



ERICO ALESSANDRO VOLPE

**BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA
PROBLEMAS CLÁSSICOS ENVOLVENDO A CICLOIDE**

Santo André, 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ERICO ALESSANDRO VOLPE

**BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA
PROBLEMAS CLÁSSICOS ENVOLVENDO A CICLOIDE**

Orientador: Prof. Dr. Armando Caputi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ERICO ALESSANDRO VOLPE,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ARMANDO CAPUTI.

SANTO ANDRÉ, 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Volpe, Erico Alessandro
Braquistócrona e Tautócrona : Problemas Clássicos Envolvendo a
Cicloide / Erico Alessandro Volpe. — 2020.

39 fls. : il.

Orientador: Armando Caputi

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,
Santo André, 2020.

1. braquistócrona. 2. cicloide. 3. tautócrona. I. Caputi, Armando. II.
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, 2020. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André ☐, 14 de Dezembro de 2021 .

Elio Alessandro Volpe Balpe

Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

ARMANDO CAPUTI



Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)



FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato ERICO ALESSANDRO VOLPE, realizada em 11 de Agosto de 2020:

Dr. ARMANDO CAPUTI, UFABC

Presidente - Interno ao Programa

Dra. BÁRBARA COROMINAS VALÉRIO, USP

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. EDUARDO GUERON, UFABC

Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

Dr. SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

Dra. ROSA MARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES, USP

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

O presente trabalho foi realizado com apoio da
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Fi-
nanciamento 001

Dedico este trabalho a meus pais, pelo apoio e incentivo, minha esposa e filha pela compreensão e paciência, além de Deus pela oportunidade e conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador professor Armando Caputi pela paciência e sugestões para conclusão deste trabalho.

Aos docentes pelos conhecimentos transmitidos durante este período, em especial ao professor Rafael de Mattos Grisi, pelo suporte.

Ao Thiago de Lima da secretaria da Pós-Graduação, pelas informações prestadas.

Ao Cristian Roberto Miccerino de Almeida, sempre disposto a ajudar com minhas dúvidas no GeoGebra.

Aos colegas de estudo, que mesmo aos finais de semana nos reuníamos para troca de conhecimento.

Aos meus pais, sogro, sogra, minha esposa e filha amadas, pelo suporte e paciência durante este período, principalmente nas épocas de exames.

“Insanidade é continuar fazendo sempre a mesma coisa e esperar resultados diferentes.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho trata dos clássicos problemas da braquistócrona e da tautócrona, problemas que trazem em seu bojo as origens do pensamento matemático moderno. É dividido em três partes: na primeira, dedicada ao problema da braquistócrona, apresentamos uma breve contextualização histórica, a formulação do problema e duas de suas soluções – uma baseada na resolução original de Johann Bernoulli, outra baseada em argumentos geométricos elementares; na segunda, dedicada ao problema da tautócrona, seguimos o mesmo fio, apresentando a solução baseada nas ideias de Jakob Bernoulli; por fim, na terceira parte, apresentamos uma atividade com o GeoGebra® a ser realizada com estudantes do ensino médio, baseada em um argumento de Galileu Galilei relacionado ao problema da braquistócrona.

Palavras-chave: cicloide, braquistócrona, tautócrona

ABSTRACT

In this work we deal with the brachistochrone and tautochrone classical problems, which in some way represent the origins of modern mathematical thought. It is divided into three parts: the first one, dedicated to the brachistochrone problem, starts with some historical notes, followed by the statement of the problem itself and two solutions – one due to Johann Bernoulli, the other one based on elementary geometric arguments; the second part, dedicated to the tautochrone problem, similarly starts from historical notes, then presents the problem and a solution due to Jakob Bernoulli; finally, the third part presents a GeoGebra[®] activity to be developed with high school students, based on an argument by Galilei related to the brachistochrone problem.

Keywords: cycloid, brachistochrone, tautochrone

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Acta Eruditorum - Problema da Braquistócrona	3
Figura 2	Cicloide gerada pela rotação de um círculo sobre uma reta, sem deslizamento	7
Figura 3	Arco de cicloide após rotação sem deslizamento por um arco t	7
Figura 4	Figura original de Bernoulli para a construção da cicloide por AB	9
Figura 5	Qual o caminho de tempo mínimo entre dois pontos A e B ?	10
Figura 6	Subdivisão em vários meios distintos	12
Figura 7	Caminho da partícula	13
Figura 8	Minimizando o tempo localmente	16
Figura 9	Obtenção geométrica da braquistócrona	19
Figura 10	Pequeno deslocamento da partícula	20
Figura 11	Pêndulo cicloidal	24
Figura 12	Figura de Galileu sobre a queda de uma partícula ao longo de um polígono circular (Galileo Galilei, <i>Le Opere</i> , vol. VIII, Firenze 1965, 262 <i>apud</i> [7])	29
Figura 13	Tempo de descida em linha reta e através de dois segmentos	31
Figura 14	Comparando descida através de dois e quatro segmentos	32
Figura 15	Maquetes de curvas	34
Figura 16	Cicloide e circunferência	34
Figura 17	Cicloide e circunferência	35

CONTEÚDO

Lista de Figuras	xvii
Introdução	1
1 BRAQUISTÓCRONA	3
1.1 Notas Históricas	3
1.2 Cicloide: a curva braquistócrona	6
1.3 Solução de Johann Bernoulli via raio de luz	8
1.4 Solução Geométrica	15
2 TAUTÓCRONA	23
2.1 Breve história da Tautócrona	23
2.2 Solução de Jakob Bernoulli	25
3 COMPLEMENTOS	29
3.1 Ilustrando o argumento de Galileu através do GeoGebra [®]	29
3.2 Uso de maquetes para ilustra o Problema da Braquistócrona	34
Bibliografia	37

INTRODUÇÃO

Os problemas da braquistócrona e da tautócrona são problemas clássicos e bem conhecidos, além de largamente utilizados no âmbito da Educação Matemática em trabalhos que visam à maior integração entre o Ensino Médio e o conhecimento matemático mais avançado. De fato, tais problemas, por si só estimulantes e instigadores da curiosidade, trazem embutidas as origens do pensamento matemático moderno, ao mesmo tempo em que proporcionam soluções alternativas baseadas quase que integralmente em argumentos elementares, majoritariamente geométricos.

Este trabalho não foge a essa regra e boa parte das motivações estão representadas nas palavras acima. Mas seu foco principal residia, ao menos em nossa concepção original, no aprofundamento da natureza e das possibilidades dessa interação entre o elementar e o avançado. A objetivo seria o de ir além da mera curiosidade, do anedotismo das disputas históricas, da replicação de experiências já desgastadas. Sem abrir mão de mostrar e explorar a beleza e inspiração desses problemas, tratava-se de identificar, neles, os elementos com maior potencial de trabalhar, junto a estudantes do Ensino Médio, aspectos constituintes do pensamento matemático. Infelizmente, o advento da pandemia, junto com outras questões circunstanciais, inviabilizou essa extensão do trabalho e nos vimos obrigados a restringir seu escopo ao tratamento usual desses problemas.

Por outro lado, merece registro um aspecto marginal, mas não menos importante, que abordamos neste trabalho. Trata-se de um "reparo histórico" a Galileu Galilei, diante de um juízo equivocado e precipitado difundido por Leibniz e que, lamentavelmente, acabou propagado pela historiografia oficial por longo tempo.

O trabalho está dividido em três capítulos: os dois primeiros são dedicados aos problemas da braquistócrona e da tautócrona, respectivamente, enquanto o terceiro propõe uma atividade a ser realizada com estudantes do Ensino Médio. Os dois primeiros capítulos iniciam cada qual com uma breve contextualização histórica, seguida da formulação do problema e de suas soluções. Para o problema da braquistócrona é apresentada a solução de Johann Bernoulli, em versão mais atual, e uma solução baseada em argumentos geométricos elementares. Para o problema da tautócrona é apresentada

a solução baseada nas ideias de Jakob Bernoulli. Por fim, no terceiro e último capítulo, é apresentada uma proposta de atividade com o GeoGebra® baseada em um argumento de Galileu relativo ao problema da braquistócrona. Tal argumento é usado como ponto de partida para, além de explorar o próprio problema da braquistócrona, colocar os estudantes diante de formas de pensamento típicos do cálculo.

