



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática



Um estudo sobre poliedros com alguma regularidade

por

Edvaldo Vicente dos Santos Júnior

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2022

João Pessoa - PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237e Santos Júnior, Edvaldo Vicente dos.
Um estudo sobre poliedros com alguma regularidade /
Edvaldo Vicente dos Santos Júnior. - João Pessoa, 2022.
97 f. : il.

Orientação: Carlos Bocker Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Poliedro. 2. Euler. 3. Platão. 4. Arquimedes. 5.
Regular. 6. Semirregular. I. Bocker Neto, Carlos. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 515.142.3(043)

Um estudo sobre poliedros com alguma regularidade.

por

Edvaldo Vicente dos Santos Júnior

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada por:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)

Allan George de Carvalho Freitas

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas - (UFPB)

Ricardo T. Bortolotti

Prof. Dr. Ricardo Turolla Bortolotti - (UFPE)

Fevereiro/2022

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

A toda minha família, a minha querida, dedicada e companheira esposa Sayonara Cristina Bezerra Arcanjo Lisbôa, de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades.

Aos meus pais Edvaldo Vicente dos Santos e Ladineide Lima da Silva, Joabson Lourenço dos Santos e Paula Cristina Brasileiro, pela formação humana, caráter e valores que levarei por toda a minha vida.

Ao meu sogro Jhonatan Arcanjo Lisbôa, minha sogra Silvania Cristina Bezerra Arcanjo, meu cunhado Jhonatan Bezerra Arcanjo Lisboa, minha cunhada Samara Cristina Bezerra Arcanjo Lisbôa e seu esposo Jeferson Ferreira da Silva, pelo incentivo e apoio constante.

A minha irmã Ladiclay Lima Vicente dos Santos e seu esposo Lúcio Flávio Santos Carvalho de Melo pelo incentivo, pela força, pela paciência e companheirismo, que sempre esteve ao meu lado e é um exemplo de esforço contínuo.

Ao Diretor Luiz Claudio da Silva, Ana Walquiria e Wagner Brayner diretores da escola onde leciono, pelo apoio compreensão, confiança e motivação, que sempre me impulsionou em direção as vitórias dos meus desafios, e Pedro Pereira de Lima Filho um grande amigo e pilar que sempre gera incentivo.

Ao meu orientador Carlos Bocker, pela paciência, aulas, indicações e pronto atendimento ao trabalho de orientação e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Agradeço aos professores, pelas aulas ministradas e dedicação neste projeto de mestrado.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT que contribuíram a distância nas disciplinas do mestrado.

Agradeço a todos os responsáveis pela criação deste programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional, em especial aos professores idealizadores Elon Lages Lima, Eduardo Wagner e Paulo César Pinto Carvalho.

Dedicatória

*Ao meu generoso Pai (em memória),
Mãe e Esposa.*

Resumo

Neste trabalho estudamos diversas classes de poliedros convexos que apresentam alguma regularidade. Contudo, antes de tratarmos desses poliedros, iniciamos com a definição de poliedro convexo, apresentamos prismas, pirâmides e antiprismas como exemplos de poliedros e provamos o importante teorema de Euler que traz uma relação entre os números de vértices, arestas e faces de um poliedro. Finalmente provamos que existem apenas cinco poliedros de Platão (regulares) e apenas treze poliedros de Arquimedes (semirregulares). Além disso, apresentamos também outras duas classes de poliedros com alguma regularidade, que são os de Catalan e os de Johnson.

Palavras-chave: Poliedro, Euler, Platão, Arquimedes, regular, semirregular.

Abstract

In this work we study several classes of convex polyhedra that present some regularity. However, before dealing with these polyhedra, we start with the definition of convex polyhedron, we present prisms, pyramids and antiprisms as examples of polyhedra and prove the important Euler theorem that brings a relationship between the numbers of vertices, edges and faces of a polyhedron. Finally we prove that there are only five Plato polyhedra (regular) and only thirteen Archimedean polyhedra (semiregular). In addition, we also present two other classes of polyhedra with some regularity, which are Catalan's and Johnson's.

Keywords: Polyhedron, Euler, Plato, Archimedes, regular, semiregular.

Sumário

Introdução

Os poliedros regulares tem uma simetria que fascinou homens em todos os tempos, alguns poliedros regulares eram conhecidos dos antigos egípcios, que os usavam em sua arquitetura. Um importante matemático que estudou a regularidade dos poliedros foi Platão (428 - 348 a.C), o próprio contribui não somente a poliedros regulares, mas para toda geometria , ao longo dos seus estudos, evidenciou a necessidade de demonstrações rigorosas, o que facilitou o trabalho de Euclides (323 - 285 a.C.), o qual contribuiu muito para o desenvolvimento da Geometria escrevendo o livro "Elementos"que é constituído por 13 volumes. Este livro estabeleceu um método de demonstração rigorosa só muito recentemente superado. No Livro XIII dos Elementos de Euclides há um início de tratamento matemático desses sólidos, conhecidos como "sólidos de Platão", o mesmo foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que eles se tornaram conhecidos como "poliedros de Platão". Embora chamados Platônicos, Proclo (em latim Proclus)(412 - 485) atribuiu a construção destes poliedros a Pitágoras, supondo-se que é também a ele que se deve o teorema: Há somente cinco poliedros regulares.

No quinto livro de sua Coleção Matemática, Pappus (290 - 350) atribui a descoberta de treze poliedros para Arquimedes: Embora muitas figuras sólidas com todos os tipos de faces possam ser definidas, aquelas que parecem ser formadas regularmente são mais merecedoras de atenção . Estes incluem não apenas as cinco figuras encontradas nos papiros de Platão, mas também os sólidos, em número de treze, que sobrepostos por Arquimedes. Pappus continua descrevendo as treze figuras. Ele os organiza em ordem de acordo com o número total de faces e lista os tipos de faces que compõem cada poliedro.

Durante o Renascimento, e especialmente após a introdução da perspectiva na arte, pintores e artesãos fizeram imagens dos sólidos platônicos. Para variar seus projetos, eles cortaram os cantos e bordas desses sólidos, produzindo naturalmente alguns dos sólidos de Arquimedes como resultado. O processo de remover todos os cantos de forma simétrica é chamado de truncamento. Além dos treze sólidos de Arquimedes temos os duais dos poliedros Arquimediano que são respectivamente os sólidos de Catalan.

Apesar dos sólidos de Platão, Arquimedes e Catalan, há também poliedros com um certo tipo de regularidade os que possuem a mesma medida de aresta, esse são chamados de sólido de Johnson, é um poliedro convexo onde as faces são polígonos regulares e que não é poliedro de Platão, nem poliedro de Arquimedes, prisma e antiprisma. Existem 92 poliedros de Johnson. Eles foram primeiro listados por Norman W. Johnson, em 1966. Em 1969, Vitor Zalgaller provou que realmente não existem outros.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, no qual o primeiro aborda definição e conceitos básicos de um poliedro, seus elementos, prisma, pirâmide antiprisma.

No capítulo dois o desígnio é as relações de vértice, faces e arestas, teorema de Euler e a prova do teorema, o qual sabemos que há mais de vinte maneiras diferentes de se provar a validade do mesmo, uma delas é do professor Zoroastro Azambuja filho, no qual foi publicada na revista professor de matemática.

O capítulo três tem objetivo de apresentar os poliedros regulares, provar que há cinco e somente cinco poliedros de Platão e definir os poliedros de Arquimedes e o processo de obtenção desse sólido por truncamento ou o processo de snubificação. Arquimedes, no século *III* a.C., constrói poliedros semirregulares a partir dos poliedros de Platão.

O capítulo quatro tem a finalidade de expor os poliedros de Catalan e enunciar que os mesmos são duais dos Arquimediano, logo os treze poliedros de Arquimedes correspondem, respectivamente, aos sólidos de Catalan por ser denominados duais, e comentar os sólidos de Johnson.

Capítulo 1

Poliedros

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de poliedros, estudar seus elementos e apresentar três classes importantes de poliedros, a saber, prismas, pirâmides e antiprismas.

Em todo esse trabalho, admitiremos o conhecimento de todos os conceitos e resultados prévios da geometria plana.

1.1 Definições e conceitos básicos

1.1.1 A definição de poliedros

Ao buscar definições de poliedros em diversos livros didáticos do ensino médio, nos deparamos com a seguinte definição no livro de Dante [?]:

Definição 1.1 *Poliedro é uma reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas **faces** e a região do espaço limitado por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.*

*Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces é chamado **aresta** do poliedro. E cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.*

Tal definição é seguida por exemplos de poliedros que evidenciam, de fato, quais objetos estão sendo estudados e acreditamos ser uma boa definição para um primeiro

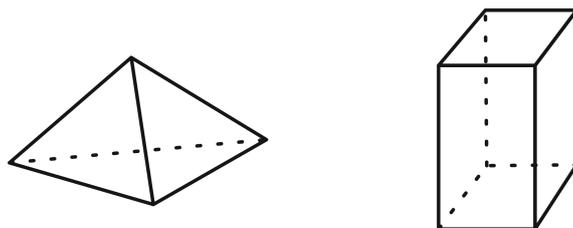


Figura 1.1: Exemplos de poliedros.

estudo dos poliedros. É claro que, dessa definição, os objetos da Figura 1.1 são exemplos de poliedros. No entanto, se refletirmos um pouco, podemos chegar a seguinte figura, que é um poliedro, de acordo com a Definição 1.1.

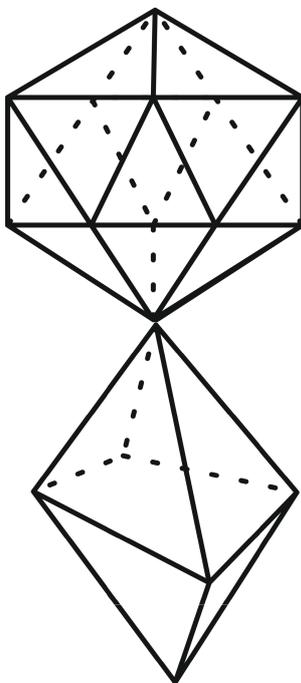


Figura 1.2: Poliedro K.

Para impedir, dentre outras coisas, que tais objetos como o da Figura 1.2 sejam considerados poliedros, vamos adotar uma restrição, sugerida no livro [?], que é a seguinte: um poliedro é uma região como na Definição 1.1 que é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). Assim, doravante, vamos considerar a seguinte definição para poliedro.

Definição 1.2 (Poliedro) *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados **faces** onde:*

- a. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*
- b. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é, um vértice ou é vazia.*

*Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma **aresta** do poliedro e cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.*

- c. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).*

1.1.2 Poliedros Convexos

Relembremos a definição de conjuntos convexos no espaço. Dizemos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ é convexo quando para quaisquer dois pontos $P, Q \in K$, tem-se que o segmento de reta \overline{PQ} está contido em K . Assim, podemos definir poliedro convexo da seguinte forma:

Definição 1.3 (Poliedro Convexo) *Um poliedro é dito convexo quando a região do espaço limitada por ele é convexa.*

No entanto, para poliedros, há outras formas equivalentes de se definir convexidade. Mais precisamente, vale a seguinte proposição.

Proposição 1.1 (Poliedro Convexo) *Dado um poliedro K , são equivalentes:*

- a. K é um poliedro convexo.*
- b. Todos os vértices de K estão no mesmo semi-espaço em relação ao plano que contém cada face.*
- c. Todas as retas não paralelas a nenhuma das faces de K o corta em, no máximo, dois pontos.*

Prova. ($a. \Rightarrow b.$) Suponha que K é convexo e, por contradição, suponha que existam uma face F e vértices V e W de K tais que V e W estão em semi-espacos diferentes em relação ao plano que contém a face F . Por convexidade de K , todos os segmentos \overline{PV} e \overline{PW} estão contidos na região limitada por K , para todo $P \in F$. Consequentemente, F não pode ser uma face, o que é uma contradição.

($b. \Rightarrow c.$) Agora suponha que todos os vértices de K estão no mesmo semi-espaco em relação ao plano que contém cada face e, por contradição, suponha que r seja uma reta não paralela a nenhuma das faces que intercepta K em três pontos distintos. Então, o ponto do meio pertence a uma face de K . Tal face determina um plano que contém vértices de K que estão em semi-espacos distintos.

($c. \Rightarrow a.$) Agora suponha que K não é convexo. Então existem P e Q pontos interiores a região limitada por K tais que \overline{PQ} não está contido em K . A menos de tomar pontos próximos a P e Q , podemos supor que a reta suportada por \overline{PQ} não seja paralela a nenhuma das faces. Tal reta necessariamente contém pelo menos três pontos de K . ■

Temos a esquerda dois exemplos de poliedros convexos e a direita dois poliedros não convexos.

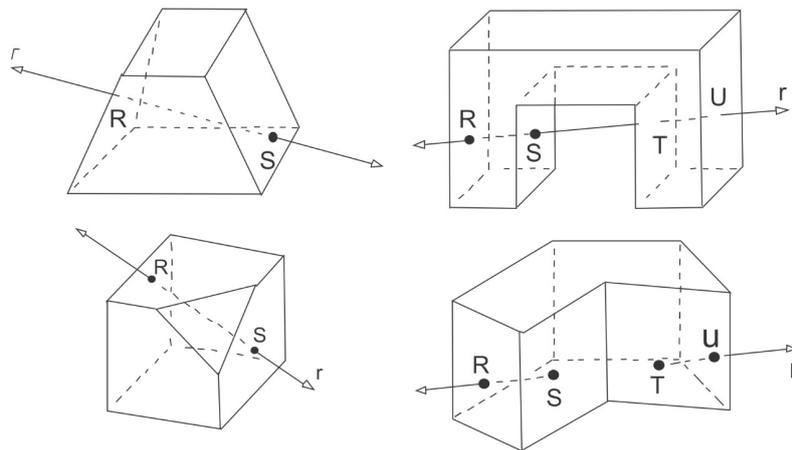


Figura 1.3: Poliedros convexos e não convexos.

1.2 Três importantes classes de poliedros

Como exemplos de poliedros, vamos apresentar três classes desses objetos, os prismas, as pirâmides e os antiprismas. As duas primeiras são amplamente estudadas no ensino médio.

1.2.1 Prisma

Definição 1.4 *Um prisma é um poliedro convexo, formado por duas faces congruentes (chamadas de bases), contidas em planos paralelos e distintos e as demais faces (chamadas de faces laterais) são paralelogramos determinados por pares de lados correspondentes das bases.*

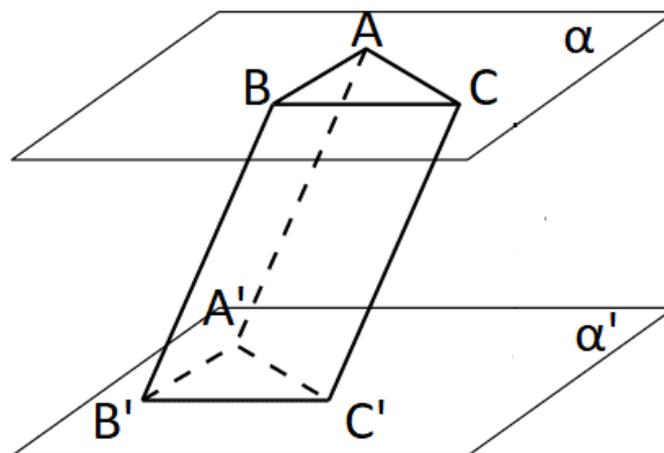


Figura 1.4: Prisma

Na figura 1.4 temos que o poliedro é convexo, cujas faces ABC e $A'B'C'$ são triângulos congruentes pertencentes, respectivamente, aos planos paralelos α e α' . As demais faces $ABB'A'$, $ACC'A'$ e $BCC'B'$ são paralelogramos definidos por pares de lados correspondentes dos triângulos, ou seja, trata de um prisma com bases ABC e $A'B'C'$ e faces laterais $ABB'A'$, $ACC'A'$ e $BCC'B'$.

Vale lembrar que retângulos e quadrados são casos particulares de paralelogramos. Desta forma, as faces laterais de um prisma podem ser retângulos ou até mesmo quadrados.

Dizemos que um prisma é reto quando suas faces laterais são retângulos, caso contrário, dizemos que ele é um prisma oblíquo.

A distância entre os planos das bases é denominada altura do prisma. Quando o prisma é reto, sua altura coincide com a altura comum dos retângulos que compõem as faces laterais, considerando, obviamente, como bases desses retângulos as arestas pertencentes às faces bases do prisma.

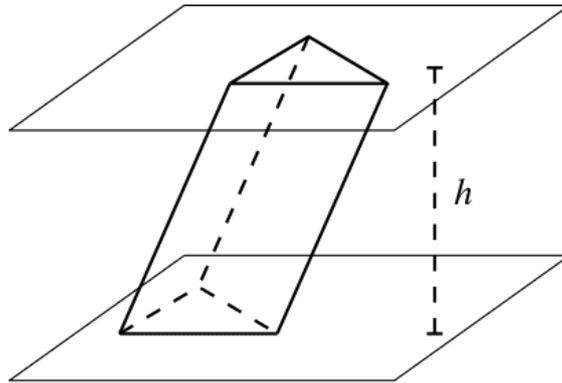


Figura 1.5: Prisma de altura h .

Um prisma n -poligonal é aquele cujas bases sejam polígonos de n -lados. Assim, por exemplo, os prismas de bases triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais recebem as denominações de prisma triangular, prisma quadrangular, prisma pentagonal e prisma hexagonal, respectivamente.

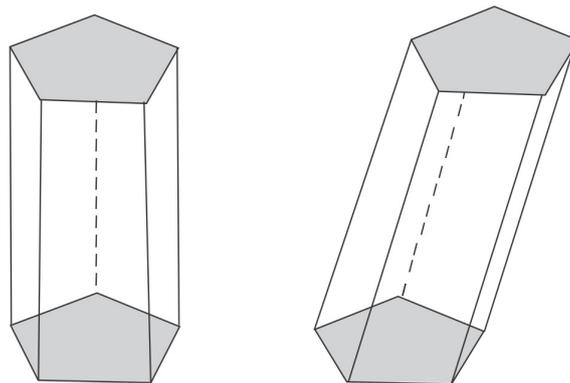


Figura 1.6: Dois prismas pentagonais, o primeiro reto e o segundo oblíquo.

1.2.2 Pirâmide

Definição 1.5 *Uma pirâmide é um poliedro convexo em que há uma face (chamada base) num dado plano e um vértice fora desse plano, no qual os vértices do plano*

1.2. TRÊS IMPORTANTES CLASSES DE POLIEDROS

são ligados ao vértice fora do plano. As demais faces da pirâmide, chamadas de faces laterais, são os triângulos determinados, cada um deles, por um lado da base e o vértice da pirâmide que está fora do plano base.

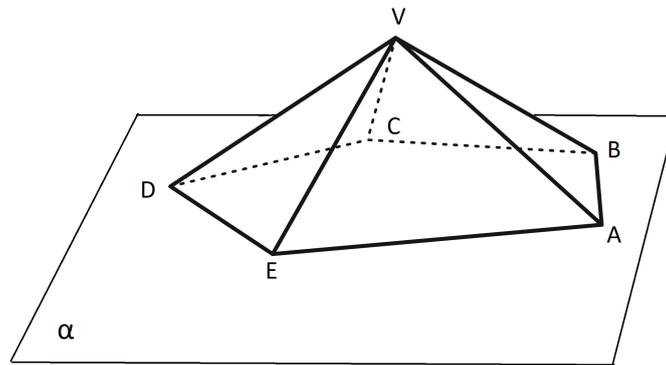


Figura 1.7: pirâmide de base pentagonal

Na figura 1.7, o poliedro $ABCDEV$ é uma pirâmide de base pentagonal $ABCDE$ as faces laterais são os triângulos ABV , AEV , BCV , CDV e DEV .

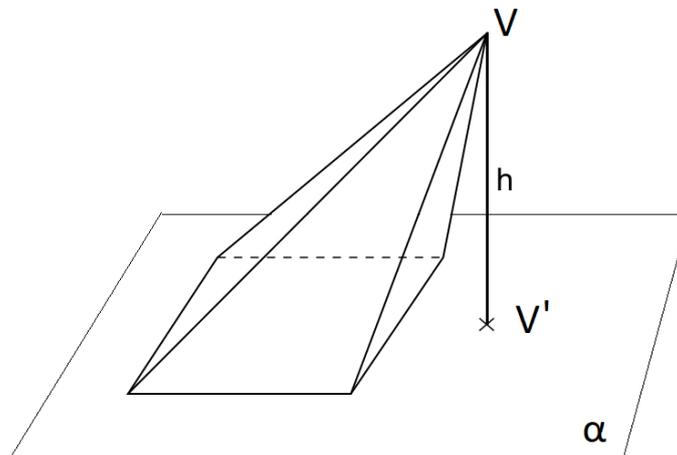


Figura 1.8: Pirâmide de altura h .

A altura de uma pirâmide é a distância entre o plano que contém a base e o único vértice da pirâmide que não pertence a esse plano. Veja Figura 1.8.

Uma pirâmide n -poligonal é aquela cuja base é um polígono de n -lados. Assim, por exemplo, as pirâmides de bases triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal recebem as denominações de pirâmide triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal, respectivamente.

1.2.3 Antiprisma

Quando pensamos no nome antiprisma, logo imaginamos que trata-se de algum objeto semelhante ao prisma. De fato, isso é verdade, exceto que, no caso dos antiprismas, uma das bases é torcida em relação à outra e as faces laterais são triângulos, ao invés de paralelogramos.

Definição 1.6 *Antiprisma é um poliedro constituído por duas faces poligonais iguais e paralelas chamadas diretrizes, ligados por triângulos. Os vértices do antiprisma são dados pelos vértices de suas bases.*

O número de lados dos polígonos das faces diretrizes definem o nome do antiprisma. Três lados nas faces diretrizes formam um antiprisma triangular. Cinco lados da face diretriz produz um antiprisma pentagonal.

