

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Investigações matemáticas como metodologia de ensino para
uma aprendizagem significativa**

Breno Puertas de Freitas e Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Breno Puertas de Freitas e Silva

Investigações matemáticas como metodologia de ensino para uma aprendizagem significativa

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*.

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora Profa Dra. Edna Maura Zuffi

**USP – São Carlos
Abril 2022**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi e
Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a),

SS586i Silva, Breno Puertas de Freitas e
Investigações matemáticas como metodologia de
ensino para uma aprendizagem significativa / Breno
Puertas de Freitas e Silva; orientador Edna Maura
Zuffi. -- São Carlos, 2022.
90 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. investigação matemática. 2. Vygotsky. 3.
cálculo mental. 4. áreas e perímetros. I. Zuffi,
Edna Maura, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Breno Puertas de Freitas e Silva

**Mathematical investigation as a teaching methodology for
meaningful learning**

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION.*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Edna Maura Zuffi

USP – São Carlos

April 2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter autorizado a realização deste projeto e pelo amparo em momentos de dificuldade.

Um agradecimento especial ao meu pai (in memoriam), que sempre foi exemplo de esforço, determinação e coragem e outro especial à minha mãe, pela atenção dedicada ao longo do curso.

Agradeço de coração à minha orientadora, Professora Edna, pelo esforço, dedicação, apoio e sabedoria com que conduziu esta pesquisa.

Dedico um agradecimento especial aos professores do programa Luiz Augusto Ladeira, Hermano de Souza Ribeiro, Miguel Vinícius Santini Frasson, Wagner Vieira Leite Nunes, Regilene Delazari dos Santos Oliveira, Paulo Leandro Dattori da Silva.

Também agradeço especialmente a todos os colegas da turma, pelas horas e horas que estudamos juntos.

Envio um grande agradecimento aos professores da banca examinadora

Não poderia esquecer de agradecer ao professor de Matemática, Idio, que tive no cursinho, pois foi ele que me fez ter vontade de lecionar essa disciplina.

Para finalizar, gostaria de agradecer à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pelo oferecimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

“Matemática é a ciência de como não estar errado em relação às coisas. Suas técnicas e hábitos foram moldados ao longo de séculos de trabalho árduo e muita argumentação.”
(Jordan Ellenberg)

RESUMO

SILVA, Breno Puertas de Freitas e. **Investigação matemática como metodologia de ensino para uma aprendizagem significativa**. 2022. 90p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Este trabalho tem o objetivo de fornecer algumas bases para que os alunos do Ensino Básico tenham mais facilidade para entender Matemática, trabalhando alguns temas essenciais para o nível fundamental, que muitas vezes são negligenciados, ou pouco desenvolvidos, nessa fase da formação escolar. Para isto, criou-se uma sequência de ensino sobre cálculo mental e outra sobre áreas e perímetros. A metodologia de ensino-aprendizagem proposta é a investigação matemática, associada a atividades exploratórias, e é embasada nas teorias de desenvolvimento de Vygotsky. Espera-se que tal sequência promova um aprimoramento nos modos de raciocínio dos alunos, para resolver as atividades matemáticas com mais velocidade e precisão, além de maior autonomia intelectual para escolher o melhor modo de chegar aos resultados.

Palavras-chave: investigação matemática, Vygotsky, cálculo mental, áreas e perímetros.

ABSTRACT

SILVA, Breno Puertas de Freitas e. **Mathematical investigation as a teaching methodology for meaningful learning**. 2022. 90p. Dissertation (Mestrado em Ciências - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This work aims to provide some support to students' better understanding of Mathematics for Basic Education, working on essential themes for middle school, which are often neglected or poorly developed at this stage of education. For this, a teaching sequence on mental calculus, and another on areas and perimeters were created. The proposed teaching-learning methodology is mathematical investigation, associated with exploratory activities, and it is based on Vygotsky's theories of development. It is expected that such a sequence promotes an improvement in the students' ways of reasoning, to solve mathematical activities with more speed and precision, as well as greater intellectual autonomy to choose the best way to reach the results.

Keywords: mathematical investigation, Vygotsky, mental calculus, areas and perimeters.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Divisão em partes iguais.....	53
Figura 2 - Jogo educativo.....	55
Figura 3 - Cálculo de perímetro.....	56
Figura 4 - Proporção, área e perímetro.....	57
Figura 5 - Proporção e área.....	58
Figura 6 - Planta baixa.....	60
Figura 7 - Praça quadrada.....	61
Figura 8 - Malha quadriculada.....	62
Figura 9 - Perímetro e triângulo.....	65
Figura 10 - Retângulo e perímetro.....	66
Figura 11 – Perímetro e polígonos.....	67

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	15
1. Aspectos Teóricos.....	19
1.1 A teoria do desenvolvimento de Lev Vygotsky.....	19
1.2 Investigações Matemáticas.....	28
1.3 Sobre o cálculo mental e algumas investigações em Geometria.....	33
2. Sequência Didática: uma proposta de investigação com o cálculo mental e Geometria para o 6º ano do Ensino Fundamental.....	43
2.1 Os conteúdos escolhidos na BNCC e no Currículo Paulista.....	43
2.2. Nossa proposta didática para os cálculos mentais:.....	45
2.3 Nossa proposta didática para o estudo de perímetros, áreas e proporções:..	56
3. Análise do que se espera com as atividades investigativas.....	71
3.1 Habilidades da BNCC que se espera sejam alcançadas.....	72
3.2 Estudos teóricos sobre os processos de desenvolvimento e as sequências propostas.....	73
3.3 As investigações matemáticas como metodologia e as sequências propostas	78
3.4 Considerações finais.....	79
REFERÊNCIAS.....	81
ANEXOS.....	85

INTRODUÇÃO

Desde a infância, admirava e respeitava os professores, tanto que sempre procurei não conversar ou me dispersar durante as aulas. Quando iniciei o Ensino Médio, a profissão docente me chamava a atenção e, de vez em quando, pedia a meus professores uma opinião sobre os trabalhos que exerciam, mas não pensava em segui-la, a princípio.

Ao final desse ciclo escolar, escolhi cursar engenharia de produção e, como não obtive aprovação no vestibular, fui estudar em um curso preparatório para ingressar em universidades. Nesta escola, havia um excelente professor de Matemática, que explicava tudo com clareza e segurança. No meu ponto de vista, suas aulas eram um show e foi ele que, sem querer, fez-me escolher esta carreira.

Quando algumas aulas finalizavam, conversávamos sobre o trabalho de professor e de matemático, e ele sempre mostrava atenção e interesse em atender-me. No período em que prestei os concursos vestibulares, agora para o curso de Matemática, mantivemos o contato através de correio eletrônico. Pouco tempo depois da minha aprovação, perdi o contato com ele, mas sempre terei gratidão pelas aulas e conversas.

Ao longo da graduação, já no curso de Matemática, optei por me formar na licenciatura, pois foi a carreira que escolhi, e no bacharelado também, porque gosto dessa área e acredito que, aprofundando os meus estudos, poderei transmitir mais segurança aos alunos.

Durante a minha licenciatura, cumpri um estágio obrigatório numa escola particular, outros em instituições públicas e comecei a trabalhar numa escola que usava o método Kumon, com o objetivo de conhecer uma metodologia de ensino que se mostrava eficiente para o aprendizado de Matemática.

Após o término desses estágios, continuei nessa escola Kumon e comecei a ministrar aulas particulares. Como o estudo nessa escola é individualizado e nas aulas particulares atendo um aluno por vez, tenho mais facilidade de perceber dúvidas, erros e falhas mais frequentes, o que me serve de experiência para trabalhos futuros como docente, mas, por outro lado, carece de um aprofundamento em questões da prática para o ensino em uma sala de aula com muitos alunos e com diversidade de aptidões, habilidades e competências.

Em junho de 2019, um amigo me perguntou se eu gostaria de lecionar em um

curso pré-vestibular do tipo popular, onde o trabalho era voluntário e sustentado por doações feitas por anônimos e pelo qual, receberíamos apenas um certificado de trabalho. Esse curso foi criado numa região pouco privilegiada da cidade e o material didático-pedagógico utilizado era escolhido ou elaborado pelo próprio professor, as aulas eram ministradas com lousa, pincel e os alunos ficavam sentados em carteiras. Toda a rotina de classe, preparação de aulas, criação do calendário letivo, reuniões de professores era, e continua sendo, análoga à maioria das demais escolas do Brasil.

Como muitos alunos desse curso popular não tiveram uma base sólida em Matemática, no primeiro dia de aula, sempre procurei transmitir técnicas de estudo que aprendi, utilizei em mim mesmo e percebi que são eficientes para o aprendizado, ajudando-os a estudar, entender e aprender melhor. As aulas eram preparadas, considerando as dúvidas, erros e falhas mais frequentes dos alunos, que percebi ao longo do tempo, mas ainda de maneira expositiva e mais tradicional e, no início do trabalho aqui considerado, ainda me sentia inseguro para aplicar metodologias diferenciadas.

Tendo isso como um motivo, optei por cursar o Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), pois o professor nunca para de aprender. A opção por estudar o projeto proposto surgiu para conhecer mais um modo de ensinar Matemática e a possibilidade de colocá-lo em prática para a realidade escolar com turmas grandes, que é o que encontramos na maioria das escolas no Brasil. Com esta experiência, agregada às anteriores que tive como professor, terei ferramentas para analisar vários métodos e descobrir quais são os mais eficientes para que o aluno aprenda, dentro de cada contexto.

Paralelamente a isto, e com o passar dos anos, percebi, através da divulgação ampla na imprensa brasileira, o baixo rendimento dos alunos do Ensino Básico, em Matemática, através de exames como ENEM e PISA. Dados divulgados sobre esses exames, mostram que grande parte dos estudantes brasileiros não aprendem várias habilidades necessárias ao longo de seu período de estudos na educação básica.

Muitos professores percebem, e eu também tive esta percepção, que durante as aulas, a maioria dos estudantes demonstram apatia, desinteresse, insegurança, dificuldade de entender os conteúdos ensinados e baixo nível de concentração, entre outros problemas.

Assim, este projeto tem como objetivo ajudar a resolver, ou minimizar, alguns destes problemas, através do ensino de cálculo mental no 6º ano do Ensino Fundamental, pois alguns dos raciocínios que ele estimula, fornece as bases para que o aluno aprenda Matemática, as quais serão detalhadas ao longo do texto.

O embasamento teórico utilizado neste trabalho provém de algumas ideias de Vygotsky (1995) sobre o desenvolvimento humano, o qual será explicado ao longo do texto, das propostas de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), sobre as investigações matemáticas como uma metodologia de ensino para essa disciplina escolar, além de leituras que fundamentam argumentos sobre a importância e os benefícios do cálculo mental e das investigações para a aprendizagem em geometria.

Na seção 1, será tratado sobre o quadro teórico deste trabalho, utilizando alguns conceitos de Vygotsky sobre as ideias de desenvolvimento real e potencial, as quais são utilizadas para definir o conceito de *Zona de Desenvolvimento Proximal* (ZDP), para embasar as escolhas sobre os conteúdos matemáticos e formas de abordagem dos mesmos, neste trabalho. Na sequência, alguns artigos serão apresentados para justificar a importância de se ensinar cálculo mental aos estudantes do Ensino Fundamental e, em seguida, sobre o método de ensino chamado *Investigação Matemática*, que foi o escolhido para criar a sequência didática aqui proposta.

Na seção 2, serão apresentadas as habilidades contidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Currículo do Estado de São Paulo, alguns exercícios que inspiraram a criação desta proposta e a proposta didática em si, pautada em atividades exploratório-investigativas, para o ensino e a aprendizagem de cálculos mentais com números naturais, de proporções, áreas e perímetros.

Na seção 3, será realizada uma breve análise do que se espera com as investigações aqui propostas e organizadas em uma sequência de ensino, relembando os conceitos principais que foram abordados ao longo do texto e o que se espera que seja alcançado em termos de aprendizagem dos alunos, bem como as considerações finais do trabalho.

1. Aspectos Teóricos

Com as percepções que os professores têm durante as aulas em mente, as quais foram descritas na introdução deste trabalho, e com o desejo de contribuir com uma solução para resolver alguns dos problemas de aprendizagem em Matemática citados, estudamos algumas ideias de Vygotsky sobre o desenvolvimento humano, uma proposta de uso das investigações matemáticas como metodologia de ensino e alguns artigos sobre cálculo mental e o ensino de Geometria. Com isso, buscamos compor um repertório teórico que nos fornecesse as bases para propor uma sequência de ensino de conteúdos dessa disciplina, que julgamos propiciar maior possibilidade de uma aprendizagem significativa dos alunos da Educação Básica, nessa disciplina.

1.1 A teoria do desenvolvimento de Lev Vygotsky

Segundo Oliveira (1995), Lev Semenovitch Vygotsky foi um teórico soviético que nasceu em 17 de novembro de 1896, na cidade de Orsha, próxima à capital de Bielorrússia, chamada Mensk, na extinta União Soviética (URSS), e morreu em 11 de junho de 1934¹, vivendo numa situação social, política e científica completamente diversa da atual. As ideias desse pensador influenciam, de um modo crescente, as áreas da psicologia e da educação. Ele viveu sua fase adulta na Rússia pós-Revolução e esse ambiente social e histórico contribuiu para a sua atividade intelectual dedicada, em sua tentativa de reunir tanto os modos de funcionamentos cerebrais implícitos ao trabalho da mente, como o desenvolvimento do indivíduo e do ser humano. Esse enfoque teve como consequência uma abordagem qualitativa, interdisciplinar e guiada para os processos de desenvolvimento humano.

O trabalho de Vygotsky deixou de ser ignorado no mundo ocidental, a partir de 1962, quando seu livro “Pensamento e linguagem” foi publicado pela primeira vez nos Estados Unidos. Alguns artigos dele foram publicados em inglês anteriormente, mas suas ideias não estavam sendo espalhadas fora da União Soviética, por causa de uma situação de isolamento gerada por fronteiras políticas, culturais e linguísticas em que a URSS estava situada em relação aos centros de produção científica europeus e norte-americanos. Somado a isto, entre 1936 e 1956,

¹ https://pt.wikipedia.org/wiki/Lev_Vygotsky, acessado em 20/05/2020.

aproximadamente, a forte censura do regime stalinista suspendeu a publicação de suas obras e de muitos outros autores.

Na maior parte de sua vida, viveu com a família, que era judia, em Gomel, também localizada na Bielorrússia, e que era considerada como muito culta e tinha uma situação econômica bastante confortável.

Pelo fato de crescer num local de muita estimulação intelectual, Vygotsky interessou-se pelo estudo de muitos assuntos, lendo obras de literatura, poesia e teatro, atividade à qual dedicou-se durante toda a vida. A maior parte da sua educação formal ocorreu em casa por meio de tutores particulares. Quando tinha 15 anos, ingressou num colégio privado, concluindo o curso secundário em 1913. Entrou na Universidade de Moscou, cursando Direito e formou-se em 1917, aos 21 anos. Em paralelo com a carreira universitária principal, frequentou cursos de história e filosofia na Universidade Popular de Shanyavskii. Mesmo não tendo recebido título acadêmico desta universidade, aprofundou seus estudos em psicologia, filosofia e literatura, os quais foram muito utilizados na vida profissional posterior. Algum tempo depois, estudou medicina, por causa do seu interesse em trabalhar com problemas neurológicos, como forma de compreender o funcionamento psicológico do ser humano.

Analogamente à formação acadêmica, sua atividade profissional foi muito diversificada. Foi professor e pesquisador nas áreas de psicologia, pedagogia, filosofia, literatura, deficiência física e mental, atuando em diversas instituições de ensino e pesquisa da ex-União Soviética e da Europa, enquanto lia, escrevia e ministrava conferências.

Vygotsky também trabalhou na área chamada “pedologia” (ciência da criança, que integra aspectos biológicos, psicológicos e antropológicos), que considerava essa disciplina como a ciência básica do desenvolvimento humano.

Criou um laboratório de psicologia na escola de formação de professores de Gomel e participou da criação do Instituto de Deficiências, em Moscou. Produziu uma obra vastíssima para uma vida tão curta, a qual foi influenciada pela formação interdisciplinar e pelo interesse diversificado em várias áreas. Escreveu aproximadamente 200 trabalhos científicos, sobre temas como neuropsicologia, deficiência, linguagem, psicologia, educação e questões teóricas e metodológicas relacionadas às ciências humanas.

Porém, sua produção escrita não constitui um sistema explicativo completo,

articulado, do qual pudéssemos extrair uma “teoria vygotskiana” bem estruturada, e nem de relatos detalhados de investigações científicas, dificultando a obtenção de informações precisas sobre os procedimentos e resultados de pesquisa. Entretanto, com a continuidade de estudos efetuados por seus seguidores, conseguiu atingir seu objetivo mais amplo, que foi a síntese entre duas tendências presentes na psicologia do início do século XX. De um lado, havia a psicologia como ciência natural, procurando explicar processos elementares sensoriais e reflexos, considerando o ser humano basicamente como corpo. De outro, a psicologia como ciência mental, baseada na psicanálise, tomando o homem como mente, consciência. Vygotsky conseguiu essa síntese, com a descrição das propriedades dos processos psicológicos superiores², os quais são tipicamente humanos e envolvem: a atenção voluntária, a memorização ativa, imaginação, capacidade de planejar, estabelecer relações, ação intencional, desenvolvimento da vontade, elaboração conceitual, uso da linguagem, representação simbólica das ações propositadas, raciocínio dedutivo e pensamento abstrato.