BRAQUISTÓCRONA

1.1 NOTAS HISTÓRICAS

O Problema da Braquistócrona

O *Problema da Braquistócrona*¹ pode ser considerado um marco simbólico do início do Cálculo Variacional (Cf. [4]), área da matemática que teve forte desenvolvimento ao longo do Século XVIII, principalmente nos trabalhos de Euler e Lagrange. Marginalmente, mas digno de nota, esse mesmo problema também se constituiu em mais um capítulo da bem conhecida disputa entre Gottfried W. Leibniz e Isaac Newton sobre a prioridade na criação do Cálculo.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua descendens & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

Figura 1: Acta Eruditorum - Problema da Braquistócrona

1 Do grego *brákhistos* (mais curto) e *chrónos* (tempo)

O problema foi proposto por Johann Bernoulli² na revista *Acta Eruditorum* [1], em Junho de 1696³. Em sua formulação original, ele foi assim enunciado: *Dados dois pontos A e B em um plano vertical, determine um caminho AMB de um corpo móvel M, ao longo do qual o corpo chegará ao ponto B, sob a ação da própria gravidade e partindo de A, no menor tempo.*

Ao estender o prazo para respostas, conforme sugestão de seu amigo Leibniz, de seis meses para um ano e meio, Johann Bernoulli reformulou o problema como se segue: *Encontre o caminho ligando dois pontos fixados, escolhidos em diferentes alturas e não na mesma vertical, ao longo do qual um corpo móvel, caindo pela própria gravidade e partindo do ponto mais alto, irá descer mais rapidamente para o ponto mais baixo.*

Uma formulação mais moderna para o problema da curva de menor tempo pode ser assim enunciada:

Problema da Braquistócrona

Dados dois pontos A e B em um plano vertical, dispostos em diferentes alturas e não na mesma reta vertical, determinar a trajetória ao longo da qual é mínimo o tempo de deslocamento de um ponto material P que, sob a exclusiva ação da gravidade, vai do ponto mais alto ao ponto mais baixo.

Johann Bernoulli apresentou o problema na forma de desafio matemático, algo comum à época, e o fez dirigindo-se assim a seus contemporâneos ([12]):

Eu, Johann Bernoulli, dirijo-me aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente para as pessoas inteligentes do que um problema genuíno e desafiador, cuja possível solução lhe dará fama e permanecerá como um monumento duradouro. Seguindo o exemplo de Pascal, Fermat etc, espero receber a gratidão de toda a comunidade científica ao colocar diante dos melhores matemáticos de nossa época um problema que testará seus métodos e a força de seu intelecto.

As menções a Pascal e a Fermat no trecho citado podem parecer um pouco gratuitas - e talvez o sejam - mas é curioso notar que ambos têm alguma relação, mesmo que indireta, com o desafio de Bernoulli: por um lado, Pascal foi autor, em 1658, de vários

² Também conhecido como *Jean* (francês) ou *John* (inglês). Adotaremos a versão alemã *Johann*.

³ Apesar de anunciá-lo como *problema novum*, Johann Bernoulli foi avisado por Leibniz de que o problema já havia sido considerado por Galileo Galilei. Retomaremos essa menção a Galilei mais adiante.

desafios públicos relacionados à cicloide (a curva braquistócrona, como veremos); por outro, a solução do próprio Johann tem como ideia fundamental o Princípio de Fermat de que a luz percorre o caminho de menor tempo (retomaremos essa ideia mais adiante).

O desafio de Bernoulli não ficou sem resposta e, ao longo do período em que ficou aberto, vários matemáticos atenderam a seu chamado. Além da solução do próprio Johann, publicada em outro número da mesma revista, em 1697, outras foram apresentadas por seu irmão mais velho Jakob⁴ Bernoulli, Gottfried Wilhelm Leibniz, Isaac Newton⁵, Marquis de L'Hospital e Ehrenfried Walther von Tschirnhaus.

Neste trabalho, apresentaremos em roupagem moderna a solução proposta por Johann Bernoulli, assim como uma versão geométrica dessa mesma solução.

Perpetuação de um erro histórico

Em maio de 1697, Gottfried Leibniz Como dissemos, Leibniz alertou Bernoulli de que o problema da braquistócrona já havia sido considerado por Galileo Galilei. Mas Leibniz cometeu um erro ao afirmar que Galilei teria identificado o arco de círculo como sendo a braquistócrona, concluindo, injustamente, que ele não foi capaz de obter a solução⁶. Infelizmente para Galilei, Johann deu por certa a informação de Leibniz e a propagou, assim como muitos outros, até os dias atuais (Cf. [7]).

Essas alegações de Leibniz foram publicadas por ele no número de maio de 1697 da *Acta Eruditorum* [9]. Curiosamente, nesse mesmo artigo, Leibniz reconheceu que Galileo Galilei não dispunha, à época, das ferramentas do cálculo infinitesimal - não sem lembrar, repetidas vezes, de que ele, Leibniz, o tinha descoberto - necessárias para dar conta do problema da braquistócrona. Mas tal reconhecimento não foi suficiente para que Leibniz, talvez mais interessado em afirmar sua primazia sobre a invenção do Cálculo, fizesse uma leitura correta de Galilei, evitando assim essa injustiça histórica (Cf. [7] e [6]).

4 Também conhecido como *Jacques* (francês) ou *James* (inglês). Adotaremos a versão alemã *Jakob*.

5 Na verdade, a solução de Newton foi publicada anonimamente, mas Bernoulli reconheceu a autoria, afirmando que "o leão se reconhece por sua pegada". Estudos históricos posteriores confirmam essa interpretação. (Cf. [6])

6 Em tempo, embora fuja ao tema deste trabalho, vale dizer que Leibniz também afirmou - e também erroneamente - que Galilei teria identificado a catenária como sendo uma parábola.

Mas o que disse Galilei, afinal? Ele, de fato, considerou o que se poderia chamar de versão simplificada do problema da braquistócrona ao comparar o tempo de descida ao longo de um arco de círculo com aquele ao longo de uma poligonal qualquer. Vejamos o que ele efetivamente afirma, em seu *Discursos e demonstrações matemáticas em torno a duas novas ciências* (Teorema XXII, Proposição XXXVI, Cf. [6]):

Se uma corda é traçada a partir do ponto mais baixo de um círculo vertical, de modo a abarcar um arco não maior do que um quadrante, e se das extremidades dessa corda duas outras adicionais são traçadas até um ponto qualquer do referido arco, a descida ao longo destas duas cordas leva menos tempo do que ao longo da primeira.

Após a demonstração desse teorema, Galilei complementa seu raciocínio: "*Ele inicia com uma linha poligonal inscrita no arco de círculo e continua o processo iniciado no teorema, i.e., substituindo qualquer segmento fixo (corda) da linha poligonal, por um par de cordas, traçadas de suas extremidades até um qualquer ponto comum do arco, construindo assim uma nova linha poligonal, que não só está mais próxima da circunferência, mas também cuja descida demora menos tempo.*" (Herrera, [6]). A partir desse raciocínio e considerando esse processo indefinidamente, Galilei conclui que a descida ao longo do arco de circunferência leva menos tempo do que qualquer linha poligonal, e não qualquer outra curva.

1.2 CICLOIDE: A CURVA BRAQUISTÓCRONA

A solução do problema da braquistócrona é bem conhecida e é, como veremos nas próximas seções, um *arco de cicloide* que tem, em seu ponto mais alto, a reta tangente vertical. Estudemos, então, a curva cicloide.

Uma cicloide é a trajetória descrita por um ponto da borda de um círculo, quando este gira ao longo de uma guia retilínea sem deslizar (Figura 2). Claramente, círculos de raios distintos geram cicloides distintas.

Para determinarmos uma parametrização da cicloide, representemos no plano cartesiano a situação acima descrita, tomando um círculo "apoiado" sobre o eixo das abscissas, sobre o qual realizará o movimento de rotação sem deslizamento. Ainda, como a cicloide tem um comportamento evidentemente periódico, estudaremos somente o arco

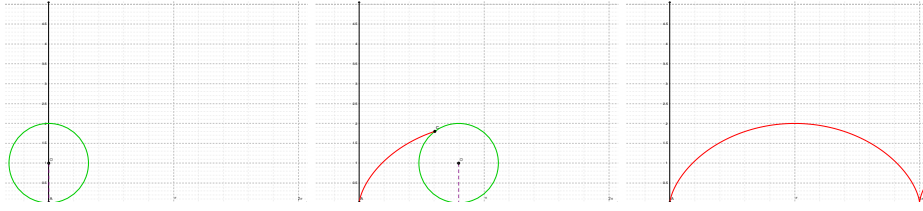


Figura 2: Cicloide gerada pela rotação de um círculo sobre uma reta, sem deslizamento

de cicloide descrito entre dois momentos sucessivos em que o ponto "gerador" está em contato com o eixo x .

Assim, tomemos um círculo de raio r e centro $C(0, r)$ e, nele, tomemos o ponto P da cicloide na posição "inicial" $(0, 0)$. Após uma rotação sem deslizamento desta circunferência no sentido anti-horário por um arco t , tal ponto se encontra em nova posição (x, y) , cujas coordenadas queremos determinar (Figura 3).

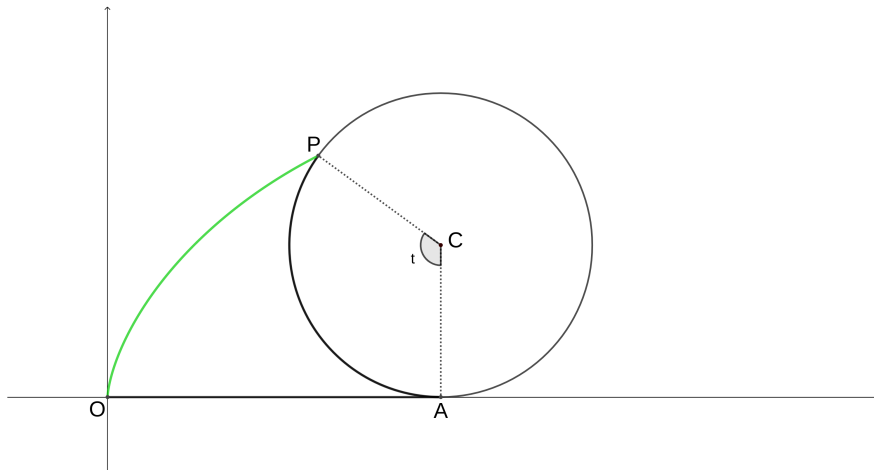


Figura 3: Arco de cicloide após rotação sem deslizamento por um arco t

Para isso, iremos descrever o movimento do ponto P combinando sua rotação em torno do centro C do círculo e a translação horizontal deste último. Em termos vetoriais

$$P = C + \overrightarrow{CP}$$

A condição de *não deslizamento* se expressa através da condição de que o comprimento do arco \widehat{AP} é igual ao comprimento do segmento \overline{OA} . Como este último é também a abscissa do centro C , resulta $C = (rt, r)$.