O número de triângulos é número de lados das faces diretrizes multiplicado por dois.

O número de triângulos é o número de lados das faces diretrizes multiplicado por dois. Assim o antiprisma pentagonal (figura compõe-se de 2 pentágonos e 10 triângulos; tem 10 vértices e 20 arestas.

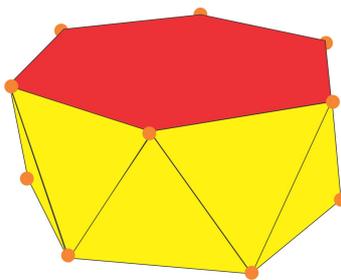


Figura 1.9: Antiprisma

Na figura acima podemos perceber que a figura 1.9 é um antiprisma, pois, as faces laterais são triangulares e as faces da base são hexágonos regulares.

O número de lados das bases definem o nome do antiprisma. Três lados formam um antiprisma triangular. Cinco lados, um antiprisma pentagonal, e assim por diante. Alguns autores exigem, além das condições estabelecidas na definição acima, que o poliedro tenha todas as faces regulares. Existem infinitos antiprismas, mesmo regulares. Se as bases possuem n lados, então existem $2n$ faces laterais (triangulares).

1.2. TRÊS IMPORTANTES CLASSES DE POLIEDROS

Os antiprismas foram apresentados por Johannes Kepler, em 1619, no seu livro "A Harmonia dos Mundos".

Capítulo 2

Faces, vértices e arestas: o teorema de Euler

2.1 Contando faces, vértices e arestas

Dado um poliedro, vamos agora tratar do problema de contar as suas faces, os seus vértices e as suas arestas. Representaremos então por A o número de arestas, por F o número de faces, e por V o seu número de vértices. Ainda, como as faces podem ser de polígonos diferentes, representaremos por F_n ($n \geq 3$), o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma, como os vértices também podem ser de gêneros diferentes, representaremos por V_n , o número de vértices nos quais concorrem n arestas, e observe que, pelo item (b) da definição do poliedro, cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas. São então evidentes as relações:

$$F = F_3 + F_4 + \dots$$

$$V = V_3 + V_4 + \dots$$

Imagine agora que o poliedro foi desmontado e que todas as faces estão em cima de sua mesa. Quantos lados todos esses polígonos possuem? Fácil. Basta multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5 e assim por diante, e depois somar os resultados. Mas, como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao

dobro do número de arestas, ou seja,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Podemos também contar as arestas observando os vértices do poliedro. Se em cada vértice contarmos quantas arestas nele concorrem, somando os resultados obteremos também o dobro do número de arestas, porque cada aresta terá sido contada duas vezes (em um extremo e no outro).

Logo,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$$

Dessas primeiras relações entre os elementos de um poliedro podemos deduzir duas desigualdades:

$$(I). 2A \geq 3F \quad \text{e} \quad (II). 2A \geq 3V.$$

Observe a justificativa da primeira.

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + F_4 + 2F_5 + \dots$$

Como $F_3 + F_4 + F_5 + \dots = F$, concluímos que $2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \dots$ e portanto,

$$2A \geq 3F.$$

Repare que a igualdade só é válida se $F_4 = F_5 = \dots = 0$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares. A segunda desigualdade se justifica de forma análoga e, neste caso, a igualdade ocorrerá apenas quando em todos os vértices concorrerem 3 arestas.

2.2 Teorema de Euler

Dado um poliedro convexo de V vértices, A arestas e F faces, o que podemos afirmar sobre o número $V - A + F$? Inspeccionando alguns poliedros conhecidos, percebe-se que este número é igual a 2. Mas será que isto é válido para qualquer poliedro convexo? A resposta é sim e isso é exatamente o Teorema de Euler para poliedros.

O Teorema de Euler foi descoberto em 1758. Desde então, diversas demonstrações apareceram na literatura e algumas continham falhas (como a de Cauchy), que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas eram devidas à falta de precisão na definição de poliedro. Mesmo Euler nunca se preocupou em definir precisamente essa palavra.

A seguir enunciamos precisamente este teorema e apresentamos sua demonstração que foi publicada na Revista do Professor de Matemática (RPM) n° 3(1983) pelo professor Zoroastro Azambuja Filho.

Teorema 2.1 *Para qualquer poliedro convexo vale a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces.*

Prova.

Começamos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P . As faces serão enumeradas de 1 até F e seja n_K a combinação da K -ésima face, ($1 \leq K \leq F$). Vale lembrar que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de combinação n é $\pi(n - 2)$ e observando que se um poliedro é convexo então todas as faces são polígonos convexos. Portanto a soma S dos ângulos internos de todas as faces de P é dada por

$$\begin{aligned} S &= \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2) \\ &= \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + 2 + \cdots + 2)]. \end{aligned}$$

Observe que a soma do número de lados de todas as faces $[n_1 + n_2 + \cdots + n_F]$ do poliedro é igual ao dobro do número de arestas $2A$ logo temos:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \quad (2.1)$$

Vamos agora calcular de outra forma a soma de todos os ângulos internos do poliedro. Começaremos escolhendo uma reta r , que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P , tomemos também um plano H , que não intersecte P e que seja perpendicular à reta r . O plano H será chamado de plano horizontal e todas as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas retas verticais.

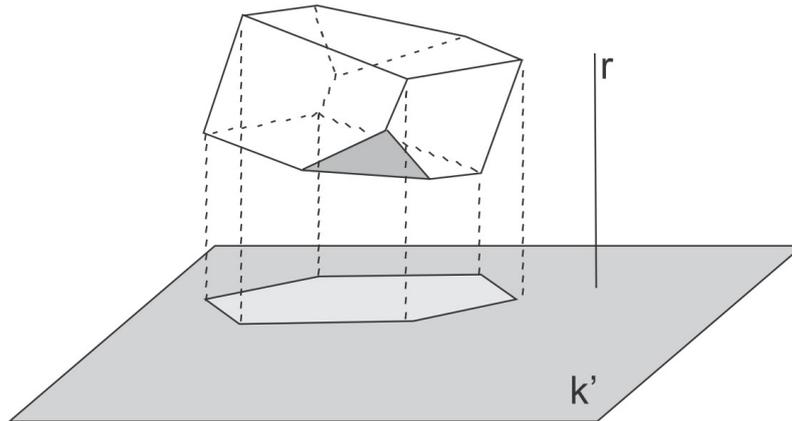


Figura 2.1: Projeção ortogonal sobre o plano H

Na figura abaixo temos a representação de um poliedro e da projeção ortogonal sobre o plano H . As projeções ortogonais dos pontos do poliedro formarão sobre o plano um polígono K com contorno K' . Cada ponto K' é projeção de um único ponto de P e cada ponto no interior de K é projeção de dois pontos de P , um da parte superior e o outro da parte inferior. Assim, o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos superiores, o conjunto dos pontos inferiores e o contorno aparente.

Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de P , observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua projeção (ambos são polígonos de mesmo gênero). Sejam: V_1 o número de vértices superiores, V_2 o número de vértices inferiores e V_0 o número de vértices do contorno aparente K' . Então,

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

Notemos ainda que V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal K' . Observe que a projeção da parte superior é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e possuem V_1 pontos interiores.

Somando todos os ângulos da parte superior anterior temos:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$$

. De forma análoga, obteríamos para a soma de todos os ângulos da parte inferior

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$$

. Somando as duas igualdades, obtemos

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) = 2\pi(V - 2). \quad (2.2)$$

Comparando (2.1) e (2.2) e dividindo por 2π , resulta que $A - F = V - 2$ ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

■

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados poliedros eulerianos. Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo, observe, por exemplo, que os poliedros da figura 2.2 são eulerianos, embora um deles não seja convexo. O da esquerda é convexo e possui doze arestas, seis faces e oito vértices e o da direita o sólido não é convexo mas também satisfaz a relação de Euler, por ter vinte e quatro arestas, dez faces e dezesseis vértices.

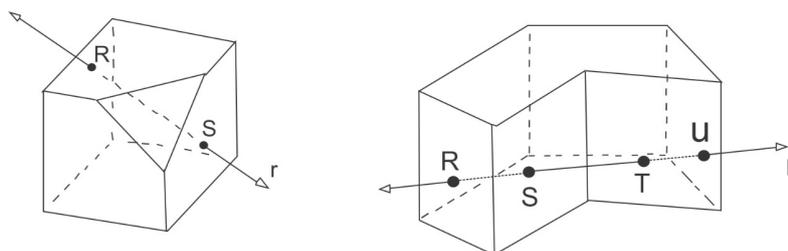


Figura 2.2:

Capítulo 3

Poliedros de Platão e Arquimedes

Diversas classes de poliedros são classificadas por sua simetria ou algum tipo de regularidade. Certamente, a mais conhecida dessas classes é a dos poliedros de Platão, mas há outras classes que também merecem destaques e, dentre essas, temos a classe dos poliedros de Arquimedes.

Estas duas classes, como veremos, são finitas e a principal diferença entre elas é que os poliedros platônicos devem ter todas as faces congruentes, enquanto que os arquimedianos exigem faces de pelo menos dois polígonos diferentes. Ao longo deste capítulo, vamos apresentar os elementos dessas classes e provar que não existem outros, além dos apresentados.

3.1 Poliedros de Platão

Podemos dizer que os poliedros de Platão são as formas mais perfeitas encontradas no universo dos poliedros convexos. No entanto, é necessário definir de maneira precisa o que significa ser uma forma perfeita. Já adiantamos que exigir apenas que as faces sejam polígonos regulares congruentes não é suficiente para garantirmos a forma mais perfeita, pois devemos ter também uma determinada congruência nos vértices do poliedro. A próxima definição exprime de maneira precisa essa ideia.

Definição 3.1 *Um poliedro convexo é dito regular (ou de Platão) quando todas as suas faces são polígonos regulares, congruentes entre si e o número de arestas que se encontram em cada vértice é o mesmo.*

É possível deduzir dessa definição que cada poliedro de Platão pode ser identificado

3.1. POLIEDROS DE PLATÃO

por um par (m, n) de números inteiros maior que 2, onde m é o número de arestas que se encontram em cada vértice e n é o número de arestas de cada face. A figura 3.1 mostra cinco poliedros de Platão, o tetraedro $(3, 3)$, o cubo $(3, 4)$, o octaedro $(4, 3)$, o dodecaedro $(3, 5)$ e o icosaedro $(5, 3)$. Podemos nos perguntar se existem outros poliedros com essa característica. A resposta é não, existem somente cinco poliedros de Platão, e esse é o conteúdo do nosso próximo teorema.

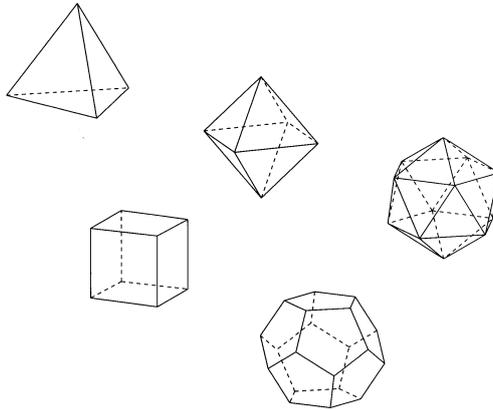


Figura 3.1: Poliedros de Platão

Teorema 3.1 (Teorema dos poliedros de Platão) *Existem cinco, e somente cinco, poliedros de Platão. Mais especificamente, o tetraedro $(3, 3)$, o cubo $(3, 4)$, octaedro $(4, 3)$, o dodecaedro $(3, 5)$ e o icosaedro $(5, 3)$ são todos os poliedros de Platão.*

Prova. Seja $P = (m, n)$ um poliedro de Platão. Temos que:

a) cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$), e como cada aresta está em duas faces:

$$n \cdot F = 2A \implies F = \frac{2A}{n} \quad (3.1)$$

b) cada um dos V ângulos poliédricos tem m arestas ($m \geq 3$), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \implies V = \frac{2A}{m} \quad (3.2)$$

c) Pela relação de Euler temos que

$$V - A + F = 2 \quad (3.3)$$

Substituindo 3.1 e 3.2 em 3.3 e depois dividindo por $2A$, obtemos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (3.4)$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. Notemos, porém, que se m e n fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ e, portanto, $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$ o que contraria a igualdade 3.4, pois A é um número positivo.

Daí temos então que, nos poliedros de Platão, $m = 3$ ou $n = 3$ (isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente é um triângulo):

i) Para $m = 3$ (supondo que tem triângulo).

Em 3.4 vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \implies n < 6.$$

m	n
3	3
3	4
3	5

Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$ (respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais).

ii) Para $n = 3$ (supondo que tem triângulo).

Em 3.4:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \implies m < 6.$$

m	n
3	3
4	3
5	3

Então, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$ (respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

Resumindo os resultados encontrados no *i)* e no *ii)*, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) da tabela ao lado, sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

■

Portanto, para saber o número de arestas A , o número de faces F e o número de vértices V de cada poliedro de Platão, basta substituir em 3.4 os valores de m e n encontrados e depois trabalhar com 3.1 e 3.2.

Como exemplo, uma das possibilidades encontradas para m e n foi $m = 3$ e $n = 5$. Substituindo esses valores em 3.4, temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \implies A = 30.$$

Em seguida, substituindo nas equações 3.2 e 3.1, obtemos

$$V = \frac{2 \cdot 30}{3} \implies V = 20 \quad \text{e} \quad F = \frac{2 \cdot 30}{5} \implies F = 12.$$

Como é o número de faces que determina o nome, o poliedro de nosso exemplo é o dodecaedro.

Notemos que $m = 3$ significa ângulos triédricos (ou triedros) e $n = 5$, faces pentagonais.

Nomes dos poliedros de Platão

<i>Nome</i>	m	n	A	V	F
<i>Tetraedro</i>	3	3	6	4	4
<i>Hexaedro</i>	3	4	12	8	6
<i>Octaedro</i>	4	3	12	6	8
<i>Dodecaedro</i>	3	5	30	20	12
<i>Icosaedro</i>	5	3	30	12	20

3.1.1 Outra demonstração para o teorema dos poliedros Platão

Antes de demonstrarmos o teorema, vamos dar a seguinte definição.

Definição 3.2 Dado um poliedro convexo S e um vértice V de S , definimos o ângulo sólido de V como a soma dos ângulos que contém este vértice, isto é, se F_1, F_2, \dots, F_k são as faces de S que contém o vértice V e $\alpha_j(V)$ é o ângulo \hat{V} da face F_j , para cada $j = 1, 2, \dots, k$, o ângulo sólido em V do poliedro S é a soma $\alpha_1(V) + \alpha_2(V) + \dots + \alpha_k(V)$.

A prova do teorema é baseada nas seguintes observações:

Observação 3.1 1. Em todo poliedro convexo, qualquer ângulo sólido tem medida menor que 360° ;

2. Todo poliedro de Platão é unicamente determinado pelo par (n, k) , onde n é o número de cada face e k é o número de faces que contém cada vértice. Note que $n \geq 3$ (todo polígono tem pelo menos 3 lados) e $k \geq 3$ (em todo vértice, há pelo menos 3 faces).

3. No poliedro de Platão (n, k) , tem-se que todos os seus ângulos sólidos medem $k \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ$, pois todos os ângulos são iguais e medem $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ$.

Prova do Teorema de Platão.

Seja S um poliedro de Platão identificado pelo par (n, k) . Vamos analisar as possibilidades para os valores de n e de k .

Para $n = 3$ (faces triangulares), vamos ver quais são as possibilidades para k . Como o ângulo sólido deve ser menor que 360° e coincide com $k \cdot \frac{(3-2)}{3} \cdot 180^\circ$, de acordo com a Observação 3.1, k deve ser menor que 6, isto é, k é igual a 3, 4 ou 5. Obtemos assim, o tetraedro, octaedro e o icosaedro.

Analogamente, para $n = 4$ (faces quadradas) ou $n = 5$ (faces pentagonais), devemos ter $k \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ < 360^\circ$, o que dá $k < 2 \cdot \frac{n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$ e, portanto, nos dois casos a única possibilidade para k é 3. Obtemos, assim, o cubo e o dodecaedro.

Para $n \geq 6$, a equação $k \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ < 360^\circ$ dá que $k < 3$ e, portanto não existem outros poliedros de Platão. E a prova está completa. ■

3.2 Poliedros de Arquimedes

O que podemos dizer sobre o poliedro da figura 3.2?

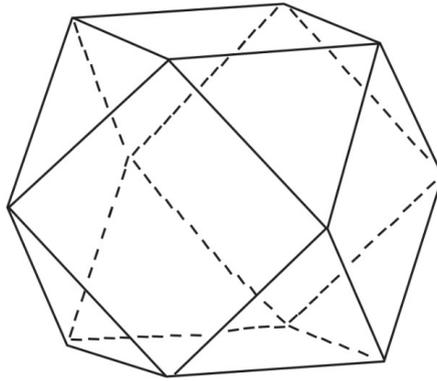


Figura 3.2: Cuboctaedro.

Obviamente não é um poliedro de Platão, mas suas faces são polígonos regulares e seus vértices são congruentes uns aos outros, no sentido de que em cada vértice temos a mesma configuração de faces. Note que, neste caso, em torno de cada vértice temos a configuração (triângulo, quadrado, triângulo, quadrado) = $(3, 4, 3, 4)$. Este é um exemplo de poliedro semirregular e, mais precisamente, de Arquimedes, como veremos a seguir.

3.2.1 A definição de poliedros de Arquimedes

Primeiramente, vamos definir poliedros semirregulares.

Definição 3.3 *Um poliedro convexo é semirregular se todas as suas faces são polígonos regulares e todos os seus vértices são congruentes entre si, isto é, em torno de cada vértice há a mesma configuração de faces.*

Com base nessa definição podemos identificar cada poliedro semirregular pela configuração de seus vértices. Assim, cada poliedro semirregular será identificado com uma sequência (n_1, n_2, \dots, n_k) , onde cada n_k é o número de lados do polígono que está na posição k da configuração.

Uma vez que há apenas cinco poliedros regulares, uma pergunta natural é a seguinte: quantos poliedros semirregulares existem? A resposta é infinitos! Para ver isso basta observar que os prismas com faces regulares $(4, 4, n)$ e os antiprismas, também com faces regulares $(3, 3, 3, n)$ para todo n inteiro maior ou igual a 3 são poliedros semirregulares.

Por outro lado, temos que existem outros poliedros semirregulares que não são

regulares, nem prismas, nem antiprismas, que é o caso de nosso primeiro exemplo desta seção. Dessa forma, podemos reformular nossa pergunta sobre a finitude dos poliedros semirregulares, excluindo-se os regulares, os prismas e os antiprismas. Neste caso, a resposta é positiva e existem exatamente treze poliedros deste tipo, como veremos ao longo desta seção. Tais objetos são os que chamaremos de *poliedros de Arquimedes*, de acordo com a definição seguinte.

Definição 3.4 *Um poliedro convexo é chamado arquimediano se ele não é um prisma, nem antiprisma e suas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, cujos vértices são todos congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo (número e ordem) de polígonos em torno de cada vértice.*

3.2.2 A construção dos poliedros de Arquimedes

Há duas formas básicas de se obter poliedros de Arquimedes, a partir dos poliedros de Platão. A primeira delas é o truncamento, que consiste em cortar os cantos do poliedro de Platão de maneira adequada e preservando a simetria. Cada corte é feito em um plano perpendicular à linha que une um canto ao centro do poliedro e é o mesmo para todos os cantos. Dependendo de quanto é truncado, diferentes sólidos platônicos e arquimedianos (e outros) podem ser criados. Se o truncamento for profundo o suficiente para que cada par de faces de vértices adjacentes compartilhe exatamente um ponto, isso é conhecido como retificação. A outra forma é a snubificação, que é o processo de afastar e girar as faces do poliedro de Platão adequadamente e, em seguida, preencher os espaços vazios com polígonos regulares. Quando na snubificação não utilizarmos rotações, este processo também é conhecido por expansão.