É importante explicar o significado de *síntese* para Vygotsky, pois é uma ideia muito presente nos seus trabalhos e é central para compreender os processos psicológicos. Segundo esse autor, a síntese de dois elementos não é a simples justaposição dos mesmos, mas o surgimento de algo novo, que não existia anteriormente, o qual não estava presente nos elementos iniciais, e que foi tornado possível pela interação entre eles, num processo de transformação para gerar outros elementos novos. Naquela época, havia nascido duas linhas teóricas da psicologia, uma comportamentalista e outra da psicanálise. Numa proposta de síntese, Vygotsky entendia o ser humano como agente biológico e social, interpretando-o como participante de um processo histórico (Oliveira, 1995, p.23).

Esta síntese é embasada por três ideias principais:

- As funções psicológicas têm um suporte biológico, pois são produtos da atividade cerebral;
- O funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações entre o indivíduo e o mundo exterior, as quais desenvolvem-se num processo

2

https://editorarealize.com.br/revistas/cintedi/trabalhos/TRABALHO_EV060_MD1_SA12_ID2646_131020161736_01.pdf, acessado em 21/05/202.

histórico;

- A relação homem/mundo é uma relação mediada por sistemas simbólicos.

O cérebro humano, como órgão material, não é um sistema de funções imutáveis, mas aberto, de grande plasticidade, cuja estrutura e modos de funcionamento são moldados ao longo da história da espécie e do desenvolvimento individual. Este órgão pode servir a novas funções, criadas na história do homem, sem que sejam necessárias transformações na estrutura física.

A ideia de uma base material em desenvolvimento ao longo da vida do indivíduo e da espécie está ligada a um pressuposto importante do trabalho de Vygotsky: o humano transforma-se de biológico para sócio-histórico, num processo em que a cultura é parte essencial da constituição da natureza humana. Não podemos pensar o desenvolvimento psicológico como um processo abstrato e descontextualizado. Em particular, no que se refere às funções psicológicas superiores humanas, esse desenvolvimento está muito embasado nos modos culturalmente construídos de ordenar o real.

Outro pressuposto vygotkiano, que é central para entender o aspecto sócio-histórico do funcionamento psicológico, é a mediação, ou seja, a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas mediada, sendo os sistemas simbólicos os elementos intermediários entre o sujeito e o mundo.

Voltando às *funções psicológicas superiores* (ou processos mentais superiores), o estudo deste assunto foi um dos mais enfatizados por Vygotsky. A capacidade de imaginar objetos ausentes, eventos nunca vividos, planejar ações a serem realizadas, de generalização e abstração, enfim, são exemplos de atividades psicológicas superiores, assim como a memória e a atenção mediadas por signos. Diferentemente, ações de reflexo, como a sucção do leite materno pelo bebê, reações automatizadas, como o movimento de cabeça quando se ouve um som forte e repentino, e processos de associação simples entre eventos, como evitar o contato da mão com uma vela, são entendidos como mecanismos mais elementares. E, segundo Vygotsky, a escola tem como objetivo essencial desenvolver as funções psicológicas superiores.

Para entender as concepções vygotkianas sobre o funcionamento psicológico, é muito importante entender o conceito de *mediação*. Diferenciados por

Vygotsky, existem dois tipos de mediadores: os *instrumentos* e os *signos*.

A ligação teórica desse autor com os postulados marxistas³ mostra a importância dos instrumentos na atividade humana. Ele tenta entender as características humanas, considerando o surgimento do trabalho e a formação da sociedade humana. O trabalho é compreendido como processo básico que vai marcar o homem como espécie diferenciada. No trabalho desenvolvem-se, de um lado, a atividade em grupo, logo, as relações sociais e, de outro, a utilização de instrumentos.

Um exemplo de instrumento é o machado, pois corta melhor do que a mão. De modo geral, o instrumento é criado ou procurado para um determinado objetivo, que possui a função para a qual foi criado e o modo de uso desenvolvido durante a história do trabalho em grupo. Portanto é um objeto social e mediador da relação do indivíduo com o mundo.

Em relação ao uso dos signos, e dos sistemas simbólicos constituídos por eles, chamados por Vygotsky de “instrumentos psicológicos”, foram inventados e usados como auxiliares para solucionar um determinado problema psicológico, como relatar uma situação, comprar coisas, entre outros. Esse uso é análogo à criação dos instrumentos, mas na área psicológica.

O signo é um registro externo, auxiliador do homem em tarefas que necessitam de atenção e memória como, por exemplo, a utilização de pedras para a contagem de cabeças de gado. Genericamente, os signos são representações da realidade e podem referir-se a algum elemento ausente do espaço e tempo presentes. A memória mediada por signos possui maior potência do que a não mediada.

Vygotsky e seus colaboradores realizaram alguns experimentos para pesquisar a função dos signos na atividade psicológica. O que foi conduzido por Leontiev, um de seus seguidores, tinha o objetivo de fornecer informações para o entendimento do papel dos signos mediadores na atenção voluntária e na memória.

No experimento foi utilizado um jogo infantil tradicional na Europa, no qual alguém faz perguntas a outro, que deve responder sem usar as “palavras proibidas”. Nesta situação as crianças deveriam responder perguntas sobre cores, por exemplo: “Qual é a cor de um tomate?” sem usar as cores definidas como

3 O materialismo dialético e histórico, a precedência da luta de classes, a mais-valia como forma especificamente capitalista de extração do excedente por parte da burguesia, o socialismo como objetivo. Fonte: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0034-75901980000100009&script=sci_arttext, acessado em 17/06/2020.

“proibidas”, como o verde, por exemplo.

Na primeira fase, as perguntas eram formuladas pelo pesquisador e as crianças simplesmente respondiam. A resposta era considerada errada se a criança falasse o nome das cores proibidas. Na segunda fase, as perguntas eram feitas, mas a criança podia utilizar, se quisesse, cartões coloridos que foram recebidos para auxiliá-la. Nesta fase, ela separava os cartões com as cores proibidas, de modo análogo à consulta a uma fonte de informação; eles eram um apoio externo para a atenção e memória. As crianças que participaram da segunda fase do experimento cometeram menos erros do que as envolvidas na primeira fase. Conseqüentemente, a utilização de mediadores (os cartões separados) potencializou a capacidade de atenção e memória. São essas ideias que Vygotsky chama de atenção e memória mediadas (quando elas são potencializadas pela utilização de signos) e ambas fazem parte dos processos mentais superiores.

Duas transformações qualitativas fundamentais ocorrem com o uso dos signos ao longo da evolução humana e do desenvolvimento de cada um. De um lado, a utilização de marcas externas muda-se para processos internos de mediação, chamado por Vygotsky de *processo de internalização*. De outro, são desenvolvidos *sistemas simbólicos*, utilizados para organizar os signos em estruturas complexas e articuladas. Ambos serão abordados com mais detalhes a seguir.

Retornando ao experimento desenvolvido por Leontiev, apenas as crianças de, aproximadamente, oito anos fizeram uso dos cartões como instrumento psicológico; as mais jovens não utilizaram esses signos. Já os adultos que participaram obtiveram desempenho muito semelhante em ambas as fases. Vygotsky explica que o bom desempenho dos adultos, sem os cartões, mostra que está ocorrendo, sim, uma mediação, mas ela acontece internamente, independente da presença física desses cartões. Durante o desenvolvimento individual, a necessidade de marcas externas diminui e se passa a utilizar as internas. A habilidade de lidar com representações substituidoras do próprio real é o que possibilita o homem fazer relações mentais na ausência dos objetos em si, imaginar, planejar e ter intenções. Essas representações mentais da realidade exterior são fatores principais considerados na relação do homem com o mundo e que caracterizam os processos psicológicos superiores (Oliveira, 1995, p.34).

Ao longo da história humana, as representações da realidade são colocadas

em sistemas simbólicos, ou seja, os signos não formam apenas representações externas isoladas e nem símbolos usados por indivíduos particulares; passam a ser compartilhados pelos membros do grupo social, possibilitando a *comunicação* entre cada um e o aprimoramento das relações sociais.

Os sistemas de representação da realidade, por exemplo a linguagem, são socialmente dados, pois é o grupo cultural no qual cada um se desenvolve, que fornece modos de perceber e organizar o real, constituindo os meios psicológicos que fazem a mediação do indivíduo com o mundo. A principal função da linguagem é a de *intercâmbio social*, ou seja, para se comunicar com os semelhantes.

Por exemplo, a palavra “cachorro” tem um conceito claro pelos usuários da língua portuguesa, logo, o *significado* dela será compreendido por todos os indivíduos que compartilham esta língua.

A situação acima gera uma segunda função da linguagem que é a de *pensamento generalizante*. Mais precisamente, a linguagem vai ordenar o que está em nosso entorno, agrupando todas as ocorrências de uma mesma classe de objetos, em uma mesma categoria conceitual.

Vygotsky estudou a evolução da espécie humana e do indivíduo, tentando entender o surgimento e a trajetória do pensamento e da linguagem, os quais, segundo esse autor, possuem origens e caminhos diferentes e independentes. Ele caracteriza uma fase pré-verbal do desenvolvimento do pensamento e uma fase de uso da linguagem sem ter a função de signo, que é entendida como pré-intelectual. Em um determinado período do desenvolvimento filogenético⁴, o pensamento tornou-se verbal e a linguagem racional, quando o biológico se transformou em sócio-histórico.

Segundo Vygotsky e seus seguidores, é por volta de dois anos de idade que o pensamento se encontra com a linguagem e começa um novo modo de funcionamento psicológico: a fala torna-se intelectual, com objetivo simbólico, e o pensamento torna-se verbal, mediado por significados dados pela linguagem. A vinculação dos processos de pensamento e linguagem é impulsionado pela inserção da criança num grupo cultural, ou seja, o convívio com adultos no ambiente em que vive provoca um salto qualitativo para o pensamento verbal.

Na relação entre pensamento e linguagem, os significados das palavras

4 Refere-se à filogenia, à história da evolução das espécies, nomeadamente à história genealógica de uma espécie, destacando suas relações de ancestrais e descendentes; filogenésico, filogênico. Fonte: <https://www.dicio.com.br/filogenetico/>, acessado em 16/06/2020.

ocupam lugar principal. Eles estão em constante transformação e são estabelecidos ao longo da história, embasados nas relações humanas com o mundo físico e social. Analogamente, essa transformação também acontece no processo de aquisição da linguagem pela criança.

Vygotsky diferencia dois componentes do significado da palavra: “o significado propriamente dito” e o “sentido”. O primeiro consiste num núcleo relativamente estável de compreensão geral da palavra, compartilhada por todos que a utilizam, com função generalizante. O sentido refere-se ao significado para cada um, envolvendo o contexto de uso da palavra e as vivências afetivas do indivíduo.

Assim, a função generalizante da linguagem é o que a torna um instrumento do pensamento: a generalização e a abstração somente são possíveis pela linguagem.

Os próximos assuntos a serem abordados serão o desenvolvimento humano, o aprendizado e as relações entre ambos. Vygotsky procura entender o surgimento e a evolução dos processos psicológicos ao longo das histórias da espécie humana e individual. A abordagem que foca no processo de evolução é chamada abordagem genética⁵.

Em sua obra, o intelectual enfoca, paralelamente, o desenvolvimento e os processos de aprendizado. Há um caminho de desenvolvimento, que é, em parte, marcado pelo processo de maturação do organismo humano individual, mas é o aprendizado que fornece as bases para o aprimoramento dos processos internos de desenvolvimento, os quais ocorrem por causa do contexto em que o indivíduo está inserido. Por exemplo, considere uma pessoa que mora num grupo cultural o qual não possui um sistema de escrita. Se continuar vivendo neste grupo, nunca será alfabetizado. Supondo que ela, por algum motivo, fosse morar em um ambiente letrado, poderia ser inserido num processo de alfabetização e seu desenvolvimento seria modificado.

A ideia de que é o aprendizado que fornece as bases para o aprimoramento dos processos internos de cada um, aproxima o desenvolvimento do indivíduo, a relação com o contexto sociocultural em que habita e a situação orgânica, que não se lapida sem a ajuda dos outros. Considerando o papel do outro social no desenvolvimento, Vygotsky formulou um conceito específico chamado de *zona de*

⁵ Refere-se a gênese – origem e processo de formação a partir dessa origem, constituição, geração de um ser ou de um fenômeno (Oliveira, 1995, página 56).

desenvolvimento proximal. Antes de explicá-lo, serão abordadas duas ideias introdutórias.

Quando se referir ao desenvolvimento de uma criança, observa-se o comportamento em várias atividades, como por exemplo: ela já sabe amarrar sapatos? Quando estiver escrito que uma criança já sabe realizar uma atividade, entenda que ela consegue realizá-la sozinha, ou seja, sem a ajuda de terceiros.

Para Vygotsky, a etapa de desenvolvimento real da criança refere-se ao nível já conquistado por ela. As funções psicológicas, ligadas ao nível de desenvolvimento real da criança em algum período da vida dela são as que estão bem estabelecidas naquele momento. A etapa de desenvolvimento potencial é a capacidade da criança realizar tarefas com a ajuda de parceiros mais capazes. Por exemplo, se uma criança for construir torres de cubos e um adulto der instruções como “coloque, primeiro, o cubo maior e depois os menores”, ou se ela vê alguém mais velho construindo uma, é provável que ela tenha mais facilidade de realizar a tarefa.

É a partir da postulação da existência desses dois níveis de desenvolvimento – real e potencial – que Vygotsky define a *zona de desenvolvimento proximal*, como “a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes” (Oliveira, 1995, p. 60).

Consequentemente, zona de desenvolvimento proximal é um espaço psicológico que está em frequente transformação; a atividade que uma criança realiza hoje com a ajuda de alguém, realizará sozinha amanhã.

Além disso, processos estabelecidos não precisam de influência externa para serem iniciados e processos que ainda nem começaram não são beneficiados pela ação externa. Por exemplo, se uma criança já sabe amarrar sapatos, ensinar a ela esta habilidade é desnecessário, assim como também é desnecessário ensinar isto a um bebê, pois essa competência não está no raio de desenvolvimento das suas funções psicológicas. Será beneficiada no auxílio da tarefa aquela que ainda não aprendeu, mas iniciou o processo de desenvolvimento da competência.

Consequentemente, e segundo o ponto de vista do teórico, no ambiente escolar, o aprendizado incentiva o desenvolvimento. Logo, a escola tem uma função muito importante na estruturação do psicológico dos indivíduos adultos que vivem

nas sociedades escolarizadas. Tal influência só será alcançada, conhecendo-se o nível de desenvolvimento de cada aluno, para guiar o ensino às etapas de desenvolvimento que ainda não foram fixadas, agindo como uma alavanca para novas conquistas psicológicas.

O professor tem a função clara de influenciar na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, estimulando avanços que não ocorreriam de modo espontâneo, mas que se tornam mais prováveis com a ajuda do professor e das outras crianças. Assim, para que o desenvolvimento em Matemática ocorra com mais facilidade, ao longo do período escolar, o professor deverá propor situações que estimulem o desenvolvimento de conceitos, propriedades e modos de raciocínio organizados, e algumas dessas podem ser fundamentais para estimular o aprendizado do cálculo mental, o que será detalhado mais adiante.

1.2 Investigações Matemáticas

Investigar significa procurar informações que não se conhece. Em relação aos pesquisadores da Matemática, esta palavra é entendida como desvendar relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos. Sua etapa principal é definir, de modo claro, o problema que será resolvido e no caso de uma investigação matemática, pode-se escolher um ou vários deles.

Sabe-se que, quando estudamos um problema, o objetivo é resolvê-lo, mas enquanto se tenta solucioná-lo, outras descobertas podem ser encontradas e até se revelarem tão importantes quanto, ou mais do que a resolução do problema original.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a realização de uma investigação matemática é dividida em quatro etapas principais:

- Exploração e formulação de questões: reconhecer e explorar uma situação problema e elaborar perguntas sobre ela;
- Conjecturas⁶: organizar dados, formular e fazer afirmações sobre as relações encontradas com esses dados (as conjecturas);
- Teste e reformulação: execução de testes e um possível aprimoramento da(s) conjectura(s);
- Justificação e avaliação: verificar se o raciocínio executado é

⁶ Uma **conjectura** é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento ainda não verificado. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura>, acessado em 08/08/2020.

correto, ou o resultado do raciocínio, e demonstrar a conjectura.

É frequente que todos os momentos acima possam surgir simultaneamente, não havendo uma delimitação linear entre essas fases.

Para que um aluno execute uma investigação matemática, é necessário que se saiba a diferença entre problema e exercício. Segundo os autores estudados:

“Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. É claro que pode haver exercícios mais difíceis, requerendo a aplicação mais ou menos engenhosa de vários métodos e também existem problemas mais simples ao lado de outros mais complicados. Em vez de uma dicotomia, temos um *continuum* entre exercício e problema, e o seu interesse educativo depende de muitos fatores para além do seu grau de dificuldade” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 22).

Existem semelhanças entre exercícios e problemas: em ambos, o enunciado mostra, de modo claro, o que é perguntado e as informações (dados e hipóteses), e o professor tem acesso mais imediato à resposta. Diferentemente, numa investigação, a pergunta não está bem definida no início e a responsabilidade de defini-la é função do investigador. Ou seja, o início pode não ser o mesmo para cada um e, como consequência, a resolução e a conclusão podem ser diferentes.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), de modo geral, uma tarefa investigativa ocorre em três fases:

- Introdução da tarefa: a explicação da atividade é feita, oralmente, pelo professor;
- Realização da investigação: pode ocorrer em pequenos grupos, ou aos pares, ou com toda turma, ou individualmente;
- Apresentação dos resultados: os alunos mostram aos colegas o que realizaram.

