

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**DANIEL CARVALHO TAVARES**

**O USO DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS COM ALGUMAS APLICAÇÕES  
REAIS**

**TERESINA**

**2022**

DANIEL CARVALHO TAVARES

O USO DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS COM ALGUMAS APLICAÇÕES  
REAIS

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - da Universidade Estadual do Piauí como requisito para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho

TERESINA

2022

T231u Tavares, Daniel Carvalho.

O uso de coordenadas baricêntricas com algumas aplicações reais / Daniel Carvalho Tavares. - 2022.

83 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Piauí – UESPI,  
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, 2022.

“Área de Concentração: Matemática.”

“Orientador(a): Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho.”

1. Coordenadas baricêntricas. 2. Pontos notáveis do triângulo.  
3. Geometria plana. 4. Geometria – Aplicações. I. Título.

CDD: 516

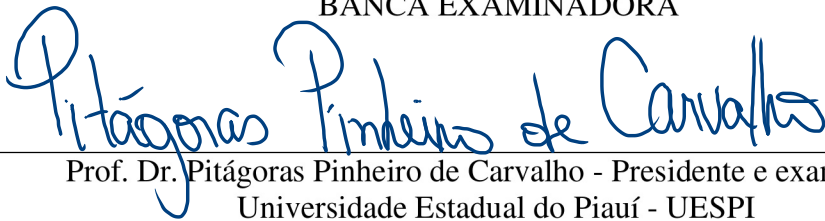
DANIEL CARVALHO TAVARES

O USO DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS COM ALGUMAS APLICAÇÕES  
REAIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do  
PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para obtenção do grau de MESTRE  
em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA  
Aprovado em: 11/04/2022.

BANCA EXAMINADORA



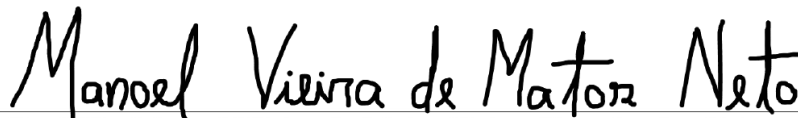
---

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho - Presidente e examinador  
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

*Afonso Norberto da Silva*

---

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador  
Universidade Estadual do Piauí - UESPI



---

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto - Examinador Externo  
Universidade Federal do Piauí - UFPI

TERESINA  
Abril/2022

Dedico este trabalho a Deus, à minha família, que sempre me apoiou e incentivou a minha busca por conhecimento, e aos meus amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, em primeiro lugar, por ter me dado força para conseguir realizar esse sonho.

Aos meus pais, Ulpiano José Tavares Gomes e Maria do Carmo Mendonça de Carvalho Tavares, por me incentivarem e apoiarem em todos os momentos, destacando sempre que possível sobre a importância dos estudos no desenvolvimento pessoal e profissional nas nossas vidas.

Aos meus irmãos, Helano Carvalho Tavares, Samuel Carvalho Tavares e Delano Carvalho Tavares, por sempre se preocuparem e se disporem em ajudar no que fosse preciso no decorrer do curso.

A todos os meus amigos do Mestrado Profissional/PROFMAT/UESPI, destacando: Whanderson Bruno Barbosa Madeira, Pedro Silas Lima Maciel, Samuel de Sousa Silva, José Lopes da Silva Moura e José Carlos Pereira da Costa, pelas incontáveis horas de reuniões de estudos.

Aos professores, Dr. Arnaldo Brito, Dr. Afonso Norberto, Dr. Pedro Júnior, Dra. Valdirene Gomes de Sousa e Dr. Neuton Alves de Araújo, por compartilharem seus conhecimentos.

Ao Professor Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho, meu orientador, pela disponibilidade e paciência, me incentivando e ajudando no desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

## RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo mostrar a utilização de coordenadas baricêntricas na resolução de problemas de geometria plana e suas aplicações em uma sociedade moderna, sociedade esta que aponta cada vez mais a necessidade de apresentar novos meios de solucionar situações problemas que aparecem no dia a dia. Neste trabalho, será desenvolvida a definição de coordenadas baricêntricas e algumas de suas propriedades, com destaque no estudo da geometria do triângulo. Demonstrar-se-á as coordenadas baricêntricas de alguns dos principais pontos notáveis do triângulo estudados na educação básica, a equação de retas através destas coordenadas, bem como a demonstração de paralelismo e perpendicularidade entre retas com a prefação de um novo conceito através da introdução de ponto no infinito, e também haverá a demonstração da intersecção de duas retas e a forma de se calcular a distância entre dois pontos utilizando essas coordenadas. Depois será falado acerca da utilização de coordenadas baricêntricas na resolução de alguns problemas de geometria e suas aplicações na sociedade. Por fim, discutiremos sobre a possibilidade de inserir esse conteúdo no ensino básico, bem como a possibilidade de seu aprofundamento na área computacional.

**Palavras-chave:** Coordenadas Baricêntricas. Pontos Notáveis do triângulo. Resolução de problemas de geometria plana. Aplicações.

## ABSTRACT

The present dissertation aims to show the use of barycentric coordinates in solving plane geometry problems and their applications in a modern society, a society that increasingly presents the need to present new ways to solve problem situations that appear in everyday life. In this work, we will develop the definition of barycentric coordinates and some of their properties, with emphasis on the study of triangle geometry. The barycentric coordinates of some of the main notable points of the triangle studied in basic education will be demonstrated, the equation of lines through these coordinates, as well as the demonstration of parallelism and perpendicularity between lines with the preface of a new concept through the introduction of point at infinity, and there will also be a demonstration of the intersection of two lines and how to calculate the distance between two points using these coordinates. Then we will talk about the use of barycentric coordinates in solving some geometry problems and their applications in society. Finally, we will discuss the possibility of inserting this content in basic education, as well as the possibility of deepening it in the computational area.

**Keywords:** Barycentric coordinates. Notable points of the triangle. Analytic Geometry. Plane geometry problem solving. Applications.



## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1. Baricentro do triângulo $\Delta ABC$ .....                                     | 15 |
| Figura 2. Coordenadas de pontos no plano cartesiano .....                                | 16 |
| Figura 3. Área com sinal em sentido horário.....   | 17 |
| Figura 4. Área com sinal em sentido anti-horário .....                                   | 17 |
| Figura 5. Triângulo com um ponto $P$ interno .....                                       | 18 |
| Figura 6. Triângulo com um ponto $P$ externo .....                                       | 18 |
| Figura 7. Relação entre área com sinal e medida de suas bases .....                      | 20 |
| Figura 8. Teorema do co-lado.....  | 21 |
| Figura 9. Corolário 1 .....  | 22 |
| Figura 10. Ponto médio .....   | 23 |
| Figura 11. Baricentro $G$ do triângulo $\Delta ABC$ .....                                | 24 |
| Figura 12. Área dos subtriângulos formados pelo baricentro.....                          | 24 |
| Figura 13 Incentro $I$ do triângulo $\Delta ABC$ .....                                   | 25 |
| Figura 14. Ex-incentro do triângulo $\Delta ABC$ .....                                   | 26 |
| Figura 15: Circuncentro.....   | 27 |
| Figura 16. Traços dos segmentos $AX$ , $BY$ e $CZ$ .....                                 | 29 |
| Figura 17. Relação de área com sinal do $\Delta ABC$ com os pontos $P$ , $X$ e $Q$ ..... | 38 |
| Figura 18. $X$ , $Y$ e $Z$ os traços do ponto $P$ .....                                  | 40 |
| Figura 19. Teorema de Ceva .....   | 42 |
| Figura 20. Coordenadas dos traços $X$ , $Y$ e $Z$ e do ponto de interseção $P$ .....     | 42 |
| Figura 21. Ortocentro do triângulo $\Delta ABC$ .....                                    | 44 |
| Figura 22. Medida dos segmentos formados pelos traços $X$ , $Y$ e $Z$ .....              | 45 |
| Figura 23. Ponto de Gergonne e do incentro do $\Delta ABC$ .....                         | 46 |
| Figura 24. Pontos de tangencia do $\Delta ABC$ com a circunferência inscrita .....       | 47 |
| Figura 25. Ponto de Gergonne.....  | 47 |
| Figura 26. Circunferências ex-inscritas do triângulo $\Delta ABC$ .....                  | 48 |
| Figura 27. Pontos de tangência das circunferências ex-inscritas.....                     | 49 |
| Figura 28. Ponto de Nagel.....   | 50 |
| Figura 29. Centro de Spieker.....  | 51 |
| Figura 30. Retas perpendiculares.....  | 61 |
| Figura 31. Distância entre os pontos $P$ e $Q$ .....                                     | 64 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 32. Problema 1 .....   | 67 |
| Figura 33. Problema 2 .....   | 70 |
| Figura 34. Problema 3 .....   | 73 |
| Figura 35. Circuncentro $O$ como ortocentro do triângulo medial .....   | 76 |
| Figura 36. $H, N_c, G$ e $O$ são colineares com $\overline{HN_c} : \overline{N_cG} : \overline{GO} = 3 : 1 : 2$ ..... | 77 |
| Figura 37. Geração de malhas em estruturas vasculares .....   | 79 |
| Figura 38. Aorta em malha triangular .....  | 80 |
| Figura 39. Modelos 3D construídas com MeshLab.....  | 81 |
| Figura 40. Suavizando a malha de controle de um modelo 3D.....  | 81 |
| Figura 41. Peça construída com gerador tridimensional de malha Gmsh .....   | 82 |
| Figura 42. Modelo envolvido por um poliedro de controle.....  | 82 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|                 |  |
|-----------------|--|
| $\Delta ABC$    | Triângulo cujos vértices são os pontos $A$ , $B$ e $C$   |
| $\nabla ABC$    | Área euclidiana do triângulo $\Delta ABC$  |
| $S_{ABC}$       | Área com sinal do triângulo $\Delta ABC$   |
| $\hat{A}$       | Ângulo relativo ao vértice $A$   |
| $ AB $          | Comprimento do segmento de reta $AB$   |
| $\overline{AB}$ | Medida com sinal de um segmento orientado $\overline{AB}$ , sendo $\overline{AB} = + AB $ se $\overline{AB}$ tem a mesma orientação da reta e $\overline{AB} = - AB $ se tem orientação contrária a reta |
| $s(P)$          | Soma das coordenadas baricêntricas do ponto $P$  |
| *               | $\begin{vmatrix} -(pS_B - rc^2) & rS_A \\ qS_A & (qb^2 - pS_C) \end{vmatrix}$  |
| **              | $(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)$  |
| ***             | $(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)$  |

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| <b>1 INTRODUÇÃO</b> .....   | 13 |
| <b>2 COORDENADAS BARICÊNTRICAS</b> .....  | 15 |
| 2.1 Áreas com sinal e sua relação com coordenadas baricêntricas .....                     | 17 |
| 2.2 Teorema do co-lado.....   | 20 |
| 2.3 Coordenadas baricêntricas dos vértices e pontos médios de um triângulo .....          | 22 |
| 2.4 Coordenadas baricêntricas do baricentro, incentro, ex-incentro e circuncentro .....   | 23 |
| 2.5 Soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro .....                              | 28 |
| 2.6 Coordenadas baricêntricas de pontos sobre os lados do triângulo de referência .....   | 29 |
| 2.7 Área com sinal do triângulo a partir das coordenadas baricêntricas dos vértices ..... | 30 |
| 2.8 Coordenadas baricêntricas homogêneas e exatas.....                                    | 32 |
| 2.9 Ponto no infinito.....  | 35 |
| 2.10 Pontos com coordenadas baricêntricas balanceadas .....                               | 36 |
| 2.11 Operações com coordenadas baricêntricas.....   | 36 |
| 2.12 Coordenadas baricêntricas de pontos divisores.....                                   | 37 |
| 2.13 Coordenadas baricêntricas e cevianas .....   | 40 |
| 2.14 Coordenadas baricêntricas do ortocentro .....  | 43 |
| 2.15 Coordenadas baricêntricas do Ponto de Gergonne.....                                  | 46 |
| 2.16 Coordenadas baricêntricas do Ponto de Nagel.....                                     | 48 |
| 2.17 Coordenadas baricêntricas do centro de Spieker .....                                 | 50 |
| <b>3 EQUAÇÕES DE RETA EM COORDENADAS BARICÊNTRICAS</b> .....                              | 53 |
| 3.1 Notação de Conway .....   | 53 |
| 3.2 Equações de reta em coordenadas baricêntricas .....                                   | 55 |
| 3.3 Ponto no infinito de uma reta .....   | 57 |
| 3.4 Retas paralelas em coordenadas baricêntricas .....                                    | 58 |
| 3.5 Interseção de duas retas.....   | 59 |
| 3.6 Retas perpendiculares em coordenadas baricêntricas .....                              | 60 |
| 3.7 Distância entre dois pontos em coordenadas baricêntricas .....                        | 63 |
| <b>4 PROBLEMAS</b> .....  | 67 |
| <b>5 APLICAÇÕES</b> .....   | 78 |
| <b>6 CONCLUSÃO</b> .....  | 83 |
| <b>REFERÊNCIAS</b> .....  | 84 |

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria tem grande importância histórica tanto para a matemática como para a sociedade em geral. Com o avanço da sociedade moderna, percebe-se cada vez mais a necessidade constante de se aprofundar no saber matemático, pois a cada dia situações complexas surgem, principalmente envolvendo problemas na área científica e da tecnologia. Diante disso, associado com o grande apreço do pesquisador nessa área de conhecimento da matemática, viu-se a necessidade de seu trabalho, ser voltado no estudo da geometria de forma a contribuir no seu aprofundamento.

A geometria do triângulo vai muito além daquilo que se costuma ensinar na Educação Básica, onde são ensinadas algumas propriedades que são independentes do formato do triângulo, como as três medianas de um triângulo que sempre se intersectam em um ponto, denominado de baricentro do triângulo, ou como o incentro (interseção das bissetrizes), o circuncentro (interseção das mediatrizes) e o ortocentro (interseção das alturas). Tais pontos são conhecidos desde a Grécia Antiga, e são chamados de pontos notáveis, vários outros pontos com propriedades especiais foram identificados.

Atualmente, o pesquisador Clark Kimberling, professor de matemática na Universidade de Evansville dos Estados Unidos, catalogou 46 938 centros de triângulos em sua obra *Encyclopedia of Triangle Centers* (ETC), uma lista online que mantém milhares de pontos ou "centros" associados com a geometria de um triângulo. Nesta enciclopédia, cada ponto especial é descrito através de suas coordenadas baricêntricas. Este tipo de coordenada foi apresentado pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius em 1827, no seu livro *Der bary centrische Calkul*, que em tradução livre se chama "O cálculo dos centros de gravidade", para tratar de propriedades projetivas e afins de figuras bidimensionais e tridimensionais, definindo uma forma de representar um ponto no espaço em função de outros pontos, chamados de pontos de controle.

Coordenadas Baricêntricas estão intimamente ligadas ao conceito de área e podem ser consideradas como um tipo especial de geometria analítica, pois ela possibilita resolver alguns problemas em geometria através do seu emprego.

Neste trabalho, será feita a apresentação do conceito e das principais propriedades de coordenadas baricêntricas, dando destaque no estudo de alguns dos pontos notáveis do triângulo, como também a representação de retas utilizando coordenadas baricêntricas. Tentaremos mostrar a utilização dessas coordenadas na resolução de problemas envolvendo

geometria plana, principalmente envolvendo área e pontos notáveis do triângulo, e sua aplicabilidade na sociedade moderna.

Para melhor situarmos o leitor, este trabalho se apresenta estruturado em cinco seções.

A primeira seção, já apresentada, faz uma breve apresentação do objeto de estudo do pesquisador, bem como o propósito desse estudo.

Na segunda seção tem-se a fundamentação teórica, onde mostraremos a relação de coordenadas baricêntricas com áreas com sinal, com os vértices e pontos médio do triângulo, com pontos divisores e cevianas, e também veremos sua relação com alguns pontos notáveis do triângulo como baricentro, incentro, circuncentro, ortocentro, ex-incentros, ponto de Nagel, ponto de Gergonne e centro de Spieker.

Na terceira seção há a representação da equação da reta em coordenadas baricêntricas, bem como o paralelismo, perpendicularismo e a intersecção de retas nestas coordenadas. Também mostraremos a forma de se calcular a distância entre dois pontos utilizando coordenadas baricêntricas.

Na quarta seção possui-se a resolução de alguns problemas, aplicando o que foi visto nas seções anteriores.

Na quinta seção será possível perceber outras aplicações de coordenadas baricêntricas na sociedade moderna, bem como sua relevância em áreas como a computacional, a industrial e na área da saúde.

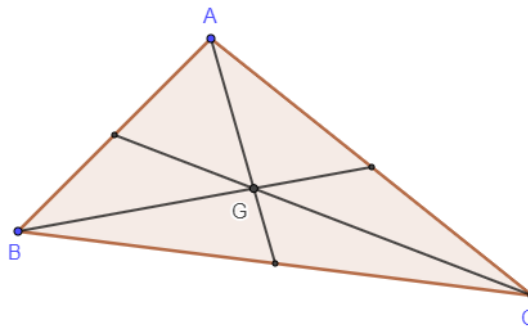
## 2 COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Nesta seção será mostrada a definição de coordenadas baricêntricas, a área com sinal de triângulo e relacionaremos as coordenadas baricêntricas com as áreas dos subtriângulos formados a partir de um ponto qualquer no plano ligado aos vértices dos triângulos de referência. Também haverá demonstração dos pontos notáveis do triângulo: baricentro, incentro, circuncentro, ortocentro, ex-incentros, ponto de Nagel, ponto de Gergonne e centro de Spieker, em coordenadas baricêntricas.

Antes de iniciarmos as informações relativas ao trabalho, lembremos da definição de baricentro.

**Definição 1.** Dado um triângulo, o baricentro é o ponto de encontro dos segmentos formado pelo vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Figura 1 - Baricentro do triângulo  $\Delta ABC$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

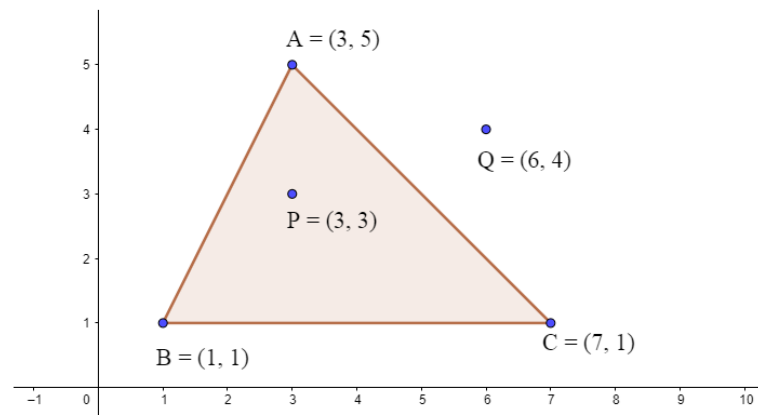
**Definição 2.** Coordenadas Baricêntricas: *seja  $\Delta ABC$  um triângulo de referência e  $P$  um ponto qualquer no plano. Expressamos  $u$ ,  $v$  e  $w$  como as coordenadas baricêntricas de  $P$  em relação ao triângulo  $\Delta ABC$  se o ponto  $P$  pode ser obtido como média ponderada dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com pesos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , respectivamente. Assim, temos:*

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}.$$

Deste modo, o ponto  $P$  pode ser representado pela notação  $P = (u:v:w)$ .

Observe a figura abaixo, onde nela temos a representação dos vértices do triângulo  $\Delta ABC$  e dos pontos  $P$  e  $Q$  no plano cartesiano.

Figura 2 - Coordenadas de pontos no plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Temos que a média ponderada  $M_P$  dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com pesos 6, 4 e 2 é dada por

$$M_P = \frac{6A + 4B + 2C}{6 + 4 + 2} = \frac{6(3,5) + 4(1,1) + 2(7,1)}{12} = \frac{(36,36)}{12} = (3,3) = P.$$

Isso nos permite associar o ponto  $P$ , tomando o triângulo  $\Delta ABC$  como referência, ao terno ordenado de números reais formados pelos pesos 6, 4 e 2. Esta associação será explicitada por  $P = (6 : 4 : 2)$ . Do mesmo modo, temos:

$$Q = (6,4) = \frac{9(3,5) - 4(1,1) + 7(7,1)}{12} = \frac{9A - 4B + 7C}{9 - 4 + 7}.$$

Logo, o ponto  $Q$  é média ponderada de  $A$ ,  $B$  e  $C$  com peso 9,  $-4$  e 7 o que nos permite, tomando o triângulo  $\Delta ABC$  como referência, escrever  $Q = (9 : -4 : 7)$ . Dessa forma, temos que dado um ponto qualquer no mesmo plano de um triângulo de referência  $\Delta ABC$ , esse ponto pode ser representado pela média ponderada dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  desse triângulo com pesos  $u$ ,  $v$  e  $w$  que são as coordenadas baricêntricas desse ponto.