Apresentamos, a seguir, treze poliedros de Arquimedes e indicamos como eles são construídos:

1. **Tetraedro truncado** é obtido através do truncamento do tetraedro;

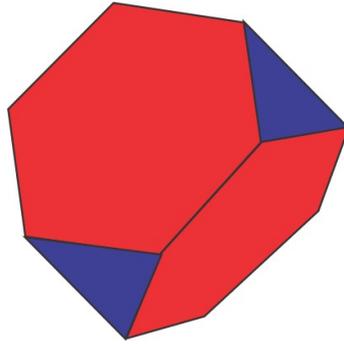


Figura 3.3: Tetraedro truncado

2. **Cubo truncado** é obtido através do truncamento do hexaedro;

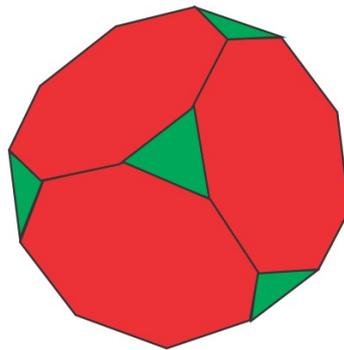


Figura 3.4: Cubo truncado

3. **Octaedro truncado** é obtido através do truncamento do octaedro;

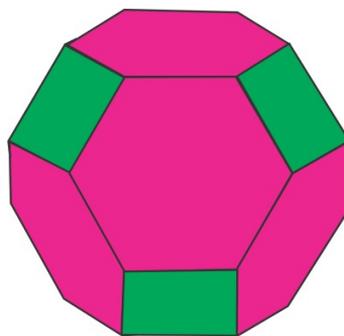


Figura 3.5: Octaedro truncado

4. **Dodecaedro truncado** é obtido através do truncamento do dodecaedro;

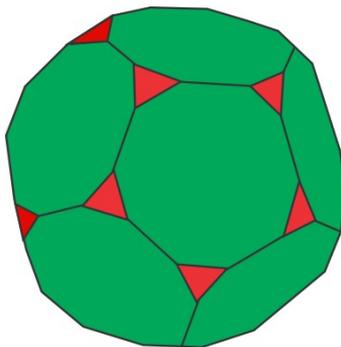


Figura 3.6: Dodecaedro truncado

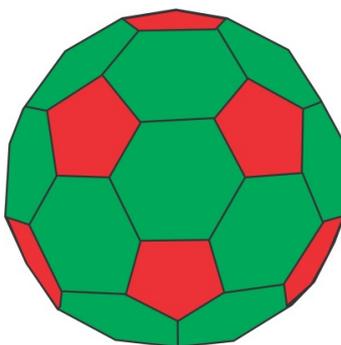


Figura 3.7: Icosaedro truncado

- 5. **Icosaedro truncado** é obtido através do truncamento do icosaedro;
- 6. **Cuboctaedro** é obtido através da junção do cubo com octaedro;

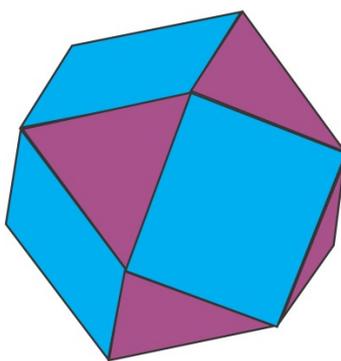


Figura 3.8: Cuboctaedro

- 7. **Icosidodecaedro** é obtido através da junção do icosaedro com dodecaedro;
- 8. **Rombicosidodecaedro** é obtido pela expansão do dodecaedro movendo suas faces para longe de modo que os espaços resultantes sejam pentágonos regulares, logo obtém um rombicosidodecaedro. Portanto, ele tem o mesmo número de triângulos

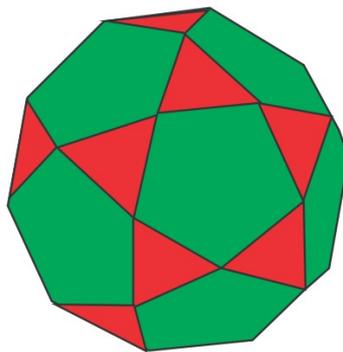


Figura 3.9: Icosidodecaedro

como um icosaedro e o mesmo número de pentágonos como um dodecaedro, com um quadrado para cada aresta de qualquer outro;

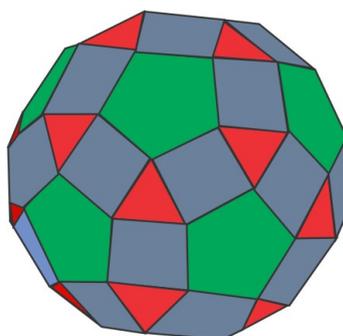


Figura 3.10: Rombicosidodecaedro

9. **Rombicuboctaedro** Expandido o cubo movendo suas faces da origem na quantidade certa e preenchendo os espaços com quadrados e triângulos, o mesmo é dual do icositetraedro deltoidal;

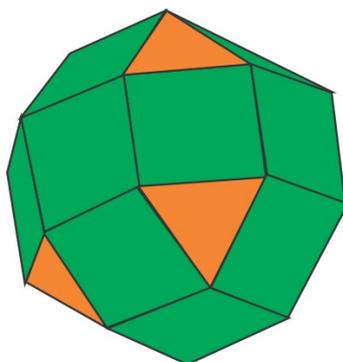


Figura 3.11: Rombicuboctaedro

10. **Cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro** é obtido com o

truncamento de um cuboctaedro;

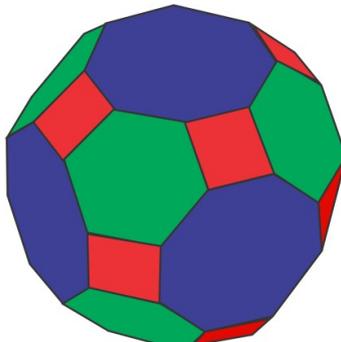


Figura 3.12: Cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro

11. **Icosidodecaedro truncado** é obtido através do truncamento do icosidodecaedro;

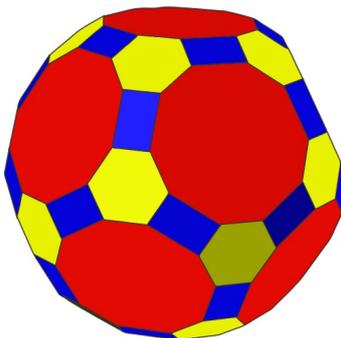


Figura 3.13: Icosidodecaedro truncado

12. **Cubo snub** é obtido por snubificação do cubo ou da snubificação do octaedro resulta o cubo snub;

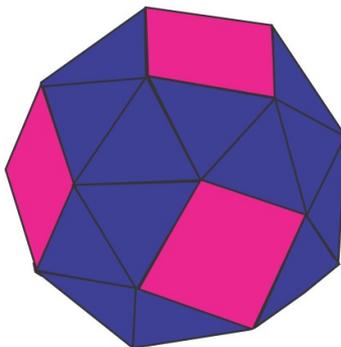


Figura 3.14: Cubo snub

13. **Decaedro torcido ou Icosidodecaedro** é obtido por snubificação do dodecaedro ou do icosidodecaedro.

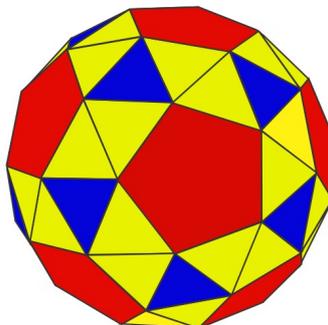


Figura 3.15: decaedro torcido ou Icosidodecaedro

3.2.3 Quantos são os poliedros de Arquimedes?

Na seção anterior apresentamos treze poliedros de Arquimedes, mas ainda não sabemos se eles são os únicos. Esta seção tem por objetivo provar que, de fato, nenhum outro poliedro de Arquimedes pode ser construído, ou seja, há somente treze poliedros de Arquimedes.

A demonstração que vamos apresentar é devida a Kepler (1571-1630). Duas observações principais tornam o processo mais fácil e Kepler as declara como proposições que encerram o argumento principal. A primeira diz respeito ao número de tipos de faces que podem circundar um vértice.

Lema 3.1 *Se as faces de um poliedro convexo são todas polígonos regulares, no máximo três tipos diferentes de faces podem aparecer em torno de qualquer ângulo sólido.*

Prova. Os quatro polígonos regulares com o menor ângulo interno são o triângulo (60°), o quadrado (90°), o pentágono (108°) e o hexágono (120°), a soma total desses quatro ângulos é maior que 360° , portanto, esses quatro polígonos angulares não podem estar todos presentes em torno de um vértice.

Com um conjunto diferente de quatro ou mais polígonos regulares diferentes, a soma total dos ângulos é ainda maior. Portanto, quatro ou mais tipos diferentes de polígono não podem envolver um vértice, vamos considerar afim do estudo da prova

que n-gon, é a face de um polígono de n lados que estar em volta do vértice, ou seja: quando houver a expressão dois 3-gon, que dizer que há dois triângulos em volta do vértice. ■

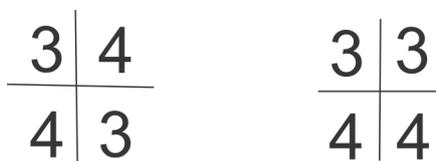


Figura 3.16: Dois tipos da mesma espécie de vértice.

O segundo lema de Kepler é usado para excluir certas combinações de polígonos contendo um número ímpar de lados. É necessário que façamos uma distinção entre o conjunto de faces que delimitam um ângulo sólido e a ordem específica em que elas ocorrem. A espécie de um ângulo sólido é uma lista não ordenada dos leques que estão presentes, enquanto o tipo de um ângulo sólido especifica a ordem em que os leques ocorrem ao redor do vértice. Por exemplo, a espécie de ângulo sólido ligado por dois triângulos e dois quadrados compreende dois tipos de ângulo sólido conforme as faces opostas sejam iguais ou diferentes.

Os dois tipos de ilustração esquematicamente na Figura 3.16. Os diagramas representam a região ao redor de um vértice e os números indicam os tipos e posições relativas dos polígonos que o cercam. Esta informação pode ser escrita de forma abreviada como (3,4,3,4) e (3,3,4,4), onde as listas contêm o número de lados de cada face em ordem.

Kepler parece não ter feito distinção entre espécies e tipos. Ele enumera apenas espécies de vértices, e no caso do exemplo acima. Ele escreve:

"Dois ângulos de triângulo e dois ângulos de quadrado são menores que quatro ângulos retos. Assim, oito triângulo e seis quadrado se encaixam para formar um cuboctaedro."

Ele não menciona que existem dois arranjos possíveis de polígonos ao redor do vértice. A ilustração mostra como eles devem ser organizados; Do tipo (3,3,4,4) não é considerado. Este caso não pode ser realizado como um poliedro perfeito.

Kepler afirma que três polígonos de tipos diferentes não podem formar um ângulo sólido em uma figura perfeita se algum deles tiver um número ímpar de lados. Um

análogo deste resultado que se aplica a vértices cercados por quatro polígonos pode ser usado para excluir o caso $(3, 3, 4, 4)$ acima. Esses dois resultados são coletados pelo seguinte lema.

Lema 3.2 *Um poliedro no qual todos os ângulos sólidos são circundados da mesma forma não tem ângulos sólidos dos seguintes tipos:*

- a. (a, b, c) onde a é ímpar e $b \neq c$ (Ver Figura 3.17).
- b. $(3, a, b, c)$, onde $a \neq c$ (Ver Figura 3.18).

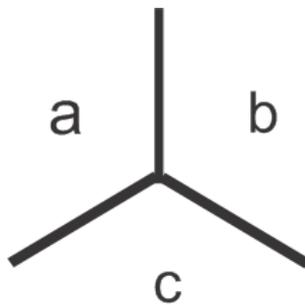


Figura 3.17: onde a é ímpar e $b \neq c$

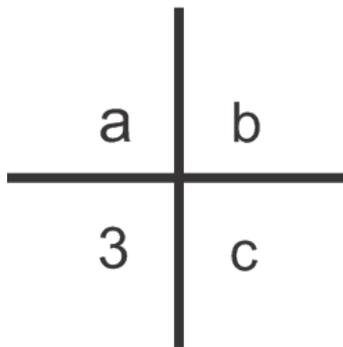


Figura 3.18: onde $a \neq c$

A prova do Lema 3.2 será dividida em duas partes:

[i] Para faces que estão em volta do vértice que possua apenas três faces; Se a for ímpar, logo b e c só pode ser iguais como pode ser visto na figura 3.17;

[ii] Para faces que estão em volta do vértice que possua apenas quatro faces e uma delas seja triangular; Se uma das faces que estão ao redor do vértice for triangular,

portanto duas faces não adjacentes obrigatoriamente são iguais como pode ser visto na figura 3.18.

No que segue, para simplificar a escrita, vamos usar a seguinte definição.

Definição 3.5 *Um n -gon é um polígono regular de n lados. Assim, 3-gon é um triângulo equilátero, 4-gon é um quadrado, e assim por diante.*

Agora, provemos o Lema 3.2.

Prova. No item a., o fato de todos os ângulos sólidos terem o mesmo tipo implica que as faces b -gon devem alternar com as faces c -gon ao redor do limite de uma face a -gon. Mas, como a é considerado ímpar, isso leva a uma contradição. Isso é claramente visto no exemplo mostrado na Figura 3.19(a) que ilustra o caso de $a = 7$.

No item b., consideramos a forma como as faces devem ser dispostas em torno do 3-ângulo. Em cada ângulo, a face oposta ao 3-gon é sempre um b -gon. Sendo todos os vértices têm o mesmo tipo, os lados do 3-gon devem ser anexados aos a -ângulos e c -ângulos, e estes devem alternar em torno do 3-gon. Isso novamente leva à inconsistência (veja a Figura 3.19). ■

Kepler então afirma a proposição:

"Há treze de congruências sólidas que são perfeitas até certo ponto. Destes treze obtemos os sólidos de Arquimedes."

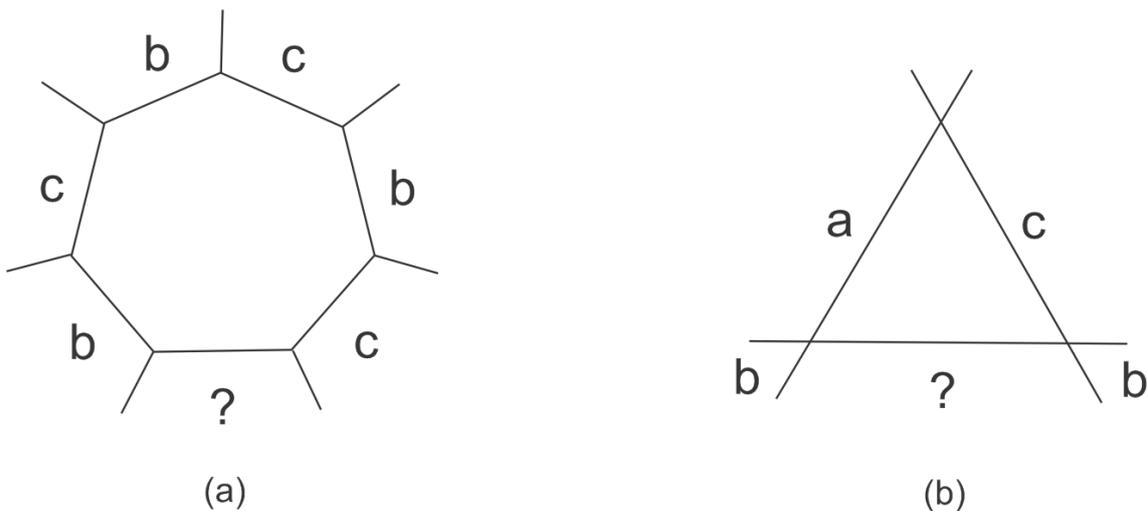


Figura 3.19:

A prova do seguinte teorema é baseada nas ideias de Kepler e segue sua apresentação bastante de perto.

Teorema 3.2 *Suponha que todos os ângulos sólidos de um poliedro convexo sejam do mesmo tipo. Além das duas famílias de tipos $(4, 4, n)$ e $(3, 3, 3, n)$ existem treze tipos de ângulo sólido que podem ocorrer. Essas possibilidades são realizados pelas famílias de prismas, antiprismas e os sólidos arquimedianos, respectivamente.*

Prova. O teorema é provado esgotando todas as combinações possíveis de faces que podem circundar um ângulo sólido e excluindo aquelas que não podem ser estendidas da maneira exigida.

O primeiro lema acima mostra que a espécie de, ângulo sólido presentes podem ser cercados por no máximo três tipos de polígono regular, e deve haver pelo menos dois tipos de polígono (por definição). Seguindo Kepler, esses dois casos são investigados separadamente, o primeiro lema acima mostra que o formato das faces deve haver pelo menos dois tipos de polígono.

Primeiro, consideramos aquelas espécies de ângulo sólido onde há dois tipos de faces.

(1) Espécies de ângulo sólido limitadas apenas por 3-gon (faces triangulares) e 4-gon (faces quadradas).

Suponha que haja apenas um 4-gon em cada ângulo sólido. então pode haver no máximo quatro, 3-ângulos já que a soma dos ângulos de cinco ou mais 3-gon e 4-gon é maior que 360° . Assim, existem três tipos possíveis de sólido. $(3,3,3,3,4)$, que é realizado no cubo snub; $(3,3,3,4)$, que forma um antiprisma de base quadrangular; e $(3,3,4)$ que é excluído porque o lema 3.1 mostra que este tipo de ângulo sólido não pode ser estendido.

Em seguida, suponha que existam dois 4-gon na espécie de ângulo sólido. Três 3-gon e dois 4-gon se encaixam em torno de um ponto em um plano, de modo que pode haver no máximo dois 3-gon no ângulo sólido. A espécie de ângulo sólido contendo de 4-gon e dois de 3-gon vem em dois tipos. Um destes $(3,3,4,4)$, é excluído pelo lema 3.2; o outro $(3,4,3,4)$, corresponde ao cuboctaedro. O caso restante de dois de 4-ângulos e um único de 3-gon $(3,4,4)$ forma um prisma triangular.

3.2. POLIEDROS DE ARQUIMEDES

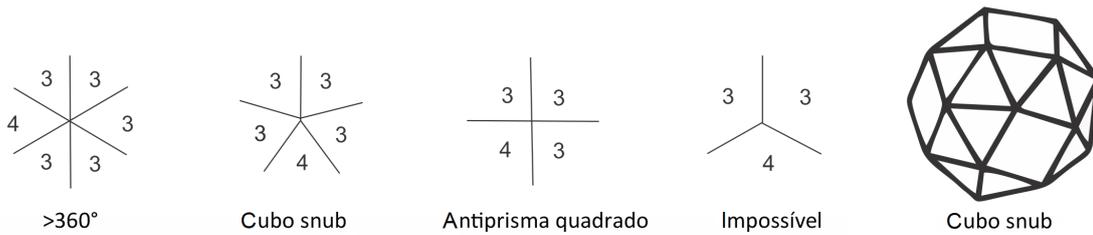


Figura 3.20:

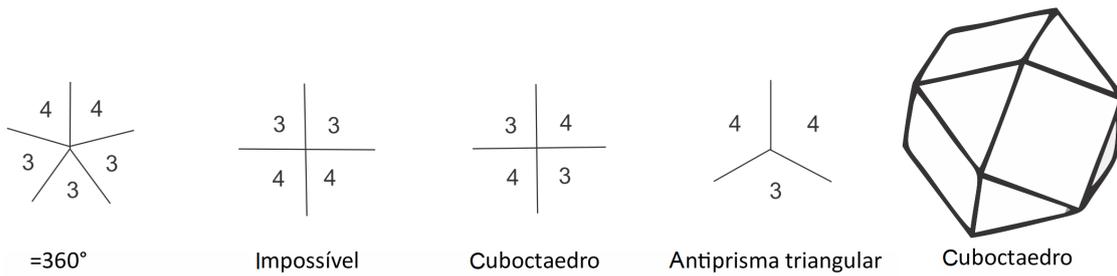


Figura 3.21:

Se houver mais de dois 4-gon no ângulo sólido, então é única a possibilidade, a saber $(3,4,4,4)$, é o rombicuboctaedro. A soma dos ângulos dos três dos 4-gon e dois ou mais de 3-ângulos é maior que 360° , e quatro ou mais de 4-gon sofrem o mesmo problema.

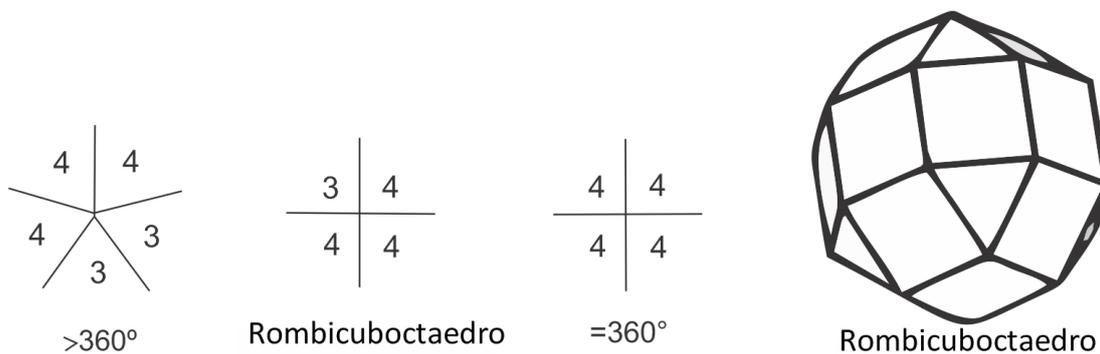


Figura 3.22:

(2) Espécies de ângulo sólido limitadas apenas por 3-gon e 5-gon.

A análise deste caso é a mesma do anterior. Se há apenas um 5-gon em um ângulo sólido, então pode haver no máximo quatro 3-gon. Há mais três possibilidades, o

primeiro é quatro 3-gon, que forma o dodecaedro torcido(3,3,3,3,5), o segundo é três 3-gon, que forma um antiprisma pentagonal (3,3,3,5), e terceiro caso (3,3,5) é impossível pelo lema 3.2.

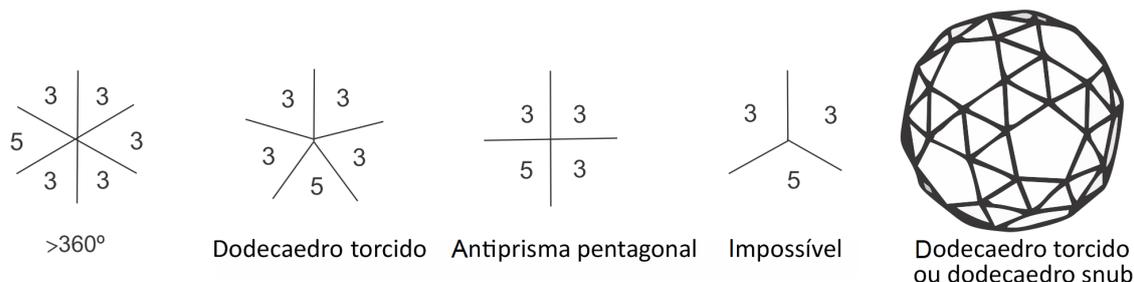


Figura 3.23:

Se houver dois 5-gon nas espécies de ângulo sólido, então há no máximo dois 3-gon. Novamente, as espécies contendo dois 3-gon vem em dois tipos: (3,3,5,5), não podem ser estendidas pela parte do lema 3.2; e (3,5,3,5), que é o icosidodecaedro. O caso restante é excluído pelo lema 3.1.

