



LUCAS LEONI LAMONICA

**ISOMETRIAS NO ESPAÇO**

**Santo André, 2021**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO**

**LUCAS LEONI LAMONICA**

**ISOMETRIAS NO ESPAÇO**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO LUCAS LEONI LAMONICA,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

**SANTO ANDRÉ, 2021**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lamonica, Lucas Leoni

Isometrias no espaço / Lucas Leoni Lamonica. — 2021.

99 fls. : il.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT, Santo André, 2021.

1. Geometria analítica. 2. transformações geométricas. 3.  
isometrias. 4. espaço euclidiano. I. Silva, Márcio Fabiano da.  
II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT, 2021. III. Título.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, LUCAS LEONI LAMONICA realizada em 05 de Abril de 2021:

*P/ Márcio Fabiano da Silva*  
**Prof.(a) BÁRBARA COROMINAS VALÉRIO**  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

*P/ Márcio Fabiano da Silva*  
**Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

---

**Prof.(a) ARMANDO TRALDI JUNIOR**  
INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO

---

**Prof.(a) EDUARDO GUERON**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

*Márcio Fabiano da Silva*  
**Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).**

**Santo André , 15 de julho de 2021 .**

**Assinatura do(a) autor(a):**

Lucas Leni Lomanca

**Assinatura do(a) orientador(a):**

Márcio Feliciano da Silva

---

Dedico este trabalho a todos os professores que passaram por minha vida, especialmente aos de matemática, que deixaram contribuições imensuráveis.





---

## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço primeiramente aos meus pais por me ensinarem, desde cedo, a importância da educação na construção da identidade do ser humano.

Ao meu grande irmão, meu amigo do coração!

Ao Henrique, por me inspirar sempre a ser uma pessoa melhor e pelo olhar crítico sobre as imagens desse trabalho.

A todos os professores que passaram pela minha vida. Vocês foram fundamentais para que eu me tornasse o profissional que sou hoje.

Ao meu orientador Dr. Márcio Fabiano da Silva, pela confiança depositada em mim para que esse trabalho acontecesse.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



---

## RESUMO

---

Neste trabalho, apresentamos um estudo analítico das isometrias no espaço euclidiano. Para isso, abordamos primeiramente as isometrias no plano euclidiano. Também fazemos uso dos conceitos da geometria analítica vetorial e da geometria de posição no espaço para descrever tais transformações geométricas e suas composições.

**Palavras-chave:** geometria analítica, transformações geométricas, isometrias, espaço euclidiano



---

## ABSTRACT

---

In this work, we present an analytical study of isometries in the Euclidean space. For this, we first approach isometries in the Euclidean plane. We also make use of the concepts of vector analytical geometry and geometry of position in space to describe such geometric transformations and their compositions.

**Keywords:** analytical geometry, geometric transformations, isometries, Euclidean space



---

# CONTEÚDO

---

Introdução	1
1 A GEOMETRIA ANALÍTICA EM $\mathbb{R}^2$	3
1.1 Definições Iniciais . . . . .	3
1.1.1 Termos Não Definidos . . . . .	3
1.1.2 Plano de Coordenadas Cartesianas . . . . .	4
1.1.3 Plano de Coordenadas Polares . . . . .	5
1.2 Pontos . . . . .	8
1.2.1 Distância Entre Pontos . . . . .	8
1.2.2 Colinearidade de Três Pontos . . . . .	10
1.2.3 Ponto Médio de um Segmento . . . . .	11
1.2.4 Rotação em Torno da Origem . . . . .	14
1.3 Retas . . . . .	16
1.3.1 Equação de Reta . . . . .	16
1.3.2 Reta Mediatriz . . . . .	18
2 A GEOMETRIA ANALÍTICA EM $\mathbb{R}^3$	23
2.1 Vetores . . . . .	23
2.2 Operação com Vetores . . . . .	24
2.2.1 Soma de Vetores . . . . .	25
2.2.2 Produto de Vetor por Escalar . . . . .	27
2.2.3 Soma de Ponto com Vetor . . . . .	28
2.3 Dependência Linear . . . . .	28
2.4 Base Vetorial . . . . .	33
2.4.1 Produto Escalar: Ângulo Entre Vetores . . . . .	35
2.4.2 Produto Vetorial: Área . . . . .	38
2.5 Sistemas de coordenadas no espaço . . . . .	40
2.5.1 Espaço de Coordenadas Cartesianas . . . . .	40
2.5.2 Espaço de Coordenadas Cilíndricas . . . . .	41
2.5.3 Espaço de Coordenadas Esféricas . . . . .	42
2.6 Pontos . . . . .	45
2.6.1 Distância entre pontos . . . . .	45

2.6.2	Colinearidade de Três Pontos . . . . .	46
2.6.3	Ponto Médio de um Segmento . . . . .	49
2.7	Retas . . . . .	51
2.7.1	Equação de Reta . . . . .	51
2.7.2	Posição Relativa Entre Retas . . . . .	53
2.8	Planos . . . . .	55
2.8.1	Equações de Plano . . . . .	55
2.8.2	Posição Relativa Entre Reta e Plano . . . . .	58
2.8.3	Posição Relativa Entre Dois Planos . . . . .	59
2.8.4	Distância Entre Planos . . . . .	60
2.8.5	Ângulo Entre Planos . . . . .	61
3	ISOMETRIAS NO ESPAÇO . . . . .	63
3.1	Transformações no Plano . . . . .	63
3.2	Transformações no Espaço . . . . .	65
3.3	Reflexões . . . . .	73
3.3.1	Reflexão em Relação a um Ponto . . . . .	74
3.3.2	Reflexão em Relação a uma Reta . . . . .	75
3.3.3	Reflexão em Relação a um Plano . . . . .	78
3.4	Translação . . . . .	82
3.5	Rotação . . . . .	83
3.6	Composição de Isometrias . . . . .	85
3.6.1	Composição de Translações . . . . .	85
3.6.2	Composição de Reflexões com Relação a Pontos . . . . .	86
3.6.3	Composição de Reflexões com Relação a Planos Paralelos . . . . .	87
3.6.4	Composição de Reflexões com Relação a Planos Não Paralelos . . . . .	88
3.6.5	Composição de Rotações . . . . .	89
3.6.6	Composição de Reflexão e Translação . . . . .	90
3.6.7	Composição de Rotação e Translação . . . . .	92
4	CONCLUSÃO . . . . .	95
	Bibliografia . . . . .	97
	Índice . . . . .	99



---

## INTRODUÇÃO

---

No século XVII, Pierre de Fermat e René Descartes, apoiados no trabalho de François Viète, deram os primeiros passos para sistematizar os conceitos hoje estudados e conhecidos na Geometria Analítica [3]. Embora Viète tenha se dedicado a resolver equações por uma abordagem geométrica, foi Fermat quem fez a transição, mesmo que mal documentada, dos problemas de *arte analítica* para as questões fundamentais de locais geométricos, aonde a geometria analítica se baseia, tais como linhas, círculos e cônicas:

"Sempre que duas quantidades desconhecidas são encontradas, nós temos um lugar geométrico, a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva."<sup>1</sup>

Descartes, por sua vez, se dedicou a encontrar equações a partir de lugares geométricos de cônica já definidas, tais como hipérbolas e parábolas.

Só no século XIX que Julius Plücker fez grandes avanços na geometria analítica, principalmente pelo fato de introduzir uma notação mais concisa, como as coordenadas  $(x, y)$  [4].

Há fortes indícios que translações e rotações no espaço já eram estudadas por Euler em seu artigo de 1775 [5], embora até então o termo isometria não tenha aparecido. Em 1872, Klein apresenta o *Erlanger Programm*, tentando unir diferentes tipos de geometrias (projetiva, euclidiana, hiperbólica, etc.) e focando no estudo de simetrias pelo grupos de transformações [12].

O estudo de isometrias é registrado amplamente em literatura, tanto em português como em outras línguas. Podemos citar, por exemplo, diversas dissertações do PROFMAT e alguns livros como [1] e [9]. Entretanto, quase todas as fontes pesquisadas se limitam a isometrias na reta e no plano utilizando quase sempre a mesma abordagem, com exceção de [10]. Tendo isso em mente, esse trabalho tem como objetivo expandir o estudo de isometrias do plano para o espaço fundamentado primordialmente com ferramentas da geometria analítica bi e tridimensional.

---

1 Ad Locos Planos et Solidos Isagoge. Traduzido pelo autor do inglês

Para isso, no primeiro capítulo fizemos um estudo detalhado da geometria analítica em duas dimensões que estudamos no ensino médio. Iniciamos apresentando dois planos: o de coordenadas cartesianas e polares, enquanto as seções 1.2 e 1.3 são dedicadas ao estudo de pontos (distância, ponto médio, alinhamento e rotação) e retas (equações de retas, reta perpendicular e reta mediatriz).

No segundo capítulo estudamos a geometria analítica em  $\mathbb{R}^3$ . Para isso, iniciamos o capítulo com as definições e operações sobre vetores, passando pelo conceito de dependência linear e base vetorial. Esta primeira seção é primordial para compreendermos as retas e planos no espaço. Isso posto, apresentamos três espaços distintos: o de coordenadas cartesianas, o de coordenadas cilíndricas e o de coordenadas esféricas. As seções 2.6, 2.7 e 2.8 são dedicadas ao estudo de pontos (distância, ponto médio e alinhamento), retas (equações de retas e posição relativa entre retas) e planos (equações de planos, posição relativa entre reta e plano e entre dois planos, distância entre planos e ângulo entre planos).

Finalmente, o capítulo 3 trata sobre isometrias. Definimos o que são transformações geométricas, todas as isometrias que existem (reflexões, translações e rotações) bem como suas composições (entre duas isometrias iguais e entre duas isometrias distintas). Sempre que possível, exemplificamos os conceitos estudados incluindo figuras, que foram todas feitas pelo autor utilizando o software Geogebra.

---

## A GEOMETRIA ANALÍTICA EM $\mathbb{R}^2$

---

### 1.1 DEFINIÇÕES INICIAIS

#### 1.1.1 *Termos Não Definidos*

Dentro da Geometria Euclidiana, os termos **ponto**, **reta** e **plano** não são definidos precisamente, cabendo ao leitor a sua compreensão de maneira intuitiva. Algumas ideias primitivas desses termos:

- o *ponto* é uma entidade geométrica sem forma e nem dimensão, sendo assim impossível de se medir, mas bem localizado no espaço. Por uma questão visual, ele é representado por um pequeno círculo;
- a *reta* é uma entidade geométrica de um conjunto infinito de pontos alinhados, ou seja, que não fazem curva. A reta não possui largura, no entanto é possível medir a distância entre dois pontos que nela estejam;
- o *plano* é uma entidade geométrica bidimensional, formado por um conjunto infinito de retas perpendiculares a uma reta dada, justapostas e paralelas entre si.

Dos três termos apresentados anteriormente seguem uma série de 20 axiomas nos quais a Geometria Plana e Analítica se baseiam. Eles foram propostos por David Hilbert em 1899 [6].

Neste trabalho, vamos fazer um recorte dos tópicos de Geometria Analítica que são cruciais para a compreensão das isometrias. Um estudo mais detalhado e com mais exemplos pode ser encontrado em [8].

## 1.1.2 Plano de Coordenadas Cartesianas

Considere duas retas orientadas  $\overleftrightarrow{OX}$  e  $\overleftrightarrow{OY}$  de mesma origem  $O$ , perpendiculares entre si. A semirreta horizontal é denominada eixo  $x$ , enquanto a semirreta vertical é denominada eixo  $y$ . Este sistema de eixos é chamado de *plano cartesiano* ou *sistema de eixos coordenados*.

Com quaisquer dois números reais  $a, b \in \mathbb{R}$ , formamos um par ordenado do tipo  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ), que pode ser associado biunivocamente a um ponto  $P = (a, b)$  no plano cartesiano, ou seja, cada par  $(a, b)$  se associa a um único ponto enquanto cada ponto  $P = (a, b)$  se associa a um único par ordenado.

Para representar um ponto no plano cartesiano, tomamos por definição a origem como o ponto  $O = (0, 0)$  e fazemos a projeção ortogonal de  $P = (a, b)$  nos eixos  $x$  e  $y$ , obtendo assim os pontos  $X = (a, 0)$  e  $Y = (0, b)$ , respectivamente.

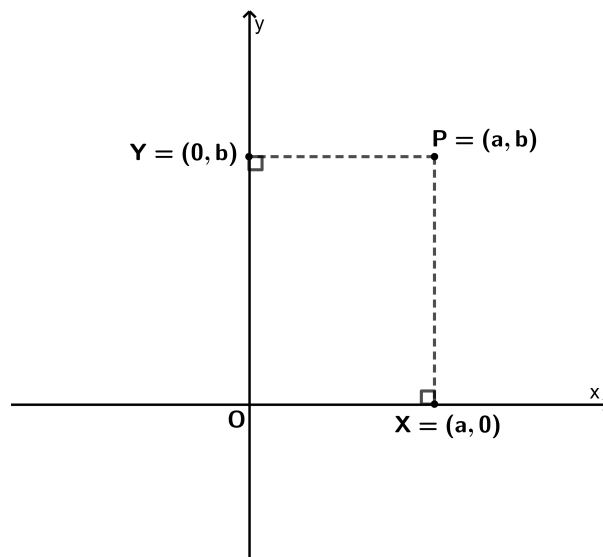


Figura 1: Representação de um ponto no plano cartesiano.

Note que, se o ponto  $P$  pertencer ao eixo  $x$ , temos que  $b = 0$  e  $P = X$ . Analogamente, se  $P$  pertencer ao eixo  $y$ , temos que  $a = 0$  e  $P = Y$ . Em qualquer um dos casos, dizemos que o valor  $a$  é a **abscissa** e o valor  $b$  a **ordenada** do ponto  $P$ .

Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em 4 regiões distintas, chamadas **quadrantes**. Assim como no círculo trigonométrico, a ordem dos quadrantes é definida a partir do semieixo positivo  $x$  e cresce no sentido anti-horário.