A representação de um dado ponto  $P$  poderá ser feita por mais de uma tripla ordenada de coordenadas baricêntricas. Se as coordenadas baricêntricas forem multiplicadas por qualquer número diferente de zero, o ponto não muda.

Observe que, se  $P = (u:v:w)$  e  $R = (ku:kv:kw)$ , com  $k \neq 0$ , então  $P = R$ . De fato:

$$R = \frac{kuA + kvB + kwC}{ku + kv + kw} = \frac{k \cdot (uA + vB + wC)}{k \cdot (u + v + w)} = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} = P.$$

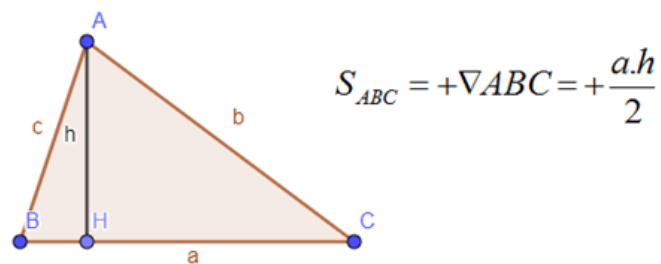
Logo  $P = R$ .



## 2.1 Áreas com sinal e sua relação com coordenadas baricêntricas

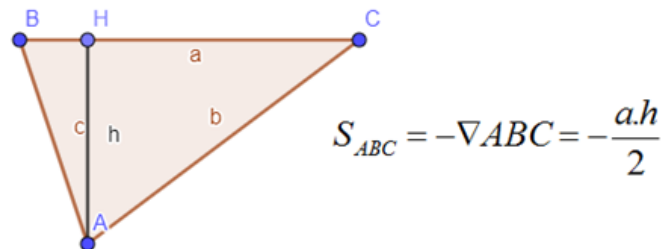
**Definição 3.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos do plano. Definimos a área com sinal  $S_{ABC}$  como sendo  $S_{ABC} = 0$ , se  $A$ ,  $B$  e  $C$  forem colineares,  $S_{ABC} = +\nabla ABC$ , se  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão dispostas no sentido anti-horário,  $S_{ABC} = -\nabla ABC$ , se  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão dispostas no sentido horário, onde  $\nabla ABC$  representa a área convencional (euclidiana) de um triângulo  $\Delta ABC$ .

Figura 3 - Área com sinal em sentido anti-horário



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Figura 4 - Área com sinal em sentido horário



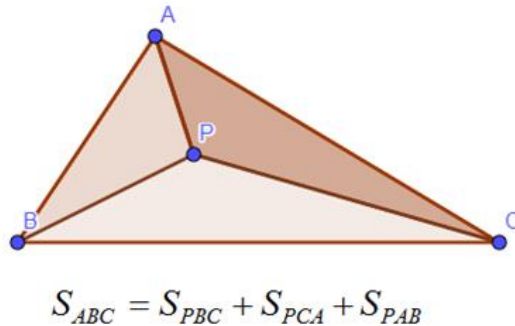
Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Propriedades da área com sinal do triângulo:

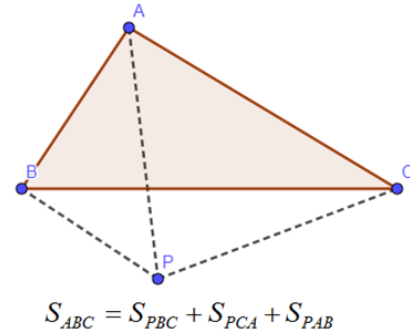
- (1) (Propriedade da permutação) Segue-se da definição que

$$S_{ABC} = S_{BCA} = S_{CAB} = -S_{ACB} = -S_{CBA} = -S_{BAC}.$$

- (2) (Propriedade da decomposição) Seja um triângulo, um ponto  $P$  qualquer no plano do triângulo, com a noção de áreas com sinal, determinará outros três subtriângulos  $\Delta PBC$ ,  $\Delta PCA$  e  $\Delta PAB$  que satisfazem a relação  $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ .

Figura 5 - Triângulo com um ponto  $P$  interno

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Figura 6 - Triângulo com um ponto  $P$  externo

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Observa-se na figura 5, sendo o ponto  $P$  pertencente ao interior do triângulo  $\Delta ABC$ , também valeria a relação  $\nabla ABC = \nabla PBC + \nabla PCA + \nabla PAB$ , onde as áreas desses subtriângulos são todas positivas. Veremos que sendo  $P$  um ponto no plano com coordenadas baricêntricas  $(u:v:w)$  em relação a um triângulo de referência  $\Delta ABC$ , então temos que  $(u:v:w) = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$ . Isso irá nos garantir que  $P$  pertence ao interior do triângulo se, e somente se, as coordenadas baricêntricas de  $P$  forem todas positivas ou todas negativas.

Observe também que na figura 6 a igualdade é verdadeira, obedecendo ao conceito de área com sinal, temos que  $\nabla ABC = -\nabla PBC + \nabla PCA + \nabla PAB$ .

As coordenadas baricêntricas estão fortemente ligadas ao conceito de área com sinal, algo que pode ser observado na demonstração da Proposição 1, onde veremos que as coordenadas baricêntricas são proporcionais às áreas formadas pelos os subtriângulos formados por um ponto qualquer no plano.

**Proposição 1.** *Seja  $\Delta ABC$  um triângulo de referência de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  e seja  $P$  um ponto qualquer do plano. As coordenadas baricêntricas do ponto  $P$  podem ser dadas por*

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}) .$$

*Demonstração.* Sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo  $\Delta ABC$  e  $P = (x_P, y_P)$  um ponto qualquer do plano. Sabemos que

$$\begin{vmatrix} x_P & x_P & y_P & 1 \\ x_A & x_A & y_A & 1 \\ x_B & x_B & y_B & 1 \\ x_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pois a primeira coluna é igual à segunda. Desenvolvendo o determinante pela primeira coluna, temos:

$$x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_C \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_B \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} - x_C \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que implica que

$$x_P(2 \cdot S_{ABC}) - x_A(2 \cdot S_{PBC}) - x_B(2 \cdot S_{PCA}) - x_C(2 \cdot S_{PAB}) = 0.$$

Logo temos

$$S_{ABC} \cdot x_P = S_{PBC} \cdot x_A + S_{PCA} \cdot x_B + S_{PAB} \cdot x_C.$$

Analogamente, temos

$$\begin{vmatrix} y_P & x_P & y_P & 1 \\ y_A & x_A & y_A & 1 \\ y_B & x_B & y_B & 1 \\ y_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que nos garante

$$S_{ABC} \cdot y_P = S_{PBC} \cdot y_A + S_{PCA} \cdot y_B + S_{PAB} \cdot y_C.$$

Dessas duas relações, temos que

$$S_{ABC} \cdot P = S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C.$$

Pela propriedade da decomposição da área com sinal do triângulo ( $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ ), podemos concluir que

$$P = \frac{S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C}{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}}.$$

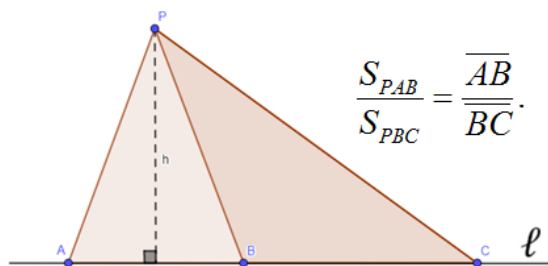
Dessa forma, temos que  $P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$ . Isso nos mostra que as coordenadas baricêntricas de um ponto são proporcionais às áreas com sinal dos subtriângulos formados pelo ponto  $P$  com os vértices do triângulo de referência  $\Delta ABC$ . Assim, para  $P = (u : v : w)$ , então

$$(u : v : w) = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}).$$

## 2.2 Teorema do co-lado

**Proposição 2.** *Triângulos com alturas iguais têm áreas com sinal proporcional às medidas com sinal de suas bases.*

Figura 7 - Relação entre área com sinal e a medida de suas bases



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração:* Considere o caso particular da Figura 7, com  $B$  entre  $A$  e  $C$  e os triângulos  $\Delta PAB$  e  $\Delta PBC$  orientados no sentido anti-horário. Tomando  $|AB|$  e  $|BC|$  como bases, os triângulos  $\Delta PAB$  e  $\Delta PBC$  têm a mesma altura  $h$ . Logo,

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\nabla PAB}{\nabla PBC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Os demais casos ( $A$  entre  $B$  e  $C$ ,  $C$  entre  $A$  e  $B$ , os triângulos orientados no sentido horário ou no sentido anti-horário) são tratados analogamente.

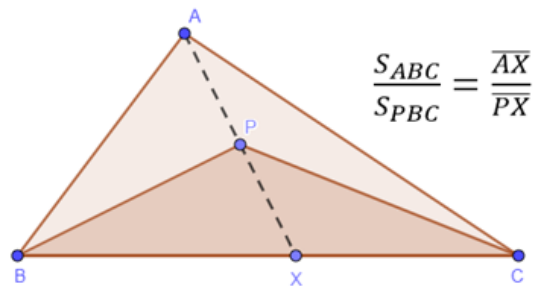
É importante destacarmos que o resultado continua válido mesmo quando  $P$  não aparece no início da expressão, ou seja,

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

**Teorema 1.** (O teorema do co-lado) Seja  $X$  o ponto de interseção das retas  $AP$  e  $BC$ . Se  $P$  não pertence à reta  $BC$  e  $X \neq P$ , então

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}.$$

Figura 8 -Teorema do co-lado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Pela Proposição 2 temos

- (1)  $B, X$  e  $C$  são colineares e  $A$  não pertence à reta  $BC$ , logo  $\frac{S_{ABC}}{S_{ABX}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}}$ ;
- (2)  $A, P$  e  $X$  são colineares e  $B$  não pertence à reta  $AP$ , logo  $\frac{S_{ABX}}{S_{PBX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}$ ;
- (3)  $B, X$  e  $C$  são colineares e  $P$  não pertence à reta  $BC$ , logo  $\frac{S_{PBX}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}$ .

Então,

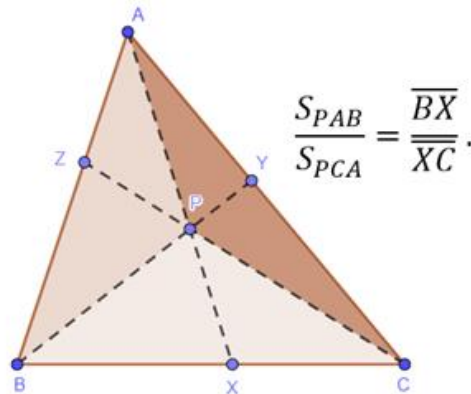
$$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABX}} \cdot \frac{S_{ABX}}{S_{PBX}} \cdot \frac{S_{PBX}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}.$$

O teorema do co-lado nos permite substituir uma razão entre as medidas de segmentos orientados contendo o ponto  $X$  por uma razão entre áreas com sinal onde  $X$  não aparece, isto é, podemos usar a equação para eliminar  $X$  daquela expressão (que será substituído pelo lado comum, sendo nesse caso o lado  $BC$ ).

**Corolário 1.** *Seja  $P$  um ponto que não pertence a qualquer um dos lados de um triângulo  $\triangle ABC$  e se  $X$  é o ponto de interseção das retas  $AP$  e  $BC$ , então*

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}.$$

Figura 9 - Corolário 1



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* O ponto  $X$  é a interseção das retas  $PA$  e  $BC$ . Observa-se também que os triângulos  $\Delta BPA$  e  $\Delta CPA$  possuem o lado em comum  $AP$  e temos que  $X \neq C$ . Assim, pelo teorema do co-lado e pela definição de área com sinal, temos

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \Leftrightarrow \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}.$$

Observe que  $S_{BPA} = S_{PAB}$ ,  $S_{CPA} = -S_{PCA}$  e  $\overline{CX} = -\overline{XC}$ . Logo, temos que

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{S_{BPA}}{-S_{CPA}} = \frac{\overline{BX}}{-\overline{CX}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}.$$

Assim, temos que

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}.$$

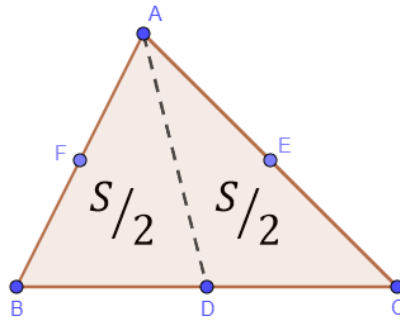
### 2.3 Coordenadas baricêntricas dos vértices e pontos médios de um triângulo

**Proposição 3.** (Coordenadas baricêntricas dos vértices) *Os vértices do triângulo em coordenadas baricêntricas são representados por  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2, fazendo  $P = A$ , temos  $A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB}) = (S : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$ . Analogamente,  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ .

**Proposição 4.** (Coordenadas baricêntricas dos pontos médios) *As coordenadas baricêntricas dos pontos médios dos lados do triângulo são representados por  $D = (0 : 1 : 1)$ ,  $E = (1 : 0 : 1)$  e  $F = (1 : 1 : 0)$ .*

Figura 10 - Ponto médio



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Pela Proposição 2, fazendo  $P = D$ , temos que  $D = (S_{DBC} : S_{DCA} : S_{DAB}) = \left(0 : \frac{S}{2} : \frac{S}{2}\right) = (0 : 1 : 1)$ . Analogamente,  $E = (1 : 0 : 1)$  e  $F = (1 : 1 : 0)$ .

## 2.4 Coordenadas baricêntricas do baricentro, incentro, ex-incentro e circuncentro

Dentre os diversos pontos notáveis existentes, destacam-se em sala de aula na educação básica, o ensino do baricentro, incentro e circuncentro, pontos estes que são abordados desde a 8ª ano do ensino fundamental. Ao se estudar alguns dos elementos dos triângulo, como mediana, bissetriz e mediatriz, que são representados por segmentos de reta no interior do triângulo, os alunos se deparam com a intersecção desses segmentos em um ponto e que possuem importantes características e propriedades.

A mediana de um triângulo é uma reta formado pelo vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Em todo triângulo, as três medianas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de baricentro do triângulo.

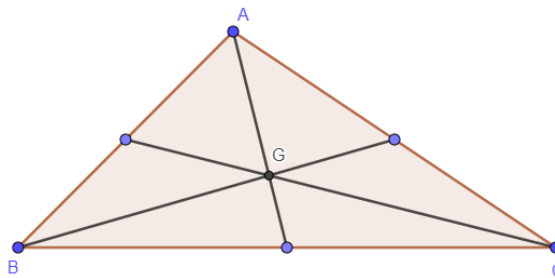
A bissetriz de um triângulo é uma reta formado pelo vértice e o ponto formado pela reta que divide o ângulo interno desse vértice ao meio e o lado oposto a esse vértice. O encontro das três bissetrizes do triângulo se intersectam em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo.

A mediatriz de um triângulo é uma de reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um dos lados desse triângulo. O encontro dessas mediatrizes ocorrem em um ponto em comum, chamado de circuncentro.

Outro ponto notável estudado nesse trabalho é o ex-incentro, onde esse ponto é formado pelo encontro da bissetriz de um triângulo com a bissetriz dos ângulos externos não adjacentes desse triângulo.

**Proposição 5.** (Coordenadas baricêntricas do baricentro) *As coordenadas baricêntricas do baricentro  $G$  do triângulo é representado por  $G = (1 : 1 : 1)$*

Figura 11. Baricentro  $G$  do triângulo  $\triangle ABC$

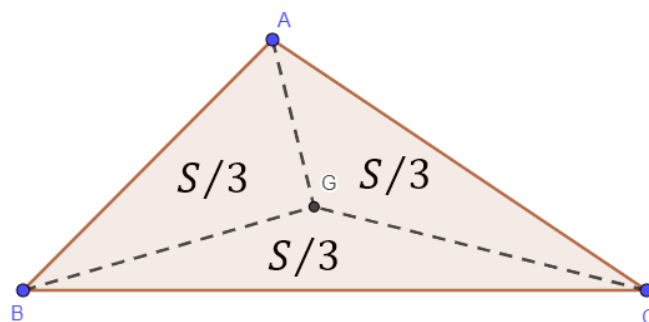


Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Seja  $G$  o baricentro do triângulo  $\triangle ABC$ , pela Proposição 1, temos que  $G = (S_{GBC} : S_{GCA} : S_{GAB})$ .

O baricentro é o centro de gravidade do triângulo e divide o triângulo em três subtriângulos de mesma área.

Figura 12. Área dos subtriângulos formados pelo baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Desse modo temos que  $S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = S_{ABC}/3 = \frac{S}{3}$ .

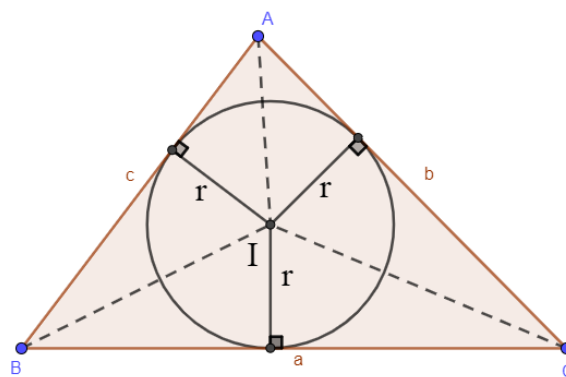


Logo

$$G = \left( \frac{S}{3} : \frac{S}{3} : \frac{S}{3} \right) = (1 : 1 : 1).$$

**Proposição 6.** (Coordenadas baricêntricas do incentro) *Sejam  $a, b, c$  as respectivas medidas dos lados  $BC, AC$  e  $AB$  de um triângulo de referência  $\Delta ABC$ . As coordenadas baricêntricas do incentro  $I$  do triângulo  $\Delta ABC$  é dada por  $I = (a : b : c)$ .*

Figura 13 - Incentro  $I$  do triângulo  $\Delta ABC$



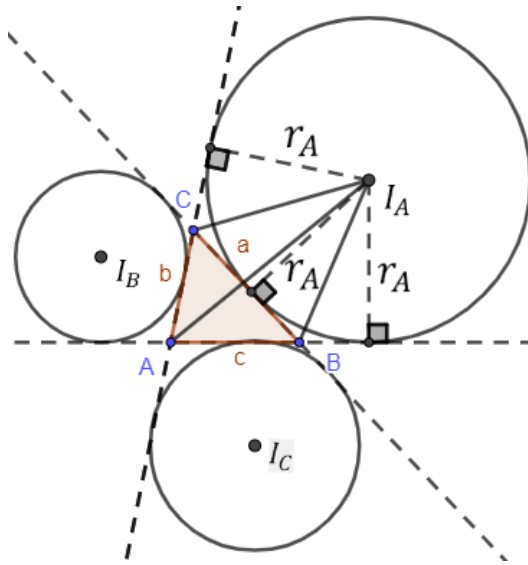
Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Sejam  $a, b, c$  a medida dos lados do triângulo  $\Delta ABC$ ,  $r$  o raio da circunferência inscrita no triângulo  $\Delta ABC$  e  $S_{IBC}$ ,  $S_{ICA}$  e  $S_{IAB}$  as áreas dos subtriângulos formados com o incentro  $I$  e os vértices do triângulo  $\Delta ABC$ , temos que as áreas dos subtriângulos são dados por  $S_{IBC} = \frac{ar}{2}$ ,  $S_{ICA} = \frac{br}{2}$  e  $S_{IAB} = \frac{cr}{2}$ . Pela Proposição 1, temos que

$$I = (S_{IBC} : S_{ICA} : S_{IAB}) = \left( \frac{ar}{2} : \frac{br}{2} : \frac{cr}{2} \right) = (a : b : c).$$

**Proposição 7.** (Coordenadas baricêntricas dos ex-incentros) *Sejam  $a, b, c$  as respectivas medidas dos lados  $BC, AC$  e  $AB$  de um triângulo de referência  $\Delta ABC$ . As Coordenadas baricêntricas dos ex-incentros  $I_A, I_B$  e  $I_C$  do triângulo  $\Delta ABC$ , é dada por  $I_A = (-a : b : c)$ ,  $I_B = (a : -b : c)$  e  $I_C = (a : b : -c)$ .*

Figura 14 - Ex-incentro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Dado um triângulo  $\Delta ABC$ , as intersecções das bissetrizes dos ângulos externos do triângulo formarão os pontos  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$  de modo que esses pontos são o centro das circunferências tangentes aos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$ . Esses círculos são denominados de círculos ex-inscritos e os centros destes círculos são os ex-incentros. O  $r_a$  é o raio do círculo ex-inscrito de centro  $I_A$ , temos que

$$S_{I_A BC} = -\frac{ar_a}{2}, S_{I_A CA} = \frac{br_a}{2} \text{ e } S_{I_A AB} = \frac{cr_a}{2}.$$

Logo, pela Proposição 1 temos que

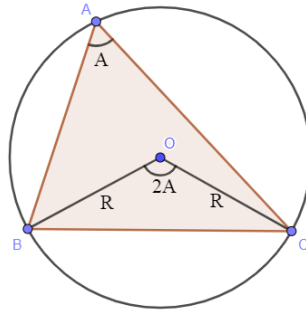
$$I_A = (S_{I_A BC} : S_{I_A CA} : S_{I_A AB}) = \left( -\frac{ar_a}{2} : \frac{br_a}{2} : \frac{cr_a}{2} \right) = (-a : b : c).$$

De forma análoga, temos que  $I_B = (a : -b : c)$  e  $I_C = (a : b : -c)$ .