Não existem outras espécies de ângulo sólido contendo 5-gon, pois um único 3-gon com três 5-gon tem uma soma de ângulos maior que 360°.

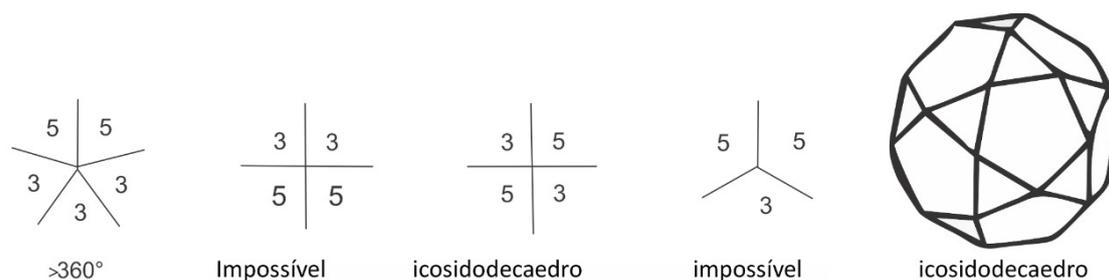


Figura 3.24:

(3) Espécies de ângulo sólido limitadas apenas por 3-gon e 6-gon.

No caso em que a espécie contém um único 6-gon, há no máximo três 3-gon, pois quatro 3-gon e um 6-gon não formam um ângulo convexo, mas sim plano. Três 3-gon e um 6-gon (3,3,3,6), formam um antiprisma hexagonal, e o caso de dois 3-gon e um 6-gon (3,3,6), é excluído pelo lema 3.2.

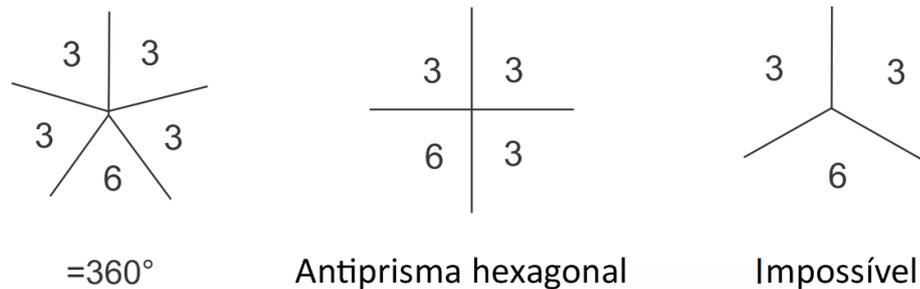


Figura 3.25:

Se houver dois 6-gon no ângulo sólido, então há somente um de 3-gon, caso contrário, a soma do ângulo é superior a 360° . Este é o único caso $(3,6,6)$ e corresponde ao tetraedro truncado. Mais de dois 6-gon não podem formar um ângulo sólido.

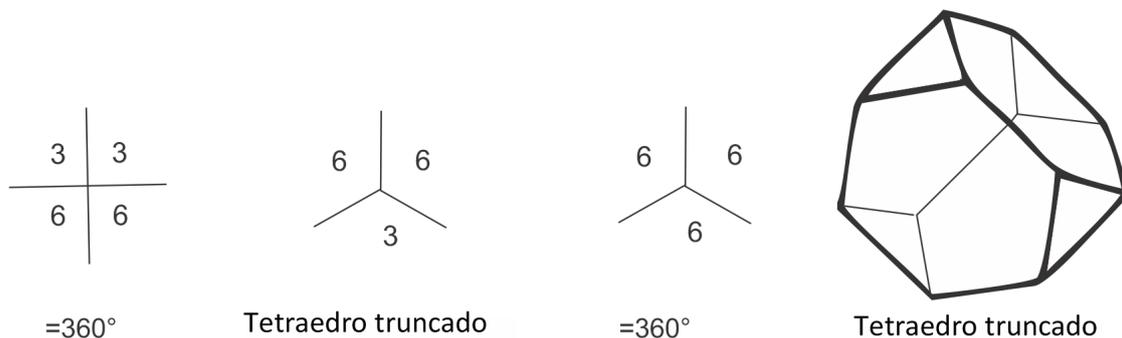


Figura 3.26:

(4) Espécies de ângulo sólido contendo apenas 3-gon e n-gon somente para $n \geq 7$. Nenhuma das espécies de ângulo sólido contendo um único n-gon pode formar um Sólido de Arquimedes. A única possibilidade é $(3, 3, 3, n)$, o antiprisma com uma base n-gon.

Se houver mais de um n-gon no ângulo sólido, então a única possibilidade é ter dois n-gon e um 3-gon. Se n é ímpar, então este tipo de ângulo não pode ser estendido pelo lema 3.1. E se n for igual ou maior que 10, a soma dos ângulos planos é maior que 360° . Isso deixa os casos $(3,8,8)$ que é o cubo truncado, e $(3,10,10)$, é o dodecaedro truncado.

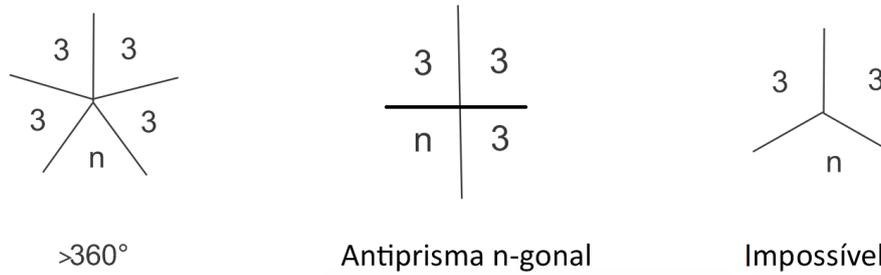


Figura 3.27:

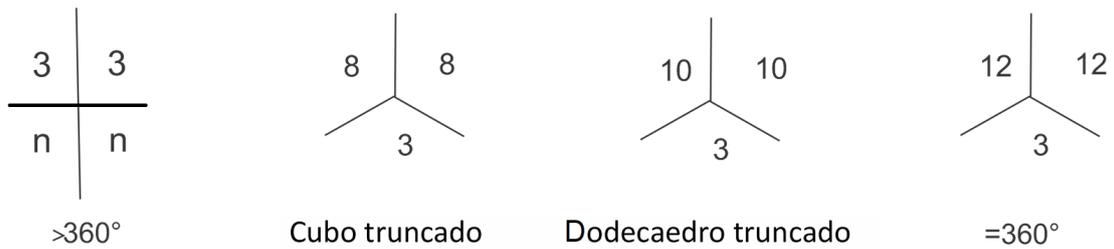


Figura 3.28:

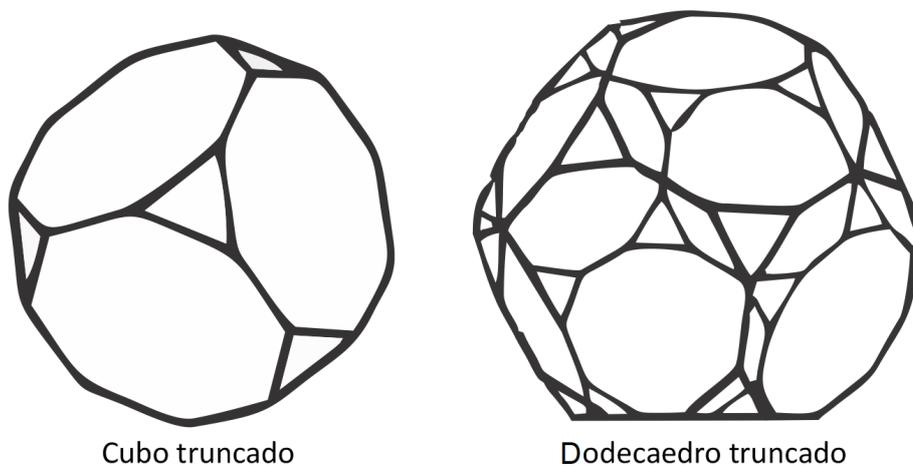


Figura 3.29:

Isso completa a análise de todas as espécies de ângulo sólido contendo 3-gon e outro tipo de polígono. Em seguida, as outras espécies que contêm apenas dois tipos do polígono são investigados.

(5) Espécies de ângulo sólido contendo apenas 4-gon e n-gon ($n \geq 5$).

Se houver uma única face n-gon, então o tipo de ângulo sólido deve ser $(4, 4, n)$ como a soma dos ângulos planos de três ou mais 4-gon e um n-gon isto também é amplo. O caso permitido é um prisma com uma base n-gon. Se houver duas faces

n -gon, então haverá apenas uma única 4-gon (caso contrário a soma dos ângulos seria muito grande).

Assim, o tipo de ângulo sólido é $(4, n, n)$. Se $n \geq 8$ então a soma dos ângulos é maior que 360° , e se n for ímpar, pelo lema 3.1 mostra que nenhum poliedro é possível. O único restante caso é $(4, 6, 6)$ isso é realizado como o octaedro truncado.

A possibilidade de três ou mais n -gon juntos com 4-gon é excluído por sua soma angular.

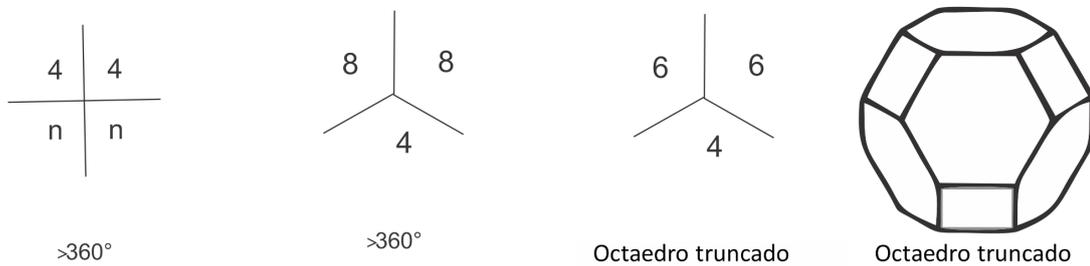


Figura 3.30:

(6) Espécies de ângulo sólido contendo apenas 5-gon e n -gon ($n \geq 6$).

Um único n -gon não pode fazer parte de um angulo sólido, para ele a soma dos ângulos e um n -gon é maior que 360° , e um ângulo do tipo $(5, 5, n)$ é excluído pela parte 3.1 do lema.

Se houver dois n -gon, então um argumento de soma de ângulos mostra que o ângulo do sólido deve ser do tipo $(5, n, n)$. O menor valor de n resulta no icosaedro truncado $(5,6,6)$. Para qualquer valor maior de n a soma dos ângulos do plano é superior a 360° . Mais de dois n -gon leva a uma soma de ângulos que é muito grande.

Em qualquer outra espécie de ângulo sólido contendo apenas dois tipos de polígonos a menor possível soma de ângulos surge de dois 6-gon e um 7-gon, e isso é menor do que 360° . Assim, toda espécie de ângulo sólido que contém apenas dois tipos de polígonos agora foi tratado. Resta considerar as espécies envolvendo três tipos de polígono.

(7) Espécies de ângulo sólido contendo 3-gon, 4-gon e n -gon ($n \geq 5$).

Suponha primeiro que existe um único n -gon. Se houvesse um 4-gon poderia ser no máximo dois 3-gon; a espécie contendo dois 3-gon e excluído pelo lema 3.2, e o

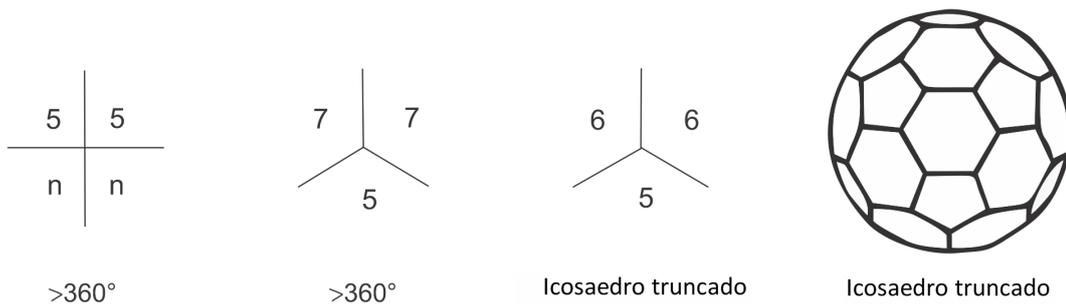


Figura 3.31:

ângulo do tipo $(3, 4, n)$ é excluído pelo lema 3.1.

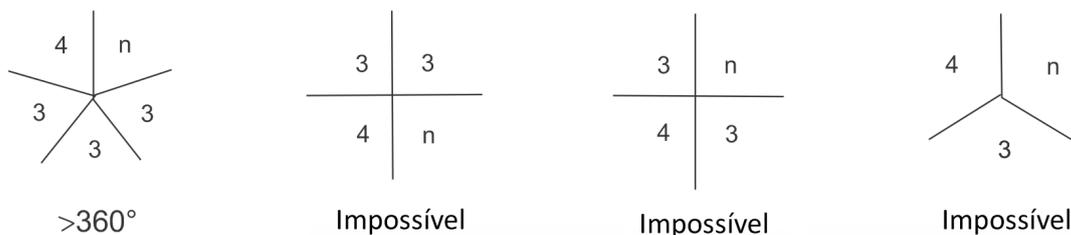


Figura 3.32:

Se houver dois 4-gon e um único n -gon no ângulo sólido, este pode ser apenas um em 3-gon, caso contrário, a soma dos ângulos planos está em pelo menos 360° . A soma dos ângulos é maior que 360° para $n \geq 6$. Assim, existem dois tipos possíveis: $(3,4,4,5)$ que é deduzido pelo lema 3.2; e $(3,4,5,4)$ que é rombicosidodecaedro

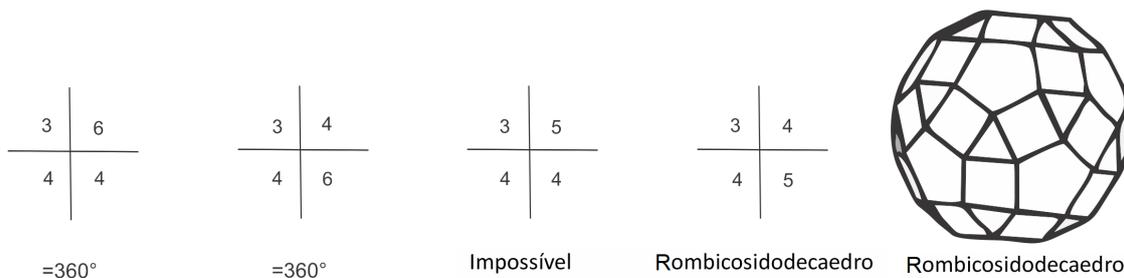


Figura 3.33:

(8) Espécies de ângulo sólido contendo três tipos de face, nenhuma das quais é com 3-gon.

Suponha que quatro faces formam o ângulo sólido. A menor possibilidade de combinação possível é ter dois 4-gon, um 5-gon e um 6-gon. A soma dos ângulos interno desses polígonos é maior que 360° , então deve haver muitos polígonos formando o ângulo sólido, todos os quais são diferentes. Pelo lema 3.1, mostra que, neste caso nenhum dos polígonos pode ter um número ímpar de lados. A menor combinação possível de faces é (4,6,8) que corresponde ao grande rombicuboctaedro (ou cuboctaedro truncado). A próxima menor combinação é (4,6,10), que corresponde ao icosidodecaedro truncado. Em todas as outras combinações de faces a soma dos ângulos é maior que 360° para produzir um ângulo sólido.

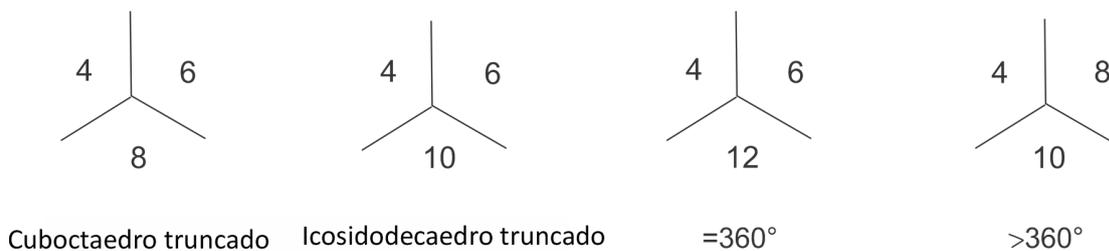


Figura 3.34:

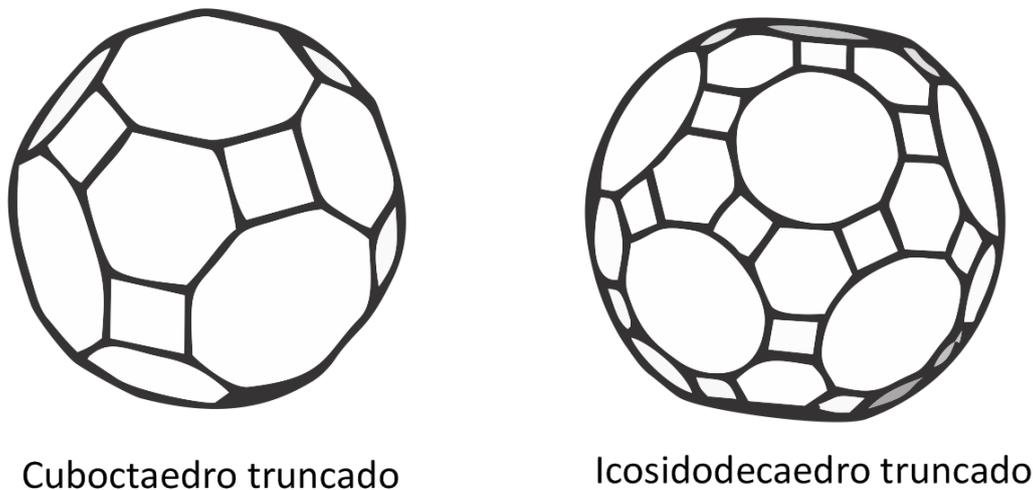


Figura 3.35:

Todas as possibilidades de colocar polígonos regulares juntos para formar um

3.2. POLIEDROS DE ARQUIMEDES

ângulo sólido agora foram considerada se todos os tipos de ângulos sólidos que não são excluídas por condições simples nos lemas anteriores são candidatas a poliedro que são "perfeitos em menor grau". Depois de excluir as famílias dos prismas, as três possibilidades que permanecem são realizadas pelo sólido Arquimediano. Observe que a ordem dos poliedros nas figuras não corresponde à ordem em que elas aparecem na enumeração, assim todos os sólidos de truncamento são agrupados. ■

Capítulo 4

Poliedros de Catalan e Johnson

4.1 Poliedros de Catalan

Os sólidos de Catalan são os poliedros duais dos sólidos arquimedianos. O poliedro dual de um poliedro dado é o poliedro que tem como faces os polígonos, com sua região interior, cujas arestas são obtidas ligando os centros de todos os pares de faces adjacentes do poliedro inicial. Brevemente falando, o dual é construído de um poliedro por "substituir cada face por um vértice, e cada vértice por uma face", ou seja, os vértices de um correspondem às faces do outro. Por exemplo, o dual do cubo é um octaedro e o dual de um octaedro é um cubo como na figura 4.1.

Definição 4.1 *Chamamos de poliedros duais aos poliedros em que um se encontra inscrito no outro de tal forma que os vértices de um coincidem com os centros das faces do outro.*

O dual de um dual é o poliedro original. Existem 13 sólidos de Catalan, obtidos dos 13 poliedros arquimedianos

O nome é uma homenagem ao matemático belga Eugène Charles Catalan, que publicou um artigo em 1865 descrevendo estes sólidos. As faces dos sólidos de Catalan não são regulares, mas são congruentes entre si. Estes sólidos possuem dois ou mais tipos de vértices. Isso é coerente com os critérios de dualidade, pois nos sólidos arquimedianos todos os vértices são congruentes, mas as faces são de dois ou mais tipos, vamos agora conhecer esses e suas principais características como: vértices, faces e arestas.

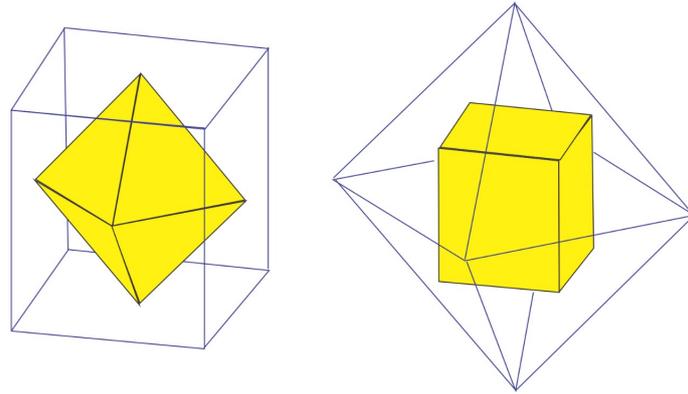


Figura 4.1:

Tetraedro triakis

Suas características: Possuem 12 faces, 18 arestas e 8 vértices. Suas faces são triângulo isósceles. Dual do tetraedro truncado.

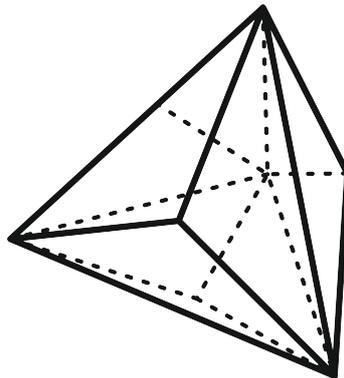


Figura 4.2: Tetraedro triakis

Dodecaedro rômbo Na geometria, o dodecaedro rômbo é um poliedro convexo com 12 faces congruentes. Tem 24 arestas, e 14 vértices de dois tipos. Dual do cuboctaedro.

