UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRAN DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDUARDO ALVES MACENA

UM EXEMPLO DE APLICAÇÕES DE POLINÔMIOS EM SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS

Dourados - MS
2022

UM EXEMPLO DE APLICAÇÕES DE POLINÔMIOS EM SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS

Eduardo Alves Macena

Esta exemplar corresponde a dissertação de mestrado redigida por Eduardo Alves Macedo sob a orientação da Prof^a Dra. Irene Magalhães Craveiro e Coorientação do Prof. Dr. Enoque Reis, como para obtenção do título de mestre em Matemática.

Banca Examinadora

Prof^a Dra. Irene Magalhães Craveiro (Orientadora)
Prof. Dr. Enoque da Silva Reis (Coorientador)
Prof^a Dra. Ana Cláudia Mendonça
Prof^a Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico

Dourados, 25 de fevereiro de 2022

Profa Dra Irene Magalhães Craveiro

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

M141e Macena, Eduardo Alves
Um exemplo de aplicações de polinômios em sequências de números [recurso eletrônico] / Eduardo Alves Macena. -- 2022.
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Profª Dra. Irene Magalhães Craveiro.
Coorientador: Prof. Dr. Enoque da Silva Reis.
Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2022.
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:
https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

1. Polinômios. 2. Relações de Girard. 3. Números de Stirling.. I. Craveiro, Profª Dra. Irene Magalhães. II. Reis, Prof. Dr. Enoque Da Silva. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO(A), para a dissertação intitulada: **"UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE POLINÔMIOS EM SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS"**,de autoria de**Eduardo Alves Macena** apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

____
Profa. Dra. Irene Magalhães Craveiro (Orientadora-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

____
Prof. Dr. Enoque da Silva Reis
Coorientador (UNIR)

Ana Claudia M. M. Chagas
____
Profa. Dra. Ana Claudia Machado Mendonça
Membro Examinador (UFGD)

Elen Viviani Pereira Spreafico
____
Profa. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico
Membro Examinador (UFMS)

Dourados/MS, 25 de fevereirode 2022

Agradecimentos

Aos professores do PROFMAT pela ajuda e preparação; a banca, por ter aceito o convite e avaliado o trabalho; a CAPES, pelo suporte financeiro; e em especial a minha orientadora, Dra Irene Magalhães Craveiro e a minha grande amiga, Daniele Maiara Coradini de Oliveira, sem as quais este trabalho não existiria; por fim agradeço a Deus por colocar essas pessoas no meu caminho.

Resumo

No presente trabalho pesquisamos os números de Stirling e suas relações com polinômios e binômios. Estes surgem do estudo de uma família de polinômios e podem ser utilizados para interligar a álgebra e a combinatória. Os conceitos envolvidos nesse estudo terão diferentes graus de profundidade dependendo do interesse e objetivo dos professores que os utilizarem., podendo ser trabalhados desde o ensino médio, através de resolução de problemas em permutações circulares, até o ensino superior, através de demonstrações e problemas mais elaborados.

Palavras-chave: Polinômios, Relações de Girard, Números de Stirling.

Abstract

In the present work we research the Stirling Numbers and their relationships with polynomials and binomials. These numbers arise from the study of a family of polynomials and they can be used to link algebra and combinatorics. The concepts involved in this study will have different degrees of depth depending on the interest and objective of the teachers who use them. elaborate. they could be worked from high school, through problem solving in circular permutations, to higher education, through demonstrations and more elaborated counting and algebric problems.

Keywords: Polynomials, Girard Relations, Stirling Numbers.

Sumário

Introdução

O estudo de polinômios e equações polinomiais está longe de ser um tema recente. Em civilizações e épocas distintas a matemática se desenvolveu de maneiras diferentes. Podemos observar, por exemplo, a diferença da matemática grega e egípcia: enquanto os gregos se preocupavam com as demonstrações de seus teoremas e a beleza destes, os egípcios trabalhavam com uma matemática extremamente prática e voltada para os problemas reais de seu cotidiano, especialmente na Geometria.

No que tange o estudo de polinômios podemos citar, três grandes contribuições dentre as dezenas, ou mesmo centenas das que existiram. Começando com o Papiro de Rhind, escrito por Ahmes por vota de 1650 a.C.. Esse papiro ficou conhecido pelo nome do historiador escocês que o comprou no século XIX, Alexander Henry Rhind, e apresenta muito do que sabemos da matemática egípcia antiga, descrevendo diversos métodos como de multiplicação, divisão, problemas de área e até alguns tipos de frações. Todos eram apresentados em forma de problemas práticos seguidos de suas respectivas soluções.

Um dos muitos métodos apresentados no Papiro de Rhind é a regra da falsa posição que consiste em escolher um valor arbitrário para a incógnita de uma equação polinomial e se comparar o resultado utilizando esta com o resultado esperado. Então, utiliza-se um fator de correção para chegar cada vez mais próximo ao resultado desejado. Por causa desse tipo de problema, o Papiro de Rhind representa uma marca na história no estudo dos polinômios, já que foi um dos primeiros documentos em que temos registro do emprego de equações polinomiais.

Outra figura importante na história dos polinômios foi Simon Stevis (1548-1620). Nascido em Brugues e, entre outras profissões, professor e engenheiro, Simon teve grandes contribuições em estática e matemática, sendo que na última ele foi pioneiro em um estudo metódico e minuciosa dos números inteiros, dos números irracionais, do sistema de frações decimais e suas aplicações.

Todos esses estudos facilitaram o *cálculo algébrico*, isto é, "... reunião de processos empregados para efetuar as operações algébricas, ou seja, os processos usados para transformar uma expressão algébrica em outra equivalente ", [27]. Stevis também fez estudos sobre equações quadráticas e apresentou uma forma de encontrar raízes aproximadas para equações polinomiais de um grau genérico n.

Por fim, temos Nicolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia. Ele não teve acesso a uma educação formal devido as baixas condições financeiras, mas estudou como pode através de livros que conseguia encontrar e escrevendo com carvão nas paredes de casa, por não ter dinheiro para tintas, penas e papéis [27].

Tartaglia, sendo um grande autodidata, aprendeu a ler e escrever sozinho e publicou diversas trabalhos. Em especial, publicou um tratado sobre aritmética, no qual abordou operações numéricas e regras comerciais. Seu destaque em polinômios, no entanto, está na descoberta da solução geral para equações do tipo $x^3 + px^2 = q$.

Tendo em vista estas e outras contribuições ao longo da história, podemos observar avanços significativos no desenvolvimento da humanidade pautados na busca por conhecimentos relativos à álgebra e, mais especificamente, ao estudo de polinômios. De lá para cá, nota-se como estes estudos e descobertas podem auxiliar na reinterpretação da realidade, ou seja, modelos que envolvem funções polinomiais, tornando-se, então, parte dos conhecimentos essenciais para a matemática escolar de hoje.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto das aprendizagens essenciais a serem trabalhados ao longo das etapas da educação básica brasileira. Dentro da área de Matemática e suas Tecnologias para o ensino médio, entende-se que a abordagem no ensino deve contribuir para o desenvolvimento das capacidades de abstração, generalização e argumentação. Neste sentido, este documento destaca que "Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações.", [13, p. 527].

Nosso trabalho visa, mais ainda, uma relação entre diferentes conceitos, corroborando assim com a quarta competência da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio presente na BNCC, que é "Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas", [13, p. 538].

Muitos materiais didáticos matemáticos e questões de concursos ou vestibulares trabalham com equações, funções polinomiais e sequências numéricas ou de figuras que podem recair em sequências numéricas recorrentes. Portanto, a exploração desses conceitos tem ainda uma importância prática para os estudantes e deve ser explorada em sala pelos professores.

Tendo em vista os pontos citados acima, este trabalho tem por objetivo abordar o tema de polinômios e contribuir com um estudo sobre sequências, que, como veremos, podem ser aliadas na resolução de equações algébricas, em particular os números de Stirling do primeiro tipo que pode ser definido por meio de uma família de polinômios.

Para tanto, o texto foi estruturado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, fazemos um breve estudo sobre polinômios e equações polinomiais com uma visão em nível médio, trabalhando as operações matemáticas, o valor numérico de um polinômio e a resolução das equações polinomiais.

Em seguida, no Capítulo 2 é explicado o que são e como funcionam as relações de Girard, muito usadas na equação quadrática para encontrar as raízes da equação, que chamados de soma e produto. Além disso, é uma ferramenta útil. O foco principal desse capítulo é aplicar as relações de Girard para as classes de polinômios que geram os números de Stirling do primeiro tipo e obter identidades, cuja a natureza combinatórias delas permite obter novos resultados inerentes a essa sequencia. Para facilitar a compreensão, alguns exemplos são apresentados.

Já no Capítulo 3 fazemos um estudo sobre sequências de Stirling do primeiro tipo, contextualizando historicamente sua construção matemática e como estas se conectam com as relações de Girard apresentadas no capítulo anterior.

Por fim o Capítulo 4, baseado em [19], foi adicionado com o intuito de propor uma situação problema em sala de aula (pensando em uma turma do terceiro ano do ensino médio) onde os conhecimentos dos capítulos anteriores podem ser utilizados para desenvolvimento dos estudantes com base no desejado pela BNCC.

Capítulo 1

Uma releitura das operações de polinômios

Todo o primeiro capítulo, no qual faremos uma breve revisão sobre polinômios para sustentar teoricamente os capítulos seguintes, está embasado em [10]. Durante esse capítulo usaremos um corpo qualquer $\mathbb{K}$ como referência para definições e demonstrações. Como nosso objetivo é definir uma classe de polinômios cujos coeficientes são reais e as raízes são inteiras, na maior parte dos nossos exemplos abordaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entretanto no estudo de equações polinomiais de grau n, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, quando trabalhamos em $\mathbb{R}$ elas tem no máximo n raízes, já em $\mathbb{C}$, é conhecido da literatura, que teremos exatamente n raízes. Assim, ao trabalharmos no Capítulo 3 com polinômios, essa ideia de que teremos exatamente n raízes para um polinômio de grau n será importante, e por isso teremos exemplos e demonstrações envolvendo o conjunto dos Complexos também.