**Proposição 8.** (Coordenadas baricêntricas do circuncentro) *Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  as respectivas medidas dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  de um triângulo de referência  $\Delta ABC$  e  $R$  o raio do círculo circunscrito ao triângulo  $\Delta ABC$ . As Coordenadas baricêntricas do circuncentro  $O$  do triângulo  $\Delta ABC$ , é dada por*

$$O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)).$$

Figura 15: Circuncentro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Observemos na figura, pelo teorema das áreas e as regras do seno da soma, temos que

$$\begin{aligned} S_{OBC} &= \frac{R^2 \operatorname{sen}(2\hat{A})}{2} \\ &= \frac{R^2 2\operatorname{sen}(\hat{A})\cos(\hat{A})}{2} \\ &= R^2 \operatorname{sen}(\hat{A})\cos(\hat{A}). \end{aligned}$$

De forma análoga temos

$$S_{OCA} = R^2 \operatorname{sen}(\hat{B})\cos(\hat{B}) \text{ e } S_{OAB} = R^2 \operatorname{sen}(\hat{C})\cos(\hat{C}).$$

Pela Proposição 1, concluímos

$$O = (S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}) = (R^2 \operatorname{sen}(\hat{A})\cos(\hat{A}) : R^2 \operatorname{sen}(\hat{B})\cos(\hat{B}) : R^2 \operatorname{sen}(\hat{C})\cos(\hat{C})).$$

Como já visto antes, uma representação das coordenadas baricêntricas podem ser escritas por mais de uma tripla ordenada de coordenadas. Assim, podemos reescrevê-la na forma

$$O = (2R \operatorname{sen}(\hat{A})\cos(\hat{A}) : 2R \operatorname{sen}(\hat{B})\cos(\hat{B}) : 2R \operatorname{sen}(\hat{C})\cos(\hat{C})).$$

Pela lei dos senos,  $\frac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = 2R$ , assim, temos

$$a = 2R \operatorname{sen}(\hat{A}), \quad b = 2R \operatorname{sen}(\hat{B}) \text{ e } c = 2R \operatorname{sen}(\hat{C}).$$

Assim, podemos escrever

$$O = (a \cdot \cos(\hat{A}) : b \cdot \cos(\hat{B}) : c \cdot \cos(\hat{C})).$$

Já pela lei dos cossenos, temos que  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ , assim

$$\cos(\hat{A}) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}, \quad \cos(\hat{B}) = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \quad \text{e} \quad \cos(\hat{C}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} O &= (a \cdot \cos(\hat{A}) : b \cdot \cos(\hat{B}) : c \cdot \cos(\hat{C})) \\ &= \left( a \cdot \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right) : b \cdot \left( \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \right) : c \cdot \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \right) \\ &= \left( a^2 \cdot \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2abc} \right) : b^2 \cdot \left( \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2abc} \right) : c^2 \cdot \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} \right) \right). \end{aligned}$$

Relembrando que a representação das coordenadas baricêntricas podem ser escritas por mais de uma tripla ordenada de coordenadas, multiplicamos as coordenadas por  $2abc$ , onde teremos

$$O = (a^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2) : b^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2) : c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)).$$

## 2.5 Soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro

**Proposição 9.** *A soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro*

$O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$  *é dada por  $16S^2$ , sendo  $S$  a área com sinal do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .*

*Demonstração.* Sendo  $q$  a soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro, temos

$$\begin{aligned} q &= a^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2) + b^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2) + c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2) \\ &= -a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2a^2 - b^4 + b^2c^2 + c^2a^2 + c^2b^2 - c^4 \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &= (a + b + c) \cdot (-a + b + c) \cdot (a - b + c) \cdot (a + b - c) \\ &= (a + b + c) \cdot (a + b + c - 2a) \cdot (a + b + c - 2b) \cdot (a + b + c - 2c) \\ &= 2p \cdot (2p - 2a) \cdot (2p - 2b) \cdot (2p - 2c) \\ &= 16p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c). \end{aligned}$$

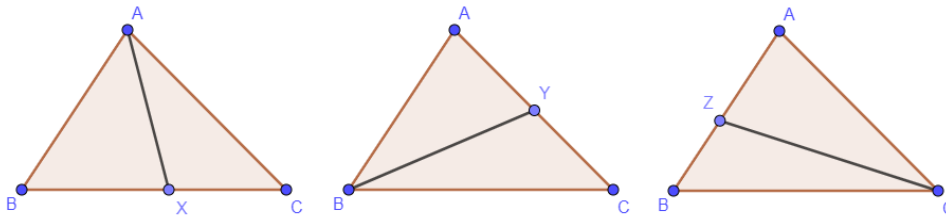
Na geometria euclidiana, utilizando a formula de Heron, temos

$$q = 16S^2 \text{ ou } q = 4D^2 .$$

## 2.6 Coordenadas baricêntricas de pontos sobre os lados do triângulo de referência

**Proposição 10.** *Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pontos sobre os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  do triângulo  $\Delta ABC$ .*

Figura 16: Traços dos segmentos  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Então:

- (1)  $X = (0 : \overline{XC} : \overline{BX})$ , se, e somente se,  $X$  pertence a reta  $BC$ .
- (2)  $Y = (\overline{CY} : 0 : \overline{YA})$ , se, e somente se,  $Y$  pertence a reta  $CA$ .
- (3)  $Z = (\overline{ZB} : \overline{AZ} : 0)$ , se, e somente se,  $Z$  pertence a reta  $AB$ .

*Demonstração.* Seja  $X$  um ponto pertencente ao lado  $BC$  do triângulo  $\Delta ABC$ . Temos que  $X = (S_{XBC} : S_{XCA} : S_{XAB})$ . Como  $B$ ,  $X$  e  $C$  são colineares, então  $S_{XBC} = 0$ . Logo

$$X = (S_{XBC} : S_{XCA} : S_{XAB}) = (0 : S_{XCA} : S_{XAB}) = (0 : \overline{XC} : \overline{BX}).$$

Reciprocamente, suponhamos que  $X = (0 : \overline{XC} : \overline{BX})$ , então  $S_{XBC} = 0$ . Logo,  $X$ ,  $B$  e  $C$  são colineares e, portanto  $X$  pertence ao lado  $BC$ .

Se  $X$  pertence a reta  $BC$  e não pertença ao segmento  $BC$ , temos que a proposição continua sendo verdadeira, sendo observado a definição de área com sinal e segmento orientado.

Os casos (2) e (3) podem ser demonstrados de forma análoga.

## 2.7 Área com sinal do triângulo a partir das coordenadas baricêntricas dos vértices

**Proposição 11.** *Seja  $P_1, P_2$  e  $P_3$  pontos com coordenadas baricêntricas  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ ,  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  e  $P_3 = (u_3 : v_3 : w_3)$  em relação a um triângulo  $\Delta ABC$ . Então, a área com sinal do triângulo  $\Delta P_1 P_2 P_3$  é dada por*

$$S_{P_1 P_2 P_3} = \frac{S_{ABC}}{s(P_1) \cdot s(P_2) \cdot s(P_3)} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Sendo  $s(P_1)$ ,  $s(P_2)$  e  $s(P_3)$  a representação das somas das coordenadas baricêntricas desses pontos diferentes de zero.

*Demonstração.* Sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ ,  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  e  $P_3 = (u_3 : v_3 : w_3)$  as coordenadas baricêntricas dos pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  em relação a um triângulo  $\Delta ABC$  e sejam  $s(P_1) = u_1 + v_1 + w_1 \neq 0$ ,  $s(P_2) = u_2 + v_2 + w_2 \neq 0$  e  $s(P_3) = u_3 + v_3 + w_3 \neq 0$ . Se  $P_i = (x(P_i), y(P_i))$ ,  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  são as coordenadas cartesianas dos pontos  $P_i, A, B$  e  $C$ , então, para cada  $i = 1, 2, 3$ , temos

$$P_i = (xP_i, yP_i) = \frac{u_i \cdot A + v_i \cdot B + w_i \cdot C}{u_i + v_i + w_i} = \frac{u_i \cdot A + v_i \cdot B + w_i \cdot C}{s(P_i)}.$$

Assim, temos

$$P_i = \left( \frac{u_i \cdot x_A + v_i \cdot x_B + w_i \cdot x_C}{s(P_i)}, \frac{u_i \cdot y_A + v_i \cdot y_B + w_i \cdot y_C}{s(P_i)} \right).$$

Então, a área com sinal  $S_{P_1 P_2 P_3}$  é dada por

$$S_{P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} xP_1 & yP_1 & 1 \\ xP_2 & yP_2 & 1 \\ xP_3 & yP_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow S_{P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{u_1 x_A + v_1 x_B + w_1 x_C}{s(P_1)} & \frac{u_1 y_A + v_1 y_B + w_1 y_C}{s(P_1)} & 1 \\ \frac{u_2 x_A + v_2 x_B + w_2 x_C}{s(P_2)} & \frac{u_2 y_A + v_2 y_B + w_2 y_C}{s(P_2)} & 1 \\ \frac{u_3 x_A + v_3 x_B + w_3 x_C}{s(P_3)} & \frac{u_3 y_A + v_3 y_B + w_3 y_C}{s(P_3)} & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a linha  $i$  por  $s(P_i)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
S_{P_1P_2P_3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} u_1x_A + v_1x_B + w_1x_C & u_1y_A + v_1y_B + w_1y_C & sP_1 \\ u_2x_A + v_2x_B + w_2x_C & u_2y_A + v_2y_B + w_2y_C & sP_2 \\ u_3x_A + v_3x_B + w_3x_C & u_3y_A + v_3y_B + w_3y_C & sP_3 \end{vmatrix}}{s(P_1) \cdot s(P_2) \cdot s(P_3)} \\
&\Downarrow \\
S_{P_1P_2P_3} &= \frac{\begin{vmatrix} u_1x_A + v_1x_B + w_1x_C & u_1y_A + v_1y_B + w_1y_C & u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2x_A + v_2x_B + w_2x_C & u_2y_A + v_2y_B + w_2y_C & u_2 + v_2 + w_2 \\ u_3x_A + v_3x_B + w_3x_C & u_3y_A + v_3y_B + w_3y_C & u_3 + v_3 + w_3 \end{vmatrix}}{2 \cdot s(P_1) \cdot s(P_2) \cdot s(P_3)} \\
&\Downarrow \\
S_{P_1P_2P_3} &= \frac{1}{2 \cdot s(P_1) \cdot s(P_2) \cdot s(P_3)} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}_{2 \cdot S_{ABC}}.
\end{aligned}$$

Sendo  $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot S_{ABC}$ , temos

$$\begin{aligned}
S_{P_1P_2P_3} &= \frac{1}{2 \cdot s(P_1) \cdot s(P_2) \cdot s(P_3)} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot 2S_{ABC} \Rightarrow \\
S_{P_1P_2P_3} &= \frac{S_{ABC}}{s(P_1) \cdot s(P_2) \cdot s(P_3)} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Observa-se que, quando as somas das coordenadas baricêntricas de  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  é igual a 1, temos que a área com sinal do triângulo  $\Delta P_1P_2P_3$  é dada por

$$S_{P_1P_2P_3} = S_{ABC} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

**Corolário 2.** *Sejam  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  pontos, tais que apresentam as somas de suas coordenadas baricêntricas diferentes de 0, temos que esses pontos são colineares se, e somente se, o determinantes da matriz formada com as coordenadas baricêntricas desses pontos for nulo.*

## 2.8 Coordenadas baricêntricas homogêneas e exatas

**Definição 4.** Seja  $P$  um ponto qualquer pertencente ao plano de um triângulo de referência  $\Delta ABC$  e seja as coordenadas baricêntricas  $P = (u : v : w)$ , dizemos que as coordenadas baricêntricas são classificadas como homogênea ou absoluta, quando  $u + v + w = 1$  e exatas ou areais, quando  $u = S_{PBC}$ ,  $v = S_{PCA}$  e  $w = S_{PAB}$ , onde neste caso teremos que  $u + v + w = S_{ABC}$  pela propriedade da decomposição da área com sinal.

**Proposição 12.** Seja  $P$  um ponto do plano de coordenadas baricêntricas  $P = (u : v : w)$ , com  $u + v + w \neq 0$ . As coordenadas baricêntricas de  $P$  na forma homogênea ou absoluta são dadas por

$$P = \left( \frac{u}{u+v+w} : \frac{v}{u+v+w} : \frac{w}{u+v+w} \right).$$

*Demonstração.* Na definição de coordenadas baricêntricas, vimos que a representação de um dado ponto  $P$  pode ser feita por mais de uma tripla de coordenadas baricêntricas. Assim sendo, temos que  $P = k \cdot P$ , sendo  $k = \frac{1}{u+v+w}$ . Logo

$$P = (u : v : w) = \left( \frac{u}{u+v+w} : \frac{v}{u+v+w} : \frac{w}{u+v+w} \right).$$

Somando-se as coordenadas baricêntricas do ponto  $P$ , temos

$$\frac{u}{u+v+w} + \frac{v}{u+v+w} + \frac{w}{u+v+w} = \frac{u+v+w}{u+v+w} = 1.$$

Na sequência, usaremos a Definição 4 para calcular as coordenadas baricêntricas na forma exata de alguns pontos importantes.

- (1) Coordenadas baricêntricas exatas dos vértices.

Sendo  $S_{ABC} = S$ , temos que  $A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB})$  e  $S_{ACA} = S_{AAB} = 0$ . Logo

$$A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB}) = (S : 0 : 0).$$

Analogamente,  $B = (0 : S : 0)$  e  $C = (0 : 0 : S)$ .



(2) Coordenadas baricêntricas exatas dos pontos médios  $D$ ,  $E$  e  $F$ , dos lados do triângulo de referência  $\triangle ABC$ .

Como  $S_{DBC} = 0$  e  $S_{DCA} = S_{DAB} = \frac{S}{2}$ , temos que

$$D = (S_{DBC} : S_{DCA} : S_{DAB}) = \left(0 : \frac{S}{2} : \frac{S}{2}\right).$$

Analogamente,  $E = \left(\frac{S}{2} : 0 : \frac{S}{2}\right)$  e  $F = \left(\frac{S}{2} : \frac{S}{2} : 0\right)$ .

(3) Coordenadas baricêntricas exatas do baricentro  $G$ .

Como  $S_{ABC} = S$  e  $S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = \frac{S}{3}$ , temos que

$$G = (S_{GBC} : S_{GCA} : S_{GAB}) = \left(\frac{S}{3} : \frac{S}{3} : \frac{S}{3}\right).$$

(4) Coordenadas baricêntricas exatas do incentro  $I$ .

Como  $S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB}$  e  $S_{IBC} = \frac{ar}{2}$ ,  $S_{ICA} = \frac{br}{2}$  e  $S_{IAB} = \frac{cr}{2}$ , temos que

$$I = (S_{IBC} : S_{ICA} : S_{IAB}) = \left(\frac{ar}{2} : \frac{br}{2} : \frac{cr}{2}\right).$$

(5) Coordenadas baricêntricas exatas do circuncentro  $O$ .

Como  $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$  e  $S_{OBC} = \frac{R^2 \sen(2\hat{A})}{2}$ ,  $S_{OCA} = \frac{R^2 \sen(2\hat{B})}{2}$  e  $S_{OAB} = \frac{R^2 \sen(2\hat{C})}{2}$ , temos que

$$O = (S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}) = \left(\frac{R^2 \sen(2\hat{A})}{2} : \frac{R^2 \sen(2\hat{B})}{2} : \frac{R^2 \sen(2\hat{C})}{2}\right).$$

(6) Coordenadas baricêntricas exatas dos ex-incentros  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$ , sendo  $r_a$ ,  $r_b$  e  $r_c$  os raios dos ex-incentros  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$ , respectivamente.

Como  $S_{ABC} = S_{I_A BC} + S_{I_A CA} + S_{I_A AB}$  e  $S_{I_A BC} = -\frac{ar_a}{2}$ ,  $S_{I_A CA} = \frac{br_a}{2}$  e  $S_{I_A AB} = \frac{cr_a}{2}$ , temos que

$$I_A = (S_{I_A BC} : S_{I_A CA} : S_{I_A AB}) = \left(-\frac{ar_a}{2} : \frac{br_a}{2} : \frac{cr_a}{2}\right).$$

Analogamente,

$$I_B = (S_{I_B BC} : S_{I_B CA} : S_{I_B AB}) = \left(\frac{ar_b}{2} : -\frac{br_b}{2} : \frac{cr_b}{2}\right)$$

e

$$I_C = (S_{I_C BC} : S_{I_C CA} : S_{I_C AB}) = \left( \frac{ar_c}{2} : \frac{br_c}{2} : -\frac{cr_c}{2} \right).$$

Na sequência, usaremos a Proposição 12 e a Definição 4 para calcular as coordenadas baricêntricas na forma homogêneas de alguns pontos importantes.

(1) Coordenadas baricêntricas homogêneas dos vértices.

Sendo  $S_{ABC} = S$ , temos que  $A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB})$  e  $S_{ACA} = S_{AAB} = 0$ , logo

$$A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB}) = (S : 0 : 0) = (1 : 0 : 0).$$

Analogamente,  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ .

(2) Coordenadas baricêntricas homogêneas dos pontos médios  $D$ ,  $E$  e  $F$ , dos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

Como  $D = (0 : 1 : 1)$  e a soma de suas coordenadas baricêntricas é diferente de 1, usando a Proposição 12, temos

$$D = (0 : 1 : 1) = \left( \frac{0}{0+1+1} : \frac{1}{0+1+1} : \frac{1}{0+1+1} \right),$$

assim

$$D = \left( 0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \right).$$

Analogamente,  $E = \left( \frac{1}{2} : 0 : \frac{1}{2} \right)$  e  $F = \left( \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0 \right)$ .

(3) Coordenadas baricêntricas homogêneas do baricentro  $G$ .

Como  $G = (1 : 1 : 1)$  e a soma de suas coordenadas baricêntricas é diferente de 1, temos

$$G = (1 : 1 : 1) = \left( \frac{1}{1+1+1} : \frac{1}{1+1+1} : \frac{1}{1+1+1} \right) \Rightarrow G = \left( \frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \right).$$

(4) Coordenadas baricêntricas homogêneas do circuncentro  $O$ .

Como  $O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$ , temos pela Proposição 9 que a soma de suas coordenadas baricêntricas é igual a  $4D^2$ , logo

$$O = \left( \frac{a^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2)}{4D^2} : \frac{b^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2)}{4D^2} : \frac{c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{4D^2} \right).$$

(5) Coordenadas baricêntricas homogêneas do incentro  $I$ .

Como  $I = (a : b : c)$ , sendo a soma de suas coordenadas baricêntricas diferente de 1, temos que

$$I = (a : b : c) = \left( \frac{a}{a+b+c} : \frac{b}{a+b+c} : \frac{c}{a+b+c} \right) \Rightarrow I = \left( \frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p} \right).$$

(6) Coordenadas baricêntricas homogêneas dos ex-incentros  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$ , sendo  $r_a$ ,  $r_b$  e  $r_c$  os raios dos ex-incentros de  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$ , respectivamente.

Tendo  $I_A = (-a : b : c)$ , e sendo a soma de suas coordenadas baricêntricas diferente de 1, temos que

$$I_A = (-a : b : c) = \left( \frac{-a}{-a+b+c} : \frac{b}{-a+b+c} : \frac{c}{-a+b+c} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$I_A = \left( \frac{-a}{2(p-a)} : \frac{b}{2(p-a)} : \frac{c}{2(p-a)} \right).$$

De forma análoga, temos

$$I_B = \left( \frac{a}{2(p-b)} : \frac{-b}{2(p-b)} : \frac{c}{2(p-b)} \right)$$

e

$$I_C = \left( \frac{a}{2(p-c)} : \frac{b}{2(p-c)} : \frac{-c}{2(p-c)} \right).$$

## 2.9 Ponto no infinito

**Definição 5.** (Ponto no infinito). Dizemos que  $P$  é um ponto no infinito se a soma das coordenadas baricêntricas é igual a zero, ou seja, dizemos que  $P = (u : v : w)$  é um ponto no infinito se  $u + v + w = 0$ .

É importante observarmos que pontos no infinito não são pontos do plano euclidiano, mas sim, abstrações que irão auxiliar a da consistência a algumas das operações sobre pontos que veremos.

