Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Camilo de Lesi Rodrigues

Não sabemos , mas também, quem sabe?? Um breve estudo sobre o infinito

Santo André, 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

CAMILO DE LESI RODRIGUES

NÃO SABEMOS , MAS TAMBÉM, QUEM SABE?? UM BREVE ESTUDO SOBRE O INFINITO

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO CAMILO DE LESI RODRIGUES,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. RAFAEL DE MATTOS GRISI.

SANTO ANDRÉ, 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Camilo, de Lesi Rodrigues
Não sabemos, mas também, quem sabe?? Um breve estudo sobre o infinito / de Lesi Rodrigues Camilo. — 2020.

66 fls. : il.

Orientador: de Mattos Grisi Rafael

Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2020.

1. Infinito. 2. Cardinalidade. I. Rafael, de Mattos Grisi. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2020. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).

Santo André/SP, 16 de julho de 2020

Assinatura do(a) autor(a): Danilo de Lisi Rodrigues

Assinatura do(a) orientador(a):

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, CAMILO DE LESI RODRIGUES realizada em 06 de Março de 2020:

Prof.(a) PAOLA ANDREA GAVIRIA KASSAMA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) DANIEL MIRANDA MACHADO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) GLEICIANE DA SILVA ARAGÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Prof.(a) RAFAEL DE MATTOS GRISI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Dedico este trabalho a minha mãe, que mesmo nos seus últimos momentos, conseguiu me ajudar a estudar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela compreensão de que questionar sua infinitude não abalou a minha fé, só ampliou minha curiosidade científica.

À minha família por não ter me deserdado apesar de todo o tempo subtraído deles para que fosse usado aqui.

Aos professores do PROFMAT da UFABC por terem me tornado um professor e uma pessoa melhores; em especial ao meu orientador Prof.Dr. Rafael Grisi pelas sugestões e encaminhamentos. Esta monografia não sairia sem a ajuda dele.

Aos meus colegas de turma pelas ajudas e risadas oferecidas.

A UFABC por permitir que eu diga, com orgulho, que estudei aqui.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

"Se não estivermos dispostos a pagar um preço por nossos valores, se não estivermos dispostos a fazer alguns sacrifícios para realizá-los, então deveríamos nos perguntar se realmente acreditamos neles."

(Barack Obama)

RESUMO

Foram estudados aqui um pouco da visão metafísica da infinitude de Deus e as interpretações acerca disso que moldaram minha atual opinião a respeito. Há a apresentação de alguns famosos paradoxos da Matemática e histórias sobre o desenvolvimento da idéia do infinito. Passa-se pela idéia de cardinalidade e da existência de infinitos maiores que outros, bem como de séries; começando por sequências curiosas que podem despertar o interesse nos alunos pelo assunto, ampliando o conceito para a convergência e a aplicação de uma famosa série. O trabalho termina propondo atividades para serem aplicadas junto a alunos do ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: infinito, cardinalidade, limite

ABSTRACT

A little bit of the metaphysical point of view of God's infinity and interpretations about it that shaped my current opinion on were studied here. We presents some famous mathematical paradoxes and stories about the development of the idea of the infinite. One passes through the idea of cardinality and the existence of infinities greater than others, as well as series; we start with some curious sequences that could arouse students' interest to the subject, applying the concept for convergence and it's role on a famous series. The work ends by proposing activities to be applied to elementary and high school students.

Keywords: infinity, cardinality, limit

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

O espaço, a fronteira final...
Audaciosamente, indo onde nenhum
homem jamais esteve!
— James Tiberius Kirk, Star Trek

Com essa frase, iniciava-se a série de ficção científica "Star Trek", que foi exibida nos EUA de 1966 a 1969, e reprisada no Brasil durante boa parte da década de 1970 e 1980. Tendo gerado vários filmes para o cinema, com releituras nos anos de 2009 a 2016. A velocidade de dobra espacial da nave, muitas vezes superior a velocidade da luz era impossível para nossos conceitos de Física, mas altamente adequada para um universo ficcional. Mesmo com essa velocidade tremenda, tudo que conseguia era percorrer pequenas frações do espaço. Qual seria o tamanho do Universo? E de Deus? Quando se começa uma contagem, existe um fim nisso?

O termo infinito tem alguns significados principais: o Matemático que se preocupa com a qualidade de uma grandeza, o teológico que procura não limitar um potencial divino, e o metafísico, que trata da não completude, de algo que não pode ser acabado.

O propósito deste trabalho é iluminar algumas dessas visões, concentrando-se na Matemática; na aplicação do conceito de infinito em séries e alguma de suas aplicações, trazendo também algumas possibilidades de atividades para aplicação no Ensino Médio.

1

ALGUNS ASPECTOS METAFÍSICOS DO INFINITO

— Guido Grandi, monge e matemático
italiano nascido em 1671.

Em 1703, Guido Grandi publicou *Quadratura Circula et Hyperbolae per Infinitas Hyperbolas Geometrice Exhibitata*, onde, explorando a série $\{1-1+1-1+1\dots\}$, concluiu que Deus havia criado o mundo a partir do nada.

Seu raciocínio baseou-se inicialmente na ordenação dessas séries: caso rearranjasse a série separando o primeiro elemento, obteria:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\dots=1,$$

mas com um agrupamento diferente obteria:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0.$$

Já que se tratam da mesma série, teríamos que $0=1$, de onde concluiu que do nada foi criado 1, a **unidade**, então Deus teria criado do nada, toda a existência. Como veremos, o erro de Grandi foi tratar séries infinitas da mesma maneira que as séries finitas.

Aristóteles[1] criou a idéia de Infinito potencial, como algo que não seria real, nem qualidade de uma realidade. Deu a isso um significado que seria o de algo que não pudesse ser percorrido, por não poder ser visto, ou aquilo que pudesse ser percorrido em uma parte, mas não em sua totalidade; já que não teria fim. Analisando assim,

1 Discípulo de Platão e mentor de Alexandre Magno, Aristóteles foi um filósofo grego do século V a.C. com trabalhos que percorrem as áreas da física, metafísica, leis da poesia e do drama, música, lógica, a retórica, o governo, a ética, a biologia, linguística, economia e a zoologia; sendo ainda o autor do primeiro sistema estruturado de filosofia ocidental. Ver [4]

conclui-se que sempre se poderia obter algo de novo, finito, mas diferente. Usando o tempo como um parâmetro familiar, diria-se que o dia, apesar de finito é sempre diferente.

Plotino percebeu que o Infinito seria alguma coisa que não pode ser exaurido, em termos de grandeza ou de número de suas partes; a primeira sendo encaminhada ao infinitamente grande, e a segunda, ao infinitesimal.

Usando de um menor rigor conceitual um pouco menor na linguagem, filósofos da escolástica[2] da Idade Média, que utilizavam o conceito de inexauribilidade e de não completude. São Tomás de Aquino concordou com os primeiros filósofos ao afirmarem que: "as coisas derivam do primeiro princípio ao Infinito".

São Tomás, em sua Suma Teológica[3], afirma que algumas coisas são movidas e tudo o que é movido é movido por outro. Já que não é possível retornar até o infinito nos moventes e movidos, torna-se necessário haver um primeiro motor; um primeiro princípio, que é Deus.

1.1 A LÓGICA DE SÃO TOMÁS DE AQUINO E A INFINITUDE DE DEUS.

São Tomás de Aquino, um representante da escolástica(3), no seu Artigo 7, sobre a infinitude de Deus, questiona as suposições correntes sobre o criador, destruindo-as, logo em seguida, com sua lógica e rigor.

Quando afirma que tudo que é infinito, é imperfeito, por estar implicando em características da parte e da matéria, conclui que Deus não é infinito, já que ele é perfeito. O infinito e o finito se referem a matéria e como Deus não tem corpo, não poderia ser infinito. Outra conclusão é que aquilo que está em um lugar e não está em outro é finito naquele local, ou estaria em toda parte, também tem-se que aquilo que é uma outra coisa não poderia ser outra, como a madeira não poderia ser ferro. Se Deus é apenas ele mesmo e nada mais, não poderia ser de substância infinita

2 A Filosofia Escolástica ou simplesmente Escolástica, foi uma das linhas da filosofia medieval. Surgiu na Europa no século IX e permaneceu até o início da Renascimento, no século XVI. A escolástica , além de seu caráter filosófico, apresentou-se como um método de pensamento crítico, influenciando as áreas do conhecimento das Universidades Medievais. Ver [7]

3 Suma Teológica ou Summa Theologica (por vezes Summa Theologiæ) é o título da obra básica de São Tomás de Aquino, frade, teólogo e santo da Igreja Católica, um corpo de doutrina que se constitui numa das bases da dogmática do catolicismo e considerada uma das principais obras filosóficas da escolástica. Foi escrita entre os anos de 1265 a 1273. Ver [15]

São Tomás enfrenta esses questionamentos alegando que a matéria é limitada pela forma, e não o inverso; se o infinito atribuído à matéria é imperfeito, mas o infinito atribuído a uma forma sem matéria seria perfeito. E Deus que foi atribuído a sí mesmo, e em nenhum lugar mais, é portanto, perfeito e infinito.

Limitantes se referem a matéria, a quantidades, e isso não pode ser vinculado a Deus.

Se a subsistência de Deus se dá nele mesmo, e em nenhum outro, o temos distinto de todos e qualquer, caracterizando-o como único em seu poder e infinitude.

1.2 CARTAS ENTRE HENRY MOORE E DESCARTES

Henry Moore, nascido em 1614, foi um poeta inglês e filósofo de religião mais conhecido do chamado Platônicos de Cambridge. René Descartes, nascido em 1596, era um cientista, matemático e filósofo francês.

Descartes abandonou a escola de Aristóteles e desenvolveu uma ciência baseada na observação e experimentação, recebendo o título de pai da filosofia moderna.

Houve uma troca de cartas entre Henry Moore e Descartes sobre o Infinito e Deus e algumas com certa agressividade. Henry questionando inicialmente o porque Deus não poderia dividir a matéria ad infinitum, se assim determinasse. Descartes afirmou que se a divisão da matéria fosse estendida ao infinito, isto colocaria fronteiras a Deus já que ele nunca terminaria de dividir, já que essa ação é infinita, o que seria um limite para ele. Moore reconhece a infinitude de Deus e sua presença em todos os lugares, não fazendo sentido imaginá-lo inativo por não estar em algum lugar, portanto o espaço deveria ser igualmente infinito.

Descartes alega ser crível um Deus infinito, mas não um espaço infinito, como também não seria concebível medir o nada, algo que não existe.

Henry investe dizendo que se Deus quisesse destruir esse mundo e , em algum momento depois, séculos, ou segundos, reconstruí-lo, teria se passado alguma unidade de tempo mensurável, o que indica ser possível medir esse lapso em km , léguas ou outra unidade.

Descartes revida afirmando que se não existisse o mundo,haveria muito menos qualquer unidade de mensuração. Afirmar algo nesse calibre seria definir Deus como um ser temporal, mutável. Pode haver a infinitude de Deus, mas não a do mundo material.

Moore continuou com algumas divergências quanto a Descartes e insistiu quanto a presença de anjos, almas e do próprio mundo em Deus. Descartes saiu distinto em alguns conceitos após o contato com Moore. Persistiu na infinitude de Deus e a não infinitude do mundo, acreditando ser um objeto intelectual e imaginativo impor limites a um mundo físico enquanto Santo Anselmo afirma ser Deus um ser que não podemos pensar maior *(ens quo maius cogitari nequit)*.

1.3 AS DIMENSÕES DO UNIVERSO CONHECIDO

Quando se fala sobre o Universo; suas dimensões, sua idade, quando comparadas a qualquer referência nas civilizações humanas ou em sua noção corriqueira de distâncias, isto se torna inimaginável. A começar pelo início que teria ocorrido no Big Bang há aproximadamente 13,7 bilhões de anos, tornando-se necessário então, recorrer a analogias que incluem até o ano-luz, que é a distância que a luz percorre em um ano, o que valeria 9,46 trilhões de Km. Um número absurdo e incompreensível para nós.

Para que isso se torne mais digerível, pensamos em nossa Via Láctea com sua dimensão de 100.000 anos-luz sendo representada por um cm, em uma trena cósmica que faria com que Andrômeda, a galáxia mais próxima da nossa estar a 27,5 cm.

Chamamos de Universo Conhecido, o que a humildade humana teve a coragem de reconhecer como incapaz de mensurar em seu tamanho total, um diâmetro aproximado de 93 bilhões de anos-luz. Em nossa trena Cósmica teríamos então, a Via Láctea representada por um cm, enquanto o Universo Conhecido ocuparia um medida de 9,3 km.Quando retornamos ao diametro real, de 93 bilhões de anos -luz, observamos que o universo continua em expansão a uma velocidade de 73,2 quilômetros por segundo por megaparsec. (Um megaparsec é igual a 3,26 milhões de anos-luz, ou cerca de 3×10^{19} km).

2

O INFINITO: ALGUMAS HISTÓRIAS

2.1 CALCULANDO O COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Outro local onde a noção de infinito aparece quase que obrigatoriamente, ainda que disfarçadamente, é no cálculo do famoso número π, definido como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Culturas ancestrais já haviam percebido que o comprimento da circunferência e o diâmetro eram múltiplos e que esse múltiplo era aproximadamente 3. Os babilônios, por volta de 2000 A.C a 1600A.C, já utilizavam a aproximação de $3\frac{1}{8}$ para o π, mas Arquimedes[1] foi o primeiro a adotar um método sistemático para calcular o valor de π.

Sendo a geometria grega tão ligada a polígonos com suas linhas retas, o círculo, com suas curvas, foi limitado, por Arquimedes por dois polígonos: um, interno, com um perímetro menor que o círculo, e outro, com um perímetro maior. A ideia é que o comprimento do circunferência está em algum lugar entre o perímetro o polígono interno e o perímetro do polígono externo.

1 Arquimedes de Siracusa (Siracusa, 287 a.C. – 212 a.C.) foi um matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo grego.

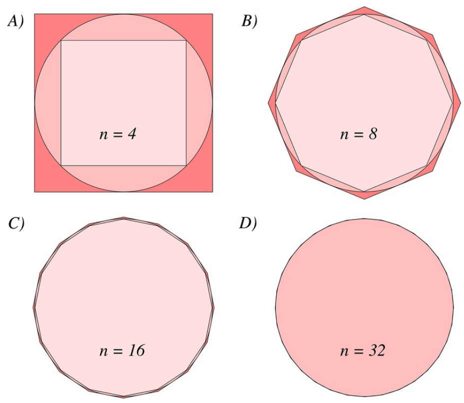


Figura 1: Polígonos internos e externos ao círculo.

Para facilitar sua vida, Arquimedes seccionou os lados de um hexágono regular, obtendo figuras com 12, 24, 48 e até 96 lados. Seus cálculos provaram que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, o que se encontra entre $3,1408$ e $3,1429$.

