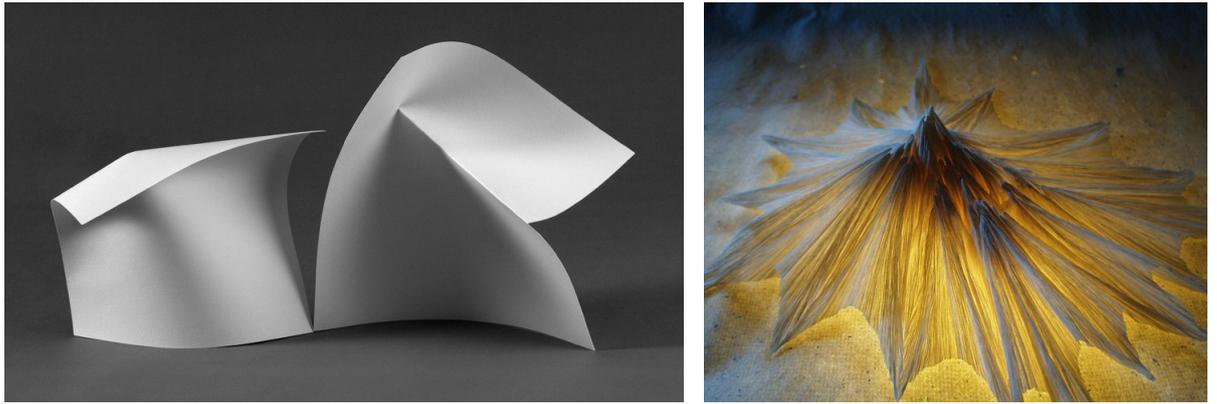


Figura 4.5: Modelos de Paul Jackson e Vincent Floderer, membro do grupo Le Crimp, respectivamente.



Figura 4.6: Modelos de David "Gachepapier" e Victor Coeurjoly, respectivamente.

timos anos a ponto de adquirir status de subárea dentro do universo do origami. Na seqüência falaremos brevemente sobre algumas delas.

#### 4.2.1 Dobras Curvas

Claramente os modelos que já apresentamos possuem uma certa quantidade de curvas, mas não é a isso que nos referimos por dobras curvas ou *curved fold*; referimos-nos a modelos definidos por curvas, ou seja, que são compostos por curvas propriamente ditas. Tais modelos não são diagramáveis, significando que não conseguimos ter um passo-a-passo nos ensinando como fazê-los, isso pelo motivo que devemos fazer as curvas com exatidão. Logo, para dobra-los, devemos imprimir o *crease pattern* e enfraquecer as fibras do papel nas curvas indicadas. O uso de impressora a laser é bastante comum quando lidamos com tais origamis, pois conseguem queimar metade da espessura do papel no padrão que queremos, o uso de papeis mais grossos é recomendado para tais modelos.

Um dos pioneiros em dobras curvas foi o cientista da computação estadunidense David A. Huffman (1925-1999), mais conhecido pelo o algoritmo de Huffman de com-

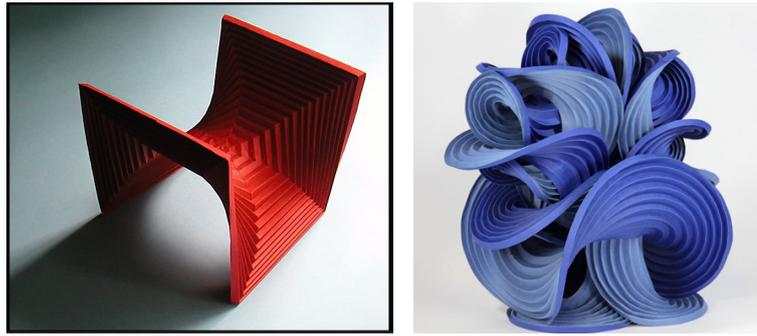


Figura 4.7: Modelos de Thomas Hull e Erick Demaine respectivamente.

pactação de informação, criando modelos de origami baseados em combinações de curvas como circunferências, parábolas, elipses e hipérbolas. No artigo *Curvature and Creases: A Primer on Paper* [8], Huffman apresenta alguns dos resultados que encontrou a respeito das dobras curvas, mas seu falecimento em 1999 deixou-nos sem seu profundo conhecimento sobre o assunto. No artigo *Reconstructing David Huffman's Legacy in Curved-Crease Folding*, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine e Duks Koschitz apresentam um estudo sobre alguns dos trabalhos de Huffman, analisando suas anotações e reproduzindo *crease patterns* de alguns de seus modelos.