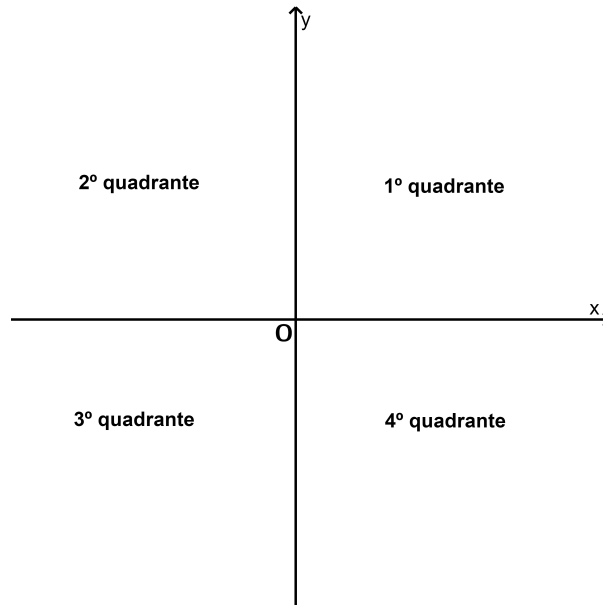


Figura 2: Plano cartesiano dividido em quadrantes.

Dessa forma, os sinais da abscissa e ordenada de um ponto  $P = (a, b)$  definem a qual quadrante  $P$  pertence. Assim:

- se  $a > 0$  e  $b > 0$ ,  $P$  pertence ao primeiro quadrante;
- se  $a < 0$  e  $b > 0$ ,  $P$  pertence ao segundo quadrante;
- se  $a < 0$  e  $b < 0$ ,  $P$  pertence ao terceiro quadrante;
- se  $a > 0$  e  $b < 0$ ,  $P$  pertence ao quarto quadrante.

Observe que, se  $P$  pertencer a um dos eixos, então  $P$  não está em nenhum quadrante.

### 1.1.3 Plano de Coordenadas Polares

Como ilustrado na Figura 1, todo ponto  $P = (a, b) \neq (0, 0)$  possui uma distância  $r$  da origem  $O$ , enquanto o segmento  $\overline{OP}$  faz um ângulo de medida  $\phi$  com o semieixo positivo  $x$ .

Assim, podemos determinar um ponto no plano cartesiano dado sua abscissa e ordenada, o que é chamado de coordenadas cartesianas ou retangulares, ou dado uma distância até a origem e um ângulo, o que é chamado de **coordenadas polares**.

Convencionaremos apenas nessa seção que o ponto  $P$  será representado de forma cartesiana por  $P = (a, b)$  e de forma polar por  $P = (r, \phi)_P$ , dado que  $\phi$  ( $0 \leq \phi < 2\pi$ ) é a medida do ângulo que o segmento  $\overline{OP}$  faz com o semieixo positivo  $x$ . Além disso, convencionaremos que  $O = (0, 0) = (0, 0)_P$

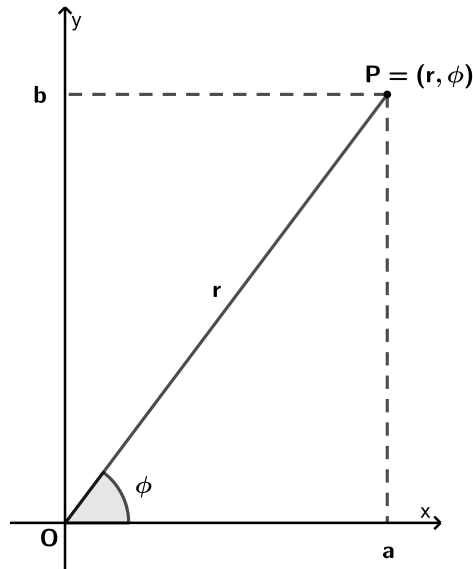


Figura 3: Representação de um ponto no plano polar.

Note que:

- se um ponto  $P$  pertence ao semieixo positivo  $x$ , ele é do tipo  $(a, 0) = (a, 0)_P$ , para  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ;
- se um ponto  $P$  pertence ao semieixo negativo  $x$ , ele é do tipo  $(-a, 0) = (a, \pi)_P$ , para  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ;
- se um ponto  $P$  pertence ao semieixo positivo  $y$ , ele é do tipo  $(0, b) = \left(b, \frac{\pi}{2}\right)_P$ , para  $b \in \mathbb{R}_+^*$ ;
- se um ponto  $P$  pertence ao semieixo negativo  $y$ , ele é do tipo  $(0, -b) = \left(b, \frac{3\pi}{2}\right)_P$ , para  $b \in \mathbb{R}_+^*$ .

Como ilustrado na figura 3, temos que  $a = r \cos \phi$  e que  $b = r \sin \phi$ , assim, podemos transformar um ponto em coordenadas polares para cartesianas da seguinte forma:  $(r, \phi)_P = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ . No entanto, a transformação de coordenadas cartesianas para polar não é tão intuitiva: a distância até a origem pode ser facilmente calcu-

lada utilizando o teorema de Pitágoras, mas o ângulo formado depende de funções trigonométricas inversas. Assim, apresentamos a função  $\theta(x, y)$  como:

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{se } x > 0 \text{ e } y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0, \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Assim  $(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \theta(x, y))_P$ . Evidentemente que um esboço do plano auxilia a determinarmos o quadrante no qual o ponto está posicionado, e assim, a determinarmos o ângulo desejado.

A função  $\arctan$  utilizada anteriormente é a função inversa da tangente. Ela associa qualquer número real  $t$  ao arco  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , de modo que  $\tan \alpha = t$ .

**Exemplo 1.1.** Abaixo estão seis pontos representados no plano de coordenadas polares sobre circunferências de raio 1 e 2. Determine as coordenadas polares e cartesianas destes pontos.

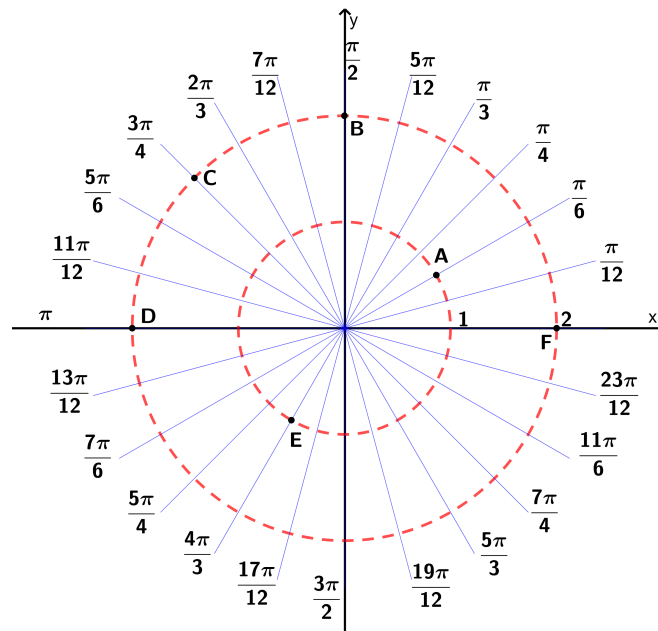


Figura 4: Exemplo 1.1

*Resolução:*

$$A = \left(1, \frac{\pi}{6}\right)_P = \left(1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}, 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$B = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)_P = \left(2 \cdot \cos \frac{\pi}{2}, 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0, 2)$$

$$C = \left(2, \frac{3\pi}{4}\right)_P = \left(2 \cdot \cos \frac{3\pi}{4}, 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4}\right) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$D = (2, \pi)_P = (2 \cdot \cos \pi, 2 \cdot \sin \pi) = (-2, 0)$$

$$E = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right)_P = \left(1 \cdot \cos \frac{4\pi}{3}, 1 \cdot \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$F = (2, 0)_P = (2 \cdot \cos 0, 2 \cdot \sin 0) = (2, 0)$$


---

## 1.2 PONTOS

### 1.2.1 Distância Entre Pontos

Em um sistema de coordenadas cartesianas, podemos calcular a distância entre dois pontos, conforme o Teorema a seguir:

**Teorema 1.1** (Distância entre pontos). *Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  dois pontos de um sistema cartesiano ortogonal. A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por*

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Vamos considerar primeiro os casos onde o segmento  $\overline{AB}$  é paralelo aos eixos.

No caso do segmento ser vertical, temos  $x_A = x_B$ , e  $AB = |y_A - y_B|$ . Mas como  $x_A - x_B = 0$  e  $|y_A - y_B| = \sqrt{(y_A - y_B)^2}$ , então a equação (1.2) é válida.

No caso do segmento ser horizontal, temos  $y_A = y_B$  e  $AB = |x_A - x_B|$ . Mas como  $y_A - y_B = 0$  e  $|x_A - x_B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2}$ , então a equação (1.2) também é válida.



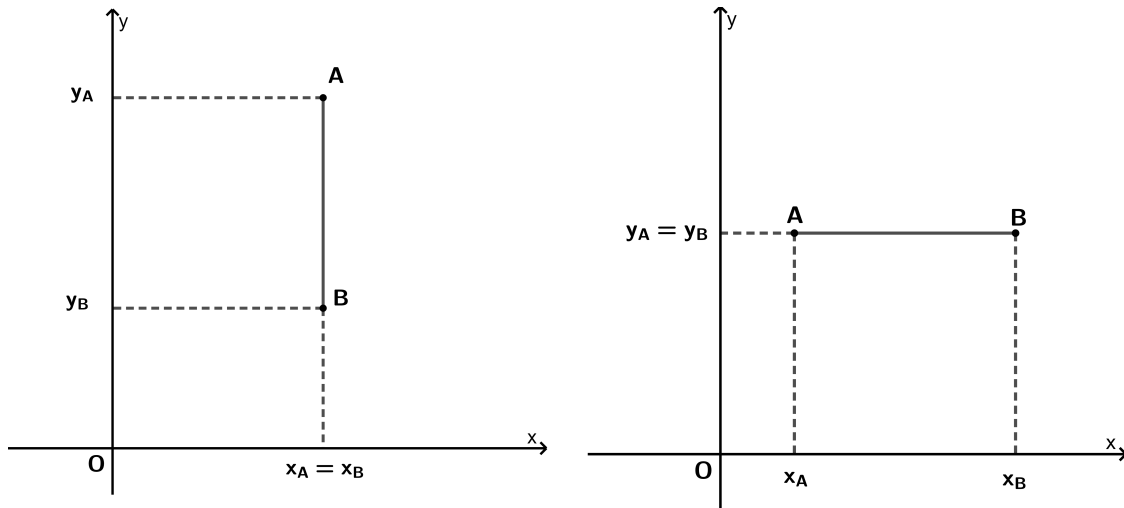


Figura 5: Distância entre pontos - segmento vertical e horizontal.

Por fim, vamos considerar o caso onde o segmento  $\overline{AB}$  não é paralelo aos eixos, ou seja, as abscissas e ordenadas de  $A$  e  $B$  são diferentes. Tomamos o ponto  $C = (x_A, y_B)$  conforme a ilustração a seguir:

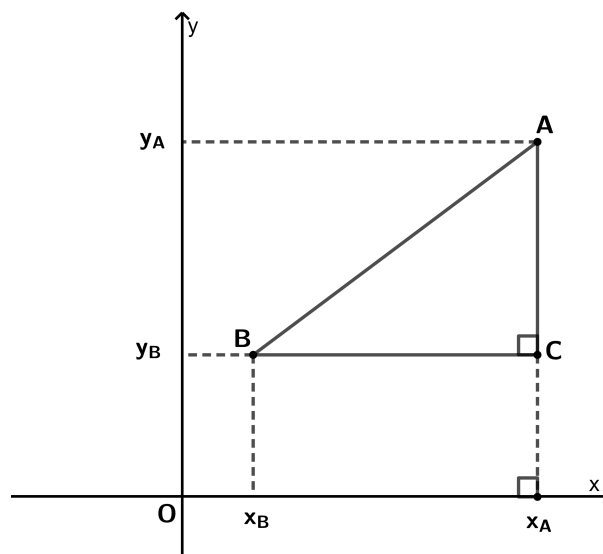


Figura 6: Distância entre pontos - segmento inclinado.

Note que os pontos  $B$  e  $C$  possuem a mesma ordenada, enquanto os pontos  $A$  e  $C$  possuem a mesma abscissa. Pelos casos anteriores, temos que  $BC = |x_A - x_B|$ , enquanto  $AC = |y_A - y_B|$ . Aplicando o teorema de Pitágoras no  $\triangle ACB$ , temos que:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AB^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

□

### 1.2.2 Colinearidade de Três Pontos

Nesta seção, discutiremos quais são as condições necessárias para que três pontos estejam alinhados. Seja a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  traçada pelos pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  com um ponto  $P = (x, y)$  pertencente a ela. Determinaremos qual a relação que  $x$  e  $y$  devem respeitar para que o ponto  $P$  esteja alinhado com  $A$  e  $B$ .

Se  $\overleftrightarrow{AB}$  é uma reta horizontal, é necessário que a ordenada de  $P$  seja igual a ordenada de  $A$  e  $B$ . Dessa forma,  $y = y_A = y_B$  e o ponto  $P$  é do tipo  $(x, y_A), x \in \mathbb{R}$ .

Analogamente, se  $\overleftrightarrow{AB}$  é uma reta vertical, é necessário que a abscissa de  $P$  seja igual a abscissa de  $A$  e  $B$ . Dessa forma,  $x = x_A = x_B$  e o ponto  $P$  é do tipo  $(x_A, y), y \in \mathbb{R}$ .

Agora suponha que  $\overleftrightarrow{AB}$  seja uma reta inclinada, com  $P \in \overleftrightarrow{AB}$ , ou seja,  $x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ . Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $\overleftrightarrow{AB}$  é uma reta com inclinação positiva e  $x_A > x_B$ . Tomamos os pontos  $C = (x_A, y)$  e  $D = (x_A, y_B)$  conforme a ilustração 7:

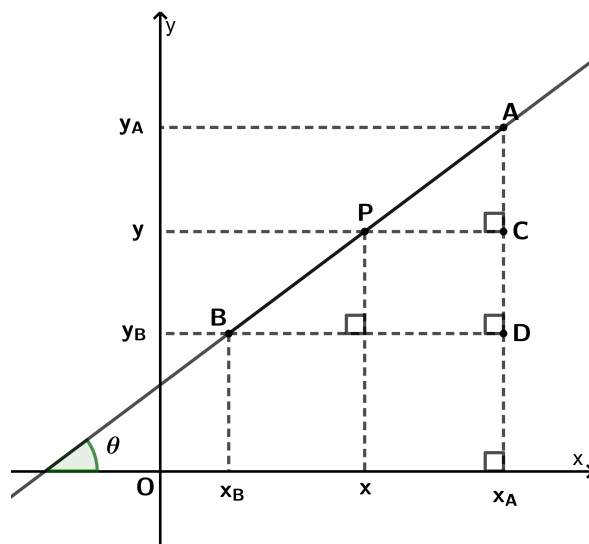


Figura 7: Alinhamento de três pontos - segmento inclinado.