Para obter uma maior precisão, Arquimedes deveria aumentar o número de lados do polígono. Mas ainda assim, por maior que fosse o número de lados usados por Arquimedes, a conta nunca seria exata, uma vez que a circunferência não é um polígono. Assim, este processo iterativo de bissecção deveria ser feito *infinitas* vezes para calcular o valor exato de π.

Com isso tudo Arquimedes não conseguiu provar que π era de fato irracional, então optou por admitir que alvez não fosse.

Hoje conhecemos outros métodos iterativos para calcular o valor de π, mas todos eles com a mesma limitação: para obtermos o valor exato seriam necessárias *infinitas* iterações.

O valor de π já foi calculado com bilhões de casas decimais, por pura curiosidade ou para testar poderosos computadores. Um número assim tem pouca utilidade, já que com 5 ou 6 decimais se consegue boa aproximação para a maioria dos problemas práticos. Em dezembro de 2006, Yasumasa Kanada e uma equipe de 9 pessoas com o supercomputador Hitachi SR8000, calculou o π com 1,24 trilhão de casas decimais, em um esforço computacional de 600 horas (25 dias ininterruptos!)

2.2 HOTEL DE HILBERT

Por volta de 1900, o matemático David Hilbert, com seu interesse peculiar pelo infinito pensou em um Hotel incomum: um hotel com infinitos quartos.

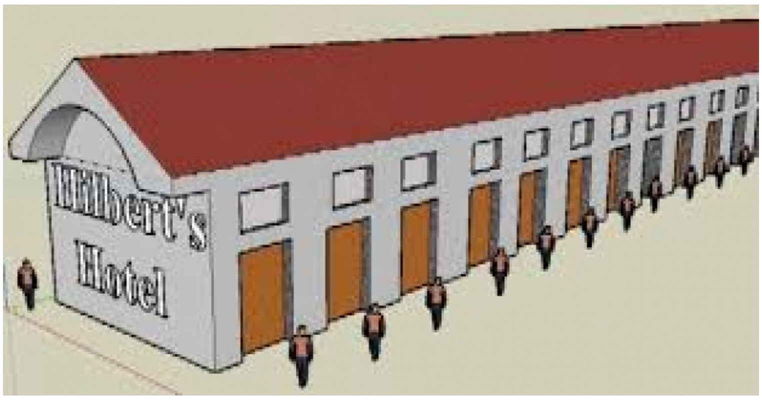


Figura 2: Uma das representações do Hotel.

Em uma certa época, o Hotel de Hilbert estava lotado quando apareceu um turista e pediu um quarto. Em um hotel finito, por maior que fosse, o viajante não conseguiria acomodação, mas não neste hotel. O gerente afirmou ao turista que apenas pediria à pessoa do Quarto 1 que se mudasse para o Quarto 2; à pessoa do quarto 2 que se mudasse para o quarto 3, à pessoa do quarto 3 que se mudasse para o quarto 4, a pessoa do quarto n se mudaria para o quarto $n+1$, e assim por diante. E deste modo o quarto 1 ficaria livre e o turista poderia se acomodar ali.

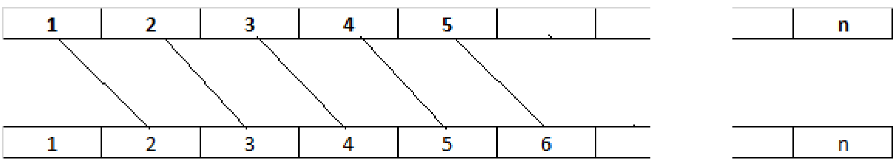


Figura 3: Deslocamento do quarto original para o quarto seguinte.

Em um hotel comum, finito, isso não daria certo, porque a pessoa com o maior número não terá para onde ir; mas em um hotel infinito, não há um quarto com o maior número.

Logo após a resolução desse problema, chega um ônibus com infinitos passageiros sentados nas poltronas 1,2,3, etc. O gerente logo percebeu que não poderia utilizar o mesmo método anterior, porque mesmo que pedisse que milhões de pessoas se deslocassem milhões de quartos á frente, isso só liberaria milhões de quartos, o que não seria o suficiente!

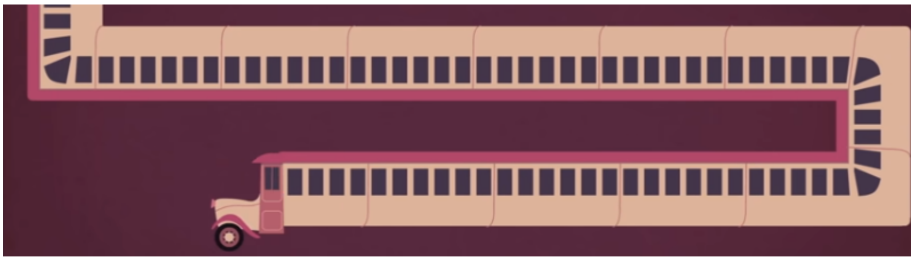


Figura 4: TED Ed.O Paradoxo de Hilbert-Jeff Dekofsky

Pensou então em pedir que o ocupante do quarto 1 se deslocasse para o quarto 2, que a pessoa do quarto 2 se deslocasse para o quarto 4, que a pessoa do quarto 3 se deslocasse para o quarto 6 e assim por diante. Em geral, a pessoa do quarto n se deslocaria para o quarto $2n$. Isso faria com que todos os quartos ímpares fiquem livres, o que acomodaria aos turistas do ônibus infinito.

Quando todos os passageiros do ônibus infinito haviam se acomodado, chega á porta do hotel , infinitos ônibus com infinitos passageiros em cada um. O gerente disse que apesar do hotel estar lotado, ele conseguiria acomodar todos.

A maneira como pensou isso, é genial. O gerente pediu que se alinhassem os ônibus lado a lado e re-enumerassem as poltronas usando uma ordem em diagonal. A poltrona 1 do primeiro ônibus receberia o número 1, a seguir a poltrona 2 do primeiro ônibus receberia o número 2, a poltrona 1 do segundo ônibus ficaria com o número 3, e assim por diante. Em geral, nesta nova ordem a poltrona n do ônibus k seria sucedida pela poltrona $n-1$ do ônibus $k+1$, e quando n fosse igual a 1, a próxima poltrona seria a $k+1$ do ônibus 1.

O que parecia impossível; colocar todos os infinitos passageiros de infinitos ônibus em um ônibus de infinitos lugares, se tornaria possível, já que cada pessoa receberia um número diferente e poderiam então, seguindo essa ordem, ser alocados no primeiro ônibus. E essa situação, de apenas um ônibus com infinitos passageiros, o gerente já sabia resolver.

Esta história está contada em diversas fontes, e os leitores interessados podem procurar mais informações em [11] e Ver [2].

2.3 O PARADOXO DE ZENÃO - AQUILES E A TARTARUGA.

Zenão de Eléia foi um pensador grego que nasceu em 489 A.C e continuou com alguns questionamentos de Parmênides, de quem era discípulo, a respeito do movimento.

Aristóteles afirmou que Zenão fundou a dialética, que é um caminho entre idéias, levando a outras idéias. Foi criador também de paradoxos, que tem sua palavra formada por *para* (contrário) e *doxo* (opinião), o que dá o significado de opinião contrária.

Zenão propôs que fosse feita uma corrida entre Aquiles, o herói grego, e uma tartaruga.

Aquiles e a Tartaruga.

Aquiles era o herói mais veloz, de acordo com a mitologia grega. Segundo Zenão, em uma corrida entre os dois, se fosse dada uma pequena vantagem para a tartaruga, Aquiles nunca a alcançaria. Isso porque após algum tempo, Aquiles chegaria no ponto onde a tartaruga estava, mas nesse instante, a Tartaruga já haveria se movido, ficando um pouco a frente.

Para ilustrar isso, pode-se construir uma tabela, imaginando com números adequados para facilitar o cálculo, que Aquiles correria a uma velocidade absurda de 100 m por segundo, e a tartaruga a uma velocidade incrível de 10m por segundo.

Instante (t)	**Posição da tartaruga (x_t)**	**Posição do herói (s_t)**
t_0	100	0
t_1	110	100
t_2	111	110
t_3	111,1	111
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1: Posições de Aquiles e da tartaruga em função do tempo.

Tal problema ficou conhecido como *paradoxo de Zenão,* e se baseava na idéia que o espaço é infinitamente divisível e que, para Zenão, o movimento não existia, sendo apenas uma ilusão.

Do modo como colocamos acima, seriam necessárias infinitas iterações como as mencionadas acima para que Aquiles encontrasse a tartaruga. Mas isso gera a pergunta de quanto tempo essas infinitas iterações demorariam para serem feitas?

Utilizando os acima e imaginando um movimento uniforme, teríamos:

- $S_A = 0m$ (posição inicial de Aquiles);
- $S_T = 100m$ (posição inicial da tartaruga);
- $V_A = 10m/s$ (velocidade de Aquiles);
- $V_T = 100m/s$ (velocidade da tartaruga)

Assim, caso os dois se encontrassem, isso deveria acontecer no instante t para o qual

$$S_A + V_A \cdot t = S_T + V_T \cdot t,$$

onde t é o tempo transcorrido medido em segundos.

Ou seja,

$$0 + 100t = 100 + 10t.$$

Concluindo que $t = \frac{10}{9}s$.

Isso mostra que as "infinitas" iterações descritas acima deveriam acontecer em apenas 10/9 segundos!!

Voltaremos a esse problema nos próximos capítulos!

2.4 ALEF-ZERO: O MENOR DOS INFINITOS.

No problema do Hotel de Hilbert vimos o infinito como uma quantidade, como o "total de elementos" em um dado conjunto. Seja ele quartos em um hotel ou poltronas em um ônibus. Vimos também que nossa intuição quando se trata de quantidades infinitas nem sempre funciona, e que infinitos ônibus com infinitos lugares cada um, de algum modo possuem um total de poltronas igual à apenas um destes ônibus.

Essa dificuldade de lidar com o infinito é histórica, e aparece em diversos outros contextos. O trecho abaixo é de 1638 :*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a*

Due Nuove Scienze, de Galileu (discursos e demonstrações matemáticas relacionadas a duas novas ciências) foi ligeiramente editado, quando da publicação de [12] por *Ian Stewart*, que reproduzimos abaixo em mais uma tradução livre para o português.

> "*Salviati*: Não podemos falar de quantidades infinitas como sendo uma maior ou menor que ou igual a outra. Suponho que você saiba quais números são quadrados e quais não são.
>
> *Simplício*: Estou perfeitamente ciente de que um número ao quadrado é aquele que resulta da multiplicação de outro número por si só; assim 4, 9, etc., são números ao quadrado que vêm da multiplicação 2, 3, etc., sozinhos.
>
> *Salviati*: Muito bem; e você também sabe que, assim como os produtos são chamados de quadrados, os fatores são chamados de lados ou raízes. Portanto, se eu afirmar que todos os números, incluindo quadrados e não quadrados, são mais do que quadrados, eu direi a verdade, não devo?
>
> *Simplício*: Certamente.
>
> *Salviati*: Se eu perguntar mais adiante quantos quadrados existem, pode-se responder verdadeiramente que existem tantos quantos o número correspondente de raízes, já que cada quadrado tem sua própria raiz e cada raiz seu próprio quadrado, enquanto nenhum quadrado tem mais de uma raiz e não há raiz mais de um quadrado... Dado isso, devemos dizer que há tantos quadrados quanto números porque eles são tão numerosos quanto suas raízes e todos os números são raízes.
>
> *Sagredo*: O que então devemos concluir nessas circunstâncias?
>
> *Salviati*: Até onde eu vejo, só podemos inferir que a totalidade de todos os números é infinita, e os atributos 'igual', 'maior' e 'menor' não são aplicáveis a quantidades infinitas, mas apenas a finitas."

De um modo muito livre, matemáticos se utilizam do termo infinito, indicando, de um modo não tão rigoroso, alguma coisa cujo tamanho não possa ser determinado com números inteiros comuns nem com números reais. Já que esse "número", não é encontrado, substitui-se por **"infinito"**, mas o infinito não é um número, nem tampouco o maior dos números possível. E os conceitos de ordem e igualdade normalmente aplicadas para números são mais complicados de entender quando lidamos com o infinito (ver [13] e [14]).

Mas a intuição de Salviati estava errada em um ponto: é possível comparar infinitos, dizendo que um é menor que o outro. Cantor engendrou um modo de comparar conjuntos infinitos, definindo o *total de elementos* do conjunto dos naturais como sendo o menor dos conjuntos infinitos e o batizando de $\aleph_0$.

Seus conhecimentos da cultura hebraica justificam a escolha desse símbolo: ele é a primeira letra do alfabeto hebraico, representando boi, força, líderança e também um valor numérico: 1 ou 1000; sendo que para o 1 há a interpretação religiosa da unicidade de Deus, e para o 1000, a semente da multiplicação, a infinidade, os mistérios inefáveis de Deus.

As palavras seguintes começam com a letra $\aleph$, em hebraico:

Ein Sof - infinitude de Deus
Ehad - um
Eloim - Deus

$\aleph$ representaria a unicidade de Deus e um novo começo para a Matemática.

Crianças que aprendem a contar, normalmente pensam em um número gigantesco como 1.000.000, ou quem sabe, 1.000.000.000. Mas quase que imediatamente sentem a necessidade de explorar qual seria o maior de todos, e percebem que adicionando um a qualquer número pensado, obtém-se um ainda maior.

Cantor raciocinou que os conjuntos seriam coleções de objetos e que crianças também compartilham do conceito que conjuntos tem a mesma quantidade de elementos quando estes podem ser postos em correspondência.

Só haveria um modelo de conjunto infinito caso houvesse a possibilidade de corresponder um conjunto infinito com qualquer outro infinito. Cantor definiu então que o conjunto de números inteiros seria o conjunto infinito básico e também definiu um conjunto contável como aquele que pudesse ser colocado em correspondência com o conjunto dos números naturais.

O conjunto dos inteiros é obviamente contável, fazendo a correspondência com si mesmo.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

No Hotel de Hilbert vimos a correspondência

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

E Salviati propôs a seguinte correspondência entre quadrados perfeitos e números naturais dada por

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Cantor denominou seus números infinitos de ***cardinais***, mas o nome que acabou sendo usado foi o de cardinais transfinitos ou cardinais infinitos e provou que poderia associar os números racionais aos números naturais e fazer a contagem, obtendo o mesmo cardinal: o $\aleph_0$.

Usando um argumento diagonal similar ao usado no problema do hotel de Hilbert, Cantor ordenou os racionais entre 0 e 1 da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{6} \dots,$$

Dessa maneira, conseguiu escrever todos os racionais possíves, e associando a cada um deles um natural correspondente, conseguiu mostrar que os números racionais possuem a mesma cardinalidade $\aleph_0$.