Quanto ao movimento de rotação de P em torno do centro C , ele pode ser descrito aplicando ao vetor \overrightarrow{CP} a matriz de rotação por um arco t no sentido anti-horário:

$$\begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix}$$

Como a posição inicial do ponto P , relativa ao centro C , tem coordenadas $(0, -r)$, obtemos

$$\overrightarrow{CP} = (-r \text{sen } t, -r \cos t)$$

Deste modo, a posição do ponto P em cada instante do movimento é dada por

$$P = C + \overrightarrow{CP} = (rt, r) + (-r \text{sen } t, -r \cos t)$$

ficando portanto determinada a seguinte parametrização da cicloide:

$$\boxed{P(t) = (r(t - \text{sen } t), r(1 - \cos t))} \quad (1.1)$$

1.3 SOLUÇÃO DE JOHANN BERNOULLI VIA RAIOS DE LUZ

Nesta seção, apresentaremos inicialmente as ideias gerais da solução de Johann Bernoulli e, em seguida, uma versão atualizada dessas mesmas ideias, com seu devido detalhamento. As referências utilizadas são [4] e [6], assim como, suplementarmente, [13] e [10].

Ideia geral da solução original de Johann Bernoulli

A solução proposta por Johann Bernoulli e publicada em 1697 na *Acta Eruditorum Lipsiæ* ([2]) é baseada no Princípio de Fermat⁷, adaptado à mecânica do movimento do corpo que se desloca sob ação exclusiva da gravidade, no sentido do enunciado do problema da braquistócrona. Sua ideia principal consistiu em subdividir o plano no qual se dá o movimento em faixas horizontais de diferentes densidades e, a partir de considerações sobre o fenômeno da refração, identificar a trajetória do raio de luz com o movimento de queda livre de um corpo:

⁷ Nas palavras do próprio Bernoulli ([6]): "Um raio de luz, indo de um meio mais rarefeito a um mais denso, deve refratar para a normal, de modo que o raio, supostamente avançando do ponto iluminador para o iluminado, siga o caminho de menor tempo".

Se [considerarmos um meio] composto por um grande número de faixas horizontais, cujos interstícios são preenchidos com material transparente, com raridade^a crescente ou decrescente segundo uma certa lei, é evidente que um raio de luz, que nós consideramos como partícula, não seguirá ao longo de uma linha reta, mas ao longo de uma certa curva (...). Esta curva é de natureza tal que a partícula percorre o arco entre dois quaisquer de seus pontos no menor tempo.

(...) É também claro, como o seno do ângulo de refração varia em cada ponto segundo a raridade do meio, ou como a velocidade da partícula, que a curva é tal que os senos dos ângulos de inclinação medidos a partir da vertical variam em todo lugar na mesma razão das velocidades. Tendo estabelecido estes fatos, não resta dificuldade: A curva braquistócrona é o caminho percorrido por um raio de luz através de um meio, cujas raridades estão na mesma razão das velocidades de um corpo em queda vertical.

^a O termo é aqui usado no sentido de *qualidade de ser rarefeito*.

A partir daí, Bernoulli passa a "determinar a curvatura de um raio de luz que se propaga por um meio cuja raridade varia arbitrariamente", chegando a uma equação diferencial que, em seguida, lançando mão dos estudos de Galilei sobre queda dos corpos, ele mostra ter como solução a cicloide. Por fim, ele indica como obter geometricamente a cicloide específica sob as condições iniciais do problema:

Trace (Figura 4) pelos pontos A e B a reta \overline{AB} , e, pela horizontal \overline{AL} , qualquer cicloide iniciando em A, intersectando a reta \overline{AB} em R. Para a mesma razão como \overline{AR} está para \overline{AB} , leve o diâmetro do círculo gerador da cicloide \overline{ARS} (...), o qual será o diâmetro do círculo gerador da cicloide procurada \overline{ABL} , a qual deve passar por B.

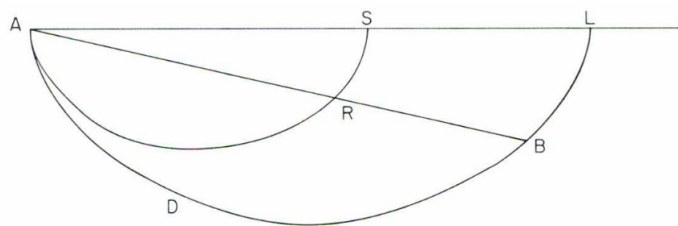


Figura 4: Figura original de Bernoulli para a construção da cicloide por AB

As ideias subjacentes à solução de Bernoulli, em termos mais atuais, podem ser assim descritas: subdividir o plano vertical no qual se dá o movimento em faixas isotrópicas

(i.e. em que a velocidade não depende da direção) e homogêneas (i.e. em que a velocidade é constante), ao longo das quais a trajetória é retilínea; observar que na transição de uma faixa para outra deve valer a Lei de Snell (Lei de refração); identificar as velocidades ao longo dessa trajetória com as de um corpo em queda livre (Teorema do Trabalho e Energia Cinética e Princípio de Conservação da Energia Mecânica); passar ao limite para a largura das faixas tendendo a zero e obter a equação diferencial da cicloide. Passaremos agora a desenvolver essas ideias com os devidos detalhes.

Solução de Johann Bernoulli em versão atualizada

Consideremos inicialmente o seguinte problema:

Dois pontos A e B situam-se na fronteira de uma faixa horizontal, em lados opostos da mesma, de tal modo que o segmento AB não é vertical. A faixa é dividida em duas partes de largura a e b , respectivamente (Figura 5). Uma partícula se desloca de A até B com velocidade constante v_1 na parte superior da faixa e velocidade constante v_2 na parte inferior. Qual a trajetória de menor tempo que a partícula pode percorrer?

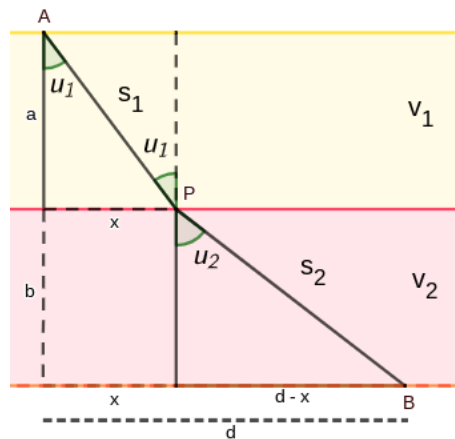


Figura 5: Qual o caminho de tempo mínimo entre dois pontos A e B ?

Por um lado, sendo as velocidades constantes em cada parte da faixa, é imediato concluirmos que a trajetória de tempo mínimo é uma poligonal de dois segmentos AP e PB , com P sendo um ponto na fronteira entre as duas partes. Diante disso, podemos restringir nosso estudo às trajetórias desse tipo, em que o tempo de deslocamento depende da posição do ponto P na fronteira.

Denotemos por $t(x)$ a função que descreve o tempo total de deslocamento. Na notação ilustrada na Figura 5, s_1 e s_2 representam os espaços percorridos e v_1 e v_2 as respectivas velocidades:

$$t(x) = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Calcularemos o valor de x minimizando $t(x)$ no intervalo $[0, d]$.

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

Ainda, na notação Figura 5, temos:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{sen } u_1 \quad e \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \text{sen } u_2$$

donde concluímos que a poligonal de tempo mínimo é obtida quando são satisfeitas as condições abaixo:

$$\frac{\text{sen } u_1}{v_1} = \frac{\text{sen } u_2}{v_2}$$

Interpretando a situação acima em termos óticos, como feito por Bernoulli, temos o problema clássico da refração da luz: se um raio de luz atravessa dois meios isotrópicos e homogêneos com índices de refração diferentes, sua velocidade e direção são alteradas segundo a Lei de Snell:

$$\frac{\text{sen } u_1}{\text{sen } u_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

em que $n_1 = c/v_1$ e $n_2 = c/v_2$ são os índices de refração de cada meio e c é a velocidade da luz no vácuo.

Consideremos agora a mesma faixa horizontal com os pontos A e B em sua fronteira, mas desta vez dividida em várias camadas paralelas m_1, m_2, \dots, m_n ⁸, ao longo de cada qual a partícula se desloca com velocidades constantes v_1, v_2, \dots, v_n (Figura 6, na qual assumimos $v_1 < v_2 < \dots < v_n$, que é a situação que encontraremos no problema da braquistócrona).