## 2.10 Pontos com coordenadas baricêntricas balanceadas

**Definição 6.** (Pontos com coordenadas Baricêntricas Balanceadas) *Dizemos que dois pontos estão com as coordenadas baricêntricas balanceadas ou que esses pontos estão balanceados, quando as somas das coordenadas baricêntricas desses pontos são iguais.*

O baricentro  $G = (1 : 1 : 1)$  e o vértice  $A = (3 : 0 : 0)$  estão balanceados com soma 3. O incentro  $I = (a : b : c)$  e o vértice  $A = (2p : 0 : 0)$  estão balanceados com soma  $2p$ . A forma absoluta do baricentro  $G = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right)$  e o ponto médio  $D = \left(0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\right)$  estão balanceados com soma 1. Qualquer par de pontos pode ser facilmente balanceado, bastando escrever os dois pontos na forma absoluta.

*Observação 1.* A diferença de dois pontos balanceados é um ponto no infinito.

De fato, pois seja  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ , se

$$u_1 + v_1 + w_1 = u_2 + v_2 + w_2 = s \Rightarrow (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) = s - s = 0.$$

## 2.11 Operações com coordenadas baricêntricas

**Definição 7.** *Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois pontos com coordenadas baricêntricas  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ . Denominamos soma de  $P_1$  e  $P_2$  sendo igual a  $P$  tal que*

$$P = P_1 + P_2 = (u_1 + u_2 : v_1 + v_2 : w_1 + w_2).$$

É importante destacarmos que a soma de dois pontos que não estão no infinito pode ser um ponto no infinito. Se  $P_1 = (5 : 6 : 1)$  e  $P_2 = (-2 : -4 : -6)$ , sendo esses dois pontos que não estão no infinito, temos que  $P = P_1 + P_2 = (3 : 2 : -5)$ , que é um ponto na qual a soma de suas coordenadas baricêntricas é igual a zero, logo  $P$  é um ponto do infinito. Também é fácil observar que a soma de dois pontos no infinito é um ponto no infinito e a soma de um ponto no infinito com um ponto que não está no infinito é um ponto que não está no infinito.

**Definição 8.** *Sejam  $P_1$  e  $P_2$  pontos com coordenadas baricêntricas  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ . Denominamos diferença de  $P_1$  e  $P_2$  sendo igual a  $P$  tal que*

$$P = P_1 - P_2 = (u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2).$$

**Definição 9.** Seja  $P_1$  um ponto com coordenadas baricêntricas  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ . Denominamos multiplicação de  $P_1$  pelo escalar  $k$  sendo igual a  $P$  tal que

$$P = k \cdot P_1 = (k \cdot u_1 : k \cdot v_1 : k \cdot w_1).$$

## 2.12 Coordenadas baricêntricas de pontos divisores

Nesta seção determinaremos as coordenadas baricêntricas do ponto que divide um segmento orientado em uma dada razão. Conhecidas as coordenadas baricêntricas das extremidades  $P$  e  $Q$  de um segmento orientado  $\overline{PQ}$ , sendo  $P \neq Q$ , e a razão  $k$  em que um ponto  $X$  da reta  $\overline{PQ}$  divide aquele segmento orientado é possível utilizar um método algébrico para calcular as coordenadas baricêntricas do ponto  $X$ .

**Proposição 13.** Sejam  $P$  e  $Q$  pontos do plano,  $X$  um ponto da reta  $\overline{PQ}$  e  $k$  um número real diferente de  $-1$ . Se  $P$  e  $Q$  estão com as coordenadas baricêntricas balanceadas, então

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} = k \text{ se, e somente se, } X = P + k \cdot Q.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $k$  um número real diferente de  $-1$ . Supondo  $P$  e  $Q$  pontos distintos com somas das coordenadas baricêntricas  $r$ ,  $r \neq 0$  e  $X$  um ponto da reta  $\overline{PQ}$ ,  $X$  distinto de  $Q$  com soma das coordenadas baricêntricas  $s$ ,  $s \neq 0$ , considere um triângulo de referência  $\Delta ABC$ , no mesmo plano do segmento  $\overline{PQ}$ , então, podemos concluir pela Proposição 1, que

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}), Q = (S_{QBC} : S_{QCA} : S_{QAB}) \text{ e } X = (S_{XBC} : S_{XCA} : S_{XAB}).$$

Veremos primeiramente os componentes  $u_P$ ,  $u_Q$  e  $u_X$  das coordenadas baricêntricas de  $P$ ,  $Q$  e  $X$ , sendo os outros componentes conseguidos de forma análoga, temos que

$$u_P = S_{PBC}, u_Q = S_{QBC} \text{ e } u_X = S_{XBC}. \quad (1)$$

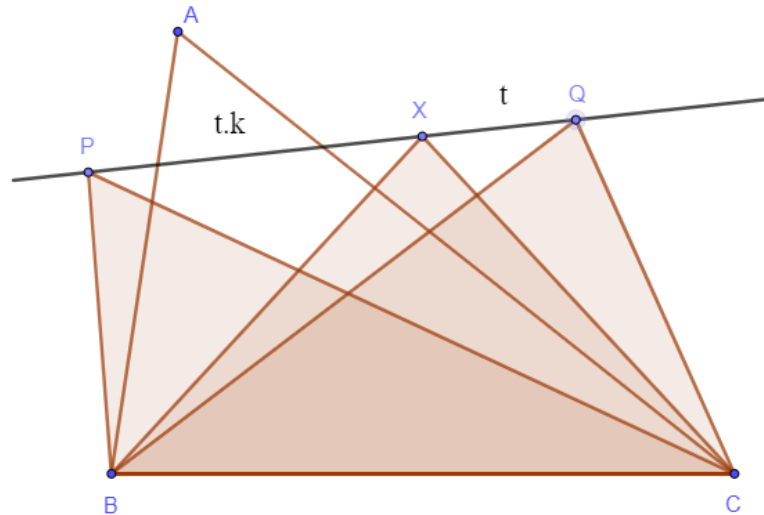
Denotando-se  $\overline{XQ}$  por  $t$ , segue-se da hipótese que  $\overline{PX} = k \cdot \overline{XQ} = k \cdot t$ . Como  $P$ ,  $X$  e  $Q$  são colineares e  $B$  e  $C$  não pertencem à reta  $\overline{PQ}$ , temos pela Proposição 3 (O teorema do colado) que:

$$\frac{S_{PXB}}{S_{PQB}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PX} + \overline{XQ}} = \frac{k \cdot t}{k \cdot t + t} = \frac{k}{k+1} \text{ e } \frac{S_{PCX}}{S_{PCQ}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PX} + \overline{XQ}} = \frac{k \cdot t}{k \cdot t + t} = \frac{k}{k+1}.$$

Assim, temos

$$S_{PXB} = \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot S_{PQB} \text{ e } S_{PCX} = \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot S_{PCQ}. \quad (2)$$

Figura 17 -Relação de área com sinal do  $\Delta ABC$  com os pontos  $P$ ,  $X$  e  $Q$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Pela relação de área com sinal, tendo  $\Delta XBC$  como triângulo de referência, segue-se que

$$S_{XBC} = S_{PBC} + S_{PCX} + S_{PAB}. \quad (3)$$

Do mesmo modo, considerando-se agora  $\Delta QBC$  como triângulo de referência, temos que

$$S_{QBC} = S_{PBC} + S_{PCQ} + S_{PQB} \Rightarrow S_{PCQ} + S_{PQB} = S_{QBC} - S_{PBC}. \quad (4)$$

Substituindo-se (2) em (3), obtemos

$$S_{XBC} = S_{PBC} + \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot S_{PCQ} + \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot S_{PQB} \Rightarrow S_{XBC} = S_{PBC} + \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot (S_{PCQ} + S_{PQB}).$$

Aplicando a (4), temos

$$S_{XBC} = S_{PBC} + \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot (S_{QBC} - S_{PBC}).$$

Da (1), temos que

$$u_X = u_P + \left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot (u_Q - u_P) = \frac{u_P \cdot (k+1) + k \cdot (u_Q - u_P)}{k+1} = \frac{u_P + k \cdot u_Q}{k+1}.$$

Logo, temos

$$(k+1) \cdot u_X = u_P + k \cdot u_Q.$$

Analogamente, temos

$$(k+1) \cdot v_X = v_P + k \cdot v_Q \text{ e } (k+1) \cdot w_X = w_P + k \cdot w_Q.$$

O que por sua vez acarreta que

$$\begin{aligned} X &= (u_X : v_X : w_X) \\ &= ((k+1) \cdot u_X : (k+1) \cdot v_X : (k+1) \cdot w_X) \\ &= (u_P + k \cdot u_Q : v_P + k \cdot v_Q : w_P + k \cdot w_Q) \\ &= (u_P : v_P : w_P) + (k \cdot u_Q : k \cdot v_Q : k \cdot w_Q) \\ &= (u_P : v_P : w_P) + k \cdot (u_Q : v_Q : w_Q) \\ &= P + k \cdot Q. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos  $X = P + k \cdot Q$  e seja  $X'$  o ponto que divide  $\overline{PQ}$  na razão  $k$ . Temos de

( $\Rightarrow$ ) que  $X' = P + k \cdot Q$ . Assim temos que

$$\begin{aligned} X &= (u_P : v_P : w_P) + k \cdot (u_Q : v_Q : w_Q) \\ &= (u_P : v_P : w_P) + (k \cdot u_Q : k \cdot v_Q : k \cdot w_Q) \\ &= (u_P + k \cdot u_Q : v_P + k \cdot v_Q : w_P + k \cdot w_Q). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$u_X = u_P + k \cdot u_Q, v_X = v_P + k \cdot v_Q \text{ e } w_X = w_P + k \cdot w_Q.$$

De forma análoga teremos em  $X'$

$$u_{X'} = u_P + k \cdot u_Q, v_{X'} = v_P + k \cdot v_Q \text{ e } w_{X'} = w_P + k \cdot w_Q.$$

Assim, temos que

$$u_X = u_P + k \cdot u_Q = u_{X'}, v_X = v_P + k \cdot v_Q = v_{X'} \text{ e } w_X = w_P + k \cdot w_Q = w_{X'}.$$

que implica que  $X = X'$ , logo  $\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} = k$ .

No caso de  $k = -1$ , a relação  $X = P + k \cdot Q$  também é verdadeira. Com as coordenadas baricêntricas de  $P$  e  $Q$  balanceadas, teremos  $X = P + (-1) \cdot Q$ , o que implica que  $X$  é um ponto infinito. Assim, podemos definir o ponto  $X = P + k \cdot Q$  (com as coordenadas baricêntricas que  $P$  e  $Q$  balanceadas), sendo o ponto infinito que divide o segmento orientado  $\overline{PQ}$  na razão  $k = -1$ .

**Corolário 3.** *Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos distintos e balanceados do plano e  $X$  um ponto da reta  $\overline{PQ}$ . Então,  $X$  é ponto médio de  $\overline{PQ}$  se, e somente se,  $X = P + Q$ .*

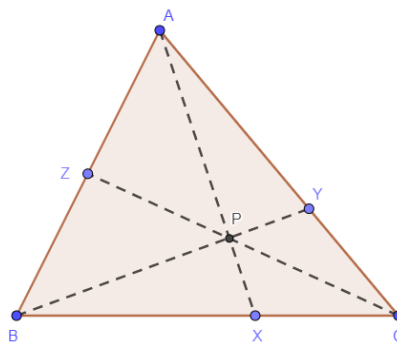
*Demonstração.*  $X$  é ponto médio de  $\overline{PQ}$ , temos que

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} = 1 \Rightarrow X = P + k \cdot Q \Rightarrow X = P + 1 \cdot Q \Rightarrow X = P + Q.$$

### 2.13 Coordenadas baricêntricas e cevianas

**Definição 10.** *As retas que partem dos vértices do triângulo de referência  $\triangle ABC$  para o lado oposto, cortando em um ponto  $P$ , são denominadas cevianas do ponto  $P$  e os pontos onde as cevianas do ponto  $P$  cortam os lados opostos do triângulo de referência são chamados de traços do ponto  $P$ .*

Figura 18 -  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os traços do ponto  $P$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Determinaremos as coordenadas baricêntricas desses pontos, assim como as coordenadas do ponto  $P$  e a relação entre as coordenadas baricêntricas dos traços do ponto  $P$  com as coordenadas do ponto  $P$ . Veremos que conhecidas a posição (ou razão) de um ponto em uma de suas três cevianas e a posição (ou razão) do respectivo traço sobre o lado oposto, então é possível determinar as coordenadas baricêntricas desse ponto.



**Lema 1.** Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os traços de um ponto  $P$ , respectivamente, sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo de referência  $\triangle ABC$ . Se  $P$  divide  $\overline{XA}$  na razão  $k$ , então  $P = (k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX})$ , se  $P$  divide  $\overline{YB}$  na razão  $k$ , então  $P = (\overline{CY} : k \cdot \overline{CA} : \overline{YA})$  e se  $P$  divide  $\overline{ZC}$  na razão  $k$ , então  $P = (\overline{ZB} : \overline{AZ} : k \cdot \overline{AB})$ .

*Demonstração.* Suponha que o ponto  $P$  divide a ceviana  $\overline{XA}$  na razão  $k$ , isto é,  $\frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} = k$ .

Vimos que  $P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$ , para demonstrar o Lema 1, mostraremos que  $k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX} = S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}$ . Pelo Corolário 1, temos  $\overline{XC} : \overline{BX} = S_{PCA} : S_{PAB}$ . Temos que

$$\frac{k \cdot \overline{BC}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{BX} + \overline{XC}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XP} \cdot \overline{BX} + \overline{XP} \cdot \overline{XC}}{\overline{PA} \cdot \overline{XC}} = \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} + \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}}.$$

Da Proposição 2 e do corolário 1, temos

$$\frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PAB}}, \quad \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} = \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}}.$$

Logo

$$\frac{k \cdot \overline{BC}}{\overline{XC}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PAB}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBX} + S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}}.$$

Isso mostra que  $k \cdot \overline{BC} = S_{PBC}$ . Portanto,

$$P = (k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX}) = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}).$$

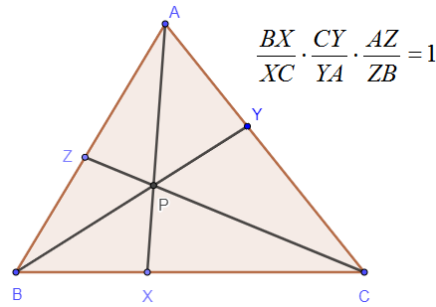
As demonstrações se  $P$  divide  $\overline{YB}$  na razão  $k$  e se  $P$  divide  $\overline{ZC}$  na razão  $k$ , são análogas à anterior.

**Teorema 2.** (Teorema de Ceva) Dado um triângulo  $\triangle ABC$  e os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pertencente respectivamente as restas  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , temos que

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

se, e somente se, as retas  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  forem concorrentes ou paralelas.

Figura 19 - Teorema de Ceva

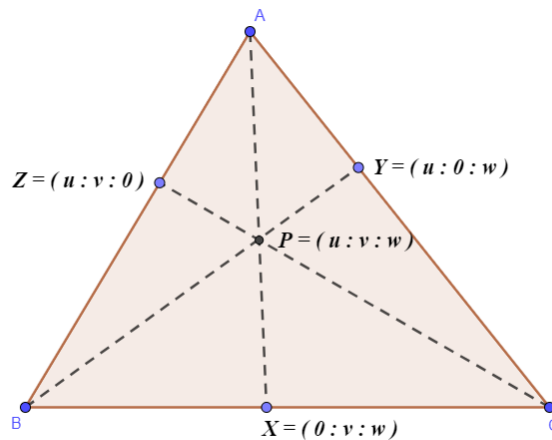


Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

**Teorema 3.** (Teorema de Ceva em coordenadas baricêntricas) *Considere um triângulo  $\Delta ABC$ . Sejam, respectivamente,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pontos sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo. Então, os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são os traços de  $P = (u : v : w)$  se, e somente se,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são da forma*

$$X = (0 : v : w), Y = (u : 0 : w) \text{ e } Z = (u : v : 0),$$

para algum  $u, v$  e  $w$ .

Figura 20 - Coordenadas dos traços  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e do ponto de interseção  $P$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são os traços de  $P = (u : v : w)$ . Fazendo  $k = \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}}$ , pelo Lema 1, temos que  $P = (k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX}) = (u : v : w)$ , assim, temos  $\overline{XC} : \overline{BX} = u : v$ . Como  $X$  está sobre o lado  $\overline{BC}$ , temos pela Proposição 11 que  $P = (0 : \overline{XC} : \overline{BX}) = (0 : v : w)$ . Analogamente, temos que  $Y = (u : 0 : w)$  e  $Z = (u : v : 0)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são da forma  $X = (0 : v : w)$ ,  $Y = (u : 0 : w)$  e  $Z = (u : v : 0)$ , para algum  $u, v, w$ . Como  $X, Y$  e  $Z$  são pontos sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo, temos pela Proposição 11 que

$$X = (0 : v : w) = (0 : \overline{XC} : \overline{BX}),$$

$$Y = (u : 0 : w) = (\overline{CY} : 0 : \overline{YA})$$

e

$$Z = (u : v : 0) = (\overline{ZB} : \overline{AZ} : 0).$$

Aplicando Ceva ao triângulo  $\Delta ABC$ , temos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{w}{v} \cdot \frac{u}{w} \cdot \frac{v}{u} = 1.$$

Isso mostra que  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{ZC}$  são concorrentes. Logo,  $X, Y$  e  $Z$  são os traços do ponto  $P = (u : v : w)$ .

## 2.14 Coordenadas baricêntricas do ortocentro

Outro ponto notável que também tem seu estudo iniciado na 8º ano do ensino fundamental é o ortocentro. Ele é formado pelo encontro das alturas do triângulo, segmentos de retas formado pela união do vértice e o lado oposto ou seu prolongamento, no qual é formado um ângulo reto entre o segmento e o lado.

**Proposição 14.** *As coordenadas baricêntricas do ortocentro  $H$  em função da tangente dos ângulos internos é dada por*

$$H = (tg\hat{A} : tg\hat{B} : tg\hat{C})$$

e em função dos lados por

$$H = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

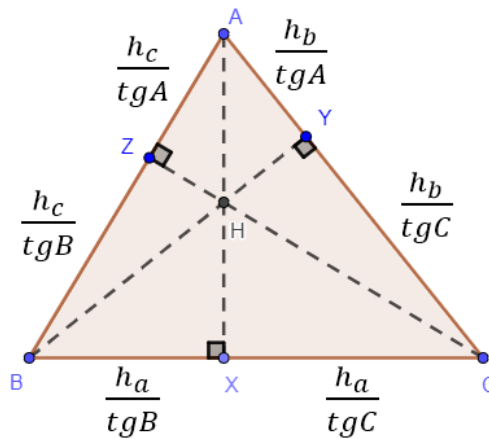
Sendo  $a, b$  e  $c$  as medidas dos respectivos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo não retângulo de referência e  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  os ângulos deste triângulo.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\Delta ABC$  não retângulo. Seja  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$  as alturas dos respectivos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ . Aplicando a definição de  $tg(x)$  ao ângulo  $\hat{A}$  do triângulo retângulo  $\Delta ZCA$ , obtemos

$$tg\hat{A} = \frac{h_c}{AZ} \Leftrightarrow \overline{AZ} = \frac{h_c}{tg\hat{A}}.$$

De modo análogo, podemos fazer com os demais segmentos conforme a figura abaixo.

Figura 21 - Ortocentro do triângulo  $\Delta ABC$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Pela Proposição 10, temos que

$$X = \left(0 : \overline{XC} : \overline{BX}\right) = \left(0 : \frac{h_a}{tg\hat{C}} : \frac{h_a}{tg\hat{B}}\right) = \left(0 : tg\hat{B} : tg\hat{C}\right),$$

$$Y = \left(\overline{CY} : 0 : \overline{YA}\right) = \left(\frac{h_b}{tg\hat{C}} : 0 : \frac{h_b}{tg\hat{A}}\right) = \left(tg\hat{A} : 0 : tg\hat{C}\right)$$

e

$$Z = \left(\overline{ZB} : \overline{AZ} : 0\right) = \left(\frac{h_c}{tg\hat{B}} : \frac{h_c}{tg\hat{A}} : 0\right) = \left(tg\hat{A} : tg\hat{B} : 0\right).$$

Logo, usando o Teorema de Ceva em coordenadas baricêntricas, temos que

$$H = \left(tg\hat{A} : tg\hat{B} : tg\hat{C}\right).$$

As coordenadas baricêntricas do ortocentro também podem ser demonstradas em função dos seus lados.