A seguir seguem algumas definições importantes:

Definição 1.0.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Chamaremos de um* **polinômio** *sobre $\mathbb{K}$ em uma indeterminada x a uma expressão $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \ldots$ onde $a_i \in \mathbb{K}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = 0$, $\forall j \geq n$.*

Definição 1.0.2. *Dois polinômios $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \ldots$ e $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k + \ldots$ sobre $\mathbb{R}$ são ditos* **iguais** *se e somente se $a_i = b_i$ em $\mathbb{K}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Deste modo, se o polinômio P escrito por um aluno no seu caderno é da forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e o polinômio Q escrito por uma aluna em seu fichário é da forma $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$, estes serão idênticos se, e apenas se, obedecerem à seguinte condição: $m = n$ e

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0; \\ a_1 &= b_1; \\ a_2 &= b_2; \\ &\vdots \\ a_n &= b_n. \end{aligned}$$

Note que, neste caso, as sequências definidas pelos coeficientes dos polinômios P e Q serão exatamente iguais.

Definição 1.0.3. *Quando $P(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^m + \ldots$ indicaremos $P(x) = 0$ e o chamaremos de* **polinômio identicamente nulo** *sobre $\mathbb{K}$. Desse modo, um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \ldots$ sobre $\mathbb{K}$ é identicamente nulo se, e somente se, $a_i = 0 \in \mathbb{K}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.0.4. *Se $a \in \mathbb{K}$ diremos que $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots = a$ se, e somente se, $a_0 = a$, e $a_i = 0$, $\forall i \geq 1$. O polinômio $P(x) = a$, $a \in \mathbb{K}$, é dito* **polinômio constante** *a.*

Após os fatos mencionados anteriormente, podemos verificar que polinômios são expressões algébricas formadas por números (coeficientes) e letras (parte literal). Ou seja, temos que

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \ldots$$

tem como coeficientes a sequência $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ e como parte literal símbolo x.

Exemplo 1.0.1. *A exemplo de polinômios, podemos tomar:*

a) $F(x) = 2 + 3x + 5x^2 - 7x^3$, com coeficientes $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = -7$ e com parte literal x.

b) $G(m) = 2m + 4m^3$, onde os coeficientes são $a_0 = 0$; $a_1 = 2$; $a_2 = 0$, $a_3 = 4$ e a parte literal é m.

Definição 1.0.5. *Seja $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \ldots$ um polinômio sobre $\mathbb{K}$, tal que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$, $\forall j > n$. Dizemos que n é o* **grau do polinômio** *$P(x)$ e indicamos por $gr(P) = n$, simultaneamente podemos dizer que a_n é o* **coeficiente dominante** *do polinômio.*

Por exemplo, o polinômio $P(x) = x^7 + 9x^5 + ix^4 + x^3 + 7$ possui grau 7, isto é, $gr(P) = 7$. Já o polinômio $Q(x) = 3$ tem grau 0, pois temos $Q(x) = 3 = 3x^0$ e, portanto, $gr(Q) = 0$.

1.1 As operações de soma e multiplicação no conjunto dos polinômios

Denotando com $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre $\mathbb{K}$, em uma indeterminada x, podemos observar que não está definido o grau do polinômio identicamente nulo. Assim, ϕ pode ser interpretada como uma função do conjunto de todos os polinômios não nulos no conjunto $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}[x] - \{0\} &\to \mathbb{N} \\ P(x) &\to \phi P(x) = gr(P) \end{aligned}$$

O conjunto dos polinômios pode ser munido de duas operações usuais, chamadas de **soma** e **multiplicação**.

Dados dois polinômios P e Q, tais que $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \ldots$ e $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m + \ldots$ e, definimos a soma $P(x) + Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k + \ldots$, onde $c_i = a_i + b_i$.

A operação de multiplicação de dois polinômios, por sua vez, é dada por $P(x) \cdot Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k + \ldots$, onde $c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, $\ldots$, $c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$, $i \in \mathbb{K}$.

Observe que se dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ não nulos têm graus m e n, supondo sem perda de generalidade que $n \leq m$, então:

- Se $m \neq n \Rightarrow \mathrm{gr}(P + Q) = \mathrm{gr}(P - Q) = m$;
- Se $m = n \Rightarrow \mathrm{gr}(P + Q) \leq m$ e $\mathrm{gr}(P - Q) \leq m$ ou o polinômio resultante é nulo.
- Em qualquer um dos casos, $\mathrm{gr}(PQ) = m + n$.

Exemplo 1.1.1. *Sejam $A(x) = x^2 + 2x$ e $B(x) = x + 4$. Então,*

$$\begin{aligned} C(x) &= A(x) \cdot B(x) \\ &= \left(x^2 + 2x\right) \cdot (x + 4) \\ &= x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 8x \\ &= x^3 + 6x^2 + 8x. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D(x) = [A(x)]^3 &= A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) \\ &= \left(x^2 + 2x\right) \cdot \left(x^2 + 2x\right) \cdot \left(x^2 + 2x\right) \\ &= \left(x^4 + 4x^3 + 4x^2\right) \cdot \left(x^2 + 2x\right) \\ &= x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3. \end{aligned}$$

1.2 O valor numérico de um polinômio $P(x)$

Dado um polinômio $P(x)$, quando substituímos a variável x por um número complexo z qualquer e efetuamos os cálculos indicados, obtemos $P(z)$, que é o valor numérico de $P(x)$ para $x = z$.

Quando $P(z) = 0$, dizemos que o número complexo z é raiz do polinômio $P(x)$.

Exemplo 1.2.1. *Dado um polinômio $P(x) = -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$, vamos calcular $P(1)$. Para tal, substituímos x por 1 na expressão que fornece $P(x)$.*

$$P(1) = -3 \cdot (1)^3 - 5 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1) - 2 = -3 - 5 + 4 - 2 = -6.$$

Note que $P(1)$ equivale à soma algébrica dos coeficiente de $P(x)$.

Exemplo 1.2.2. *Vamos encontrar o valor de b em $P(x) = 2x^3 - bx^2 + x - 2$, para que -2 seja raiz desse polinômio. Para isso, devemos ter $P(-2) = 0$.*

Assim, substituindo x por -2 na expressão que fornece $P(x)$, obtemos:

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - b(-2)^2 + (-2) - 2 = -16 - 4b - 4 = -20 - 4b.$$

Como queremos que -2 seja raiz, ficamos com $-20 - 4b = 0$, logo, $b = \frac{20}{-4} = -5$.

1.3 Equações polinomiais ou algébricas

Definição 1.3.1. *Equação polinomial ou algébrica é toda equação na forma*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

sendo $x \in \mathbb{C}$ a incógnita, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ coeficientes complexos, com $a_n \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}^*$

Note que $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, é um polinômio de grau n. Neste sentido, diremos que a equação polinomial correspondente tem **grau** n.

Exemplo 1.3.1. *Vejamos as três situações a seguir:*

- $x^2 + 5x + 6 = 0$ *é uma equação polinomial do* 2° *grau.*
- $2x^5 + 3x^4 - x^2 + x = 0$ *é uma equação polinomial de grau 5.*
- $kx^3 + 6x - 8 = 0$ *é uma equação polinomial de grau 3 se* $k \neq 0$*, e de grau 1 se* $k = 0$.

Definição 1.3.2. *Um número complexo* α *é raiz de uma equação algébrica* $P(x) = 0$*, de grau* n*, quando* α *é raiz de* $P(x)$*, ou seja:* $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$.

Sabemos que resolver uma equação consiste em determinar os valores de x (ou qualquer outra incógnita), em um determinado universo, que a tornam verdadeira. O conjunto solução de uma equação algébrica é o conjunto de todas as raízes dessa equação que pertencem ao conjunto considerado.

Exemplo 1.3.2. *Vamos verificar se 2 é raiz da equação* $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 7x + 6 = 0$. *Substituindo* x *por 2 no polinômio* $P(x)$*, temos:*

$$6 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = 96 + 56 - 144 - 14 + 6 = 0.$$

Logo, 2 é uma raiz da equação dada.

Exemplo 1.3.3. *Vamos mostrar que* -5 *é raiz da equação* $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$*, mas não é raiz da equação* $x^3 - x^2 + x = 0$*. Substituindo* x *por* -5 *no primeiro membro da* 1^a *equação, obtemos*

$$(-5)^3 + 5 \cdot (-5)^2 - (-5) - 5 = -125 + 5 \cdot 25 + 5 - 5 = 0.$$

Por outro lado, substituindo x *por* -5 *no primeiro membro da* 2^{a} *equação, temos*

$$(-5)^3 - (-5)^2 + (-5) = -125 - 25 - 5 = -155 \neq 0.$$

Exemplo 1.3.4. *Vamos determinar o conjunto solução em* $\mathbb{Z}$*, da equação* $x^2+x-6=0$. *Fatorando o trinômio do* 2° *grau do* 1° *membro da equação, temos:*

$$\begin{aligned}(x-2)(x+3)=0 &\Rightarrow x-2=0 \quad ou \quad x+3=0\\ &\Rightarrow x=2 \ ou \ x=-3.\end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é $S=\{-3,2\}$.

O resultado a seguir, comumente conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra, foi originalmente demonstrado pelo matemático Carl F. Gauss, em 1799, em sua tese de doutorado e sua demonstração pode ser encontrada em [12]. Esse e o Teorema 1.3.2 serão utilizados extensivamente no Capítulo 2, enquanto o Teorema das Raízes Conjugadas (1.3.3) apenas foi incluído para ser utilizado posteriormente no Exemplo 2.2.4.

Teorema 1.3.1 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda equação algébrica* $P(x)=0$ *de grau* n*, com* $n\geq 1$*, admite pelo menos uma raiz complexa (real ou não).*

O Teorema 1.3.1 é importante para entendermos as relações entre raízes e a forma fatorada de um polinômio. Por ele, toda equação polinomial $P(x)=0$ sempre possui solução complexa, ou seja, qualquer polinômio $P(x)$ de grau n, com $n\geq 1$, tem ao menos uma raiz complexa.

O Teorema da Decomposição é consequência do Teorema Fundamental da Álgebra e é enunciado a seguir. Sua demonstração pode ser encontrada em [18].