Aplicando, com certo abuso de linguagem, a Lei de Snell, concluímos que a trajetória de tempo mínimo é a poligonal para a qual, na notação da referida figura:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_2} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{v_3} = \dots = \frac{\text{sen } \alpha_n}{v_n}$$

⁸ Assumimos todas de mesma largura, embora isso não seja estritamente necessário.

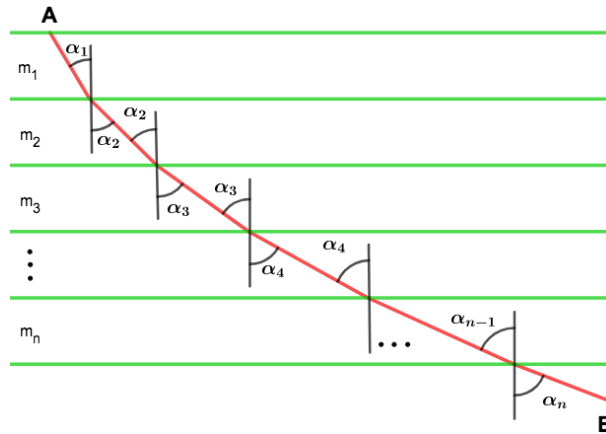


Figura 6: Subdivisão em vários meios distintos

Fazendo o número de faixas tender a infinito (logo suas larguras tendem a zero), concluímos que a curva de tempo mínimo deve, em cada ponto, satisfazer a condição

$$\frac{\text{sen } \alpha}{v} = K \quad (1.2)$$

em que α denota o ângulo da curva com a vertical e v a velocidade da partícula no ponto considerado.

Retomemos agora o problema da braquistócrona:

Dados dois pontos A e B em um plano vertical, dispostos em diferentes alturas e não na mesma reta vertical, determinar a trajetória ao longo da qual é mínimo o tempo de deslocamento de um ponto material P que, sob a exclusiva ação da gravidade, vai do ponto mais alto ao ponto mais baixo.

No que se segue, fixemos um referencial cartesiano com origem no ponto A, eixo x horizontal orientado de modo que a abscissa de B seja positiva, eixo y vertical orientado para baixo (Figura 7).

Em cada ponto da trajetória, denotemos por α o ângulo desta com a vertical e por β o seu complementar, isto é, a ângulo da reta tangente com a horizontal. Resulta:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

Para determinarmos a velocidade da partícula, observemos inicialmente que o trabalho desenvolvido pela força peso ao longo de cada arco da trajetória é igual ao trabalho

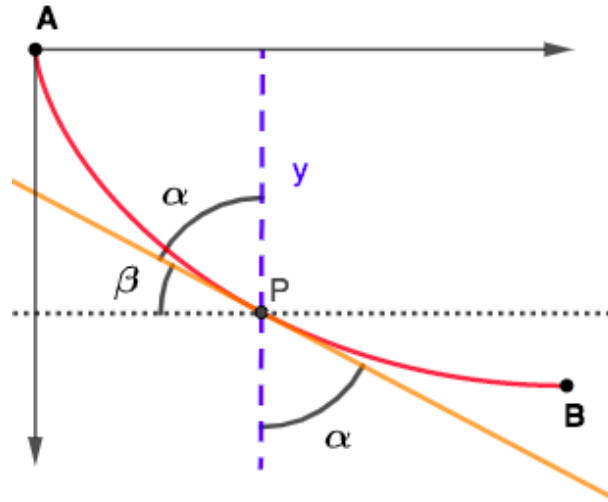


Figura 7: Caminho da partícula

do deslocamento correspondente na vertical. Logo, pelo Teorema do Trabalho e Energia Cinética, a energia cinética da partícula é igual àquela do movimento correspondente de queda livre. Além disso, pelo Princípio de Conservação da Energia Mecânica, devemos ter

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad (1.3)$$

donde resulta $v = \sqrt{2gy}$. Sendo assim, temos

$$\frac{\text{sen } \alpha}{v} = \frac{1}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{y(1+y'(x)^2)}}$$

e a Equação 1.2 pode ser escrita como

$$\boxed{y(1+y'(x)^2) = k} \quad (1.4)$$

em que a constante k é dada por

$$k = \frac{1}{2gK^2}$$

Dentre os inúmeros modos de resolver a equação diferencial acima, tomaremos como referência aquele que consta em [4]. Para obter a cicloide na parametrização 1.1, por mero capricho e comodidade, buscaremos uma solução na forma $(x(t), y(t))$, em que $t = 2\alpha$.

Inicialmente, derivando implicitamente 1.3 em relação a y , obtemos

$$\frac{dv}{dy} = \frac{g}{v}$$

Em seguida, reescrevendo a Equação 1.2 em função de t e derivando⁹, obtemos

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2K \dot{v} = 2K \frac{dv}{dy} \dot{y} = \frac{2Kg}{v} \dot{y}$$

Assim, por um lado,

$$\dot{y} = \frac{v}{2Kg} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2K^2g} = \frac{\text{sen } t}{4K^2g}$$

cuja integração nos leva a

$$y(t) = C_y - \frac{1}{4K^2g} \cos t$$

Por outro lado, tendo em mente que

$$y'(x) = \tan \beta = \cot \alpha = \cot\left(\frac{t}{2}\right)$$

segue-se que

$$\dot{x} = \frac{\dot{y}}{y'} = \frac{1}{4K^2g} \frac{\text{sen } t}{\cot\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{4K^2g} 2\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{4K^2g} (1 - \cos t)$$

cuja integração resulta em

$$x(t) = C_x + \frac{1}{4K^2g} (t - \text{sen } t)$$

Das condições iniciais $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, segue-se que $C_x = 0$ e $C_y = \frac{1}{4K^2g}$, donde obtemos a solução paramétrica

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4K^2g} (t - \text{sen } t) \\ y(t) = \frac{1}{4K^2g} (1 - \cos t) \end{cases}$$

Fica assim provado, por fim, que a solução do problema da braquistócrona é um arco de cicloide. Dos cálculos, segue em particular que tal arco é gerado por um círculo de raio $r = \frac{1}{4K^2g}$ e é tangente, no ponto A , à reta vertical, uma vez que $y'(x) = \cot(t/2)$.

⁹ Manteremos a notação f' para a derivação em relação a x e usaremos \dot{f} para a derivada em relação a t .

1.4 SOLUÇÃO GEOMÉTRICA

As soluções clássicas do problema da braquistócrona são todas baseadas no cálculo diferencial ou, ainda mais apropriadamente, no cálculo variacional. Há entretanto um bom número de soluções de natureza geométrica, como por exemplo [6], [8] e [5]. Ao dizer que são de natureza geométrica, nos referimos ao fato de que os argumentos centrais dessas soluções são argumentos geométricos, apesar de, direta ou indiretamente, acabarem por lançar mão também do cálculo diferencial.

Nesta seção, apresentaremos uma solução que se pretende estritamente geométrica, devida a Raymond Boute ([3]). Cabe dizer que, em nossa opinião, algumas passagens dessa solução parecem camuflar argumentos fundamentalmente analíticos sob uma roupagem geométrica, o que coloca levemente em cheque o propósito declarado do autor de construir uma solução sem qualquer uso do cálculo diferencial. Mas essa talvez seja uma discussão para outro trabalho.

Nosso objetivo aqui ao apresentar a solução de Boute é o de disponibilizar uma abordagem relativamente elementar ao problema, de modo a que possa ser usada, total ou parcialmente, em atividades com estudantes do Ensino Médio. Por este motivo, nos limitaremos a expor o argumento usado por Boute, de modo bastante fiel, mantendo, inclusive, a notação original do artigo.

A Física do Problema

Consideremos uma partícula de massa m movendo-se sem atrito ao longo de um caminho sob gravidade constante g . Em cada instante do movimento, a partícula possui uma velocidade v e energia cinética $\frac{mv^2}{2}$. Conforme a partícula se move para baixo segundo um desnível h , independentemente do perfil do caminho, a gravidade contribui com uma quantidade de energia mgh . Como não há atrito, essa quantidade é integralmente repassada como aumento de energia cinética. Consequentemente, sendo nula a velocidade inicial, a velocidade v da partícula em um ponto de "nível" h abaixo do ponto inicial (mas não necessariamente na mesma vertical) satisfaz a relação $\frac{mv^2}{2} = mgh$.

Estratégia da solução

A busca da trajetória que minimiza o tempo será desenvolvida em três etapas:

1. Estudo do *comportamento local*, isto é, o movimento ao longo de um segmento pequeno do caminho total
2. Obtenção de um *invariante do movimento*, o qual se mostrará relacionado a um círculo de raio constante
3. Decomposição da velocidade desse círculo segundo suas *componentes translacional e rotacional*, cujas magnitudes resultarão iguais, o que por sua vez caracterizará o caminho como sendo uma cicloide.

Passo 1: Modelo local de trajetória minimizante

Substituindo um segmento do percurso por outro mais rápido diminui o tempo total. Essa troca local assume velocidades inalteradas nos pontos extremos do segmento, que é o que efetivamente ocorre uma vez que a velocidade depende apenas da altura. Portanto, qualquer segmento do caminho de menor tempo é, ele mesmo, um caminho de menor tempo (entre seus extremos).