Na primeira fase, o professor deve explicar, brevemente, a atividade para que

os alunos aproveitem o tempo de realização. Ele deve fazê-los perceberem que suas ideias são valorizadas e que a atividade depende, principalmente, de uma postura participativa deles.

Durante a segunda fase, as conjecturas podem nascer aos alunos através da observação direta dos dados, ou pela manipulação das informações, ou pela comparação com outras analogias, entre outras formas.

O **registro do resultado encontrado** é uma fase muito importante na investigação, pois facilita ao professor refletir sobre o trabalho realizado pelos alunos e a preparar as próximas aulas. Acrescentamos que ele também auxilia os alunos a organizarem os raciocínios matemáticos e a se expressarem por escrito. O educador precisa prestar atenção à formulação e teste de conjecturas, para ajudar os educandos no desenvolvimento da investigação, com intervenções aproximativas.

Agora, sobre **a discussão da investigação**, é um momento importante para compartilhar o conhecimento e os alunos poderem mostrar as estratégias, conjecturas e justificativas que encontraram, enquanto o professor porta-se como moderador e estimula os alunos a questionarem-se mutuamente.

Neste momento, o aluno aprofunda o significado da investigação, aprimora a habilidade de **comunicar matematicamente e de refletir sobre seu trabalho**, ampliando seu poder argumentativo. Se esta fase for subtraída, o risco de perder o sentido da investigação é grande.

Enquanto os alunos estão desenvolvendo as atividades, o professor deve exercer quatro papéis: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles. No início da investigação, ele deve fazer com que os alunos se sintam motivados para a realização da tarefa, com um ambiente preparado. Além disso, deve escolher questões e situações desafiadoras em potencial.

Aqui, podemos fazer um paralelo com as teorias de Vygotsky que foram estudadas para este trabalho, afirmando que essas questões/situações propostas na atividade investigativa devem pertencer à *zona de desenvolvimento proximal (zdp)* do aluno, ou seja, com pequenas instruções aproximativas e apoio do professor e dos colegas, que ele seja capaz de analisar os dados da tarefa e encontrar as conjecturas esperadas, ou pelo menos, alguma delas. Assim, o aluno se manterá interessado na tarefa, pois, se ela for muito distante de seus

conhecimentos prévios, ele poderá se desestimular.

Durante o decorrer da investigação, é aconselhável que o professor continue desafiando os alunos para que a atividade avance normalmente, principalmente quando eles se deparam com um obstáculo, ou quando julgam o trabalho finalizado.

Desde o início da investigação, o professor precisa se aproximar dos alunos para observar e colher informações sobre o andamento dos trabalhos. É comum os estudantes depararem-se com dúvidas ou obstáculos, então, é aconselhável que o professor coloque questões abertas e aproximativas, no sentido de fazê-los observar determinadas situações e dados já manipulados, porém sem dar-lhes as respostas esperadas. Se os alunos fizerem perguntas, devolva-as com outra formulação, pois isto fará com que eles pensem melhor.

Agora será apresentado um exemplo de investigação matemática aplicada em alunos de 10 ou 11 anos, em Portugal (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003). Este foi escolhido por envolver a tabuada, que é um recurso útil para a vida prática e também por, potencialmente, envolver as regras de divisibilidade por alguns números naturais:

- “Construa a tabuada do 3. O que encontra de curioso nesta tabuada? Prolongue-a calculando 11×3 , 12×3 , 13×3 , ... e formule algumas conjecturas.”
- Investigue agora o que acontece na tabuada do 9 e do 11.” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 64).

Seguem abaixo, algumas conclusões a que os alunos chegaram:

- Se calcular três vezes um número ímpar, então o resultado será ímpar;
- O produto de qualquer número com um par sempre resultará em um par;
- Se multiplicar qualquer número de um algarismo por 11, o resultado será um número cujo algarismo da unidade é igual ao da dezena.

Este tipo de atividade possibilita o desenvolvimento de conhecimentos importantes em relação aos números e a formulação de perguntas decorrentes das

explorações. Por exemplo, depois de perceberem que a multiplicação de um número ímpar por um número par é par, uma questão que pode existir é: se somarmos um número par com um número ímpar, qual seria o resultado? Outra questão que poderá surgir é se não seria possível observar mais regularidades nessas tabuadas e tentar aproximar os alunos de algumas regras de resultados dessas multiplicações por 3, 9 e 11, que serão importantes para o estudo da divisibilidade por esses números.

O exemplo acima, assim como outros, possibilita aos alunos o desenvolvimento de conceitos importantes e de competências numéricas necessárias atualmente. Simplesmente memorizar a tabuada, não é tão relevante em um mundo com recursos tecnológicos tão disponíveis como o de hoje. Porém, os estudantes precisam identificar, compreender e usar os números, com as suas relações e operações e também saber interpretar criticamente a maneira como os números são usados no cotidiano. Então, o estudo dessas regularidades a respeito dos múltiplos e divisores é importante para essa aplicação e interpretação crítica na vida, baseada em conhecimentos matemáticos consolidados.

Após o término da atividade investigativa, cabe ao professor avaliá-la. Isso lhe possibilita perceber se os alunos estão evoluindo como o esperado ou se seria necessário refletir sobre o seu trabalho e reorganizá-lo. O retorno dado com a avaliação também permite ao aluno saber se há alguns aspectos que precisam de aprimoramento.

Um recurso para essa avaliação é o relatório, ou seja, um texto escrito pelo aluno ou pelo grupo, com o objetivo de mostrar o trabalho desenvolvido, através de explicação clara e detalhada do processo que usaram para chegar às conclusões, com as perguntas elaboradas sobre a situação, a maneira que os dados foram organizados, os procedimentos que validaram as conjecturas, etc, e as conclusões. Pode-se incluir a bibliografia utilizada.

É aconselhável que o professor deixe claro como será avaliado o relatório, com os aspectos que serão considerados, e que, durante a explicação de como os alunos farão o trabalho, falar o que se espera que seja incluído nele.

Segue abaixo um exemplo de como o relatório pode ser escrito:

- Nome, número e ano de cada aluno;
- Título;

- Explicação da investigação, incluindo tabelas, esboços, organização dos dados, descrição e justificativa dos passos utilizados e dificuldades encontradas;
- Conclusões (podem ser as conclusões matemáticas ou outras);
- Reflexões críticas sobre a tarefa, em que os alunos analisam como foi sua participação, se houve dificuldades e se a tarefa foi interessante para algum aprendiz;
- Bibliografia.

Após a entrega, o professor avaliará o relatório de modo quantitativo, por exemplo, de 0 a 10, ou qualitativo, por exemplo, ótimo, muito bom, bom, etc, de acordo como o modo que cada escola atribui nota. O mais importante, no entanto, é deixar claro quais são os critérios utilizados para essa avaliação, assim como os comentários que o professor retornará para os alunos.

Podemos sintetizar duas consequências importantes para os processos cognitivos dos alunos, que são favorecidas pela investigação matemática. A primeira é que, ao organizar dados, formular conjecturas e justificativas para elas, os estudantes irão desenvolver habilidades e competências semelhantes a um pesquisador, o que facilitará a sua visão mais crítica a respeito do mundo que os cerca. A segunda consequência é que, ao discutir com seus colegas e também escrever os relatórios, os alunos são estimulados a ampliar os recursos de comunicação oral e escrita, utilizando uma linguagem mais matemática, ou matematizada, que permita a melhor organização de seus raciocínios. Estas são habilidades importantes para a formação cidadã e o preparo desses estudantes num mundo em que os problemas se tornam cada vez mais complexos.

1.3 Sobre o cálculo mental e algumas investigações em Geometria

Ao que tudo indica, o cálculo mental aparece recomendado na legislação brasileira na década de 1880. Em 1883 foi aprovado o *Regimento Interno para as Escolas Públicas do 1º grau do Município da Corte* e entrou em vigor no mês de janeiro do ano seguinte (BERTICELLI, 2017). Assim, há evidências de que o cálculo mental estava presente no Ensino Primário desde o final do século XIX, o qual era usado como instrumento pedagógico na compreensão e contextualização da aritmética para dar importância à Matemática (CARDOSO, 2018).

Segundo Berticelli (2017), a primeira vez que o cálculo mental apareceu no Brasil foi em 1881. No ano seguinte, este assunto não fazia parte do programa de ensino dos assuntos de aritmética. O mesmo ocorreu em 1892, 1893, 1895, 1897, 1898. Mas voltou a ser abordado de 1899 a 1901.

Na primeira metade do século XX, ocorreram reflexões no Brasil sobre os objetivos do ensino de Matemática para o Primário⁷⁷ e foi comentado que esta disciplina era importante para os negócios, as ciências, as artes, etc. Ela tinha que ser algo presente no cotidiano dos estudantes, de modo útil e aplicável para que facilitasse uma melhor compreensão dos assuntos. Por causa disso, o cálculo mental era um instrumento pedagógico que preparava o ser humano para enfrentar desafios, pensar e raciocinar. Assim, até antes do movimento da Matemática Moderna, introduzido no Brasil principalmente a partir da década de 1960, o cálculo mental foi valorizado por ser algo útil e prático. Atualmente, ele está sofrendo uma revalorização, pois possui um valor cognitivo, conforme explicamos nos parágrafos anteriores (CARDOSO, 2018).

Uma outra importância de ensinar cálculo mental aos alunos é que pode ser visto como base da aritmética, a qual é usada no cotidiano. Neste caso, não é excluída a utilização de papel e lápis, pois os alunos precisam registrar a conta realizada (BERTICELLI, 2017). As vantagens de saber fazer os cálculos mentalmente é ter maior possibilidade de realizar deduções, análises, sínteses, analogias e generalizações, ter mais facilidades de encontrar equivalências e decomposições, favorecendo a criatividade e a competência de resolver problemas numéricos do cotidiano com segurança (CARDOSO, 2018).

Quando se calcula mentalmente, de modo geral, gasta-se menos tempo para encontrar o resultado, ou seja, o aluno pensa mais rápido e a consequência disso é que ele consegue ficar mais tempo concentrado no contexto do problema, e não no cálculo em si.

Alguns autores (SOARES, 2019) recomendam que o cálculo mental deve ser ministrado antes das operações aritméticas formais, pois ele aprimora a atenção e a inteligência do estudante. Aconselham que os professores iniciem o cálculo escrito só depois que os alunos estejam adiantados no cálculo mental. Porém, a nosso ver, ele pode ser desenvolvido concomitantemente com o a formalização dessas operações.

7 O que hoje equivale ao ciclo 1 – anos iniciais - do Ensino Fundamental no Brasil.

Outras vantagens do cálculo mental são aprimorar os modos de raciocínio do aluno e, depois que ele é aprendido, torna-se muito mais fácil calcular usando algoritmos. Frequentemente, há a necessidade de usá-lo no dia a dia, quando não temos tempo de usar papel e lápis e nem a calculadora.

Alguns autores associam o cálculo mental com a velocidade com que uma operação aritmética é realizada, ou à memorização de resultados dessas operações. Outros entendem que é qualquer cálculo que pode ser feito sem realizar anotações, ou seja, o contrário do cálculo escrito (CARDOSO, 2018).

Pode-se dizer que existem quatro modalidades de cálculo: escrito, mental, estimado e com calculadora. Nas escolas brasileiras atuais, ainda há uma predominância dos cálculos escritos e exatos, realizados com recurso de aplicação de algoritmos para essas operações.

Se os alunos conhecerem o cálculo mental, ele fornecerá suporte aos outros tipos, e vice-versa, pois as diferentes modalidades podem se relacionar e complementam-se do ponto de vista pedagógico, para a melhor compreensão do aluno.

As técnicas de cálculo mental são desenvolvidas em paralelo às de cálculo estimado, assim este último pode ser entendido como uma etapa para aquele; logo, ambos estão associados (CARDOSO, 2018). Quando um aluno aprende o cálculo mental, o qual é popularmente conhecido como “de cabeça”, ele pode aprender a raciocinar com compreensão sobre esses cálculos, não necessitando fazer as operações aritméticas sempre apoiado em algoritmos escritos.

Em relação ao ensino, nota-se que, durante e logo após o Movimento da Matemática Moderna, houve uma valorização maior para as fórmulas e os algoritmos e uma importância menor a situações-problema que poderiam surgir no cotidiano e que envolviam as operações aritméticas. Conseqüentemente, os conteúdos passaram a ser ensinados de modo mais isolado, gerando dificuldades na aprendizagem.

A atual Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) enfatiza que a Matemática deve ser ensinada de modo a levar o aluno a desenvolver competências que evidenciam a sua aplicação útil na rotina diária de cada um, de modo a inserir esses conhecimentos na ação social e cultural dos estudantes. Desse modo, o ensino desta área deve estar ligado ao dia a dia do aluno, de modo prazeroso e sem gerar medo ou temor, através de atividades que sejam

estimulantes e divertidas aos alunos e que desenvolvam a capacidade de pensar e criar.

A BNCC (BRASIL, 2017) direciona para que este assunto seja abordado, primeiramente, nos anos iniciais do Ensino Fundamental como uma das estratégias para resolução de cálculos, através das habilidades: “(EF02MA05) Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito”, “(EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito”, “(EF03MA05) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito, inclusive os convencionais, para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais”, “(EF03MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental”, “(EF04MA03) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado”, “(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos”, “(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos”, “(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros”, “(EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos”, “(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos”.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, este assunto continua sendo

abordado pelas habilidades: “(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros”, “(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira”, entre outros.

Assim, o objetivo principal do cálculo mental é melhorar a compreensão e execução das quatro operações aritméticas, acostumando o aluno a resolvê-las com números cada vez maiores, até incorporar os racionais decimais, com velocidade e autoconfiança.

O cálculo mental também é uma arma que possibilita a autonomia intelectual do pensamento, já que o aluno tem a liberdade e a flexibilidade para escolher o modo que julgar melhor para chegar a um resultado (CARDOSO, 2018).

Como citado anteriormente, o desenvolvimento do cálculo mental é recomendado na BNCC (BRASIL, 2017) para o primeiro ciclo do Ensino Fundamental, qualificado como o início da aprendizagem escolar de cada estudante e possui uma função importante nesse aprendizado. Pode-se entendê-lo como um alicerce, ou seja, a construção precisa ser firme e com bastante segurança. Desse modo, neste trabalho será proposta a retomada do cálculo mental no segundo ciclo do Ensino Fundamental, uma vez que nem sempre essa base é bem desenvolvida em anos anteriores.

Um dos fatores importantes para que a aprendizagem ocorra é a motivação que os professores transmitem aos estudantes e isto acontecerá com mais facilidade se associarem os conteúdos às situações práticas do cotidiano do aluno (CARDOSO, 2018).

Também se pode argumentar que o domínio do cálculo mental ajuda o estudante a aperfeiçoar competências que expandem as fronteiras da Matemática na fase adulta, como as de tomar decisões, trabalhar com outras pessoas, entre outras, baseando-se na correta manipulação de dados numéricos. Note que estas competências são interessantes para se viver em sociedade, conseqüentemente, são aprimorados de forma indireta, não somente conhecimentos, mas também atitudes e valores na formação do aluno.

Alguns associam cálculo mental com situações do dia a dia em que não há

necessidade de encontrar um resultado exato. Por exemplo, você vai ao supermercado para comprar bolacha, um pacote com três caixas custa R\$: 3,00 e cada caixa individual custa R\$: 1,28. Se fizer cálculo aproximado e se comprar três caixas individuais, pagará mais do que 3 reais, logo, é mais vantajoso comprar o pacote. Observe que esta ideia de cálculo mental estimado pode ser usada em situações em que não há necessidade de precisão.

O estudo realizado por Fontes (2010) mostra que, em relação à resolução de problemas, como a nossa memória é limitada, quando os alunos usam o cálculo mental de forma mais rápida, terão o seu foco de atenção mais voltado para as partes mais complexas e importantes do problema abordado.

A habilidade de fazer “contas de cabeça”, ajuda, inclusive, nos momentos em que se usa a calculadora. Por exemplo, se for calcular 11×41 e apertar 5 no lugar do 4, pois são números próximos, chegará em 561, mas quem sabe cálculo mental perceberá que o resultado deveria ser em torno de 400.

Outra vantagem de se praticar o cálculo mental é que isto ajuda o aluno, num futuro, a entender propriedades das operações com números reais, como a associativa e a comutativa, por exemplo, além de facilitar a compreensão da base decimal. Conseqüentemente, o aprendizado e a compreensão de algoritmos para as operações aritméticas, que se baseiam nessas propriedades, tornam-se mais fáceis (FONTES, 2010).

No artigo de NERES (2017), uma pesquisa foi desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Médio, com o objetivo de analisar a utilização das operações matemáticas com cálculo mental. Para realizar os exercícios usando essas técnicas, foram aplicadas competições na sala de aula, gincanas e atividades lúdicas. Algumas operações numéricas foram realizadas em folhas de papel, embasadas pela leitura e escrita de números e unidas com a execução de cálculo escrito e verbalizações. Calculadoras também foram usadas como ferramenta para realização dos cálculos e o professor pesquisador instigou os estudantes a falarem suas respostas na linguagem escrita e oral e o passo a passo para se chegar ao resultado. O artigo mostra que os alunos descobriram outras maneiras de praticar o cálculo mental e esse processo também ajudou no entendimento do cálculo escrito (pelo algoritmo), o qual é utilizado na escola. Além disso, apresentaram conhecimento sobre diversos tipos de cálculo, mas precisavam dar significado à situações-problema com mais de uma operação matemática. O

embasamento teórico utilizado no artigo foi o de Raymond Duval, sobre os registros de representação semiótica.