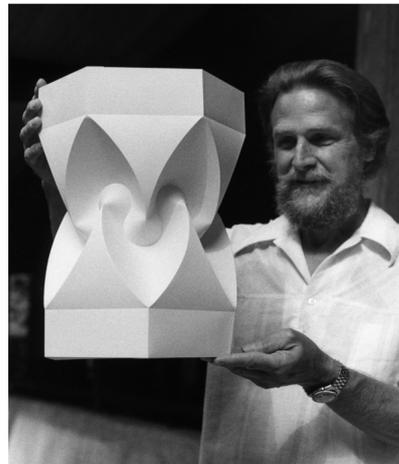


Figura 4.8: Huffman com seu modelo *hexagonal column with cusps*.

*Curved Folds* é uma área de estudo que continua crescendo. Trabalhos de Jun Mitani, Roy T. Iwaki, Robert J. Lang, Ekaterina Lukashova, Philip Chapman-Bell, Tomohiro Tachi, Andrea Russo, Robby Kraft estudam e exploram o que pode ser feito com curvas em origami.

Alguns trabalhos de Rebecca Giesecking, Cheng Chit Leong e Robert Lang são difíceis de classificar; se aproximam de *curved fold*, porém com características próprias muito assemelhadas de modelos figurativos; trata-se de modelos não diagramáveis e, por isso, é necessário imprimir a CP no papel. Apresentamos alguns exemplos na figura



Figura 4.9: No topo, modelos de Jun Mitani e Philip Chapman-Bell respectivamente, abaixo de Ekaterina Lukasheva.

4.10.



Figura 4.10: Modelos de Rebecca Giesecking e Cheng Chit Leong respectivamente.

### 4.2.2 Tesselações

Tesselação deve ser a área mais explorada quando nos referimos a origamis abstratos, havendo vários exemplos de modelos que usam tal técnica, muitos dos quais possuem diagramas. Artistas que exploram essa técnica são Chris Palmer, Robin Scholz, Eric Gjerde, Robert Lang, Alessandro Beber, Ralf Konrad, Ilan Garibi, Dáša Ševe-

rová, para citar alguns. Na figura 4.11 mostramos exemplos de *shadowfold*: tesselações utilizando tecido. Com a mesma ideia de uma tesselação matemática, estes modelos necessitam que o origamista produza uma tesselação no papel antes de começar a dobrar o modelo, o que significa, em geral, recobrir o papel em quadrados ou triângulos equiláteros. Obviamente, tais modelos comumente representam formas geométricas, porém há origamistas que conseguem produzir combinações de quadrados, triângulos, losangos, hexágonos, entre outras formas, para obter modelos figurativos; nesse caso encontramos os trabalhos de Beth Johnson, Joel Cooper e Melina Hermsen. Mostramos exemplos na figura 4.12.



Figura 4.11: A esquerda, Chris Palmer e uma de suas *shadowfolds*, a direita uma fronha com a mesma técnica produzida por Robin Scholz.

Caso o leitor tenha interesse de aprender mais sobre a relação entre o origami e a arte, o documentário *Between the Folds* (que inspira o título deste trabalho), por Vanessa Gould, é uma ótima fonte de informação.

### 4.3 De artérias a placas solares

Esperamos ter ficado claro pelo que vimos até aqui que, atualmente, o origami passou de uma arte meramente recreativa para uma importante e interessante área de pesquisa científica. Com isso, o origami passou a ser utilizado para resolver uma série de problemas práticos. Nessa seção falaremos brevemente sobre esse tema.

Levar placas solares ao espaço foi um dos primeiros desafios da ciência resolvido a partir dos métodos do origami; pelo seu tamanho não é possível simplesmente colocá-las dentro de um foguete e mandá-las para fora da Terra. Para resolver esse problema, o astrofísico japonês Koryo Miura desenvolveu um tipo de dobra, conhecida como *Miura-fold* em homenagem ao seu autor, capaz de diminuir suficientemente o espaço necessário para o transporte das placas solares e que permitisse desdobrá-las facilmente, quase naturalmente, sem quebra-las. A dobra de Miura é um exemplo do que hoje



Figura 4.12: No topo, modelos de Beth Johnson e Joel Cooper respectivamente, abaixo de Melina Hermsen.

convencionou-se chamar de *rigid-fold* porque o modelo só necessita ter flexibilidade nas dobras podendo ser rígido no restante da sua estrutura. A maioria das CPs produzidas pelo *Origamizer* possuem a propriedade de *rigid-fold*; na figura 4.13 mostramos a dobra de Miura sendo utilizada em um sistema acústico e o Coelho de Stanford dobrado com metal.