Para modelarmos as mudanças de velocidade e do ângulo que a trajetória forma com a vertical, consideremos um arco pequeno AA' aproximando-o por dois segmentos AP e PA' , como na Figura 8a.

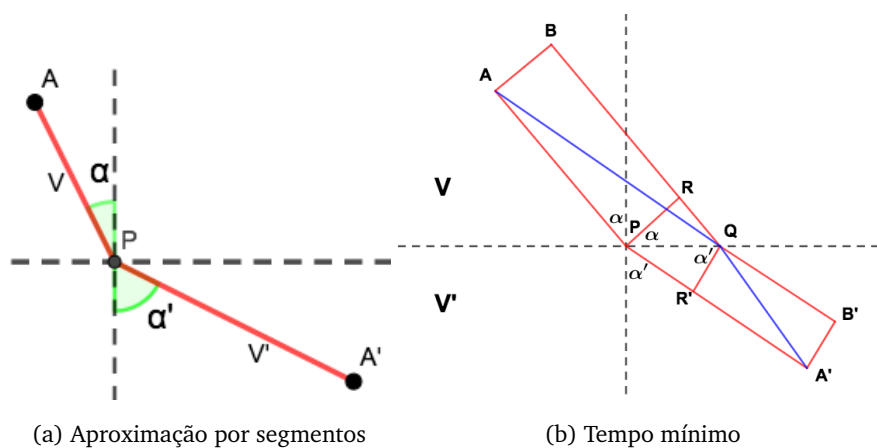


Figura 8: Minimizando o tempo localmente

Usaremos o seguinte

Teorema 1.1. *A velocidade média de uma partícula que se move ao longo de um segmento sob aceleração constante é a média aritmética das velocidades nos pontos extremos.*

Demonstração. Sejam respectivamente S_i e S_f os pontos inicial e final do segmento, a a aceleração, t o tempo de deslocamento, V_i e V_f as respectivas velocidades. Temos que:

$$S_i S_f = V_i t + \frac{at^2}{2} = \frac{(V_i + V_f)t}{2}$$

donde

$$\frac{S_i S_f}{t} = \frac{(V_i + V_f)}{2}$$

□

Como a velocidade V_P da partícula em um ponto P da trajetória depende apenas da altura, as médias definidas por $V = \frac{(V_A + V_P)}{2}$ e $V' = \frac{(V_P + V'_A)}{2}$ permanecem inalteradas se P for deslocado na horizontal. O ponto central do argumento será posicionar o ponto P de modo a minimizar o tempo¹⁰.

Adotaremos a notação $T(XY)$ ou $T(XYZ)$ para denotar o tempo de deslocamento da partícula ao longo do caminho poligonal XY ou XYZ . Assim, por exemplo, temos que $T(AP) = AP/V$ e assim por diante.

Seja Q um ponto diferente de P na mesma horizontal, à direita de P , definindo o caminho AQA' , como na Figura 8b. Para comparar $T(APA')$ e $T(AQA')$, vamos decompor os trajetos em segmentos. Sejam B e B' as projeções de A e A' nas retas por Q paralelas a PA e PA' , respectivamente.

Para dado Q , tomemos R e R' pontos tais que $PABR$ e $QB'A'R'$ sejam retângulos. Calculemos $T(AQA') - T(APA')$ usando igualdades e desigualdades elementares, nos referenciando à Figura 8b:

¹⁰ Ao desenvolver o argumento que se segue, Bouste se referencia a Huygens, que tratou de problema similar no âmbito da refração da luz.

$$\begin{aligned}
T(AQA') - T(APA') &= T(AQ) + T(QA') - T(AP) - T(PA') \\
&= \frac{AQ}{V} + \frac{QA'}{V'} - \frac{AP}{V} - \frac{PA'}{V'} \\
&> \frac{BQ}{V} + \frac{QB'}{V'} - \frac{AP}{V} - \frac{PA'}{V'} \\
&= \frac{(BR + RQ)}{V} + \frac{QB'}{V'} - \frac{AP}{V} - \frac{(PR' + R'A')}{V'} \\
&= \frac{(AP + RQ)}{V} + \frac{R'A'}{V'} - \frac{AP}{V} - \frac{(PR' + R'A')}{V'} \\
&= \frac{RQ}{V} - \frac{PR'}{V'} \\
&= PQ \cdot \left[\left(\frac{\text{sen } \alpha}{V} \right) - \left(\frac{\text{sen } \alpha'}{V'} \right) \right]
\end{aligned}$$

em que, na terceira passagem, usamos o fato de que $AQ > BQ$ e $QA' > QB'$.

O caso em que Q se encontra à esquerda de P é análogo, e resulta

$$T(AQA') - T(APA') > PQ \left[\left(\frac{\text{sen } \alpha'}{V'} \right) - \left(\frac{\text{sen } \alpha}{V} \right) \right]$$

Assim, se tomarmos o ponto P de modo que

$$\left(\frac{\text{sen } \alpha}{V} \right) = \left(\frac{\text{sen } \alpha'}{V'} \right)$$

resulta $T(AQA') - T(APA') > 0$, ou seja, o caminho AQA' leva mais tempo do que APA' . Consequentemente, a posição de P que torna o caminho APA' o mais rápido é dada pela condição:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{V} = \frac{\text{sen } \alpha'}{V'} \quad (1.5)$$

Passo 2: Invariante do movimento

Um invariante do movimento é uma quantidade que permanece constante e que, desse modo, representa alguma característica essencial desse movimento. Na perspectiva geométrica, um invariante é frequentemente um segmento cujo comprimento permanece constante durante o movimento.

Aplicando a Equação 1.5 a segmentos adjacentes como na Figura 9a obtemos, por transitividade, e independentemente de suas velocidades e comprimentos de cordas

$$\frac{\text{sen } \alpha'''}{V'''} = \frac{\text{sen } \alpha''}{V''} = \frac{\text{sen } \alpha'}{V'}$$

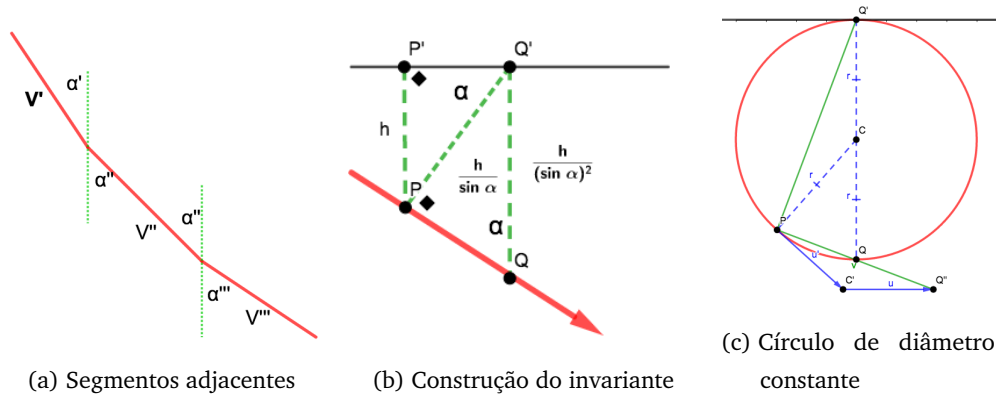


Figura 9: Obtenção geométrica da braquistócrona

Assim, no limite, obtemos que ao longo do caminho vale

$$\frac{V}{\sin \alpha} = K$$

sendo K uma constante.

Diante disso, lembrando que $V^2 = 2gh$, obtemos que a grandeza $\frac{h}{\sin^2 \alpha}$ é um invariante, sendo

$$\frac{h}{\sin^2 \alpha} = \frac{K^2}{2g} \tag{1.6}$$

Seja então P uma posição arbitrária ao longo do caminho da descida e seja h a altura (abaixo do ponto de partida). Um segmento de comprimento $h/\sin^2 \alpha$ pode ser construído "concatenando" dois triângulos retângulos como na Figura 9b: P' é a projeção ortogonal de P na reta horizontal $h = 0$; Q' é o ponto da mesma reta pelo qual passa a normal em P ; Q é o ponto da tangente em P de modo que Q e Q' estejam na mesma vertical. Como o triângulo $\triangle Q'PQ$ é retângulo, P está sobre o círculo com diâmetro constante $Q'Q = \frac{h}{\sin^2 \alpha}$. Este diâmetro é o invariante geométrico que buscávamos.

Passo 3: Obtendo a braquistócrona

Uma vez que P está no círculo de diâmetro constante $\frac{K^2}{2g}$ tangente à horizontal $h = 0$, a trajetória pode ser traçada considerando P solidário ao círculo e decompondo o movimento do círculo em duas componentes: o deslocamento horizontal de seu centro C e a rotação do círculo em torno de seu centro.

Isso pode ser feito em qualquer movimento que se dê na faixa delimitada pelas retas $h = 0$ e $h = \frac{K^2}{2g}$ e determina univocamente a velocidade instantânea de translação $u(C)$ e a velocidade relativa de rotação u' na borda, exceto quando as direções são paralelas, isto é, se P está em Q ou Q' .