O artigo de Conti (2019) surgiu de um projeto de Iniciação Científica, baseado em pesquisa bibliográfica, levantando materiais sobre o “cálculo mental” e relacionando vários aspectos teóricos sobre o tema e vários meios para aplicá-lo. Foram lidos livros, publicações, artigos e dissertações que abordavam o tema para que ocorresse um aprimoramento no assunto. O objetivo foi relacionar diferentes abordagens teóricas sobre o tema.

Diferentemente dos artigos citados nos dois parágrafos anteriores, o projeto desta dissertação propõe uma sequência didática a ser futuramente aplicada aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de construir uma base para que eles aprendam a executar, de várias maneiras, cálculos com números naturais e alguns decimais, utilizando as propriedades das operações aritméticas e, conseqüentemente, desenvolvam o raciocínio lógico e noções mais amplas sobre números. Tal sequência didática envolve a resolução, em grupo, de algumas situações investigativas, entrega de relatórios pelos alunos e a finalização com um jogo para ajudar na fixação do conteúdo. O embasamento teórico foi obtido por estudos da teoria do desenvolvimento proposta por Vygotsky.

Também será proposta uma outra sequência para o ensino de áreas, perímetros e proporcionalidade, dentro das linhas de Geometria e Grandezas e Medidas. Para tanto, foram analisados alguns trabalhos na literatura de Educação Matemática, como segue.

Segundo Silva e Quartiere (2008), é recomendado que o ensino e a aprendizagem de Geometria ocorram pela Investigação Matemática, pois este método fornece motivação para que o aluno adquira o próprio conhecimento, encorajando-o a procurar propostas de soluções para as situações que possam ocorrer no cotidiano. Nele, o aluno é convidado comportar-se como matemático, formulando conjecturas, fazendo provas e refutações e mostrando os resultados aos amigos.

A proposta didática do artigo citado no parágrafo anterior foi aplicada com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública em um município do Ceará. A sala de aula era constituída por estudantes de 15 a 17 anos e o objetivo desse trabalho foi responder a seguinte questão: “A investigação matemática, como metodologia de ensino, possibilita indícios de aprendizagem?”. Nas considerações

finais do autor consta que os alunos mostraram um melhor entendimento em relação aos assuntos estudados nas atividades e também tiveram mais dedicação na realização das tarefas. As atividades investigativas foram aplicadas em grupos de 3 a 5 alunos, as quais foram: investigar o que ocorre com a soma dos ângulos internos de um triângulo, as condições de existência de um triângulo e sobre a soma dos ângulos internos e número de diagonais de polígonos regulares. Os enunciados foram entregues a cada estudante. Ao final de vários encontros, após algumas barreiras enfrentadas para a adaptação à metodologia investigativa, os alunos produziram relatórios nos quais apresentavam seus progressos em cada um deles (SILVA; QUARTIERE, 2008). Merece destaque uma situação ocorrida durante a aplicação da proposta pedagógica: em um grupo de alunos formado por alguns que tinham dificuldades em Matemática, um deles, que sempre mostrou desinteresse pela disciplina, concluiu, por si mesmo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus e perguntou à pesquisadora se isto estava correto.

Em outro artigo estudado, discutiu-se que um meio de ensinar Geometria é combinando experimentação, ou um enfoque empírico, ou seja, o aprendizado por intermédio dos sentidos (audição, visão, olfato e tato), com a investigação matemática (Bomtempo; Barreto (2019). Teve o objetivo de responder à questão: “Quais as possibilidades da construção de protótipos de casas serem cenários para a investigação para o estudo de Geometria?”.

Segundo esses autores, a experimentação e a vivência prática são auxiliadoras para um aprendizado eficiente da Geometria, pois nesta área do conhecimento ocorre o estudo do ambiente físico e da localização dos objetos. Assim, em Bomtempo e Barreto (2019), os estudantes construíram protótipos de casas, através das aplicações de conceitos geométricos importantes, como ângulos reto e agudo e perpendicularismo entre retas, analisando o motivo pelo qual as paredes são criadas usando linha reta, qual seria o melhor ângulo de inclinação do telhado e qual deveria ser o ângulo entre duas paredes para que se tenha equilíbrio. Os autores da pesquisa concluíram que ocorreu a elaboração e reelaboração dos assuntos sobre esta área do conhecimento. E que o trabalho com atividades investigativas associadas à experimentação proporcionou aos estudantes compreender a importância dos estudos e as razões de se estudar Geometria, além de maior entusiasmo e desempenho dos mesmos em sala de aula, durante o desenvolvimento das tarefas. Os autores argumentam que, em geral, os alunos têm

dificuldades de aplicar os conhecimentos adquiridos na escola em situações do dia a dia e que, com as investigações matemáticas, eles passaram a perceber como essa aplicação é possível.

Tendo estudado estas pesquisas, no próximo capítulo apresentaremos uma proposta de ensino e aprendizagem baseada em investigações matemáticas para o cálculo mental, e em situações-problema que trazem um certo caráter exploratório-investigativo para as grandezas de perímetros e áreas e a ideia de proporção, para o 6º ano do Ensino Fundamental.

2. Sequência Didática: uma proposta de investigação com o cálculo mental e Geometria para o 6º ano do Ensino Fundamental

Nesta seção, apresentaremos uma sequência didática com atividades investigativas para o cálculo mental e uma outra, com situações-problema que apresentam um caráter de tarefas exploratório-investigativas para perímetros, áreas e algumas ideias de proporcionalidade.

A seguir, apresentaremos as justificativas sobre as escolhas dos conteúdos de acordo com os documentos oficiais vigentes no Estado de São Paulo, bem como as duas sequências didáticas construídas neste trabalho.

2.1 Os conteúdos escolhidos na BNCC e no Currículo Paulista

Em relação às habilidades do currículo do Estado de São Paulo sobre cálculo mental, temos (os destaques abaixo são nossos):

(EF05MA07) Resolver e elaborar situações problema de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, **cálculo mental** e algoritmos. Esta habilidade é indicada para o 5º ano pela BNCC, assim como a próxima;

(EF05MA08) Resolver e elaborar situações-problema de multiplicação e divisão envolvendo números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, **cálculo mental** e algoritmos;

(EF06MA03) Solucionar e propor problemas que envolvam **cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados)** com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. Habilidade indicada para o 6º ano pela BNCC;

(EF06MA13) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam

porcentagens, com base na **ideia de proporcionalidade** sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, **cálculo mental** e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. Habilidade indicada para o 6º ano pela BNCC.

Sobre Geometria e Proporcionalidade, a BNCC (BRASIL, 2017) apresenta as seguintes habilidades:

(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e **proporcionalidade**), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, **cálculo mental** e algoritmos” (BRASIL, 2017, p. 291), para o 4º ano.

Dentro dos conteúdos curriculares do 5º ano, também consta: “Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da **proporcionalidade dos lados correspondentes**” (BRASIL, 2017, p. 296).

“(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a **proporcionalidade** entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais”, (BRASIL, 2017, p. 297), para o 5º ano.

Para o 6º ano, proporcionalidade aparece dentro dos eixos temáticos “Números” e “Grandezas e Medidas”. Como a situação descrita no documento envolve ampliação e redução de figuras planas e as relações de perímetro e área, é possível fazer um paralelo entre ambos os assuntos:

Como objeto de conhecimento do 6º ano, também se propõe: “Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado”, (BRASIL, 2017, p. 302).

“(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área”, (BRASIL, 2017, p. 303).

Relacionando as temáticas de cálculo mental e proporcionalidade, encontramos a habilidade proposta para o 6º ano, já citada anteriormente, (EF06MA13), com a qual o aluno deve ser capaz de resolver e elaborar situações-problema que envolvam porcentagens, com base na **ideia de proporcionalidade**, utilizando estratégias pessoais e **cálculo mental**.

Não encontramos uma relação direta simultânea entre cálculo mental, proporcionalidade e geometria nestas habilidades, mas podemos afirmar, citando os artigos que lemos, que um dos benefícios de se saber cálculo mental é fazer com que o aluno fique mais atento às partes principais para a resolução e proposição de problemas, sem precisarem desviar muita atenção às operações aritméticas que ali ocorram. Saber cálculo mental poderá ajudá-los a ficarem atentos nos aspectos principais do enunciado e da resolução. Além disso, ao se estudar as ampliações e reduções de figuras e as relações de proporcionalidade dos seus perímetros, pode-se estabelecer relações entre proporcionalidade, estudo de polígonos e grandezas e medidas, que envolvem também a possibilidade de algum cálculo mental com adições, multiplicações ou divisões.

2.2. Nossa proposta didática para os cálculos mentais:

Como já mencionado anteriormente, a habilidade de fazer cálculos mentais pode ser muito importante no cotidiano de cada um. Por exemplo, quando alguém vai ao cinema, além de comprar o ingresso, aproveita para pedir pipoca e comer durante o filme. Aqueles que possuem a habilidade de fazer cálculos mentalmente, perceberão, com rapidez, se o valor da compra e se troco estão corretos. Saber fazer “contas de cabeça”, como se diz em linguagem popular, ajuda a pessoa a ficar atenta em relação ao quanto se gasta, mesmo que seja uma diferença de centavos, pois é melhor ter moedas no seu bolso do que no bolso do grande capital!

Esta proposta de atividade exploratório-investigativa introdutória foi inspirada numa tarefa do *Caderno do Aluno* (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 17 e 19), para o 6º ano do Ensino Fundamental. A situação-problema a seguir será apresentada no início da aula sobre adição.

Imagine que você vai à lanchonete com os amigos e pede um hambúrguer e uma porção de batata-frita, cujos preços são R\$: 21,00 e R\$: 19,00, respectivamente. Na hora de ir embora, você está atrasado para pegar aquele cineminha e tem de pagar logo a conta, com uma nota de R\$50,00. Você paga e recebe um troco de R8,00. Como saber se ele está certo, rapidamente?

Após a tentativa de resolução dos alunos em pequenos grupos e a

apresentação de como resolveriam o problema, será estimulada uma discussão com os mesmos, de que essa é uma situação da vida real, na qual saber calcular mentalmente ajuda a se verificar quanto uma pessoa irá pagar ou receber de troco, e com baixa probabilidade de erro. Por outro lado, se contarmos nos dedos, unidade por unidade, chegaremos ao resultado final de modo lento e com alta probabilidade de errar, conforme mostra nossa experiência profissional como professor. Também, se formos fazer os cálculos na calculadora de um celular, por exemplo, até retirá-la do bolso e digitarmos, a fila do caixa pode ficar grande e vamos perder muito tempo.

Será feito o levantamento dos modos como os alunos resolveram o problema. Pode ser que a maioria faça as operações utilizando papel e lápis e os algoritmos convencionais de soma e subtração, mas espera-se que algum grupo sugira uma estratégia de cálculo mental. Se isto não ocorrer, o professor poderá levantar essa possibilidade e ver como eles o executariam.

Este problema servirá como motivação para a proposta das atividades investigativas seguintes.

Para a realização destas atividades, o professor utilizará projetor de imagens para explicá-las; os alunos poderão reunir-se em grupos de três ou quatro para que pensem juntos e escolham a melhor estratégia para realizar cada tarefa. O tempo estimado para a realização de cada atividade e a confecção do relatório (exceto para a última, que será mais breve) é de duas aulas, mais uma seguida para a discussão e síntese da investigação.

Antes do início da tarefa, o professor combinará com os alunos sobre o comprometimento destes para com a realização da mesma e com os colegas. Os alunos, durante essas atividades, não poderão usar calculadora, nem mexer no celular e nem conversar sobre qualquer assunto diferente daquilo que deve ser feito, devendo focar-se na tarefa. O professor deverá andar pela sala, ajudando aqueles que estão com dificuldade e desafiando os que estão apáticos e desmotivados. Neste momento, os alunos terão a oportunidade de dizer se concordam, ou se gostariam de propor alguma alteração no combinado.

Em seguida, será explicado que eles devem analisar formas de realizar as operações indicadas, mentalmente, sem fazer uso dos algoritmos convencionais com lápis e papel. Depois deverão analisar quais são as estratégias encontradas em cada caso, para realizar esses cálculos mentais. Estas deverão ser anotadas em

um relatório, o qual será entregue para a avaliação e o professor deverá explicitar quais serão os critérios para avaliá-lo. Segue no Anexo A, o formato do relatório e, abaixo, os critérios de avaliação escolhidos.

Atividade 1: Realizar os seguintes cálculos mentalmente, anotando em seu registro:

A. $24 + 18 =$

B. $35 + 38 =$

C. $26 + 39 =$

D. $78 + 27 =$

E. $45 + 86 =$

F. $134 + 69 =$

G. $143 + 48 =$

H. $216 + 67 =$

I. $237 + 66 =$

J. $333 + 59 =$

K. $444 + 117 =$

L. $115 + 218 =$

É provável que os estudantes tentem, num primeiro momento, resolver esta atividade armando cada operação e contando nos dedos, pois seria este modo que eles conhecem. Neste caso, o professor deverá orientá-los para achar estratégias mentais e conversarem com seus parceiros de grupo sobre elas, registrando-as depois de chegarem a um acordo.

Critério de avaliação: nos itens A) até L), cada exercício certo somará até 0,5 pontos. Na parte “explicação da investigação” os alunos deverão justificar cada exercício e esta etapa valerá 2,0 pontos. Conforme a riqueza das “conclusões”, serão atribuídos até 2,0 pontos. Em “reflexões críticas”, os alunos deverão escrever como foi a participação de cada membro do grupo na atividade, qual a dificuldade e se foi interessante. Esta parte contará um ponto de participação, se todos tiverem se engajado efetivamente.

Para a discussão dos resultados, o professor deverá chamar um representante de cada grupo para apresentar suas conclusões e promover uma votação sobre quais serão as estratégias consideradas mais eficientes para esses

cálculos mentais. Em seguida, deverá promover uma síntese das principais estratégias.

Espera-se que algumas delas sejam levantadas, como as apresentadas abaixo:

Soma dos algarismos de mesmo valor posicional: por exemplo, de modo geral, calcula-se a adição de unidades com unidades, dezenas com dezenas, etc e, em seguida, somam-se os resultados obtidos. Por exemplo: $100+25+5=100+20+(5+5)=100+20+10=100+(20+10)=100+30=130$.

Quando um dos números termina em 8: por exemplo, $25+8$. Genericamente, para adicionar um número terminado em oito, soma-se a dezena seguinte e subtrai-se dois: $25+10=35$, tira-se 2 e o resultado é 33.

Analogamente ao item anterior, quando um número termina em nove, soma-se a dezena seguinte e subtrai-se um. Quando termina em sete, soma-se a dezena seguinte e subtrai-se 3.

Também poderá ser questionado sobre o que fazer quando um dos números terminar em 6. Neste caso, pode-se pensar em se aproximar para a dezena posterior e subtrair 4 do resultado, ou simplesmente, se adotar a primeira estratégia, se for mais conveniente.

O próximo assunto importante para se fazer cálculo mental é a subtração. Para realizar esta atividade, o professor utilizará projetor de imagens para explicá-la; os alunos poderão reunir-se em grupos de três ou quatro para que pensem juntos e escolham a melhor estratégia para realizar cada tarefa. O tempo estimado para a realização dos cálculos e a confecção do relatório novamente será de duas aulas, mais uma seguida para a discussão e síntese da investigação. Esse tempo longo se deve ao fato de os alunos serem do 6º ano, com alta incidência de dispersão, e ainda por se supor que tenham poucas experiências com o cálculo mental. Mas ele poderá ser reduzido, conforme o desempenho da turma.

Antes do início da atividade, o professor combinará sobre as regras de participação dos alunos no cálculo mental de modo análogo às aulas com a adição.

Em seguida, novamente, será explicado que eles devem analisar formas de realizar as operações indicadas, mentalmente, sem fazer uso dos algoritmos convencionais com lápis e papel. Depois deverão analisar quais são as estratégias encontradas em cada caso, para realizar esses cálculos mentais. Estas deverão ser anotadas em um relatório, o qual será entregue para a avaliação (Anexo B).

Atividade 2: Realizar os seguintes de cálculos mentalmente, anotando em seu registro:

A. $16 - 7 =$

B. $16 - 8 =$

C. $27 - 18 =$

D. $28 - 17 =$

E. $27 - 18 =$

F. $40 - 10 =$

G. $40 - 19 =$

H. $40 - 11 =$

I. $41 - 32 =$

J. $41 - 35 =$

K. $42 - 37 =$

L. $100 - 93 =$

M. $100 - 96 =$

N. $121 - 22 =$

O. $147 - 48 =$

P. $147 - 49 =$

Q. $250 - 52 =$

R. $349 - 48 =$

S. $349 - 51 =$

T. $349 - 151 =$

U. $501 - 43 =$

V. $999 - 1 =$

W. $1000 - 1 =$

Novamente, alguns alunos poderão ainda insistir no uso da maneira tradicional de solucionar esta atividade, “armando a subtração no papel” e contando nos dedos. Aqui, novamente, caberá a intervenção do professor para tentarem fazer um raciocínio mental. Espera-se que, tendo já a experiência com a atividade das

somas, poucos alunos insistam nesse processo.