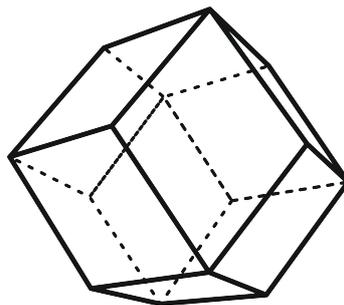


Figura 4.3: Dodecaedro rômbo

Octaedro triakis As sua faces são 24 triângulos isósceles. Tem 36 arestas e 14 vértices. O poliedro dual do Octaedro triakis é o cubo truncado. Dual do cubo truncado.

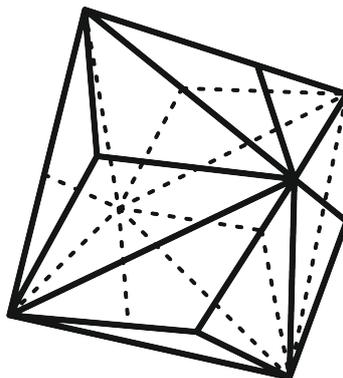


Figura 4.4: Octaedro triakis

Hexaedro tetrakis

Possui 24 faces nas quais são triângulos isósceles, 36 arestas e 14 vértices. Dual do octaedro truncado.

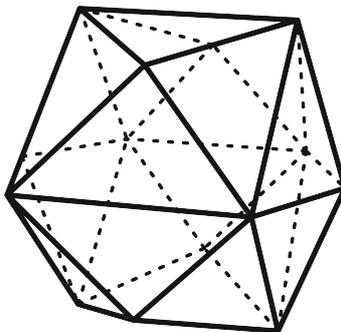


Figura 4.5: Hexaedro tetrakis

Icositetraedro deltoidal

O icositetraedro deltoidal é um sólido de Catalan cujas sua faces são 24 deltóides (pipa), 48 arestas e 26 vértices. Dual do rombicuboctaedro

Dodecaedro disdiakis

Este sólido é obtido como dual do cuboctaedro truncado por acumulação sobre o dodecaedro rômboico as sua faces são 48 triângulos escalenos, 72 arestas e 26 vértices. Dual do Cuboctaedro truncado.

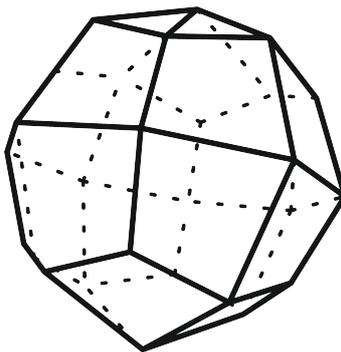


Figura 4.6: Icositetraedro deltoidal

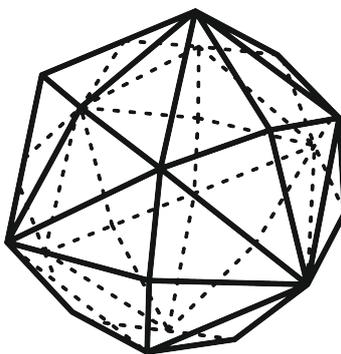


Figura 4.7: Dodecaedro disdiakis

Triacontaedro rômico

As suas faces são 30 losangos, 60 arestas e 32 vértices. Dual do icosidodecaedro

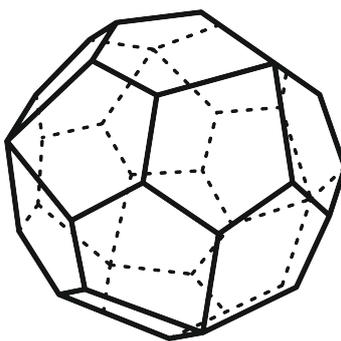


Figura 4.8: Triacontaedro rômico

Icosaedro triakis Este sólido é obtido como dual do dodecaedro truncado por acumulação sobre o icosaedro. As suas faces são 60 triângulos isósceles, 90 arestas e 32 vértices. Dual do dodecaedro truncado.

Dodecaedro pentakis As suas faces são 60 triângulos isósceles tem 90 arestas

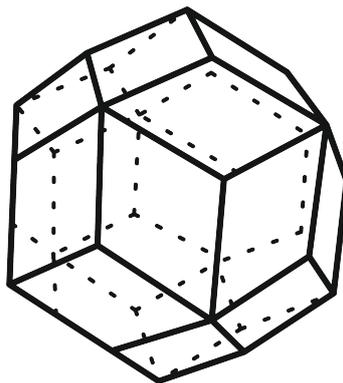


Figura 4.9: Icosaedro triakis

e 32 vértices, o poliedro dual do dodecaedro pentakis é o icosaedro truncado. Dual do icosaedro truncado.

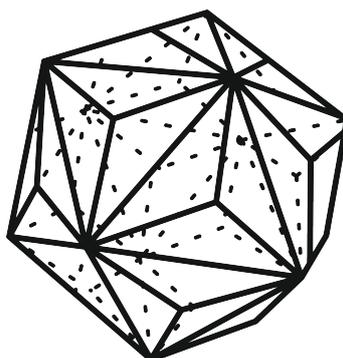


Figura 4.10: Dodecaedro pentakis

Hexecontaedro deltoidal

Possui faces são 60 quadriláteros (com a forma de papagaio de papel). Tem 120 arestas e 62 vértices. Dual do rombicosidodecaedro.

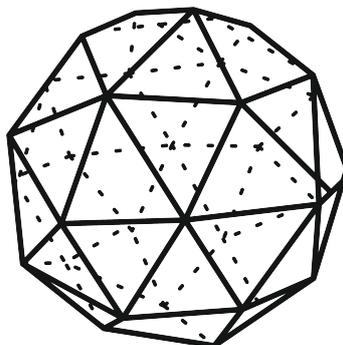


Figura 4.11: Hexecontaedro deltoidal

Triacontaedro disdiakis

As suas faces são 120 triângulos escalenos, 180 arestas e 62 vértices. Dual do icosidodecaedro truncado

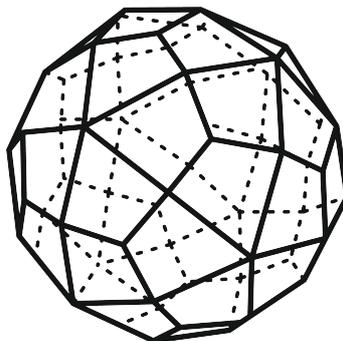


Figura 4.12: Triacontaedro disdiakis

Icositetraedro pentagonal

Possui 24 pentágonos irregulares, 60 arestas e 38 vértices. Dual do cubo snub.

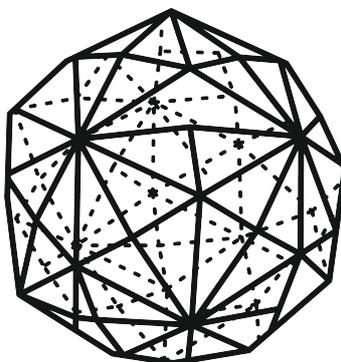


Figura 4.13: Icositetraedro pentagonal

Hexecontaedro pentagonal

Contém 60 faces pentágonos irregulares, 150 arestas e 92 vértices. Dual do icosidodecaedro snub.

4.2 Sólidos de Johnson

Além dos poliedros de Platão, Catalan e Arquimedes, também temos os sólidos de Johnson, os quais são poliedros convexos cujas faces constituem polígonos regulares e

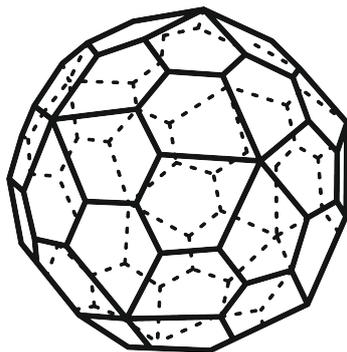


Figura 4.14: Hexecontaedro pentagonal

todas as arestas possuem o mesmo comprimento, excluindo-se os sólidos platônicos, os sólidos arquimedianos e a família infinita dos prismas. O nome é uma homenagem ao matemático Norman Johnson que, em 1966, conjecturou a existência de apenas 92 sólidos satisfazendo a definição acima. Em 1969, o também matemático Victor Zalgaller provou que a lista de Johnson era completa.

1- Pirâmide quadrada

uma pirâmide quadrada é uma pirâmide que tem uma base quadrada. Se os lados da pirâmide são triângulos equiláteros, é constituída por 1 quadrado e 4 triângulos, tem 5 vértices, 8 arestas e 5 faces.

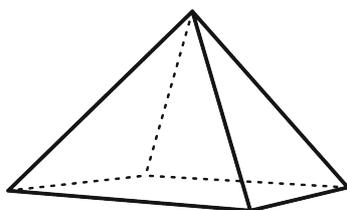


Figura 4.15: Pirâmide quadrada

2- Pirâmide pentagonal

É uma pirâmide com uma base pentagonal, onde são erguidos cinco faces triangulares que se conectam em um ponto. É constituída por 1 pentágono e 5 triângulos, tem 6 vértices, 6 faces e 10 arestas.

3- Cúpula triangular

Pode ser vista como metade de um cuboctaedro. As suas faces são 4 triângulos, 3 quadrados e 1 hexágono, 15 arestas e 9 vértices

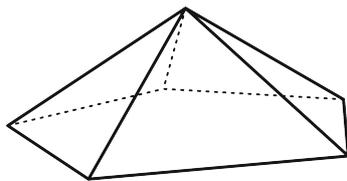


Figura 4.16: Pirâmide pentagonal

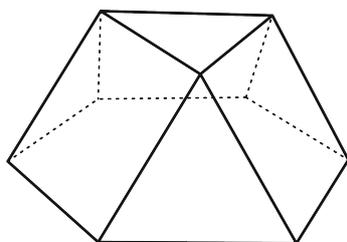


Figura 4.17: Cúpula triangular

4- Cúpula quadrada

Pode ser obtido como um pedaço do Rombicuboctaedro. Como em todas as cúpulas, a base poligonal tem duas vezes mais arestas e vértices que o topo. Neste caso a base é um octógono (8 arestas e 8 vértices) e o topo é um quadrado (4 lados e 4 vértices). As suas faces são 4 triângulos e 5 quadrados e um octógono, 20 arestas e 12 vértices.

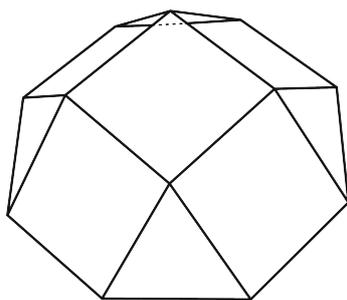


Figura 4.18: Cúpula quadrada

5- Cúpula pentagonal

Pode ser obtida como uma fatia do rombicosidodecaedro. A cúpula pentagonal consiste de 5 triângulos equiláteros, 5 quadrados, 1 pentágono e 1 decágono, 25 arestas e 15 vértices.

6- Rotunda pentagonal

Rotunda pentagonal ou Rotunda decagonal pode ser visto como a metade exata

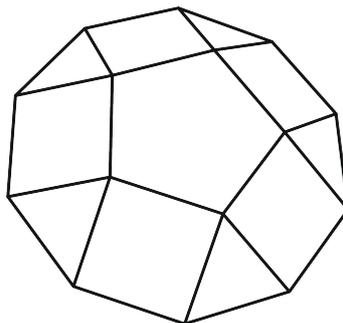


Figura 4.19: Cúpula pentagonal

de um icosidodecaedro, as suas faces são 10 triângulos, 6 pentágonos e 1 decágono, 35 arestas e 20 vértices.

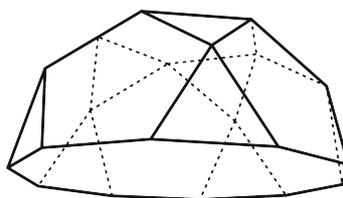


Figura 4.20: Rotunda pentagonal

7- Pirâmide triangular alongada

Como o nome sugere, pode ser construído alongando-se um tetraedro ao juntar um prisma triangular a sua base, possui 4 faces triangulares e 3 faces quadrangular, 12 arestas e 7 vértices.

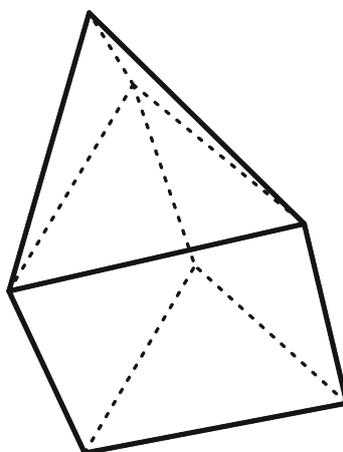


Figura 4.21: Pirâmide triangular alongada

8- Pirâmide quadrada alongada

Como o nome sugere, pode ser construída alongando-se uma pirâmide quadrada ao juntar um cubo a sua base quadrada. Possuem 4 faces triangulares e 5 faces quadradas, 16 arestas e 9 vértices.

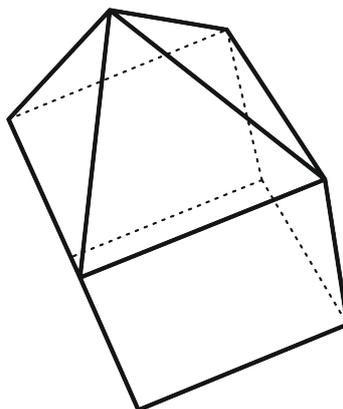


Figura 4.22: Pirâmide quadrada alongada

9- Pirâmide pentagonal alongada

Como o nome sugere, pode ser construído alongando-se uma pirâmide pentagonal ao juntar um prisma pentagonal a sua base. Possui 5 faces triangulares, 5 quadrados e 1 pentágono, 20 arestas e 11 vértices.

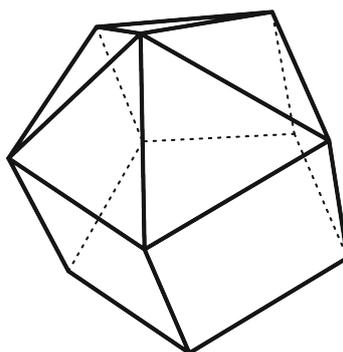


Figura 4.23: Pirâmide pentagonal alongada

10- Pirâmide quadrada giralongada

Pode ser construído girando uma pirâmide quadrada, o que neste caso pode envolver juntar um antiprisma triangular a sua base. Tem 12 faces triangulares e 1 quadrado, 20 arestas e 9 vértices.

11- Pirâmide pentagonal giralongada

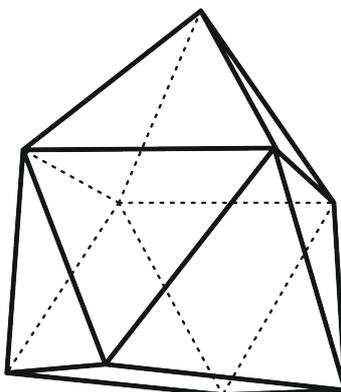


Figura 4.24: Pirâmide quadrada giralongada

Pode ser construído girando uma pirâmide pentagonal, que nesse envolve juntar um antiprisma pentagonal a sua base. Possui 15 faces triangulares e uma face pentagonal, 25 arestas e 11 vértices.

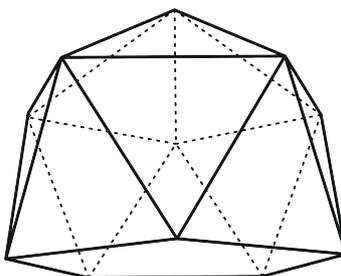


Figura 4.25: Pirâmide pentagonal giralongada

12- Bipirâmide triangular

A bipirâmide triangular é um tipo de hexaedro, construído juntando dois tetraedros por uma face. 6 faces triangulares, 9 arestas e 5 vértices.

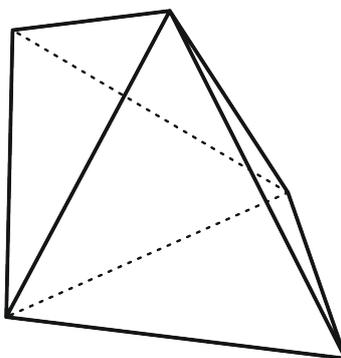


Figura 4.26: Bipirâmide triangular

13- Bpirâmide pentagonal

Pode ser visto como duas pirâmides pentagonais conectadas pela suas bases. 10 faces triangulares, 15 arestas e 7 vértices.

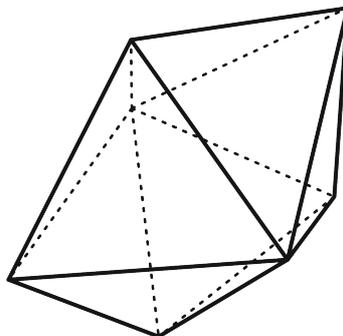


Figura 4.27: Bpirâmide pentagonal

14- Bpirâmide triangular alongada

Alongando-se uma pirâmide triangular colocando-se um prisma triangular entre suas metades. O nirrosula, um instrumento musical africano tecido de tiras de folhas de planta, é feito sob a forma de uma série de bpirâmides alongadas com triângulos não equiláteros como faces de sua parte superior, possui 6 faces triangulares, 3 faces quadrilateras, 15 arestas e 8 vértices.

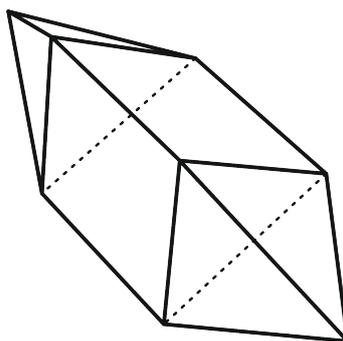


Figura 4.28: Bpirâmide triangular alongada

15- Bpirâmide quadrada alongada

Pode ser construído alongando-se um octaedro inserindo um cubo entre as metades congruentes. Contendo 8 faces triangulares e 4 faces quadrilateras, 20 arestas e 10 vértices.

16- Bpirâmide pentagonal alongada

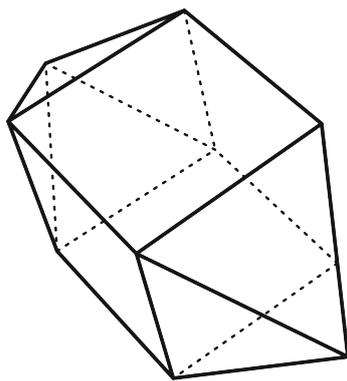


Figura 4.29: Bipirâmide quadrada alongada

Bipirâmide pentagonal alongada é um poliedro constituído por duas pirâmides pentagonais e um prisma pentagonal. As suas faces são 10 triângulos e 5 retângulos, nos quais 25 arestas e 12 vértices.

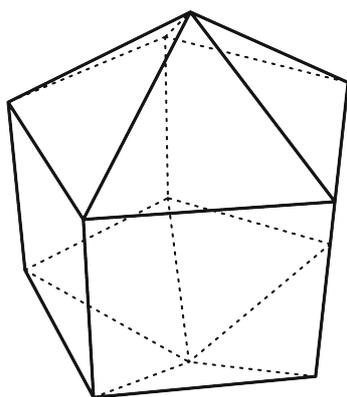


Figura 4.30: Bipirâmide pentagonal alongada

17- **Bipirâmide quadrada giralongada**

Bipirâmide quadrada giralongada é um poliedro constituído por duas pirâmides quadradas e um antiprisma quadrado. As suas faces são 16 triângulos, 10 vértices e 24 arestas.

18- **Cúpula triangular alongada**

Pode ser construído alongando-se uma cúpula triangular ao juntar um prisma hexagonal a sua base. Possui 4 faces triangulares, 9 quadrilateras e um hexágono, 27 arestas e 15 vértices.

19- **Cúpula quadrada alongada**

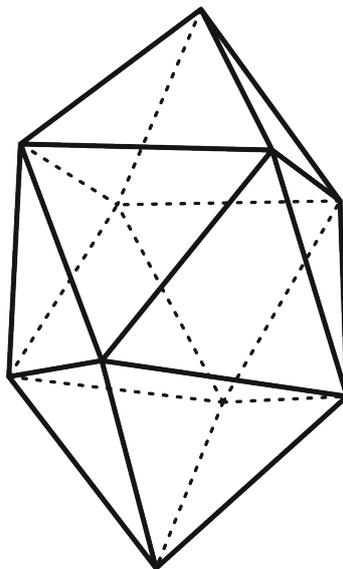


Figura 4.31: Bipirâmide quadrada giralongada

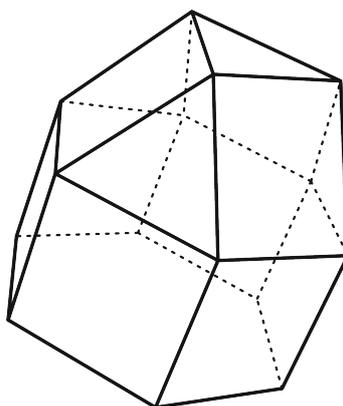


Figura 4.32: Cúpula triangular alongada

Pode ser construída alongando-se uma cúpula quadrada ao juntar um prisma octogonal a sua base, contendo 4 faces triangular, 13 faces quadrangular e uma face octogonal, 36 arestas e 20 vértices.

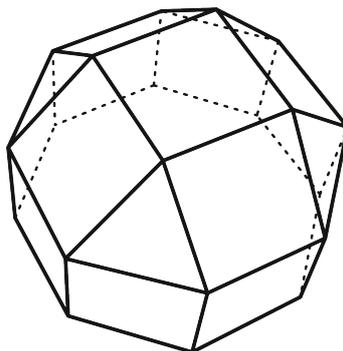


Figura 4.33: Cúpula quadrada alongada

20- Cúpula pentagonal alongada

Construída alongando-se uma cúpula pentagonal ao juntar um prisma decagonal a sua base formamos a cúpula pentagonal alongada de 5 faces triangular, 15 quadrados, 1 pentágono e 1 decágono, contendo 45 arestas e 25 vértices.