Teorema 1.3.2 (Teorema da Decomposição)**.** *Todo polinômio* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ *em* $\mathbb{C}$ *de grau* n *maior do que ou igual a 1 pode ser fatorado da seguinte forma:*

$$P(x)=a_n\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_{n-1})\cdot(x-\alpha_n)$$

sendo a_n *o coeficiente dominante e* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ *as raízes desse polinômio.*

Exemplo 1.3.5. *Vamos escrever* $P(x)=-3x^2+6x-3$ *na forma fatorada. Temos que*

$$P(x)=-3x^2+6x-3=-3\left(x^2-2x+1\right)=-3\left(x-1\right)^2.$$

Exemplo 1.3.6. *Vamos verificar que* -2, 1 *e* 4 *são raízes do polinômio* $P(x)=2x^3-6x^2-12x+16$ *e escrevê-lo decomposto em fatores de grau* 1*. De fato,*

- $P(-2)=2\cdot(-2)^3-6\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+16=0$;

- $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 16 = 0;$
- $P(4) = 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 16 = 0.$

Pelo Teorema da Decomposição, temos

$$P(x) = 2 \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-4).$$

Teorema 1.3.3 (Teorema das Raízes Conjugadas). *Consideremos um polinômio $P(x)$ de grau n e coeficientes reais. Se o número imaginário $z = a + bi$, a, $b \in \mathbb{R}$, é raiz de $P(x)$, temos que $\overline{z}$ (o conjugado de z) também é raiz de $P(x)$.*

Demonstração. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde a_0, a_1, $\ldots$, a_n são números reais. Se z é raiz de $P(x)$, temos

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (I)$$

Calculemos $P(\overline{z})$,

$$P(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0. \quad (II)$$

Já que a_0, a_1, $\ldots$, a_n são reais, temos

$$a_i = \overline{a_i}, \quad \text{para todo } \ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Usando esse fato e que para um número complexo qualquer ω é válido que:

$$(\overline{\omega})^n = \overline{(\omega^n)}.$$

A igualdade (II) transforma-se em

$$\begin{aligned} P(\overline{z}) &= \overline{a_n}\overline{(z^n)} + \overline{a_{n-1}}\overline{(z^{n-1})} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Assim, se $P(\overline{z}) = 0$, $\overline{z}$ é raiz de $P(x)$. ■

Exemplo 1.3.7. *O polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 41x - 87$, tem raízes 3, $2+5i$ e $2-5i$, e pode assim ser fatorado como:*

$$(x-3) \cdot (x - 2 - 5i) \cdot (x - 2 + 5i).$$

Calculando o produto dos dois últimos fatores, as partes imaginárias são canceladas, resultando em:

$$(x-3) \cdot (x^2 - 4x + 29).$$

Os fatores não-reais surgem em pares que quando multiplicados fornecem polinômios quadráticos com coeficientes reais.

Capítulo 2

As relações de Girard e algumas aplicações

As relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica podem auxiliar na resolução de equações polinomiais, tais relações são denominadas relações de Girard. Para determinar as relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação, iremos tomar como referência principal [13], Seção 2.4.

Iniciaremos o capítulo estabelecendo os casos $n = 2$ e $n = 3$, onde relacionamos as respectivas raízes dessas equações de grau 2 e 3, com seus coeficientes. Em seguida apresentaremos o caso geral.

Em seu livro, *Invention nouvelle en algèbre*, Albert Girard introduziu o problema que consistia em encontrar o número de raízes de uma equação, ou seja, ele afirma que todas as equações polinomiais possuem tantas soluções quanto o grau da referida equação, esta foi a primeira versão que conhecemos hoje que é o Teorema Fundamental da Álgebra. Em (ROQUE, 2012, l. 6692), relata que:

> As técnicas empregadas para a solução de equações evoluíram durante os séculos XVI e XVII para uma teoria das equações que buscava fórmulas gerais para exprimir as raízes. O simbolismo de Viète foi aos poucos sendo incorporado e permitiu maior generalidade no tratamento das equações. Os primeiros a colocar a questão da existência das raízes de uma equação qualquer foram Girard e Descartes, na primeira metade do século XVII.

Há diversas formas de estabelecer fórmulas para o cálculo das raízes de uma equação de grau 2, em [28] é apresentado um método para resolução de equações completas do segundo grau, que deve-se a Viète. O método prova também a expressão conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara, usada para encontrar raízes de equações dessa classe.

Vamos considerar $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, fazendo a mudança de variável $x = u + v$ transformamos a referida equação em uma equação denominada incompleta. Substituindo $x = u + v$ em $ax^2 + bx + c = 0$ obtemos:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0, \text{ ou seja, } a(u^2 + 2uv + v^2) + bu + bv + c = 0.$$

Reescrevendo $a\left(u^2 + 2uv + v^2\right) + bu + bv + c = 0$, obtemos a seguinte equação nas variáveis u e v reais.

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Fazendo $u = -\dfrac{b}{2a}$ obtemos:

$$av^2 + \left(2a \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right) v + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0,$$

ou seja,

$$av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0.$$

Isto é, $av^2 + \dfrac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0$, e isto implica que, $av^2 + \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0$ e com isso, $av^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Multiplicando $av^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ por $\dfrac{1}{a}$ obtemos:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Assim,

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ e } |v| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}.$$

Dessa forma, concluímos que $v = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $v = -\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Como $x = u + v$ e $u = -\dfrac{b}{2a}$ então $x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\dfrac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

As relações de Girard em algumas situações podem ajudar na resolução de alguns sistemas não lineares. Para isso veremos alguns casos particulares que envolvem tais relações.

2.1 O Caso n = 2

No caso de $n = 2$, temos que uma equação do 2° grau possui a seguinte lei de formação: $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, e os coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$. As identidades que relacionam as raízes de uma equação do 2° grau e seus coeficientes são fundamentadas por meio das relações de Girard e que podem ser um forma resolutiva das raízes dessa equação. Ou seja, as fundamentações de Girard são responsáveis pela relação existente entre os coeficientes de uma equação algébrica e suas raízes. Na equação do 2° grau, as relações são obtidas por meio das fórmulas da soma e do produto: $\frac{-b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, respectivamente.

As equações polinomiais do 2° grau possuem como lei de formação a equação algébrica: $ax^2 + bx + c = 0, \text{com}\, a \neq 0$ e raízes x_1, x_2 complexas. A decomposição dessa equação permite a determinação de expressões matemáticas capazes de relacionar as raízes da equação, para isso observe:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \\ &= a\left(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1 \cdot x_2\right) \\ &= a\left[x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + \left(x_1 \cdot x_2\right)\right]. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por a, temos:

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + \left(x_1 \cdot x_2\right).$$

Realizando a igualdade entre os polinômios:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ \text{ e } \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Essas relações de Girard podem ser utilizadas para resolver equações quadráticas, o método é comumente chamado de *Resolução por meio da Soma e do Produto*. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1.1. *Seja $2x^2 - 8x + 6 = 0$ uma equação polinomial do segundo grau. Vamos resolvê-la utilizando o Método da Soma e do Produto. Como*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad e \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \quad obtemos$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = -\left(\frac{-8}{2}\right) \\ x_1 \cdot x_2 & = \frac{6}{2} \end{cases},$$

$$ou\ ainda, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 & = 4 \\ x_1 \cdot x_2 & = 3 \end{cases}.$$

É trivial que $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$. Verificando as soluções temos:

Para $x_1 = 3$,

$$2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 6 = 2 \cdot 9 - 24 + 6 = 18 - 18 = 0, \ e$$

para $x_2 = 1$,

$$2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 6 = 2 \cdot 1 - 8 + 6 = 2 - 2 = 0.$$

Exemplo 2.1.2. *Seja $-x^2 + 10x - 25 = 0$ uma equação polinomial de segundo grau. Usando novamente as relações de Girard características das equações quadráticas, obtemos*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 10 \\ x_1 \cdot x_2 & = 25 \end{cases}$$

Logo, $x_1 = x_2 = 5$, e, pelas relações de Girard, concluímos que a equação $-x^2 + 10x - 25 = 0$ possui 5 como raiz dupla.

Exemplo 2.1.3. *Resolva o sistema:*

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} & = 12, \\ \frac{1}{x_1 x_2} & = 20, \end{cases}$$

Temos que:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2,$$
$$\sigma_2 = x_1 \cdot x_2.$$

Daí fazemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} & = 12 \\ \frac{1}{x_1 x_2} & = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} & = 12 \\ \frac{1}{x_1 x_2} & = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} & = 12 \\ \frac{1}{\sigma_2} & = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} & = 12 \\ \sigma_2 & = \frac{1}{20} \end{cases}$$

Então, $\sigma_1 = 12$ *e* $\sigma_2 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. *Logo,*

$$\begin{cases} \sigma_1 & = \frac{3}{5} \\ \sigma_2 & = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = \frac{3}{5} \\ x_1 \cdot x_2 & = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & = \frac{3}{5} - x_1 \\ x_1 \left(\frac{3}{5} - x_1\right) & = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 & = \frac{3}{5} - x_1 \\ -x_1^2 + \frac{3}{5}x_1 & = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & = \frac{3}{5} - x_1 \\ -x_1^2 + \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{20} & = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo a equação:

$$-x_1^2 + \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow -20x_1^2 + 12x_1 - 1 = 0,$$

encontramos $x_1 = \frac{1}{2}$ *ou* $x_1 = \frac{1}{10}$. *Ainda, se* $x_1 = \frac{1}{2}$, *então* $x_2 = \frac{1}{10}$. *Se* $x_1 = \frac{1}{10}$, *então* $x_2 = \frac{1}{2}$.

Portanto, $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right); \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2.2 O caso n = 3

As equações polinomiais do 3° grau possuem como lei de formação a equação algébrica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e raízes x_1, x_2 e x_3 complexas. A decomposição dessa equação permite a determinação de expressões matemáticas capazes de relacionar as raízes da equação, para isso observe:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \\ &= a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)\,x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 x_3)\,x - (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)\right]. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por a, temos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)\,x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3)\,x - (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3).$$

Realizando a igualdade entre os polinômios:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Questões que envolvem soluções de algumas classes de sistemas não lineares, soluções de equações racionais, entre outras, podem fazer uso das relações de Girard em suas resoluções. Os exemplos de 2.2.1 até 2.2.5 foram retirados de [16], já os exemplos 2.2.6 e 2.2.7 foram adaptados pelo autor.

Exemplo 2.2.1. *(ITA) Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raíz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2 (ou seja, as raízes são x_1, x_2 e x_3), distinta de x_1. Determine o valor de $(k + x_1)x_2$.*

Utilizando as relações de Girard para a soma e a soma aos pares, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_1 + x_2 = 2x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}, \\ x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 = \frac{4}{2} = 2. \end{cases}$$

Eliminando x_2, obtemos

$$3x_1^2 + 7x_1 + 2 = 0,$$

cuja raíz inteira é $x_1 = -1$. Assim, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$ e, portanto,

$$x_1x_1x_2 = -\frac{3}{2} = -\frac{k}{2} \Rightarrow k = 3.$$

Logo, $(k + x_1)x_2 = (3 + (-1))(-\frac{3}{2}) = -3$.