Cantor descobriu também que existem infinitos maiores que outros. A *cardinalidade do continuum*, ou cardinalidade dos números reais, representada por Γ, é maior que $\aleph_0$.

Voltaremos a falar disso nos próximos capítulos!

3

CARDINALIDADE DE UM CONJUNTO

Hotel de Hilbert
Se um hotel possuísse infinitos quartos, todos ocupados, e aparece mais um hóspede querendo um quarto, como o gerente poderia resolver esta situação?
— David Hilbert, matemático alemão

3.1 CONTANDO ELEMENTOS EM UM CONJUNTO

Se for perguntado a alguma pessoa: "Qual dos conjuntos possui mais elementos?"

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5...\} \quad \text{ou} \quad \{1, 2, 3, 4, 5...\}$$

é bem provável que a resposta seja o primeiro, porque tem o zero a mais. No entanto, se perguntar a um Matemático, ele vai dizer que os dois conjuntos tem a mesma quantidade de elementos.

Para compreender isso precisamos primeiro entender o que Cantor fez para para "contar" e comparar conjuntos infinitos.

Precisamos, a princípio, mensurar a quantidade de elementos de um conjunto. Representaremos então por $n(A)$, a cardinalidade, que é a quantidade de elementos do conjunto A.

Disso temos, para conjuntos finitos, que se $A \subseteq B$, então $n(A) \leq n(B)$, e se $A \subset B$, A tem menos elementos que B, já que $n(A) \leq n(B)$.

Mas essa relação não abarca conjuntos infinitos, já que por exemplo, o conjunto dos naturais está completamente contido no conjunto dos inteiros e ambos tem a mesma cardinalidade.

Ver [3]

Podemos entender essa proposta, quando definimos o que é conjunto infinito e como contar seus elementos. Conta-se o número de elementos de um conjunto finito, retirando um elemento desse conjunto (que pode ser uma coleção de revistas, um grupo de brinquedos...) e associando a ele o número 1, retiramos mais um elemento e associamos o número 2, e assim consecutivamente, até que se acabem os elementos a se contar.

Desse modo, para a contagem do número de elementos de um conjunto do tipo: $\{\bigcirc, \Delta, \Pi, \Theta\}$, teriamos que retirar um elemento, por exemplo, $\bigcirc$ e associar-lhe o número 1; extrair um elemento do conjunto restante (Δ, Π, Θ) por exemplo, Δ, e associar-lhe o número 2;extrair Π ou Θ do conjunto restante, por exemplo, Π e associar-lhe o número 3; e por último, retirar o elemento Θ, associando-lhe o número 4 ordem em que é feita essa escolha não tem importância e, ao fim desse processo, dizemos que o conjunto $\{\bigcirc, \Delta, \Pi, \Theta\}$ tem 4 elementos, como vemos na Figura 5.

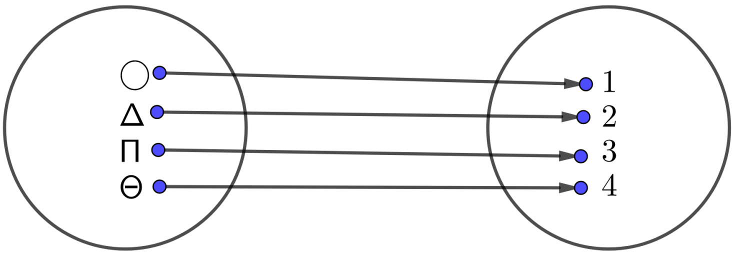


Figura 5:

É preciso observar que a ordem com que vão acontecendo as extrações é indiferente. Poderíamos ter extraído inicialmente o elemento Θ e associado a ele o número 1; ao elemento Π , associarmos o número 2; ao Δ, associaríamos o número 3; e finalmente, ao elemento $\bigcirc$,associaríamos ao número 4. Já que se exauriram os elementos, o procedimento é interrompido, e dizemos que o conjunto tem 4 elementos.

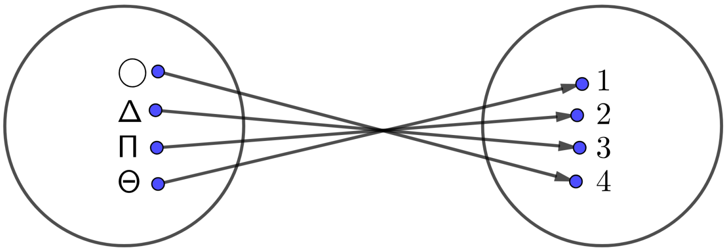


Figura 6:

Afirmamos, desse modo, que um conjunto tem n elementos, se realizamos uma bijeção entre os elementos deste com o conjunto de números naturais $I_n = \{1, 2, 3...n\}$. Deve ser observado que somente o conjunto vazio possui 0 elementos.

Definição 3.1. Dado um número natural n, dizemos que um conjunto A tem n elementos, ou que A tem cardinalidade n (representado por $n(A) = n$), se podemos estabelecer uma relação de bijeção entre os elementos de A e o conjunto de números naturais $\{1, 2, 3...n\}$.

Dizemos que um conjunto A é finito se existe algum natural n tal que $n(A) = n$.

Chamamos de infinito àquele conjunto que não é finito.

Segue daí que dois conjuntos finitos A e B tem a mesma cardinalidade quando podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre estes conjuntos.

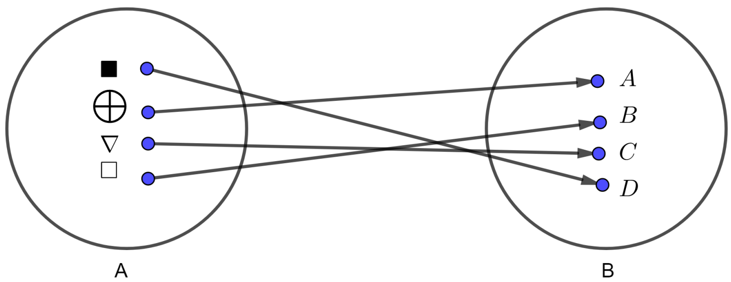


Figura 7:

Essa é uma conclusão importante, pois pode ser facilmente aplicada a conjuntos infinitos, nos permitindo então comparar a cardinalidade de conjuntos infinitos.

Definição 3.2. Dois conjuntos quaisquer A e B terão a mesma cardinalidade quando houver uma bijeção entre A e B. Dizemos assim que A é equipotente a B, ou $A \sim B$, e também que $n(A) = n(B)$.

Quando discutimos o hotel de Hilbert e a definição de Cantor para $\aleph_0$, comentamos sobre algumas destas bijeções. Ali estávamos especialmente interessados em bijeções com os números naturais, que a partir de agora denotaremos por $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3...\}$ e $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 4...\}$, quando quisermos ou não incluir o 0.

Tais bijeções tem um significado especial na matemática, uma vez que os números naturais são os números usados para contar. Portanto, assim como identificamos conjuntos finitos com subconjuntos dos naturais, tomaremos $\mathbb{N}_1$ como referência para estudar a cardinalidade de conjuntos infinitos.

3.2 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

A partir de agora estudaremos mais a fundo, e de maneira um pouco mais formal, uma classe importante de conjuntos, chamados de enumeráveis.

Definição 3.3. Diremos que um conjunto B é **enumerável** quando B for finito ou quando existir uma bijeção $f : \mathbb{N}_1 \to B$. Neste caso, chamaremos f de uma enumeração dos elementos de B.

Mais explicitamente, escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \ldots, f(n) = x_n, \ldots\}$, temos que $B = \{x_1, x_2 \cdots x_n\}$.

Como anteriormente, definiremos por I_n o conjunto $I_n = \{1, \ldots, n\}$ dos números naturais de 1 a n. Ou seja,

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}.$$

Vale recordar que o conjunto vazio tem zero elementos, e que o conjunto B para o qual exista algum $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção

$$\phi : I_n \to B$$

tem n elementos (ou cardinalidade n).

São consequências das definições:

A) cada conjunto I_n é finito e possui n elementos;

B) se $f : A \to B$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.

Os conjuntos enumeráveis infinitos formam uma classe bastante rica de conjuntos, e foi tentando entender estas relações que alguns dos problemas que discutimos no capítulo anterior tiveram origem.

O que fizemos no problema do hotel de Hilbert (e que voltaremos a tratar com mais detalhes) foi mostrar algumas propriedades importantes de tais conjuntos, como o fato deles possuírem subconjuntos próprios de mesma cardinalidade, ou mesmo que a união de uma quantidade enumerável de tais conjuntos é ainda enumerável! Tais resultados são altamente contra-intuitivos, e por isso voltaremos a eles com mais calma um pouco mais a frente.

Mas antes, vamos entender melhor algumas relações e propriedades dos conjuntos finitos.

3.2.1 *Conjuntos Finitos*

A seguir elencaremos alguns resultados sobre conjuntos finitos, a maior parte deles bastante intuitivos. Apresentaremos também a prova da maior parte deles, e algumas consequências interessantes.

Comecemos estudando os conjuntos I_n e seus subconjuntos.

Proposição 3.4. *Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.*

Demonstração. Para mostrar este resultado, usaremos indução em n.

O resultado é claro para $n = 0$, uma vez que o único conjunto com cardinalidade 0 é o vazio.

Supondo então que o resultado seja válido para um certo n, consideremos uma bijeção $f : I_{n+1} \to A$.

Tomando então $a = f(n+1)$, a restrição de f a I_n fornece uma bijeção $f' : I_n \to A - \{a\}$.

Assim, se tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então pela hipótese de indução, concluíremos que $A - \{a\} = I_n$, de onde temos $a = n+1$ e $A = I_{n+1}$.

Se, porém, não tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então deve-se ter $n+1 \in A - a$. Neste caso, existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n+1$. Então definiremos uma nova bijeção

$g : I_{n+1} \to A$ pondo $g(x) = f(x)$ se $x \neq p$ e $x \neq n+1$, enquanto $g(p) = a$,$g(n+1) = n+1$. Agora , a restrição de g a I_n nos dará uma bijeção $g' : I_n \to A - \{n+1\}$. Evidentemente $A - \{n+1\} \subset I_n$, donde $A = I_{n+1}$. □

Do mesmo modo, se existem duas bijeções $\phi : I_n \to B$ e $\varphi : I_m \to B$, deve-se ter $m = n(B) = n$.

Outra consequência é que não pode existir uma bijeção $f : B \to Y$ de um conjunto finito B sobre uma parte própria $Y \subset B$.

De fato, sendo B finito, existe uma bijeção $\varphi : I_n \to B$. Seja $A = \varphi^{-1}(Y) = \{k \in I_n : \phi(k) \in Y\}$. Então, como ϕ é uma bijeção e Y é parte própria de B, sabemos que A é uma parte própria de I_n e a restrição de ϕ a A fornece uma bijeção $\varphi' : A \to Y$.

Agora, se $f : B \to Y$ é uma bijeção, a composta $g = (\varphi')^{-1} \circ f \circ \varphi : I_n \to A$ seria então uma bijeção de I_n sobre sua própria parte A , o que contradiz Proposição 3.4. Portanto, não existe bijeção f.

O resultado abaixo é bastante intuitivo e velho conhecido dos estudantes de ensino médio. É conhecido na combinatória como “princípio aditivo”. Em geral ele é colocado de maneira mais informal, mas equivalente.

Proposição 3.5. *Sejam A, B conjuntos finitos disjuntos, com $n(A) = m$ e $n(B) = k$. Então $A \cup B$ é finito e possui $m + k$ elementos. Ou seja, $n(A \cup B) = m + k$.*

Demonstração. Dadas as bijeções $\varphi : I_k \to B$ e $\psi : I_m \to A$, definamos a função $\xi : I_{m+k} \to A \cup B$ pondo $\xi(x) = \varphi(x)$ se $1 \leq x \leq m$, e $\xi(x) = \psi(x - m)$ se $m + 1 \leq x \leq m + k$ Como $A \cap B = \emptyset$, constata-se que ξ é uma bijeção, o que prova o resultado. □

O resultado pode ser facilmente generalizado para uniões de finitos conjuntos disjuntos. Ou seja, dados $B_1 \ldots, B_k$ conjuntos finitos , dois a dois disjuntos, com $m_1 \ldots, m_k$ elementos respectivamente, então $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ é finito e possui $m_1 + \cdots + m + k$ elementos. Em outras palavras

$$n(B_1 \cup \cdots \cup B_k) = n(B_1) + \cdots + n(B_k).$$

Outras consequências importantes são as seguintes:

1. Se A, B são finitos e $A \subset B$, então $n(A) \leq n(B)$;
2. Se A, B são finitos, então $n(A \cup B) < n(A) + n(B)$;

Para o primeiro resultado acima, basta notar que $B = A \cup (B - A)$ e portanto, como $A \cap (B - A) = \emptyset$, temos

$$n(B) = n(A) + n(B - A) \geq n(A).$$

Para o segundo seguimos a mesma ideia, escrevendo agora $A \cup B = A \cup (B - A)$, e como $B - A \subset B$ temos do resultado anterior que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A) \leq n(A) + n(B).$$

Para finalizar, vamos mostrar um resultado importante caracterizando subconjuntos finitos de números naturais. =

Seja $B \subset \mathbb{N}$ não-vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) B é finito;

(b) B é limitado;

(c) B possui um maior elemento.

Demonstração. Provaremos que $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Seja $B = \{x_1 \ldots, x_n\}$. Pondo $p = x_1 + \cdots + x_n$, temos $x < p$, para todo $x \in B$, logo B é limitado.

$(b) \Rightarrow (c)$. Supondo $B \subset \mathbb{N}$ limitado, segue que o conjunto $A = \{p \in \mathbb{N}, p \geq n$ para todo $n \in B\}$ é não vazio. Tome então $p \in A$. Sabemos que $p \geq n$ para todo $n \in B$. Agora temos duas possibilidades:

- podemos ter que $p \in B$, o que faria dele o maior elemento de B, concluindo o resultado;

- podemos ter que $p \notin B$. Neste caso tomamos $p_1 = p - 1$. Como $p \neq n$ para todo $n \in B$, então $p > n$ e $p_1 \geq n$ para todo $n \in B$.

Se p_1 ainda não estiver em B, repetimos o segundo passo acima, gerando um número $p_2 = p_1 - 1 = p - 2$.Pelo Princípio da Boa Ordem, que apregoa que todo subconjunto de números naturais possui um menor elemento, seguimos assim até encontrar $p_k \in B$. E neste caso, teremos p_k como o maior elemento de B.

Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $p_k \in A$, que é o menor elemento de A. Afirmamos que deve ser $p_k inB$. Dessa maneira, se fosse o $p_k \notin B$, então teríamos $p_k > n$ para todo $n \in B$. Como $B \neq \emptyset$, isto obrigaria $p_0 > 1$,donde $p_k = p_1 + 1 \leq n$ e como supomos $p_k \notin B$, $p_k > n$, seria um absurdo. Então$p_1 \geq n$ para todo $n \in$ B. Só que isto significa que

$(c) \Rightarrow (a)$ Se existe $p \in B$ tal que $p \geq n$ para todo $n \in B$, então $B \subset I_p$, portanto B é finito e $n(B) \leq p$.