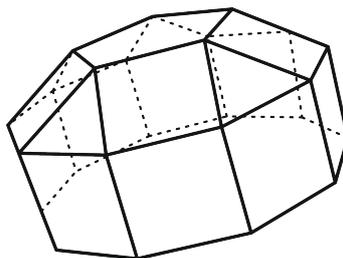


Figura 4.34: Cúpula pentagonal alongada

21- Rotunda pentagonal alongada

ao juntar um prisma decagonal a sua base obtemos a rotunda pentagonal alongada. O sólido pode ser visto também como um ortobirotonde pentagonal alongada com uma rotunda pentagonal removida. Nos quais as faces contém: 10 triângulos, 10 quadrados, 6 pentágonos e 1 decágono. 55 arestas e 30 vértices.

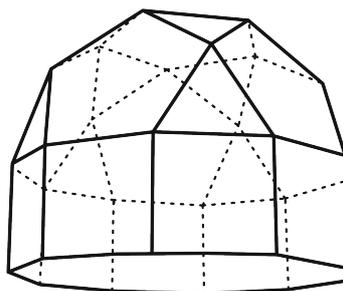


Figura 4.35: Rotunda pentagonal alongada

22- Cúpula triangular giralongada

Pode ser construída giralongando-se uma cúpula triangular mediante a fixação de um antiprisma hexagonal em sua base. Também pode ser vista como uma bicúpula triangular giralongada que tenha sido retirada uma cúpula triangular. Possui 16 triângulos, 3 quadrados e um hexágono; 33 arestas e 15 vértices.

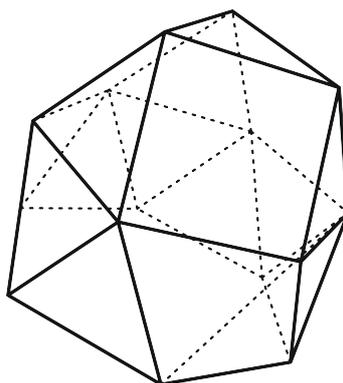


Figura 4.36: Cúpula triangular giralongada

23- Cúpula quadrada giralongada

Como seu nome sugere, pode ser construída giralongando-se uma cúpula quadrada mediante a fixação de um antiprisma octagonal em sua base. Possui 20 faces triangular, 5 quadrados e 1 octógono, 44 arestas e 20 vértices.

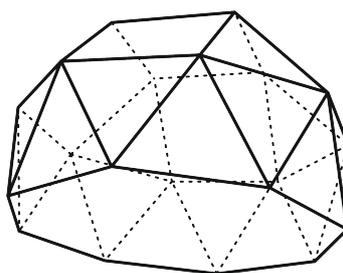


Figura 4.37: Cúpula quadrada giralongada

24- Cúpula pentagonal giralongada

pode ser construída giralongando-se uma cúpula pentagonal mediante a fixação de um antiprisma decagonal em sua base. Também pode ser vista como uma bicúpula pentagonal giralongada que tenha sido retirada uma cúpula pentagonal. Suas faces possui 25 triângulos, 5 quadrados, 1 pentágono e 1 decágono, 55 arestas e 25 vértices.

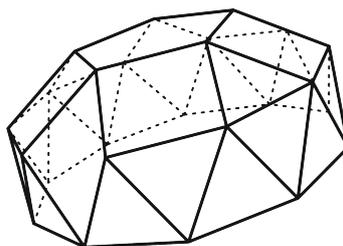


Figura 4.38: Cúpula pentagonal giralongada

25- Rotunda pentagonal giralongada

Podemos ser construída giralongando-se uma rotunda pentagonal mediante a fixação de um antiprisma decagonal em sua base. Cujas faces são 30 triângulos, 6 pentágonos e 1 decágono, 65 arestas e 30 vértices.

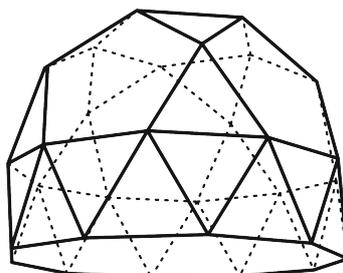


Figura 4.39: Rotunda pentagonal giralongada

26- Girobiprisma triangular

Podemos construí-lo unindo-se dois prismas triangulares de faces regulares por uma de suas faces quadradas e dando um giro de 90 graus em um prisma em relação à face comum. Contendo 4 faces triangulares e 4 quadrados, 14 arestas e 8 vértices.

27- Ortobicúpula triangular

Como seu nome sugere, pode ser construída unindo-se duas cúpulas triangulares por suas bases. Tem o mesmo número de quadrados e triângulos em cada vértice. A ortobicúpula triangular tem certa similaridade com o cuboctaedro, a diferença é que as duas cúpulas triangulares que formam a ortobicúpula triangular estão unidas de forma a que os triângulos de uma das cúpulas constituintes tocam triângulos da outra e os quadrados tocam outros quadrados (daí vem o prefixo "orto"); Nota-se que no cuboctaedro os triângulos tocam os quadrados e vice-versa. Dada uma ortobicúpula triangular, ao rotacionar uma das cúpulas 60 graus antes de unir, se

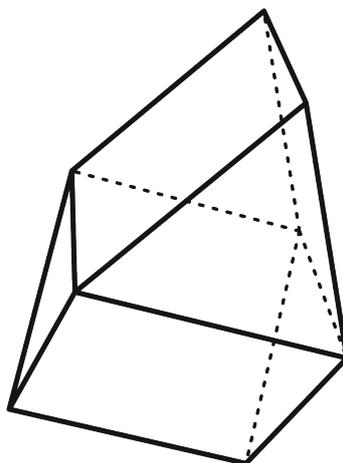


Figura 4.40: Girobiprisma triangular

forma um cuboctaedro. Nos quais possuem 8 faces triangular, 6 faces quadradas, 24 arestas e 12 vértices.

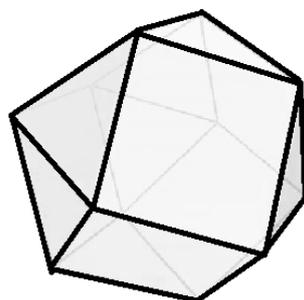


Figura 4.41: Ortobicúpula triangular

28- Ortobicúpula quadrada

Como seu nome sugere, pode ser construída unindo-se duas cúpulas quadradas por suas bases octogonais, de forma que encaixem faces similares entre si. Ao rotacionar uma das cúpulas em 45 graus antes de uni-la com a outra se obtém uma girobicúpula quadrada, nas quais temos 8 faces triangulares, 10 faces quadradas, 32 arestas e 16 vértices.

29- Girobicúpula quadrada

Assim como a ortobicúpula quadrada, pode ser construída a partir da união de duas cúpulas quadradas por suas bases. A diferença é que neste sólido uma das suas cúpulas está rotacionada 45 graus em relação a outra, que contém 8 faces

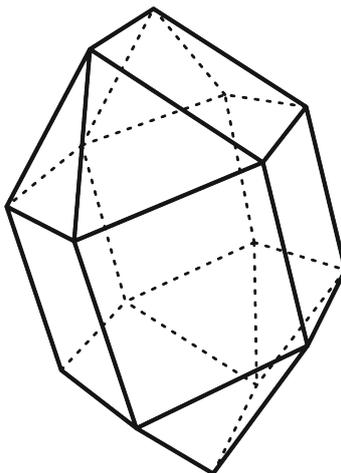


Figura 4.42: Ortobicúpula quadrada

triangulares, 10 faces no formato de quadrado, 32 arestas e 16 vértices.

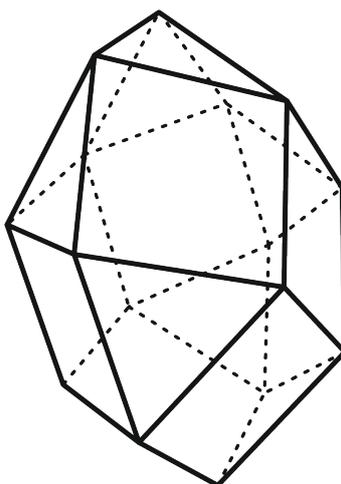


Figura 4.43: Girobicúpula quadrada

30- Ortobicúpula pentagonal

Pode ser construída juntando-se duas cúpulas pentagonais ao longo de suas bases decagonais. Uma rotação de 36 graus em uma cúpula antes da junção leva a uma girobicúpula pentagonal. As suas faces são 10 triângulos, 10 quadrados e 2 pentágonos, 40 arestas e 20 vértices.

31- Girobicúpula pentagonal

Girobicúpula pentagonal como a ortobicúpula pentagonal, pode ser construída juntando-se duas cúpulas pentagonais ao longo de suas bases decagonais. A diferença é que nesse sólido há uma rotação de 36 graus em uma cúpula antes da junção. As

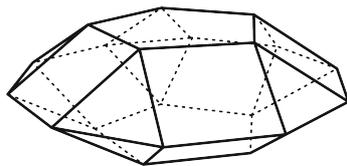


Figura 4.44: Ortobicúpula pentagonal

suas faces são por 10 triângulos, 10 quadrados e 2 pentágonos. Possuem 40 arestas e 20 vértices

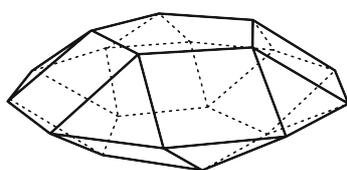


Figura 4.45: Girobicúpula pentagonal

32- Ortocúpula-rotonde pentagonal

Ortocúpula-rotonde pentagonal como seu nome sugere, pode ser construída juntando-se uma cúpula pentagonal e uma rotunda pentagonal ao longo de suas bases decagonais juntando-se as faces pentagonais. Uma rotação de 36 graus de uma das metades antes da junção resulta em uma girocúpula-rotonde pentagonal. Possui 15 faces triangulares, 5 faces quadradas e 7 pentágonos. 50 arestas e 25 vértices.

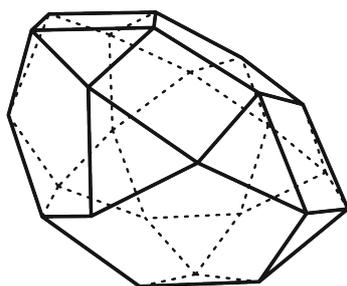


Figura 4.46: Ortocúpula-rotonde pentagonal

33- Girocúpula-rotonde pentagonal

A girocúpula-rotonde pentagonal assim como a ortocúpula-rotonde pentagonal, pode ser construída ao juntar uma cúpula pentagonal e uma rotunda pentagonal ao longo de suas bases decagonais. A diferença desse sólido é que as duas metades são rotacionadas 36 graus em relação a outra. No qual possui 15 faces triangulares, 5

quadrados, 7 pentágonos, 50 arestas e 25 vértices.

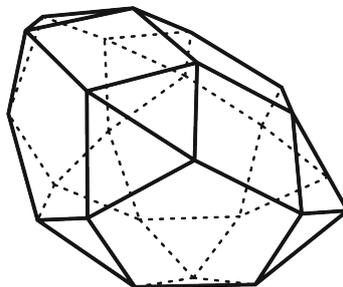


Figura 4.47: Girocúpula-rotunde pentagonal

34- Ortobirotonde pentagonal

O ortobirotonde pentagonal pode ser construído ao juntar-se duas rotundas pentagonais ao longo de suas faces decagonais. Possui 20 faces triangulares, 12 faces pentagonais, 60 arestas e 30 vértices.

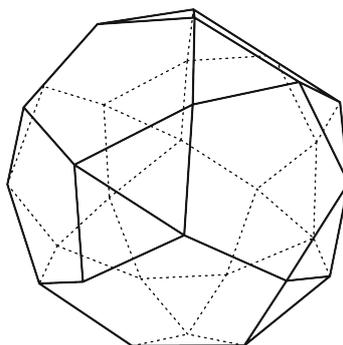


Figura 4.48: Ortobirotonde pentagonal

35- Ortobicúpula triangular alongada A ortobicúpula triangular alongada como o nome sugere, pode ser construída alongando-se uma ortobicúpula triangular ao inserir um prisma hexagonal entre as duas metades. O sólido resultante é superficialmente similar ao rombicuboctaedro, com a diferença de que tem simetria rotacional triplo sobre seu eixo ao invés de simetria quádrupla. 8 faces triangulares e 12 faces quadradas, 36 arestas e 18 vértices.

36-Girobicúpula triangular alongada

Girobicúpula triangular alongada como o nome sugere, pode ser construída alongando-se uma "girobicúpula triangular" ou cuboctaedro ao inserir um prisma hexagonal, que são cúpulas triangulares. Rotacionando uma das cúpulas em 60

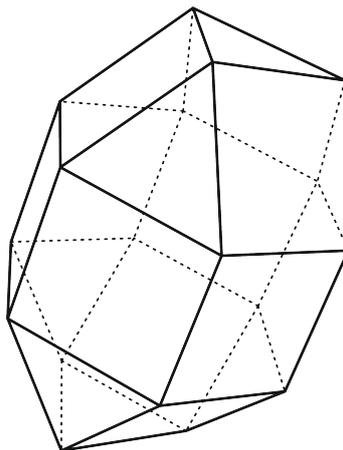


Figura 4.49: Ortobicúpula triangular alongada

graus antes do alongamento resulta em uma ortobicúpula triangular. Possui 8 faces triangulares, 12 faces quadradas, 36 arestas e 18 vértices.

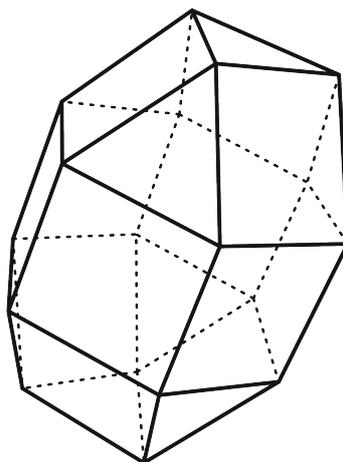


Figura 4.50: Girobicúpula triangular alongada

37-Girobicúpula quadrada alongada

A girobicúpula quadrada alongada ou pseudorombicuboctaedro não é considerado um sólido de Arquimedes, mesmo suas faces consistindo de polígonos regulares que se encontram no mesmo padrão dos outros vértices, pois diferentemente dos 13 sólidos de Arquimedes, ele não tem um conjunto de simetrias globais que levem cada vértice a qualquer outro vértice (embora Grünbaum tenha sugerido que ele deveria ser adicionado à lista tradicional de sólidos de Arquimedes como um 14^o exemplo). Este formato pode ter sido descoberto por Johannes Kepler em sua enumeração dos sólidos de Arquimedes, mas sua primeira aparição em desenho parece ter acontecido

no trabalho de Duncan Sommerville em 1905. Foi descoberto independentemente por Jeffrey Charles Percy Miller em 1930 (por erro enquanto tentava construir um modelo de rombicuboctaedro) e de novo por V.G. Ashkinuse em 1957. Temos que possui 8 faces triangulares, 18 faces quadradas, 48 arestas e 24 vértices.

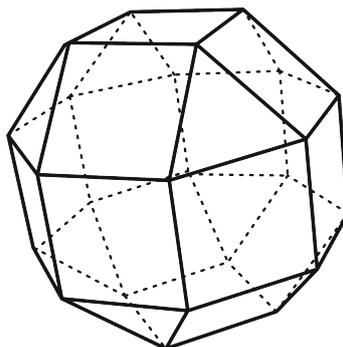


Figura 4.51: Girobicúpula quadrada alongada

38- Ortobicúpula pentagonal alongada

Ortobicúpula pentagonal alongada como o nome sugere, pode ser construída alongando-se uma ortobicúpula pentagonal ao inserir-se um prisma decagonal entre suas metades congruentes. Rotacionando uma das cúpulas em 36 graus antes da inserção do prisma resulta em uma girobicúpula pentagonal alongada. Possui 10 faces triangulares, 20 faces quadradas e 2 pentágonos, 60 arestas e 30 vértices.

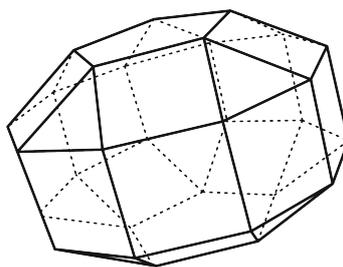


Figura 4.52: Ortobicúpula pentagonal alongada

39- Girobicúpula pentagonal alongada

A girobicúpula pentagonal alongada como o nome sugere, pode ser construída alongando-se uma "girobicúpula pentagonal" inserindo-se um prisma hexagonal entre suas metades. Rotacionando uma das cúpulas pentagonais em 36 graus antes de inserir o prisma resulta em uma ortobicúpula pentagonal alongada. Possui 10 faces

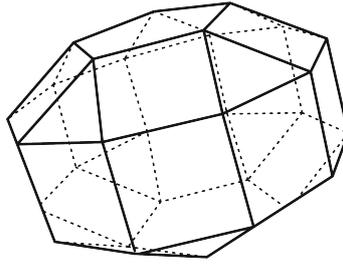


Figura 4.53: Girobicúpula pentagonal alongada

triangulares, 20 quadrados e 2 pentágonos, 60 arestas e 30 vértices.

40- Ortocúpula-rotonde pentagonal alongada

Ortocúpula-rotonde pentagonal alongada como o nome sugere, pode ser construída alongando-se uma ortocúpula-rotonde pentagonal ao inserir-se um prisma decagonal entre suas metades. Rotacionando-se uma das metades em 36 graus em relação a outra antes da junção do prisma resulta em uma girocúpula-rotonde pentagonal alongada. Tendo 15 faces triangulares, 15 quadrados, 7 pentágonos, 70 arestas e 35 vértices.

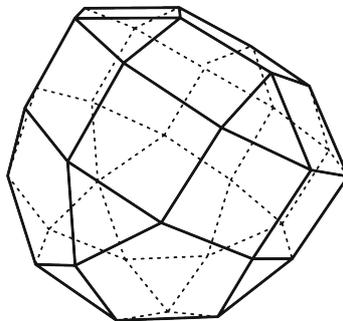


Figura 4.54: Ortocúpula-rotonde pentagonal alongada

41- Girocúpula-rotonde pentagonal alongada

A girocúpula-rotonde pentagonal alongada pode ser construída alongando-se uma girocúpula-rotonde pentagonal ao inserir-se um prisma decagonal entre suas metades. Rotacionando-se uma das metades em 36 graus em relação a outra antes da junção do prisma resulta em uma ortocúpula-rotonde pentagonal alongada. Tendo 15 faces triangulares, 15 quadrados, 7 pentágonos, 70 arestas e 35 vértices.

42- Ortobirotonde pentagonal alongada

Ortobirotonde pentagonal alongada é um dos sólidos de Johnson (J42). Como o

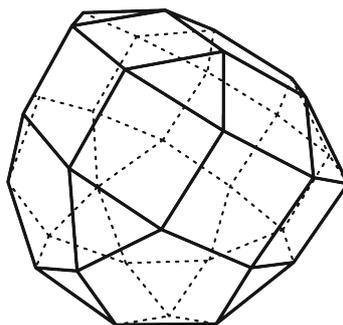


Figura 4.55: Girocúpula-rotonde pentagonal alongada

nome sugere, pode ser construída alongando-se uma ortobirotonde pentagonal (J34) ao inserir-se um prisma decagonal entre suas metades. Rotacionando-se uma das metades em 36 graus em relação a outra antes da junção do prisma resulta em uma ortobirotonde pentagonal alongada (J43). Contendo 20 faces triangulares, 10 quadrados, 12 pentágonos, 80 aresta e 40 vértices.

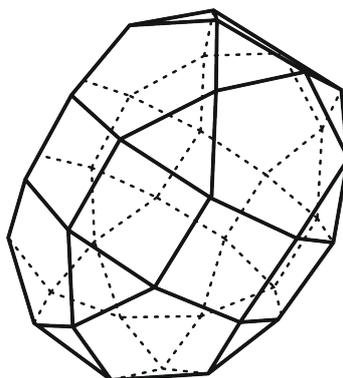


Figura 4.56: Ortobirotonde pentagonal alongada

43- Girobirotonde pentagonal alongada

Girobirotonde pentagonal alongada como o nome sugere, pode ser construída alongando-se uma girobirotunda pentagonal ou icosidodecaedro ao inserir-se um prisma decagonal entre suas metades. Rotacionando-se uma das metades em 36 graus em relação a outra antes da junção do prisma resulta em uma ortobirotonde pentagonal alongada. Tendo 20 faces triangulares, 10 quadrados, 12 pentágonos, 80 arestas e 40 vértices.

44- Bicúpula triangular giralongada

A bicúpula triangular giralongada como o nome sugere, pode ser construída

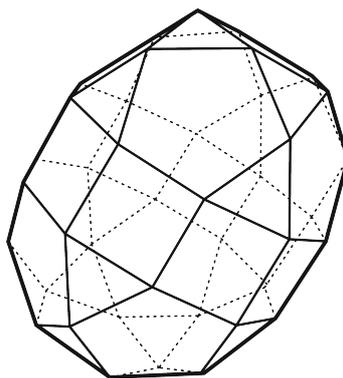


Figura 4.57: Girobirotone pentagonal alongada

giralongando-se uma cúpula triangular ao inserir-se um antiprisma hexagonal entre suas metades. A bicúpula triangular giralongada é um dos cinco sólidos de Johnson que são quirais, significando que ela tem uma forma destra e uma forma canhota. Apesar disso, suas duas formas não são consideradas sólidos de Johnson diferentes. Contendo 20 faces triangulares, 6 quadrados, 42 arestas e 18 vértices.