*Demonstração.* Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos  $\Delta XCA$  e  $\Delta XAB$ , temos

$$b^2 = (h_a)^2 + (\overline{XC})^2 \text{ e } c^2 = (h_a)^2 + (a - \overline{XC})^2.$$

Fazendo  $b^2 - c^2$ , temos que

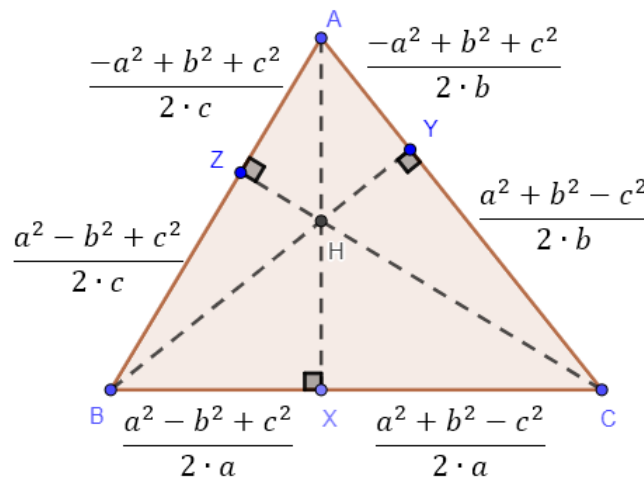
$$b^2 - c^2 = -a^2 + 2 \cdot a \cdot \overline{XC} \Leftrightarrow \overline{XC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a}.$$

Como  $\overline{BX} + \overline{XC} = a$ , temos que

$$\overline{BX} = a - \overline{XC} = a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot a}.$$

De forma análoga podemos obter os demais segmentos da figura abaixo.

Figura 22 - Medida dos segmentos formados pelos traços X, Y e Z



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Pela Proposição 10, temos que

$$X = \left( 0 : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} : \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right) \Leftrightarrow X = \left( 0 : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right),$$

$$Y = \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} : 0 : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} \right) \Leftrightarrow Y = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : 0 : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right)$$

e

$$Z = \left( \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} : 0 \right) \Leftrightarrow Z = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : 0 \right).$$

Logo, pelo Teorema de Ceva em coordenadas baricêntricas, temos que

$$H = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

Também podemos escrever

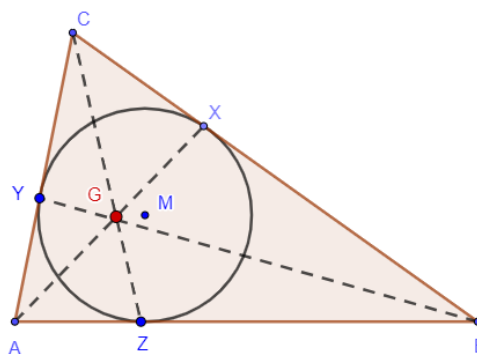
$$H = \left( (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2) \right).$$

Já no caso do triângulo de referência  $\Delta ABC$  ser retângulo, temos que a altura relativa a hipotenusa e aos dois catetos se encontram no vértice do ângulo reto. Assim temos, como visto na Proposição 3,  $H = A = (1 : 0 : 0)$ , se o triângulo é retângulo em  $A$ ,  $H = B = (0 : 1 : 0)$ , se o triângulo é retângulo em  $B$  e  $H = C = (0 : 0 : 1)$ , se o triângulo é retângulo em  $C$ .

## 2.15 Coordenadas baricêntricas do Ponto de Gergonne

Sabendo que as cevianas que conectam os vértices de um triângulo aos pontos de tangência da circunferência inscrita nesse triângulo se intersectam em um único ponto, sendo esse ponto denominado de Ponto de Gergonne, em homenagem ao matemático francês Joseph Diez Gergonne (1771-1859).

Figura 23 - Ponto de Gergonne e do incentro do  $\Delta ABC$



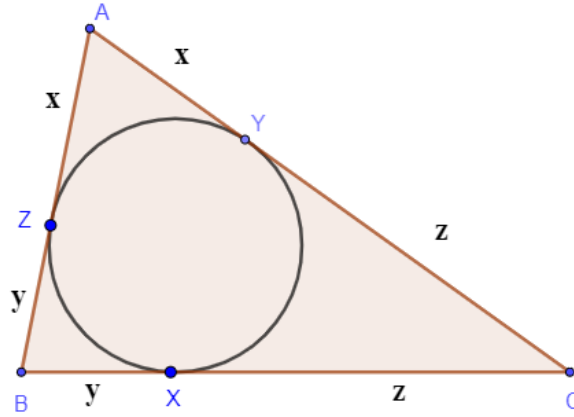
Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

**Proposição 15.** *O ponto determinado pelo encontro das cevianas dos pontos de tangência das circunferências inscritas, tem coordenadas baricêntricas*

$$\left( \frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c} \right).$$

*Demonstração.* Sabemos que as duas tangentes traçadas de um ponto exterior a um círculo têm medidas iguais. Observando a figura a seguir

Figura 24- Pontos de tangencia do  $\Delta ABC$  com a circunferência inscrita



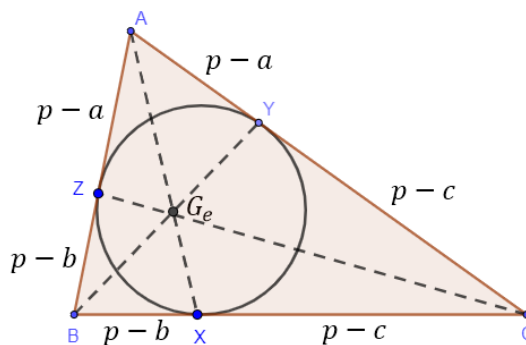
Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

temos que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são os pontos tangentes da circunferência inscrita no triângulo  $\Delta ABC$ , com medidas dos lados  $a = BC$ ,  $b = AC$  e  $c = AB$ , sendo  $a = y + z$ ,  $b = z + x$  e  $c = x + y$ . Vemos que  $2x + 2y + 2z = 2p$ , assim, temos que  $p = x + y + z$ . Dessa forma podemos fazer  $p = x + a$ , ou,  $x = p - a$ , ou seja,  $AZ = AY = p - a$ . Analogamente, temos  $ZB = BX = p - b$  e  $XC = CY = p - c$ . Observe agora que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1,$$

o que nos permite afirmar, pelo Teorema de Ceva, é que as cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes. Este ponto de concorrência  $G_e$  é denominado *ponto de Gergonne* do triângulo  $\Delta ABC$ .

Figura 25 - Ponto de Gergonne



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Como  $X, Y$  e  $Z$  são traços de  $G_e$ , temos que suas coordenadas baricêntricas são

$$X = (0 : p - c : p - b) = \left( 0 : \frac{1}{p - b} : \frac{1}{p - c} \right),$$

$$Y = (p - c : 0 : p - a) = \left( \frac{1}{p - a} : 0 : \frac{1}{p - c} \right)$$

e

$$Z = (p - b : p - a : 0) = \left( \frac{1}{p - a} : \frac{1}{p - b} : 0 \right).$$

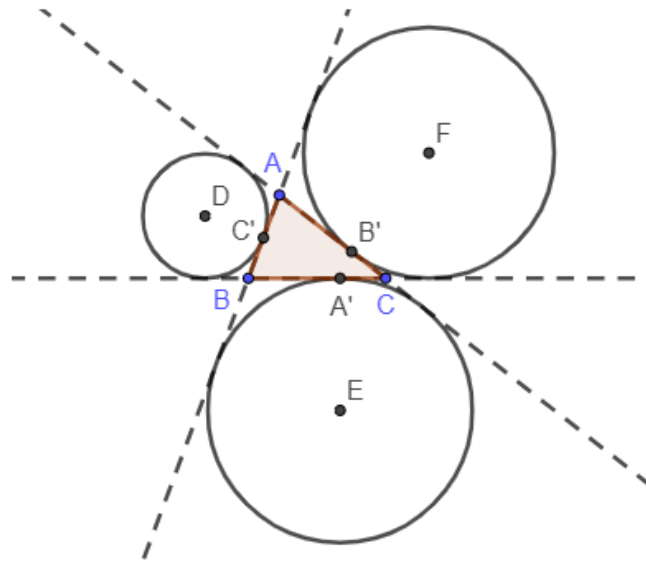
Assim, pelo Teorema de Ceva em coordenadas baricêntricas, temos que

$$G_e = \left( \frac{1}{p - a} : \frac{1}{p - b} : \frac{1}{p - c} \right).$$

## 2.16 Coordenadas baricêntricas do Ponto de Nagel

**Definição 11.** As cevianas que ligam cada vértice de um triângulo  $\Delta ABC$  ao ponto de tangência dos círculos ex-inscritos com o lado oposto intersectam-se no mesmo ponto, sendo esse ponto denominado de Ponto de Nagel<sup>1</sup>.

Figura 26 - Circunferências ex-inscritas do triângulo  $\Delta ABC$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

<sup>1</sup> Christian Heinrich von Nagel (1803 – 1882) Professor e geômetra alemão. Nasceu em Stuttgart, Alemanha e faleceu em Ulm, Alemanha. Publicou seis artigos matemáticos voltados ao estudo de pontos em um triângulo que ocorrem como a interseção de linhas concorrentes, sendo o ponto de Nagel o mais famoso deles.

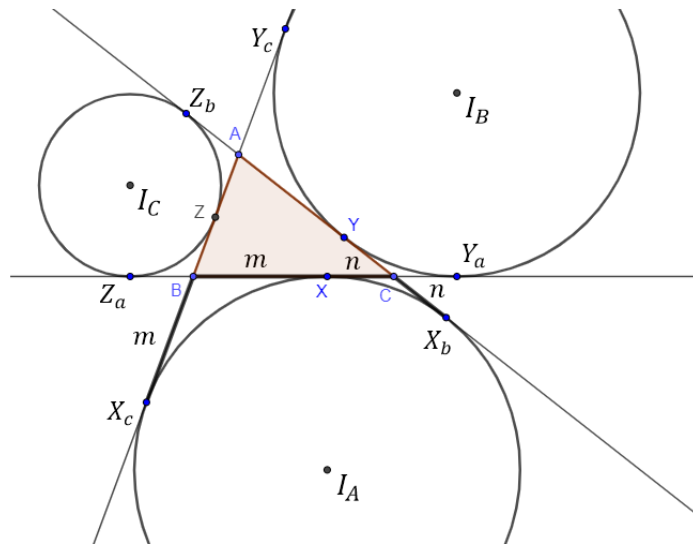


**Proposição 16.** *As coordenadas baricêntricas do ponto determinado pelo encontro das cevianas dos pontos de tangência das circunferências ex-inscritas é dada por*

$$(p - a : p - b : p - c).$$

*Demonstração.* Consideremos o triângulo de referência  $\triangle ABC$ , sendo  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$  e  $|AB| = c$ , as medidas euclidianas dos lados desse triângulo e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com esses lados, respectivamente. Consideremos também  $Y_a$ ,  $Y_c$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ ,  $Z_a$  e  $Z_b$ , os pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com os prolongamentos dos lados do triângulo de referência, como mostrado na figura a seguir.

Figura 27 - Pontos de tangência das circunferências ex-inscritas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Da geometria euclidiana, temos que  $|AX_b| = |AX_c|$ ,  $|BY_c| = |BY_a|$  e  $|CZ_a| = |CZ_b|$ . Também teremos que  $|BX| = |BX_c| = m$  e  $|CX| = |CX_b| = n$ . Assim, podemos fazer

$$2p = a + b + c = (m + n) + b + c = (b + n) + (c + m) = |AX_b| + |AX_c|.$$

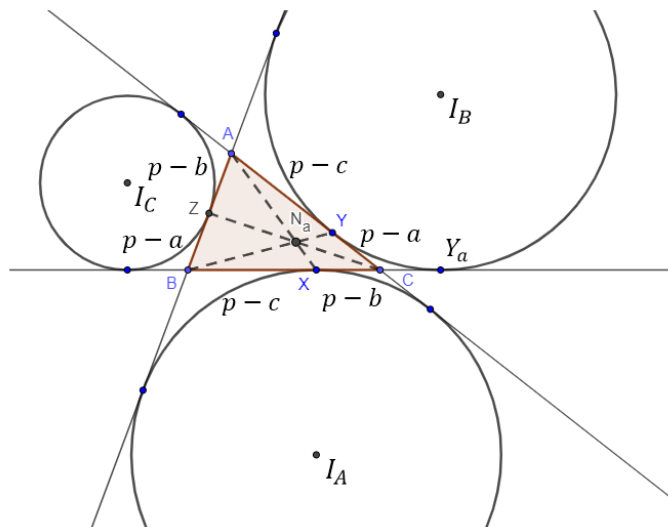
Como  $|AX_b| = |AX_c| = p$ , temos que  $(c + m) = p \Rightarrow m = p - c$  e  $(b + n) = p \Rightarrow n = p - b$ . De forma análoga, sendo  $|BY_c| = |BY_a| = p$  e  $|CZ_a| = |CZ_b| = p$ , teremos  $|CY| = p - a$ ,  $|YA| = p - c$ ,  $|AZ| = p - b$  e  $|ZB| = p - a$ .

Observe que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1,$$

o que nos permite afirmar, pelo Teorema de Ceva, que as cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes. Este ponto de concorrência  $N_a$  é denominado *ponto de Nagel* do triângulo  $\triangle ABC$ .

Figura 28 - Ponto de Nagel



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Como  $X = (0 : p - b : p - c)$ ,  $Y = (p - a : 0 : p - c)$  e  $Z = (p - a : p - b : 0)$ , pelo Teorema de Ceva em coordenadas baricêntricas, segue-se que

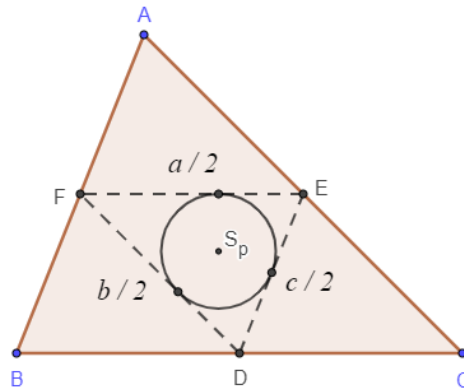
$$N_a = (p - a : p - b : p - c).$$

## 2.17 Coordenadas baricêntricas do centro de Spieker

A interseção das bissetrizes internas do triângulo medial de um triângulo de referência  $\triangle ABC$  é denominado de Centro de Spieker<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Theodoro Spieker (1823 – 1913) Professor matemático alemão, lecionou no ensino médio em Potsdam. Pertenceu à geração de professores que cultivaram e desenvolveram a geometria elementar no século XIX.

Figura 29. Centro de Spieker



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

**Proposição 17.** O incentro do triângulo medial de um triângulo de referência  $\Delta ABC$ , de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tem coordenadas baricêntricas

$$S_p = (2p - a : 2p - b : 2p - c).$$

*Demonstração.* As coordenadas baricêntricas do incentro  $I$  de um triângulo  $\Delta ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dadas por  $I = (a : b : c)$ . Pela definição de coordenadas baricêntricas pode-se afirmar que

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c}.$$

Sendo  $S_p$  o incentro do triângulo medial  $\Delta DEF$  de lados  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{b}{2}$  e  $\frac{c}{2}$ , suas coordenadas

baricêntricas podem ser expressas por  $S_p = \left(\frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \frac{c}{2}\right)$ . Pela definição de coordenadas

baricêntricas é possível afirmar que

$$S_p = \frac{\frac{a}{2} \cdot D + \frac{b}{2} \cdot E + \frac{c}{2} \cdot F}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}} \Rightarrow \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) \cdot S_p = \frac{a}{2} \cdot D + \frac{b}{2} \cdot E + \frac{c}{2} \cdot F,$$

ou seja,

$$(a + b + c) \cdot S_p = a \cdot D + b \cdot E + c \cdot F.$$

Como  $D$ ,  $E$  e  $F$  são os pontos médios dos respectivos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , temos que

$$2p \cdot S_p = a \cdot \left( \frac{B+C}{2} \right) + b \cdot \left( \frac{A+C}{2} \right) + c \cdot \left( \frac{A+B}{2} \right)$$

↓

$$2p \cdot S_p = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot (B+C) + b \cdot (A+C) + c \cdot (A+B))$$

↓

$$4p \cdot S_p = a \cdot B + a \cdot C + b \cdot A + b \cdot C + c \cdot A + c \cdot B$$

↓

$$4p \cdot S_p = (b+c) \cdot A + (a+c) \cdot B + (a+b) \cdot C$$

Como  $4p = 2(a+b+c) = 2a + 2b + 2c = (b+c) + (a+c) + (a+b)$ , temos que

$$S_p = \frac{(b+c) \cdot A + (a+c) \cdot B + (a+b) \cdot C}{(b+c) + (a+c) + (a+b)}.$$

Logo, temos que  $S_p$  é média ponderada dos vértices do triângulo de referência  $\triangle ABC$  com pesos  $b+c$ ,  $a+c$  e  $a+b$ . Assim, Pela Definição 2, as coordenadas baricêntricas do Centro de Spieker são dadas por

$$S_p = (b+c : a+c : a+b) = (2p-a : 2p-b : 2p-c).$$

### 3 EQUAÇÕES DE RETA EM COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Este capítulo tratará da utilização de coordenadas baricêntricas na representação de equações de retas e pontos num plano. Veremos equação da reta passando por dois pontos, paralelismo e perpendicularismo de retas em coordenadas baricêntricas, interseção de retas e distância entre dois pontos. Além dos temas mencionados, também será abordado algumas definições e proposições fundamentais para um melhor entendimento, como a notação de Conway, ponto no infinito de uma reta e a reinterpretação do conceito de paralelismo.

#### 3.1 Notação de Conway

A Notação de Conway, permitirá de maneira mais simples, a expressão de coordenadas baricêntricas de determinados pontos, promovendo o auxílio no estudo de retas que será apresentada neste capítulo.

**Definição 12.** (Notação de Conway) *Seja  $S$  a área euclidiana de um triângulo  $\Delta ABC$  e  $D = 2S$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são medidas de ângulo de um triângulo  $\Delta ABC$ , denotamos*

$$\Sigma_{\alpha} = 2S \cdot \cot g(\alpha) = D \cdot \cot g(\alpha) \text{ e } \Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma_{\alpha} \cdot \Sigma_{\beta}.$$

Sejam  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  as medidas dos ângulos e  $a = BC$ ,  $b = AC$  e  $c = AB$  as medidas dos lados de um triângulo de referência  $\Delta ABC$ , temos

$$\Sigma_A = 2S \cdot \cot g(\hat{A}) = 2 \cdot \frac{bc \cdot \text{sen}(\hat{A})}{2} \cdot \frac{\cos(\hat{A})}{\text{sen}(\hat{A})} = bc \cdot \cos(\hat{A}).$$

De forma análoga, temos

$$\Sigma_B = ac \cdot \cos(\hat{B}) \text{ e } \Sigma_C = ab \cdot \cos(\hat{C}).$$

Aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A}) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\Sigma_A \Rightarrow \Sigma_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

$$\text{Analogamente, } \Sigma_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \text{ e } \Sigma_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Dessa observação, segue imediatamente que

$$\begin{cases} \Sigma_B + \Sigma_C = a^2 \\ \Sigma_C + \Sigma_A = b^2 \\ \Sigma_A + \Sigma_B = c^2. \end{cases}$$

Da mesma forma, segue

$$\begin{cases} \Sigma_B - \Sigma_C = c^2 - b^2 \\ \Sigma_C - \Sigma_A = a^2 - c^2 \\ \Sigma_A - \Sigma_B = b^2 - a^2. \end{cases}$$

Observe que, se  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são os ângulos internos do triângulo de referência  $\Delta ABC$ , temos que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}.$$

Aplicando tangente em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\hat{A} + \hat{B}) &= \operatorname{tg}(180^\circ - \hat{C}) \\ &\Downarrow \\ \frac{\operatorname{tg}(\hat{A}) + \operatorname{tg}(\hat{B})}{1 - \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B})} &= -\operatorname{tg}(\hat{C}) \\ &\Downarrow \\ \operatorname{tg}(\hat{A}) + \operatorname{tg}(\hat{B}) &= -\operatorname{tg}(\hat{C}) + \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{C}) \\ &\Downarrow \\ \operatorname{tg}(\hat{A}) + \operatorname{tg}(\hat{B}) + \operatorname{tg}(\hat{C}) &= \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{C}). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por  $\operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{C})$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{B})} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{C})} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{A})} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{C})} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{A})} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{B})} &= 1 \\ &\Downarrow \\ \cot g(\hat{B}) \cot g(\hat{C}) + \cot g(\hat{A}) \cot g(\hat{C}) + \cot g(\hat{A}) \cot g(\hat{B}) &= 1. \end{aligned}$$

Desta maneira, temos

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{BC} + \Sigma_{CA} + \Sigma_{AB} \\
& \Downarrow \\
& \Sigma_B \cdot \Sigma_C + \Sigma_C \cdot \Sigma_A + \Sigma_A \cdot \Sigma_B \\
& \Downarrow \\
& D^2 \cdot \cot g(\hat{B}) \cdot \cot g(\hat{C}) + D^2 \cdot \cot g(\hat{A}) \cdot \cot g(\hat{C}) + D^2 \cdot \cot g(\hat{A}) \cdot \cot g(\hat{B}) \\
& \Downarrow \\
& D^2 \cdot (\cot g(\hat{B}) \cdot \cot g(\hat{C}) + \cot g(\hat{A}) \cdot \cot g(\hat{C}) + \cot g(\hat{A}) \cdot \cot g(\hat{B})) \\
& \Downarrow \\
& D^2 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Assim, temos que  $\Sigma_{BC} + \Sigma_{CA} + \Sigma_{AB} = D^2$ .