□

3.2.2 *Os conjuntos infinitos enumeráveis*

Como acabamos de ver conjuntos finitos se comportam de maneira bastante intuitiva e compreensível. Quando unimos elementos à um conjunto finito, por exemplo, sua cardinalidade sobe. Da mesma forma, um subconjunto próprio de um conjunto finito B, não pode ter a mesma quantidade de elementos, devendo ser efetivamente menor.

Mas nenhuma destas afirmativas podem ser feitas quando estamos lidando com conjuntos infinitos. O problema do hotel de Hilbert nos mostrou que ao incluir um hóspede em um conjunto infinito de hóspedes, o "total de hóspedes" não muda! Ou seja, a cardinalidade do novo conjunto é a mesma.

Trazendo para o contexto apresentado neste capítulo, ao mover cada hóspede n para o quarto $n + 1$, o que o gerente estava fazendo era definir a bijeção $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_1$ dada por $f(n) = n + 1$, e mostrando que a cardinalidade de $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{N}_1$ são a mesma.

Como vimos anteriormente, conjuntos que podem ser associados à $\mathbb{N}_1$ via uma bijeção são conhecidos como *enumeráveis* e sua cardinalidade é a mesma de $\mathbb{N}_1$. Cantor denominou tal cardinalidade de $\aleph_0$, e estava interessado em entender se existem outras cardinalidades infinitas diferentes, e se estas poderiam ser ordenadas de alguma forma.

Nesta seção vamos estudar mais a fundo os conjuntos infinitos enumeráveis, começando a responder a pergunta feita por Cantor.

Começaremos tentando entender por que Cantor dizia ser $\aleph_0$ o "menor infinito" possível.

Para isso vamos apresentar dois resultados iluminadores!

Teorema 3.6. *Todo subconjunto $B \subset \mathbb{N}_1$ é enumerável.*

Demonstração. Se B for finito, então o resultado segue naturalmente.

Se B for infinito, definiremos recursivamente uma bijeção $f : \mathbb{N}_1 \to B$.

Para isso, faça $f(1)$ = menor elemento de B. Defina então $D_1 = B - \{f(1)\}$ e faça $f(2)$ = menor elemento de D_1.

Temos assim que $f(1) < f(2)$ e se $D_2 = B - \{f(1), f(2)\}$, então para todo $x \in D_2$, temos $x > f(1) > f(2)$.

Prosseguindo da mesma forma escolhemos $f(3)$ = menor elemento de D_2. E com isso temos $f(1) < f(2) < f(3)$, e para todo $x \in D_3 = B - \{f(1), f(2), f(3)\}$, temos $f(1) < f(2) < f(3) < x$.

Assim, recursivamente, dado $n \in \mathbb{N}_1$, se temos $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$ em B, tais que para todo $x \in D_n = B - \{f(1), \ldots (n)\}$, vale que $f(1) < \cdots < f(n) < x$, então podemos definir $f(n+1)$ = menor elemento de D_n.

A função assim definida tem que $f(n) < f(m)$ sempre que $n < m$ e, portanto, é injetiva.

Por outro lado, se existisse algum $x \in B - \{f(1), f(2), \ldots\}$, teríamos por construção que $x \in D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_1$ e, portanto, $x > f(n)$, qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}_1$. Então o conjunto $\{f(1), f(2), \ldots\} \subset \mathbb{N}$ seria limitado, e portanto finito, o que é um absurdo. Isso mostra que f é sobrejetora, e portanto uma bijeção. $\square$

Antes de mais nada, é importante observar que apesar do resultado acima estar enunciado e demonstrado para números naturais, é possível mostrar que

Proposição 3.7. *Dado um conjunto A enumerável, qualquer subconjunto B, finito ou infinito de A, também será enumerável. Reciprocamente, se um conjunto B não for enumerável e estiver contido em outro, este também não será enumerável.*

Tal resultado já mostra que não existe cardinalidade infinita menor que $\aleph_0$, o que é confirmado pelo resultado a seguir.

Proposição 3.8. *Todo conjunto infinito B contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Para mostrar o resultado acima, vamos construir um conjunto $A \subset B$ e uma bijeção $f : \mathbb{N}_1 \to A$.

Para isso, comece tomando um elemento $b_1 \in B$ qualquer, e defina $f(1) = b_1$.

Como B é infinito, $B - \{b_1\}$ é também infinito. Tome então $b_2 \in B - \{b_1\}$ e faça $f(2) = b_2$.

Siga este processo, definido elementos $b_k,\ k \in \mathbb{N}_1$ com $f(k) = b_k$.

Defina então $A = \{b_1, b_2, \ldots\}$ e note que a função f definida é uma bijeção de $\mathbb{N}_1$ para A.

De fato, se $b_k \in A$ então $f(k) = (b_k)$, e a função é sobrejetora. E para ver que é injetora, basta notar que para cada $i < j$, b_j foi escolhido em $B - \{b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_{j-1}\}$, e portanto $f(i) = b_i \neq b_j = f(j)$.

Segue assim que $A \subset B$ é enumerável.

$\square$

Além de estabelecer $\aleph_0$ como a menor cardinalidade infinita, temos ainda uma forma alternativa de caracterizar conjuntos infinitos, dada no corolário abaixo.

Corolário 3.9. *Um conjunto B é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f : B \to Y$ de B sobre um subconjunto próprio $Y \subset B$.*

Com efeito, já sabemos que se B é finito, tal bijeção não existe. E portanto, se uma tal projeção existir, B será claramente infinito.

Reciprocamente, se B é infinito, então B contém um subconjunto infinito enumerável $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Faça então $Y = (B - A) \cup \{a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$. Evidentemente, Y é uma própria parte de B (note que $a_1 \notin Y$). Definimos uma bijeção $f : B \to Y$ pondo $f(x) = x$ se $x \in B - A$ e $f(a_n) = a_{2n}$, concluindo o resultado.

Tal definição foi, de certa forma, dada por Dedekind para conjuntos finitos. Dedekind dizia que: "Um conjunto é finito se, e somente se, não admite uma bijeção sobre sua própria parte".

A seguir temos dois resultados sobre como aumentar conjuntos enumeráveis sem alterar sua cardinalidade.

Proposição 3.10. *A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ o conjunto finito e $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ o conjunto enumerável. A correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $A \cup B$ será assim:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & b_1 & b_2 & \ldots \end{array}$$

□

Proposição 3.11. *A união de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Se $A = \{a_1, a_2 \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2 \ldots\}$ são dois conjuntos enumeráveis então $A \cup B$é enumerável, bastando fazer a correspondência biunívoca abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & \ldots \end{array}$$

Que também poderia ser escrito como $f(a_n) = 2n - 1$ e $f(b_n) = 2n$ □

3.2.3 *A Cardinalidade dos demais conjuntos numéricos*

Para concluir o capítulo vamos estudar rapidamente a cardinalidade dos conjuntos numéricos mais estudados no ensino médio: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

A CARDINALIDADE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS Este é bastante simples. Começamos a enumerar a partir do zero, depois $1, -1, 2, -2$ e assim, sucessivamente, sempre um positivo e um negativo.

Desse modo, conseguimos enumerar todos os elementos de $\mathbb{Z}$. A figura a seguir ilustra essa idéia.

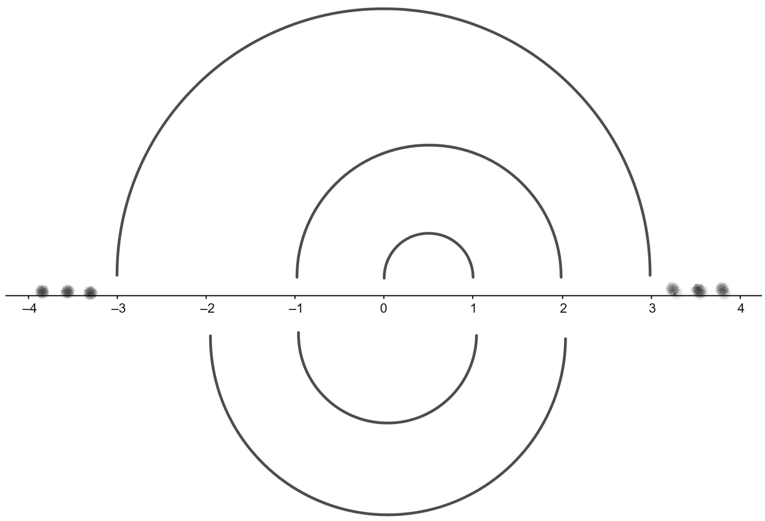


Figura 8:

A ideia acima pode ser resumida na seguinte função $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1-n}{2}, & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2}, & \text{se} \quad n \text{ é par.} \end{cases}$$

Para mostrar que f é injetora, façamos n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \neq n_2$ e dividamos isto em três casos:

1. Se n_1 é ímpar e n_2 é par, pela definição de f temos $f(n_1) \leq 0$ e $f(n_2) > 0$, e portanto $f(n_1) \neq f(n_2)$;
2. Se n_1 e n_2 forem ambos pares, dividindo ambos os membros da desigualdade $n_1 \neq n_2$ por 2, temos $\frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$, o que implica $f(n_1) \neq f(n_2)$;
3. Se n_1 e n_2 forem ambos ímpares, multiplicando ambos os membros da desigualdade $n_1 \neq n_2$ por $\frac{-1}{2}$ e somando $\frac{1}{2}$, temos $\frac{1-n_1}{2} \neq \frac{1-n_2}{2}$ o que implica $f(n_1) \neq f(n_2)$.

Desse modo, concluímos que f é injetora. Agora, para provar que também é sobrejetora, peguemos $a \in \mathbb{Z}$ qualquer. Vamos provar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = a$ e dividamos isto em três partes:

1. Se $a = 0$, basta tomarmos $n = 1$, assim $f(n) = f(1) = \frac{1-1}{2} = 0$
2. Se $a > 0$, basta tomarmos $n = 2a$, assim $f(n) = f(2a) = \frac{2a}{2} = a$

3. Se $a < 0$, basta tomarmos $n = -2a+1$, assim $f(n) = f(-2a+1) = \frac{1-(-2a+1)}{2} = \frac{2a}{2} = a$

Concluímos assim que, como esperado, $\mathbb{Z}$ é enumerável.

A CARDINALIDADE DOS RACIONAIS Para demonstrar que os racionais $(\mathbb{Q})$ são enumeráveis, admitamos que cada par ordenado (a, b) corresponda ao número $\frac{a}{b}$. Tomando apenas uma das frações equivalentes, podemos enumerar os racionais positivos como na figura abaixo.

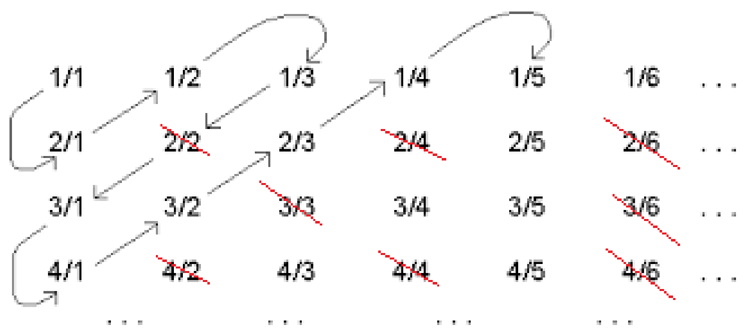


Figura 9:

Observa-se com facilidade que todos os números racionais positivos aparecerão, já que $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{N}\}$. Este argumento, dado por Cantor, demonstra a enumerabilidade dos racionais positivos.

Trocando $\frac{a}{b}$ por $-\frac{a}{b}$, mostramos a enumerabilidade dos racionais negativos $\mathbb{Q}^-$, e portanto, como

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\},$$

temos que $\mathbb{Q}$ é também enumerável!

A CARDINALIDADE DOS REAIS A cardinalidade dos reais é um problema um pouco mais complicado. Conseguir uma enumeração dos reais como fizemos com $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ parece um trabalho complicado. Façamos então o trajeto contrário, e vamos supor que existência de tal enumeração, e ver o que conseguimos extrair de informação sobre tal função.

Quem sabe este estudo não nos ilumina um pouco o caminho a seguir.

Para facilitar, vamos nos ater ao intervalo $]0,1[$ onde todos os números podem ser escritos da forma $0,a_1a_2a_3\dots a_k\dots$, sendo $0 \leq a_k \leq 9$ com $k \in \mathbb{N}_1$.

Suponhamos agora que este intervalo seja enumerável, e tome uma correspondência biunívoca $f: N_1 \to]0,1[$. Temos assim que

$$f(n) = \begin{cases} f(1) = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1k}\dots \\ f(2) = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2k}\dots \\ f(3) = 0,a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3k}\dots \\ f(4) = 0,a_{41}a_{42}a_{43}\dots a_{4k}\dots \\ \dots \\ f(k) = 0,a_{k1}a_{k2}a_{k3}\dots a_{kk}\dots \\ f(k+1) = 0,a_{(k+1)1}a_{(k+1)2}a_{(k+1)3}\dots a_{(k+1)k}\dots \\ \dots \end{cases}$$

Considere agora o número $d = 0,b_1b_2b_3\dots b_k\dots$ onde para cada $k \in \mathbb{N}_1$, $b_k = a_{kk}+1$ se $a_{kk} \neq 9$, e $b_k = 0$ se $a_{kk} = 9$. Note que $b_k \neq a_{kk}$ para todo $k \in \mathbb{N}_1$, mas como a_{kk} é o k-ésimo digito decimal de $f(k)$, segue que $d \neq f(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_1$, e f não é uma bijeção. Convém ressaltar que a representação decimal pode não ser única, já que temos $1 = 0.999\dots$.

Concluímos assim que $\mathbb{R}$ não é enumerável, e podemos dizer que sua cardinalidade é efetivamente maior que a cardinalidade de $\mathbb{N}_1$.

Isso mostra que existem outras cardinalidades infinitas distintas de $\aleph_0$. Outros conjuntos com cardinalidades ainda maiores podem ser construídos, mas isso foge ao escopo deste trabalho.

4

ORDENANDO NÚMEROS

4.1 SEQUÊNCIAS E UMA NOVA NOÇÃO DO INFINITO

No capítulo anterior vimos o papel dos números naturais na contagem de elementos em um conjunto. Isso nos ajudou a dar uma noção formal ao que chamamos de infinito. Esse talvez seja o primeiro uso histórico destes números, mas certamente não é o único. Outro uso, que de certa forma apareceu no capítulo anterior, é na ordenação de elementos em um conjunto.