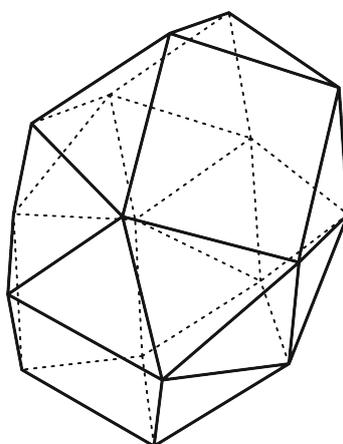


Figura 4.58: Bicúpula triangular giralongada

45- **Bicúpula quadrada giralongada**

A bicúpula quadrada giralongada como o nome sugere, pode ser construída giralongando-se uma bicúpula quadrada ao inserir-se um antiprisma octagonal entre suas metades. A bicúpula quadrada giralongada é um dos cinco sólidos de Johnson que são quirais, significando que ela tem uma versão destra e uma canhota. Apesar disso, as duas versões não são consideradas como dois sólidos de Johnson distintos. Tendo 24 faces triangulares, 10 quadrados, 56 arestas e 24 vértices.

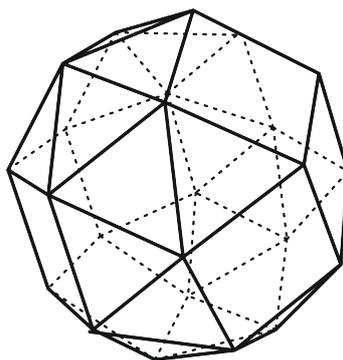


Figura 4.59: Bicúpula quadrada giralongada

46- Bicúpula pentagonal giralongada

A bicúpula pentagonal giralongada como o nome sugere, pode ser construída giralongando-se uma bicúpula pentagonal ao inserir-se um antiprisma decagonal entre suas metades. A bicúpula pentagonal giralongada é um dos cinco sólidos de Johnson que são quirais, significando que ela tem uma versão destra e uma canhota. Apesar disso, as duas versões não são consideradas como dois sólidos de Johnson distintos. Tendo como faces 30 triângulos, 10 quadrados, 2 pentágonos, 70 arestas e 30 vértices.

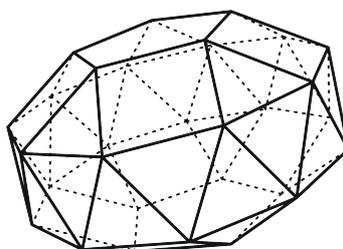


Figura 4.60: Bicúpula pentagonal giralongada

47- Cúpula-rotonde pentagonal giralongada

A cúpula-rotonde pentagonal giralongada como o nome sugere, pode ser construída giralongando-se uma cúpula-rotonde pentagonal ao inserir-se um antiprisma decagonal entre suas metades. A cúpula-rotonde pentagonal giralongada é um dos cinco sólidos de Johnson que são quirais, significando que ela tem uma versão destra e uma canhota. Apesar disso, as duas versões não são consideradas como dois sólidos de Johnson distintos. Cujas faces possui 35 triângulos, 5 quadrados, 7 pentágonos, 80 arestas e 35 vértices.

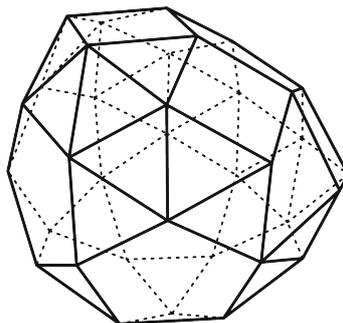


Figura 4.61: Cúpula-rotonde pentagonal giralongada

48- Birotonde pentagonal giralongada

A cúpula-rotonde pentagonal giralongada como o nome sugere, pode ser construída giralongando-se uma cúpula-rotonde pentagonal ao inserir-se um antiprisma decagonal entre suas metades. A cúpula-rotonde pentagonal giralongada é um dos cinco sólidos de Johnson que são quirais, significando que ela tem uma versão destra e uma canhota. Apesar disso, as duas versões não são consideradas como dois sólidos de Johnson distintos. Cujas faces são 20 triângulos, 12 pentágonos, 90 arestas e 40 vértices.

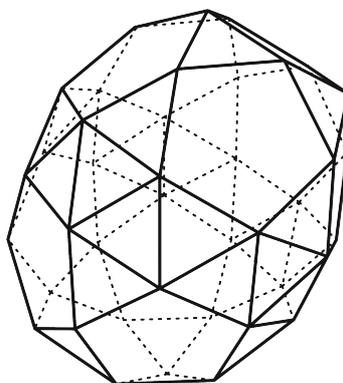


Figura 4.62: Birotonde pentagonal giralongada

49- Prisma triangular aumentado

O prisma triangular aumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma triangular ao juntar-se uma pirâmide quadrada a uma de suas faces. O sólido resultante tem uma semelhança superficial a um girobiprisma triangular, que diferente do prisma triangular aumentado, é construído juntando-se um outro prisma triangular e não uma pirâmide quadrada. Contendo 6 triângulos, 2 quadrados, 13

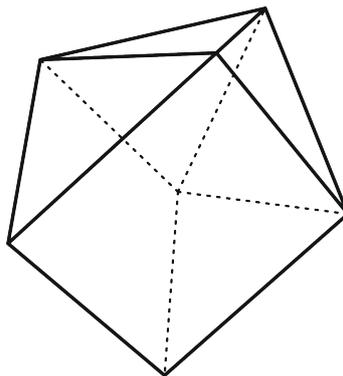


Figura 4.63: Prisma triangular aumentado

arestas e 7 vértices.

50- Prisma triangular biaumentado

O prisma triangular biaumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma triangular ao juntar-se duas pirâmides quadradas a duas de suas faces. Tendo 10 faces triangulares, 1 quadrado, 17 arestas e 8 vértices.

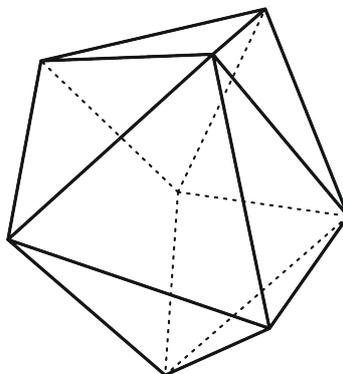


Figura 4.64: Prisma triangular biaumentado

51- Prisma triangular triaumentado

O prisma triangular triaumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma triangular ao juntar-se três pirâmides quadradas a três de suas faces. Tendo como faces 6 triângulos, 2 quadrados, 13 arestas e 7 vértices.

52- Prisma pentagonal aumentado

O prisma pentagonal aumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma pentagonal ao juntar-se uma pirâmide quadrada a uma de suas faces. Tendo 4 faces triangulares, 4 quadrados, 2 pentágonos, 19 arestas e 11 vértices.

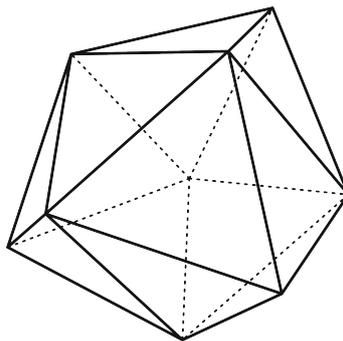


Figura 4.65: Prisma triangular triaumentado

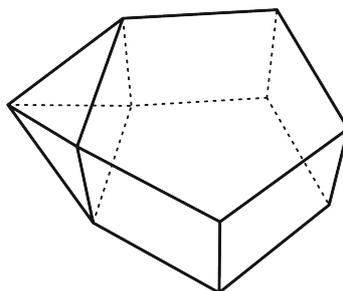


Figura 4.66: Prisma pentagonal aumentado

53- Prisma pentagonal biaumentado

O prisma pentagonal biaumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma pentagonal ao juntar-se duas pirâmides quadradas as duas de suas faces não adjacentes (O sólido obtido ao juntar-se duas pirâmides quadradas a faces adjacentes do prisma pentagonal não é convexo, portanto, não é um sólido de Johnson). Contendo 8 faces triangulares, 3 quadrados e 2 pentágonos, 23 arestas e 12 vértices.

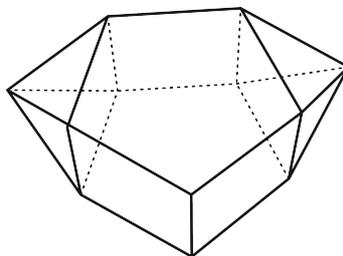


Figura 4.67: Prisma pentagonal biaumentado

54- Prisma hexagonal aumentado

O prisma hexagonal aumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma hexagonal ao juntar-se uma pirâmide quadrada a uma de suas faces.

Tendo 4 faces triangulares, 5 quadrados, 2 hexágonos, 22 arestas e 13 vértices.

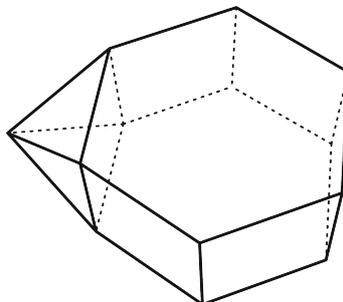


Figura 4.68: Prisma hexagonal aumentado

55- Prisma hexagonal parabiaumentado

Prisma hexagonal parabiaumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma hexagonal ao juntar-se duas pirâmides quadradas as duas de suas faces, não adjacentes e opostas entre si. Cujas faces são formadas por 8 triângulos, 4 quadrados, 2 hexágonos, 26 arestas e 14 vértices.

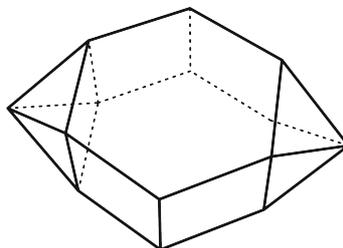


Figura 4.69: Prisma hexagonal parabiaumentado

56- Prisma hexagonal metabiaumentado

O prisma hexagonal metabiaumentado como o nome sugere, pode ser construído aumentando-se um prisma hexagonal ao juntar-se uma pirâmide quadrada as duas de suas faces não adjacentes. Tendo como faces 8 triângulos, 4 quadrados, 2 hexágonos, 26 arestas e 14 vértices.

57- Prisma hexagonal triaumentado

Prisma hexagonal triaumentado como o nome sugere, pode ser construído por um aumento triplo de um prisma hexagonal juntando-se pirâmides quadradas a três de suas faces não adjacentes. Tendo como faces 12 triângulos, 3 quadrados, 2 hexágonos, 30 arestas e 15 vértices.

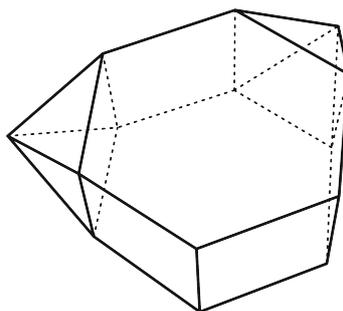


Figura 4.70: Prisma hexagonal metabiaumentado

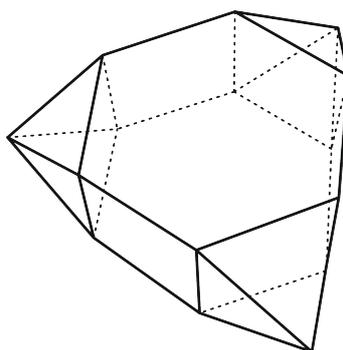


Figura 4.71: Prisma hexagonal triaumentado

58- Dodecaedro aumentado

O dodecaedro aumentado consiste de um dodecaedro com uma pirâmide pentagonal acoplada a uma de suas faces. Tendo como faces 5 triângulos e 11 pentágonos, 35 arestas e 21 vértices.

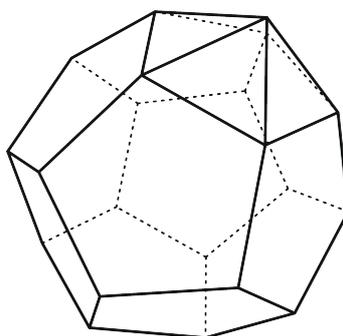


Figura 4.72: Dodecaedro aumentado

59- Dodecaedro parabiaumentado

O dodecaedro parabiaumentado pode ser visto como um dodecaedro com duas pirâmides pentagonais acopladas a duas de suas faces opostas. Tendo como faces 10

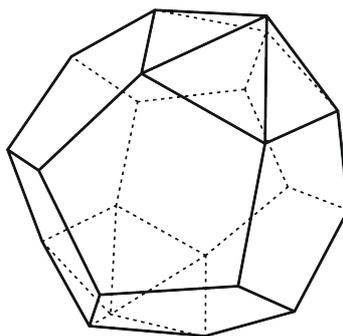


Figura 4.73: Dodecaedro parabiaumentado

triângulos e 10 pentágonos, 40 arestas e 22 vértices.

60- Dodecaedro metabiaumentado

O dodecaedro metabiaumentado pode ser visto como um dodecaedro com duas pirâmides pentagonais acopladas a duas faces que são separadas por uma outra face (são opostas, mas também não são adjacentes). Tendo como faces 10 triângulos e 10 pentágonos, 40 arestas e 22 vértices.

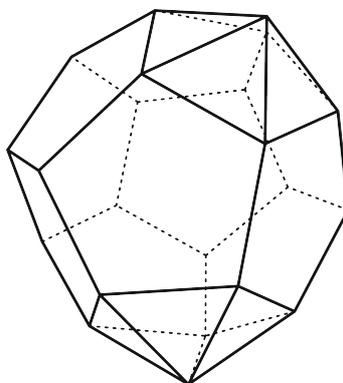


Figura 4.74: Dodecaedro metabiaumentado

61- Dodecaedro triaumentado

O dodecaedro triaumentado pode ser visto como um dodecaedro com três pirâmides pentagonais acopladas a três faces não-adjacentes. Tendo como faces 15 triângulos e 9 pentágonos, 45 arestas e 23 vértices.

62- Icosaedro metabidiminuído

O icosaedro metabidiminuído é um dos sólidos de Johnson, o nome se refere a uma maneira de construí-lo, ao remover duas pirâmides pentagonais de um icosaedro regular, repondo dois conjuntos de cinco faces triangulares do icosaedro com duas

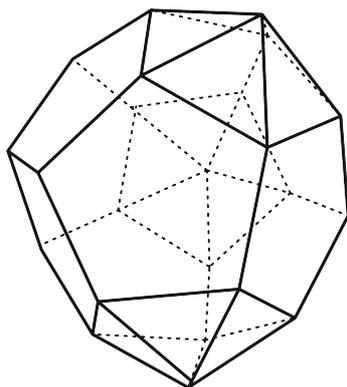


Figura 4.75: Dodecaedro triaumentado

faces pentagonais adjacentes. Tendo como faces 10 triângulos e 2 pentágonos, 20 arestas e 10 vértices.

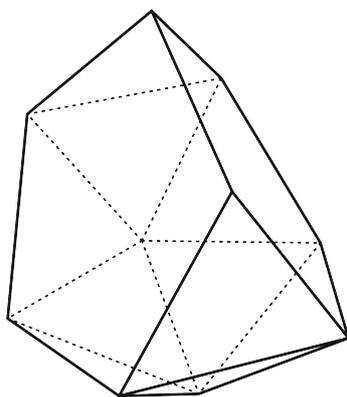


Figura 4.76: Icosaedro metabidiminuído

63- Icosaedro tridiminuído

O icosaedro tridiminuído é um dos sólidos de Johnson cujo nome refere-se a uma maneira de construí-lo, removendo-se três pirâmides pentagonais de um icosaedro regular, o qual repõe três conjuntos de cinco faces triangulares do icosaedro com três faces pentagonais mutuamente adjacentes. Tendo como faces 5 triângulos e 3 pentágonos, 15 arestas e 9 vértices.

64- Icosaedro tridiminuído aumentado

O icosaedro tridiminuído aumentado é um dos sólidos de Johnson elementares, o qual não surge de manipulações "corta e cola" dos sólidos platônicos e arquimedianos. Entretanto, tem uma forte relação com o icosidodecaedro, um sólido arquimediano. O icosaedro tridiminuído aumentado é o único sólido de Johnson com faces de 3, 4,

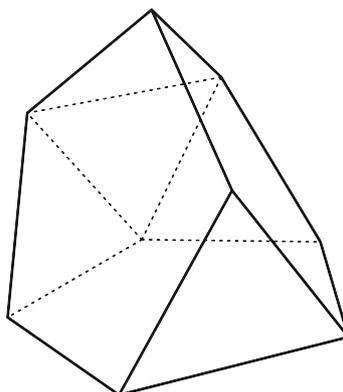


Figura 4.77: Icosaedro tridiminuído

5 e 6 lados. Tendo como faces 7 triângulos e 3 pentágonos, 18 arestas e 10 vértices.

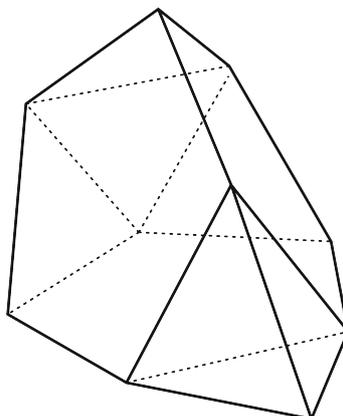


Figura 4.78: Icosaedro tridiminuído aumentado

65- Tetraedro truncado aumentado

O tetraedro truncado aumentado pode ser criado acoplando-se uma cúpula triangular a uma face hexagonal de um tetraedro truncado. Tendo como faces 8 triângulos, 3 quadrados e 3 hexágonos, 27 arestas e 15 vértices.

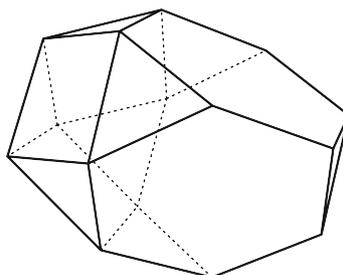


Figura 4.79: Tetraedro truncado aumentado

66- Cubo truncado aumentado

O cubo truncado aumentado como o nome sugere, pode ser criada acoplando-se uma cúpula quadrada em uma face octogonal de um cubo truncado. Tendo como faces 12 triângulos, 5 quadrados e 5 octógonos, 48 arestas, 28 vértices.

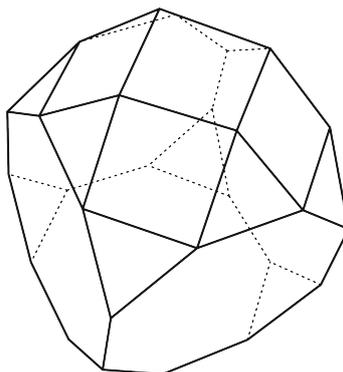


Figura 4.80: Cubo truncado aumentado

67- Cubo truncado biaumentado

O cubo truncado biaumentado como o nome sugere, é construída acoplando-se duas cúpulas quadradas em duas faces octogonais opostas de um cubo truncado. Tendo como faces 16 triângulos, 10 quadrados e 4 octógonos, 60 arestas e 32 vértices.

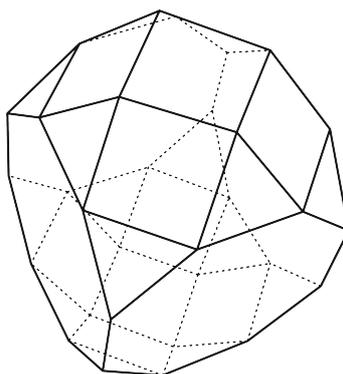


Figura 4.81: Cubo truncado biaumentado

68- Dodecaedro truncado aumentado

O dodecaedro truncado aumentado como o nome sugere é criado ao se acoplar uma cúpula pentagonal em uma face decagonal de um dodecaedro truncado. Tendo como faces 25 triângulos, 5 quadrados, 1 pentágono e 11 decágonos, 105 arestas e 65 vértices.

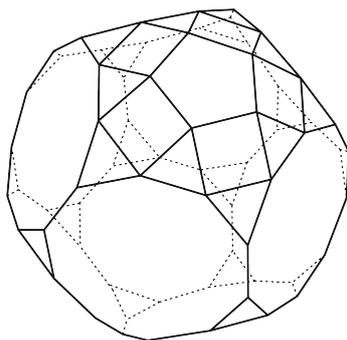


Figura 4.82: Dodecaedro truncado aumentado

69- Dodecaedro truncado parabiaumentado

O dodecaedro truncado parabiaumentado como o nome sugere, é criado acoplando-se duas cúpulas pentagonais em duas faces decagonais de um dodecaedro truncado. Tendo como faces 30 triângulos, 10 quadrados, 2 pentágonos e 10 decágonos, 120 arestas e 70 vértices.

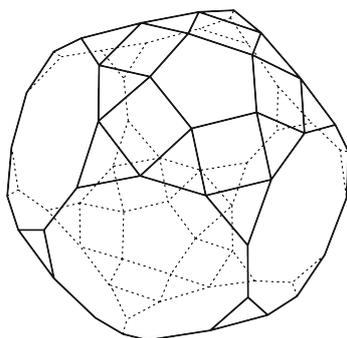


Figura 4.83: Dodecaedro truncado parabiaumentado

70- Dodecaedro truncado metabiaumentado

O dodecaedro truncado metabiaumentado como o nome sugere, é criado ao acoplar-se duas cúpulas pentagonais a duas faces decagonais não-adjacentes e não opostas de um dodecaedro truncado. Tendo como faces 30 triângulos, 10 quadrados, 2 pentágonos e 10 decágonos, 120 arestas e 70 vértices.

71- Dodecaedro truncado triaumentado

O dodecaedro truncado triaumentado como o nome sugere, é criado ao acoplar-se três cúpulas pentagonais em três faces decagonais não adjacentes de um dodecaedro truncado. De todos os 92 sólidos de Johnson, tem o maior volume em proporção ao cubo de tamanho de lado. Contendo faces com 35 triângulos, 15 quadrados, 3

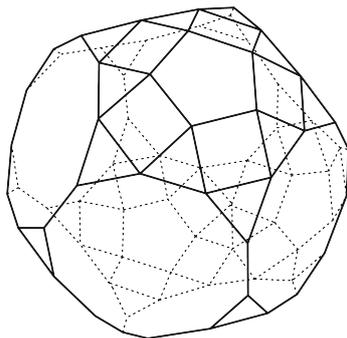


Figura 4.84: Dodecaedro truncado metabiaumentado

pentágonos e 9 decágonos, 135 arestas e 75 vértices.