Critério de avaliação: nos itens A) até W), cada exercício certo somará até 0,25 pontos. Na parte “explicação da investigação” os alunos deverão justificar cada exercício e esta etapa valerá 2,25 pontos, pois agora esperamos que o aluno estará mais habituado com as justificativas. Conforme a riqueza das “conclusões”, serão atribuídos até 2,0 pontos. Em “reflexões críticas”, os alunos deverão escrever como foi a participação de cada membro do grupo na atividade, qual a dificuldade e se foi interessante. Esta parte contará um ponto de participação, se todos tiverem se engajado efetivamente.

O número de situações colocadas para a subtração é um pouco maior, pois se espera que os alunos já tenham a experiência com a adição e façam mais rapidamente as operações mentais.

Para a discussão dos resultados, o professor deverá chamar um representante de cada grupo para apresentar suas conclusões e promover uma votação sobre quais serão as estratégias consideradas mais eficientes para esses cálculos mentais.

Espera-se que as principais estratégias utilizadas sejam: *prova real*, por exemplo, para realizar $14-5$, o aluno deve pensar, qual número que somado com 5 seja igual a 14. Uma outra seria a subtração por partes convenientes, por exemplo, $14-5=(14-4)-1=10-1=9$, ou ainda, $15-5-1$. E, em outro caso: $27-18=27-10-7-1$.

Finalizando as atividades de cálculo mental, abordaremos a multiplicação por múltiplos de 10, em uma hora-aula, utilizando os mesmos recursos e combinados das aulas anteriores e indicando para que realizem as operações indicadas, mentalmente, sem fazer uso dos algoritmos convencionais com lápis e papel. Na aula seguinte, será feita a socialização dos resultados e discussões. Segue a lista de cálculos (relatório no Anexo C) a serem realizados:

Atividade 3: Realizar os seguintes de cálculos mentalmente, anotando em seu registro:

A. $10 \cdot 10=$

B. $100 \cdot 10=$

C. $1000 \cdot 10=$

D. $0,1 \cdot 10=$

E. $0,1 \cdot 100 =$

F. $0,1 \cdot 1000 =$

G. $6 \cdot 10 =$

H. $50 \cdot 10 =$

I. $60 \cdot 10 =$

J. $50 \cdot 100 =$

K. $49 \cdot 1000 =$

L. $10 \cdot 1000 =$

M. $10 \cdot 100 =$

N. $10 \cdot 6 =$

O. $100 \cdot 5 =$

P. $100 \cdot 3 =$

Q. $1000 \cdot 34 =$

R. $14 \cdot 10000 =$

S. $10000 \cdot 120 =$

T. $10000 \cdot 137 =$

U. $10000 \cdot 764 =$

V. $10000 \cdot 497 =$

W. $0,12 \cdot 10 =$

X. $0,15 \cdot 100 =$

Y. $0,17 \cdot 1000 =$

Z. $1,3 \cdot 10000 =$

Novamente, com esta atividade, pode ser que a primeira tentativa seja resolvê-la através da “multiplicação armada” e consulta das tabelas de tabuada. Mas com algumas poucas experiências assim, os alunos poderão rapidamente definir um padrão mental para os resultados.

Critério de avaliação: nos itens A) até Z), cada exercício certo somará até 0,23 pontos. Na parte “explicação da investigação” os alunos deverão justificar cada exercício e esta etapa valerá 2,0 pontos. Conforme a riqueza das “conclusões”, serão atribuídos até 2,0 pontos. Em “reflexões críticas”, os alunos deverão escrever como foi a participação de cada membro do grupo na atividade, qual a

dificuldade e se foi interessante. Esta parte contará um ponto de participação, se todos tiverem se engajado efetivamente.

Cada grupo deverá produzir um relatório com a síntese dos métodos utilizados e os critérios de avaliação serão os mesmos que nas aulas anteriores.

Após a discussão dos resultados, espera-se que as estratégias utilizadas na resolução apareçam:

1) ao se multiplicar um número por 10, 100, 1000, etc, que esse outro número seja copiado e se acrescente tantos zeros quantos constar nesse múltiplo de 10.

2) ao se multiplicar por 0,1; 0,01, 0,001 etc, deve-se copiar o outro número a ser multiplicado e andar com a vírgula da direita para a esquerda, conforme quantas casas decimais existirem no multiplicador. Por exemplo, o cálculo de $10 \times 0,1$ é feito, copiando-se 10 e andando com a vírgula uma casa decimal da direita para a esquerda, resultando em 1,0 ou 1.

3) Quando um número com casas decimais é multiplicado por múltiplos de 10, deve-se colocar os zeros que aparecem nesses múltiplos e andar com a vírgula para a direita, tantas vezes quantos forem esses zeros acrescentados. Por exemplo: $1,3 \times 100 = 130,0 = 130$.

O próximo passo será a apresentação de duas situações-problema com aplicações das atividades de cálculo mental, as quais deverão ser resolvidas pelos alunos.

Atividade 4: (SÃO PAULO, 2020, p. 37) Em uma avaliação com 100 testes, a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova foi de 16 para 20. Escreva na forma de fração irredutível a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova. Determine quantas questões o estudante acertou. Tente utilizar cálculos mentais.

Durante a discussão do problema será estimulado que os alunos pensem nas seguintes questões, após a leitura do enunciado:

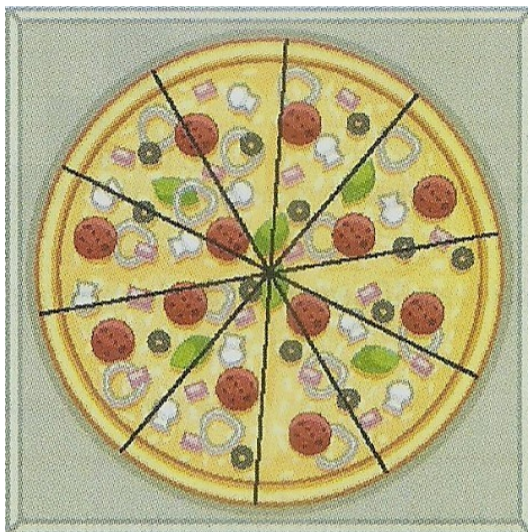
- a. O que é solicitado no problema?

- b. A avaliação é composta de quantos testes?
- c. Qual é a relação entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova?
- d. Como se representa a razão entre o número de questões que o estudante acertou e o total de questões da prova?
- e. O que significa escrever, na forma de fração irredutível, essa razão?
- f. Como calcular quantas questões o estudante acertou para responder a última pergunta do problema? É possível realizar esse cálculo mentalmente?

Após a leitura do enunciado pelo professor, os alunos conversarão com os colegas do grupo e devem registrar os dados no papel, procurando responder aos itens de *a* até *d*. Espera-se que tentem fazer as passagens dos itens *e* e *f* mentalmente, sem a utilização de papel e lápis. Caso sintam dificuldade com isso, o professor fará perguntas para relembrar com eles os conceitos de fração, razão, fração irredutível, que são os essenciais para resolver a atividade, incentivando-os a escreverem os primeiros passos na folha de resolução do grupo. Se os alunos demonstrarem apatia, o professor poderá desafiá-los, conforme está sugerido no ítem 1.2. Em seguida, cada membro do grupo voltará a conversar entre si sobre como finalizar a atividade.

Atividade 5: (SÃO PAULO, 2020, p. 43) A mãe de Carlos fez uma pizza de calabresa e dividiu em 10 pedaços iguais. Carlos comeu dois pedaços dessa pizza.

Figura 1 - Divisão em partes iguais



Represente, na forma fracionária e decimal, a quantidade de pizza que Carlos comeu, utilizando cálculos mentais, preferencialmente.

Durante a discussão do problema será estimulado que os alunos pensem nas seguintes questões, após a leitura do enunciado:

- g. O que é solicitado no problema?
- h. A pizza foi dividida em quantos pedaços? Todos os pedaços são do mesmo tamanho?
- i. Quantos pedaços de pizza Carlos comeu?
- j. Como representar na forma de fração a parte da pizza que Carlos comeu?
- k. Como cada um dos pedaços da pizza pode ser representado por um número decimal? Isso corresponde a que fração da pizza? Justifique.

De modo geral, os alunos sentem dificuldade em iniciar a resolução de qualquer atividade, mesmo quando estão resolvendo em grupo. Espera-se que pedirão ajuda ao professor e este relembrará com eles, os conceitos de fração e número decimal, os quais são os mais importantes e os incentivará a escrever os primeiros passos da resolução na folha de anotações; em seguida, os alunos voltarão a discutir a resolução, escrevendo as informações contidas no enunciado na forma fracionária e, depois, calculando a divisão para encontrar a forma decimal. O cálculo mental será usado na simplificação da fração e para realizar a divisão.

Se esta atividade e a anterior forem aplicadas na mesma aula de 45 minutos, pode acontecer de alguns alunos apresentarem cansaço e apatia ao final, então o professor poderá desafiá-los, do modo que foi discutido no ítem 1.2, para que continuem ajudando os amigos durante a resolução.

Os alunos serão orientados a fazer um breve relatório sobre a resolução destes problemas nos grupos.

Atividade 6:

Com o objetivo de aprimorar o aprendizado adquirido nas atividades acima, será aplicado o jogo seguinte. Para que os alunos tenham motivação em participar, o grupo que obtiver a maior pontuação receberá uma medalha de ouro simbólica; o que obtiver a segunda maior, a de prata e o que obtiver a terceira maior pontuação

receberá a de bronze. Se houver empates, todos com a mesma pontuação receberão a respectiva medalha.

Os alunos serão orientados que, para receberem as medalhas, deverão jogar no nível difícil e que poderão resolver cada rodada com os 2 ou 3 membros do grupo pensando em conjunto. Eles serão levados à sala de Informática, cujos computadores estarão conectados à Internet e tentarão resolver os exercícios. Se estiver ocorrendo qualquer problema técnico nesta sala, os alunos poderão usar o celular e conectá-lo à rede de Internet da escola. Ao final, o jogo mostrará a pontuação que o grupo obteve, o professor anotará e em seguida fará o ranking geral dos participantes, exibindo a pontuação de cada grupo em uma apresentação de *PowerPoint* transmitida para toda a turma.

Figura 2 - Jogo educativo



Fonte: <https://www.nossoclubinho.com.br/jogo-de-matematica-soma-subtraca/>

Com esse jogo, espera-se encerrar esta sequência didática e que os alunos tenham assimilado algumas boas estratégias para executar cálculos mentais e com alguma rapidez.

Estima-se que esta sequência possa ser desenvolvida em um tempo de doze a quatorze horas-aula (de 45 minutos).

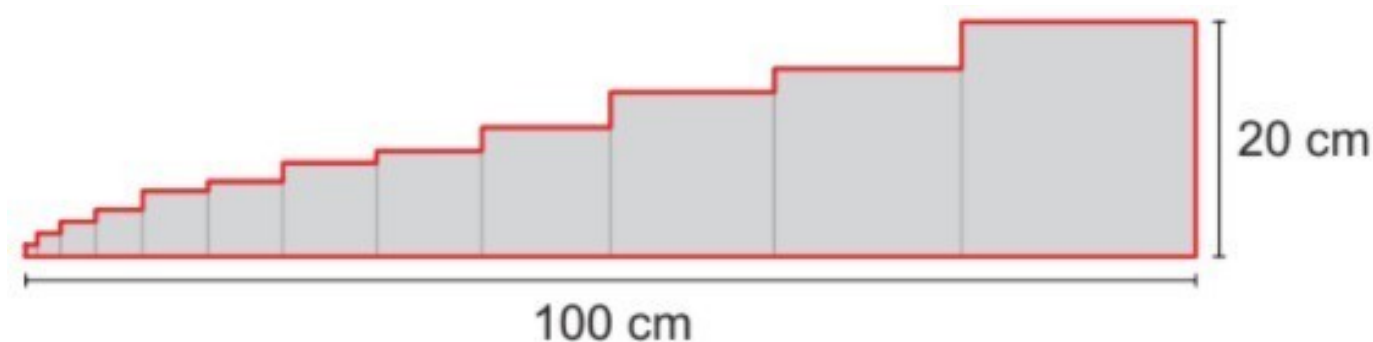
2.3 Nossa proposta didática para o estudo de perímetros, áreas e proporções:

Após o desenvolvimento de habilidades mais generalizadas com o cálculo mental, poderemos estimular os alunos a utilizá-las para pensar em situações-problema que envolvam perímetros, áreas e proporções. Aqui, não utilizaremos as investigações matemáticas com a estrita abordagem proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), mas levaremos os alunos a trabalharem em uma sequência de situações-problemas que têm um caráter investigativo, no sentido de que os levam a concluir sobre propriedades e relações entre áreas e perímetros de figuras proporcionais, além de descobertas de formas alternativas de pensamento matemático, ou a variação de técnicas, para resolver esses problemas e abordar os conceitos matemáticos necessários para tal.

Iniciaremos esta sequência apresentando aos alunos a seguinte situação-problema, a ser discutida em grupos de 4 componentes:

Situação 1: (OBMEP, 2017) Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?

Figura 3 - Cálculo de perímetro



Fonte: <https://drive.google.com/file/d/1FLmHogjZxSMKA9HrQBHgPh7mUVGaeMVb/view>

- a) 220 cm
- b) 240 cm
- c) 260 cm

d) 300 *cm*

e) 400 *cm*

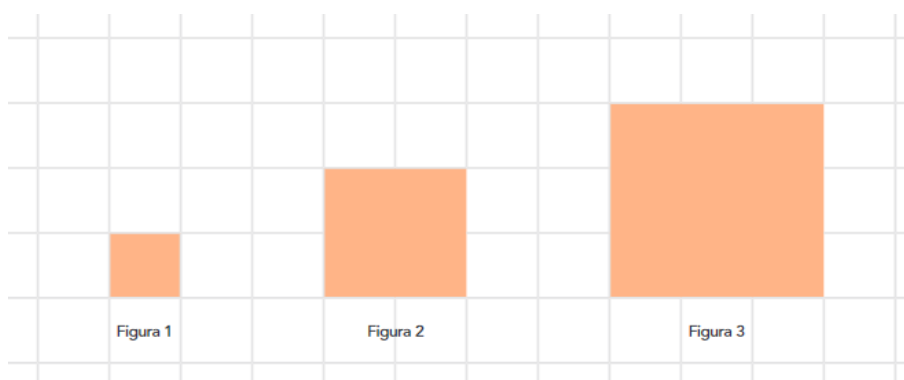
Como a atividade foi embasada na OBMEP, o grau de dificuldade para resolvê-la é um pouco maior do que as atividades anteriores, então pode ser que os alunos peçam ajuda várias vezes ao professor, o qual precisará, a princípio, lembrar com eles a definição de perímetro para continuarem a resolução. É provável que peçam ajuda novamente e ele precisará incentivá-los a escrever na folha de registro o primeiro passo para encontrar a solução. Assim, espera-se que os alunos consigam resolvê-lo. O cálculo mental será estimulado para calcular as operações de soma necessárias para encontrar o perímetro da figura.

O problema deverá ser discutido, combinando-se com a classe que todos no grupo devem se engajar para resolvê-lo e o professor irá mediar essa tentativa, estimulando os alunos a lerem e interpretarem o problema, destacando seus dados principais e registrando no papel, a forma como pensaram durante a resolução. Após um tempo de discussão, o professor deverá estimular um representante de cada grupo a apresentar na lousa a sua estratégia adotada e promover uma reflexão sobre as melhores e sobre como foram utilizados os cálculos mentais para resolver esse problema.

Na sequência, deverá apresentar outras situações-problema a serem investigadas, as quais deverão seguir os mesmos procedimentos combinados:

Situação 2: Numa malha quadriculada foram desenhados quadrados, tomando-se a figura 1 como unidade de medida. (adaptado de São Paulo, 2020, p.77).

Figura 4 - Proporção, área e perímetro

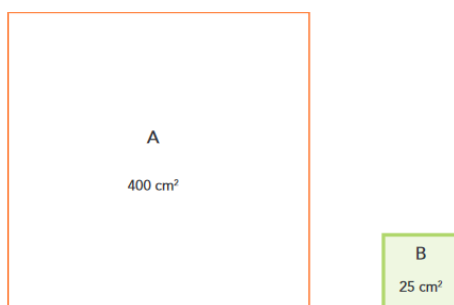


- i) Considerando que o quadrado da figura 1 tenha 1 cm de lado, calcule o perímetro e a área de cada quadrado.
- ii) Seguindo o padrão das três primeiras figuras, qual será o perímetro e a área das três figuras seguintes?
- iii) Junte-se ao seu grupo e analisem a sequência de construção dos quadrados e como mudam o perímetro e a área em cada caso. Existe alguma relação que vocês conseguem identificar, conforme aumentam os valores dos lados dos quadrados? Justifiquem sua resposta.

A dificuldade de iniciar a resolução de qualquer atividade é frequente para a maioria dos alunos, mesmo quando tentam resolver em grupo; então, o professor precisará estimulá-los a relembrar as definições de quadrado, área e perímetro; em seguida, pedirá aos alunos para tentarem resolver. Pode acontecer de alguns ainda terem dificuldade, então o professor deve incentivá-los a rascunhar as informações na folha de respostas, auxiliando-os com isso, para que possam resolver. O esquecimento das informações mais importantes de cada habilidade é algo frequente, então é muito provável que o educador precise relembrar como se deve calcular área e perímetro. O cálculo mental deverá ser estimulado nos momentos em que eles resolverão as operações matemáticas de soma e multiplicação para encontrar as áreas e os perímetros de cada item.