Nessa área, além de Koryo Miura, podemos citar Robert J. Lang com seu trabalho em *air-bags*, Tomohiro Tachi com seus trabalhos que vão de cadeiras até estruturas em forma de arcos de diversas instituições, a *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) com suas várias pesquisas sobre o uso de origami em viagens espaciais e o *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) que pesquisa robôs utilizando origami e tubos que dobram e desdobram para desentupir artérias. Citamos até aqui apenas algumas pesquisas que atualmente são desenvolvidas nessa área. Na figura 4.14 mostramos algumas dessas aplicações: uma cadeira desdobrável projetada por Tomohiro Tachi e um robô que se auto-dobra, desenvolvido pelo MIT.

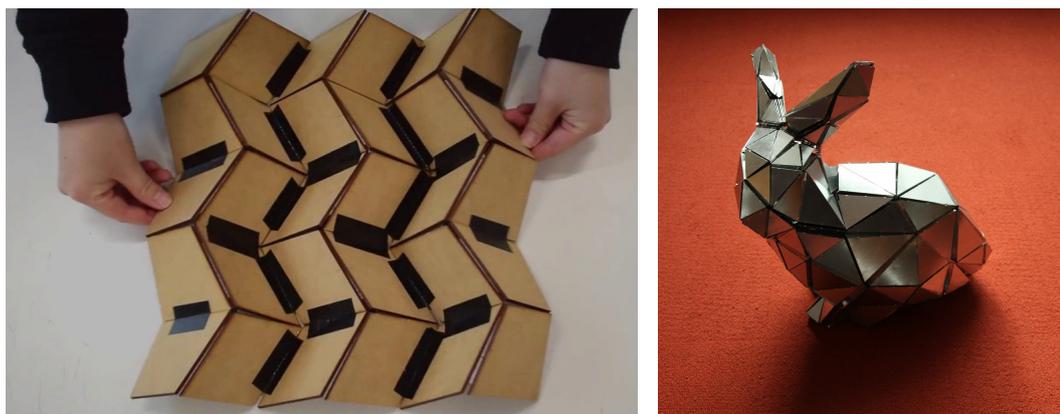


Figura 4.13: A esquerda, sistema acústico desenvolvido por Xuyou Yang, a direita o coelho de Stanford dobrado com metal por Tomohiro Tachi

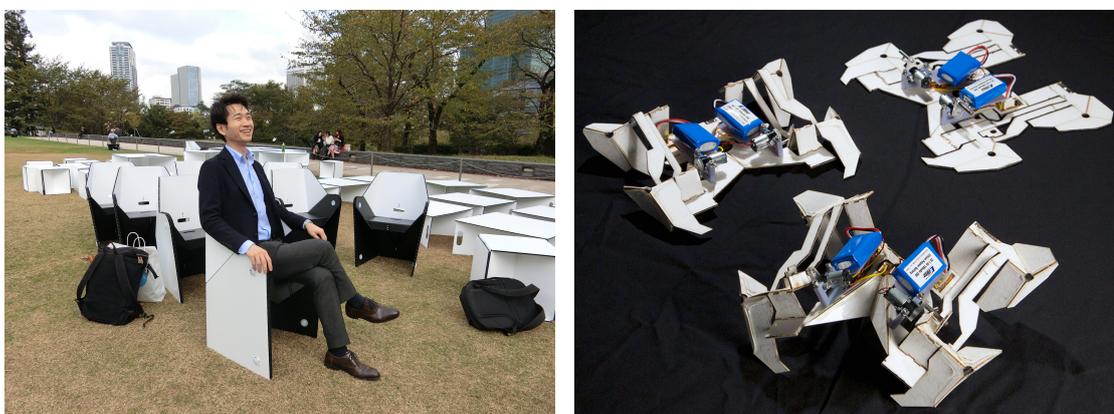


Figura 4.14: Tomohiro Tachi em sua cadeira dobrável e robô auto-dobrável, respectivamente

Uma boa referência para se informar sobre os estudos mais recentes sobre origami são os livros produzidos após cada *International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* ou *OSME*. Por exemplo, se houver interesse do leitor em estudar como dobras poderiam ser feitas em uma esfera ou no plano hiperbólico, artigos de Toshikazu Kawasaki e Roger C. Alperin podem ser encontrados na quinta edição em [13] e [2], respectivamente. O livro mais recente da data deste trabalho é o *Origami<sup>7</sup> Complete Set of 4 Volumes - The proceedings from the seventh meeting of Origami, Science, Mathematics and Education*.