Note que  $\triangle ACP \sim \triangle ADB$ . Assim,  $\forall x : x_B < x < x_A$ , temos:

$$\frac{PC}{BD} = \frac{CA}{DA}$$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad (1.3)$$

O fato de termos escolhido o ponto  $P$  entre os pontos  $A$  e  $B$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  como uma reta de inclinação positiva não altera em nada o desenvolvimento, ou seja, se o ponto  $P$  não pertencesse a  $\overline{AB}$  ou se a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  tivesse inclinação negativa, o raciocínio seria análogo.

### 1.2.3 Ponto Médio de um Segmento

**Definição 1.2** (Ponto Médio). Considere os pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ . Defina-se  $M = (x_M, y_M)$  como o ponto médio de  $\overline{AB}$  se:

1.  $M \in \overline{AB}$ ;
2.  $AM = BM$ .

**Proposição 1.3.** O ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  com extremidades  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  é o ponto  $M$ , tal que:

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right). \quad (1.4)$$

*Demonstração.* A prova passa por duas etapas: provar que  $M$  é colinear e equidistante de  $A$  e  $B$ . Primeiramente, vamos provar que os três pontos são colineares. Sem perda de generalidade, considere novamente que o segmento tem inclinação não negativa e  $x_A \geq x_B$  e  $y_A \geq y_B$ :

- se  $x_A = x_B$ , então o segmento é vertical, e é válido que  $\frac{x_A + x_B}{2} = x_A = x_B$ . Também temos que  $y_B < \frac{y_A + y_B}{2} < y_A$ , ou seja,  $M$  está entre  $A$  e  $B$ .

Além disso,  $AM = y_A - \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_A - y_B}{2}$  e  $BM = \frac{y_A + y_B}{2} - y_B = \frac{y_A - y_B}{2}$ , ou seja,  $AM = BM$ ;

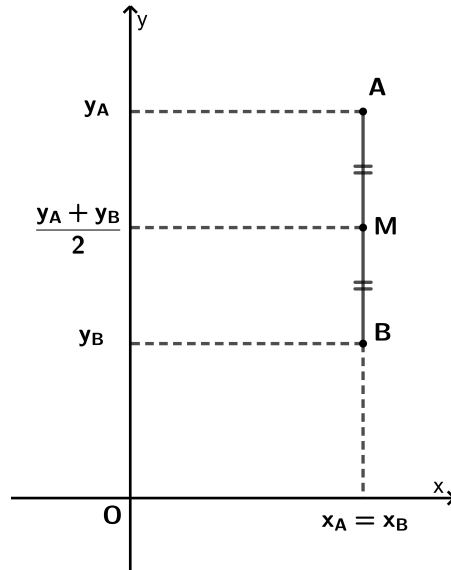


Figura 8: Ponto médio - segmento vertical.

- se  $y_A = y_B$ , então o segmento é horizontal, e é válido que  $\frac{y_A + y_B}{2} = y_A = y_B$ . Também temos que  $x_B < \frac{x_A + x_B}{2} < x_A$ , ou seja,  $M$  está entre  $A$  e  $B$ .

Além disso,  $AM = x_A - \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_A - x_B}{2}$  e  $BM = \frac{x_A + x_B}{2} - x_B = \frac{x_A - x_B}{2}$ , ou seja,  $AM = BM$ ;

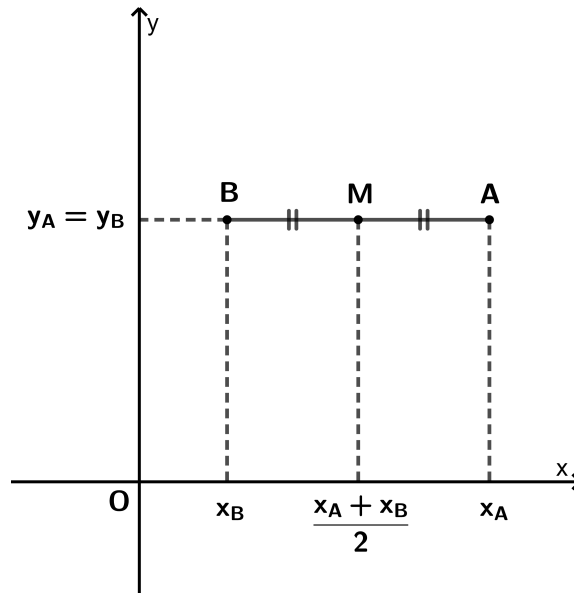


Figura 9: Ponto médio - segmento horizontal.

- se  $x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ , então  $\overline{AB}$  é um segmento inclinado e os pontos alinhados com  $A$  e  $B$  devem respeitar a relação proposta em 1.3. Fazendo a substituição  $x = \frac{x_A + x_B}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x_A + x_B}{2} - x_A}{x_B - x_A} &= \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{\frac{x_B - x_A}{2}}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{2} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \\ &\frac{y_B - y_A}{2} = y - y_A \Rightarrow y = \frac{y_A + y_B}{2}. \end{aligned}$$

Logo,  $M \in \overline{AB}$ . Além disso:

$$AM = \sqrt{\left(x_A - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y_A - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2}$$

e

$$BM = \sqrt{\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_B\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B}{2} - y_B\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2}.$$

Logo,  $AM = BM$ .

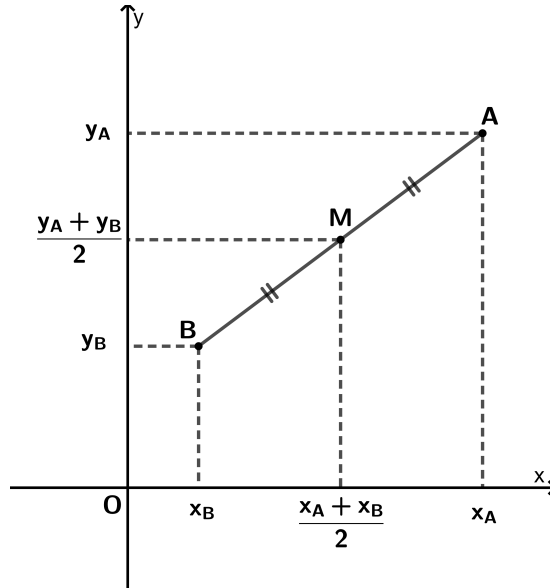


Figura 10: Ponto médio - segmento inclinado.

□

**Exemplo 1.2.** Sejam  $A = (4, 5)$  e  $B = (-2, -3)$  pontos diametralmente opostos de uma circunferência. Determine o centro da circunferência e a medida do raio.

*Resolução:* O centro  $O$  da circunferência é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Assim:

$$O = \left( \frac{4 - 2}{2}, \frac{5 - 3}{2} \right) = (1, 1).$$

A medida do raio é a medida do segmento  $\overline{OA}$  ou  $\overline{OB}$ . Assim:

$$OA = \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = 5.$$

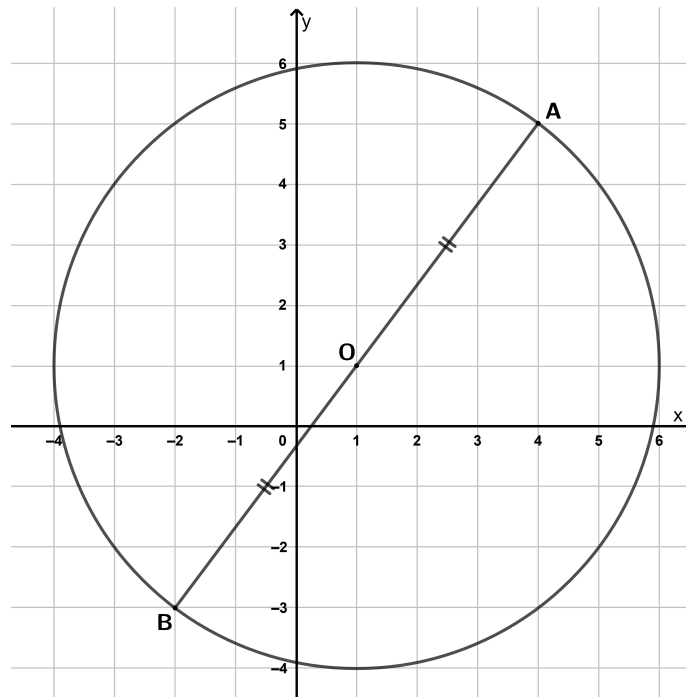


Figura 11: Exemplo 1.2

#### 1.2.4 Rotação em Torno da Origem

Nesta seção, desenvolveremos equações que permitam saber as coordenadas de um ponto após a aplicação de uma rotação em torno da origem. Estas equações serão fundamentais para compreender algumas isometrias que estudaremos no capítulo 3.

**Definição 1.4** (Rotação). Considere  $P = (x_1, y_1)$  e  $O = (x_0, y_0)$  pontos quaisquer de um plano cartesiano, com  $P \neq O$ . Uma rotação de um ângulo  $\theta$  ( $0 < |\theta| < 2\pi$ ) de  $P$  em torno de  $O$  resulta no ponto  $P' = (x_2, y_2)$  de tal modo que  $m(\widehat{POP'}) = \theta$  e  $OP = OP'$ .

Convencionaremos que, se  $\theta > 0$ , a rotação é feita no sentido anti-horário, e se  $\theta < 0$ , a rotação é feita no sentido horário.

Tomemos agora como centro de rotação a origem  $O = (0, 0)$ . O Teorema a seguir nos permite encontrar as coordenadas do ponto  $P'$  após a aplicação de uma rotação em  $P$ .

**Teorema 1.5.** *Seja  $P = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$  um ponto qualquer do sistema cartesiano. Ao aplicarmos uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno da origem  $O = (0, 0)$ , o ponto  $P$  é levado em*

$$P' = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta). \quad (1.5)$$

*Demonstração.* Para efeitos de visualização, suponha que  $P$  e  $P'$  estejam no primeiro quadrante, como na ilustração a seguir:

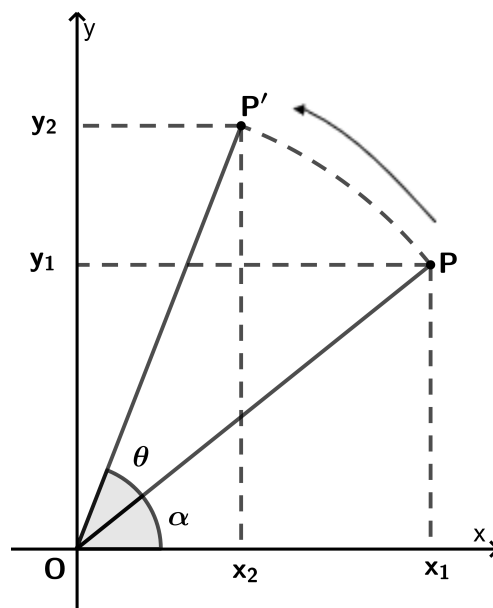


Figura 12: Rotação em torno da origem.

Seja  $\alpha$  a medida do ângulo entre o segmento  $\overline{OP}$  e o semi-eixo positivo  $x$ . Note que  $\overline{OP} \cong \overline{OP'}$ , pois são raios de uma circunferência centrada em  $O$ . Da Figura 12, tiramos que:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{y_1}{OP} \\ \cos \alpha = \frac{x_1}{OP} \\ \cos(\alpha + \theta) = \frac{x_2}{OP'} \\ \sin(\alpha + \theta) = \frac{y_2}{OP'} \end{cases}$$

Levando em conta as fórmulas para adição de arcos e que  $OP = OP'$ , podemos substituir as duas primeiras equação na terceira:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta &= \frac{x_2}{OP} \\ \frac{x_1}{OP} \cos \theta - \frac{y_1}{OP} \sin \theta &= \frac{x_2}{OP} \\ x_2 &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta. \end{aligned}$$

Expandindo a quarta equação e substituindo as duas primeiras equações nela, temos:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha &= \frac{y_2}{OP} \\ \frac{y_1}{OP} \cos \theta + \sin \theta \frac{x_1}{OP} &= \frac{y_2}{OP} \\ y_2 &= x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta. \end{aligned}$$

Então,  $P' = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)$

□

### 1.3 RETAS

#### 1.3.1 Equação de Reta

Nesta seção, desenvolveremos equações que relacionem as coordenadas de um ponto genérico  $P = (x, y)$  que esteja na reta que passa por dois pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  dados. Estenderemos, portanto, as relações encontradas na seção 1.2.2.

Como visto anteriormente, se:

- $x_A = x_B$ , então a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é vertical e é do tipo  $x = x_A$ ;



- $y_A = y_B$ , então a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é horizontal e é do tipo  $y = y_A$ ;
- $x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ , então a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é inclinada e obedece a relação obtida em 1.3.

Neste último caso, podemos isolar a variável  $y$  e obtemos a relação  $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A$ . Ao fazermos as mudanças de variáveis  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  e  $n = y_A - m \cdot x_A$ , encontramos uma equação de reta na **forma reduzida**:  $y = m \cdot x + n$ .

O parâmetro  $m$  é chamado de **coeficiente angular** da reta ou **declividade**. Observe que  $m$  é numericamente igual a tangente do ângulo formado entre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e o semieixo positivo  $\overleftrightarrow{OX}$ . O parâmetro  $n$  é o **coeficiente linear** ou **intercepto**. Note que  $x = 0 \Rightarrow y = n$ , ou seja,  $(0, n)$  é a intersecção da reta com o eixo  $y$ .

Ao subtrairmos  $y$  dos dois membros da equação reduzida de uma reta, temos que  $m \cdot x - y + n = 0$ , chamada de **equação geral da reta**. Note que a equação geral da reta não é única, já que podemos multiplicá-la por qualquer constante não nula, obtendo assim a forma  $ax + by + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Embora tenhamos escolhido um ponto pertencente ao segmento  $\overline{AB}$  para estudar o alinhamento de três pontos, poderíamos ter escolhido qualquer ponto da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que encontraríamos a mesma relação.

**Exemplo 1.3.** Sejam  $A = (3, 4)$ ,  $B = (3, 1)$  e  $C = (1, 1)$  pontos do sistema cartesiano. Determine a equação das retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ .

*Resolução:* Os pontos  $A$  e  $B$  possuem mesma abcissa, portanto a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é vertical de equação  $\overleftrightarrow{AB} : x - 3 = 0$ .

Os pontos  $B$  e  $C$  possuem mesma ordenada, portanto a reta  $\overleftrightarrow{BC}$  é horizontal de equação  $\overleftrightarrow{BC} : y - 1 = 0$ .