Exemplo 2.2.2. *São dados $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabe-se que*

$$a + b + c > 0, \quad ab + ac + bc > 0, \quad \text{e} \quad abc > 0.$$

Prove que $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

Seja $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ a equação cuja raízes são a, b, c. De acordo com o caso $n = 3$ das relações de Girard, temos

$$\begin{aligned} A = a + b + c &\Rightarrow A > 0, \\ B = ab + ac + bc &\Rightarrow B > 0, \\ C = abc &\Rightarrow C > 0. \end{aligned}$$

Suponha que as condições $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ não ocorram simultaneamente. Ou seja, existe uma raiz $r \in \{a, b, c\}$ tal que $r \leq 0$. Porém, nessas condições

$$r^3 - Ar^2 + Br - C < 0,$$

contrariado o fato de r ser raiz. Portanto, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Exemplo 2.2.3. *(IME) Determine o valor da soma das raízes da equação*

$$y^{\frac{3}{2}} + 5y + 2y^{\frac{1}{2}} + 8 = 0.$$

Vamos começar com a substituição $y^{\frac{1}{2}} = x$. A equação se torna

$$x^3 + 5x^2 + 2x + 8 = 0.$$

Todavia, devemos ficar atentos que não nos interessa o valor de $x_1 + x_2 + x_3$, uma vez que a letra x não é a incógnita inicial.

Nosso objetivo é calcular

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

ou seja,

$$y_1 + y_2 + y_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (-5)^2 - 2(2) = 21.$$

Exemplo 2.2.4. *(OCM) Mostre que 1 é a única raiz real da equação $x^3 + x^2 = 2$.*

Inicialmente, veja que 1 é raiz de $x^3 + x^2 = 2$, pois $1^3 + 1^2 = 2$, e que essa equação pode ser reescrita como $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

Suponha que, além da raiz 1, essa equação possua uma raiz complexa e não-real $a + bi$. Como temos a condição do Teorema 1.3.3 (que é termos coeficientes reais), $a - bi$ também deve ser uma raiz. Segue das relações de Girard, caso n= 3 que:

$$1 + a + bi + a - bi = -1 \Rightarrow a = -1,$$
$$1 \cdot (a + bi) \cdot (a - bi) = 2 \Rightarrow 1 + b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1.$$

Temos, assim, raízes 1, $-1 \pm i$, que verificam a relação de Girard restante

$$1(-1 + i) + 1(-1 - i) + (-1 + i)(-1 - i) = 0.$$

Assim, 1 é, de fato, a única raiz real.

Exemplo 2.2.5. *Resolva o sistema:*

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} & = \frac{7}{8} \\ \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} & = \frac{7}{32} \\ \frac{1}{x_1x_2x_3} & = \frac{1}{64}. \end{cases}$$

De modo análogo ao exemplo anterior, temos:

$$\begin{cases} \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3} & = \frac{7}{8} \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3} & = \frac{7}{32} \\ x_1x_2x_3 & = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 14 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = 56 \\ x_1x_2x_3 & = 64 \end{cases}$$

Pelas relações de Girard, encontramos uma equação polinomial de grau 3 que tenha x_1*,* x_2 *e* x_3 *como raízes:*

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} & = 14 \\ \frac{c}{a} & = 56 \\ -\frac{d}{a} & = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b & = -14a \\ c & = 56a \\ d & = -64a \end{cases} \Rightarrow x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0, \quad \textit{tomando } a = 1.$$

Podemos observar que 2 *é uma raiz desse polinômio, então, pelo Teorema da Decomposição, temos:* $(x-2)(x^2-12x+32) = 0 \Rightarrow x = 2$ *ou* $x = 4$ *ou* $x = 8$.

Segue o conjunto solução: $S = \{(2,4,8);(2,8,4);(4,2,8);(4,8,2);(8,2,4);(8,4,2)\}$.

É interessante observar que nos dois sistemas dos exemplos 2.2.6 e 2.2.7 temos apenas dois e três valores distintos, respectivamente, como possíveis soluções para cada termo, mas eles podem ser permutados em diferentes ordens, daí o fato de termos dois pares ordenados como solução no primeiro e seis trincas ordenadas no segundo.

2.3 O caso geral

Em geral, dado $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_j \in \mathbb{R}$, cujas n raízes complexas são $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Segue de [13], que existem funções $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ que dependem de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definidas por

$$
\begin{cases}
\sigma_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j, \\
\sigma_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum\limits_{j_1<j_2} x_{j_1} x_{j_2}, \\
\sigma_3\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum\limits_{j_1<j_2<j_3} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3}, \\
\vdots \\
\sigma_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_1 x_2 \ldots x_n.
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

Essas funções $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ relacionam as raízes complexas de $p(x)$ com os respectivos coeficientes do polinômio de $p(x)$, $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ por meio de igualdade de polinômios, ou seja,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
&= \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)\left(x - x_4\right)\ldots\left(x - x_n\right) \\
&= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, concluímos essas relações

$$
a_{n-1} = -\sigma_1, \ldots, a_2 = (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}, a_1 = (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}, a_0 = (-1)^n \sigma_n
$$

que chamamos relação de relações de Girard de grau n e serão muito utilizadas na última seção do Capítulo 3 deste trabalho.

Caso P não seja o polinômio nulo, temos $a_n \neq 0$, pois é o coeficiente dominante, e outra forma de visualizar essas relações seria

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} x_j & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\
\sum\limits_{j_1<j_2} x_{j_1} x_{j_2} & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\
\sum\limits_{j_1<j_2<j_3} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} & = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\
& \vdots \\
S_k & = (-1)^k \ \dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\
& \vdots \\
x_1 x_2 \ldots x_n & = (-1)^n \ \dfrac{a_0}{a_n},
\end{cases}
$$

onde S_k seria a soma de todos os $C_{n,k}$ produtos de k raízes da equação [1].

Exemplo 2.3.1. *Dado um polinômio $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ do quarto grau, podemos construir as seguintes relações de Girard:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

Exemplo 2.3.2. *(IME) Seja*

$$p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cincos raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. Determine o número de coeficientes pares de $p(x)$.

Sejam p_1, p_2, p_3, p_4 as quatro raízes pares e i a raiz ímpar. Segue das relações de Girard, no caso n=5, que $-b$ é a soma de quatro números pares e um ímpar, ou seja, b é ímpar; os demais coeficientes serão somas de produtos em que pelo menos um fator é p_k ($k = 1$, 2, 3 ou 4) e, portanto, são todos pares. Logo, p possui quatro coeficientes pares.

Capítulo 3

A sequência numérica de Stirling do primeiro tipo via função polinomial

No contexto de função geradora, os números de Stirling do primeiro tipo, definidos em [14] e [15] são definidos como coeficientes de x^k de uma função polinomial de grau n com $0 < k \leq n$. Ou seja, tratam-se de uma sequência numérica gerada por uma classe de polinômios, fixado o respectivo grau n, que é um número inteiro positivo, sendo que os coeficientes das potências de x são elementos dessa sequência. A técnica da função geradora teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754) e, posteriormente, foi utilizada por L. Euler (1707-1783) em problemas da Teoria Aditiva de Números, principalmente na Teoria de Partições. Essa técnica permite abordarmos problemas de natureza combinatória de forma algébrica. Além disso é possível obter soluções de recorrências.

Na literatura também há os números de Stirling do segundo tipo e a sua natureza combinatória desperta o interesse de pesquisá - los em diversos contextos. Esses números são definidos, como por exemplo em [26] e [14], fixados os números naturais n, k com $0 \leq k \leq n$ de forma algébrica por meio da classe de funções racionais $B_n(x) = \frac{x^n}{(1-x)(1-2x)...(1-nx)}$, sendo que os coeficientes de x^k na expansão em série de potências da função $B_n(x)$ são os números de Stirling do segundo tipo.

De acordo com [14], os números de Stirling do primeiro tipo podem ser representados formalmente como os coeficientes na expansão do polinômio $x(x+1)(x+2)(x+3)..(x+n-1)$. Segue de [26] que os números de Stirling do primeiro tipo podem ser definidos, combinatoriamente, como número de permutações de n que se decompõem em exatamente k ciclos disjuntos. Inclusive [19] traz a seguinte definição para os números de Stirling do primeiro tipo que consiste em responder a seguinte questão: de quantas maneiras n pessoas podem se sentar em volta de k mesas circulares indistinguíveis, sem que nenhuma mesa fique vazia?

Tendo como base o conceito dos números de Stirling do primeiro tipo a proposta deste capitulo é apresentar a definição de números de Stirling do primeiro tipo, de acordo [14] e [15], e provar propriedades imediatas. Além do mais, estabelecer identidades que envolvem números de Stirling e, usando as relações de Girard iremos provar tais identidades. Em seguida algumas interpretações combinatória para as respectivas identidades serão estabelecidas.

3.1 Números de Stirling do Primeiro tipo: definições e exemplos

Nessa seção iremos definir o número de Stirling, de acordo com [14], e algumas propriedades dadas em [26] serão provadas de acordo com essa definição. Para isso, considere um número natural n, $n \geq 1$ e definimos a família de polinômios $p_n(x)$ como segue,

$$p_n(x) = x(x+1)(x+2)...(x+(n-1)) \tag{3.1}$$

para $n > 1$

e $p_0(x) = 1$ e, constatamos por meio da definição que o grau de $p_n(x)$, para $n > 1$ é igual a n e o coeficiente de x^n é igual a 1.

Expandimos a expressão $x(x+1)...(x+(n-1))$ e obtemos o polinômio

$$p_n(x) = x^n + \left[\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right] x^{n-1} + ... + \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] x^k + \left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right] x, \tag{3.2}$$

onde $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]$ é o coeficiente de x^k e é chamado *número de Stirling do primeiro tipo* e escevemos como $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]$ como n colchete k. De acordo com a definição, seguem as sequintes propriedades imediatas: $\left[\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right] = 1$ e $\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right] = 0$ e $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = 0$, para $n \geq 1$ e $n > k$.