Também é fácil observar que

$$\Sigma_{-\alpha} = 2S \cdot \cot g(-\alpha) = -2S \cdot \cot g(\alpha) = -\Sigma_{\alpha}.$$

### 3.2 Equações de reta em coordenadas baricêntricas

**Teorema 4.** *Dado um triângulo de referência  $\Delta ABC$  no plano. Para toda reta  $l$  no plano, existem constantes  $p$ ,  $q$  e  $r$ , não simultaneamente iguais, tais que*

$$l = \{(x : y : z) / p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z = 0\}.$$

*De forma recíproca, sendo  $p$ ,  $q$  e  $r$  constantes não simultaneamente iguais, então o conjunto  $l = \{(x : y : z) / p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z = 0\}$  é uma reta no plano.*

*Demonstração.* Sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  dois pontos distintos da reta  $l$ , com  $u_1 + v_1 + w_1 \neq 0$  e  $u_2 + v_2 + w_2 \neq 0$ . Se um ponto qualquer  $P = (x : y : z)$  pertence a reta  $l = P_1P_2$ , então, os pontos  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são colineares se o determinante formado pelas suas coordenadas baricêntricas é nulo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Fazendo

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = p, \quad \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} = -q \text{ e } \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = r,$$

temos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z = 0.$$

Reciprocamente, dado uma equação  $p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z = 0$ , com  $p, q$  e  $r$  não iguais simultaneamente, sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  dois pontos que a satisfazem, com soma das coordenadas diferente de zero. Para qualquer ponto  $P_3 = (u_3 : v_3 : w_3)$ , em que a soma das coordenadas sejam diferente de zero e que satisfaça a equação, temos que ele pertencerá à reta  $P_1P_2$ . Uma vez que  $P_1, P_2$  e  $P_3$  satisfazem a equação, temos que  $(p, q, r)$  é uma solução não nula do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} p \cdot u_1 + q \cdot v_1 + r \cdot w_1 = 0 \\ p \cdot u_2 + q \cdot v_2 + r \cdot w_2 = 0 \\ p \cdot u_3 + q \cdot v_3 + r \cdot w_3 = 0 \end{cases}$$

e, portanto, pela teoria de sistemas lineares, temos

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, os pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são colineares, e  $P_3$  pertence à reta  $P_1P_2$ .

**Proposição 18.** Se  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  são pontos cuja as somas de suas coordenadas são diferentes de zero, então a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , tem equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } x \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Se  $P = (x : y : z)$  é um ponto pertencente a reta  $P_1P_2$ , com  $x + y + z \neq 0$ , então, os pontos  $P_1, P_2$  e  $P$  são colineares e o determinante formado pelas suas coordenadas baricêntricas é nulo.



**Exemplo 1.** *Determine as equações das retas  $AG$ ,  $BG$  e  $CG$ , sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices do triângulo  $\Delta ABC$  e  $G$  o seu baricentro.*

*Solução.* Sendo  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ , temos que as medianas do triângulo, passa pelo baricentro  $G$  do  $\Delta ABC$  que tem coordenadas baricêntricas  $G = (1 : 1 : 1)$ . Assim temos a equação da reta  $AG$ , sendo

$$x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot 0 - y \cdot 1 + z \cdot 1 = 0.$$

Assim teremos  $-y + z = 0$ , a equação de  $AG$ .

De forma análoga, teremos  $x - z = 0$  e  $-x + y = 0$ , as equações das medianas  $BG$  e  $CG$ , respectivamente.

**Exemplo 2.** *Dado o triângulo  $\Delta ABC$ , determine as equações das retas das bissetrizes internas  $AI$ ,  $BI$  e  $CI$ .*

*Solução.* Sendo  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ , temos que as bissetrizes internas do triângulo passa pelo Incentro  $I$  do  $\Delta ABC$  que tem coordenadas baricêntricas  $I = (a : b : c)$ . Assim temos a equação da reta  $AI$ , sendo

$$x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot 0 - y \cdot c + z \cdot b = 0.$$

Logo, temos que  $bz - cy = 0$ , a equação de  $AI$ .

De forma análoga, teremos  $cx - az = 0$  e  $ay - bx = 0$ , as equações das bissetrizes internas  $BI$  e  $CI$ , respectivamente.

### 3.3 Ponto no infinito de uma reta

Seja  $l_\infty$  o conjunto formado por todos os pontos no infinito, temos que

$$l_\infty = \{(x_P : y_P : z_P) / x_P + y_P + z_P = 0\}.$$

Como para todo ponto  $(x : y : z)$  do conjunto  $l_\infty$  satisfaz a equação  $x + y + z = 0$ , temos que ela também representará uma “reta no infinito”.

**Proposição 19.** *Se  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  são pontos distintos não no infinito e com coordenadas baricêntricas balanceadas, então as coordenadas baricêntricas do ponto no infinito da reta  $P_1P_2$  são dadas por*

$$P_\infty(P_1P_2) = P_1 - P_2 = (u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2).$$

*Demonstração.* Suponha que  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  sejam dois pontos distintos balanceados, com soma igual a  $\lambda$ , ( $\lambda \neq 0$ ).

Suponha  $P = (u_P : v_P : w_P) = P_1 - P_2 = (u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2)$ . Como  $P$  é uma combinação linear de  $P_1$  e  $P_2$ , temos que

$$\begin{vmatrix} u_1 - u_2 & v_1 - v_2 & w_1 - w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Desse modo, temos que  $P$  satisfaz a equação da reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Como as coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$  estão balanceadas, temos que a soma das coordenadas baricêntricas do ponto  $P$  é dada por  $s(P) = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) = \lambda - \lambda = 0$ . Logo,  $P$  é ponto no infinito da reta  $P_1$  e  $P_2$ .

**Proposição 20.** *Se uma reta  $l$  tem equação  $px + qy + rz = 0$ , então o ponto no infinito dessa reta é*

$$P_\infty = (q - r : r - p : p - q).$$

*Demonstração.* Tomemos o ponto  $P = (q - r : r - p : p - q)$ . Note que o ponto  $P$  é um ponto pertencente a reta  $px + qy + rz = 0$ , pois  $p(q - r) + q(r - p) + r(p - q) = pq - pr + qr - qp + rp - rq = 0$ . Observe que a soma das coordenadas baricêntricas de  $P$  é igual a zero,  $(q - r) + (r - p) + (p - q) = 0$ , o que nos garante que  $P$  é um ponto no infinito. Dessa forma, temos que  $P_\infty = (q - r : r - p : p - q)$  é o ponto no infinito da reta de equação  $px + qy + rz = 0$ .

### 3.4 Retas paralelas em coordenadas baricêntricas

A introdução do ponto no infinito no espaço das coordenadas baricêntricas nos permite reinterpretar o conceito de paralelismo de forma diferente daquele definido pela geometria

euclidiana, no qual classifica retas paralelas sendo aquelas que nunca se cruzam e não há ponto em comum entre elas.

**Definição 13.** *Retas paralelas são retas distintas que possuem o mesmo ponto no infinito.*

**Proposição 21.** *Se uma reta  $l$  passa por um ponto  $P = (u : v : w)$  e é paralela a uma reta  $l'$  de equação  $px + qy + rz = 0$ , então sua equação é dada por*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ q-r & r-p & p-q \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Consideremos um ponto  $P = (u : v : w)$  e uma reta  $l'$  de equação  $px + qy + rz = 0$ . Pela Proposição 20, a reta  $l'$  tem ponto no infinito  $P_\infty = (q-r : r-p : p-q)$ . Sendo  $l'$  uma reta paralela a  $l$ , então temos que ambas possuem o mesmo ponto no infinito, assim  $P_\infty \in l$ . Desse modo,  $P$  e  $P_\infty$  satisfazem a equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ q-r & r-p & p-q \end{vmatrix} = 0,$$

o que garante o resultado.

### 3.5 Interseção de duas retas

**Proposição 22.** *Se duas retas distintas  $p_1x + q_1y + r_1z = 0$  e  $p_2x + q_2y + r_2z = 0$  se interseção em um ponto  $P$ , então as coordenadas baricêntricas do ponto é*

$$P = \left( \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

*Demonstração.* Considere um ponto  $P$  de coordenadas baricêntricas

$$P = \left( \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

Como

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

temos que

$$p_1 \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} - q_1 \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} + r_1 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$p_2 \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} - q_2 \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} + r_2 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dessa forma, temos que  $P$  satisfaz as equações das retas  $p_1x + q_1y + r_1z = 0$  e  $p_2x + q_2y + r_2z = 0$  simultaneamente, o que nos garante que  $P$  é o ponto de interseção dessas retas.

### 3.6 Retas perpendiculares em coordenadas baricêntricas

**Proposição 23.** *Se  $P_\infty(l) = (f : g : h)$  é o ponto no infinito da reta  $l$ , então o ponto no infinito de todas as retas  $l'$  perpendiculares a  $l$  é dada por*

$$P_\infty(l') = (g\Sigma_B - h\Sigma_C : h\Sigma_C - f\Sigma_A : f\Sigma_A - g\Sigma_B).$$

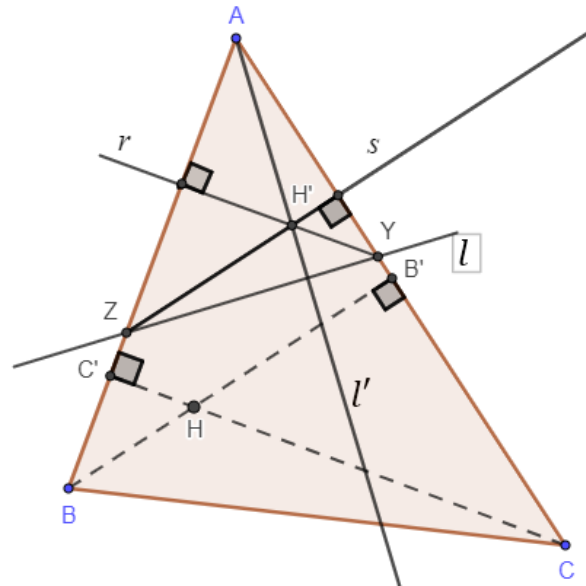
*Demonstração.* Seja  $px + qy + rz = 0$  a equação da reta  $l$  com  $P_\infty(l) = (f : g : h)$ .

a) Sendo  $Y \in \overline{CA}$  e  $Z \in \overline{AB}$  do  $\Delta ABC$ , usando a Proposição 22, temos que a reta  $l$  corta o lado  $AC$  em  $Y = (-r : 0 : p)$  e corta o lado  $AB$  em  $Z = (q : -p : 0)$ .

b) Como  $P_\infty = (q - r : r - p : p - q) = (f : g : h)$ , então existe um número real não nulo  $k$  tal que  $q - r = kf$ ,  $r - p = kg$ ,  $p - q = kh$ .

Pela figura 29, temos que a reta  $l'$  é perpendicular à reta  $l$ , a reta  $r$  é perpendicular ao lado  $AB$  e paralela à altura  $h_c$ , a reta  $s$  é perpendicular ao lado  $CA$  e paralela à altura  $h_b$ . Observe também que  $H$  é o ortocentro do triângulo  $\Delta ABC$  e  $H'$  é ortocentro do triângulo  $\Delta AZY$ .

Figura 29 - Retas perpendiculares



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Da relação entre o paralelismo das retas  $r$  e  $s$  com as alturas  $h_c$  e  $h_b$ , temos

$$P_{\infty}(r) = P_{\infty}(h_c) = (\Sigma_B : \Sigma_A : -c^2) \text{ e } P_{\infty}(s) = P_{\infty}(h_b) = (\Sigma_C : -b^2 : \Sigma_A).$$

A equação da reta  $r$  que passa por  $P_{\infty}(r)$  e  $Y$  é dada por

$$\begin{vmatrix} \Sigma_A & -c^2 \\ 0 & p \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} \Sigma_B & -c^2 \\ -r & p \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} \Sigma_B & \Sigma_A \\ -r & 0 \end{vmatrix} \cdot z = 0,$$

que implica em

$$p\Sigma_A \cdot x - (p\Sigma_B - rc^2) \cdot y + r\Sigma_A \cdot z = 0.$$

A equação da reta  $s$  que passa por  $P_{\infty}(s)$  e  $Z$  é dada por

$$\begin{vmatrix} -b^2 & \Sigma_A \\ -p & 0 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} \Sigma_C & S_A \\ q & 0 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} \Sigma_C & -b^2 \\ q & -p \end{vmatrix} \cdot z = 0,$$

que implica em

$$p\Sigma_A \cdot x + q\Sigma_A \cdot y + (qb^2 - p\Sigma_C) \cdot z = 0.$$

Como  $H'$  é o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ , pela Proposição 22, segue-se que

$$\begin{aligned}
H' &= \left( * : - \left| \begin{array}{cc} p\Sigma_A & r\Sigma_A \\ p\Sigma_A & qb^2 - p\Sigma_C \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} p\Sigma_A & -(p\Sigma_B - rc^2) \\ p\Sigma_A & q\Sigma_A \end{array} \right| \right) \\
&= \left( * : -p\Sigma_A \left| \begin{array}{cc} 1 & r\Sigma_A \\ 1 & qb^2 - p\Sigma_C \end{array} \right| : p\Sigma_A \left| \begin{array}{cc} 1 & -(p\Sigma_B - rc^2) \\ 1 & q\Sigma_A \end{array} \right| \right) \\
&= \left( * : \left| \begin{array}{cc} 1 & r\Sigma_A \\ 1 & qb^2 - p\Sigma_C \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} 1 & -(p\Sigma_B - rc^2) \\ 1 & q\Sigma_A \end{array} \right| \right) \\
&= (* : -qb^2 + p\Sigma_C + r\Sigma_A : q\Sigma_A + p\Sigma_B - rc^2) \\
&= (* : -q(\Sigma_C + \Sigma_A) + p\Sigma_C + r\Sigma_A : q\Sigma_A + p\Sigma_B - r(\Sigma_A + \Sigma_B)) \\
&= (* : (p - q)\Sigma_C - (q - r)\Sigma_A : (q - r)\Sigma_A - (r - p)\Sigma_B).
\end{aligned}$$

Visto que  $q - r = kf$ ,  $r - p = kg$ ,  $p - q = kh$ , temos que

$$H' = (* : kh\Sigma_C - kf\Sigma_A : kf\Sigma_A - kg\Sigma_B) = (* : h\Sigma_C - f\Sigma_A : f\Sigma_A - g\Sigma_B).$$

Conhecendo as coordenadas baricêntricas de  $H'$ , podemos calcular a equação da reta  $l'$  que passa pelos pontos  $A = (1 : 0 : 0)$  e  $H' = (* : h\Sigma_C - f\Sigma_A : f\Sigma_A - g\Sigma_B)$ :

$$\left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ h\Sigma_C - f\Sigma_A & f\Sigma_A - g\Sigma_B \end{array} \right| \cdot x - \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ * & f\Sigma_A - g\Sigma_B \end{array} \right| \cdot y + \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ * & h\Sigma_C - f\Sigma_A \end{array} \right| \cdot z = 0,$$

que implica em

$$0 \cdot x + (g\Sigma_B - f\Sigma_A) \cdot (h\Sigma_C - f\Sigma_A) \cdot z = 0.$$

Assim, na equação da reta  $l'$ , temos que  $p = 0$ ,  $q = g\Sigma_B - f\Sigma_A$  e  $r = h\Sigma_C - f\Sigma_A$ . Pela Proposição 21, vimos que  $P_\infty = (q - r : r - p : p - q)$  é o ponto no infinito de uma reta de equação  $px + qy + rz = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
P_\infty(l') &= (q - r : r - p : p - q) \\
&= ((g\Sigma_B - f\Sigma_A) - (h\Sigma_C - f\Sigma_A) : (h\Sigma_C - f\Sigma_A) - 0 : 0 - (g\Sigma_B - f\Sigma_A)) \\
&= (g\Sigma_B - h\Sigma_C : h\Sigma_C - f\Sigma_A : f\Sigma_A - g\Sigma_B).
\end{aligned}$$

Observe que qualquer outra reta perpendicular à reta  $l$  é uma reta paralela a reta  $l'$ , logo temos pela definição de paralelismo em coordenadas baricêntricas que o ponto no infinito da reta  $l'$  é o ponto no infinito de qualquer outra reta perpendicular a  $l$ .

**Proposição 24.** *Seja  $l'$  uma reta que passa pelo ponto  $P = (u : v : w)$  e é perpendicular à reta  $l$ , sendo  $P_\infty(l) = (f : g : h)$  o ponto no infinito de  $l$ , então a equação da reta  $l'$  é dada por*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ g\Sigma_B - h\Sigma_C & h\Sigma_C - f\Sigma_A & f\Sigma_A - g\Sigma_B \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 23, temos que o ponto no infinito de  $l'$  é dado por

$$P_\infty(l') = (g\Sigma_B - h\Sigma_C : h\Sigma_C - f\Sigma_A : f\Sigma_A - g\Sigma_B).$$

Como  $P$  e  $P_\infty(l')$  pertencem a  $l'$ , então a equação de  $l'$  é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ g\Sigma_B - h\Sigma_C & h\Sigma_C - f\Sigma_A & f\Sigma_A - g\Sigma_B \end{vmatrix} = 0.$$

### 3.7 Distância entre dois pontos em coordenadas baricêntricas

**Proposição 25.** *Sejam  $P = (u_p : v_p : w_p)$  e  $Q = (u_Q : v_Q : w_Q)$  dois pontos do plano balanceados com soma  $s$ , então a distância euclidiana entre esses pontos é dado por*

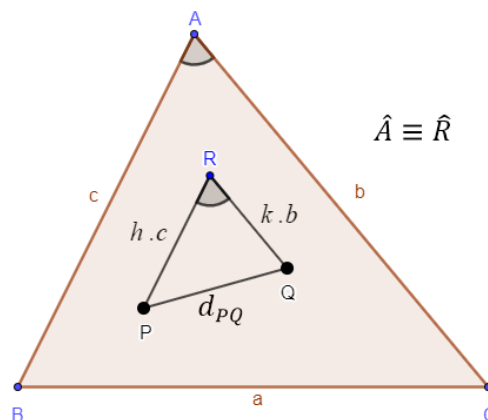
$$|PQ|^2 = \frac{\Sigma_A \cdot \Delta_u^2 + \Sigma_B \cdot \Delta_v^2 + \Sigma_C \cdot \Delta_w^2}{s^2},$$

onde  $\Delta_u = u_Q - u_P$ ,  $\Delta_v = v_Q - v_P$  e  $\Delta_w = w_Q - w_P$ .

*Demonstração.* Como  $P$  e  $Q$  estão balanceados com soma  $s$ , temos que  $u_p + v_p + w_p = s$  e  $u_Q + v_Q + w_Q = s$ . Temos também que  $s(P) = (u_p A + v_p B + w_p C)$  e  $s(Q) = (u_Q A + v_Q B + w_Q C)$ , e  $\Delta_u + \Delta_v + \Delta_w = s - s = 0$ .

Observe a figura a seguir, nela foram traçado uma reta paralela ao lado  $AB$  partindo de  $P$  e uma reta paralela ao lado  $CA$  partindo de  $Q$ , que se intersectam no ponto  $R$ .

Figura 31 - Distância entre os pontos  $P$  e  $Q$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Temos que  $P_{\infty}(PR) = P - R$  e  $P_{\infty}(BA) = B - A$ . Do paralelismo das retas  $AB$  e  $RP$ , temos que  $P_{\infty}(PR) = P_{\infty}(BA)$ , ou seja, existe um real  $h$ , não nulo, tal que  $P - R = h \cdot (B - A)$  e  $|RP| = h \cdot c$ , supondo que todos os pontos estão balanceados com soma  $s$ .

Temos também que  $P_{\infty}(AC) = A - C$  e  $P_{\infty}(RQ) = R - Q$ . Do paralelismo das retas  $CA$  e  $QR$  e supondo que todos os pontos estão balanceados com soma  $s$ , temos que  $P_{\infty}(AC) = P_{\infty}(RQ)$ , ou seja, existe um real  $k$ , não nulo, tal que  $R - Q = k \cdot (A - C)$  e  $|QR| = k \cdot b$ .

Assim, temos  $P - h \cdot (B - A) = Q + k \cdot (A - C)$  e, portanto,  $sP - sh \cdot (B - A) = sQ + sk \cdot (A - C)$ .