O coeficiente angular da reta  $\overleftrightarrow{AC}$  é dado por  $m_{\overleftrightarrow{AC}} = \frac{4 - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}$ . Assim, a equação dessa reta é do tipo  $y = \frac{3}{2}x + n$ . Substituindo as coordenadas do ponto  $C$  na equação anterior, temos  $1 = \frac{3}{2} \cdot 1 + n \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$ . Portanto,  $\overleftrightarrow{AC} : y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ .

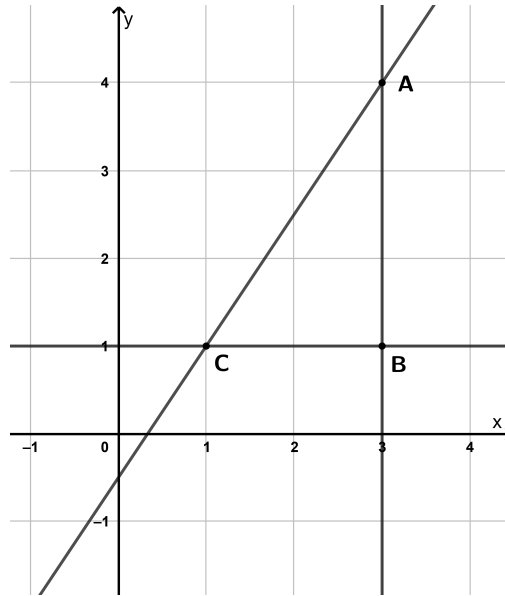


Figura 13: Exemplo 1.3

### 1.3.2 Reta Mediatriz

O objetivo dessa seção é desenvolver a equação da reta mediatriz de um segmento dado, além de encontrar uma relação com a equação de duas retas perpendiculares.

**Definição 1.6** (Mediatriz). Considere os pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ . A mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  é a reta perpendicular a  $\overline{AB}$  passando pelo seu ponto médio.

**Proposição 1.7.** A mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  é o lugar geométrico dos pontos  $P = (x, y)$  que equidistam de  $A$  e  $B$ .

*Demonstração.* Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $P$  um ponto qualquer da mediatriz de  $\overline{AB}$ . Se  $P = M$ , então, pela definição 1.2,  $P$  equidista de  $A$  e  $B$ . Se  $P$  é diferente de  $M$ , então temos que  $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ ,  $\overline{MP}$  é um lado comum e  $\widehat{PMA} \cong \widehat{PMB}$ . Logo  $\triangle PMA \cong \triangle PMB$  e  $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ .

Agora sejam  $P \neq M$  um ponto equidistante de  $A$  e  $B$  e  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ . Como  $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ ,  $\overline{AM} \cong \overline{BM}$  e  $\overline{MP}$  é um lado comum, temos  $\triangle PMA \cong \triangle PMB$  pelo caso lado-lado-lado. Logo, os ângulos  $\widehat{PMA}$  e  $\widehat{PMB}$  são retos, ou seja,  $P$  pertence à mediatriz de  $\overline{AB}$   $\square$

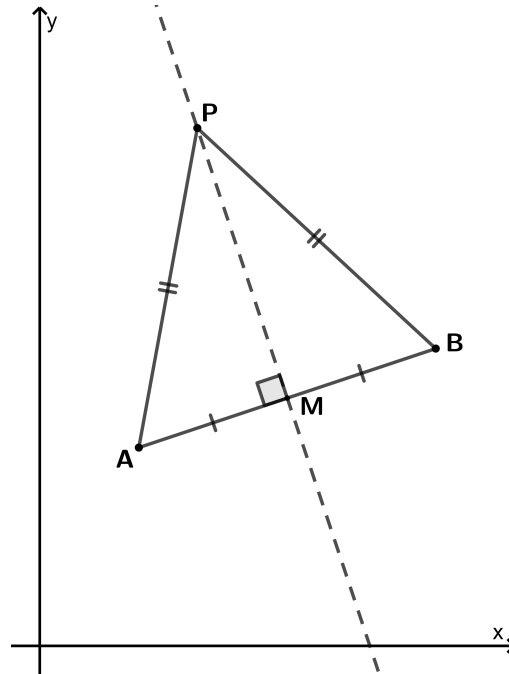


Figura 14: Exemplo 1.2.

Da proposição anterior, podemos por exemplo, encontrar o centro de uma circunferência conhecendo três pontos pertencentes a ela. Por definição, o centro equidista de qualquer um destes três pontos, então ele pertencerá a mediatriz de qualquer um dos três segmentos formados por eles. Assim, basta traçarmos duas mediatrizes (que certamente não serão paralelas, já que os três pontos não estão alinhados), e o ponto de intersecção entre elas será o centro.

Seja  $\overline{AB}$  um segmento não horizontal. Pela Proposição 1.7, temos que  $PA = PB$ . Logo:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} &= \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \\ x^2 - 2x \cdot x_A + x_A^2 + y^2 - 2y \cdot y_A + y_A^2 &= x^2 - 2x \cdot x_B + x_B^2 + y^2 - 2y \cdot y_B + y_B^2 \\ -2y(y_A - y_B) &= 2x(x_A - x_B) + x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2 \\ y &= -\left(\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}\right)x + \frac{x_A^2 + y_A^2 - x_B^2 - y_B^2}{2(y_A - y_B)}. \end{aligned}$$

Note que o coeficiente angular da reta mediatriz é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , o que nos leva a seguinte proposição:

**Proposição 1.8.** *Seja  $r : y = mx + n, m \neq 0$  uma reta qualquer. Uma reta  $s : y = m'x + n'$  perpendicular a  $r$  terá o coeficiente angular  $m'$  respeitando a relação  $m \cdot m' = -1$ .*

*Demonstração.* Suponha que a reta  $r$  tenha inclinação positiva e sejam  $\theta_r$  e  $\theta_s$  as inclinações das retas  $r$  e  $s$  com relação ao semi-eixo positivo  $x$ , respectivamente. Temos que  $\theta_r + 90^\circ = \theta_s$ , conforme a ilustração a seguir. Logo:

$$\tan(\theta_s) = \tan(\theta_r + 90^\circ) = \frac{\sin(\theta_r + 90^\circ)}{\cos(\theta_r + 90^\circ)} = -\frac{\cos(\theta_r)}{\sin(\theta_r)} = -\frac{1}{\tan(\theta_r)}.$$

Portanto,

$$\tan(\theta_s) \cdot \tan(\theta_r) = m \cdot m' = -1.$$

O caso onde a reta  $r$  é decrescente é análogo, somente trocando  $\theta_s$  por  $\theta_r$  na demonstração acima.

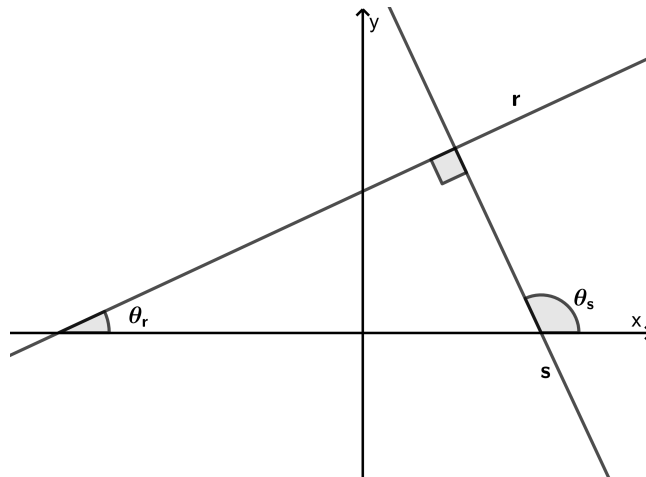


Figura 15: Retas perpendiculares.

□

**Exemplo 1.4.** Encontre a reta  $r$ , perpendicular à  $s : y = 2x + 5$  passando por  $A = (-3, 4)$ .

*Resolução:* O coeficiente angular da reta  $s$  é dado por  $m_s = 2$ , logo, pela Proposição 1.8 o coeficiente angular da reta  $r$  é dado por  $m_r = -\frac{1}{2}$ . Assim, a equação da reta  $r$  é dada por  $r : y = -\frac{1}{2}x + n$ , para algum  $n \in \mathbb{R}$ .

Como  $A \in r$ , temos que  $4 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + n \Rightarrow n = \frac{5}{2}$ . Assim, a equação da reta  $r$  é dada por  $r : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .

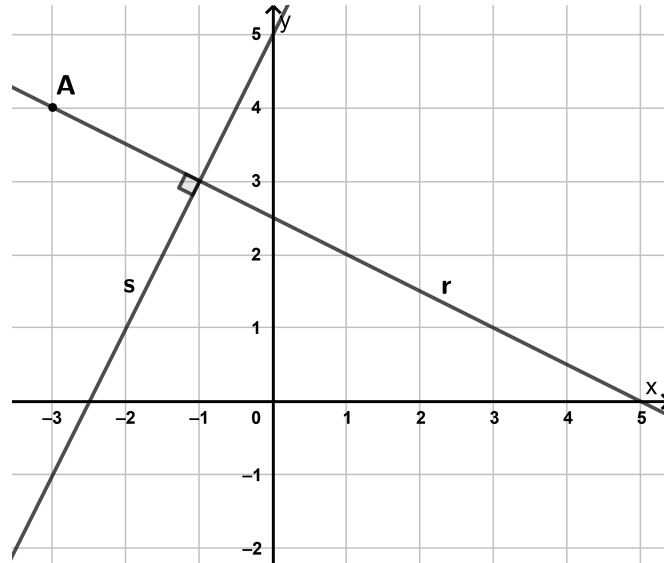


Figura 16: Exemplo 1.4



---

## A GEOMETRIA ANALÍTICA EM $\mathbb{R}^3$

---

### 2.1 VETORES

Neste capítulo trataremos de alguns temas básicos relacionados a vetores que serão base para construção dos conceitos de geometria analítica no espaço. Basearemos o estudo em parte da obra de [2].

Tomando dois pontos  $A$  e  $B$  no espaço tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , formamos o segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$  a partir do par ordenado  $(A, B)$ , com origem em  $A$  e final em  $B$ . Se  $A = B$ , temos o segmento orientado nulo:  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

**Definição 2.1** (Segmento Orientado). Sobre os segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$ , definimos:

- $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm o mesmo módulo se  $AB = CD$ ;
- $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm a mesma direção se são paralelos, ou seja, se  $\overrightarrow{AB}$  é paralelo a  $\overrightarrow{CD}$ ;
- se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são paralelos, eles terão o mesmo sentido se  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$  e terão sentidos opostos se  $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$ .

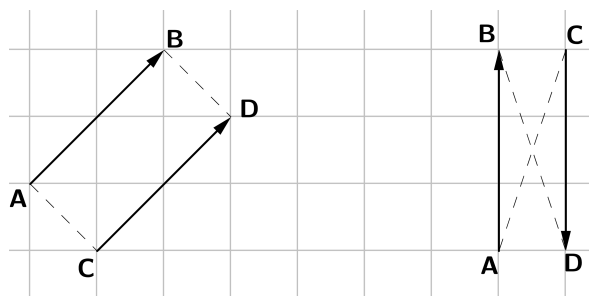


Figura 17: Segmentos orientados de mesmo sentido e sentidos opostos.

**Definição 2.2.** Dizemos que os segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são equivalentes ( $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ ) se possuem mesmo módulo, direção e sentido.

**Definição 2.3 (Vetor).** Vetor é um conjunto de todos os segmentos orientados que possuem mesmo módulo, direção e sentido. O espaço que contém todos os vetores em  $\mathbb{E}^3$  é denominado espaço vetorial  $\mathbb{V}^3$ .

## 2.2 OPERAÇÃO COM VETORES

Nessa seção trataremos de operações com vetores em  $\mathbb{E}^3$ . Como os vetores são conjuntos, usaremos apenas um representante dessa classe de equivalência, ou seja, matematicamente falando, não é significativo onde o vetor é aplicado, mas sim para onde e em qual intensidade.

A compreensão adequada de operações com vetores nos permite entender como representamos retas e planos no espaço  $\mathbb{R}^3$ , conceitos esses fundamentais para entender a isometria por meio das coordenadas.



## 2.2.1 Soma de Vetores

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores de  $\mathbb{V}^3$ . Para encontrarmos o vetor  $\vec{u} + \vec{v}$ , tomamos  $\vec{AB}$  equivalente a  $\vec{u}$ ,  $\vec{BC}$  equivalente a  $\vec{v}$ , resultando em  $\vec{AC}$  equivalente a  $\vec{u} + \vec{v}$ .

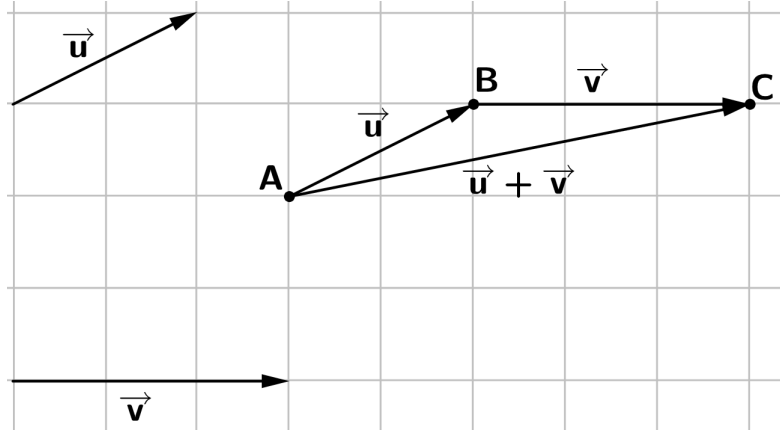


Figura 18: Soma de Vetores.

**Proposição 2.4.** Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  pertencentes a  $\mathbb{V}^3$ . São válidas as propriedades:

$$(P1): \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};$$

$$(P2): (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w});$$

$$(P3): \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}.$$

*Demonstração.*

(P1): Seja  $\vec{AB}$  equivalente a  $\vec{u}$  e  $\vec{BC}$  equivalente a  $\vec{v}$ . Assim,  $\vec{AC}$  é equivalente a  $\vec{u} + \vec{v}$ .

Por outro lado, seja  $\vec{AD}$  equivalente a  $\vec{v}$  e  $\vec{DC}$  equivalente a  $\vec{u}$ . Assim,  $\vec{AC}$  é equivalente a  $\vec{v} + \vec{u}$ .