Por meio de $p_0(x) = 1$, definimos $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] = 1$. Listamos alguns exemplos de $p_n(x)$, para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1) $p_1 = x$;

2) $p_2(x) = (x + 1)p_1(x) = x^2 + x$;

3) $p_3(x) = (x + 2)p_2(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$;

4) $p_4(x) = (x + 3)p_3(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$;

5) $p_5(x) = (x + 5)p_4 = x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x$;

6) $p_6(x) = x^6 + 15x^5 + 85x^4 + 225x^3 + 274x^2 + 120x$.

Segue do Exemplo de 1 até 6 a seguinte tabela:

$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$k = 1$	1	1	2	6	24	120
$k = 2$	0	1	3	11	50	274
$k = 3$	0	0	1	6	35	225
$k = 4$	0	0	0	1	10	85
$k = 5$	0	0	0	0	1	15
$k = 6$	0	0	0	0	0	1

Tabela 3.1: Números de Stirling do primeiro tipo $1 \leq k \leq 6$ e $1 \leq n \leq 6$

Fazendo avaliações nas funções polinomiais que geram números de Stirling do primeiro tipo obtemos o seguinte resultado que consiste em somar as colunas da tabela 3.1, por exemplo. No contexto combinatório de permutações, que consiste em contar o total de permutações de n que se decompõem em k ciclos disjuntos, vemos que se $n = 5$ e somando a sexta coluna ($n = 5$ e $k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$) a soma é igual a 120 que é total de permutações de 5.

Proposição 3.1.1. *Seja o inteiro $n \geq 1$, então*

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = n!.$$

Demonstração. Fazendo $x = 1$ em 3.1 e 3.2, obtemos a igualdade:

$$\begin{aligned} 1(1+1)(1+2)...(1+(n-1)) &= \left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right] + ... + \left[\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right], \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n &= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right].$$

■

3.2 Uma recorrência para os números de Stirling do Primeiro tipo

O teorema a seguir estabelece uma recorrência para os números do stirling do primeiro tipo e usa o conceito de igualdades de polinômios para o respectivo resultado. Comparando com a prova dada em [26] para o mesmo resultado vemos que o uso de polinômios torna a prova mais curta, nesse caso.

Teorema 3.2.1. *Sejam n, k naturais tais que $1 < k < n$. Então:*

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right] + (n-1) \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]. \tag{3.3}$$

Demonstração. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \underbrace{x(x+1)...(x+(n-2))}_{p_{n-1}(x)}(x+(n-1)) \\ &= p_{n-1}(x)(x+(n-1)) \\ &= xp_{n-1}(x) + (n-1)p_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{3.4}$$

O coeficiente de x^k em $p_n(x)$ é por definição $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$. Por outro lado, o coeficiente de x^k em $x \cdot p_{n-1}(x) + (n-1)p_{n-1}(x)$ é

$$\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1) \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right].$$

Segue de 3.4 a identidade:

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1) \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]. \tag{3.5}$$

■

O Teorema 3.2.1, no contexto dos números de Stirling do primeiro tipo, pode ser entendida como o total de distribuições de n pessoas em k mesas idênticas, sem que nenhuma fique fazia, tornando o número de Stirling do primeiro tipo em um caso geral da permutação circular. Pois, no caso $k = 1$, o número de Stirling $\left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right]$ é igual o total de distribuir n pessoas em uma mesa circular, de acordo com [19]. A prova dessa proposição segue do Teorema 3.2.1, juntamente com o Princípio de indução finita.

Proposição 3.2.1. *Para todo* $n \geq 1, \left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right] = (n-1)!$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Claramente o resultado é válido para $n = 1$. Suponha que $\left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right] = (n-1)!$ para todo $n \geq 1$.

Segue de Teorema 3.2.1 que

$$\left[\begin{array}{c} n+1 \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right] + n \left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right].$$

Como $\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right] = 0$ e $\left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right] = (n-1)!$ então $\left[\begin{array}{c} n+1 \\ 1 \end{array} \right] = n(n-1)! = n!$. ■

A recorrência obtida no teorema 3.2.1 é similar a relação que enunciamos no Lema 3.2.1, que também é uma recorrência, além disso, envolvem os coeficientes binomiais.

Lema 3.2.1. *Dados* n, $k \in$, *com* $k < n$ *e* $n \neq 0$, *temos:*

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Demonstração. Vamos apenas desenvolver a igualdade começando do segundo membro até chegar no primeiro:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} &= \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.
\end{aligned}$$

■

Na literatura, a relação recursiva que demonstramos no Lema é chamada relação de Stifel e ela permite construirmos um triângulo aritmético formado por números chamado de Triângulo de Pascal. Esse triângulo é obtido recursivamente, inicialmente descrevemos os lados que limitam o triângulo pela direita e pela esquerda e são constituídos exclusivamente de números 1, a região no meio deste, é formada por números inteiros, em cada elemento é a soma de seus vizinhos situados linha acima, por exemplo a linha 0; o elemento é 1; a linha 1 é formada por 1 1, a linha 2 é formada 1 2 1, observe que o 2 da linha abaixo e formado por meio da linha acima 1+1, a terceira linha é formada por 1 1+2 2+1 1, ou seja, 1 3 3 1, e assim sucessivamente. Vamos dar um exemplo ilustrativo de um triângulo com 5 linhas.

Figura 3.1: Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Da mesma forma que a relação de Stifel permite dispor os números binomiais num triângulo, a reorrência para os números de Stirling do primeiro tipo também permite dispor os números de Stirling em um triângulo de números, para mais detalhes veja [19].

> A recorrência dos números de Stirling do primeiro tipo também permite dispor esses números na forma triangular; esse triângulo formado é similar ao Triângulo de Pascal formado pelos coeficientes binomiais. Os coeficientes binomiais podem ser interpretados combinatoriamente como o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n objetos, enquanto que o número de Stirling do primeiro tipo pode ser interpretado como a quantidade de permutações de um conjunto de n elementos que se decompõe em k ciclos.

Sendo mais explicito, temos as representações

Figura 3.2: Triângulo de Stirling A

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\
\vdots
\end{array}
$$

Figura 3.3: Triângulo de Stirling B

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
2 \quad 3 \quad 1 \\
6 \quad 11 \quad 6 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

3.3 Coeficientes binomiais e alguns números de Stirling do primeiro tipo

Esta seção é destinada para estabelecer algumas identidades que envolvem os números de Stirling do primeiro tipo e os coeficientes ou números binomiais. Os números binomiais $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$, podem ser definidos, combinatoriamente como o número de maneiras de escolher k objetos de um conjunto de n objetos. Por outro lado, os números de Stirling do primeiro tipo, de acordo com [19], podem ser definidos como o número de maneiras de distribuirmos n pessoas em k mesas circulares idênticas sem que nenhuma fique fazia. Apesar dessa natureza combinatória de ambas as sequências de números, iremos apenas enunciar as identidades e prova-las por indução, entretanto o leitor pode investigar a possibilidade de provas combinatórias para tais identidades.

Proposição 3.3.1. *Para todo n natural, $n \geq 3$, é válido*

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n \\ 4 \end{array} \right).$$

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Claramente o resultado é válido para $n = 3$, pois $\left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right] = 0$ e $\binom{3}{4} = 0$. Suponha que para todo $n \geq 3$, temos $\left[\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array} \right] = \binom{n}{2}\binom{n}{4}$.

Segue que o Teorema 3.2.1., a hipótese de indução, a proposição 3.2.3 e a Relação de Stifel para:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} n+1 \\ (n+1)-3 \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c} n+1 \\ n-2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array}\right] + n\left[\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right] \\
&= \binom{n}{2}\binom{n}{4} + n\frac{1}{4}(3n-1)\binom{n}{3} \\
&= \left[\binom{n+1}{2} - \binom{n}{1}\right]\left[\binom{n+1}{4} - \binom{n}{3}\right] + \frac{n}{4}(3n-1)\binom{n}{3} \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{2}\binom{n}{3} - \binom{n}{1}\binom{n+1}{4} + \binom{n}{1}\binom{n}{3} + \frac{n}{4}(3n-1)\binom{n}{3} \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4} + \binom{n}{3}\left[-\binom{n+1}{2} + \binom{n}{1} + \frac{n}{4}(3n-1)\right] - n\frac{n+1}{4}\binom{n}{3} \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4} + \binom{n}{3}\left[-\binom{n+1}{2} + \binom{n}{1} + \frac{n}{4}(3n-1) - n\frac{n+1}{4}\right] \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4} + \binom{n}{3}\left[\frac{-(n+1)!}{(n-1)!2!} + n + \frac{n}{4}(3n-1-n-1)\right] \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4} + \binom{n}{3}\left[\frac{-(n+1)n}{2} + n + \frac{n}{4}(2n-2)\right] \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4} + \binom{n}{3}\left[\frac{-(n+1)n + 2n + n(n-1)}{2}\right] \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4} + \binom{n}{3}\left[\frac{-n^2 - n + 2n + n^2 - n}{2}\right] \\
&= \binom{n+1}{2}\binom{n+1}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, temos:

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array}\right] = \binom{n}{2}\binom{n}{4}.$$

∎

Proposição 3.3.2. *Para todo n natural,* $n \geq 2$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right] = \frac{1}{4}(3n-1)\binom{n}{3}.$$

Demonstração. É claro que o resultado é válido para $n = 2$, pois $\left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right] = 0$ *e* $\binom{2}{3} = 0$.

Suponha que para $n > 2$, $\left[\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right] = \frac{1}{4}(3n-1)\left(\begin{array}{c} n \\ 3 \end{array}\right)$.

Assim, pelo Teorema 3.2.1, a hipótese de indução e a relação de Stifel, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{3(n+1)-1}{4}\binom{n+1}{3} = \frac{3n+2}{4}\binom{n+1}{3} &= \frac{3n+2}{4}\left(\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\right) \\
&= \frac{3n+2}{4}\binom{n}{3} + \frac{3n+2}{4}\binom{n}{2} \\
&= \frac{3n-1}{4}\binom{n}{3} + \frac{3}{4}\binom{n}{3} + \frac{3n+2}{4}\binom{n}{2} \\
&= \frac{3n-1}{4}\binom{n}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{3n+2}{4}\binom{n}{2} \\
&= \frac{3n-1}{4}\binom{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n-2}{4} + \frac{3n+2}{4}\binom{n}{2} \\
&= \frac{3n-1}{4}\binom{n}{3} + \binom{n}{2}\cdot\frac{n-2}{4} + \frac{3n+2}{4}\binom{n}{2} \\
&= \frac{3n-1}{4}\binom{n}{3} + \binom{n}{2}\frac{n-2+3n+2}{4} \\
&= \frac{3n-1}{4}\binom{n}{3} + n\binom{n}{2} \\
&= \left[\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right] + n\left[\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n+1 \\ n-1 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, temos:

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right] = \frac{1}{4}(3n-1)\left(\begin{array}{c} n \\ 3 \end{array}\right).$$

∎

A proposição (3.3.3) é provada nesta seção usando o Princípio de indução como segue, entretanto na próxima seção (1.4) a prova desse resultado é dada por meio de avaliações na função polinomial que define os números de Stirling do primeiro tipo, juntamente com as relações de Girard.