Situação 3: *Na imagem abaixo, por quanto devemos multiplicar o lado do quadrado B para que ele ocupe a mesma área do quadrado A? Use cálculos mentais para fazer as operações necessárias. (adaptado de SÃO PAULO, 2020, p.43).*

Figura 5 - Proporção e área



Agora analise a sua resposta. Por qual valor foi multiplicado o lado do quadrado B? (veja a proporção entre o lado de A e o lado de B). E por qual valor foi multiplicada a área do quadrado B para se obter a área do quadrado A? (veja a proporção entre a área de A e a área de B). Qual é a relação entre esses números? Será que essa relação sempre irá ocorrer sempre, para o lado e a área de qualquer quadrado?

Como esta atividade seria aplicada em alunos do 6º ano/5ª série e dependendo do período do ano letivo em que esta atividade seja aplicada, a representação de uma igualdade e equação pode não ser ainda muito familiar para eles; então, espera-se que peçam ajuda ao professor, o qual também deve estimulá-los a relembrar as definições de área e perímetro novamente. Pode ser que eles tentem resolver a questão por experimentação de valores e erro, utilizando cálculo mental para encontrar o fator multiplicativo do lado do quadrado B. Os estudantes não costumam demonstrar resistência em se utilizar da “tentativa e erro” na resolução, mas se demorarem mais para encontrar a resposta, poderão apresentar desânimo e, nesse caso, cabe ao professor desafiá-los para encontrar um método mais sistematizado de resolver a questão, através do registro de equações para representar os lados envolvidos e as respectivas áreas.

Esperamos estimular os alunos a lerem e compreenderem o enunciado, com as seguintes questões, conforme seja necessário em cada grupo: Qual é a área do quadrado A? O que significa essa área? O que é conhecido do quadrado B? Qual é o lado do quadrado B? Quanto ele mede? Como saber qual é o lado do quadrado A? etc...

Para a segunda parte da investigação, os alunos serão estimulados a compararem, experimentalmente, quantas vezes deverão colocar o quadrado B dentro do quadrado A, a fim de cobrir toda a sua área. Esperamos que, com as discussões nos grupos, alguns concluam que a área precisa ser multiplicada, agora, pelo valor que multiplicamos o lado elevado ao quadrado, ou multiplicado por si mesmo. Em todos os cálculos envolvidos, espera-se que os alunos usem ao máximo o cálculo mental, principalmente com o recurso da tabuada.

Após realizadas as discussões e anotações pelos grupos, cada um deverá apresentar as soluções encontradas e haverá uma breve discussão sobre elas, verificando quais foram (ou não) adequadas, e por quê.

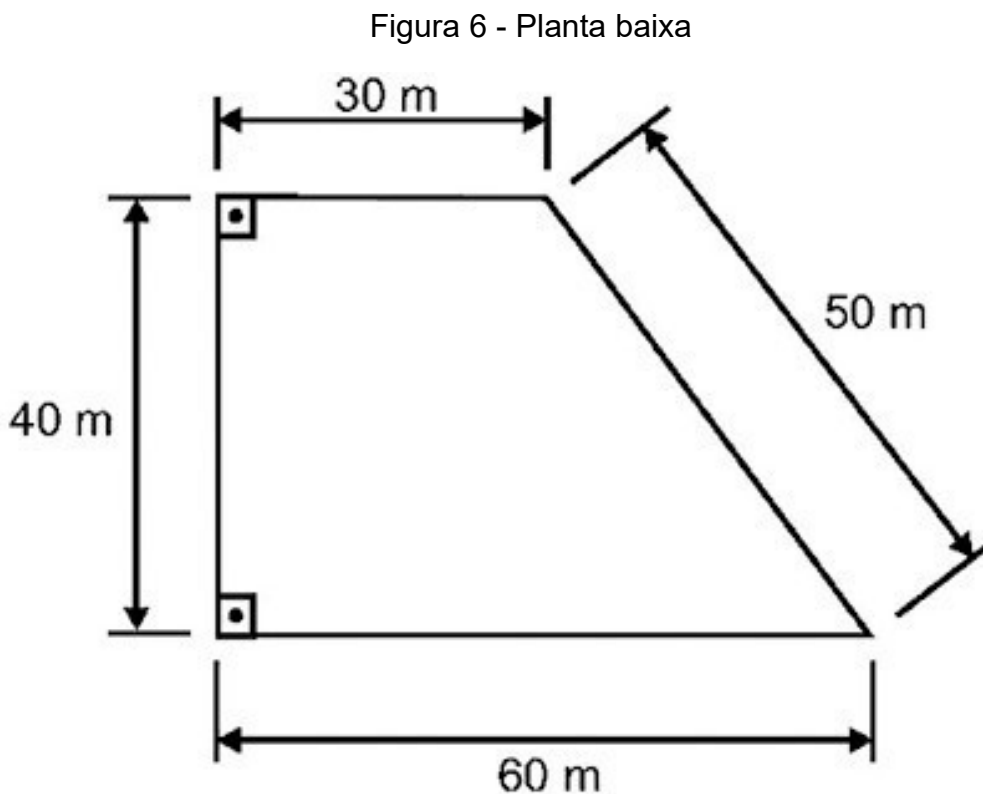
Depois disto, deverá ser sintetizado o conhecimento obtido com essas duas investigações, do seguinte modo:

“Quando o lado de um quadrado aumenta na proporção p (é multiplicado por p), seu perímetro aumenta na mesma proporção. Porém, a sua área aumenta na proporção $p \cdot p = p^2$ ”.

Na sequência, os alunos deverão resolver outros problemas envolvendo proporções entre lados, perímetros e áreas.

Problemas de fixação:

1. O desenho abaixo representa a planta baixa de um terreno com forma de um trapézio retângulo.



Fonte: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/saep/matematica/saep_mat_9ef/internas/d16.html

Qual é o perímetro do terreno? Com base em suas experiências anteriores, como se calcula o perímetro de uma figura geométrica poligonal?

(Problema adaptado de:

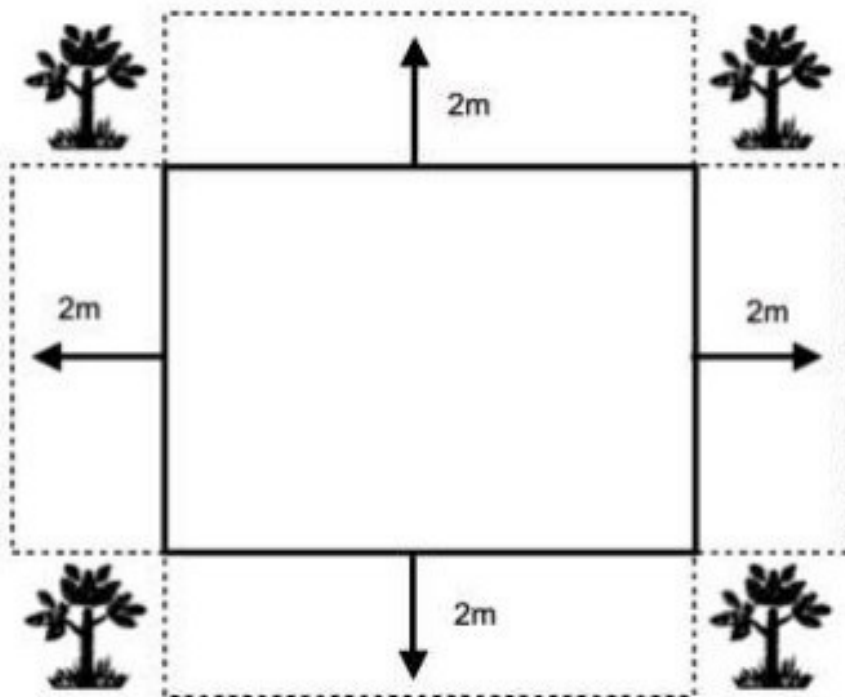
http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/saep/matematica/saep_mat_9ef/internas/d16.html, acessado em 21/06/2021).

Como a definição de perímetro foi lembrada nas atividades anteriores, é provável que não seja necessário um novo lembrete na aplicação desta e os estudantes consigam resolver com discussões entre os colegas do grupo. Caso alguém possua dúvida, o professor os aconselhará a observar as resoluções anteriores e explicará que não seria necessário saber a definição de trapézio para encontrar o perímetro da figura acima. O cálculo mental deverá ser estimulado para resolver a soma.

A aplicação desta atividade poderia ocorrer na aula seguinte a aplicação das anteriores, pois, mesmo a resolução sendo feita em grupo, o grau de dificuldade de toda proposta didática não é baixo, assim os alunos demonstrarão cansaço, mesmo se foram desafiados, o rendimento não terá a mesma qualidade. Ou seja, seria aconselhável que seja ministrado, em média, 3, ou 4, ou 5 atividades a cada aula de 45 minutos.

2. Uma praça quadrada, que possui um perímetro de 24 metros, tem uma árvore próxima de cada vértice e fora dela. Deseja-se aumentar a área da praça, alterando-se sua forma e mantendo as árvores externas a ela, conforme ilustra a figura.

Figura 7 - Praça quadrada



O novo perímetro da praça será:

- (A) 24 metros (B) 32 metros (C) 36 metros (D) 40 metros (E) 64 metros
- Descreva aqui, o que aconteceria com o perímetro da praça em relação a esta configuração, se as árvores fossem colocadas dentro dela. Seria maior, menor ou igual a quando aumentamos, mas as árvores ficam de fora?

(Adaptado

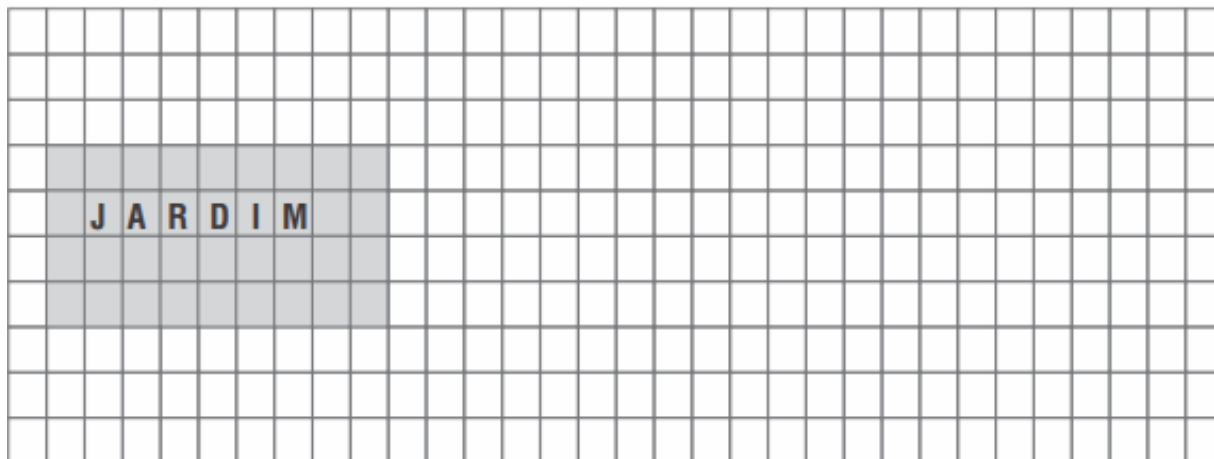
de:

https://www.educacao.ma.gov.br/files/2019/06/SD_MTM_D11_Perimetro_de_figura_plana-Professor.pdf. Acessado em 21/07/2021).

Muitos alunos de qualquer ano do Ensino Básico não percebem que se escreverem as informações contidas em cada enunciado, terão mais facilidade para encontrar a resolução. Em particular, algumas atividades de geometria plana sobre área e perímetro requerem esboços das formas geométricas para encontrar a resposta. Após este conselho transmitido pelo professor, ele também poderia aconselhá-los a consultarem as resoluções anteriores, assim os alunos tentarão resolvê-lo em grupo. Como a habilidade necessária para resolver este item foi lembrada nas atividades anteriores, é provável que um novo lembrete não seja necessário. O cálculo mental será usado para calcular as operações matemáticas de soma, que são as etapas para encontrar a medida de cada lado e o resultado final.

3. Na malha quadriculada desenhada abaixo, todos os quadradinhos têm o mesmo tamanho, e a parte colorida de cinza representa o jardim da casa de Luísa.

Figura 8 - Malha quadriculada



Nessa área quadriculada, Luísa quer construir uma quadra de esportes com o dobro das dimensões desse jardim. Para representar essa quadra, quantos quadradinhos ela utilizará?

- (A) 36
- (B) 72
- (C) 144
- (D) 288

Descreva duas estratégias possíveis para resolver este problema e decida qual é a mais rápida.

(Adaptado de: http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/750/Caderno2Reforco_Escolar_Matematica_EF.pdf
Acessado em 21/07/2021).

A princípio, alguns alunos poderão ter dificuldade em lembrar o significado de “dobro” e relacionar os conceitos de lado e dimensão. Em seguida, tentarão resolver a maioria dos passos mentalmente. Nesse momento, é importante que o professor os estimule a identificar quais seriam os primeiros passos da resolução, perguntando quais são os tamanhos dos lados do jardim atual, qual é a área do jardim e o que seria seu dobro, e finalizarão com um esboço no quadriculado. O cálculo mental seria usado para calcular as somas do número de quadradinhos em cada linha ou coluna, ou as multiplicações para o cálculo direto da área, conforme os alunos encontrem essas duas estratégias.

4. Considere um triângulo equilátero, cuja medida de cada lado vale 4 centímetros.

- a) Desenhe esse triângulo e calcule o perímetro dele.
- b) Agora considere um triângulo equilátero com 8 centímetros de lado. Qual é o seu perímetro?
- c) Compare o resultado de cada um dos itens anteriores. O que você pode concluir que acontece com o perímetro quando se dobra o tamanho do lado do triângulo?

No item a), será necessário o uso de régua, lápis e borracha para fazer o desenho, então o professor precisará relembrar a definição de triângulo equilátero

(no 6º ano é provável que ainda não tenham visto este conceito) e como se deve usar régua para desenhar a figura geométrica. Um lembrete de perímetro pode não ser necessário, pois já foi revisado anteriormente, em várias ocasiões. Após a resolução do item a), os estudantes conseguirão resolver sozinhos ou em grupo o item b). Já no item c), espera-se que os alunos peçam ajuda, pois ainda estão se acostumando a resolverem atividades que envolvem comparação de respostas; então, o professor precisará falar algumas dicas para que eles iniciem o exercício em sua folha de resposta, tentando lembrar a propriedade descrita na situação 3; espera-se que, assim, consigam solucioná-lo, estimulando-os a se esforçarem. O cálculo mental poderá ser usado para calcular a soma do perímetro.

5. Considere um retângulo, cuja medida da base é igual à 4 cm e altura mede 2 cm. Considere também outro com as medidas da base e da altura iguais à 8 cm e 5 cm, respectivamente.

- a) Calcule o perímetro do primeiro.
- b) Calcule o perímetro do segundo
- c) Compare o resultado de cada item anterior e responda se ambos são proporcionais. (Fonte: do autor)

Se esta atividade e a anterior forem ministradas no mesmo dia, não será necessário lembrar a definição de perímetro e nem explicar o que é pedido no item c), mas talvez seja necessário explicar o que é um triângulo retângulo e também, lembrar o conceito de proporção, assim conseguirão resolver os dois primeiros itens. No item c), é esperado que os alunos tendam, a princípio, a concluir que as figuras são proporcionais, apesar de não sentirem segurança para isto e peçam ajuda ao professor, o qual os ajudará através de perguntas desafiadoras, como: “o que deve acontecer com os lados dos triângulos de eles forem proporcionais?”; “quais são as medidas das bases e qual seria a proporção delas?”; “quais são as medidas das alturas? Elas respeitam a mesma proporção?”. O cálculo mental será usado para encontrar o perímetro de cada figura, de modo a não ser necessário “armar a soma”.

6. Pense e responda:

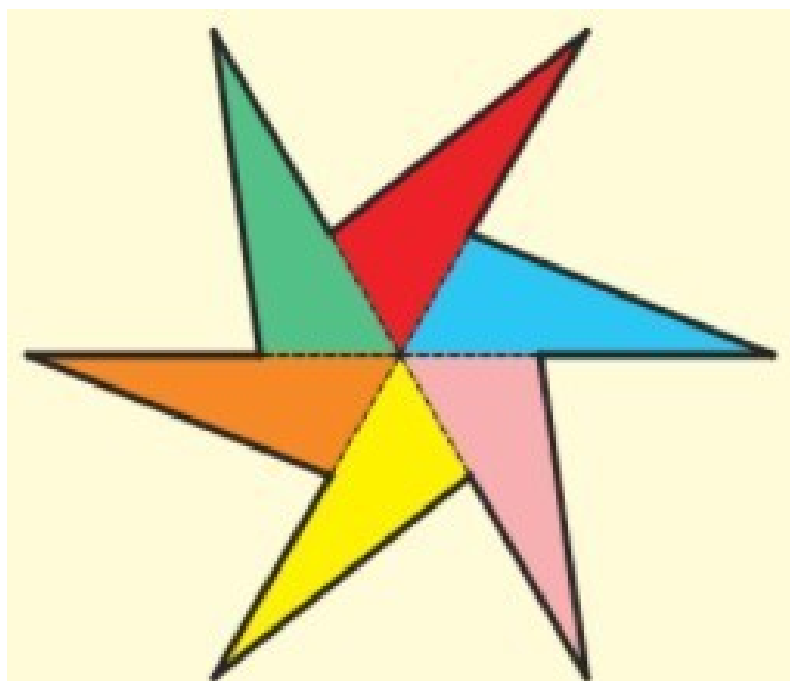
- a) Use o cálculo mental para determinar o perímetro e a área de um quadrado de lado 1.