Portanto,  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

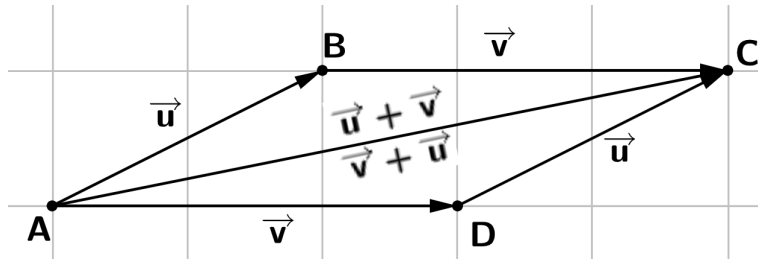


Figura 19: Propriedade comutativa de vetores.

(P2): Seja  $\overrightarrow{AB}$  equivalente a  $\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  equivalente a  $\vec{v}$  e  $\overrightarrow{CD}$  equivalente a  $\vec{w}$ .  
 Por um lado,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$ , que é equivalente a  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ .  
 Por outro lado,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ , que é equivalente a  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .

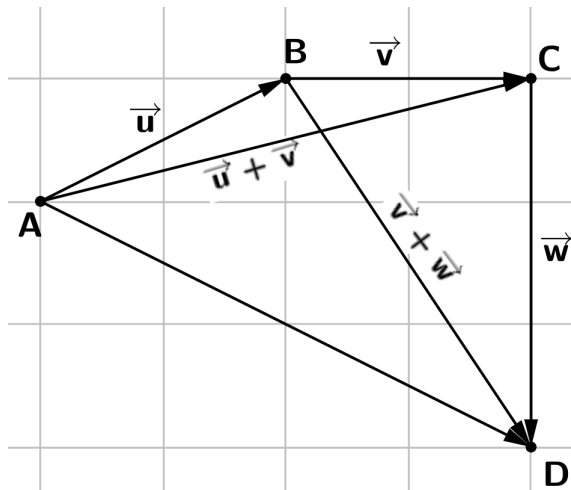


Figura 20: Propriedade associativa de vetores.

(P3): Seja  $\overrightarrow{AB}$  equivalente a  $\vec{u}$  e  $\overrightarrow{BB}$  equivalente a  $\vec{0}$ . Assim,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$  é equivalente a  $\vec{u} + \vec{0}$ . □

**Definição 2.5.** A norma (ou módulo) de um vetor é a medida de um segmento orientado equivalente a ele.

A norma do vetor  $\vec{v}$  é representada por  $\|\vec{v}\|$ .

## 2.2.2 Produto de Vetor por Escalar

**Definição 2.6.** Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ . Definimos o vetor  $\lambda \vec{v}$  como  $\vec{0}$ , se  $\lambda = 0$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ . Caso contrário,  $\lambda \vec{v}$  é definido por:

- $\lambda \vec{v}$  é paralelo a  $\vec{v}$ ;
- $\lambda \vec{v}$  tem o mesmo sentido de  $\vec{v}$  se  $\lambda > 0$ , e sentido contrário se  $\lambda < 0$ ;
- o módulo de  $\lambda \vec{v}$  é igual o produto do módulo de  $\lambda$  pelo módulo de  $\vec{v}$ :  $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$ .

As propriedades a seguir não serão provadas, no entanto são intuitivas.

**Proposição 2.7.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . São válidas as propriedades:

$$(P4): \alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha\beta) \vec{u};$$

$$(P5): \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v};$$

$$(P6): (\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}.$$

---

**Exemplo 2.1** (Base Média). Seja  $A, B$  e  $C$  pontos não alinhados de  $\mathbb{E}^3$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{AC}$  e  $N$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ . Prove que  $MN = \frac{1}{2}AB$ .

*Resolução:* Como

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

temos que  $\|\overrightarrow{MN}\| = \left\| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right\|$ , logo  $MN = \frac{1}{2}AB$ .

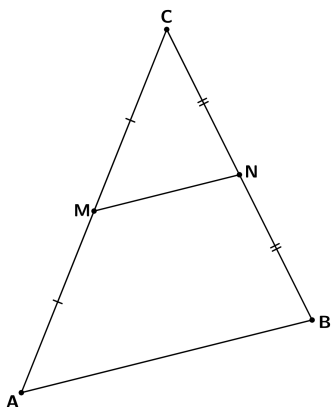


Figura 21: Exemplo 2.1.

### 2.2.3 Soma de Ponto com Vetor

Embora um ponto de  $\mathbb{E}^3$  e um vetor de  $\mathbb{V}^3$  sejam de naturezas diferentes, podemos definir uma operação de soma envolvendo os dois, sendo o ponto a origem do segmento orientado.

**Definição 2.8.** Seja  $A, B \in \mathbb{E}^3$  e  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ . Dizemos que  $B = A + \vec{v}$  se  $\overrightarrow{AB}$  for equivalente a  $\vec{v}$ . Assim,  $B - A = \overrightarrow{AB}$

## 2.3 DEPENDÊNCIA LINEAR

Como visto anteriormente, dois segmentos orientados são paralelos se eles pertencem a retas paralelas. Quanto ao paralelismo aplicado a vetores, temos:

**Definição 2.9.** Dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos se são representantes de segmentos orientados contidos na mesma reta ou em retas paralelas.

Um vetor  $\vec{v}$  é paralelo a um plano  $\pi$  se existe um segmento orientado equivalente  $\vec{AB}$  que esteja contido em  $\pi$ .

Convencionaremos que o vetor nulo  $\vec{0}$  é paralelo a qualquer vetor e a qualquer plano.

A seguir vamos estudar a dependência linear de vetores, tanto no plano quanto no espaço.

Geometricamente, entenderemos que dois vetores do plano são **linearmente independente** se uma soma de múltiplos desses vetores consegue representar todos os vetores possíveis no plano. Analogamente, dizemos que três vetores são linearmente independente no espaço se uma soma de múltiplos desses vetores consegue representar todos os vetores possíveis no espaço.

A seguir, vamos definir formalmente o conceito de dependência linear.

**Definição 2.10** (Dependência Linear). Em função do número  $n$  de vetores, um conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é linearmente dependente (LD) em  $\mathbb{V}^3$  se:

- para  $n = 1$ ,  $\{\vec{v}_1\}$  é linearmente dependente se  $\vec{v}_1 = \vec{0}$ ;
- para  $n = 2$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  é linearmente dependente se  $\vec{v}_1$  é paralelo a  $\vec{v}_2$ ;
- para  $n = 3$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é linearmente dependente se  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  forem paralelos a um mesmo plano;
- para  $n \geq 4$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$  é sempre linearmente dependente.

Se o conjunto de vetores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  não é LD, então ele é linearmente independente (LI).

**Definição 2.11.** Um vetor  $\vec{u}$  é uma combinação linear de  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  se existem  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

**Exemplo 2.2.** Considere os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  abaixo. Determine os vetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  como combinação linear de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

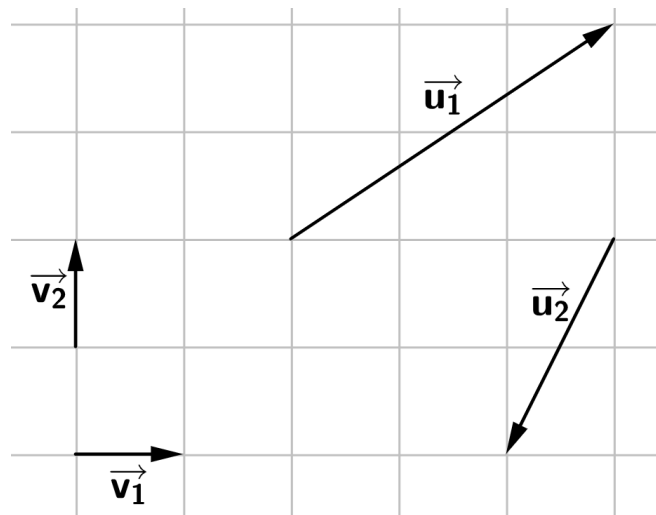


Figura 22: Exemplo 2.2.

*Resolução:*

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= -1\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2\end{aligned}$$

**Teorema 2.12.** Se  $n \geq 2$ , um conjunto de vetores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é LD se, e somente se, pelo menos um dos vetores é combinação linear dos demais.

*Demonstração.* Vamos dividir em quatro casos:

- se  $n = 2$ , suponha o conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  LD. Se um dos vetores é nulo, por exemplo  $\vec{v}_1$ , ele é combinação linear de  $\vec{v}_2$ , pois  $\vec{v}_1 = 0\vec{v}_2$ .

Suponha agora que os dois vetores sejam não nulos. Tome  $\vec{w} = \frac{\|\vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1$ . Como  $\vec{w}$  é paralelo a  $\vec{v}_1$  e  $\|\vec{w}\| = \|\vec{v}_2\|$ , logo  $\vec{w} = \pm \vec{v}_2$ . Logo  $\vec{v}_2$  é combinação linear de  $\vec{v}_1$ .

Reciprocamente, suponha  $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2$ , com  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  vetores não nulos. Pela definição 2.2.2, os vetores são paralelos.

- se  $n = 3$ , suponha o conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  LD. Se um dos vetores é nulo, por exemplo  $\vec{v}_1$ , ele é combinação linear de  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ , pois  $\vec{v}_1 = 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$ .

Suponha agora que os três vetores sejam não nulos. Se um conjunto com quaisquer dois deles é LD, então voltamos para o caso anterior.

Se  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é LD, os três vetores são paralelos a um plano  $\pi$ . Tome duas retas não paralelas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  contidas em  $\pi$ , com  $\overrightarrow{AB} \equiv \vec{v}_1$  e  $\overrightarrow{AC} \equiv \vec{v}_2$ . Agora seja  $D$  um ponto no plano gerado por  $A$ ,  $B$ , e  $C$  tal que  $\overrightarrow{AD}$  seja um representante de  $\vec{v}_3$  no plano  $\pi$ . Ao projetarmos o segmento  $\overline{AD}$  em  $\overleftrightarrow{AB}$  paralelamente a  $\overleftrightarrow{AC}$ , obtemos o segmento  $\overline{AM}$  e, ao projetarmos o segmento  $\overline{AD}$  em  $\overleftrightarrow{AC}$  paralelamente a  $\overleftrightarrow{AB}$ , obtemos o segmento  $\overline{AN}$ , conforme ilustrado na figura 23.

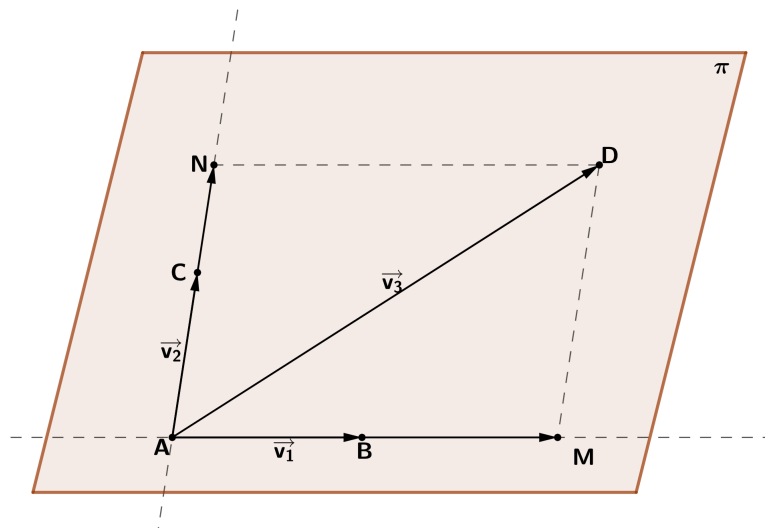


Figura 23: Três vetores LD.

Como  $\overrightarrow{AM} = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1$  e  $\overrightarrow{AN} = \frac{\|\overrightarrow{AN}\|}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2$ , temos por 2.2.1 que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ , ou seja  $\vec{v}_3 = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 + \frac{\|\overrightarrow{AN}\|}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2$ .

Portanto,  $\vec{v}_3$  é combinação linear de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ;

Reciprocamente, suponha  $\vec{v}_3 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$ , com  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  vetores não nulos com seus respectivos segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AD}$ .

Se  $A, B$  e  $C$  são colineares, então os quatro pontos estão no mesmo plano e  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é LD. Se  $A, B$  e  $C$  são não colineares, então eles determinam um plano. Tomemos  $\overrightarrow{AB} = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1$  e  $\overrightarrow{AC} = \frac{\|\overrightarrow{AN}\|}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2$ . Como  $M$  pertence à reta  $\overleftrightarrow{AB}$

e  $N$  pertence à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , o paralelogramo  $AMDN$  está contido no plano formado por  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Portanto,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são coplanares, logo,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é LD.

- se  $n = 4$ , suponha o conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  LD. Se um dos vetores é nulo, por exemplo  $\vec{v}_1$ , ele é combinação linear de  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ , pois  $\vec{v}_1 = 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4$ .

Se um conjunto com dois ou três vetores quaisquer é LD, então voltamos para os casos anteriores.

Tome  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  retas não coplanares no espaço, com  $\overrightarrow{AB} \equiv \vec{v}_1$ ,  $\overrightarrow{AC} \equiv \vec{v}_2$  e  $\overrightarrow{AD} \equiv \vec{v}_3$ . Agora seja  $\overrightarrow{AE}$  um representante de  $\vec{v}_4$  e suponha sem perda de generalidade que  $\overrightarrow{AE}$  esteja contido no semiespaço gerado por  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ .

Ao projetarmos o segmento  $\overline{AE}$  no semiplano determinado por  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  paralelamente a  $\overleftrightarrow{AD}$ , obtemos  $\overline{AQ}$ . Ao projetarmos  $\overline{AQ}$  em  $\overleftrightarrow{AB}$  paralelamente a  $\overleftrightarrow{AC}$ , obtemos o segmento  $\overline{AM}$ , ao projetarmos  $\overline{AQ}$  em  $\overleftrightarrow{AC}$  paralelamente a  $\overleftrightarrow{AB}$ , obtemos o segmento  $\overline{AN}$  e ao projetarmos  $\overline{AE}$  em  $\overleftrightarrow{AD}$  paralelamente a  $\overleftrightarrow{AQ}$ , obtemos  $\overline{AP}$ , conforme ilustrado na figura 24.

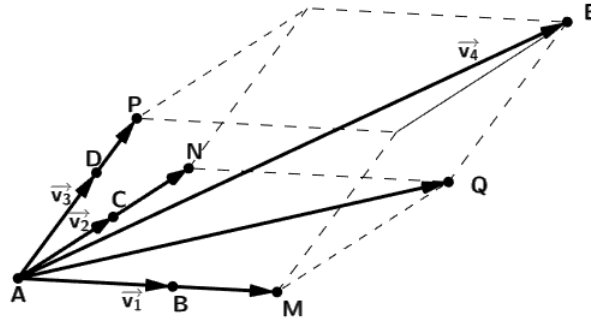


Figura 24: Quatro vetores LD.