Proposição 3.3.3. *Para todo $n > 1$,* $\left[\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right)$.

Demonstração. É claro que para $n = 2$ a identidade é válida, pois $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$.

Suponha que $n > 2$ e $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

Segue do Teorema 3.2.1

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n-1)+2n}{2} \\
&= \frac{n(n-1+2)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

3.4 Às relações de Girard e os números de Stirling do primeiro tipo

Agora, motivados por [14], vamos demostrar o teorema 3.4.1. por meio das relações de Girard, caso geral. Vamos utilizar 3.1 e 3.2, juntamente com as relações de Girard descritas em 2.1 para as raízes $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2, ..., x_n = -n+1$ e o polinômio $p_n(x)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= (x-0)(x-(-1))...(x-(-n+1)) \\
&= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + ... + (-1)^k \sigma_k x^{n-k} + ... + (-1)^n \sigma_n, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

sendo que o coeficiente de x^{n-k} em (3.6) é $(-1)^{n-(n-k)}\sigma_{n-(n-k)} = (-1)^k \sigma_k$, para $1 \leq k \leq n$.

Por outro lado,

$$p_n(x) = x^n + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} + ... + \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} x^{n-k} + ... + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x.$$

Assim, concluímos:

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = (-1)^k \sigma_k, \text{ para } 1 \leq k \leq n. \tag{3.7}$$

Proposição 3.4.1. *Para todo* $n \geq 1$, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

Demonstração. É claro que para $n = 1$ a identidade é válido e suponha $n > 1$ e, segue de 2.1, para $x_1 = 0$, $x_2 = -1, ..., x_n = -n+1$, que:

$$\begin{aligned} \sigma_1(0, -1, -2, ..., -(n-1)) &= 0 + (-1) + (-2) + ... + (-n+1) \\ &= -(1 + 2 + ... + (n-1)) = -\frac{(n-1) \cdot n}{2} \\ &= -\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Segue de 3.7 que

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = (-1)\sigma_1 = (-1)(-1) \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 3.4.1. *Sejam* n *e* k *naturais tais que* $n \geq k \geq 1$. *Então*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \sum_{\substack{0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \\ i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, ..., n-1\}}} i_1 \cdot i_2 \cdot ... \cdot i_k. \tag{3.9}$$

Demonstração. Segue de 2.1, para $x_1 = 0, ..., x_n = -n+1$ que

$$\begin{aligned}
\sigma_k(0,-1,-2,...,-n+1) &= \sum_{0 \le i_1 < ... < i_k} x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_k} \\
&= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < ... < i_k \\ i_1,...,i_k \in \{0,1,...,n-1\}}} (-i_1) \cdot (-i_2) \cdot ... \cdot (-i_k) \\
&= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < ... < i_k \\ i_1,...,i_k \in \{0,1,...,(n-1)\}}} (-1)^k \cdot i_1 \cdot ... \cdot i_k \\
&= (-1)^k \sum_{\substack{i_1 < i_2 < ... < i_k \\ i_1,...,i_k \in \{1,...,n-1\}}} i_1 \cdot ... \cdot i_k. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Segue de 3.7 e 3.10 que:

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = (-1)^k \cdot (-1)^k \cdot \sum_{\substack{i_1 < ... < i_k \\ i_1,...,i_k \in \{1,...,n-1\}}} i_1 \cdot ... \cdot i_k,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \sum_{\substack{i_1 < ... < i_k \\ i_1,...,i_k \in \{1,...,n-1\}}} i_1 \cdot ... \cdot i_k.$$

■

O Teorema 3.4.1 permite estabelecer uma interpretação combinatória para os números de Stirling do primeiro tipo, e segue diretamente desse resultado o corolário a seguir.

Corolário 3.4.1. *Sejam n e k naturais tais que $n \ge k > 1$. Então,*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$$

é igual a soma de todos os produtos com k fatores distintos, cujos fatores são elementos de {1,2,...,n-1}.

Exemplo 3.4.1. *Para todo natural $n > 1$:*

1) *Temos, para $n > 0$ que* $\left[\begin{array}{c} n \\ n-n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right] = 0$. *Por outro lado,* $\left[\begin{array}{c} n \\ n-n \end{array} \right]$ *é a soma de todos os produtos com n fatores distintos, cujos fatores são elementos de* $\{1, 2, ..., n-1\} = 0$.

2) *Temos que* $\left[\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right)$. *Por outro lado,* $\left[\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right]$ *é a soma de todos os produtos com 1 fator, cujo fator é o elemento de* $\{1, 2, ..., n-1\} = 1 + 2 + ... + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} = \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right)$.

Exemplo 3.4.2. 1) *Temos que* $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5-4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right] = 24$. *Por outro lado,* $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5-4 \end{array} \right]$ *é a soma de todos os produtos de 4 fatores distintos, cujos fatores são elementos de* $\{1, 2, 3, 4\}$.

Observe que:

$$\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5-4 \end{array} \right] = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

2) *Temos que* $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5-3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right] = 50$. *Por outro lado,* $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5-3 \end{array} \right]$ *é a soma de todos os produtos formados por 3 fatores distintos, cujos fatores são elementos de* $\{1, 2, 3, 4\}$.

Observe que:

$$\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5-3 \end{array} \right] = 1 \times 2 \times 3 \; + \; 1 \times 2 \times 4 \; + \; 1 \times 3 \times 4 \; + \; 2 \times 3 \times 4 = 6 + 8 + 12 + 24 = 50.$$

Segue do Teorema 3.4.1. e da Proposição 3.2.3. a identidade que relaciona soma de produtos de dois inteiros positivos distintos $i_1, i_2 \in \{1, ..., n-1\}$ e o coeficiente binomial.

Corolário 3.4.2. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array} \right] = \frac{1}{4}(3n-1) \left(\begin{array}{c} n \\ 3 \end{array} \right) = \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ i_1, i_2 \in \{1, ..., n-1\}}}^{n} i_1 i_2.$$

Os corolários a seguir também são uma extensão do Teorema 3.4.1. e da Proposição 3.2.4., pois relaciona o coeficiente binomial e a soma de produtos de três inteiros positivos distintos i_1, i_2, i_3 pertencentes ao conjunto $\{1, 2, ..., n-1\}$.

Corolário 3.4.3. *Para todo $n \geq 3$,*

$$\sum_{\substack{i_1<i_2<i_3 \\ i_1,i_2,i_3 \in \{1,...,n-1\}}}^{n} i_1 i_2 i_3 = \left[\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array} \right] = \binom{n}{2}\binom{n}{4}.$$

Corolário 3.4.4. *Considere o natural n, tal que $n \geq 2$, então a soma de todos os produtos com 3 fatores distintos , cujos os fatores são os elementos de $\{1, 2, ..., n-1\}$ é igual a* $\binom{n}{2}\binom{n}{4}$.

Capítulo 4

Uma proposta para sala de aula

4.1 Introdução

Desde a antiguidade o homem já apresentava a necessidade de contar objetos, quantidade de animais, de frutos, entre outras coisas. Ao longo de seu desenvolvimento estes problemas foram se tornando cada vez mais complexos. Sendo assim, buscando facilitar esse processo foram surgindo vários métodos e estabelecendo diversas fórmulas que possibilitasse a contagem de modo mais prático e preciso, podendo ser empregados em diversas situações do nosso cotidiano. Dessa forma, deu-se origem a uma área da matemática voltada para o estudo e resolução de questões relacionadas à contagem, sendo denominada Análise Combinatória.

Deste modo, juntamente com o desenvolvimento da sociedade e os avanços tecnológicos

> [...] a análise combinatória vem tendo um crescimento muito grande nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração, ou seja, problemas de contagem tem crescido enormemente devido a teoria dos grafos, em análise de algoritmos dentre outros. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente como problemas de teoria dos grafos (problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores) e também problemas de matemática pura. (ALVES, 2015, p. 15-16).

Assim, em razão da importância da análise combinatória, seus conteúdos integram uma parte dos currículos do ensino fundamental e, mais amplamente, do ensino médio.

No entanto, apesar de essenciais, muitos alunos apresentam dificuldade no aprendizado e principalmente na resolução de problemas propostos que envolvem esta teoria.

4.2 Metodologia: Os elementos teóricos

A metodologia empregada foi a pesquisa bibliográfica, objetivando compreender tanto os aspectos didáticos, quanto a fundamentação teórica matemática, necessários para a elaboração e aplicação de uma aula abordando o conceito de número de Stirling do primeiro tipo explorando sua natureza algébrica por meio de funções polinomiais.

Contudo, após entendermos as fases da Engenharia Didática, que consiste em uma metodologia de pesquisa vinculada com uma metodologia de ensino, começamos a fazer uso desta para a elaboração de nossa sequência didática. Esta metodologia consiste em quatro etapas e, atualmente, a primeira, a análise preliminar, consiste em fazer uma investigação das turmas que vamos desenvolver o projeto, a fim de conhecer suas dificuldades e facilidades, bem como o nível do conhecimento do conteúdo que será passado nas aulas.

Outra característica dessa fase é compreender como os elementos matemáticos a serem explorados pelos alunos e, tendo em vista que os livros didáticos é o recurso didático mais empregado em sala de aula não apresenta o conteúdo de número de Stirling do primeiro tipo, o leitor poderá fazer um estudo dos capítulos anteriores desse trabalho, alem de [26]. É natural a contagem ser por meio de fórmulas ou exemplos de casos de enumeração de um conjunto com número de elementos viável para fazer essa contagem sem usar formulas, para mais detalhes teóricos e ver exemplos de outros raciocínios consulte [24]. Entretanto o leitor não irá ter um livro didático específico que trata somente os números de Stirling do primeiro tipo, mas deixamos nos capítulos anteriores um aporte teórico do tema e também deixamos indicados alguns alguns autores que exploram a natureza combinatória desse sequência. O interessante dessa sequência numérica é que ela é um caso geral do da permutação circular.