Consideremos agora a "geometria das velocidades" para o movimento que nos interessa, como na Figura 9c. Por simplicidade, os vetores velocidade estão representados como setas marcadas apenas com suas magnitudes. O triângulo $\triangle PC'Q''$ é semelhante a $\triangle PCQ'$, pois lados correspondentes são perpendiculares. Segue-se portanto que $CP = CQ'$, o que implica em $u' = u$.

Dessa igualdade, segue-se que em Q' as velocidades de translação e rotação se anulam, pois têm a mesma magnitude e direção, mas sentidos opostos. Logo, o ponto do círculo que toca a altura $h = 0$ está instantaneamente em repouso. Em outras palavras, o movimento do círculo é de rotação sem deslizamento. Concluimos, finalmente, que o movimento de P é cicloidal.

A Figura 10 retrata intuitivamente um pequeno deslocamento PP' , decomposto em PT devido à rotação e TP' devido à translação. O comprimento do segmento TP' é igual ao comprimento do arco PT , o qual, para pequenos deslocamentos, é aproximado pelo comprimento de corda PT .

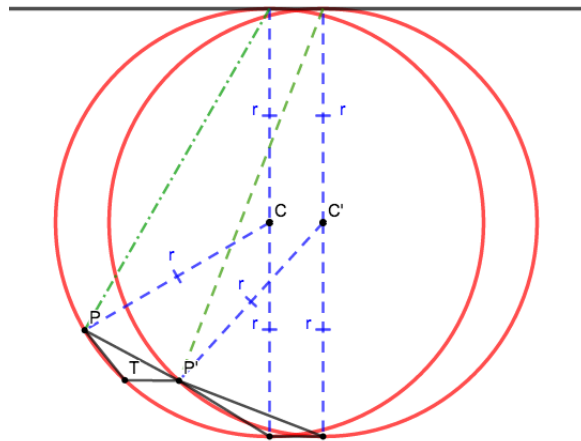


Figura 10: Pequeno deslocamento da partícula

Bônus: a velocidade da partícula

A velocidade u de translação de C é obtida como bônus a partir da semelhança de triângulos acima citada entre $\triangle PC'Q''$ e $\triangle PCQ'$ (Figura 10):

$$\frac{u}{r} = \frac{C'Q''}{CQ'} = \frac{PQ''}{PQ'} = \frac{V}{2r\text{sen } \alpha} = \frac{2K\text{sen } \alpha}{2r\text{sen } \alpha} = \frac{K}{2r}$$

Portanto, o movimento da partícula é igual àquele de um ponto sobre a borda de um círculo girando a uma velocidade constante $u = \frac{K}{2}$, sem deslizar.

TAUTÓCRONA

Assim como o problema da braquistócrona, o problema da tautócrona é outro clássico quando se fala da cicloide. Neste capítulo, apresentaremos uma solução a este problema. As referências utilizadas são [14] e [11].

2.1 BREVE HISTÓRIA DA TAUTÓCRONA

Em 1656, o holandês Christiaan Huygens¹ inventou o relógio pendular². Ao longo de uma década, ele desenvolveu estudos sobre a física do pêndulo, pois tinha ciência de que o relógio de pêndulo circular não era exato, uma vez que o período de oscilação diminuía com o movimento. Passou então a procurar a *trajetória isócrona*³, isto é, o caminho que deveria ser percorrido por uma massa, em movimento oscilatório, de modo a que o período se mantivesse constante ao longo do movimento.

Esse problema equivale a determinar a *trajetória tautócrona*⁴, isto é, o caminho ao longo do qual uma massa sujeita à ação exclusiva da gravidade atinge seu ponto mais baixo no mesmo tempo, qualquer que seja seu ponto de partida.

1 Christiaan Huygens (Haia, 14 de abril de 1629 — Haia, 8 de julho de 1695), físico, matemático, astrônomo e horologista.

2 Galileo Galilei já havia concebido o relógio de pêndulo em 1641 e seu filho Vincenzo tentou produzi-lo, todavia sem sucesso. A patente de Huygens foi obtida em 1657.

3 Do grego *iso* (igual).

4 Do grego *tauto* (mesmo).

Problema da Tautócrona

Determinar a trajetória para a qual um ponto material, colocado em qualquer posição ao longo desta trajetória e sujeito à exclusiva ação da gravidade, atinge seu ponto mais baixo no mesmo tempo.

Em 1673, Huygens publicou seu *Horologium Oscillatorium sive de motum pendulorum*, um tratado em cinco capítulos, o primeiro dos quais dedicado ao relógio de pêndulo. Neste, Huygens mostra geometricamente que a curva tautócrona é a cicloide.

Huygens também chegou a construir um pêndulo cuja massa, ao oscilar, descrevesse uma trajetória cicloidal. Para isso, usou dois arcos de cicloide unidos pela cúspide, na qual era fixada uma das extremidades do pêndulo (Figura 11). Tais arcos funcionam como uma espécie de perfil⁵ para o fio do pêndulo, alterando assim a trajetória da massa. Infelizmente, embora matematicamente perfeita, essa solução é fisicamente inócua, uma vez que o atrito gerado no contato do fio com os perfis acaba por eliminar a propriedade de preservação do período.

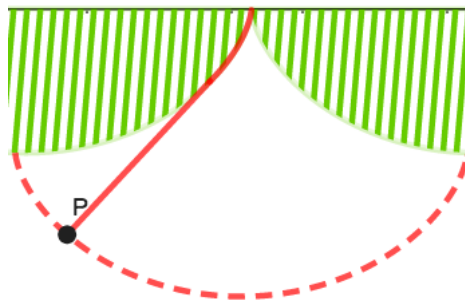


Figura 11: Pêndulo cicloidal

⁵ Em termos matemáticos, a curva-perfil é a *evoluta* da curva-trajetória, e esta é uma das *involutas* da primeira. A cicloide é a única curva que é evoluta/involuta de si mesma.

2.2 SOLUÇÃO DE JAKOB BERNOULLI

Como dissemos acima, Huygens resolveu geometricamente o problema da tautócrona, em 1673. Em 1960, Jakob Bernoulli publicou na *Acta Eruditorum* sua solução, usando cálculo diferencial. É esta solução que apresentaremos abaixo⁶.

Tempo de descida entre dois pontos quaisquer

No que se segue, fixemos um referencial cartesiano com o eixo y vertical orientado para baixo. As mesmas considerações sobre a conservação da energia feitas ao tratarmos do problema da braquistócrona valem neste contexto. Desta vez, porém, nos interessa considerar diferentes pontos iniciais para a partícula. Tomemos então uma partícula de massa m posicionada a uma altura y_0 . A velocidade v dessa partícula quando, sob ação da gravidade, se encontra a uma altura $y > y_0$ é tal que

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y - y_0)$$

ou seja

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

Por outro lado, o tempo de deslocamento da partícula é dado por

$$T = \int \frac{1}{v} ds$$

Se tomarmos uma parametrização da trajetória na forma $(x(\alpha), y(\alpha))$, temos

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\alpha$$

donde, ao longo de um arco genérico da trajetória, iniciando na altura y_0 , resulta

$$T = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y - y_0)}} d\alpha \quad (2.1)$$

⁶ Na verdade, é necessário registrar que, a partir das fontes que utilizamos, não conseguimos confirmação de que a solução aqui apresentada é efetivamente baseada na de Jakob. Acreditamos que o seja, mas não o afirmamos categoricamente.

A cicloide como curva tautócrona

Vamos verificar agora que a cicloide satisfaz a condição tautócrona. Para isso, lembremos a sua parametrização:

$$\begin{cases} x = r(\alpha - \text{sen } \alpha) \\ y = r(1 - \cos \alpha) \end{cases} \quad (2.2)$$

Assim, temos

$$x'^2 + y'^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha) \quad (2.3)$$

e substituindo em 2.1, resulta

$$T = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{\frac{2r^2(1 - \cos \alpha)}{2gr(\cos \alpha_0 - \cos \alpha)}} d\alpha$$

isto é

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}} d\alpha \quad (2.4)$$

A partir de agora, iremos comparar o tempo que a partícula leva para chegar ao ponto mais baixo da cicloide, partindo de diferentes pontos. Para isso, lembremos que o parâmetro α em 2.2 representa o arco da rotação do círculo gerador da cicloide em torno de seu centro. Assim, o ponto mais baixo da cicloide ocorre quando $\alpha = \pi$.

Primeiramente, calculemos o tempo a partir do topo da cicloide ($\alpha_0 = 0$):

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} d\alpha = \sqrt{\frac{r}{g}} \pi$$

Para calcular o tempo a partir de uma posição inicial qualquer, isto é, para calcular a integral 2.4, usemos inicialmente que:

$$1 - \cos \alpha = 2 \text{sen}^2(\alpha/2)$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2)$$

Substituindo em 2.4, obtemos

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2 \text{sen}^2(\alpha/2)}{2(\cos^2(\alpha_0/2) - \cos^2(\alpha/2))}} d\alpha \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha_0/2) \sqrt{1 - \frac{\cos^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha_0/2)}}} d\alpha \end{aligned}$$

Através da mudança de variável

$$u = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha_0}$$

temos

$$du = \frac{-\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha_0} d\alpha$$

e portanto

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha_0/2) \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2(\alpha_0/2)}}} d\alpha \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_1^0 \frac{-2}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} (\operatorname{arcsen} u) \Big|_0^1 \\ &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Assim, o tempo total é dado por

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \pi$$

que independe de α_0 e é igual àquele em que o ponto inicia seu movimento na altura $y = 0$. Fica assim provada a propriedade tautócrona da cicloide.