Mas antes de entrarmos em detalhes, vamos lembrar que os números naturais carregam consigo uma relação de ordem natural, dada por

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n < n+1 < \cdots .$$

Tal ordem, associada com a não-finitude de tal conjunto, nos leva a uma nova noção de infinito, ligeramente diferente daquela que já vimos. Podemos, neste contexto, chamar de infinito algo que é *maior que qualquer número natural n*.

Note que não chamamos infinito de número, por que de fato ele não é. Não conseguimos operar com infinto, assim como operamos com números regulares. Podemos até dizer que $\infty + \infty = \infty$, mas dificilmente podemos dizer algo sobre $\infty - \infty$ ou mesmo ∞/∞.

Essa noção de infinito está presente em um conceito importante na matemática superior, raramente trabalhada no ensino básico: o limite.

Para alcançar tal conceito, primeiro precisamos rever o que entendemos por sequência.

Os números 3,6,4,8,10,5,5, nesta ordem, podem, à primeira vista, não terem sentido, mas é a representação em dígitos de marcas encontradas em um osso de macaco, na a atual região da República Democrática do Congo, datando de 22 mil anos atrás: o osso de Ishango. Outras ranhuras presentes neste osso ofertam outros conjuntos ordenados de números que não parecem ser aleatórios, nem tampouco indicam a caracterização de simples registros de quantidades, como um criador faria para controlar o seu rebanho de animais, mas sugerem um pensamento mais refinado, com a possibilidade de serem dados acerca de períodos lunares e de ciclos menstruais de mulheres.

Estes são exemplos do que chamamos de *sequência*.

Em uma linguagem coloquial, sequência pode se referir a uma sucessão ordenada de elementos. Tal ordem pode ser cronológica, de dimensões ou outra. Em Matemática, uma sequência ou sucessão $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma função cujo domínio é um conjunto contável totalmente ordenado.

Quando enumeramos os elementos de um conjunto enumerável, como fizemos no capítulo anterior, estamos criando uma sequência. Mas é importante observar que sequência se diferenciam de conjuntos em dois aspectos fundamentais:

1. uma sequência pode conter elementos repetidos. A famosa sequência de Fibonacci, onde um termo é dado pela soma dos dois termos anteriores, é em geral escrita como $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$, e possui os dois primeiros elementos iguais;

2. em uma sequência estamos especialmente interessados na **ordem** dos elementos. Ou seja, precisamos saber comparar dois elementos na sequência, dizendo qual vem primeiro e qual vem depois.

Durante o ensino médio estudamos dois tipos particulares de sequências: as progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG).

As PA's não definidas pela equação

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

onde r é conhecida como razão da PA.

Assim, os números ímpares positivos podem ser vistos como uma PA de razão 2 e $a_1 = 1$.

Já as PG's são formadas pela multiplicação sucessiva de um termo. Ou seja

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

onde mais uma vez, q é chamada de razão da PG.

Neil Sloane iniciou em 1963, uma coleção de sequências numéricas que considerava interessantes. Em 1973, já possuia 2400 delas e as publicou em um livro. Com o surgimento da internet, sua coleção cresceu até se tornar a “On-line Encyclopedia of Integer sequences”, com cerca de 200 mil itens, sendo ampliada pela participação de matemáticos profissionais, amadores e alguns curiosos, a uma ordem de crescimento de quase 10 mil por ano.

Cada sequência recebe uma classificação pela posição em que foi colecionada por ele. A (A4)0,0,0,0..., formada exclusivamente por zeros, foi a 4ª a ser adicionada, a (A100000)3,6,4,8,10,5,5,7(a do osso de Ishango), esta na posição 100 mil.
Há algumas séries muito curiosas , como a bestial (A51003)666,1666,2666,3666,4666 ...

Essa sequencia tem esse nome por conter o número 666 em sua expansão decimal, que no capítulo 13, versículo 18 do Apocaipse da Bíblia Sagrada, é apresentado como o número da besta:

> "*...Aqui há sabedoria. Aquele que tem entendimento, calcule o número da besta; porque é o número de um homem, e o seu número é seiscentos e sessenta e seis.*"

Mais conhecida e cercada de mistérios , é a (A197298) =2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 59, 73, 97, 107, 109, 139, 179, 233, 263, 277, 283, 337, 347, 409, 419, 547, 643, 683, 809, 811, 821, 823, 863, 983, 991, 997, 1031, 1193...a sequência dos números primos. Euclides provou que os números primos são infinitos, mas são os embates cognitivos para desvendar qual seria o próximo número primo que ilustram a angustia humana pelo conhecimento.

4.1.1 *Limites de sequências*

Comecemos um exemplo. Para isso considere a PG de razão $\frac{1}{2}$ definida por

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{an}},$$

para $n \geq 1$, e tome $a_1 = \frac{1}{2}$.

É fácil concluir que

$$a_n = \frac{1}{2^n},$$

e portando a sequência é dada por

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots.$$

Uma pergunta que aparece naturalmente é: o que acontece com a sequência a medida que os valores de n aumentam?

Neste caso, quando n é grande $1/2^n$ é muito pequeno, ficando cada vez mais próximo de 0. Mais do que isso, dado qualquer valor $\varepsilon > 0$, não interessa o quão pequeno seja, sempre encontramos n tal que $1/2^n < \epsilon$. Ou seja, a medida que n cresce, a sequência chega arbitrariamente próximo a zero.

Quando isso acontece dizemos que "*o limite de $\frac{1}{2^n}$ quando n tende ao infinito é igual a 0*", e denotado por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Dada então uma sequência infinita $(a_1, a_2, \ldots)$ qualquer, estamos agora interessados em saber qual o seu comportamento quando n cresce indiscriminadamente (n tende ao infinito).

Em alguns casos, como o da PG acima, é possível encontrar um valor do qual a sequência se aproxima a medida que n cresce. Neste caso, quando a_n fica arbitrariamente próximo à um valor L a medida que n aumenta, dizemos que "*o limite de a_n quando n tende ao infinito é igual a L*", e denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Neste texto não queremos entrar em maiores detalhes sobre estes limites. Os leitores interessados podem procurar saber mais sobre o tema em [9].

Considere agora a sequência dada por

$$a_n \frac{n}{n+1},$$

cujos primeiros termos são:

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5} \ldots$$

Observe que

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Mas a medida que n cresce, $1/n$ fica arbitrariamente perto de 0, fazendo com que a_n fique arbitrariamente próximo de 1. Ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Para terminar considere a sequência $a_n = (-1)^n$, e observe que a sequência toma a forma $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$. Ou seja, os termos da sequência ficam alternando entre -1 e 1, e não se aproximam de nenhum número específico. Neste caso dizemos que o limite da sequência não existe.

4.2 SÉRIES

Comecemos lembrando um exemplo que já comentamos anteriormente: a prova da Criação de Grandi.

Na soma infinita $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$, dependendo da maneira que agruparmos isso, encontramos resultados aparentemente diferentes. Podemos ter

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0,$$

ou ainda

$$1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 1.$$

Mas se as duas são a mesma soma, teremos que $0 = 1$? Grandi interpretou isso como a unidade sendo criada a partir do nada, mas tudo o que isso mostra na realidade é que somas infinitas precisam ser melhor definidas.

Dada então uma sequência infinita de números

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots,$$

queremos dar sentido à soma infinita

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{4.1}$$

que passaremos a chamar de *série*. Os valores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ serão chamados de termos da série.

Para dar um sentido à essa soma infinita, vamos começar definindo

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

como a n-ésima **soma parcial** da sequência $(u_1, u_2, \ldots)$.

A série $u_1 + u_2 + \cdots$ será definida então a partir do comportamento da sequência de somas parciais, quando n tende ao infinito.

Mais precisamente, se

$$\lim_{n \to \infty} s_n$$

existe, diremos que a série $u_1 + u_2 + \cdots$ converge e

$$u_1 + u_2 + \cdots = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Se $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ não existe, dizemos que a série é divergente ou que não tem soma.

Exemplo 4.1. Na prova de criação de Grandi tentamos estudar a série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

As somas parciais seria dadas então por

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 - 1 = 0 \\ s_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ s_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

A sequência se somas parciais fica alternando entre 0 e 1, sem se aproximar de nenhum valor específico. Deste modo

$$\lim_{n \to \infty} s_n$$

não existe e a série diverge.E além disso, as séries absolutamente convergentes não dependem da ordem de sua apresentação.

Exemplo 4.2 (A série geométrica)**.** Examinemos a série

$$a + aq + aq^2 + \ldots. \tag{4.2}$$

dada pela soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q.

Para $a, q \neq 0$ e $q \neq 1$ temos

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}.$$

E portanto

$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n.$$

Segue assim que

$$(1-q)s_n = s_n - qs_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} - (aq + aq^2 + \cdots + aq^n) = a - aq^n.$$

Concluímos assim que

$$s_n = a\tfrac{1-q^n}{1-q}$$

Para analisar o valor da série, primeiro note que

1. Se $|q|< 1$ então $q^n \to 0$ quando $n \to \infty$, e por consequência ,

   $$\lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

   Isto significa que se $|q|< 1$, a série (4.2) converge e sua soma é

   $$a + aq + aq^2 + \cdots = \tfrac{a}{1-q}$$

2. Se $|q|> 1$, então $|q^n| \to \infty$, quando $n \to \infty$, e portanto a sequência $a\frac{1-q^n}{1-q}$ não se aproxima de nenhum valor fixo quando n cresce. Portanto $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe. De modo que se $|q|> 1$ a série (4.2) diverge.

3. Se $q = 1$, a série (4.2) tem a forma $a + a + a \ldots$ e nesse caso $s_n = n \cdot a$. Neste caso dizemos que

   $$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

   e a série diverge.

4. Se $q = -1$, a série(4.2) toma a forma

   $$a - a + a - a + \ldots$$

   E, neste caso,

   $$s_n = \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ a, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

   Portanto, s_n não tem limite, e a série diverge.

4.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA DE SÉRIES

Encontrar valores fechados para séries, como no caso das séries geométricas convergentes, não é sempre uma tarefa fácil. De fato, o simples fato de determinar se uma série converge ou não pode ser complicado.

Nesta seção vamos dar alguns critérios que nos ajudam a decidir se a série converge ou não.

4.3.1 *Condição necessária para convergência de uma série.*

Seja uma série $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \ldots$ convergente , com $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Note que, como o limite mede o comportamento da sequência para valores cada vez maiores de n, vale também que

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$

Mas note que $s_n - s_{n-1} = u_n$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Mostramos assim que para que uma série seja convergente, seus termos devem tender a 0, quando n tende ao infinito.

Corolário 4.1. *Se o n-ésimo termo de uma série não tende a zero, quando $n \to \infty$, a série diverge.*

4.3.2 *Critério D'Alembert (ou da razão).*

Se em uma série com termos positivos

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots \tag{4.3}$$

a relação de $(n+1)$-ésimo termo com n-ésimo quando $n \to \infty$, tem um limite finito l, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \tag{4.4}$$

então,

1. a série converge se $l < 1$,
2. a série diverge se $l > 1$,
3. quando $l = 1$, o teorema não consegue identificar a convergência ou divergência da série.

Demonstração: Abaixo vamos apenas pincelar as ideias principais da demonstração. O leitor interessado pode procurar mais detalhes em [9].

1. Seja $l < 1$, escolha um número q tal que $l < q < 1$.

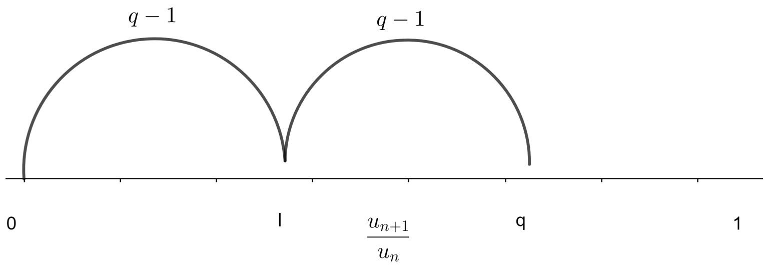


Figura 10:

Como $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ está se aproximando de l, deve haver um momento que a sequência passe a ficar abaixo de q (caso contrário, ela ficaria a uma distância maior que $q-l$ de l). Ou seja,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \tag{4.5}$$

sempre que $n \geq N$ para algum valor grande de N.

Segue que para $n \geq N$

$$\begin{cases} u_{N+1} < qu_N \\ u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N \\ u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

E portanto $u_n < q^{n-N} u_N = q^n \frac{u_N}{q^N}$, para todo $n \geq N$.

A convergência vai sair do exame de duas séries:

$$u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_n + \dots \tag{4.6}$$

e

$$\frac{u_N}{q^N} + q\frac{u_N}{q^N} + \cdots + q^n \frac{u_N}{q^N} + \cdots \tag{4.7}$$

A série (4.7) é uma progressão geométrica com razão positiva $q < 1$, e portanto converge. Os termos da série (1), a partir de u_{N+1}, são menores que os termos da série (4.7). E com isso é possível concluir que a série (1) também converge.

2. Seja $l > 1$ Então, da igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

, podemos deduzir que a partir de certo termo N

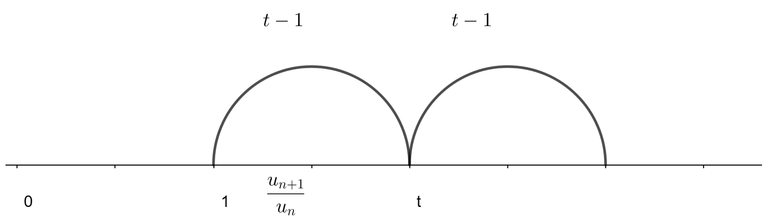


Figura 11:

a desigualdade $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ou $u_{n+1} > u_n$, para todos os $n \geq N$.

Isto significa que os termos da série crescem, a partir de um $N+1$, e , por isso, o termo comum não tende a zero.

Exemplo 4.3. Estudar a convergência da série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{3^n}{n!}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1}$$

$$l = 0$$

$l < 1$, a série converge.

Exemplo 4.4. Estudar a convergência da série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)} \div \frac{2^n}{n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)} \times \frac{n}{2^n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n}{n+1}$$

$$l = 2$$

$2 > 1$, a série diverge.

Exemplo 4.5. Estudar a convergência da série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)} \div \frac{n}{n+1}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)} \times \frac{n}{n+1}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$l = 1$$

Com $l = 1$, o critério D'Alembert não consegue identificar se a série converge ou diverge.

4.3.3 *Critério de Cauchy(ou critério da raiz).*

O próximo critério apresentaremos sem demonstração.

Se em uma série com termos positivos

$$u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_n + \dots \tag{4.8}$$

o valor $\sqrt[n]{u_n} = l$, quando $n \to \infty$, ou melhor:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n} = l$$

então:

1. se $l < 1$, a série converge,
2. se $l > 1$, a série diverge.