- b) Faça o mesmo para um quadrado de lado 2.
- c) E o mesmo para um quadrado de lado 4.
- d) Compare os resultados de cada item anterior e responda o que seria possível concluir para os perímetros e as áreas. (Fonte: do autor).

Se esta atividade for aplicada no mesmo dia que o anterior, ou logo na sequência, não será necessário lembrar a definição de perímetro; talvez seja preciso recordar somente as de quadrado e área, para resolver os itens a), b) e c) sozinhos ou em grupo e, como qualquer quadrado é proporcional a outro quadrado, o professor deve estimular, para pensarem no item d), que relembrem o que acontece com as proporções dos perímetros quando mudamos o lado de uma figura proporcionalmente; depois, fazer a mesma pergunta sobre o que acontece com as áreas. O cálculo mental será usado nos itens a), b) e c) e no item d), para enxergarem que o perímetro do quadrado é o dobro do referente ao item a), e assim por diante.

7. (OBMEP, 2016) A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm , 7 cm e 8 cm . Qual é o perímetro da figura?

Figura 9 - Perímetro e triângulo

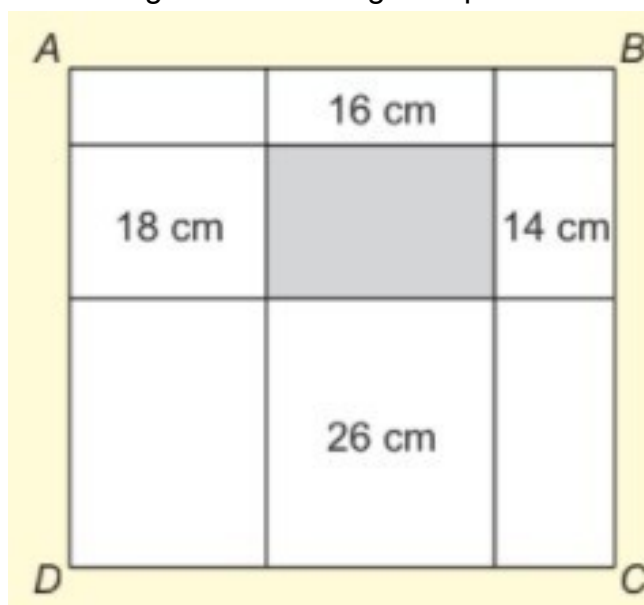


- a) 60
- b) 66
- c) 72
- d) 90
- e) 108

É provável que não seja necessária revisão de nenhuma habilidade para que os estudantes realizem a resolução, pois elas já ocorreram anteriormente. Espera-se que eles tenham dificuldade para encontrar a medida de cada lado da figura, ou seja, pedirão ajuda. O professor deve estimulá-los a anotar os valores dos tamanhos dos lados no desenho, para perceberem que o lado do triângulo que mede 8 cm será subtraído de 3 cm para se calcular o perímetro da figura. Também poderá questionar se é preciso calcular todos os perímetros em cada “ponta da estrela”, ou se basta sabermos o de uma delas; nesse caso, como se calcula o perímetro total da figura?”. O cálculo mental será usado para encontrar a medida de alguns lados e para encontrar o resultado final.

8. (OBMEP, 2016) O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo $ABCD$ é 54 cm . Qual é o perímetro do retângulo cinza?

Figura 10 - Retângulo e perímetro

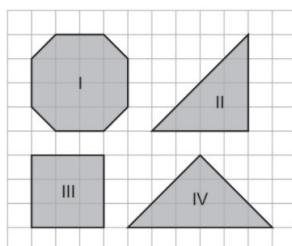


- a) 15 *cm*
- b) 19 *cm*
- c) 20 *cm*
- d) 22 *cm*
- e) 24 *cm*

Esta pode ser a situação-problema que seja mais complexa para os alunos dessa série escolar. Existem duas maneiras de resolver este problema: uma delas seria por sistemas de equações lineares, mas como não está previsto que alunos do 6º ano já tenham aprendido a habilidade correspondente a este conteúdo, será muito improvável que pensem nesta maneira de solucioná-lo. A outra maneira de resolver seria nomear cada pedaço dos lados do retângulo externo e considerar que a medida do lado de cada retângulo interno ao *ABCD* tem relação com a medida de cada lado do retângulo grande. É provável que o professor precise falar isto para que os alunos percebam o caminho que devem usar para solucionar o problema e depois estimulá-los a relacionar qual é o valor do perímetro do retângulo externo com as somas de todos os perímetros dos retângulos assinalados. Os alunos deverão concluir, por comparações geométricas ou algébricas, que a diferença entre eles será o perímetro do retângulo cinza. O cálculo mental será usado para efetuar as somas e subtrações. Como nas atividades anteriores foram feitas revisões das habilidades correspondentes aos conteúdos de perímetro e retângulo e os alunos aplicaram-nas durante as resoluções, é provável que um novo lembrete sobre isto seja desnecessário.

9. (OBMEP, 2015) Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

Figura 11 – Perímetro e polígonos



- a) IV e III
- b) IV e II
- c) IV e I
- d) III e II
- e) II e I

A princípio, pode-se tentar lembrar com os alunos quais são os nomes dos polígonos em cada figura (octógono, triângulos e quadrado). Em seguida, deverão ser questionados sobre o que acontece com os tamanhos das diagonais (segmentos inclinados em cada figura e das unidades não inclinadas) e assim estimulá-los a contar o número de segmentos equivalentes (de mesma medida) em cada figura. É preciso que percebam que não é necessário saber os valores dos tamanhos da diagonal e da unidade. O cálculo mental será usado para as somas envolvidas em cada caso.

10. (OBMEP, 2011) Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

- a) 48 *cm*
- b) 50 *cm*
- c) 52 *cm*
- d) 54 *cm*
- e) 56 *cm*

A possível dificuldade neste problema seria os alunos perceberem que cada lado do retângulo (folha) tem que ser subtraído por 2 antes de calcular o perímetro e o cálculo mental pode ser usado com a soma e a subtração. Nesta última atividade, é provável que não seja necessária revisão de nenhuma habilidade.

A experiência como professor dos Ensino Fundamental II e Médio possibilitou-me observar que a maioria dos estudantes prefere realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão mentalmente, então, a partir do momento em que eles sabem cálculo mental, terão mais facilidade em resolver a grande maioria das atividades. A experiência também possibilitou-me perceber que os estudantes

raramente estudam e fazem tarefa fora da escola; assim, tendem a esquecer qualquer habilidade ministrada e, por causa disto, foi descrita acima a revisão de algumas habilidades que seriam necessárias para que os alunos possam solucionar as situações-problema. Ou seja, recomendamos que as atividades de avaliação e trabalhos desta sequência devem ser aplicados dentro do horário de aula na escola.

Estimamos que essas tarefas de fixação demandem três ou quatro horas-aula, pois algumas delas apresentam enunciados mais complexos para a interpretação dos alunos. Sugerimos que elas sejam apresentadas em blocos de duas ou três, para a correção e síntese ao final de cada aula, com a participação dos alunos nessa discussão. No total, acreditamos que esta segunda sequência possa ser desenvolvida em um tempo de dez horas-aula.

3. Análise do que se espera com as atividades exploratório-investigativas

Na seção 2, foi apresentada a proposta didática, cujos objetivos são: i) desenvolver com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental algumas práticas de operações de adição, subtração e multiplicação sem a necessidade de usar papel e lápis e nem calculadora; ii) estudar situações envolvendo perímetros, áreas e proporções, associando-as ao uso do cálculo mental.

Para o desenvolvimento desta proposta, desejamos que os estudantes se reúnam em grupos de 3 a 5 pessoas, analisem cada situação apresentada e discutam entre si a melhor maneira de resolvê-la e, em seguida, preencham relatórios, os quais serão recolhidos para a avaliação do desempenho e evolução da aprendizagem dos grupos pelo professor. Após cada atividade, plenárias de discussão deverão ser realizadas, para as sínteses das descobertas e análise crítica das estratégias empregadas pelos estudantes em cada grupo.

A aplicação das duas sequências de ensino não foi realizada, devido às contingências trazidas pela pandemia mundial causada pelo vírus Sars-Cov2, a qual impôs o distanciamento social também para as atividades escolares. Com isso, os alunos passaram a ter aulas remotas e, na escola pública onde este professor atua, como muitos não tinham acesso aos recursos para a participação nas mesmas, não seria viável aplicar essa metodologia exploratório-investigativa, uma vez que a frequência dos estudantes era muito baixa. Mesmo após o retorno às aulas presenciais, que ocorreu no semestre letivo em curso, o sistema público estadual demandou uma série de exigências específicas para a recuperação da aprendizagem desses alunos, de modo que não houve abertura para a aplicação da proposta em questão.

Assim, nesta seção faremos uma análise do que se espera encontrar com uma aplicação da mesma, a fim de refletir e auxiliar outros colegas professores a avaliar sua pertinência, possíveis vantagens e desvantagens, à luz das teorias estudadas e também de nossas experiências e práticas de ensino na escola pública.

3.1 Habilidades da BNCC que se espera sejam alcançadas

Na subseção 2.1, mostramos as habilidades contidas na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) que foram consideradas para a proposta didática sobre o cálculo mental. Esperamos que esta sequência forneça as bases para que cada aluno adquira as habilidades EF02MA05 (adição e subtração no cálculo mental ou escrito), EF03MA05 (utilização de diferentes procedimentos de cálculo mental ou escrito), EF03MA06 (resolver diferentes problemas de adição e subtração), EF04MA03 (resolver problemas de adição e subtração de números naturais), através das situações investigativas das atividades 1 e 2, e as habilidades EF03MA03 (utilização de multiplicação para o cálculo mental) e EF04MA06 (resolver problemas de multiplicação, através de vários modos) com as atividades 1 e 3.

Esperamos que a aplicação da sequência de ensino sobre o cálculo mental traga algumas dificuldades, como: a princípio, os alunos podem apresentar resistência em ficar em silêncio para ouvir as explicações das atividades, depois poderão gastar um tempo maior que o esperado para se organizarem em grupos e, quando iniciarem a realização de cada atividade, não terão facilidade de explicar as sugestões para resolvê-las, não falarão com segurança sobre os modos de resolução, alguns poderão apresentar dificuldade de discutir com os colegas, devido a terem tido poucas experiências em grupos para encontrar a melhor maneira de chegar aos resultados. Esperamos que alguns demorem mais do que a maioria para se aproximarem das soluções e apresentem dificuldades em calcular as somas, subtrações e multiplicações com números de três algarismos e sem o uso de calculadora. Após uma aula de 45 minutos de trocas de ideias, alguns alunos poderão sentir cansaço e começarem a se dispersar, pois a concentração pode ser menor em uma situação de discussão entre os próprios pares. Na escola pública, é provável que uma pequena parcela de alunos também apresente dificuldades de representar os números através da escrita e entender o que esta representação significa, por não terem consolidado ainda os significados para o sistema decimal. Mas acreditamos que a sequência didática proposta irá contribuir para ajudar esses alunos nessa compreensão, à medida que terão de decompor os números para

realizar os cálculos mentais de diversas maneiras.

Na subseção 2.1, também foram apresentadas as habilidades de geometria contidas na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) e desejamos que nossa proposta didática atinja as seguintes: EF05MA18 (reconhecer a proporcionalidade entre lados correspondentes de figuras poligonais semelhantes), EF06MA29 (analisar mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado, quando se alteram as medidas dos lados).

Durante a aplicação da proposta didática de perímetro, área e proporção, é provável que as mesmas dificuldades apresentadas anteriormente para o cálculo mental também ocorram, além de maiores resistências e necessidade de mais tempo para resolver as atividades exploratório-investigativas, pois estas são embasadas em provas da OBMEP, que demandam um esforço intelectual um pouco mais intenso. Também esperamos que haja maiores dificuldades com a leitura e interpretação dos enunciados dos problemas de geometria, uma vez que estes enunciados são mais longos e nem todos os alunos apresentam as habilidades esperadas de leitura no 6º ano. Pode ser, ainda, que eles não se lembrem dos nomes dos polígonos e não saibam o que significa uma unidade de medida. Todas essas dificuldades deverão ser superadas pouco a pouco, com a mediação do professor no decorrer de cada atividade, ou de um colega mais capaz, dentro dos grupos de discussão.

3.2 Estudos teóricos sobre os processos de desenvolvimento e as sequências propostas

Na seção 1 foi tratado dos processos psicológicos segundo a teoria de Vygotsky, a qual afirma que o ser humano passa, em certo momento de seu desenvolvimento, de biológico para sócio-histórico, num processo influenciado pela cultura. Ainda, Vygotsky menciona a importância dos processos mentais superiores, como tipicamente humanos, os quais são desenvolvidos pelas trocas sociais.

Assim, acreditamos que as atividades que propusemos por meio de investigações matemáticas, ao estimularem as trocas de sugestões para sua resolução entre os estudantes, contribuirão para o desenvolvimento psicológico dos indivíduos com a socialização dos conhecimentos prévios de todos os participantes nos grupos e para a construção de novos conhecimentos. Além disso, segundo Vygotsky, a escola tem a função primordial de desenvolver tais funções

psicológicas superiores, pois ela (a escola) faculta o aprendizado, impulsionando o desenvolvimento. Supomos que o ensino específico de estratégias do cálculo mental, como aqui sugerimos, possibilitará aos estudantes que tenham mais facilidades de *generalizar* e resolver situações que envolvam tais cálculos em outros contextos. Considerando a nossa proposta didática para perímetros, áreas e proporções, o aprendiz terá possibilidades de ter uma noção espacial mais aprimorada, generalizando algumas propriedades que relacionam esses conceitos.

Acreditamos que uma outra vantagem de se aplicar a sequência didática sobre o cálculo mental desde o 6º ano, é que os jovens poderão compreender as propriedades operatórias dos números naturais e inteiros com mais facilidade, terão mais tempo para praticá-las, enquanto resolvem atividades matemáticas investigativas em outros anos escolares também. Com essas experiências, esperamos que eles apresentem mais habilidades para descobrir várias estratégias de resolução de problemas que envolvam cálculos com números.

Outro conceito importante apresentado na seção 1 foi o de *mediação*, ou seja, que a relação do ser humano com o ambiente em que vive é mediada pelos processos simbólicos. Nesse projeto, o cálculo mental é um processo de generalização e abstração e é mediado pelos símbolos e signos que representam o sistema numérico culturalmente estabelecido no país (sistema indo-arábico), que passa de uma representação externa para uma representação mental, caracterizando o que Vygotsky chama de processo de *internalização*. Ou seja, os símbolos e signos numéricos passarão a constar na mente do aluno e poderão ser usados em qualquer situação da vida diária. Dentro desse sistema simbólico de representação numérica, estão as propriedades generalizadas de posicionamento decimal e também distributivas da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Por exemplo, quando um aluno vai à cantina da escola para comprar um doce, ele olha o cardápio, observa as opções e os respectivos preços, ou seja, o nome de cada item e o respectivo valor fazem parte dos objetos simbólicos que são utilizados para que a relação do humano com o mundo seja mediada. Aplicando esta ideia ao presente texto, o jovem aprende a escrever os números, em alguma etapa do ensino, ou seja, os números escritos são as marcas externas, os quais fazem parte de um sistema simbólico; em seguida, ou paralelamente, e com estudo, o aluno entra no processo de internalização. Com o passar dos anos escolares, o estudante aprende as operações, que são representadas pelos símbolos da soma,

subtração, multiplicação e divisão, os quais fazem parte de um sistema simbólico matemático e passarão por um processo de internalização também (a representação física dos números e símbolos operatórios, através da escrita, será substituída por uma representação mental). Por exemplo, numa situação em que os jovens devem conferir seu troco numa compra, terão de operar com os números envolvidos nessa situação mentalmente, sem a necessidade de concretizá-la com notas monetárias, ou com a escrita desses números, ou em um papel, ou uma calculadora. Desse modo, acreditamos que o trabalho estimulado para os cálculos mentais contribuirá para o desenvolvimento desses processos psicológicos superiores.

Supomos que, ao aplicar estes conceitos na proposta didática de cálculo mental para alunos do 6º ano, a maioria dos estudantes já tenha aprendido a escrever os números e fazer as operações básicas, com marcas externas ou mentais, ou seja, em ambos os casos, que o aluno já tenha passado pelo processo de internalização em algum grau. O passo proposto por esta dissertação é utilizar atividades exploratório-investigativas para facultar que cada estudante aprimore essa internalização, assim como passe ao registro intrapsicológico algumas propriedades das operações com números, como a distributiva, a qual é bastante utilizada no cálculo mental. Assim, as experiências investigativas sugeridas na seção 2 podem ajudar o jovem a compreender com mais facilidade os sistemas simbólicos de representação dos números em nossa sociedade, ao promover diferentes decomposições dos números para facilitar as operações mentais com eles.

Com relação à ideia de *zona de desenvolvimento proximal* (zdp), de Vygotsky, ou seja, a diferença entre o nível de desenvolvimento real e o potencial, acreditamos que nossa proposta esteja dentro da zdp dos alunos do 6º ano, pois já aprenderam a ler e escrever os números e fazer as operações aritméticas básicas com lápis e papel. Com a nossa proposta, esperamos que eles assimilem, através das tarefas exploratório-investigativas, propriedades dos números que são utilizadas para fazer estas operações sem o uso de calculadora e nem papel e lápis.

Ainda com relação à *generalização*, na subseção 2.3, propusemos uma situação investigativa sobre perímetro (Situação 2), a qual é passível de ser aplicada na vida cotidiana, pois é necessário encontrar o perímetro de uma região, que pode aumentar ou diminuir em relação a outra.