COMPLEMENTOS

3.1 ILUSTRANDO O ARGUMENTO DE GALILEU ATRAVÉS DO GEOGEBRA®

Proposta para desenvolvimento em sala de aula

Neste capítulo, abordaremos o argumento de Galileu, com a utilização do GeoGebra®, mostrando que quanto maior é o número de segmentos ao longo de um arco circular, menor será o tempo de descida de uma partícula, sujeita apenas à força gravitacional. Seguindo a ideia de Galileu (Figura 12), utilizaremos um arco de 90° .

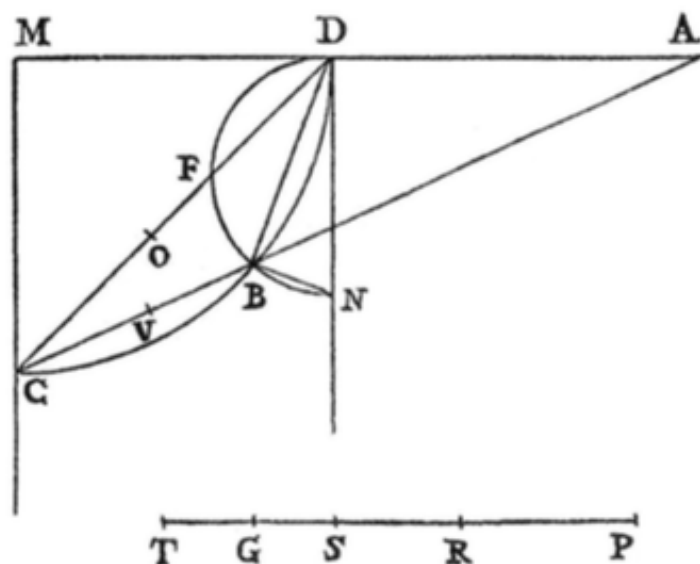


Figura 12: Figura de Galileu sobre a queda de uma partícula ao longo de um polígono circular (Galileo Galilei, *Le Opere*, vol. VIII, Firenze 1965, 262 *apud* [7])

"Ele considerou um arco de círculo CBD de não mais que 90° em um plano vertical com C o ponto mais baixo no círculo, D o ponto mais alto e B qualquer outro ponto no arco de círculo. Ele provou o teorema, correto, de que o tempo para uma partícula descer ao longo de dois segmentos DBC é menor que o tempo para ela descer ao longo da linha DC . Vamos aumentar o número de pontos no círculo entre D e C . Quanto maior o número de pontos, menor é o tempo para a partícula descer ao longo da linha tracejada $DEFG \dots C$ " ([7], tradução nossa).

Com o objetivo de ilustrar o resultado de Galileu para uma melhor compreensão e entendimento dos alunos, usaremos o GeoGebra® como ferramenta de apoio ao aprendizado, possibilitando aos discentes a possibilidade de explorarem e obterem suas conclusões.

No começo da proposta, no plano cartesiano do GeoGebra® cria-se um arco de circunferência de um quarto de giro, com extremidades nos pontos A e B (Figura 13). Então, toma-se o segmento de extremidades A e B e se propõe aos alunos a verificação do tempo de descida.

Na sequência da atividade, vão se acrescentando pontos ao longo desse arco de circunferência, como vértices da linha poligonal de extremidades A e B , e deslocando-os de modo a minimizar o tempo de descida ao longo de cada poligonal assim construída. Com o aumento do número de segmentos das poligonais, os alunos vão verificando os tempos de descida e observando a diminuição do tempo total com o aumento do número de segmentos da poligonal.

Essa proposta será melhor aproveitada se realizada após os discentes estudarem a função horária do plano inclinado e, melhor ainda, a Lei de Conservação da Energia Mecânica.

Construção no GeoGebra® e avaliação do tempo de descida

Como visto anteriormente nas seções 1.3 e 1.4, a velocidade da partícula depende somente da altura de descida y e é dada por $V = \sqrt{2gy}$. Assim, o tempo de deslocamento em cada segmento é dado por

$$T = \frac{2S}{(V_0 + V_f)} = \frac{2S}{(\sqrt{2gy_0} + \sqrt{2gy_f})} \quad (3.1)$$

Para iniciar a construção no GeoGebra®, tomemos¹ um arco de circunferência com centro $O(8,0)$ com início no ponto $A(0,0)$ e final em $B(8,-8)$. Em seguida, tomemos a reta $y = 0$, que servirá de referência para determinar a altura y nos vértices de cada poligonal.

O tempo de descida ao longo do segmento AB , assumindo $g = 9,8$ para aceleração da gravidade, é obtido diretamente através da fórmula

$$T_{AB} = \frac{2AB}{(V_0 + V_f)}$$

em que $V_0 = 0$ e $V_f = V_B = \sqrt{2gy}$ (no exemplo considerado, $y = 8$).

Poligonal de dois segmentos

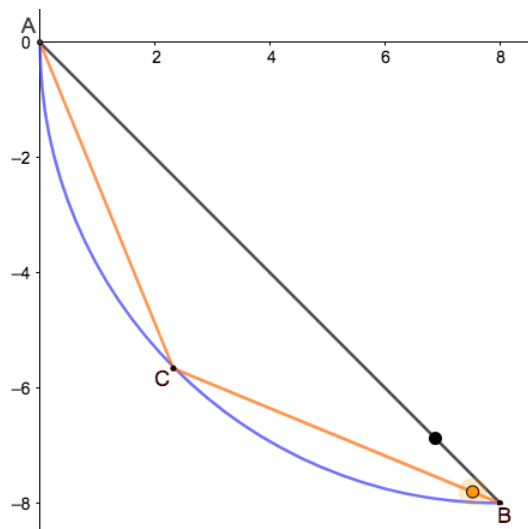


Figura 13: Tempo de descida em linha reta e através de dois segmentos

Em seguida, para construir uma poligonal de dois segmentos, primeiro marcamos um ponto C na circunferência e logo a seguir os segmentos AC e CB . Depois, para encontrarmos o deslocamento vertical y de A até o ponto C , geramos a reta perpendicular no ponto C e, assim, o ponto A' na interseção desta com a reta $y = 0$. O deslocamento y_{AC} é obtido então pelo comprimento do segmento CA' . Analogamente, para encontrarmos o deslocamento vertical y_{CB} de C até B , construímos a reta horizontal que passa pelo ponto C e a perpendicular a ela passando pelo ponto B , obtemos a interseção C' desta

¹ Os valores utilizados aqui serviram somente para facilitar a descrição da construção, podendo ser substituídos a gosto do(a) professor(a) encarregado da atividade.

reta com a reta horizontal por C e conseqüentemente o comprimento do segmento $C'B$ (esse mesmo procedimento será feito nos vértices das poligonais com maior número de segmentos).

As velocidades inicial e final em cada segmento AC e CB , assim como os tempos de descida em cada trecho são calculados segundo as fórmulas 3.1. Assim, a fórmula a ser inserida no GeoGebra® para o cálculo de tempo total de descida segundo a poligonal ACB é dada por:

$$T_{ACB} = \frac{2AC}{(\sqrt{2gy_{AC}})} + \frac{2CB}{(\sqrt{2gy_{AC}} + \sqrt{2gy_{CB}})}$$

Em seguida, os alunos devem deslocar o ponto C ao longo do arco AB de modo a minimizar o tempo de descida. Caso o(a) docente ache interessante, podem-se comparar os resultados obtidos pelos alunos, para uma melhor estimativa do tempo mínimo efetivo.

Poligonal com mais de dois segmentos

Uma vez escolhida a posição do ponto C , esta não é mais alterada na sequência da atividade e passa-se à construção de uma poligonal de quatro segmentos².

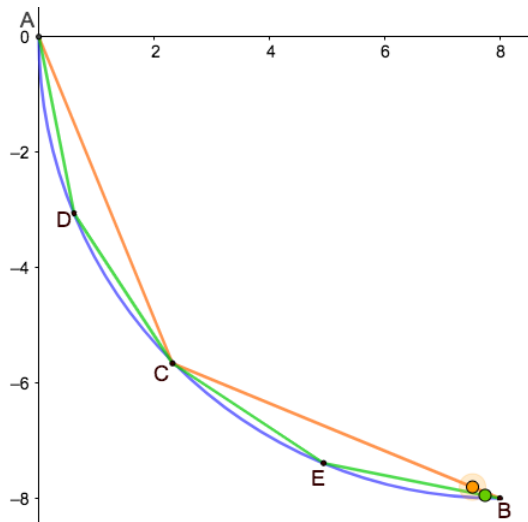


Figura 14: Comparando descida através de dois e quatro segmentos

Para isso, adicionam-se os pontos D e E ao longo dos arcos AC e CB , respectivamente, criando a poligonal $ADCEB$. Para cada uma das poligonais ADC e CEB repetem-se

² Nada impede que se passe antes a uma poligonal de três segmentos. Mas acreditamos que a discussão possa render mais se a cada passo dobrarmos o número de segmentos da poligonal.

os passos utilizados para a poligonal ABC acima. De forma análoga, a fórmula para o cálculo dos tempos totais de descida pelas poligonais ADC e CEB são dadas por

$$T_{ADC} = \frac{2AD}{\sqrt{2gy_{AD}}} + \frac{2DC}{(\sqrt{2gy_{AD}} + \sqrt{2gy_{DC}})}$$

e

$$T_{CEB} = \frac{2CE}{(\sqrt{2gy_{DC}} + \sqrt{2gy_{CE}})} + \frac{2EB}{(\sqrt{2gy_{CE}} + \sqrt{2gy_{EB}})}$$

Em seguida, os alunos deslocam os pontos D e E , de forma independente, buscando minimizar os tempos de descida ao longo das poligonais ADC e CEB , respectivamente, obtendo, ao final, uma estimativa de tempo mínimo para a poligonal $ADCEB$.