Demonstração:

1. Seja $l < 1$. Examinemos um número que satisfaz a desigualdade $1 < q < 1$. A partir de certo número $n = N$, tem lugar a relação

   $$|\sqrt[n]{u_n} - l| < q - l$$

   de onde se deduz que

   $$\sqrt[n]{u_n} < q$$

   para todos os $n \geq N$. Agora examinemos as séries:

   $$u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \ldots \tag{4.9}$$

   $$q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots \tag{4.10}$$

   A série 3.10 converge porque seus termos formam uma progressão geométrica decrescente. Os termos da série 3.10, a partir de u_n são menores que os termos respectivos da série 3.9, portanto a série 1 converge.

2. Seja $l > 1$. Então. a partir de certo número $n - N$, temos:

   $$\sqrt[n]{u_n} > l$$

   $$u_n > 1$$

   Mas, se todos os termos da série examinada, a partir de u_n são maiores que 1, a série diverge posto que seu termo comum não tende a zero.

Exemplo 4.6. Estudar a convergência da série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{n^n}}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{n-1}}}{n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}}{n} \times \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \times \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$
$$l = 0$$

Utilizando as propriedades dos limites, temos que se $l < 1$, a série converge.

5

ATIVIDADES PARA ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL II

5.1 JOGOS E ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL II E ENSINO MÉDIO

5.1.1 *Jogo dos Clones*

Jogo dos Clones. https://www.geogebra.org/m/trbtxabp

Proposta: Começa-se o Jogo dos Clones com apenas uma peça demonstrando a movimentação permitida e então propõe-se um desafio: convidar alunos a descobrirem quais são as posições que permitem resolução dentre as quatro possíveis a partir de duas ou três peças.(Veja fig. 5.1)
Na verdade,existe apenas uma possível entre as quatro posições, mas fica mais divertido vê-los tentando e tentando.Essa atitude pode não ser a mais honesta possível, mas certamente é muito didática.Com certa frequência ouvem-se comentários como: "Mas, Prô, têm certeza que tem mais de uma solução? Nós estamos tentando aqui e nada.". Quando é respondido pelo professor que só há uma solução e observa-se o semblante dos alunos,a atividade ganha um brilho a mais.

Descrição:

O applet acima foi criado pelo professor Rafael Grisi no aplicativo Geogebra, e ocorre em um tabuleiro de 8x8 casas de cores alternadas, tendo uma região delimitada em seu canto inferior esquerdo em formado de um L, ocupando 3 casas:

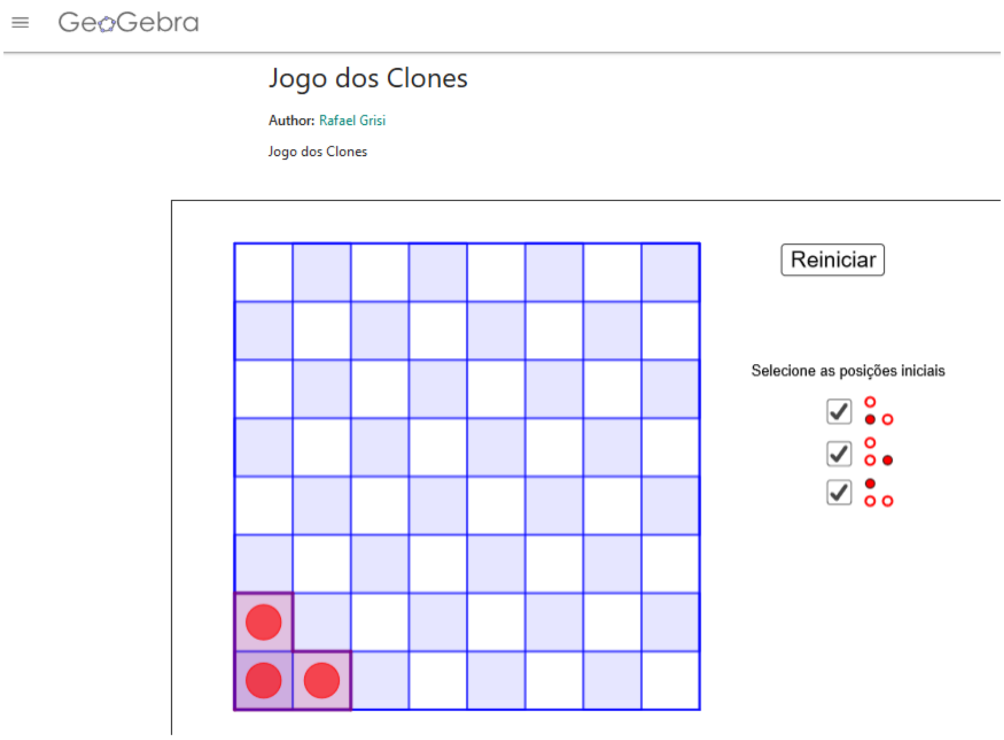
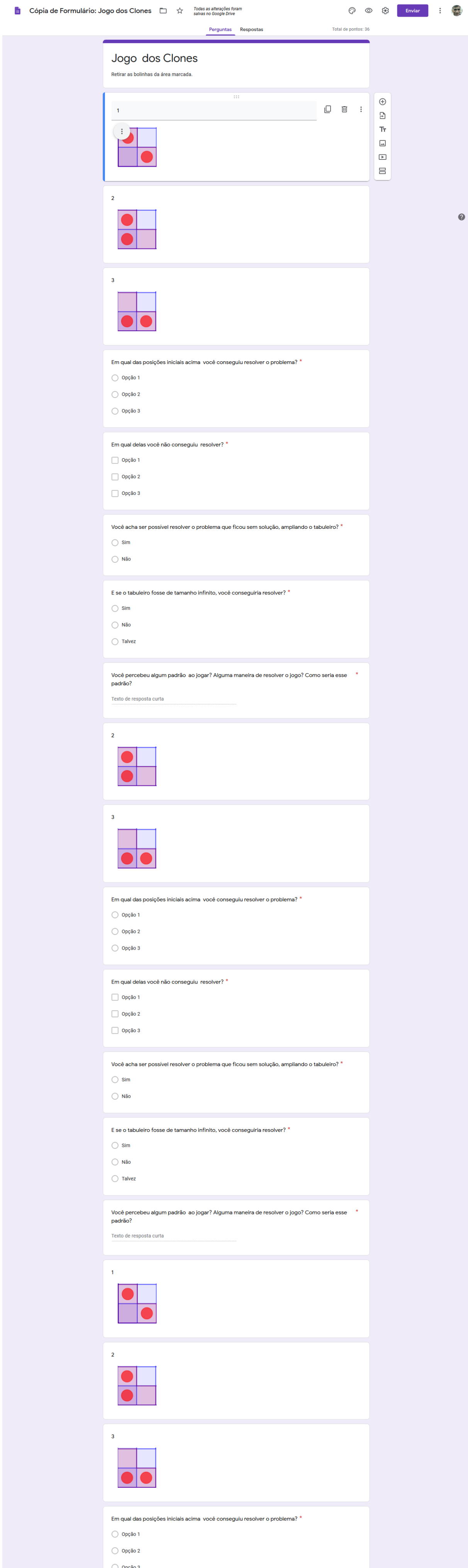


Figura 12: Jogo dos clones - apresentação.

O objetivo, a partir da escolha das peças iniciais que podem ficar em uma, duas ou nas três casas delimitadas, é retirar todas elas deste espaço marcado a partir do movimento básico que é clicar na peça escolhida fazendo com que ela se divida em outras duas na posição imediatamente acima dela e a sua direita, deixando vago, o espaço inicial; desde que as casas contíguas estejam ambas livres.

Após a demonstração com uma única peça, foi pedido aos alunos, estando em duplas, que descobrissem com qual das disposições seria impossível a retirada das peças e que respondessem ao questionário a seguir proposto.

Análise das questões do Jogo dos Clones.



Cópia de Formulário: Jogo dos Clones

Todas as alterações foram salvas no Google Drive

Enviar

Perguntas Respostas

Total de pontos: 36

Jogo dos Clones

Retirar as bolinhas da área marcada.

1

2

3

Em qual das posições iniciais acima você conseguiu resolver o problema? *

Opção 1

Opção 2

Opção 3

Em qual delas você não conseguiu resolver? *

Opção 1

Opção 2

Opção 3

Você acha ser possível resolver o problema que ficou sem solução, ampliando o tabuleiro? *

Sim

Não

E se o tabuleiro fosse de tamanho infinito, você conseguiria resolver? *

Sim

Não

Talvez

Você percebeu algum padrão ao jogar? Alguma maneira de resolver o jogo? Como seria esse padrão? *

Texto de resposta curta

2

3

Em qual das posições iniciais acima você conseguiu resolver o problema? *

Opção 1

Opção 2

Opção 3

Em qual delas você não conseguiu resolver? *

Opção 1

Opção 2

Opção 3

Você acha ser possível resolver o problema que ficou sem solução, ampliando o tabuleiro? *

Sim

Não

E se o tabuleiro fosse de tamanho infinito, você conseguiria resolver? *

Sim

Não

Talvez

Você percebeu algum padrão ao jogar? Alguma maneira de resolver o jogo? Como seria esse padrão? *

Texto de resposta curta

1

2

3

Em qual das posições iniciais acima você conseguiu resolver o problema? *

Opção 1

Opção 2

Opção 3

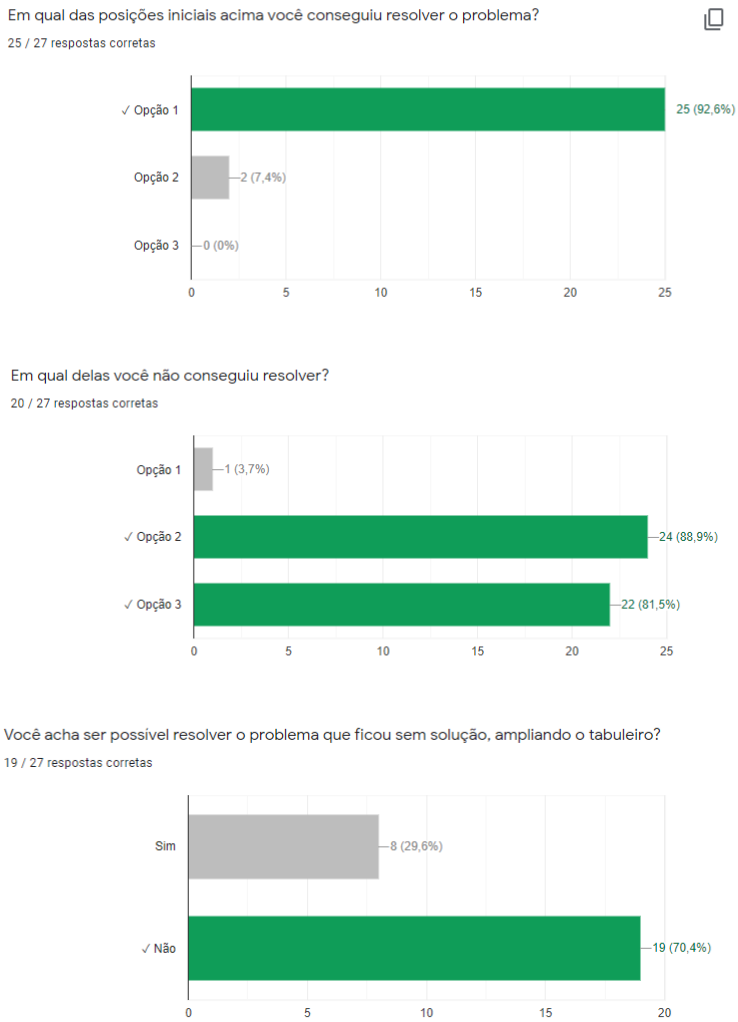


Figura 14: Distribuição das respostas.

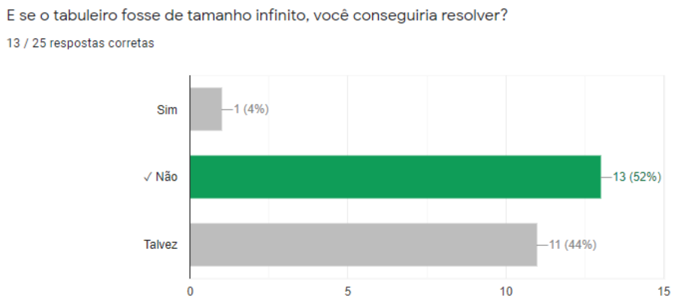


Figura 15: Distribuição das respostas.

Houve a participação de 28 alunos na atividade, e 27 responderam ao questionário. Com a relação à questão número 1:"Em qual das posições iniciais acima você conseguiu resolver o problema?"; ficou claro que os dois alunos que a erraram , ou não tentaram realmente resolve-la ou não entenderam a proposta da atividade, tendo respondido ao acaso, já que apenas a primeira posição era possível de vitória.

No tocante à questão número 2;"Em qual delas você não conseguiu resolver?";percebe-se que um aluno não conseguiu resolver a primeira, que era possível, e três alunos não se manifestaram-se na opção 3, que não era possível de realizar , sendo então provável que não tenham esgotado as possibilidades e não quiseram opinar.

Quanto a ampliação do tabuleiro, a maioria (70%) percebeu que não adiantaria aumentar o tabuleiro para resolver as questões insolúveis.

Perguntando sobre um tabuleiro infinito, conceito difícil de apreender, quase a metade julgou que poderia ou talvez pudesse resolver as situações se o tabuleiro fosse infinito.

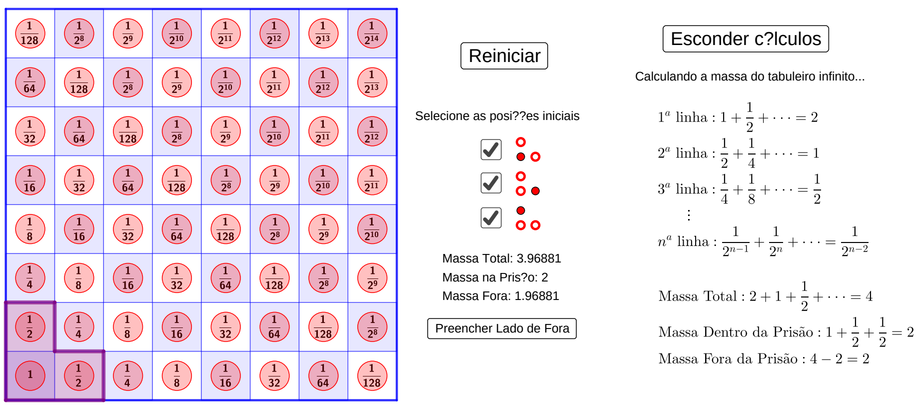


Figura 16: Cálculos mostrando a soma das áreas interna e externa ao jogo.