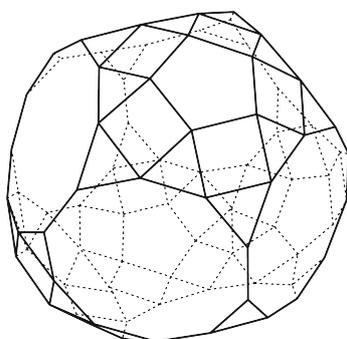


Figura 4.85: Dodecaedro truncado triaumentado

72- Girorrombicosidodecaedro

O girorrombicosidodecaedro é um dos sólidos de Johnson, no qual possui 20 faces triangulares, 30 quadrados, e 12 pentágonos, 120 arestas e 60 vértices.

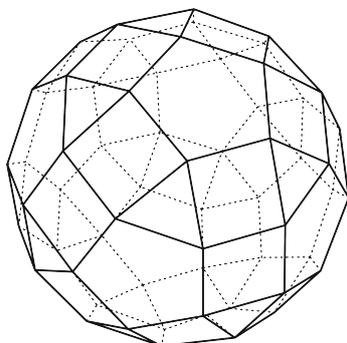


Figura 4.86: Girorrombicosidodecaedro

73- Parabigirorrombicosidodecaedro

O parabigirorrombicosidodecaedro pode ser construído como um rombicosidode-

caedro com duas cúpulas pentagonais rotacionadas 36 graus. Cujas faces possui 20 triângulos, 30 quadrados, 12 pentágonos, 120 arestas e 60 vértices.

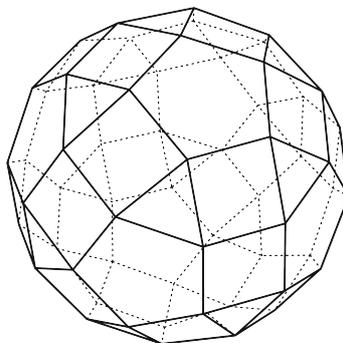


Figura 4.87: Parabigirrombicosidodecaedro

74- Metabigirrombicosidodecaedro

Metabigirrombicosidodecaedro pode ser construído como um rombicosidodecaedro com duas cúpulas pentagonais não opostas rotacionadas 36 graus. Tendo 20 faces triangulares, 30 quadrados e 12 pentágonos, 120 arestas e 60 vértices.

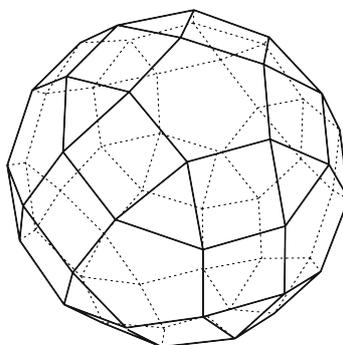


Figura 4.88: Metabigirrombicosidodecaedro

75- Trigirrombicosidodecaedro

O trigirrombicosidodecaedro pode ser construído como um rombicosidodecaedro com três cúpulas pentagonais rotacionadas 36 graus. Falta exemplo de cúpula e pentagonais Tendo 20 faces triangulares, 30 quadrados e 12 pentágonos, 120 arestas e 60 vértices.

76- Rombicosidodecaedro diminuído

O rombicosidodecaedro diminuído pode ser construído como um rombicosidodecaedro com uma cúpula pentagonal removida. Contendo 15 faces triangulares, 25

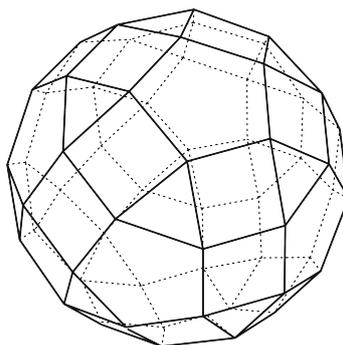


Figura 4.89: Trigirorrombicosidodecaedro

quadrados, 11 pentágonos, 1 decágono, 105 arestas e 55 vértices.

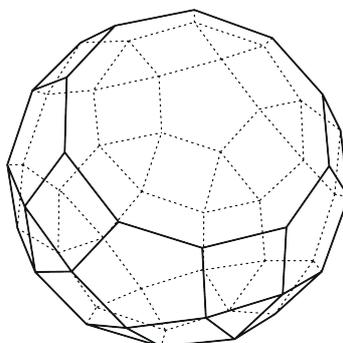


Figura 4.90: Rombicosidodecaedro diminuído

77- Rombicosidodecaedro paragirodiminuído

Rombicosidodecaedro paragirodiminuído pode ser construído como um rombicosidodecaedro com uma cúpula pentagonal removida e a outra oposta rotacionada 36 graus. No qual há 15 faces triangulares, 25 quadrados, 11 pentágonos, 1 decágono, 105 arestas e 55 vértices.

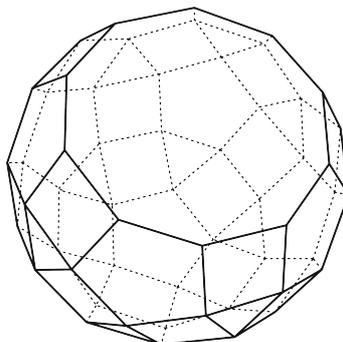


Figura 4.91: Rombicosidodecaedro paragirodiminuído

78- Rombicosidodecaedro metagirodiminuído

O rombosidodecaedro metagirodiminuído pode ser construído como um rombosidodecaedro com uma cúpula pentagonal rotacionada 36 graus e uma outra cúpula pentagonal não oposta removida. Cujas faces possui 15 triângulos, 25 quadrados, 11 pentágonos, 1 decágono, 105 arestas e 55 vértices.

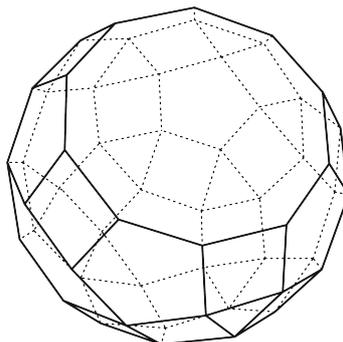


Figura 4.92: Rombicosidodecaedro metagirodiminuído

79- Rombicosidodecaedro bigirodiminuído

O rombosidodecaedro bigirodiminuído pode ser construído como um rombosidodecaedro com duas cúpulas pentagonais rotacionadas em 36 graus e uma terceira cúpula pentagonal removida. Nenhuma cúpula envolvida pode ser adjacente às outras. Contendo 105 arestas, 55 vértices e as faces possui 15 triângulos, 25 quadrados, 11 pentágonos e 1 decágono.

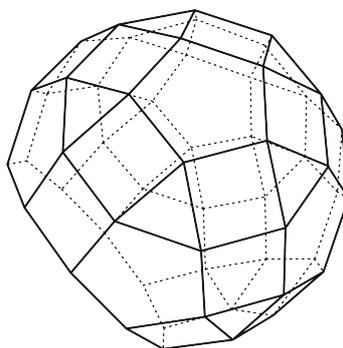


Figura 4.93: Rombicosidodecaedro bigirodiminuído

80- Rombicosidodecaedro paravidiminuído

Rombicosidodecaedro paravidiminuído é um sólido de Johnson é um dos 92 poliedros estritamente convexos que têm faces regulares, mas não são uniformes (isto é,

eles não são sólidos platônicos, sólidos de Arquimedes, prismas ou antiprismas). Eles foram nomeados por Norman Johnson, que primeiro listou esses poliedros em 1966. Pode ser construído como um rombicosidodecaedro com duas cúpulas pentagonais opostas removidas. Contendo 10 faces triangulares, 20 quadrados, 10 pentágonos, 2 decágono, 90 arestas e 50 vértices.

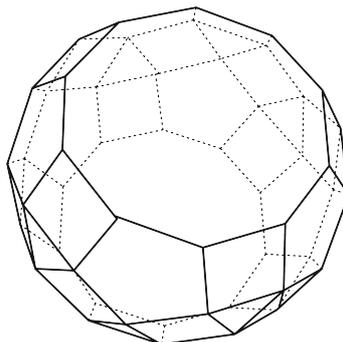


Figura 4.94: Rombicosidodecaedro parabidiminuído

81- Rombicosidodecaedro metabidiminuído

O sólido geométrico rombicosidodecaedro metabidiminuído pode ser construído como um rombicosidodecaedro com duas cúpulas pentagonais removidas. Tendo 50 vértices, 90 arestas, 10 faces triangulares, 20 quadrados, 10 pentágonos e 2 decágonos.

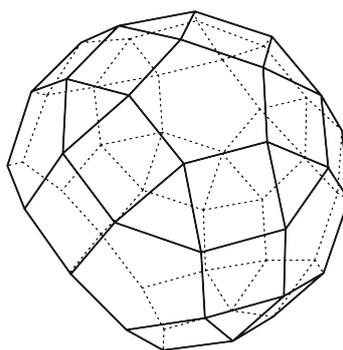


Figura 4.95: Rombicosidodecaedro metabidiminuído

82- Rombicosidodecaedro girobidiminuído

O sólido de Johnson rombicosidodecaedro girobidiminuído pode ser construído removendo-se duas cúpulas pentagonais e rotacionando uma terceira cúpula pentagonal em 36 graus. Tendo 10 faces triangulares, 20 quadrados, 10 pentágonos, 2

decágonos, 90 arestas e 50 vértices.

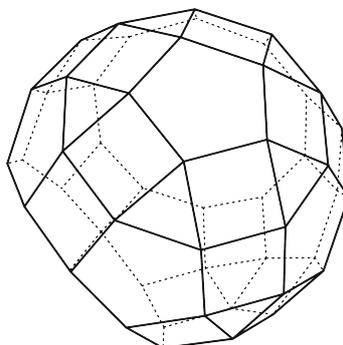


Figura 4.96: Rombicosidodecaedro girobidiminuído

83- Rombicosidodecaedro tridiminuído

O sólido rombicosidodecaedro tridiminuído pode ser construído como um rombicosidodecaedro com três cúpulas pentagonais removidas. No qual possui 5 faces triangulares, 15 quadrados e 9 pentágonos, 3 decágonos, 75 arestas e 45 vértices

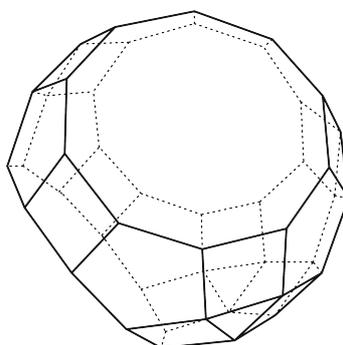


Figura 4.97: Rombicosidodecaedro tridiminuído

84- Disfenoide achatado

Em geometria, o disfenoide achatado, dodecaedro siamês ou dodecadeltaedro é um dos sólidos de Johnson (J84). Esta forma foi chamada de dodecaedro siamês em uma publicação de Hans Freudenthal e B. L. van der Waerden em 1947, que primeiro descreveu o conjunto dos oito deltaedros convexos. O nome dodecadeltaedro foi dado a essa forma por Bernal (1964), referindo-se ao fato de que é um deltaedro de 12 lados. Bernal estava interessado nas formas dos buracos deixados em arranjos irregulares fechados de esferas, então ele usou uma definição restritiva de deltaedros, na qual um deltaedro é um poliedro convexo com faces triangulares que pode ser

formado pelos centros de uma coleção de esferas congruentes, cujas tangentes representam arestas do poliedro, tal que não existe espaço para empacotar outra esfera dentro da gaiola criada nesse sistema de esferas. Bernal escreve que o disfenoide achatado é "uma coordenação muito comum para o cálcio na cristalografia". O nome disfenoide achatado vem da classificação dos sólidos de Johnson. Tendo como faces 12 triângulos, 18 arestas e 8 vértices.

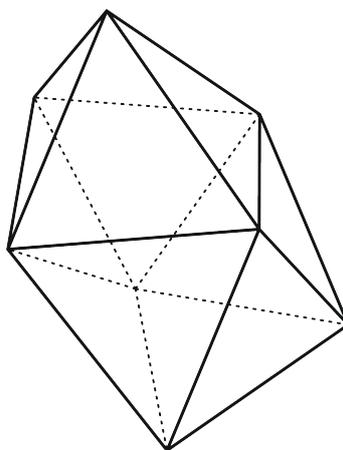


Figura 4.98: Disfenoide achatado

85- Antiprisma quadrado achatado

Um dos sólidos de Johnson antiprisma quadrado achatado no qual não surgem de manipulações de "corte e cola" dos sólidos platônicos ou arquimedianos embora seja um parente do icosaedro que tem quatro simetrias em vez de três. Também pode ser construído como uma giroanticúpula quadrada, conectando duas anticúpulas com orientações rotacionadas. Tendo 24 faces triangulares, 2 quadrados, 40 arestas e 16 vértices.

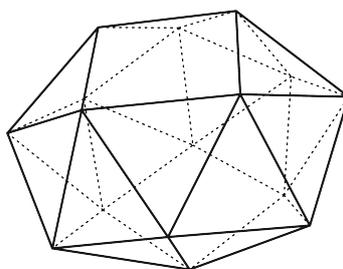


Figura 4.99: Antiprisma quadrado achatado

86- Esfenocorona

A esfenocorona é um dos sólidos de Johnson elementares que não surgem de manipulações de "corte e cola" dos sólidos platônicos ou arquimedianos. No qual possui 12 faces triangulares, 2 quadrados, 22 arestas e 10 vértices.

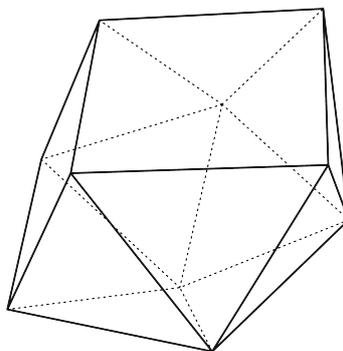


Figura 4.100: Esfenocorona

87- Esfenocorona aumentada

Esfenocorona aumentada é obtida ao adicionar uma pirâmide quadrada a uma das faces quadradas da esfenocorona. É o único sólido de Johnson surgido de manipulações de "corte e cola" onde os componentes não são todos prismas, antiprismas ou seções de sólidos platônicos ou arquimedianos. Contendo 16 faces triangulares e uma quadrada, 26 arestas e 11 vértices.

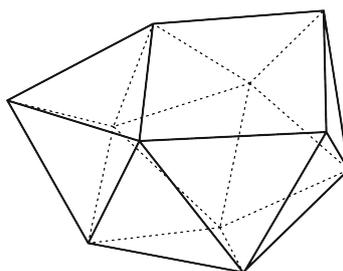


Figura 4.101: Esfenocorona aumentada

88- Esfenomegacorona

Em geometria, a esfenomegacorona é um dos sólidos de Johnson elementares que não surgem de manipulações de "corte e cola" dos sólidos platônicos ou arquimedianos. No qual possui 16 faces triangulares, 2 quadrados, 28 arestas e 12 vértices.

89- Hebesfenomegacorona

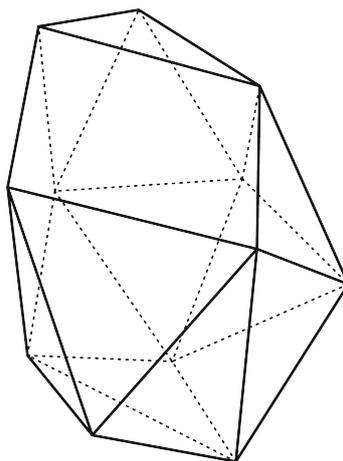


Figura 4.102: Esfenomegacorona

A hebesfenomegacorona é um dos sólidos elementares de Johnson, que não surge a partir de manipulações do tipo "cortar e colar" a partir dos sólidos de Platão e Arquimedes. Hebesfenomegacorona Contendo 21 faces, 18 triângulos e 3 quadrados, 33 arestas e 14 vértices, esse sólido de Johnson é um dos 92 poliedros estritamente convexos que têm faces regulares, mas não são uniformes (isto é, não são prismas ou antiprismas, ou sólidos platônicos, ou de Arquimedes). Eles foram nomeados por Norman Johnson, que foi o primeiro a listar esses poliedros em 1966.

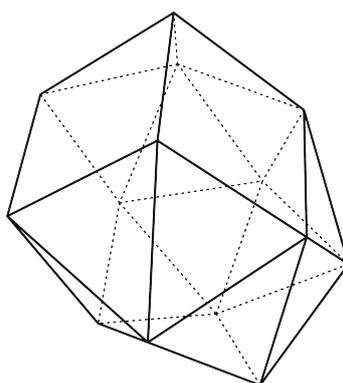


Figura 4.103: Hebesfenomegacorona

90- **Disfenocingulum**

Em geometria, o disphenocingulum é um dos sólidos de Johnson elementares que não surgem de manipulações de "corte e cola" dos sólidos platônicos ou arquimedianos. Cujas faces possui 20 triângulos, 4 quadrados, 38 arestas e 16 vértices.

91- **Birrotunda bilunar**

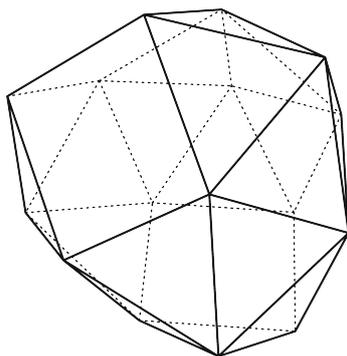


Figura 4.104: Disfenocingulum

Birrotunda bilunar é um dos sólidos de Johnson elementares que não surgem de manipulações de "corte e cola" dos sólidos platônicos ou arquimedianos. Entretanto, tem uma relação muito forte com o icosidodecaedro, um sólido de Arquimedes. Cujas faces possui 8 triângulos, 2 quadrados e 4 pentágonos, 26 arestas e 14 vértices.

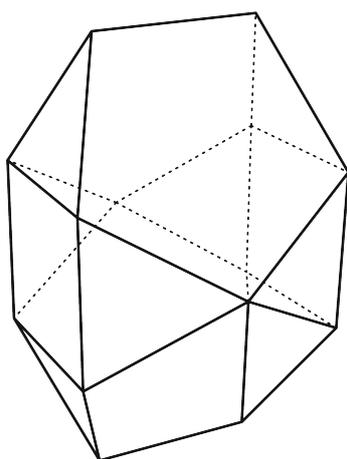


Figura 4.105: Birrotunda bilunar

92- Hebesfenorrotunda triangular

Em geometria, a hebesfenorrotunda triangular é um dos sólidos elementares de Johnson, que não surge a partir de manipulações do tipo "corte e cola" dos sólidos platônicos e arquimedianos. No entanto, ele tem uma forte relação com o icosidodecaedro, um sólido de Arquimedes. O mais evidente é o conjunto de três pentágonos e quatro triângulos em um lado do sólido. Se essas faces estão alinhadas com um padrão de faces congruente do icosidodecaedro, então a face hexagonal irá situar-se no plano a meio caminho entre duas faces triangulares opostas do icosidodecaedro. A hebesfenorrotunda triangular é o único sólido de Johnson com faces de 3, 4, 5 e 6

lados. Sendo um total de 13 triângulos, 3 quadrados, 3 pentágonos e 1 hexágono, 36 arestas e 18 vértices

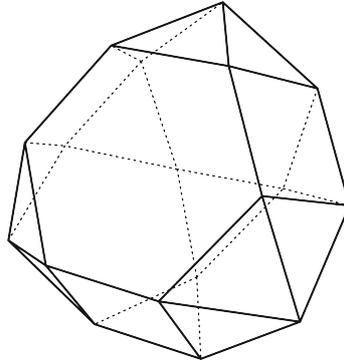


Figura 4.106: Hebesfenorrotunda triangular

Referências Bibliográficas

- [1] ALEXANDROV, Aleksandr Danilovich. "**Convex Polyhedra**", A edição russa foi publicada pela Gosudarstv. Izdat. Tekhn.-Teor. Aceso. Moscou-Leningrado, 1950
- [2] BIANCHINI, Edwaldo **Matemática**. 6 Ed. São Paulo: Moderna,(2006).
- [3] BICUDO,Irineu. tradução e introdução "**Os elementos/Euclides**"; São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [4] BORTOLOSSI, Humberto José. **OS SÓLIDOS PLATÔNICOS**. Rio de Janeiro/RJ: Universidade Federal Fluminense.
- [5] COURANT, Richard e Robbins, Herbert. **O que é matemática?**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- [6] CROMWELL, Peter. **Polyhedra**. Cambridge University, UK, 1997.
- [7] DANTE, Luiz Roberto, **Matemática:Contexto e Aplicações**. 3a ed. 4 vols. São Paulo: Ática. 2008.
- [8] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado **A matemática no ensino médio .v.2**. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- [9] FILHO, Zoroaldo, Azambuja. **Demonstração do Teorema de Euler para poliedros**.N°3(1983) Revista Professor de matemática.
- [10] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol 10. São Paulo: Ed. Atual, (2004)

- [11] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. **Matemática do ensino médio: ciência e aplicações**, v. 2. Atual, São Paulo, SP, 2010.
- [12] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras Histórias**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [13] Machado, Antônio dos Santos. "**Matemática temas e metas**", Vol. IV. Ed. atual, São Paulo 1988.
- [14] MIALICH, Flávia Renata. "**Poliedros e Teorema de Euler**", Dissertação de mestrado apresentado à Universidade Estadual Paulista, 2013.
- [15] Robert L. Benedetto, "**Polyhedra: Plato, Archimedes, Euler**". Palestra realizada em 15 de julho de 2014
- [16] SILVA, Ataiz Souza Silva, "**O teorema de euler e algumas aplicações**", TCC apresentado a Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015