Segue-se uma fase de comparação dos resultados obtidos entre os participantes da atividade e, principalmente, entre as poligonais ACB e $ADCEB$, com a observação de que esta última tem tempo menor do que a primeira.

A partir daqui, dependendo da avaliação do(a) professor(a), pode-se aumentar o número de segmentos da poligonal, seguindo os mesmos procedimentos de construção, minimização e análise.

Discussão dos resultados: o argumento de Galileu

"Para Galileu, um círculo era um polígono com infinitos e infinitamente pequenos lados. Por isso ele concluiu corretamente que o tempo mais rápido de queda de D para C é ao longo de um arco do círculo. Galileu comparou somente os tempos de descida ao longo dos lados de polígonos circulares, o círculo sendo seu caso limite" ([7], tradução nossa).

Após a conclusão da atividade no GeoGebra®, verifica-se as conclusões dos alunos sobre os resultados encontrados em relação ao número de segmentos na poligonal e seus respectivos tempos de descida. Além da constatação de que o tempo de descida à medida em que se aumenta o número de segmentos das poligonais, pergunta-se aos alunos o que isso pode nos dizer a respeito do tempo de descida ao longo do arco de circunferência, em comparação com os tempos das poligonais.

O objetivo dessa discussão deve ser duplo: ilustrar o já mencionado argumento de Galileu e trabalhar, intuitivamente, a noção de limite, um dos conceitos centrais do cálculo diferencial e integral.

3.2 USO DE MAQUETES PARA ILUSTRAR O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Em um segundo momento, para complementar a discussão em torno do argumento de Galileu e apresentar, ilustrativamente, a solução do problema da Braquistócrona, pode-se lançar mão de maquetes prontas conforme Figuras 15 e 16. Com elas, é possível comparar os tempos de descida através de algumas curvas: aqui propomos, a título de exemplo, a de um quarto de circunferência (como no argumento de Galileu) e da cicloide³.

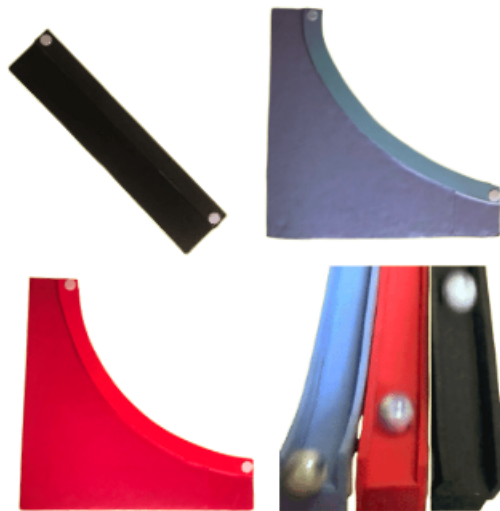


Figura 15: Maquetes de curvas

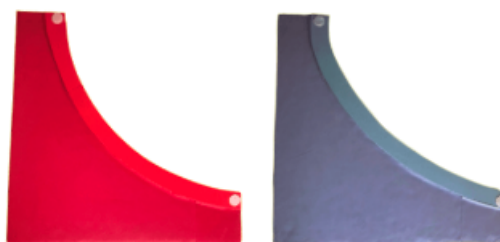


Figura 16: Cicloide e circunferência

³ Quanto maior a variedade de curvas, mais interessante se torna a atividade. Maquetes como as da Figura 15 são fáceis de serem construídas, mesmo em sala de aula, sendo assim possível e interessante propor aos alunos a construção de outras "candidatas" a braquistócrona.

Cicloide e circunferência

Nesta proposta posicionamos duas maquetes lado a lado, tomando o cuidado para que seus pontos iniciais e finais coincidam. Então colocamos as partículas (bolinhas) no ponto inicial de cada maquete, soltando-as ao mesmo tempo verificando assim que a cicloide é a de menor tempo.⁴

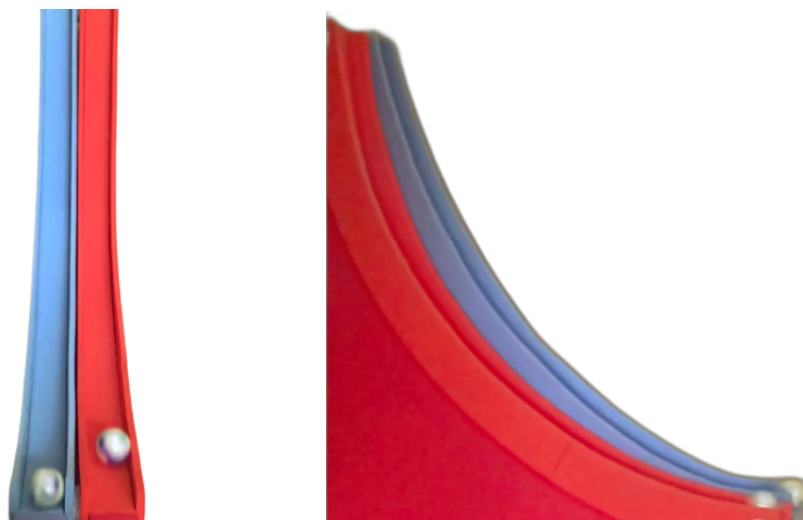


Figura 17: Cicloide e circunferência

Em tempo: uma outra possibilidade para trabalho em sala de aula é apresentar a propriedade tautócrona da cicloide. Para isso, seria bom ter à disposição duas maquetes de cicloides (iguais, dentro do possível). Aos alunos, é proposto de comparar os tempos de descida em cada cicloide, a partir de pontos distintos dela, mostrando (de modo aproximado) que, independente da posição inicial da partícula na cicloide, o tempo será sempre o mesmo.

⁴ O vídeo do experimento, comparando algumas curvas, pode ser acessado em <https://youtu.be/ecPm2qcSTP8>

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bernoulli, J.: *Problema novum ad cuius solutionem Mathematici invitatur*. Acta Eruditorum Lipsiæ, p. 269, 1696.
- [2] Bernoulli, J.: *Curvatura radii in diaphnis non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et de curva Synchrona seu radiorum unda construenda*. Acta Eruditorum Lipsiæ, p. 211, 1697.
- [3] Boute, R. T.: *The Brachistochrone Problem Solved Geometrically: A Very Elementary Approach*. Mathematics Magazine, 85:193–199, 2012.
- [4] Broer, H. W.: *Bernoulli's Light Ray Solution of the Brachistochrone Problem Through Hamilton's Eyes*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 24:1440009, ago. 2014.
- [5] De Andrade, M. A. e L. G. Ferreira Filho: *Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona*. Revista Brasileira de Ensino de Física, 37(2):2039(1–6), 2015.
- [6] Herrera, M. I.: *Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem*. Revista Mexicana de Física, 40(3):459–475, 1994.
- [7] Knobloch, E.: *Leibniz and the Brachistochrone*. Documenta Math, pp. 15–18, 2012.
- [8] Lawlor, G.: *A New Minimization Proof for the Brachistochrone*. American Mathematical Monthly, 103(3):242–249, 1996.
- [9] Leibniz, G. W.: *Leibniz's participation of his solution and of those of J. Bernoulli and of the Marquis de L'Hospital, to the problem published by J. Bernoulli, and at the same time, the solutions to his second problem*. Acta Eruditorum Lipsiæ, p. 201, 1697.
- [10] Magalhães, J. C. S.: *A Cicloide: breve histórico e estudo de suas propriedades braquistócrona e tautócrona*. Monografia de Conclusão de Curso de Graduação, UFRRJ, 2017.
- [11] Nolte, D. D.: *Huygen's Tautochrone*. <https://galileo-unbound.blog/2018/09/>

- [20/huygens-tautochrone/](#). Acesso em: 10-08-2020.
- [12] O'Connor, J.J. e E.F. Robertson: *The Brachistochrone Problem*. <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone/>. Acesso em: 10-08-2020.
- [13] Sousa Jr, J. R. A.: *O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona*. Tese de Mestrado, UNESP, 2010.
- [14] Weisstein, E. W.: *Tautochrone Problem*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource – <https://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>. Acesso em: 10-08-2020.