Imaginamos que, historicamente, o ser humano fez e refez várias medições de terras ao longo do tempo, registrou-as e, depois, analisando esses registros várias vezes, acabou encontrando uma regra geral que, neste caso, é a proporção em que o perímetro de um terreno aumenta ou diminui, conforme se aumenta ou diminui os seus lados, de modo semelhante. O próximo passo foi provar que a regra geral encontrada, também entendida por generalização, estava correta. Assim, acreditamos que através da investigação matemática proposta, o estudante poderá observar as figuras geométricas, fazer medições, ser levado a algum lugar da escola para fazer medições e registros, experimentalmente, e chegar a essas conclusões.

Segundo Bomtempo e Barreto (2019), a geometria ajuda a perceber o mundo e a localizar objetos. Por exemplo, na Idade Antiga, é sabido que os egípcios construíam as residências nas margens do rio Nilo. Quando começavam os períodos de chuva, este rio transbordava e as divisas entre as residências eram destruídas. Então, era necessário ter conhecimentos para medir terras e reconstruir as divisas. Supõe-se que foi assim que a geometria nasceu, da necessidade de medir terras⁸. Desse modo, historicamente, foram sendo criados signos mediadores entre o sujeito e o mundo, ou seja, as ideias e representações dos ângulos, dos polígonos, poliedros, de modo que são usadas para compreender o mundo hoje e localizar os objetos.

Acreditamos que utilizando a metodologia aqui proposta, com as atividades exploratórias e a investigação matemática de geometria, os alunos terão a possibilidade de estudar essas representações simbólicas dos polígonos (principalmente sobre os quadrados, triângulos, ângulos e lados), internalizando seus conceitos e também sua nomenclatura. Também as atividades propostas os ajudarão a iniciar a *generalização* das noções de áreas, perímetros e proporções, uma vez que verificarão a construção de propriedades envolvendo a semelhança entre figuras, experimentando, testando e concluindo sobre hipóteses levantadas. Isso faz parte do pensamento matemático, que é altamente generalizante, e esperamos que este tipo de atividade possa instrumentalizar os alunos para, no futuro, estender essas experiências a outras aprendizagens em Matemática.

Em síntese, segundo Vygotsky, a escola tem a função fundamental de desenvolver as funções psicológicas superiores, conseqüentemente, tem a função de estruturar o psicológico de cada indivíduo e isto só será alcançado conhecendo-

8 <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria#Hist%C3%B3ria>. Acessado em 29/10/2021.

se o seu nível de desenvolvimento no momento da ação didática. Assim, o professor tem o papel de influenciar na *zona de desenvolvimento proximal (zdp)* dos estudantes para estimular avanços que não ocorreriam espontaneamente. Para que o desenvolvimento em Matemática possa ocorrer com mais facilidade, o professor pode propor situações que estimulem o aprendizado de conceitos, propriedades e modos de raciocínios organizados. Dessa maneira, a Investigação Matemática é um método que acreditamos contribuir significativamente para o aprimoramento dessas funções psicológicas superiores, porque o aluno se reúne em grupo, compartilha ideias com os colegas, cria conjecturas e, depois, o professor ajuda a verificar se estas estão corretas, havendo, assim, trocas culturais direcionadas para o seu desenvolvimento.

Na subseção 1.3, foram citados vários artigos que mostraram os benefícios de se ensinar cálculo mental para as crianças, corroborando nossa ideia de que a aplicação dessa proposta didática consiga fazer com que os alunos adquiram uma melhor compreensão dos assuntos relativos a esses cálculos, gastem menos tempo para encontrar o resultado de cada operação e aprimorem a compreensão e execução das operações aritméticas básicas, acostumando-se a resolvê-las com números cada vez maiores, até interiorizarem os racionais, decimais, com velocidade e autoconfiança. Acreditamos, ainda, que ela possibilite liberdade e flexibilidade para que o estudante escolha o modo que julgar melhor para chegar ao resultado, ou seja, a autonomia intelectual do pensamento, com o uso do cálculo mental. Além disso, ao realizarem os cálculos de forma mais rápida, os alunos terão a atenção focada nas partes mais complexas e importantes dos problemas abordados; poderão entender com mais facilidade as propriedades das operações com números reais, como a associativa e comutativa, por exemplo, e compreender melhor a base decimal; espera-se que o aluno tenha maior facilidade de realizar deduções, análises, sínteses, analogias e generalizações, ter mais facilidade de encontrar equivalências e decomposições e competência para resolver problemas numéricos do cotidiano. Estas são as vantagens que se espera a curto e médio prazo, ou seja, durante o período do Ensino Básico. A longo prazo, já na fase adulta, o cálculo mental poderá ajudar os indivíduos a aperfeiçoar competências que extrapolam as fronteiras da Matemática, como tomar decisões, trabalhar com outras pessoas, baseando-se na correta manipulação dos números. Ou seja, de modo geral, tanto a curto e médio, como a longo prazo, o cálculo mental, associado a

experiências matemáticas investigativas, poderá fornecer as bases para o desenvolvimento de certas funções superiores, auxiliando no desenvolvimento da inteligência.

3.3 As investigações matemáticas como metodologia e as sequências propostas

Na subseção 1.2, foi apresentada a metodologia de ensino com as *investigações matemáticas*, que consiste, basicamente, em uma situação proposta e analisada, em encontrar relações entre objetos matemáticos conhecidos e desconhecidos. Essa metodologia é dividida em quatro etapas principais: i) exploração e formulação de questões, ii) levantamento de conjecturas, iii) teste e reformulação, e iv) justificativa e avaliação. Ou seja, de modo geral, com a etapa de formulação de questões e proposição de conjecturas, os estudantes farão passos similares a pesquisadores de matemática para que possam construir novos conhecimentos na escola e para as suas vidas, em geral. Esta metodologia de ensino será usada principalmente, na proposta didática para o desenvolvimento do cálculo mental para alunos do 6º ano, para que eles encontrem algumas propriedades dos números que facilitam as operações aritméticas sem o uso de calculadora e nem papel e caneta.

Com isto, espera-se, que eles adquiram maior capacidade de se relacionar com os colegas da turma, fixar as habilidades aplicadas pelas tarefas e aprimorar o raciocínio lógico-matemático, o que poderá se estender a facilidades em entender outros objetos do conhecimento da Matemática.

A proposta didática de Geometria possui objetivos similares. Acreditamos que seria mais aconselhável aplicar, primeiramente, a do cálculo mental, pois os alunos consolidarão propriedades dos números que os ajudarão a resolver as situações-problema de Geometria; conseqüentemente, os estudantes terão mais uma oportunidade para praticar suas novas habilidades adquiridas com os números. Além disso, o estudo de Geometria facultará aos alunos adquirirem uma noção espacial mais aprimorada.

Enfim, como “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 13), a proposta didática de cálculo

mental possibilitará aos estudantes encontrar as propriedades dos números descritas nas páginas anteriores e, em relação à de geometria, facultar ao jovem uma melhor compreensão espacial com as noções de semelhança, proporções e suas relações a serem descobertas com as ideias de áreas e perímetros.

3.4 Considerações finais

Alguém poderá argumentar que estas duas propostas tomarão um tempo didático muito longo, porém, para que as investigações gerem significados para os conceitos e propriedades trabalhados, é necessário que os estudantes realmente se envolvam em sua exploração, realizando descobertas e sínteses por si mesmos, o que exige um investimento em tempo dedicado às atividades.

Desse modo, esperamos que estas duas sequências didáticas aproximem os alunos do que chamamos de aprendizagem significativa, com suporte na teoria Vygostiana, ao fazer com que eles aprendam as propriedades e conceitos matemáticos nelas envolvidos *com significado*, ou seja, com integração à sua rede de conhecimentos prévios e culturais mais gerais, sendo capazes de aplicá-los a situações generalizadas. Entendemos que esta ideia também dialoga com a teoria de Ausubel (2003) sobre *aprendizagem significativa*, à medida que esses conhecimentos prévios podem ser associados ao que esse último autor chama de subsunçores.

Segundo Ausubel (2003) e Moreira (1999), este tipo de aprendizagem consiste em um processo através do qual uma informação nova se relaciona com um aspecto especificamente relevante da estrutura cognitiva da pessoa, denominado *subsunçor*, de tal maneira a modificá-lo ou alterar a informação recentemente adquirida. Portanto, na *aprendizagem significativa*, a informação recente é melhor compreendida e mais suscetível de ser aplicada em várias situações. Não adentraremos em muitos detalhes sobre essa teoria, uma vez que não era o objeto de estudo desta dissertação.

Finalizamos este trabalho, considerando, ainda, que vários alunos da educação básica, nos anos subsequentes ao 6º, podem não ter tido nenhuma experiência com formas sistematizadas de pensar o cálculo mental, ou de generalizar as ideias de proporcionalidade de perímetros para figuras semelhantes, e do crescimento da área com a proporção quadrática. Assim, esta sequência

poderá ser aplicada também em séries posteriores, considerando-se que os tempos de aplicação poderão ser mais rápidos, conforme o amadurecimento desses estudantes em cada ano escolar.

Deixamos também, aqui, o desejo de que este material sirva de modelo para a reflexão de outros colegas professores, para que possam criar suas próprias sequências de ensino com atividades exploratório-investigativas, ao desenvolver outros assuntos e habilidades matemáticas em suas aulas.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Revisão científica de Vitor Duarte Teodoro e tradução de Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BERTICELLI, Danilene Donin. **Cálculo mental no ensino primário (1950-1970)** - um olhar particular para o Paraná. Tese (Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, p. 157. 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/180391> . Acessado em 25/11/2020.

BOMTEMPO, K; BARRETO, M. F. T. Os Cenários de Investigação Matemática como Metodologia para o Ensino de Geometria no Ensino Fundamental. **Anais do XII EBRAPEM**, Rio Claro-SP, 05 a 07 de setembro de 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/183-1-A-gt8_bomtempo_ta.pdf.pdf. Acessado em 23/07/2021.

BRASIL (País). Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> e http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acessado em 03/06/2021.

CARDOSO, Antônio Carlos de Souza. **Cálculo mental: disciplina mental, cálculo rápido**. TCC (Graduação). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 69p. 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/189357/TCC%20-%20ANTONIO%20CARLOS%20DE%20SOUZA%20CARDOSO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>, acessado em 25/11/2020.

CONTI, K. C.; NUNES, L. M. A. Cálculo mental em questão: fundamentação teórica e reflexões. **REVEMOP**. Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 361-378, set./dez. 2019. Disponível em: [2Fpp%2Findex.php%2Frevemop%2Farticle%2Fdownload%2F1784%2F1668&usg=AOvVaw0JGJaaMLwTArXinAG21rZc](https://www.revemop.org.br/index.php/revemop/article/download/1784/1668&usg=AOvVaw0JGJaaMLwTArXinAG21rZc), acessado em 25/11/2020.

FONTES, C. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais**. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 220p. 2010.

MOREIRA, A. M. **Teorias de aprendizagem**. EPU: São Paulo: EPU, 1999.

NERES, Raimundo Luna; ALMEIDA, Will Ribamar Mendes; OLIVEIRA, Elisbetânia Nascimento de; ALMEIDA, Gylmara Kylma Feitosa Carvalhêdo; SAMPAIO, Renan Tavares Pinheiro. Reflexões sobre o uso de cálculos mentais com alunos de uma escola pública: uma experiência usando registros semióticos. **Revista Espacios**, v. 39, n. 40, p. 15, 2018. Disponível em: <https://www.revistaespacios.com/a18v39n10/a18v39n10p15.pdf>, acessado em 25/11/2020.

OLIVEIRA, Marta Khol de. **Vygotsky - aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico**, São Paulo: Ed. Scipione, 1995.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação Matemática na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Cadernos do Aluno**, 2020. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/downloads/SPFE%206%20ano%20EF%20vol%203%20PARTE%201.pdf>. Acessado em 08/06/2021.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Aprender Sempre** (Cadernos do Aluno), 2020.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo** (Cadernos do Aluno), 2014-2017.

SOARES, Flávia dos Santos. Cálculo Mental e Ensino de Aritmética em Escolas da Cidade do Rio de Janeiro no Final do Século XIX. **Bolema**, v. 33, n. 63, p.177-204, abr. 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n63/1980-4415-bolema-33-63-0177.pdf> . Acessado em 25/11/2020.

SILVA, M. A.; QUARTIERE, M. T. Ensinar e Aprender Geometria Plana por meio de

Investigações Matemáticas: Possibilidades e Reflexões. **Anais do VI CONEDU- Congresso Nacional de Educação**, Fortaleza- CE: Realize Editora, 24 a 26 de outubro de 2019. Disponível em:

<http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/>

TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID10603_15082019003331.pdf. Acessado em 23/07/2021.

Links consultados:

Lev Vygotsky. **Wikipédia**. Disponível em:

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Lev_Vygotsky>. Acessado em 20/05/2020.

FILOGENÉTICO. **Dicio**. Disponível em <<https://www.dicio.com.br/filogenetico/>>. Acessado em 16/06/2020.

PEREIRA, Luis Carlos Bresser. Marxismo e Política. **SciELO**.

<https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-75901980000100009>. Acessado em 17/06/2020.

CONJECTURA. **Wikipédia**. Disponível em:

<<https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura>>. Acessado em 08/08/2020.

<<https://www.nossoclubinho.com.br/jogo-de-matematica-soma-subtracao/>>. Acessado em 04/04/2021.

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/saep/matematica/saep_mat_9ef/internas/d16.html>. Acessado em 21/06/2021.

<<http://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Acessado em 24/10/2021.

<<https://drive.google.com/file/d/1FLmHogjZxSMKA9HrQBHgPh7mUVGaeMVb/view>> Acessado em 24/10/2021.

<https://drive.google.com/file/d/1eKRYzPZX2ZYQLpa-uB32IAmCLiucv-o_/view>. Acessado em 24/10/2021.

<<https://drive.google.com/file/d/188rcPvCr4oKQOY4PSnBP5AUeT5ZU6myY/view>>. Acessado em 24/10/2021.

< <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria#Hist%C3%B3ria>>. Acessado em 29/10/2021.

ANEXOS

ANEXO A: Atividade 1 - Investigação matemática e cálculo mental

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Calcule mentalmente:

A. $24 + 18 =$

B. $35 + 38 =$

C. $26 + 39 =$

D. $78 + 27 =$

E. $45 + 86 =$

F. $134 + 69 =$

G. $143 + 48 =$

H. $216 + 67 =$

I. $237+66=$

J. $333+59=$

K. $444 +117=$

L. $115+ 218=$

Explicação da investigação: (anote aqui como você realizou cada caso)

Conclusões: (anote aqui as estratégias principais que você usou para fazer os cálculos mentais)

Reflexões críticas: (anote aqui, o que você achou mais difícil ou fácil e qual foi a sua participação no grupo para realizar esses cálculos):

(para os alunos, será deixado espaço suficiente em cada item)

ANEXO B: Atividade 2 - Investigação matemática e cálculo mental

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Calcule mentalmente:

A. $16 - 7 =$

B. $16 - 8 =$

C. $27 - 18 =$

D. $28 - 17 =$

E. $27 - 18 =$

F. $40 - 10 =$

G. $40 - 19 =$

H. $40 - 11 =$

I. $41 - 32 =$

J. $41 - 35 =$

K. $42 - 37 =$

L. $100 - 93 =$

M. $100 - 96 =$

N. $121 - 22 =$

O. $147 - 48 =$

P. $147 - 49 =$

Q. $250 - 52 =$

R. $349 - 48 =$

S. $249 - 51 =$

T. $349 - 151 =$

U. $501 - 43 =$

V. $999 - 1 =$

W. $1000 - 1 =$

Explicação da investigação: (anote aqui como você realizou cada caso)

Conclusões: (anote aqui as estratégias principais que você usou para fazer os cálculos mentais)

Reflexões críticas: (anote aqui, o que você achou mais difícil ou fácil e qual foi a sua participação no grupo para realizar esses cálculos):

ANEXO C: Atividade 3 - Investigação matemática e cálculo mental

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Nome: _____

Nº: _____

Calcule mentalmente:

A. $10 \cdot 10 =$

B. $100 \cdot 10 =$

C. $1000 \cdot 10 =$

D. $0,1 \cdot 10 =$

E. $0,1 \cdot 100 =$

F. $0,1 \cdot 1000 =$

G. $6 \cdot 10 =$

H. $50 \cdot 10 =$

I. $60 \cdot 10 =$

J. $50 \cdot 100 =$

K. $49 \cdot 1000 =$

L. $10 \cdot 1000 =$

M. $10 \cdot 100 =$

N. $10 \cdot 6 =$

O. $100 \cdot 5 =$

P. $100 \cdot 3 =$

Q. $1000 \cdot 34 =$

R. $14 \cdot 10000 =$

S. $10000 \cdot 120 =$

T. $10000 \cdot 137 =$

U. $10000 \cdot 764 =$

V. $10000 \cdot 497 =$

W. $0,12 \cdot 10 =$

X. $0,15 \cdot 100 =$

Y. $0,17 \cdot 1000 =$

Z. $1,3 \cdot 10000 =$

Explicação da investigação: (anote aqui como você realizou cada caso)

Conclusões: (anote aqui as estratégias principais que você usou para fazer os cálculos mentais)

Reflexões críticas: (anote aqui, o que você achou mais difícil ou fácil e qual foi a sua participação no grupo para realizar esses cálculos):

(para os alunos, será deixado espaço suficiente em cada item)