Voltando nossos olhares para a abordagem de pesquisa e investigação optamos por uma que apresentam em suas características singularidades e fases, tal metodologia em questão é a Engenharia Didática. Iremos usar essa teoria para elaborar um roteiro cujo eixo norteador é ensinar configurações discretas geradas geradas por uma sequência numérica que são os números de Stirling do primeiro tipo e, por apresentar uma diversidade de problemas de natureza combinatória para mais detalhes veja [26] e o conceito de função geradora definido em [24] é fundamental para desenvolver esse trabalho, pois o intuito é explorar a natureza algébrica dos problemas confrontando com a combinatória. Esta metodologia, a Engenharia Didática, idealizada por Artigue, surgiu em decorrência de uma vertente conhecida como Didática da Matemática. Conforme, Douady (1985) define a Didática da Matemática como a área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico e na graduação, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática e ainda, segundo a autora, a Didática da Matemática, não se reduz a pesquisar uma boa maneira ou modelo de ensinar uma determinada noção ou conceito particular.

Com relação ao conteúdo matemático proposto, temos que a Análise Combinatória ocupa-se em resolver problemas de natureza discreta e muitas vezes apenas aplicar uma fórmula não é suficiente, pois é exigido um pouco mais de raciocínio combinatório, dessa forma podemos explorar outros tipos de raciocínios para resolver um problema de contagem como, por exemplo, o raciocínio algébrico introduzindo um conceito novo na Análise Combinatória do Ensino Médio que é função geradora, dando um leque de possibilidades para um mesmo problema. Segundo BRASIL (1999) é importante a compreensão de problemas combinatórios com intuito de: desenvolver:

> [...] as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e tornaram-se bastante complexas.

Diante disso, a partir dos elementos matemáticos analisados: função geradora, que em certos contextos podem ser vistas como funções polinomiais e a análise combinatória, mais especificamente os números de Stirling do primeiro tipo. A Engenharia Didática será o referencial teórico metodológico, deixando claro nessa investigação os movimentos e fases inerentes dessa sistematização, além de um conjunto de aporte teóricos sobre função geradora, análise combinatória com as técnicas de contagem usuais e o conceito de polinômios com suas propriedades. Com esses conceitos em mãos descrevermos uma conexão entre eles e elaboramos um roteiro com uma lista de problemas de contagem que envolve números de Stirling do primeiro do tipo, que é um caso geral da permutação circular e possui natureza combinatória que casa muito bem com a algébrica então partirmos para nova fase que é elaborar um roteiro embasado na Engenharia Didática para que possa ser aplicado em alguma escola, enfatizando que o suporte é a Engenharia Didática sabendo que a mesma se caracteriza a propor

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das

> trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (DOUADY,1993 apud MACHADO, 2002, p. 198).

Segundo [8] (p. 1), ao observar a Engenharia Didática expressa que a mesma possui em seu quadro didático uma dupla funcionalidade " [...]como metodologia de pesquisa e como de produção de situações de ensino e aprendizagem, [...]". Essa mesma visão encontramos nos ensinamentos de Douady:

> "[. . .] el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas eneltiempo de forma coherente por unprofesor-ingeniero para efectuarun proyecto de aprendizaje de uncontenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de losintercambios entre elprofesor y losalumnos, elproyecto evoluciona bajo lasreacciones de losalumnosenfunción de las decisiones y eleccionesdelprofesor. Así, laingeniería didáctica es, al mismotiempo, unproducto, resultante de unanálisis a priori, y unproceso, resultante de una adaptación de lapuesta em funcionamiento de un producto acorde conlas condiciones dinámicas de una clase." (Douady, 1996, p. 241).

Conforme [3] a metodologia denominada Engenharia Didática compõe-se em quatro fases investigativas: a primeira fase são as análises preliminares; a segunda fase são as análises a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; a terceira fase é a experimentação e por fim, a quarta fase baseada na análise a posteriori e validação da experiência. Vale ressaltar que as quatro fases não ocorrem de maneira a ser engessada e sequencial e é preciso, em alguns momentos, da antevisão, da associação e a aplicação de elementos característicos destas quatro fases, como aponta[20]. Uma pesquisa que segue os princípios da Engenharia Didática perpassa pela fase das análises preliminares é a fase que vai embasar a engenharia didática; É nesta fase que é discutido o quadro teórico, os estudos pertinentes ao tema discutido onde se busca o conhecimento do que já foi feito anteriormente.

Seguindo os princípio da Engenharia Didática segue um plano de aula para introduzir o conceito de número de Stirling o primeiro tipo explorando sua natureza combinatória, e esse plano foi embasados em [5], [6], [7], [20] e [24] com o intuito de explorar os diversos pensamentos matemáticos que podem surgir em análise combinatória com suas técnicas de contagem. De acordo com [21] em configurações discretas que a ordem dos objetos em questão não importam pensamentos separados em classes como: algébrico,geométrico e combinatório (usar a fórmula do livro didático, fazer a listagem das possibilidades ou usar diagrama de árvores) aparecerem na resolução dos problemas propostos. Dessa forma esse plano de aula proposto tem por objetivo analisar as soluções dos alunos para alguns problemas onde os números de Stirling do primeiro tipo também podem ser usado, identificando soluções algébricas para problemas que pode ser modelado como um problema de contagem, além de outros soluções que as vezes nem esperamos.

4.3 Plano de aula para introduzir números de Stirling do primeiro tipo

1) Nível de escolarização/Escola: 3º ano do ENSINO MÉDIO.

2) Conteúdo: produto de polinômios, igualdade de polinômios e permutação circular.

3) Preferencia de conteúdo para introduzir os números de Stirling do primeiro tipo: permutação circular, nesse caso o professor já trabalhou anteriormente permutação circular.

4) Duração da Aula: 3 aulas de 50 minutos.

5) Objetivos:

- Explorar problemas combinatórios de diferentes maneiras e apresentar a viabilidade de resolver de forma algébrica.
- Confrontar as soluções obtidas, tais como algébrica, combinatória, listar todas as possibilidades e fazer o diagrama de árvores.

4) Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, combinatória, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5) Materiais necessários: Slides, listas de problemas, quadro e giz.

6) Resumo da aula: Serão formados grupos com 3 alunos e, em seguida apresentado uma classe de polinômios formados por n fatores e os alunos irão expandir esses polinômios e circular seus coeficientes. Apesar de trabalhoso o professor pode trabalhar com 12 desses polinômios. Em seguida, montar uma tabela variando o n de 1 até

12 e nas colunas colocar os coeficientes e ordem crescente de cada. O próximo passo é apresentar os problemas combinatórios que envolve números de Stirling do primeiro tipo, como por exemplo, de quantas maneiras podemos distribuir n pessoas e k mesas circulares idênticas sem que nenhuma mesa fique vazia. Escolher valores para o n e o k pequenos que constam na tabela sugerir para eles listarem as possibilidades e contarem quantas, depois consultar a tabela se aparece alguma regularidade. Depois de diversas discussões caso não alguém não note a regularidade o professor poderá revelar esse fato matemático. Observar se algum aluno percebe a permutação circular olhando a segunda linha quando k=1.

4.4 Os problemas para o plano de aula

As escolhas dos problemas que irão nortear o andamento da turma é fundamental, entretanto alguns percalços podem ocorrer e o professor com sua experiência pode solicitar problemas auxiliares durante a aula de acordo com o questionamento dos alunos. Neste caso, estamos apenas sugerindo um plano de aula tendo a Engenharia didática com base teórica metodológica, entretanto o professor pode usar essa ideia por meio de outras metodologias, bem como o método tradicional, sendo o ideal deixar o aluno tentar responder primeiro as questões.

Problema 1: De quantas maneiras quatro pessoas podem sentar-se em volta de três mesas circulares idênticas, sem que nenhuma mesa fique vazia?

Objetivos do Problema 1: Refletir em como encontrar a solução com conceitos já conhecidos.

Justificativa do Problema 1: Introduzir a solução utilizando números de Stirling do primeiro tipo.

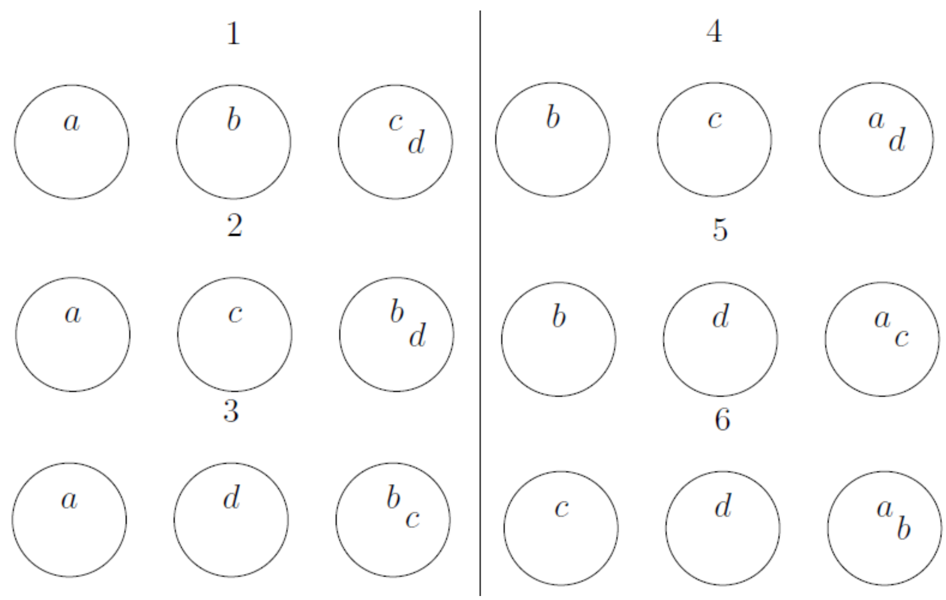
Estratégia para a Resolução: Esse problema pode ser resolvido de três diferentes maneiras. Espera-se que os estudantes utilizem uma das duas primeiras a seguir e pretende-se usar este exemplo para mostrar a funcionalidade da terceira em relação as outras duas.