Por 2.2.1, temos que  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ . Como  $\overrightarrow{AP} = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}_3\|} \vec{v}_3$  e, pelo caso anterior,  $\overrightarrow{AM} = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1$  e  $\overrightarrow{AN} = \frac{\|\overrightarrow{AN}\|}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2$  temos que  $\vec{v}_4 = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 + \frac{\|\overrightarrow{AN}\|}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2 + \frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}_3\|} \vec{v}_3$ .

Logo,  $\vec{v}_4$  é combinação linear de  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ .

Pela definição 2.10, o conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  é automaticamente LD.



- se  $n > 4$ , o conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é LD pois existem quatro vetores que necessariamente são LD.

□

**Teorema 2.13.** Um conjunto de vetores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é LD se, e somente se, existem  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ .

*Demonstração.* Se  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é LD, então temos que  $\vec{v}_1 = \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ , ou seja,  $-1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ .

Agora se  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ , seja  $\alpha_i \neq 0$ , então  $\vec{v}_i = -\frac{\alpha_2}{\alpha_i} \vec{v}_2 + \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \vec{v}_n$ , ou seja,  $\vec{v}_i$  é combinação linear dos outros vetores, portanto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é LD. □

**Corolário 2.14.** Um conjunto de vetores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é LI se, e somente se, a equação  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$  possui apenas a solução trivial, isto é,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

## 2.4 BASE VETORIAL

Nesta seção veremos que com a combinação de três vetores linearmente independentes, podemos escrever todos os vetores do espaço  $\mathbb{V}^3$ .

**Definição 2.15** (Base Vetorial). Uma base de  $\mathbb{V}^3$  é um conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  LI.

**Teorema 2.16.** Seja  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  uma base de  $\mathbb{V}^3$ . Para qualquer  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ , existem  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  únicos tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3.$$

*Demonstração.* A prova se dá pelo fato de que o conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{u}\}$  ser LD, ou seja, um deles é combinação linear dos outros. Agora suponha que existam  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$  tais que  $\vec{u} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3$ . Assim,  $\vec{0} = \vec{u} - \vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 - \beta_1 \vec{v}_1 - \beta_2 \vec{v}_2 - \beta_3 \vec{v}_3 = (\alpha_1 - \beta_1) \vec{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{v}_2 + (\alpha_3 - \beta_3) \vec{v}_3$ . Como  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é LI, então, pelo Corolário 2.14, temos que  $\alpha_1 = \beta_1$ ,  $\alpha_2 = \beta_2$  e  $\alpha_3 = \beta_3$ . □

Assim, definindo uma base  $B$  de  $\mathbb{V}^3$ , podemos escrever de forma única um vetor qualquer  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$  por meio de coordenadas, sendo estas os coeficientes que multiplicam os vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  na combinação linear acima:  $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_B$ .

Dessa forma, podemos fazer a soma de dois vetores que estão expressos na mesma base somando coordenada a coordenada. Por exemplo, se  $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)_B$ ,  $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)_B$ , então  $\vec{v} + \vec{u} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)_B$ .

**Teorema 2.17.** *Sejam  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)_B$ ,  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)_B$  e  $\vec{v}_3 = (a_3, b_3, c_3)_B$  vetores de uma base  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . O conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é LD se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Se o conjunto é LD, então um dos vetores é combinação linear dos outros. Logo, uma das linhas do determinante é combinação linear das outras, e pelas propriedades de determinantes [7], ele é nulo.

Agora, queremos verificar se existe solução não trivial para a equação  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ . Assim, temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot b_1 + \alpha_3 \cdot c_1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot a_2 + \alpha_2 \cdot b_2 + \alpha_3 \cdot c_2 = 0 \\ \alpha_1 \cdot a_3 + \alpha_2 \cdot b_3 + \alpha_3 \cdot c_3 = 0 \end{cases},$$

que é homogêneo. Como o determinante formado pelos coeficientes do sistema é nulo por hipótese, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, há infinitas soluções diferentes da trivial. Assim, o conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é LD.  $\square$

**Definição 2.18.** Dois vetores  $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3$  são perpendiculares ( $\vec{v} \perp \vec{u}$ ) se são equivalentes a segmentos orientados perpendiculares, ou seja, se as retas que os contêm são perpendiculares.

**Definição 2.19.** Uma base  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  é dita ortogonal se:  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$  e  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$ .

Uma base  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  é dita ortonormal se é ortogonal e também se  $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ .

Daqui por diante trabalharemos em uma base ortonormal. Essa escolha é feita pela praticidade de se representar pontos e vetores no espaço, além das contas serem mais fáceis.

**Teorema 2.20.** *Seja  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  uma base ortonormal e o vetor  $\vec{v} = (a, b, c)_B$ . A norma de  $\vec{v}$  é dada por*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.1)$$

*Demonstração.* A demonstração será feita na seção 2.6.1. □

### 2.4.1 Produto Escalar: Ângulo Entre Vetores

Considere dois vetores não nulos  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ . Nesta seção, vamos determinar qual o ângulo entre esses dois vetores. Esse conceito será estendido adiante para a determinação do ângulo entre planos, conteúdo esse necessário para entendermos melhor algumas isometrias.

**Definição 2.21.** Considere dois segmentos orientados  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$  equivalentes a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente. Dizemos que a medida do ângulo  $\theta$  entre esses vetores é:

- igual a 0, se eles são paralelos e possuem o mesmo sentido;
- igual a  $\pi$ , se eles são paralelos e possuem sentidos opostos;
- igual a menor medida do ângulo  $B\hat{A}C$ , se eles não são paralelos.

Conclui-se pela definição acima que  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Agora considere o triângulo formado pelos segmentos orientados  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  e  $\vec{AB} - \vec{AC}$ , equivalentes aos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$ , conforme ilustrado na figura. Seja  $\theta$  a medida do ângulo  $B\hat{A}C$ .

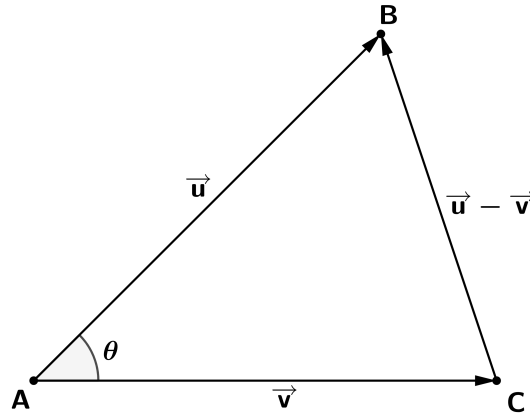


Figura 25: Ângulo entre vetores.

Pela lei dos cossenos, temos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta. \quad (2.2)$$

Agora suponha que  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$  sejam dois vetores de uma base ortonormal  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Substituindo as coordenadas dos vetores na equação (2.2), temos

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta.$$

Simplificando, temos:

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta. \quad (2.3)$$

**Definição 2.22** (Produto Escalar). Sejam dois vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ . O produto escalar desses vetores ( $\vec{u} \bullet \vec{v}$ ) é um escalar definido por

- 0, se  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ ;
- $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo entre eles.

Concluimos, portanto, que numa base ortonormal, o produto escalar de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é dado por  $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$  e que se o produto escalar de dois vetores não nulos de uma base ortonormal é nulo, então eles são perpendiculares.

---

**Exemplo 2.3.** Prove que os vetores  $\vec{u} = (4, 1, 0)_B$  e  $\vec{v} = (-1, 4, 2)_B$  são perpendiculares, sendo  $B$  uma base ortonormal.

*Resolução:* Substituindo as coordenadas dos vetores na equação (2.3), temos:

$$4 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 - 0 \cdot 2 = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} \cdot \cos \theta$$

$$0 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

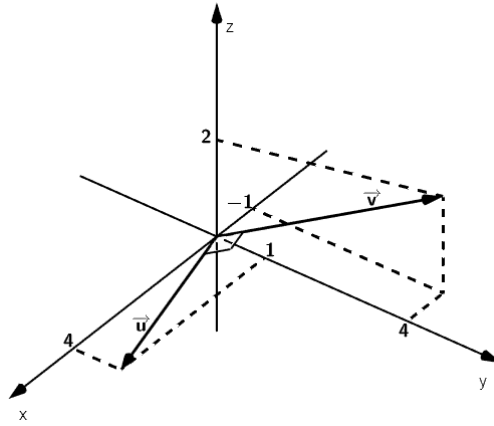


Figura 26: Exemplo 2.3.

**Proposição 2.23.** Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_B$  vetores de uma base ortonormal  $B$ . São válidas as propriedades:

- (P1):  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ ;  
 (P2):  $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ ;  
 (P3):  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ .

*Demonstração.* As demonstrações se baseiam nas propriedades associativas e comutativas dos números reais:

- (P1):  $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \vec{v} \bullet \vec{u}$ ;  
 (P2):  $\vec{u} \bullet \vec{u} = u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{u}\|^2$ ;  
 (P3):  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \bullet (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ .  $\square$

## 2.4.2 Produto Vetorial: Área

Nessa seção desenvolveremos o conceito de produto vetorial. De forma informal, o produto vetorial de dois vetores tem duas serventias: encontrar um terceiro vetor perpendicular aos dois vetores iniciais e também determinar a área do paralelogramo formado por esses dois vetores, como explicado a seguir.

**Definição 2.24.** Considere dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de uma base ortonormal  $B$ , representantes de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , respectivamente. O produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  é dado por

- o vetor  $\vec{0}$ , se  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  forem LD;
- o vetor perpendicular a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$ , sendo que seu módulo é igual a área do paralelogramo delimitado por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .

**Teorema 2.25.** Sejam dois vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$  de uma base ortonormal  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ . O produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  é dado por

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{b}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \vec{b}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{b}_3 \\ \vec{u} \times \vec{v} &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)_B. \end{aligned}$$

Para provar a perpendicularidade, vamos mostrar que o produto escalar desse vetor com  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é nulo:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0.$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = u_2v_1v_3 - u_3v_1v_2 + u_3v_1v_2 - u_1v_2v_3 + u_1v_2v_3 - u_2v_1v_3 = 0.$$

Por um lado, temos que

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Por outro lado, a área  $A$  do paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é dada, conforme ilustrado na figura 27, por

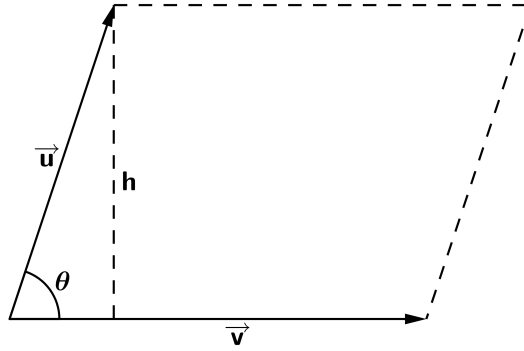


Figura 27: Área do paralelogramo.

$$A = \|\vec{v}\| \cdot h = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta.$$

Elevando os dois termos ao quadrado, temos

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta).$$

Isolando  $\cos \theta$  na equação (2.3), temos

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \left( 1 - \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)^2 \right) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Substituindo por coordenadas obtidas nas equações 2.1 e 2.3, temos

$$A^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$

$$A^2 = (u_2v_3)^2 - 2u_2u_3v_2v_3 + (u_3v_2)^2 + (u_3v_1)^2 - 2u_1u_3v_1v_3 + (u_1v_3)^2 + (u_1v_2)^2 - 2u_1u_2v_1v_2 + (u_2v_1)^2$$

$$A^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 = \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$$

$$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

□

**Exemplo 2.4.** Considere os pontos  $P = (1, 2, 3)$ ,  $Q = (0, -1, 2)$  e  $R = (3, -2, 1)$  de uma base ortonormal  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ . Prove que os pontos não estão alinhados, e calcule a área do  $\Delta PQR$ .

*Resolução* Se os pontos estiverem alinhados, então os vetores  $\vec{PQ}$  e  $\vec{PR}$  são paralelos, ou seja, o conjunto  $\{\vec{PQ}, \vec{PR}\}$  é LD. Mas  $\vec{PQ} = Q - P = (-1, -3, -1)$  e  $\vec{PR} = R - P = (2, -4, -2)$ , e não há  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $(-1, -3, -1) = \lambda(2, -4, 2)$ . Portanto, os vetores são LI e os três pontos não estão alinhados.

A área do  $\Delta PQR$  é dada pela metade da área do paralelogramo delimitado pelos vetores  $\vec{PQ}$  e  $\vec{PR}$ , que por sua vez é numericamente igual à norma do vetor  $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ . Logo

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (2, -4, 10).$$

$$\|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 10^2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

Portanto, a área do  $\Delta PQR$  é igual a  $\sqrt{30}$ .

---

## 2.5 SISTEMAS DE COORDENADAS NO ESPAÇO

### 2.5.1 Espaço de Coordenadas Cartesianas

Considere três retas orientadas  $\vec{OX}$ ,  $\vec{OY}$  e  $\vec{OZ}$  de mesma origem  $O$ , duas a duas ortogonais entre si, denominada eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Este sistema de eixos é chamado de *espaço cartesiano*.

Com quaisquer três números reais  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , formamos uma trinca ordenada do tipo  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , que pode ser associada biunivocamente a um ponto  $P = (a, b, c)$  no espaço cartesiano, ou seja, cada trinca  $(a, b, c)$  se associa a um único ponto  $P$  enquanto cada ponto  $P$  se associa a uma única trinca ordenada  $(a, b, c)$ .

Para representar um ponto no plano cartesiano, tomamos por definição a origem como o ponto  $O = (0, 0, 0)$  e fazemos três projeções ortogonais de  $P$  em planos diferentes, a saber:

- ao projetarmos  $P$  no plano formado pelos eixos  $x$  e  $y$  (plano  $xy$ ), obtemos o ponto  $C = (a, b, 0)$ . Ao projetarmos  $C$  no eixo  $x$ , obtemos o ponto  $(a, 0, 0)$ , e ao projetarmos no eixo  $y$ , obtemos o ponto  $(0, b, 0)$ ;



- ao projetarmos  $P$  no plano formado pelos eixos  $x$  e  $z$  (plano  $xz$ ), obtemos o ponto  $B = (a, 0, c)$ . Ao projetarmos  $B$  no eixo  $x$ , obtemos o ponto  $(a, 0, 0)$ , e ao projetarmos no eixo  $z$ , obtemos o ponto  $(0, 0, c)$ ;
- ao projetarmos  $P$  no plano formado pelos eixos  $y$  e  $z$  (plano  $yz$ ), obtemos o ponto  $A = (0, b, c)$ . Ao projetarmos  $A$  no eixo  $y$ , obtemos o ponto  $(0, b, 0)$ , e ao projetarmos no eixo  $z$ , obtemos o ponto  $(0, 0, c)$ .