A explicação busca mostrar que a soma das massas do lado de fora da prisão, deve ser igual a massa original dentro dela para que o jogo seja possível. Utilizando soma da progressão geométrica, um assunto abordado no primeiro ano do ensino médio, é possível verificar que as somas não se igualam, já que na parte interna da prisão a massa é 2 (Figura 21) , enquanto que do lado de fora é $1,96881$, diferença essa que mostra que não é possível retirar as três bolinhas de dentro da prisão.

5.1.2 *O Tabuleiro Infinito no Jogo dos Clones*

Na análise do jogo dos clones foram dados valores às bolas que ocupam cada casa do tabuleiro da seguinte forma

Descrição das peças: valores.

- 1, para a primeira bolinha do canto superior esquerdo.
- $\frac{1}{2}$, para cada uma das três bolinhas ao redor da primeira.
- $\frac{1}{4}$, para cada uma das cinco bolinhas ao redor das três secundárias.
- $\vdots$
- $(\frac{1}{2})^k$, para cada uma das (2k+1)bolinhas ao redor das anteriores, onde k é cada etapa , em formato de L, acrescentada para completar o formato quadrangular.

Isso associa a cada linha do tabuleiro uma PG de razão $1/2$. Com o auxílio da série geométrica já apresentada neste trabalho, é possível calcular assim a massa total presente no tabuleiro infinito quando todas as casas estão preenchidas, concluindo que ainda assim não é possível terminar o jogo termina quando começamos com a prisão cheia.

Objetivos:

Fazer com que o aluno perceba, através de algumas etapas, a Progressão Geométrica (PG) envolvida na situação e identifique o uso da soma de infinitos termos de uma PG.

Desenvolvimento:

Propor aos alunos que resolvam as duas questões abaixo:

1. Qual número quadrangular você deve construir para que a soma de seus elementos (bolinhas), aproxime-se o mais possível de 5?
2. Qual o valor máximo que você obteria se pudesse construir um número quadrangular infinitamente grande? Pense na soma de infinitos termos de uma PG decrescente.

5.1.3 *Números Poligonais e a recursividade*

Tem-se quase por unanimidade que os números figurados surgiram com os pitagóricos e seus nomes baseiam-se nas figuras formadas.

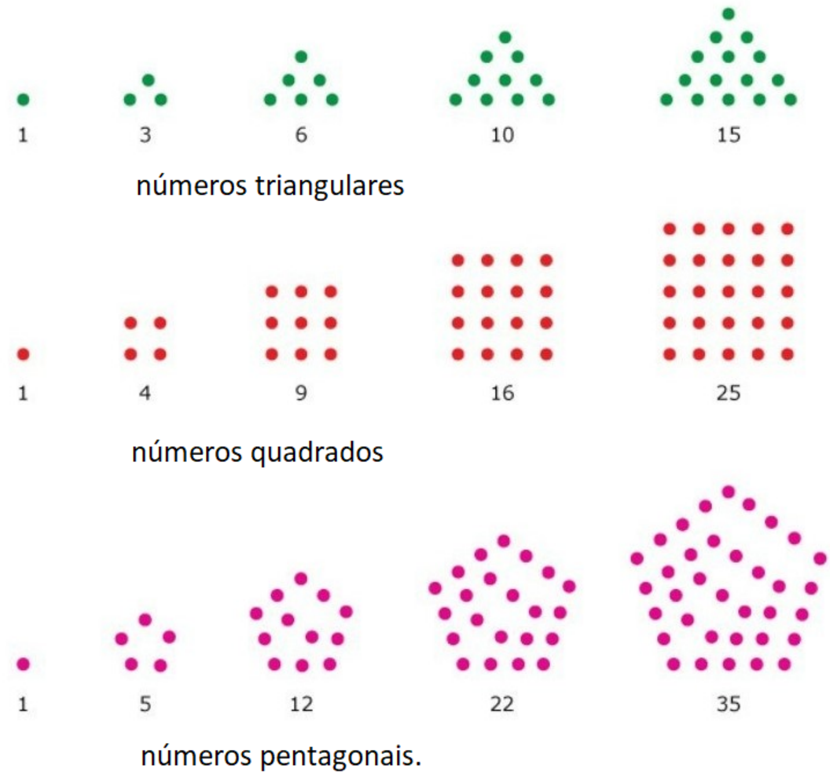


Figura 17: Números poligonais mais conhecidos.

Acredita-se que Pitágoras surgiu com a idéia o de que esses números são gerados a partir de um gnômon [1] ou unidade básica

A origem do termo calcular vem de pedra, que em latim é *calculus*, já que as primeiras figuras poligonais eram feitas com pedrinhas. Essas e outra histórias podem ser encontradas em [8].

1 Na geometria, um gnômon é uma figura plana formada, normalmente, por uma figura que, adicionada a uma determinada figura, faz uma figura maior da mesma forma.

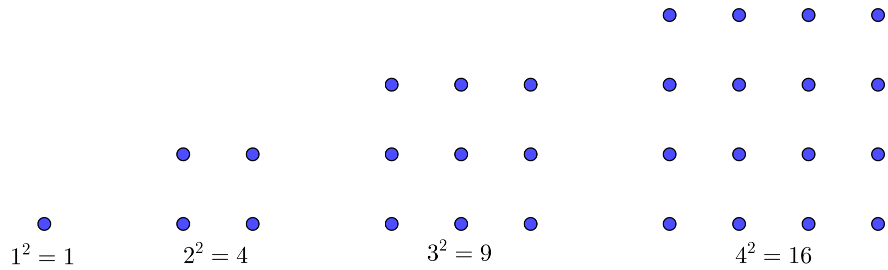


Figura 18: Os números quadrados tem a sua lei de formação facilmente identificada.

Os padrões observados por Pitágoras eram: o quadrado 2, tinha $1 + 3$ pedrinhas, o quadrado 3 possuía $1 + 3 + 5$, e o quadrado 4 era obtido por $1 + 3 + 5 + 7$. A soma de números ímpares.

Percebeu, além disso, que todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos:

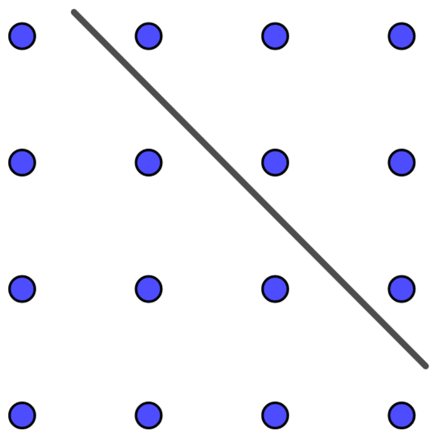


Figura 19: Soma do triangular com 6 bolinhas e do triangular com 10 bolinhas.(Veja Figura 2)

E que também seria possível sair de um número quadrado a um número quadrado imediatamente superior somando-se a sequência dos números ímpares.

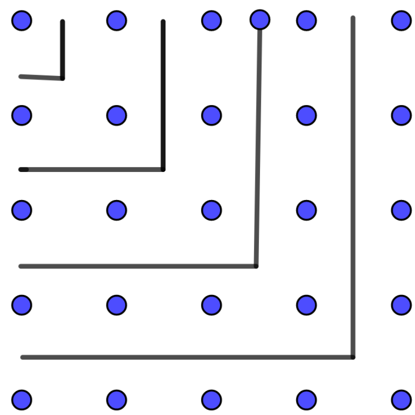


Figura 20: $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

É possível visualizar com facilidade que o enésimo número quadrado é $S_n = n^2$. Já que a soma de um número triangular é dada por $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

temos assim que, se cada número quadrado é obtido pela soma de dois triangulares seguidos, então (Ver [3])

$$S_n = T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2.$$

A recursividade: a construção por etapas. É muito produtivo para o desenvolvimento do raciocínio do jovem a demonstração de fórmulas recursivas.Fica claro a necessidade de etapas bem estruturadas já que cada resultado é a base sobre a qual se apoia a próxima etapa e depois, a próxima, e ai, a próxima ...
A proposta abaixo instiga a isso. Valores calculados devem ser utilizados para a construção de novas etapas, não se chegando a um resultado pretendido sem um caminho de passos; e por acaso, a busca de qualquer resultado não passa por um roteiro mais ou menos similar?

Objetivo: Construir números poligonais centrais de um mesmo tipo, a partir dos anteriores, o que permitiria que os alunos tivessem acesso a fórmulas recursivas.[1]

Desenvolvimento: A partir da apresentação de uma imagem e da expressão geral dos termos, seria pedido o cálculo de alguns outros.

Atividade:

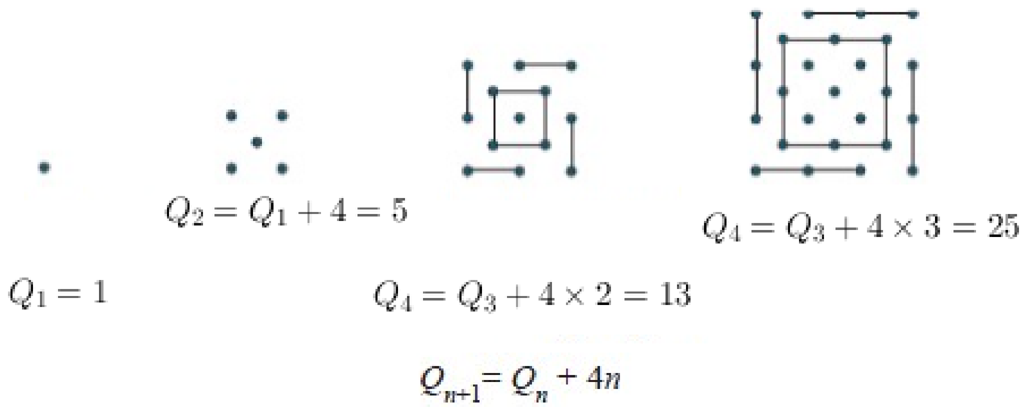


Figura 21: Imagens produzidas por recursão

Veja este número poligonal:

A figura 23 indica que $T_{n+1} = T_n + 3n$, para todo n. Sabendo-se, por $T_6 = 46$, calcule T_7 e T_8.

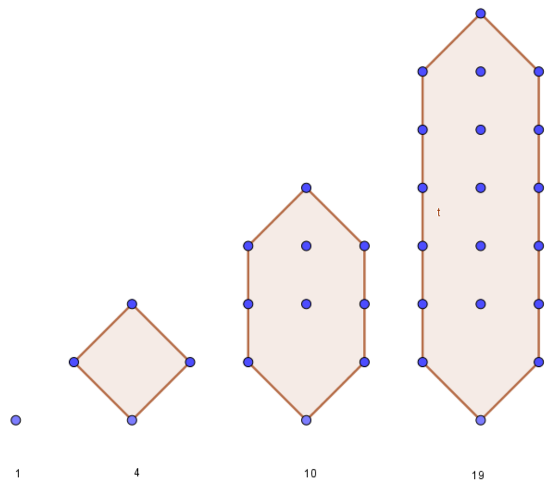


Figura 22: Primeiros termos da sequência recursiva.

1 A recursão é o processo pelo qual passa um certo procedimento quando um dos passos do procedimento em questão envolve a repetição completa deste mesmo procedimento.

5.2 QUAL A COR DO SEU CHAPÉU?

Proposta: Essa atividade, para um trio de alunos, com observação da sala, pode ser um ótimo exercício de lógica.

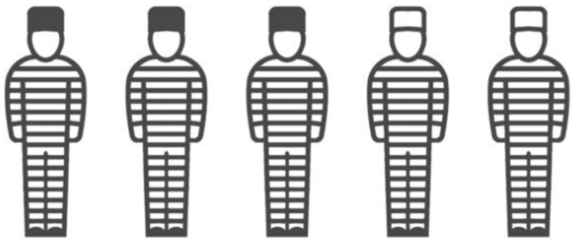


Figura 23:

Você está na prisão com Bastião e Alfonsino. Vocês três estão enfileirados olhando somente para a frente. Você é o primeiro da fila, Bastão é o segundo e Alfonsino é o terceiro.

Um carcereiro está com três chapéus pretos e dois brancos e coloca aleatoriamente na cabeça de vocês sem que ninguém veja qual o chapéu foi colocado na própria cabeça.

Alfonsino pode ver o seu chapéu e o de Bastião, mas Bastião consegue ver apenas o seu, e você não consegue ver o de ninguém. O carcereiro propõe um desafio em troca da liberdade dos três: "Se um de vocês conseguir me responder com total certeza qual a cor do próprio chapéu, eu libertarei todos".

Ele pede para Alfonsino para responder primeiro ejá que Alfonsino é muito inteligente e absolutamente honesta, diz não saber, porque não há como ter certeza.

O carcereiro inquiri então Bastião,que embora seja muito inteligente e extremamente lógico, também ignora resposta. Ele se dirige a você e você diz a cor do seu chapéu com 100% de segurança. O carcereiro é vencido em seu desafio e é obrigado a libertar os três prisioneiros. Qual a cor do chapéu que você estava usando e como você sabia?

Resposta ao final.

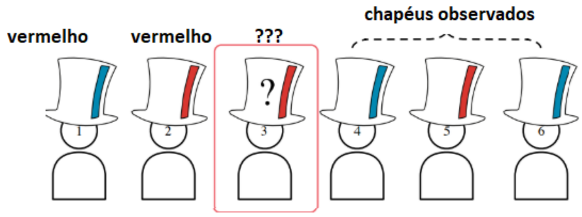


Figura 24:

5.3 O ENIGMA DOS 100 CHAPÉUS.

Em uma entrevista de emprego é apresentada esta charada:há 100 prisioneiros em uma fila indiana e cada um usa um chapéu azul ou vermelho, tendo a visão apenas dos que estão a sua frentes. Não consegue ver os que estão atrás dele e nem saber a cor de seu próprio chapéu. Iniciando pelo final da fila, um carcereiro pergunta a cada um a cor do próprio chapéu. Se acerta, está livre; se erra , permanece preso.Não é possível aos demais descobrir se ele acertou ou não a cor do próprio chapéu, embora ouça a resposta dada. Antes da formação da fila os prisioneiros combinaram uma estratégia que os ajudaria . Qual é essa estratégia. Resposta ao final.

5.4 ATIVIDADE: O ENIGMA DO CHAPÉU

Objetivo:Treinar a lógica dos alunos a partir de uma situação concreta. Material: chapéus de cores branca e preta em quantidade suficiente para a atividade com o grupo. Participantes: em teoria , não há limitação, mas na prática grupos grandes teriam dificuldade para elaborar e chegaram a um consenso sobre uma estratégia, além do trabalho de arrumar muitos chapéus.Sugestão, trabalhe com grupos de 8 a 12 alunos de cada vez, e impeça que o restante do grupo veja a resolução antes de chegar a sua vez de jogar. Regras:

- Cada aluno só poderá olhar para os que estão a sua frente.
- Cada aluno só poderá dizer , quando inquirido, as palavras:**PRETO** ou **BRANCO**.
- Após a explicação das regras, será dado tempo para que o grupo pense em uma estratégia.
- Será vencedor o grupo que obtiver o maior número de acertos.
- Em caso de empate, vencerá o grupo que usou o menor tempo na preparação da estratégia.