Para encerrar, lembramos ao leitor que nosso trabalho estudou origamis apenas no contexto de dobras simples (*simple folds*); isto significa que a cada passo uma única dobra no papel é permitida. Quando incluímos a possibilidade de utilizar multidobras (*multi-fold*), ou seja, quando permitimos que em um único passo múltiplas dobras sejam produzidas no papel, adquirimos muito mais poder em relação a construções geométricas. Multidobras permitem, por exemplo, a divisão de um ângulo arbitrário

em cinco partes iguais. Aqueles interessados em maiores informações sobre esse assunto podem consultar [1], onde verão que, enquanto possuímos 7 axiomas quando lidamos com *simple-folds*, passando para *multi-fold* a quantidade de axiomas cresce para mais de 200.

Esperamos ter exposto informações suficientes para que o leitor não só tenha aumentado o interesse pelo assunto, mas possa usar alguns dos tópicos tratados nesta dissertação em sala de aula. Aqui finalizamos nosso trabalho com a sensação do dever cumprido e, no entanto, apresentamos apenas uma pequena fração do universo que o origami representa atualmente. Nessa posição certamente cabe aquela bem conhecida expressão: “o que vimos é apenas a ponta do *iceberg*”.

# Referências Bibliográficas

- [1] ALPERIN, R. & LANG, R., *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms*, Origami<sup>4</sup> - Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education , 2006, pp. 371-393.
- [2] ALPERIN, R., *Origami Alignments and Constructions in the Hyperbolic Plane*, Origami<sup>5</sup> - Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education , 2011, pp. 553-573.
- [3] BURTON, J., *Mathematical exercises in paper folding: I*, Mathematics in School, vol. 2, n° 4, julho 1973, pp. 25-26.
- [4] DEMAINE, E. ; O’ROURKE, J., *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra* , Cambridge University Press , janeiro 2017.
- [5] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*, Tradução de Hygino H. Domingues, Editora da UNICAMP, 2004.
- [6] GERETSCHLÄGER, R., *Folding the regular heptagon*, Crux Mathematicorum, Vol. 23, n° 2, março 1997, pp. 81–88.
- [7] GOMES, F., *Construções Geométricas: teoria e aplicações*, Dissertações PROF-MAT, 2017.
- [8] HUFFMAN, D. A., *Curvature and Creases: A Primer on Paper*, IEEE Transactions on Computer, , Vol C-25, n° 10, 1976.
- [9] HULL, T., *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*, CRC Press, 2ª edição, dezembro de 2012.
- [10] HULL, T., *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill*, The American Mathematical Monthly, Vol 118, n° 1, janeiro 2011, pp. 307-315.
- [11] HUZITA, H., *Axiomatic Development of Origami Geometry*, Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Ferrara-Itália, 1989, pp. 143–158.

- [12] JUSTIN, J., *Résolution par le Pliage de l'Equation du Troisième Degré et Applications Géométriques*, L'Ouvert, Vol. 42, 1986, pp. 9-19.
- [13] KAWASAKI, T., *A Note on Operations of Spherical Origami Construction*, Origami<sup>5</sup> - Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education , 2011, pp. 543-551.
- [14] KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, volume 1, Oxford University Press, 1<sup>a</sup> edição, 1990;
- [15] LANG, R., *Origami<sup>4</sup>*, Routledge, 1<sup>a</sup> edição, 2009.
- [16] LANG, R., *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, CRC Press, 2<sup>a</sup> edição, outubro de 2011.
- [17] LANG, R., *Origami and Geometric Constructions*, 2010. Disponível online em [https://www.langorigami.com/wp-content/uploads/2017/09/origami\\_constructions.pdf](https://www.langorigami.com/wp-content/uploads/2017/09/origami_constructions.pdf).
- [18] LUCERO, J., *On the Elementary Single-Fold Operations of Origami: Reflections and Incidence Constraints on the Plane*, Forum Geometricorum, Vol 17, 2017, pp. 207-221.
- [19] MITANI, J., *Curved-Folding Origami Design*, CRC Press, 1<sup>a</sup> edição, março de 2019.
- [20] DE SOUSA, W. F. *A Geometria Analítica como um Modelo para a Geometria Euclidiana*, Dissertações PROFMAT, 2017.
- [21] SMITH, S., *Paper Folding and Conic Sections*, The Mathematics Teacher, Vol 96, n<sup>o</sup> 3, março 2003, pp. 202-207.