Ao substituir os valores de  $sP$  e  $sQ$ , obtemos  $P = (u_p : v_p : w_p)$  e  $Q = (u_Q : v_Q : w_Q)$

$$(u_p A + v_p B + w_p C) - sh \cdot (B - A) = (u_Q A + v_Q B + w_Q C) + sk \cdot (A - C)$$

$\Downarrow$

$$u_p A + v_p B + w_p C - shB + shA = u_Q A + v_Q B + w_Q C + skA - skC$$

$\Downarrow$

$$(u_p + sh)A + (v_p - sh)B + w_p C = (u_Q + sk)A + v_Q B + (w_Q - sk)C.$$



Assim, segue-se que

$$\begin{cases} u_Q + sk = u_P + sh \\ v_Q = v_P - sh \\ w_Q - sk = w_P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_Q - u_P = sh - sk \\ v_Q - v_P = -sh \\ w_Q - w_P = sk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_u = sh - sk \\ \Delta_v = -sh \\ \Delta_w = sk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{-\Delta_v}{s} \\ k = \frac{\Delta_w}{s} \end{cases}$$

Aplicando-se a Lei dos Cossenos ao triângulo  $\Delta RPQ$ , temos que

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= (h \cdot c)^2 + (k \cdot b)^2 - 2 \cdot (h \cdot c) \cdot (k \cdot b) \cdot \cos(A) \\ &= \left( \frac{-\Delta_v}{s} \cdot c \right)^2 + \left( \frac{\Delta_w}{s} \cdot b \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{-\Delta_v}{s} \cdot c \right) \cdot \left( \frac{\Delta_w}{s} \cdot b \right) \cdot \cos(A) \\ &= \frac{\Delta_v^2 \cdot c^2}{s^2} + \frac{\Delta_w^2 \cdot b^2}{s^2} + \frac{2 \cdot \Delta_v \cdot \Delta_w \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)}{s^2} \\ &= \frac{\Delta_v^2 \cdot c^2 + \Delta_w^2 \cdot b^2 + 2 \cdot \Delta_v \cdot \Delta_w \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)}{s^2}. \end{aligned}$$

Note que pela Notações de Conway, temos que  $b^2 = \Sigma_C + \Sigma_A$ ,  $c^2 = \Sigma_A + \Sigma_B$  e  $\Sigma_A = b \cdot c \cdot \cos(A)$ , assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= \frac{\Delta_v^2 \cdot (\Sigma_A + \Sigma_B) + \Delta_w^2 \cdot (\Sigma_C + \Sigma_A) + 2 \cdot \Delta_v \cdot \Delta_w \cdot \Sigma_A}{s^2} \\ &= \frac{\Delta_v^2 \cdot \Sigma_A + \Delta_v^2 \cdot \Sigma_B + \Delta_w^2 \cdot \Sigma_C + \Delta_w^2 \cdot \Sigma_A + 2 \cdot \Delta_v \cdot \Delta_w \cdot \Sigma_A}{s^2}. \end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= \frac{\Sigma_A (\Delta_v^2 + 2 \cdot \Delta_v \cdot \Delta_w + \Delta_w^2) + \Sigma_B \cdot \Delta_v^2 + \Sigma_C \cdot \Delta_w^2}{s^2} \\ &= \frac{\Sigma_A (\Delta_v + \Delta_w)^2 + \Sigma_B \cdot \Delta_v^2 + \Sigma_C \cdot \Delta_w^2}{s^2} \\ &= \frac{\Sigma_A (-\Delta_u)^2 + \Sigma_B \cdot \Delta_v^2 + \Sigma_C \cdot \Delta_w^2}{s^2} \\ &= \frac{\Sigma_A \cdot \Delta_u^2 + \Sigma_B \cdot \Delta_v^2 + \Sigma_C \cdot \Delta_w^2}{s^2}. \end{aligned}$$

Se as coordenadas baricêntricas dos pontos  $P$  e  $Q$  estiverem na forma absoluta,  $s = 1$ , então a distância entre eles é dada por

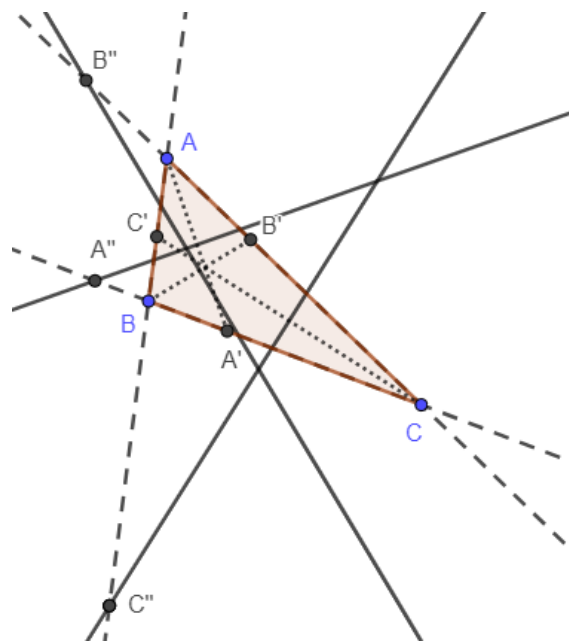
$$|PQ|^2 = \Sigma_A \cdot \Delta_u^2 + \Sigma_B \cdot \Delta_v^2 + \Sigma_C \cdot \Delta_w^2.$$

#### 4 PROBLEMAS

**Problema 1.** (TCS 2013) Dado um triângulo escaleno  $ABC$ , sejam  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  os pontos de interseção das bissetrizes internas de  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  com os lados opostos, respectivamente. Seja  $A''$  a interseção entre a reta  $BC$  e a mediatriz de  $AA'$ . Defina  $B''$  e  $C''$  de modo análogo. Mostre que  $A''$ ,  $B''$  e  $C''$  são colineares.

Solução:

Figura 32 – Problema 1



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

I) Equação da reta que passa pelos pontos  $AA'$

$$A = (1 : 0 : 0) \text{ e } A' = (0 : b : c)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \cdot z = 0 \Rightarrow 0 \cdot x - c \cdot y + b \cdot z = 0$$

II) Forma balanceada dos pontos  $A$  e  $A'$

$$A = (b + c : 0 : 0) \text{ e } A' = (0 : b : c)$$

III) Ponto médio do segmento  $AA'$

$$P_M(AA') = A + A' = (b+c : b : c)$$

IV) Ponto no infinito da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $A'$

$$P_\infty(AA') = A - A' = (b+c : -b : -c)$$

V) Equação de uma reta dado um ponto e uma perpendicular

$$P_\infty(AA') = (b+c : -b : -c) \text{ e } P_M(AA') = (b+c : b : c)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b+c & b & c \\ -bS_B + cS_C & -cS_C - (b+c)S_A & (b+c)S_A + bS_B \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ -cS_C - (b+c)S_A & (b+c)S_A + bS_B \end{vmatrix}}_{p_1} \cdot x - \underbrace{\begin{vmatrix} b+c & c \\ -bS_B + cS_C & (b+c)S_A + bS_B \end{vmatrix}}_{-q_1} \cdot y + \underbrace{\begin{vmatrix} b+c & b \\ -bS_B + cS_C & -cS_C - (b+c)S_A \end{vmatrix}}_{r_1} \cdot z = 0$$

VI) Temos

$$-q_1 = (b+c)^2 S_A + b^2 S_B + bcS_B + bcS_B - c^2 S_C = b^2 S_A + 2bcS_A + c^2 S_A + b^2 S_B + 2bcS_B - c^2 S_C$$

$$-q_1 = b^2(S_A + S_B) + 2bc(S_A + S_B) + c^2(S_A - S_C)$$

e

$$r_1 = -bcS_C - c^2 S_C - (b+c)^2 S_A + b^2 S_B - bcS_C = -2bcS_C - c^2 S_C - b^2 S_A - 2bcS_A - c^2 S_A + b^2 S_B$$

$$r_1 = -b^2(S_A - S_B) - 2bc(S_A + S_C) - c^2(S_A + S_C)$$

VII) Pelas Notações de Conway, podemos escrever

$$-q_1 = b^2(S_A + S_B) + 2bc(S_A + S_B) + c^2(S_A + S_B - a^2) = c^2(b^2 + 2bc + c^2 - a^2) \text{ e}$$

$$r_1 = -b^2(S_A + S_C - a^2) - 2bc(S_A + S_C) - c^2(S_A + S_C) = -b^2(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)$$

VIII) Equação da reta  $BC$

$$B = (0 : 1 : 0) \text{ e } C = (0 : 0 : 1)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot z = 0 \Rightarrow \underset{p_2}{1} \cdot x - \underset{q_2}{0} \cdot y + \underset{r_2}{0} \cdot z = 0$$

Como as retas  $AA'$  e  $BC$  se intersectam em  $A''$ , com  $A''$  pertencendo a reta  $x = 0$ , temos

$$A'' = \left( 0 : -\begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right) = \left( 0 : -\begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0 : r_1 : -q_1)$$

Assim, temos

$$A'' = (0 : -b^2(b^2 + 2bc + c^2 - a^2) : c^2(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)).$$

Como a representação de um ponto pode ser feita por mais de uma tripla ordenada de coordenadas baricêntricas, temos, portanto, que

$$A'' = (0 : -b^2 : c^2)$$

De maneira análoga, obtemos

$$B'' = (a^2(a^2 + 2ac + c^2 - b^2) : 0 : c^2(a^2 + 2ac + c^2 - b^2)) \Rightarrow B'' = (a^2 : 0 : c^2)$$

e

$$C'' = (a^2(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) : -b^2(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) : 0) \Rightarrow C'' = (a^2 : -b^2 : 0)$$

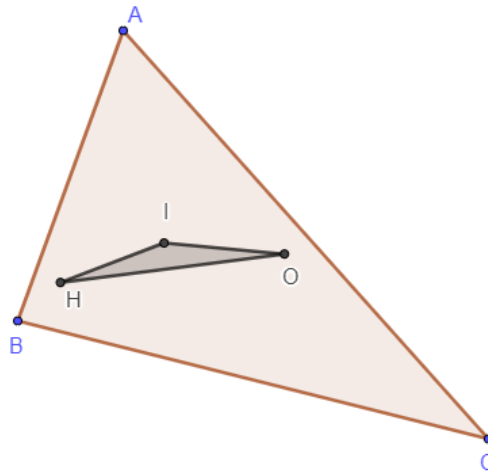
Calculando o determinante desses três pontos, temos

$$\begin{vmatrix} 0 & -b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -c^2 \\ a^2 & -b^2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2 - a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Logo  $A''$ ,  $B''$  e  $C''$  são colineares.

**Problema 2.** Mostre que a área do triângulo formado pelo circuncentro, incentro e ortocentro,  $OIH$ , de um triângulo de referência  $\Delta ABC$ , pode ser expressa por  $\frac{1}{8r}(a-b)(b-c)(c-a)$ .

Figura 33 – Problema 2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Solução: Temos que a área com sinal do triângulo a partir das coordenadas baricêntricas dos vértices  $OIH$  é dada por

$$S_{OIH} = \frac{S_{ABC}}{s_O \cdot s_I \cdot s_H} \cdot \begin{vmatrix} u_O & v_O & w_O \\ u_I & v_I & w_I \\ u_H & v_H & w_H \end{vmatrix}.$$

Temos que as coordenadas baricêntricas de  $O$ ,  $I$  e  $H$ , são dadas por

$$O = (a \cdot \cos \hat{A} : b \cdot \cos \hat{B} : c \cdot \cos \hat{C}), I = (a : b : c) \text{ e} \\ H = ((a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)).$$

Pela lei dos cossenos, temos que

$$a \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \frac{1}{4abc} \cdot (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2),$$

$$b \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} = \frac{1}{4abc} \cdot (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

e

$$c \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} = \frac{1}{4abc} \cdot (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2).$$

Assim, podemos reescrever as coordenadas baricêntricas do Ortocentro  $H$ , como

$$H = (a \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} : b \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} : c \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B}).$$

Soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro  $O$ .

Temos que

$$a \cdot \cos \hat{A} = \frac{a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}, \quad b \cdot \cos \hat{B} = \frac{b^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{2abc} \quad \text{e} \quad c \cdot \cos \hat{C} = \frac{c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}.$$

Dessa forma temos

$$(a \cdot \cos \hat{A} : b \cdot \cos \hat{B} : c \cdot \cos \hat{C}) = \frac{1}{2abc} \cdot (a^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2) : b^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2) : c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)).$$

Logo, usando a relação  $abc = 4prR$ , temos

$$sO = \frac{1}{2abc} \cdot 4D^2 = \frac{16S^2}{2abc} = \frac{16p^2r^2}{8prR} = \frac{2pr}{R}.$$

Soma das coordenadas baricêntricas de  $I$

$$sI = a + b + c = 2p$$

Soma das coordenadas baricêntricas de  $H$

$$H = (a \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} : b \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} : c \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B})$$

⇕

$$H = \frac{1}{4abc} \cdot ((a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) : ** : ***).$$

Temos que

$$(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) + ** + *** = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$

$$(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) = 16p(p - a)(p - b)(p - c) = 16S^2 = 16p^2r^2.$$

Logo,

$$sH = \frac{1}{4abc} \cdot 16p^2r^2 = \frac{16p^2r^2}{16prR} = \frac{pr}{R}.$$

Com os dados acima obtidos, temos que a área do triângulo  $OIH$  é dada por

$$\begin{aligned} S_{OIH} &= \frac{pr}{\frac{2pr}{R} \cdot 2p \cdot \frac{pr}{R}} \cdot \begin{vmatrix} a \cdot \cos \hat{A} & b \cdot \cos \hat{B} & c \cdot \cos \hat{C} \\ a & b & c \\ a \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} & b \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} & c \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \end{vmatrix} \\ &= \frac{R^2 \cdot abc}{4p^2r} \cdot \begin{vmatrix} \cos \hat{A} & \cos \hat{B} & \cos \hat{C} \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} & \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} & \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \end{vmatrix} \\ &= \frac{R^3}{p} \cdot (\cos \hat{B} - \cos \hat{A})(\cos \hat{C} - \cos \hat{B})(\cos \hat{A} - \cos \hat{C}). \end{aligned}$$

Usando a fórmula

$$\cos \hat{B} - \cos \hat{A} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{(a - b)(a + b + c)(a + b - c)}{2abc} = \frac{(a - b)(p - c)}{2rR}$$

podemos simplificar para

$$\frac{1}{8pr^3} \cdot (p - a)(p - b)(p - c)(a - b)(b - c)(c - a).$$

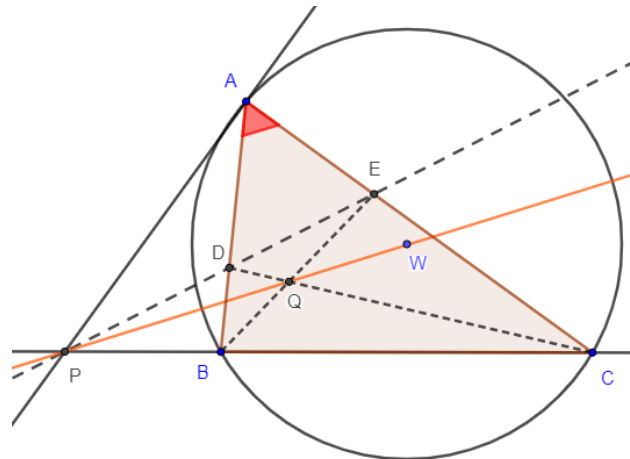
Por fim, usando a fórmula de Heron,  $r \cdot p = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ , temos

$$\frac{1}{8p^2r^3} \cdot p(p - a)(p - b)(p - c)(a - b)(b - c)(c - a) = \frac{1}{8r} \cdot (a - b)(b - c)(c - a).$$



**Problema 3.** O triângulo  $ABC$  está inscrito em uma circunferência  $\omega$ . O ponto  $P$  está na reta  $BC$  tal que  $PA$  é tangente a  $\omega$ . A bissetriz interna de  $\angle APB$  corta os lados  $AB$  e  $AC$  nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente. Os segmentos  $BE$  e  $CD$  se encontram no ponto  $Q$ . Dado que a reta  $PQ$  passa pelo centro de  $\omega$ , calcule o ângulo  $\angle BAC$ .

Figura 34 – Problema 3



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Solução: Das relações métricas na circunferência, temos que  $PA^2 = PB \cdot PC$ , que implica  $\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC}$ . Usando semelhança de triângulos pelo caso LAL, temos que os triângulos  $PBA$  e

$PAC$  são semelhantes, logo  $\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ . Pelo teorema da bissetriz interna, temos que

$\frac{BD}{DA} = \frac{PB}{PA} = \frac{c}{b}$  e  $\frac{AE}{EC} = \frac{PA}{PC} = \frac{c}{b}$ . Com as informações obtidas, usando a Proposição 10, já é

possível identificar as coordenadas baricêntricas de  $D = (c : b : 0)$  e  $E = (b : 0 : c)$ . Rescrevendo  $D = (bc : b^2 : 0)$  e  $E = (bc : 0 : c^2)$ , temos pelo Teorema 3,  $Q = (bc : b^2 : c^2)$ . Sendo  $P$  um ponto pertencente a reta  $BC$ , temos que  $P = (0 : x : y)$ , para algum  $x$  e  $y$ . Sendo  $P$ ,  $D$  e  $E$  pontos colineares, então, nós temos que

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ c & b & 0 \\ b & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{b^2}{c^2}. \text{ Assim temos } P = (0 : b^2 : -c^2).$$

Sendo  $P$ ,  $Q$  e o circuncentro  $\omega = (a \cos(\hat{A}) : b \cos(\hat{B}) : c \cos(\hat{C}))$  colineares, temos

$$\begin{vmatrix} 0 & b^2 & -c^2 \\ bc & b^2 & c^2 \\ a \cdot \cos \hat{A} & b \cdot \cos \hat{B} & c \cdot \cos \hat{C} \end{vmatrix} = bc \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & -c \\ bc & b & c \\ a \cdot \cos \hat{A} & \cos \hat{B} & \cos \hat{C} \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificando, temos  $2abc \cdot \cos \hat{A} = bc(c \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{C})$ . Usando a lei dos cossenos, temos  $2abc \cdot \cos \hat{A} = bc \left( c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \Rightarrow 2abc \cdot \cos \hat{A} = abc \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$ .

Assim temos que  $\cos \hat{A} = \frac{1}{2}$ , isso implica que  $\hat{A} = 60^\circ$ .

**Problema 4.** (A reta de Euler) Mostre que  $H$ ,  $N_c$ ,  $G$  e  $O$  são colineares (a reta que passa por estes pontos é denominada a *reta de Euler*) e que  $N_c$  e  $O$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $HG$ .

Solução: Sendo o triângulo  $\Delta ABC$  equilátero, temos que  $H$ ,  $G$  e  $O$  coincidem e, neste caso, a reta de Euler não estará definida.

Supondo que o triângulo de referência  $\Delta ABC$  seja retângulo.

Se o triângulo  $\Delta ABC$  for retângulo em

I)  $A$ , temos  $H = (1 : 0 : 0)$ ,  $O = \left( 0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \right)$  e  $G = (1 : 1 : 1) \Rightarrow G = H + 2 \cdot O$ .

II)  $B$ , temos  $H = (0 : 1 : 0)$ ,  $O = \left( \frac{1}{2} : 0 : \frac{1}{2} \right)$  e  $G = (1 : 1 : 1) \Rightarrow G = H + 2 \cdot O$ .

III)  $C$ , temos  $H = (0 : 0 : 1)$ ,  $O = \left( \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0 \right)$  e  $G = (1 : 1 : 1) \Rightarrow G = H + 2 \cdot O$ .

Logo, sendo o triângulo  $\Delta ABC$  retângulo, temos que  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares.

Supondo que o triângulo de referência  $\Delta ABC$  não seja retângulo.

Temos que o ortocentro  $H = ((a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2):**:**)**$  e circuncentro  $O = (a^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2):b^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2):c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2))$  estão com as coordenadas baricêntricas balanceadas. Observe que

$$\begin{aligned} u_H + 2 \cdot u_O &= a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 - 2 \cdot a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 \\ &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 \\ &= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\ &= 16p(p-a)(p-b)(p-c) \end{aligned}$$

$$\text{que implica } u_H + 2 \cdot u_O = 16S^2 = 4(2S)^2 = 4D^2$$

De forma análoga, temos

$$v_H + 2 \cdot v_O = 4D^2 \text{ e } w_H + 2 \cdot w_O = 4D^2.$$

Assim, temos que

$$G = H + 2 \cdot O = (4D^2 : 4D^2 : 4D^2).$$

O que nos garante que  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares para qualquer triângulo.

Mostraremos agora que o centro do círculo de 9 pontos  $N_c$ , o baricentro  $G$  e o circuncentro  $O$  de um triângulo são colineares, mas para isso, precisamos de algumas informações.

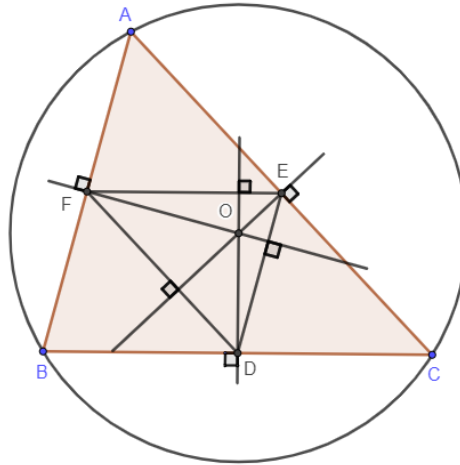
Temos que o baricentro  $G'$  do triângulo medial  $DEF$  coincide com o baricentro  $G'$  do triângulo  $\Delta ABC$ .