5.5 ATIVIDADES COM FRACTAIS

5.5.1 *Conjunto de Cantor*

Proposta: Uma atividade em grupo enriquecedora. O aspecto visual da montagem final faz com que o orgulho da turma realizadora afloresça, mas exige etapas precisas, montagens coordenadas e a escolha de cores agradáveis. O que seriam cores agradáveis? Penso que as cores que a turma quiser usar, já que o projeto deve ser deles, contando apenas com nossa orientação e uma boa dose de entusiasmo saltitante para incentivar a sala.

Desenvolvimento:

Após leitura dos procedimentos de construção, é entregue a cada grupo de 3 ou 4 alunos os recursos didáticos necessários para a construção das três primeiras iterações. Utiliza-se uma folha de papel A4, cola branca e 7 canudos: um para representar a iteração K_0 com 18 cm de comprimento, dois para representar a iteração K_1 com 6 cm cada e quatro para representar a iteração K_2 com 2 cm cada. Após a montagem das iterações, os alunos discutem no grupo para indicar qual o número real correspondente a cada extremidade ali representada. Na experimentação registrada, constatou-se que poucos grupos conseguiram reconhecer esses números sem maiores dificuldades, sendo que a maioria, pediu ajuda a grupos vizinhos ou ao professor. Esperava-se que a maioria dos alunos, após a atividade, conseguissem representar números racionais na reta real.

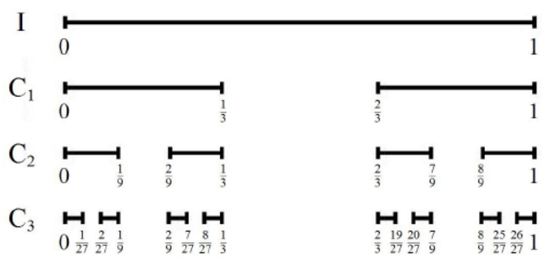


Figura 25: Visão teórica apresentada aos alunos.

Na segunda parte dessa atividade, os alunos preencheram tabelas com dados referentes à quantidade de intervalos, comprimento de cada intervalo e comprimento total dos intervalos remanescentes, desde K_0 até K_5.

O desafio maior era obter a expressão correspondente a K_N. A utilização de tabelas objetivou facilitar a visualização de padrões numéricos ali existentes. A discussão em grupo dos valores a serem preenchidos visou maior interação entre os alunos.
Na tabela da figura 28 estão representados os dados anotados pela grande maioria dos alunos . A última linha da tabela não foi preenchida. Isto indicou que os alunos não conseguiram perceber um padrão numérico, reconhecer os termos de cada coluna como

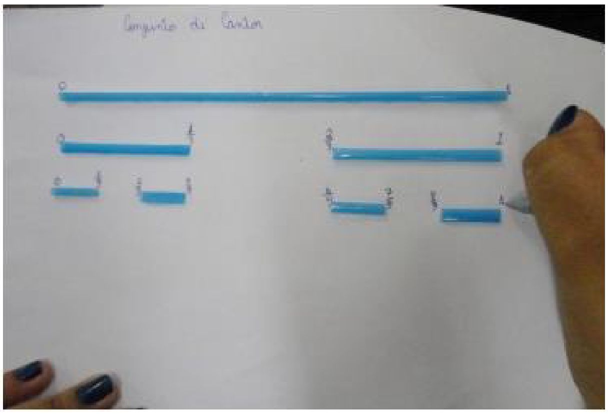


Figura 26: Quadro montado pelos alunos da Professora Cacilda.

Iteração	**Número de Intervalos remanescentes**	**Comprimento de cada intervalo**	**Comprimento total**
K_0	1	1	$C_0 = 1$
K_1	2	$\frac{1}{3}$	$C_1 = \frac{2}{3}$
K_2	4	$\frac{1}{9}$	$C_2 = \frac{4}{9}$
K_3	8	$\frac{1}{27}$	$C_3 = \frac{8}{27}$
K_4	16	$\frac{1}{81}$	$C_4 = \frac{16}{81}$
K_5	32	$\frac{1}{243}$	$C_5 = \frac{32}{243}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_n			

Figura 27: A tabela mostra os resultados mais comuns obtidos pelos alunos.

termos de uma progressão geométrica e encontrar a expressão correspondente ao termo geral dessas progressões. Diante desse fato, a tabela foi apresentada. Com a tabela da figura 28 preenchida e com padrões numéricos bem claros, foi possível concluir que os dados de cada uma delas estão relacionados a expressão geral de uma progressão geométrica pelos dados da iteração K_n. (Veja resolução apresentada na tabela 29)

Contas mais detalhadas e para outras figuras podem ser encontradas em [6] e [10].

Iteração	**Número de Intervalos remanescentes**	**Comprimento de cada intervalo**	**Comprimento total**
K_0	1	1	$C_0 = 1$
K_1	2	$\frac{1}{3}$	$C_1 = \frac{2}{3}$
K_2	4	$\frac{1}{9}$	$C_2 = \frac{4}{9}$
K_3	8	$\frac{1}{27}$	$C_3 = \frac{8}{27}$
K_4	16	$\frac{1}{81}$	$C_4 = \frac{16}{81}$
K_5	32	$\frac{1}{243}$	$C_5 = \frac{32}{243}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_n	2^n	$(\frac{1}{3})^n$	$C_n = 2^n \times (\frac{1}{3})^n = (\frac{2}{3})^n$

Figura 28: A tabela mostra a generalização desejada a ser alcançada pelos alunos.

5.5.2 *Composição com cubos.*

Após esclarecimentos sobre fractais e suas estruturas geométricas que se repetem em qualquer escala, apresentam-se as imagens de alguns fractais de Mandelbrot:

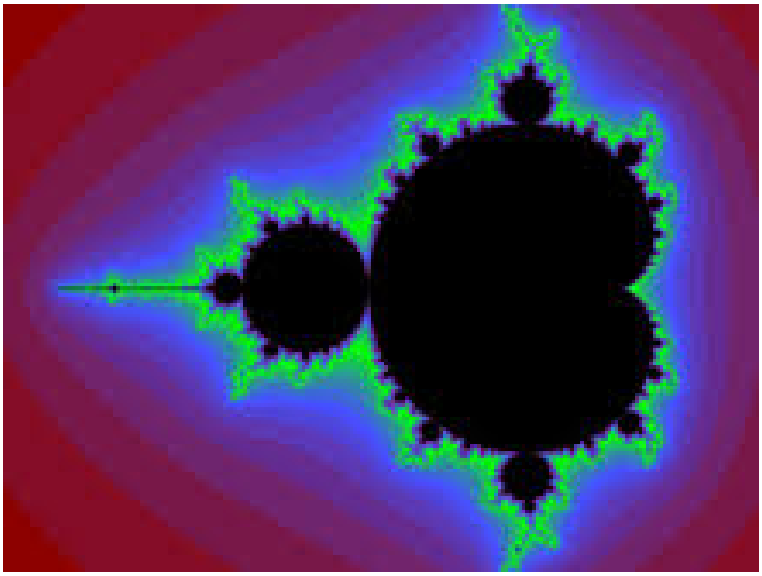


Figura 29:

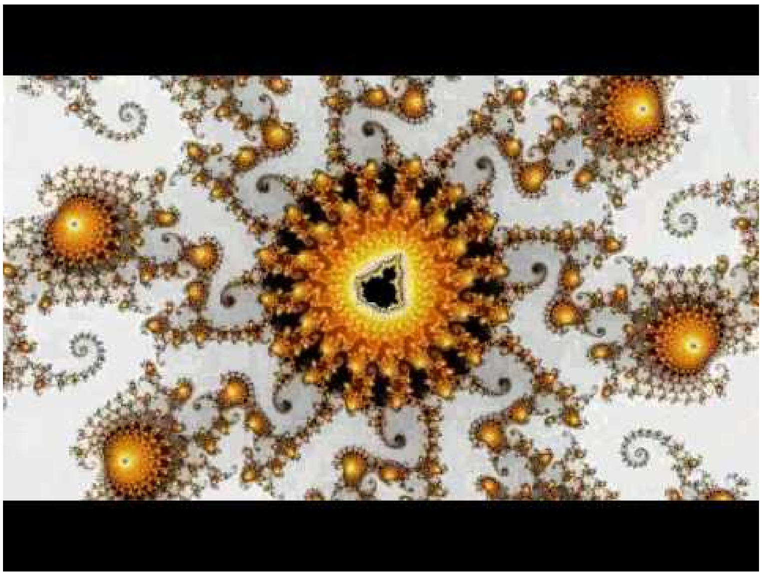


Figura 30:

Após essa ilustração, são dadas informações sobre a construção dessas figuras; a idéia de iterações infinitas, o uso dos computadores IBM e um pouco da história de Benoît B. Mandelbrot, criador do termo fractal, em 1975.

É proposto para os alunos de um nono ano do ensino fundamental a montagem de uma composição de cubos que segue o princípio fractal de sucessivas iterações seguindo um determinado padrão. A professora Cacilda revisou conceitos como diagonal do cubo, área total e o fato principal que cubos são semelhantes entre sí. A figura proposta necessita de 40 cubos de tamanhos diferentes:1 de aresta 16 cm para a primeira etapa; 3 de aresta 8 cm(segunda etapa);9 cubos de aresta 4cm(três para cada cubo de 8cm de aresta)para terceira etapa;27 cubos de aresta 2cm(três para cada um dos 9 cubos de aresta 4 cm)na 4ª etapa.

Em cada iteração, acrescentamos 3^{n+1}, o que resulta na progressão geométrica(PG) $(1, 3, 9, 27 \ldots)$.Percedido isso, pediu-se que usando a fórmula da soma de termos de uma PG:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

fosse calculado quantos cubos são usados na quarta e quinta etapas desse processo.Já que em cada etapa, a aresta é reduzida a sua metade, obtemos outra PG:(16,8,4,2...). Perguntando-se aos alunos, qual seria a soma de todos os termos se a sequência fosse infinita, mostra-se que quando a PG tende ao infinito com seus termos tendendo a zero e $q \neq 1$, pode-se calcular sua soma por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

e, que nessa situação teríamos:

$$S = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$$

e ressaltando a visão lateral da composição de cubos, observa-se um triângulo retângulo isósceles com lados congruentes medindo 32 cm, se as etapas caminhassem para o infinito.

Figura 31:

Resolução-Qual a cor do seu chápeu?

Você está usando um chapéu preto.

Para a resolução, deve-se pensar no que os outros não conseguiram enxergar.Alfonsino não teria visto 2 chapéus brancos ou teria concluído que o seu era preto(só havia dois brancos).Então ele teria visto 2 chapéus pretos ou um chapéu preto e outro branco e sendo assim, não conseguiria ter certeza sobre o seu próprio chapéu.

Depois de ouvir Alfonsino e saber que ele não poderia ter visto 2 chapéus brancos , a única maneira que Bastião teria para responder com certeza seria ter visto um chapéu branco à sua frente , o que determinaria que o seu era preto, mas se Bastião não tinha certeza sobre o seu próprio chapéu, era porque você estava usando um chapéu preto.

Para mais detalher, ver [1].

Resolução-Enigma dos 100 chapéus

A melhor estratégia para resolver a charada dos 100 chapéus é pensar em uma situação em que 99 prisioneiros têm 100% de chance de serem salvos enquanto o primeiro a ser interrogado tem apenas 50% de chance de sobreviver.

Para que a estratégia dê certo, os prisioneiros têm que concordar em um protocolo de comunicação: o primeiro prisioneiro a falar deve dizer “azul” se o número de chapéus azuis à sua frente for par, ou “vermelho” se for ímpar. Com essa informação, os outros prisioneiros podem deduzir se seus próprios chapéus são vermelhos ou azuis, com base nas cores que veem diante de si. Nesse caso, todos devem acertar a resposta, menos o primeiro, que depende da sorte.

Para detalhes ver [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] BBC-News-Brasil, *Qual a cor do seu chapéu?*, 2017, https://www.bbc.com/portuguese/geral-41607127, [Online; accessed 19/04/2020].

[2] Alex Bellos, *Alex no país dos números*, Matemática-Obras de divulgação, Companhia das Letras, 2011, ISBN 978853591838-0.

[3] Bruno Andrade Borges, *O Infinito na Matemática*, Dissertação de Mestrado- PROFMAT, Instituto de Matemática e Computação- Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015, p. 89.

[4] Info Escola, *Aristóteles, por Willyans Maciel*, https://www.infoescola.com/filosofia/aristoteles/, [Acessado em 25/04/2019].

[5] Hypescience, *O enigma dos 100 chapéus.*, 2016, https://hypescience.com/voce-consegue-descobrir-resposta-da-charada-dos-100-chapeus-o-ia-do-google-consegue/ [Online; accessed 19/04/2020].

[6] Giovanni Almeida Marques, *Investigação Histórica no Ensino da Matemática*, Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Pará, Pará, Brasil, 2014, p. 88.

[7] Toda Matéria, *Filosofia Escolástica*, https://www.todamateria.com.br/filosofia-escolastica/, [Acessado em 25/04/2019].

[8] F.C.P. Milies e S.P. Coelho, *Números: uma introdução à matemática*, EDUSP, 2001, ISBN 9788531404580, https://books.google.com.br/books?id=vPwjPQwQx24C.

[9] Daniel Miranda e Armando Caputti, *Bases Matemáticas*, vol. 13ª versão, UFABC, 2017.

[10] Cacilda de Souza, *Geometria Fractal e Aplicações no Ensino Médio*, Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2014, p. 74.

[11] I. Stewart, *Almanaque das curiosidades matemáticas*, Zahar, 2009,

ISBN 9788537809518, https://books.google.com.br/books?id=K-Z3yvRAzSMC.

[12] ______, *Infinity: A Very Short Introduction*, Very short introductions, Oxford University Press, 2017, ISBN 9780198755234, https://books.google.com.br/books?id=iewwDgAAQBAJ.

[13] I. Stewart e G. Schlesinger, *O fantástico mundo dos números: A matemática do zero ao infinito*, Zahar, 2016, ISBN 9788537815670, https://books.google.com.br/books?id=7pkkDAAAQBAJ.

[14] W. Swokowski e J.L. Abreu, *Calculo con geometría analítica*, Wadsworth Internacional/IberoAmérica, 1982, ISBN 9789687270036, https://books.google.com.br/books?id=jqOqSQAACAAJ.

[15] Wikipédia, *Suma Teológica*, 2007, https://pt.wikipedia.org/wiki/Suma_Teológica, [Acessado em 25/04/2019].