1ª) Através de alguns conceitos da Análise Combinatória do Ensino Médio e raciocínio lógico. Nesse caso sabemos que nenhuma mesa ficará vazia, logo temos pelo menos uma pessoa em cada e assim sobra apenas uma para permutar entre elas.

   Como as mesas são idênticas, quem sentará em cada uma é irrelevante, do mesmo modo, como as mesas são circulares, na mesa que tiver dois não importa a ordem desses dois, apenas quem são. Sendo assim, resumi-se em um problema de encontrar quantas duplas não ordenadas podemos formar a partir de 4 pessoas, ou seja, combinação de 4, dois a dois:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

2ª) Árvore de possibilidades ou diagrama semelhante;



Pelo diagrama ficam evidente os 6 casos possíveis.

3ª) Utilizando alguma das expressões encontradas no decorrer deste trabalho, no caso a expressão dada por: Proposição 3.3.3. Um caso particular de permutação circular onde temos n pessoas para sentarem-se em $k = n - 1$ mesas circulares idênticas sem que nenhuma delas fique vazia.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

Nesse caso, $n = 4$ e $k = 3$, assim:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \binom{4}{2} = 6.$$

Problema 2: Em um bar há 6 mesas circulares idênticas. Se existem sete pessoas no bar no momento e se deseja que cada mesa tenha pelo menos uma pessoa, de quantas maneiras podemos organizar essas pessoas?

Objetivos do Problema 2: Resolver o problema utilizando a nova expressão dada pelo professor.

Justificativa do Problema 2: Verificar se os alunos entenderam com se utiliza a expressão da Proposição 3.3.3 e a relação entre n e k para fins práticos nos números de Stirling.

Estratégia para a Resolução: Esse problema poderia ser resolvido dos mesmos modos que o anterior, mas espera-se (e pede-se) que os estudantes usem o 3º método, assim,

$$\left[\begin{array}{c} 7 \\ 7-1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array}\right) = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Antes de dar sequência, diga que essa fórmula trabalhada até o momento só serve para o caso do número de pessoas exceder em apenas um o número de mesas, e que temos também as seguintes fórmulas que podem ser utilizadas nos casos de 2 e 3 pessoas a mais que mesas, respectivamente[1].

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right] = \frac{1}{4}(3n-1)\left(\begin{array}{c} n \\ 3 \end{array}\right) \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array}\right] = \binom{n}{2}\binom{n}{4}.$$

Problema 3: O que aconteceria se retirássemos uma das mesas no problema anterior? Qual o número de formas diferentes de se sentar agora?

Objetivos do Problema 3: Descobrir qual expressão das apresentadas utilizar e resolver o problema através dela.

Justificativa do Problema 3: Verificar se os alunos escolheram expressão da Proposição 3.3.2 e entenderam como é utilizada.

Estratégia para a Resolução: Esse problema poderia, em teoria, ser resolvido dos mesmos modos que o primeiro, no entanto envolveria situações muito complexas no primeiro tipo de solução e muitos desenhos no segundo, portanto espera-se (e pede-se) que os estudantes escolham (com argumentos lógicos) e usem uma das novas expressão dadas, o que se encaixaria no 3º método, assim,

$$\left[\begin{array}{c} 7 \\ 7-2 \end{array}\right] = \frac{1}{4}(3 \cdot 7 - 1)\left(\begin{array}{c} 7 \\ 3 \end{array}\right) = \frac{20}{4} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 175.$$

Comprovando que se fosse feito pelo diagrama, seria um trabalho imenso (175 desenhos!).

[1] As expressões foram demonstradas nesse trabalho nas Proposições 3.3.2 e 3.2.1, respectivamente, mas não se aconselha passar qualquer demonstração para os estudantes, já que isso foge do nosso objetivo.

Problema 4: E se, depois de retirada a mesa do item anterior, chegasse mais uma pessoa, qual o total de maneiras distintas delas se sentarem agora?

Objetivos do Problema 4: Descobrir qual expressão das apresentadas utilizar e resolver o problema através dela.

Justificativa do Problema 4: Verificar se os alunos escolheram expressão da Proposição 3.3.1 e entenderam como é utilizada.

Estratégia para a Resolução: Esse problema poderia, em teoria, ser resolvido dos mesmos modos que o primeiro, no entanto envolveria situações muito complexas no primeiro tipo de solução e muitos desenhos no segundo, portanto espera-se (e pede-se) que os estudantes escolham (com argumentos lógicos) e usem uma das novas expressão dadas, o que se encaixaria no 3º método, assim,

$$\left[\begin{matrix} 8 \\ 8-3 \end{matrix}\right] = \binom{8}{2}\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 1960.$$

Comprovando que se fosse feito pelo diagrama, seria um trabalho imenso (1960 desenhos!).

Dependendo da turma, podem haver dúvidas sobre como ou quando utilizar cada fórmula, não apresente a resposta diretamente! Tente chamar a atenção dos alunos para a diferença entre os dois valores no número de Stirling em cada igualdade é a diferença entre o número de mesas e pessoas em cada problema, à partir daí deixe por conta deles e apenas avalie seu desenvolvimento de acordo com os critérios que achar mais importante em sua turma naquele momento (participação, desenvolvimento, resposta final, etc).

Conclusão

Durante o trabalho foram feitas recapitulações (capítulos 1 e 2) de vários temas do Ensino Médio e Superior com o intuito de chegar no clímax com o leitor preparado para ele, a apresentação dos números de Stirling do primeiro tipo (capítulo 3) e uma proposta de aula factível (capítulo 4).

De modo geral, as demonstrações e escritas matemáticas foram feitas do modo mais claro possível, e todo seu desenvolvimento foi justificado através da utilização posterior, seja para demonstrações futuras ou exemplos, mesmo que apenas no capítulo final.

O Capítulo 4 não teve demonstrações, mas foi focado na parte pedagógica, através da Engenharia Didática, uma dinâmica norteadora para elaboração e análise de situações didáticas que possuam objetivo de criar um cenário de aprendizagem significativa em sala de aula. Acreditamos ter chego num resultado satisfatório com uma proposta de plano de aula que pode (e deve) ser adaptada para a realidade de cada professor, mas que é uma possível ferramenta para mostrar aos estudantes que muitas vezes temos diversas maneiras de resolver um problema e ainda trabalhar diversos conceitos com eles, como: combinação, polinômios, operações com números inteiros e frações.

Referências Bibliográficas

[1] ABREU, Maria de Souza Machado. **Equações Polinomiais**. 2005. 20 f. Monografia de Especialização - UFMG, Belo Horizonte. 2005

[2] ALVES, Vanderli de Araújo. **Sobre o princípio fundamental da contagem**. 2015. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

[3] ARTIGUE, Michèle. **Ingénierie didactique**. Recherchesen Didactiquedes Mathématiques, vol. 9,n°3, pp. 281-307. La PenséeSauvage, 1990.

[4] BOYER, Carl Benjamin **História da Matemática**: tradução: Elza F. Gomide. 1 Ed. Edgard Blücher Ltda, 1974.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

[6] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. Brasília: Secretaria do Ensino Médio, 1999.

[7] BROUSSEAU, Guy. **Problèmes en Didactique dês decimaux**. Recherchesen Didactiquedes Mathématiques, v. 2,n. 3, pp. 37- 127 . 1981.

[8] CAMPOS, Edison De Faria. **Ingeniería Didáctica**. Cuadernos de investigación y Formaciónen Educación Matemática. 2006, Año1, Número 2.

[9] DOUADY, Régine. **Ingenieríadidáctica y evolución de larelaciónconel saber enlas matemáticas de collège-seconde**. EnBarbin, E., Douady, R. (Eds.). Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas. Francia. Topiqueséditions. Publicacióndel I.R.E.M. 1996.

[10] GONÇALVES, Adilsol. **Introdução à Álgebra**. 6 ed. Brasil: IMPA, 2017.

[11] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 3. ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2005.

[12] HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra**. Coleção Matemática Universitária, Impa, 1993.

[13] HEFEZ, A. VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[14] KOVALINA John. **A Unified Interpretation of the Binomial Coefficients, the Stirling Numbers, and the Gaussian Coefficient**.The American Mathematical Monthly , Dec., 2000, Vol. 107, No. 10, pp. 901-910.

[15] MANSOUR T, A. SCHORK, M. **Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers**. New York: Chapman and Hall/CRC, 2016.

[16] MENDES, Marcelo. **Polos Olímpicos de Treinamento: Curso de Álgebra - Nível 2. Aula 19**. 2012. Disponível em: https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/gw8dmoysc5k4o.pdf. Acesso em 15 de dezembro de 2021.

[17] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar**: introdução a análise funcional. 2 ed. Rio de Janeiro, SNM - 2012.

[18] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar**: polinômios. v. 6, 2 ed. Rio de Janeiro, SNM - 2012.

[19] PINHEIRO, G. F.; CRAVEIRO, I. M.; DA SILVA, N. A. **Números de Stirling do primeiro tipo**. Professor de Matemática Online. Volume 8, Número 5, p. 590-605, 2020.

[20] POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo:[sn], 2013.

[21] REIS, E.S. PINHEIRO, G.F. CRAVEIRO, I.C. TEIXEIRA, M.A.G. **Uma experiência com polinômios geradores no ensino médio**. Internacional Journal of Development Research Volume: 10, Article ID: 18881, 2021.

[22] ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012. Ebook formato mobi disponível em: https://www.pdfdrive.com/hist%C3%B3ria-da-matem%C3%A1tica-uma-vis%C3%A3o-cr%C3%ADtica-desfazendo-mitos-e-lendas-d199612029.html. Acesso em: 13 de março de 2022.

[23] SALVADO, C. D.; DE MATTOS GRISI, Rafael. **Teorema Fundamental da Álgebra**: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino

Médio. Tese de Doutorado. IMPA, 2016. Disponível em: https://impa. br/wp-content/uploads/2016/12/TCC_Claudio_Salvado.pdf. Acesso em: 20 de dezembro 2021.

[24] SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Análise Combinatória**. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

[25] SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. Coleção Matemática Universitária, Impa 2003.

[26] SILVA, Naiguiel Alventino da. **Os Números de Stirling**. 2018. 84 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, 2018.

[27] SOUZA, Francisca Alves de. **O ensino de polinômios utilizando a história da matemática como recurso didático**. 2016. 95 f. Dissertação de Mestrado - UFPE, Recife. 2016.

[28] VALE, Alberton Fagno Albino do. **As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau**. 2013. 76 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, RN. 2013.