De fato, observe que

$$G' = \frac{D+E+F}{3} = \frac{\frac{B+C}{2} + \frac{C+A}{2} + \frac{A+B}{2}}{3} = \frac{A+B+C}{3} = G.$$

Temos também que observar, que o encontro das mediatrizes do triângulo  $\Delta ABC$  coincide com o ortocentro do triângulo medial  $DEF$ . Assim temos que  $O$  é o ortocentro do triângulo  $DEF$ .

Figura 35 - Circuncentro  $O$  como ortocentro do triângulo medial



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Como  $N_c$  é o circuncentro,  $O$  é o ortocentro e  $G$  é o baricentro do triângulo medial  $DEF$ , pode-se concluir que esses pontos são colineares e vale a relação  $G = N_c + 2 \cdot O$ . Dessa forma, fica demonstrado que  $H$ ,  $N_c$ ,  $G$  e  $O$  são colineares.

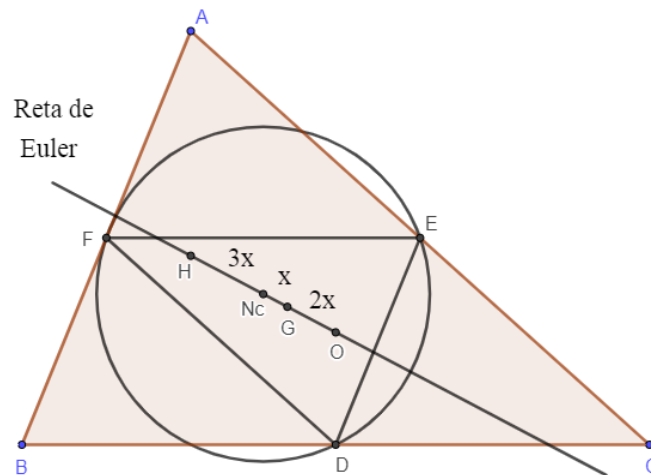
Mostraremos agora que  $N_c$  e  $O$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $\overline{HG}$ .

Sendo  $H$ ,  $G$  e  $O$  colineares, onde  $G = H + 2 \cdot O$  e com  $H$  e  $O$  sendo pontos balanceados, pela Proposição 13, temos que  $G$  divide o segmento  $\overline{HO}$  na razão  $k = 2$ , ou seja,  $\frac{\overline{HG}}{\overline{GO}} = 2$ , que implica em  $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GO}$ , da mesma forma temos que  $G$  divide o segmento

$\overline{ON_c}$  na razão  $k = 2$ , ou seja,  $\frac{\overline{OG}}{\overline{GN_c}} = 2$ , que implica em  $\overline{OG} = 2 \cdot \overline{GN_c}$ .

Fazendo-se  $\overline{GO} = 2x$ , teremos  $\overline{HG} = 4x$  e  $\overline{GN_c} = x$  preservando a razão entre segmentos orientados apresentado pela figura abaixo.

Figura 36 - H,  $N_C$ , G e O são colineares com  $\overline{HN_C} : \overline{N_CG} : \overline{GO} = 3:1:2$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{\overline{HN_C}}{\overline{N_C}} = \frac{3x}{x} = 3 \text{ e } \frac{\overline{HO}}{\overline{OG}} = \frac{6x}{-2x} = -3.$$

Logo, temos que

$$\frac{\overline{HN_C}}{\overline{N_C}} = -\frac{\overline{HO}}{\overline{OG}}.$$

O que demonstra que  $N_C$  e  $O$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento orientado  $\overline{HG}$ .

## 5 APLICAÇÕES

No decorrer dos anos vemos como o uso da computação gráfica vem mudando o mundo na forma de solucionar os mais diversos tipos de problemas nas mais variáveis áreas de trabalho. Ela está presente em quase todas as áreas e nos mais variados produtos e serviços disponíveis no mercado global. Essa área de conhecimento está muito presente na indústria, onde permite o desenvolvimento de artefatos digitais complexos e que podem ser manipulados com maior facilidade. Ela também está muito presente na engenharia, na arquitetura e na medicina na qual nos permite gerar imagens de órgãos internos do corpo humano de forma a possibilitar o diagnóstico de males sem a necessidade de intervenções cirúrgicas.

A Computação Gráfica pode ser definida como o conjunto de métodos e técnicas utilizados para manipular e converter dados em imagens. Atualmente, existem inúmeros programas que possibilitam a criação, representação e elaboração de forma virtual de produtos. Estes programas viabilizam técnicas para construção interativa em 3D que são utilizadas para projetar componentes, peças, sistemas de dispositivos mecânicos, edifícios, automóveis, aviões, navios, personagens de animações, jogos, filmes, e muito mais. Nas técnicas recentes, esses produtos são criados através do escaneamento de modelos em três dimensões ou então são modelados em 3D diretamente no computador. Uma vez que esse produto é computadorizado, temos que sua estrutura será constituída por pontos em três dimensões, que é chamado de “malha”. Assim, temos que a manipulação e deformação desse produto será feita sobre a estrutura dessa malha. Alguns avanços bem recentes, associados ao estudo de coordenadas baricêntricas, possuem aplicações práticas muito relevantes no estudo das estruturas de malhas.

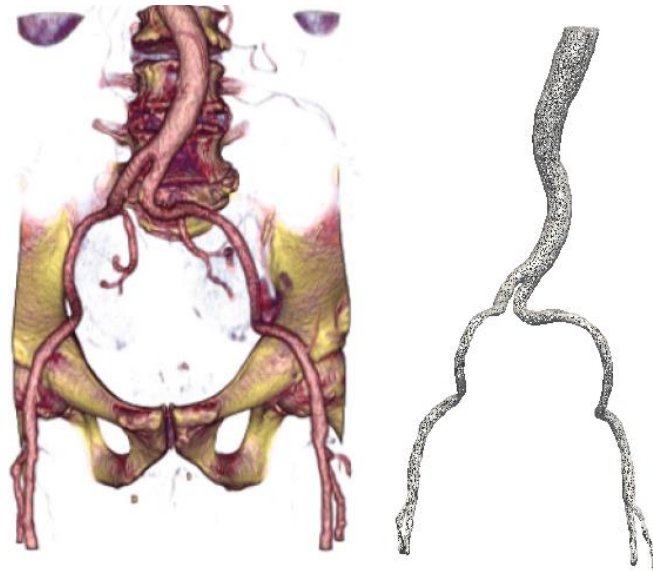
Para melhor entender, devemos ter em mente que uma malha, também chamada de grade não estruturada, é uma representação geométrica resultante da partição de uma região, onde a composição dessa região é dada pela união de todas as partes menores que a compõe. Nos capítulos anteriores, apresentamos resultados associados a coordenadas baricêntricas, assim, iremos apresentar algumas malhas triangulares que representam um domínio aproximado para determinadas regiões. Em problemas matemáticos mais avançados, as malhas (ou domínio discretizado) são comumente usadas para representar um ambiente onde se estudam soluções de diversos problemas. Em estudo e análise computacional de equações diferenciais parciais, a malha divide o espaço das soluções em elementos (uma quantidade finita), sobre o qual as equações podem ser solucionadas. Elementos de maior qualidade (de

melhor forma) têm melhores propriedades numéricas, onde o que constitui um elemento "melhor" depende das equações governantes gerais e da solução particular para a instância do modelo.

Em problemas computacionais, as malhas são criadas por algoritmos implementáveis, geralmente com orientação humana, dependendo da complexidade do domínio e do tipo de malha desejado. Um objetivo típico é criar uma malha com proximidade ótima para geometria do domínio de entrada. Muitas técnicas de malha são construídas sobre os princípios da triangulação de Delaunay, juntamente com regras para adicionar vértices, como o algoritmo de Ruppert, ou ainda de Voronoy.

Em matemática e geometria computacional, uma triangulação de Delaunay para um determinado conjunto  $P$  de pontos discretos, é uma triangulação (denotada por  $DT(P)$ ), de modo que nenhum ponto em  $P$  está dentro do circuncírculo de qualquer triângulo em  $DT(P)$ . As triangulações de Delaunay maximizam o ângulo mínimo de todos os ângulos dos triângulos na triangulação. No entanto, a triangulação de Delaunay não minimiza necessariamente o ângulo máximo e também não minimiza necessariamente o comprimento das arestas. Abaixo iremos apresentar alguns exemplos de estruturas geométricas com amplas utilidade em diversas áreas da ciência matemática-computacional:

Figura 37 - Geração de malhas em estruturas vasculares

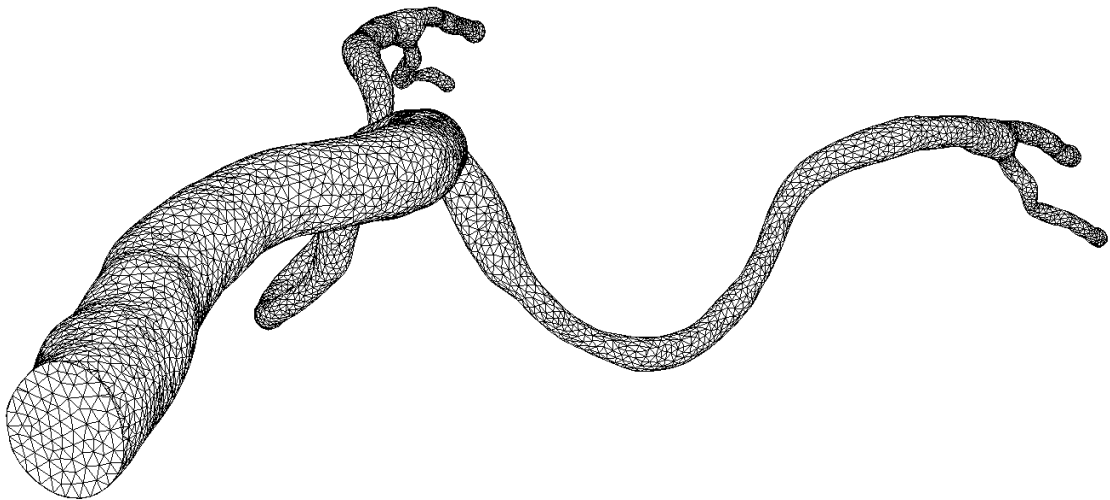


Fonte: Numerical results in Hemodynamic using FreeFem++, 2022

Na figura 37, temos do lado esquerdo, o estágio inicial, com a obtenção de uma imagem de angiografia abdominal. Na imagem da direita, a visualização da artéria aorta abdominal em uma geometria vascular, compondo uma malha com elementos triangulares.

Já figura 34, vemos o resultado final do processo de triangulação e malhado de uma imagem de angiografia.

Figura 38 – Aorta em malha triangular



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

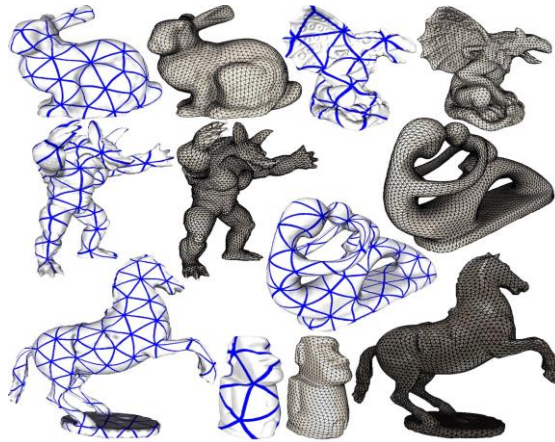
Quando as figuras não são poligonais, a malha gera aproximações do domínio em questão. Estes mosaicos geralmente são compostos por formas simples, como triângulos 2D ou 3D-tetraedros em um padrão irregular. O uso das coordenadas baricêtricas formam a base de tais construções triangulares.

Variados softwares gratuitos (ou pagos) realizam o processo de conversão de um objeto 3D em malhas, ou ainda, permitem a criação de objetos com características bem específicas, sem a necessidade de escaneamento de objeto algum.

Na figura a seguir, tem-se a apresentação da criação da malha de figuras em 3D. No conjunto de figuras abaixo, as gerações das malhas são feitas via scanner.



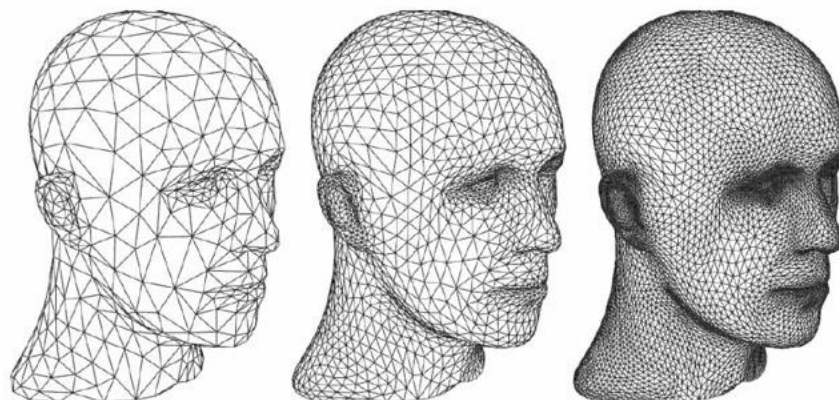
Figura 39 - Modelos 3D construídas com MeshLab



Fonte: Site Meshlab, 2016

Na figura abaixo, apresenta-se o processo de refinamento da malha gerada, com isso ganha-se melhores aproximações entre a malha e a figura. Funciona como o processo de partição, quanto maior a partição da região, melhor as aproximações obtidas.

Figura 40. Suavizando a malha de controle de um modelo 3D

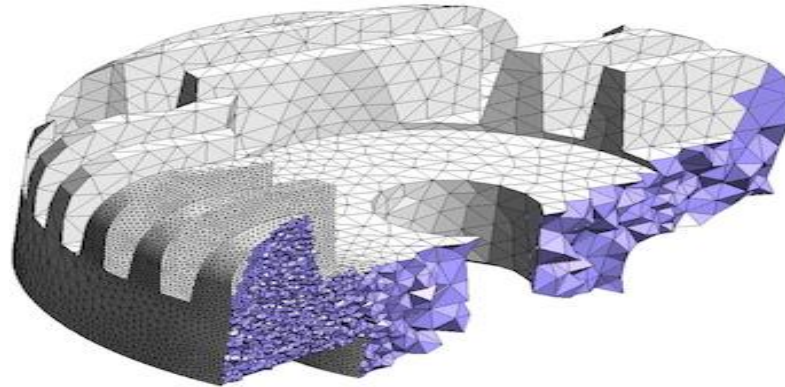


Fonte: 3DLAB. 2019

Devido à complexidade e alto custo na construção de objetos técnicos, teste de protótipos via modelagens e simulações computacionais são as soluções para resolver vários problemas de forma aproximada.

No processo de criação de peças na indústria, minimizar gastos interfere na maximização de ganhos. Assim, a criação de peças em ambientes computacionais para avaliar diversos parâmetros (resistência, condutividade térmica, elasticidade, entre outras) antes de uma moldagem concreta, interfere substancialmente na melhora do produto final a ser criado.

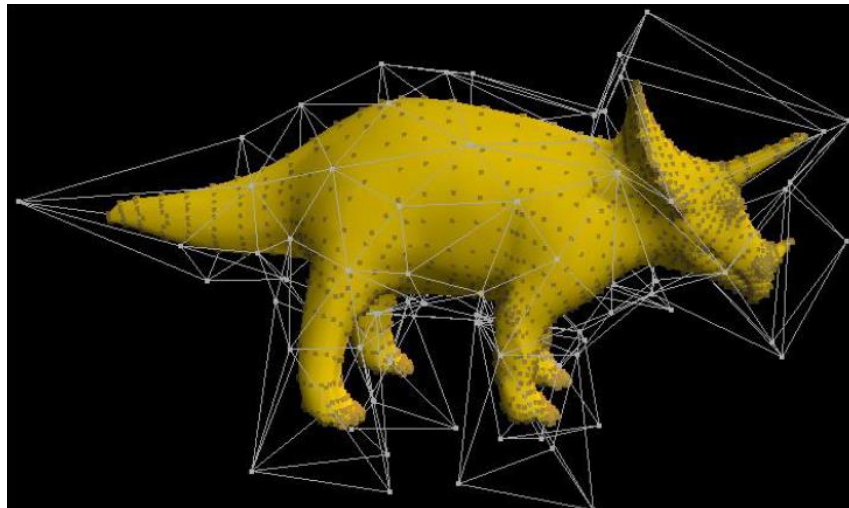
Figura 41. Peça construída com gerador tridimensional de malha Gmsh



Fonte: Site Gmsh, 1997.

Um importante uso das coordenadas baricêntricas na computação gráfica vem da sua utilização da manipulação e deformação de modelos já inseridos no computador. Os modelos produzidos no computador podem ser compostos por milhares de pontos, sendo assim, reduzir o número desses pontos torna o manuseio e deformação dos mesmos menos trabalhosos. Isso pode ser obtido através de técnicas baseadas em poliedros de controle, onde é criada uma malha de forma semelhante ao modelo, porém, bem mais simples e com muito menos vértices que denominaremos de poliedro de controle. Os pontos dos modelos podem ser escritos em função desses poliedros de controle através do sistema de coordenadas baricêntricas. Ao manipularmos o poliedro de controle, teremos a manipulação do modelo, ou seja, a manipulação de um pequeno número de vértices levará a manipulação de uma região com um grande número de pontos de forma rápida e intuitiva.

Figura 42 – Modelo envolvido por um poliedro de controle



Fonte: Roque, Lis (2010, p. 10)

## 6 CONCLUSÃO

O objetivo principal dessa dissertação foi apresentar o uso de coordenadas baricêntricas na resolução de problemas da Geometria Euclidiana e sua utilização na geração de figuras e objetos em sistemas computacionais, destacando a sua aplicabilidade em áreas como a computação gráfica na área industrial e na área da saúde.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para discentes, docentes e estudiosos da geometria que procuram aprofundar seus conhecimentos na geometria plana e espacial, proporcionando a compreensão de mais uma técnica que possibilite facilitar a solucionar problemas de Geometria Euclidiana.

Apesar desse conteúdo não estar presente na Base Nacional Comum Curricular - BNCC e nem ser previsto nos parâmetros curriculares nacionais - PCN's, vemos que esse conteúdo poderia ser incorporado de forma gradual no ensino médio, visto que boa parte dos requisitos necessários para a sua compreensão é abordada na Geometria Euclidiana, que é trabalhada com os alunos desde o ensino fundamental, e isso permite que os alunos adquiram o conhecimento de mais uma técnica que lhes auxiliassem na resolução de problemas de Geometria Euclidiana.

Vemos também a importância de se conhecer mais técnicas para computação gráfica que facilitem a manipulação e deformação de imagens e objetos que apresentem um grau maior de detalhamento, algo que pode ser obtido com a utilização de coordenadas baricêntricas.

Por fim, esperamos que os objetivos propostos tenham sido atingidos com esse trabalho e que venha a contribuir no estudo da geometria plana e espacial.

## REFERÊNCIAS

- [1] AUTODESK MESHMIXER. **Prosthetics and Orthotics**. 2020. Disponível em: <https://www.meshmixer.com/health.html>. Acessado em: 21/02/2022.
- [2] BORTOLOSSI, H. J.; FIGUEIREDO, J. O. **Coordenadas Baricêntricas: Uma Introdução com Ênfase na Geometria Moderna do Triângulo**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, 2017. Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2017.1/cms/cms-coordenadas-baricentricas.pdf> >. Acesso em: 10/04/2022.
- [3] FIGUEIREDO, J. H. O. **Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo**. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação de Especialização em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.
- [4] GEUZAINÉ, C; REMACLE, J. **A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities**. Disponível em: <https://gmsh.info/>. Acessado em: 01/03/2022.
- [5] HEINRICH, C. **Mac TutorName**, 2015. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nagel/>. Acessado em: 21/02/2022.
- [6] KILHIAN, K. **Fórmulas para a área de um triângulo**. O Baricentro da Mente, 2015. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2015/09/formulas-para-area-de-um-triangulo.html>. Acessado em: 23/02/2022.
- [7] **MESHLAB**, 2016. Disponível em: <https://www.meshlab.net/#description> > Acessado em: 01/03/2022.
- [8] MUNIZ NETO, A. C. Geometria. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).
- [9] ROCHA, J. C. **Coordenadas baricêntricas**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação de Especialização em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.
- [10] ROQUE, L. I. **Extensões de Coordenadas Baricêntricas Para Deformação de Malhas**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação de Especialização em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2010.
- [11] **SIMVASCULAR**. 2017. Disponível em: <https://simvascular.github.io/>. Acessado em: 21/02/2022.
- [12] 3DLAB. **Afinal o que é um arquivo SLT?**. [s.d.]. Disponível em: <https://3dlab.com.br/afinal-o-que-e-um-arquivo-stl/> Acessado em: 02/03/2022.