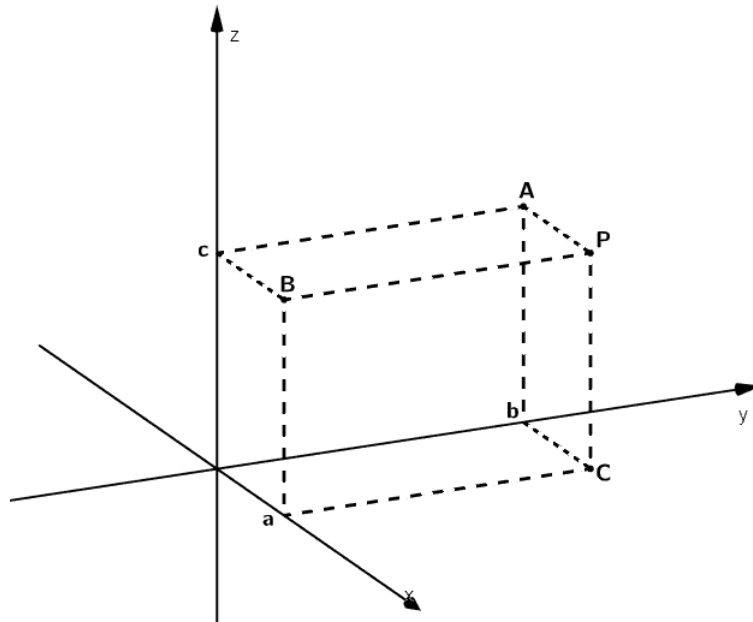


Figura 28: Representação de um ponto no espaço cartesiano.

Note que, se o ponto  $P$  pertencer ao plano determinado pelos eixos  $x$  e  $y$  (plano  $xy$ ), temos que  $c = 0$  e  $P = C$ ; se o ponto  $P$  pertencer ao plano determinado pelos eixos  $x$  e  $z$  (plano  $xz$ ), temos que  $b = 0$  e  $P = B$  e se o ponto  $P$  pertencer ao plano determinado pelos eixos  $y$  e  $z$  (plano  $yz$ ), temos que  $a = 0$  e  $P = A$ .

Em qualquer um dos casos, dizemos que o valor de  $a$  é a **abcissa**, o valor de  $b$  é a **ordenada** e o valor de  $c$  é a **cota** do ponto  $P$ .

### 2.5.2 Espaço de Coordenadas Cilíndricas

Assim como vimos no Capítulo 1, existem outros sistemas de coordenadas para representar um ponto no espaço. Nesta seção, veremos as **coordenadas cilíndricas**.

Denotaremos um ponto genérico  $P$  com coordenadas cartesianas por  $P = (a, b, c)$  e por coordenadas cilíndricas por  $P = (r, \phi, c)_C$

Sabemos da seção 1.1.3, que um ponto  $P' = (x', y')$  no plano  $xy$  pode ser representado por coordenadas polares por uma distância  $r$  e um ângulo  $\phi$ , obtendo-se  $P = (r, \phi)_P$ . Para representar um ponto  $P = (a, b, c)$  em coordenadas cilíndricas no espaço, primeiro determinamos a projeção de  $P$  no plano  $xy$  por meio de coordenadas polares (adotando as mesmas convenções de 1.1.3), obtendo-se o ponto  $P' = (r, \phi, 0)_C$ , e utilizamos uma terceira coordenada  $c$  para determinar a distância que o ponto  $P$  está de  $P'$ , adotando a mesma convenção de sinal que o eixo  $z$ .

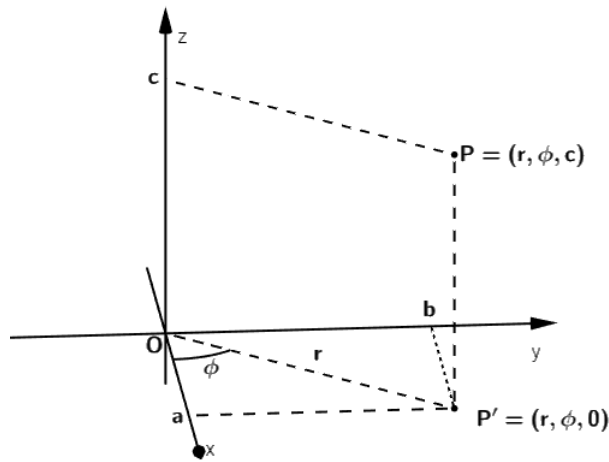


Figura 29: Representação de um ponto no espaço cilíndrico.

A conversão de um ponto  $P = (a, b, c)$  de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas segue o mesmo procedimento utilizado em 1.1.3 com base na fórmula 1.1, resultando em  $P = (\sqrt{a^2 + b^2}, \theta(a, b), c)_C$ , enquanto a conversão de um ponto  $P = (r, \phi, c)_C$  em coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas resulta em  $P = (r \cos \phi, r \sin \phi, c)$ .

### 2.5.3 Espaço de Coordenadas Esféricas

Esta seção será destinada a uma outra maneira de representar um ponto no espaço, denominada **coordenadas esféricas**. Novamente, representaremos um ponto genérico  $P$  em coordenadas genéricas como  $P = (a, b, c)$  e em coordenadas esféricas por  $P = (\rho, \phi, \alpha)_E$ .

Seja  $\rho$  a medida do segmento  $\overline{OP}$  e considere agora a projeção  $P' = (a, b, 0)$  de  $P$  no plano  $xy$ . A segunda coordenada  $\phi$  é dada pela medida do ângulo que o segmento  $\overline{OP'}$  faz com o semi-eixo positivo  $x$ , sendo que  $\phi$  variando no intervalo  $[0, 2\pi[$ . A terceira coordenada  $\alpha$  será dada pela medida do menor ângulo que o segmento  $\overline{OP}$  faz com o semi-eixo positivo  $z$ , variando no intervalo  $[0, \pi]$ .

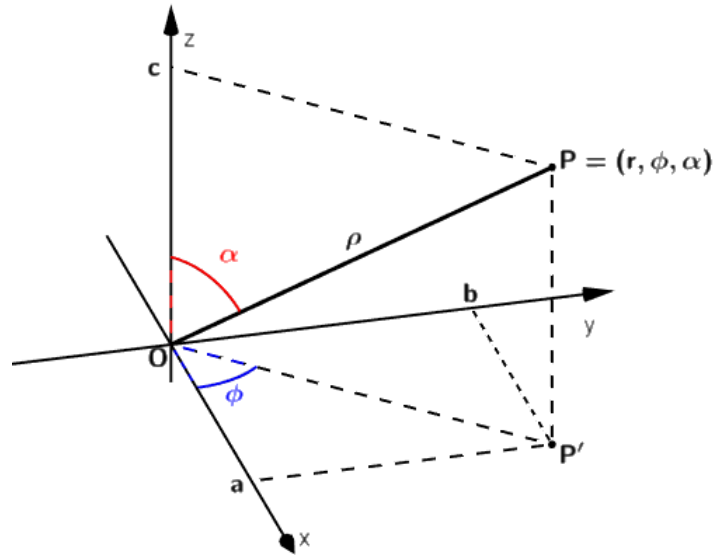


Figura 30: Representação de um ponto no espaço esférico.

Como ilustrado na figura 30, temos que  $c = \rho \cos \alpha$ ,  $OP' = \rho \sin \alpha$ ,  $a = OP' \cos \phi$  e  $b = OP' \sin \phi$ . Assim, podemos converter um ponto  $P = (\rho, \phi, \alpha)_E$  em coordenadas esféricas para  $P = (\rho \sin \alpha \cos \phi, \rho \sin \alpha \sin \phi, \rho \cos \alpha)$ .

A conversão de um ponto  $P = (a, b, c)$  de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas passa por três etapas:

- o cálculo de  $\rho$ , que será provado na seção 2.6.1 que é  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ;
- o cálculo da medida de  $\phi$ , dado pela fórmula 1.1 em 1.1.3;
- o cálculo da medida do ângulo  $\alpha$ , dado por  $\arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$ .

Assim, temos que um ponto em coordenadas cartesianas  $P = (a, b, c)$  é dado, em coordenadas esféricas, por  $P = \left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \theta(a, b), \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)\right)_E$ .

**Exemplo 2.5.** Seja  $A = (1, 1, \sqrt{6})$  um ponto do espaço em coordenadas cartesianas. Determine  $A$  em coordenadas cilíndricas e esféricas.

*Resolução:* O ponto  $A' = (1, 1, 0)$  é projeção de  $A$  no plano  $xy$ , e dista  $r = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$  da origem. O ângulo  $\phi$  entre o segmento  $\overline{OA}$  e o semieixo positivo  $x$  tem medida igual a  $\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ . Assim, em coordenadas cilíndricas,  $P = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{6}\right)_C$ .

A distância entre  $A$  e a origem é igual  $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{6}^2} = 2\sqrt{2}$  e o ângulo  $\alpha$  formado entre o segmento  $\overline{OP}$  e o semieixo positivo  $z$  tem medida igual a  $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{6}$ . Assim, em coordenadas esféricas,  $P = \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)_E$ .

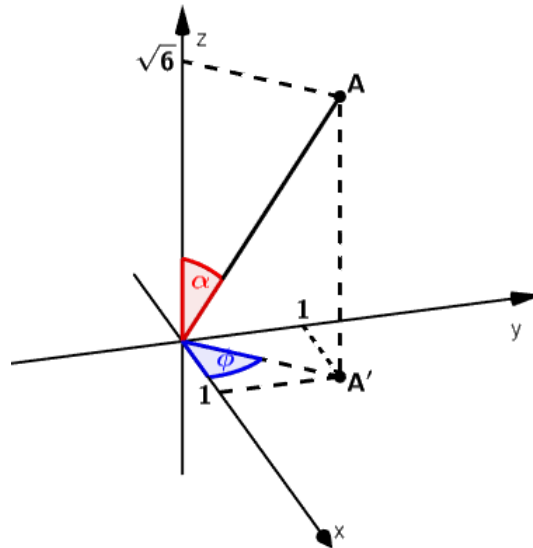


Figura 31: Representação de um ponto no espaço esférico.

---

O cálculo de área de algumas figuras planas e de volume de sólidos são algumas aplicações interessantes estudadas em cálculo diferencial e integral que utilizam os diferentes tipos de coordenadas [14].

## 2.6 PONTOS

## 2.6.1 Distância entre pontos

Nessa seção, assim como feito em 1.2.1, vamos deduzir equações que permitam calcular a distância entre dois pontos no espaço.

**Teorema 2.26** (Distância entre pontos). *Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  dois pontos no espaço. A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por*

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}. \quad (2.5)$$

*Demonstração.* A prova passa por três casos distintos:

- se duas das coordenadas de  $A$  e  $B$  forem iguais, então o segmento  $\overline{AB}$  será paralelo a um dos eixos coordenados. Suponha, sem perda de generalidade, que  $x_A = x_B$  e  $y_A = y_B$ . Assim,  $x_A - x_B = 0$ ,  $y_A - y_B = 0$  e  $AB = |z_A - z_B| = \sqrt{(z_A - z_B)^2}$ , respeitando a equação (2.5);
- se uma das coordenadas de  $A$  e  $B$  forem iguais, então o segmento  $\overline{AB}$  estará contido em um plano paralelo a um dos eixos coordenados, tornando-se um problema bidimensional já tratado na seção 1.2.1. Suponha, sem perda de generalidade, que  $x_A = x_B$ . Assim,  $x_A - x_B = 0$  e  $AB = \sqrt{(y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$ , respeitando a equação (2.5);
- se todas as coordenadas de  $A$  e  $B$  forem diferentes, tomamos os pontos  $C = (x_B, y_A, z_A)$  e  $D = (x_B, y_B, z_A)$  conforme ilustrado na figura 32

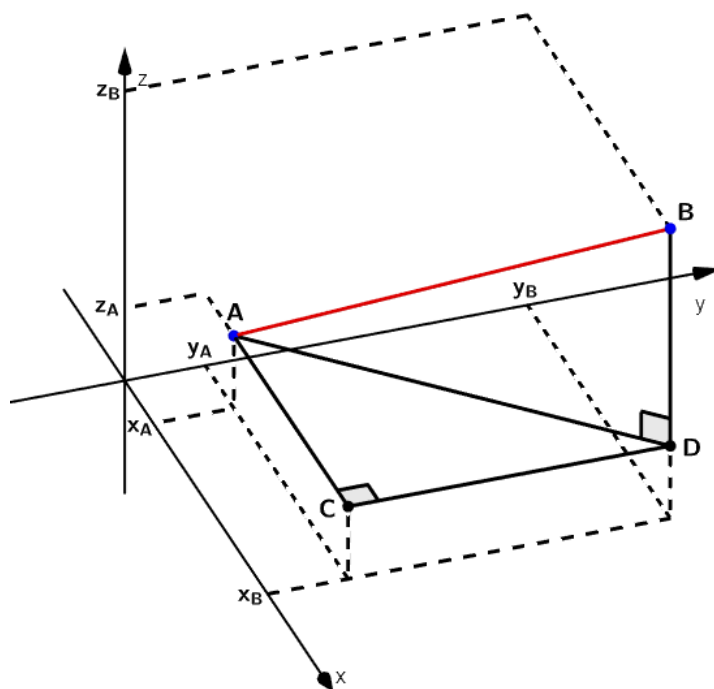


Figura 32: Distância entre pontos no espaço.

Como o triângulo  $\triangle ACB$  é retângulo e pertence a um plano  $z = z_A$ , aplicando o Teorema de Pitágoras temos que

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2.$$

Novamente aplicando Pitágoras agora no triângulo  $\triangle ADB$ , temos que

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2.$$

Logo

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

□

### 2.6.2 Colinearidade de Três Pontos

Nesta seção, discutiremos quais são as condições necessárias para que três pontos estejam alinhados no espaço. Seja a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  traçada pelos pontos  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  com um ponto  $P = (x, y, z)$  pertencente a ela.

Assim como na seção 1.2.2, buscaremos representar por meio de igualdades quais as relações que  $x$ ,  $y$  e  $z$  devem respeitar para que o ponto  $P$  esteja alinhado com  $A$  e  $B$ . Vamos separar esta análise em três casos: se os pontos  $A$  e  $B$  possuem duas, uma ou nenhuma coordenada em comum.

Se  $A$  e  $B$  possuem duas coordenadas em comum, então  $\overleftrightarrow{AB}$  é uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Aqui temos três possibilidades: se  $x_A = x_B$  e  $y_A = y_B$ , então o ponto  $P$  é do tipo  $(x_A, y_A, z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ ; se  $x_A = x_B$  e  $z_A = z_B$ , então o ponto  $P$  é do tipo  $(x_A, y, z_A)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$  e se  $y_A = y_B$  e  $z_A = z_B$ , então o ponto  $P$  é do tipo  $(x, y_A, z_A)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.6.** Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $B = (x_B, y_A, z_A)$ ,  $C = (x_B, y_C, z_A)$  e  $D = (x_B, y_C, z_D)$ , com  $x_A \neq x_B$ ,  $y_A \neq y_C$  e  $z_A \neq z_D$ , pontos representados no espaço cartesiano abaixo. Determine as coordenadas de  $P$ ,  $P'$  e  $P''$ , tais que  $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $P' \in \overleftrightarrow{BC}$  e  $P'' \in \overleftrightarrow{CD}$ .

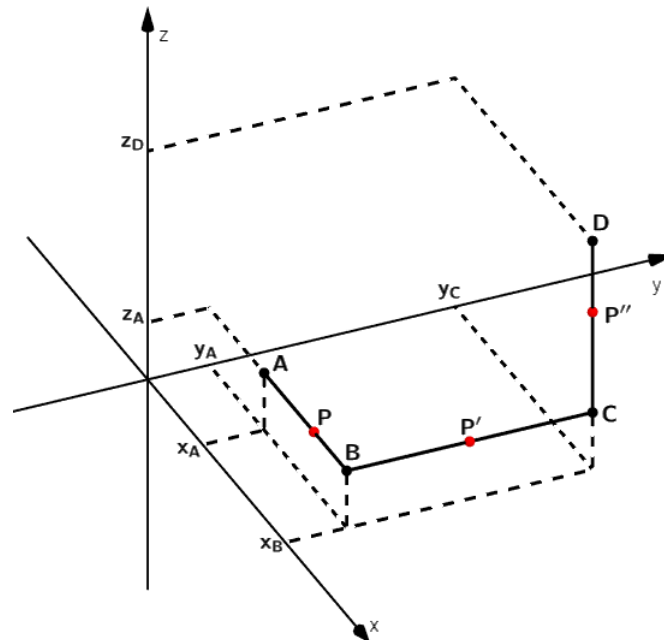


Figura 33: Exemplo 2.6.

*Resolução:* Como  $\overleftrightarrow{AB}$  é paralelo ao eixo  $x$ ,  $P = (x, y_A, z_A)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ; como  $\overleftrightarrow{BC}$  é paralelo ao eixo  $y$ ,  $P' = (x_B, y, z_A)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$  e como  $\overleftrightarrow{CD}$  é paralelo ao eixo  $z$ ,  $P'' = (x_B, y_C, z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ .

Se  $A$  e  $B$  possuem uma coordenada em comum, então  $\overleftrightarrow{AB}$  é uma reta que está contida em um plano paralelo aos eixos coordenados, mas não ortogonal a eles. Aqui também temos três possibilidades:  $x_A = x_B, y_A \neq y_B$  e  $z_A \neq z_B$ ;  $y_A = y_B, x_A \neq x_B$  e  $z_A \neq z_B$  ou  $z_A = z_B, x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ .

As três possibilidades são muito semelhantes às desenvolvidas na seção 1.2.2, então vamos tomar como exemplo a primeira delas. Consideremos o ponto  $P = (x_A, y, z) \in \overleftrightarrow{AB}$ , e sejam  $C = (x_A, y, z_A)$  e  $D = (x_A, y_B, z_A)$ , conforme ilustrado em 34.

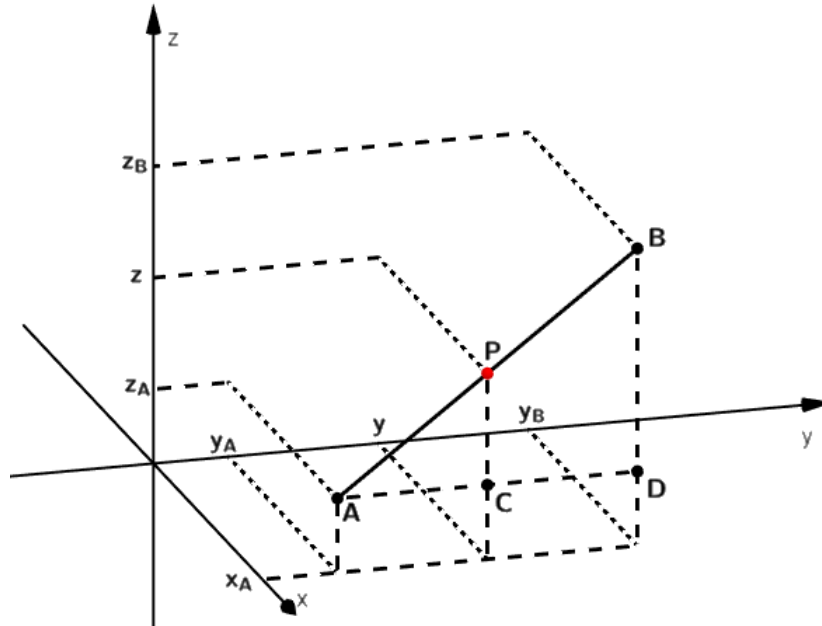


Figura 34: Alinhamento de 3 pontos no espaço.

Como  $\triangle PCA \sim \triangle BDA$ , temos:

$$\frac{CA}{DA} = \frac{PC}{BD}$$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Agora consideremos o caso onde as coordenadas de  $A$  e  $B$  são todas diferentes. Tomemos  $C = (x, y_A, z_A)$  e  $D = (x_B, y_A, z_A)$  pontos pertencentes ao plano  $z = z_A$ , e  $E = (x, y, z_A)$   $F = (x_B, y_B, z_A)$  pertencentes a um plano que contém  $\overleftrightarrow{AB}$  e perpendicular ao plano  $xy$ , como ilustrado na figura 35:



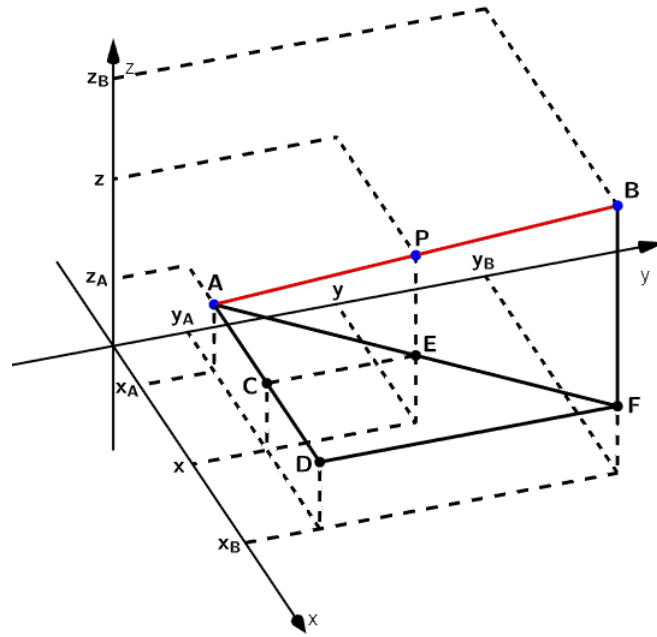


Figura 35: Alinhamento de 3 pontos no espaço.

Por um lado,  $\triangle ACE \sim \triangle ADF$ , temos:

$$\frac{CA}{DA} = \frac{EC}{FD} = \frac{EA}{FA}$$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{EA}{FA}.$$

Por outro lado,  $\triangle PEA \sim \triangle BFA$ , temos:

$$\frac{PE}{BF} = \frac{EA}{FA}$$

$$\frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \frac{EA}{FA}.$$

Unindo as duas equações, temos a seguinte relação:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \quad (2.6)$$

### 2.6.3 Ponto Médio de um Segmento

Utilizando a mesma definição de ponto médio detalhada em 1.2, vamos deduzir uma fórmula para calcular o ponto médio de um segmento no espaço.

**Proposição 2.27.** O ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  com extremidades  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  é o ponto  $M$ , tal que:

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right). \quad (2.7)$$

*Demonstração.* A prova passa por duas etapas: provar que  $M$  é colinear e equidistante de  $A$  e  $B$ . Primeiramente, vamos provar que os três pontos são colineares.

Se  $A$  e  $B$  possuem uma ou duas coordenadas em comum, então o problema se torna bidimensional, como já tratado em 1.2. Suponha agora que estamos no caso onde as três coordenadas sejam diferentes.

Substituindo as coordenadas de  $M$  na equação (2.6), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x_A + x_B}{2} - x_A}{x_B - x_A} &= \frac{-x_A + x_B}{x_B - x_A} = -\frac{1}{2}; \\ \frac{\frac{y_A + y_B}{2} - y_A}{y_B - y_A} &= \frac{-y_A + y_B}{y_B - y_A} = -\frac{1}{2}; \\ \frac{\frac{z_A + z_B}{2} - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-z_A + z_B}{z_B - z_A} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

Como a equação (2.6) é respeitada, então  $M \in \overleftrightarrow{AB}$ . Agora vamos provar que  $AM = BM$ , utilizando a equação (2.5).

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{\left(x_A - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y_A - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(z_A - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A - z_B}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{\left(x_B - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y_B - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(z_B - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_B - x_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_B - z_A}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Logo,  $AM = BM$ . □

**Exemplo 2.7.** Sejam  $A = (4, 3, 5)$  e  $B = (-4, -3, -1)$  pontos diametralmente opostos de uma esfera. Determine o centro da esfera e a medida do raio.

*Resolução:* O centro  $O$  da esfera é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Assim:

$$O = \left( \frac{4 + (-4)}{2}, \frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-1)}{2} \right) = (0, 0, 2).$$

A medida do raio pode ser determinada pela medida do segmento  $\overline{OA}$  ou  $\overline{OB}$ . Assim:

$$OA = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{34}.$$

A determinação do ponto médio de um segmento será de extrema importância quando estudarmos reflexões no capítulo 3. Note que no exemplo anterior, o ponto  $A$  é diametralmente oposto ao ponto  $B$ .

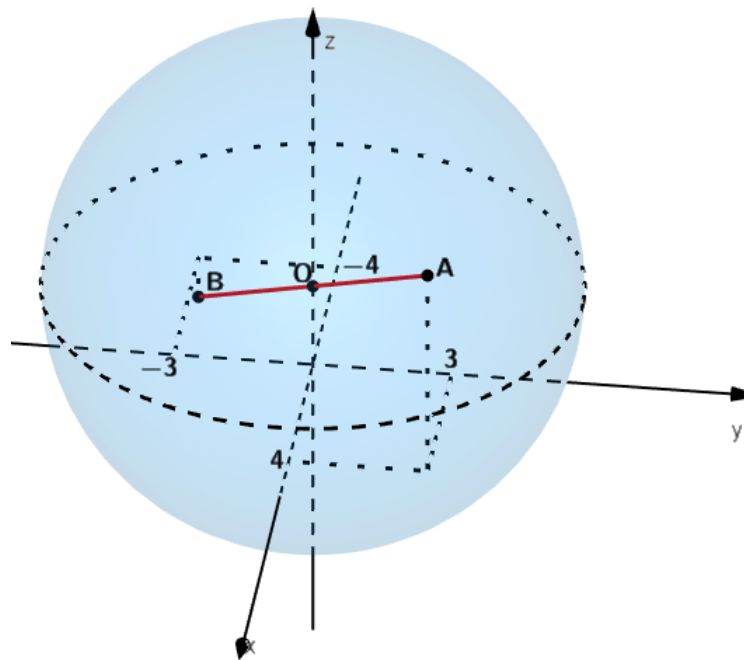


Figura 36: Exemplo 2.7.

## 2.7 RETAS

### 2.7.1 Equação de Reta

Nesta seção, desenvolveremos equações que relacionem as coordenadas de um ponto genérico  $P = (x, y, z)$  que esteja na reta que passa por dois pontos conhecidos  $A =$

$(x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  em  $\mathbb{E}^3$ . Estenderemos, portanto, as relações encontradas na seção 2.6.2. Note que, embora tenhamos considerado o ponto  $P$  pertencente ao segmento  $\overline{AB}$ , as relações seriam as mesmas se houvésssemos escolhido  $P$  em qualquer posição da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Vamos tratar do caso mais genérico, onde a reta  $r$  passa por  $A$  e  $B$  que possuem as três coordenadas diferentes. A equação

$$r : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}, \quad (2.8)$$

é chamada de **equação simétrica da reta**. Note que nem sempre a equação simétrica existe, já que os pontos  $A$  e  $B$  podem possuir abscissas, ordenadas ou cotas iguais. Nos casos onde isso acontece, por exemplo, quando  $x_A = x_B$ , a equação acima não será escrita da forma de múltipla igualdade, mas sim como:

$$r : \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}; x = x_A. \quad (2.9)$$

Ao igualarmos a equação (2.8) a um parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e isolarmos as variáveis  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , chegamos na **equação paramétrica** da reta:

$$r : \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\lambda \\ y = y_A + (y_B - y_A)\lambda, & \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + (z_B - z_A)\lambda \end{cases} \quad (2.10)$$

Eventualmente, se os pontos  $A$  e  $B$  possuírem uma coordenada igual, digamos  $z_A = z_B$ , a equação da reta terá uma coordenada constante:

$$r : \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\lambda \\ y = y_A + (y_B - y_A)\lambda, & \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_A \end{cases} \quad (2.11)$$

Agora seja um ponto  $X = (x, y, z) \in r$ . É possível reescrever a equação (2.10) da seguinte maneira:

$$X = (x, y, z) = (x_A + (x_B - x_A)\lambda, y_A + (y_B - y_A)\lambda, z_A + (z_B - z_A)\lambda).$$

Além disso, como vimos nas seções 2.2.3 e 2.2.2, que a tripla ordenada  $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$  são as coordenadas de um vetor equivalente a  $\overrightarrow{AB}$  e que  $((x_B - x_A)\lambda, (y_B - y_A)\lambda, (z_B - z_A)\lambda)$  são as coordenadas de um vetor equivalente a  $\lambda\overrightarrow{AB}$ . Assim, reescrevemos a equação anterior como:

$$r : X = (x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda\overrightarrow{AB} = A + \lambda\overrightarrow{AB}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

que é conhecida como **equação vetorial da reta**, que sempre existe independentemente das coordenadas de  $A$  e  $B$ . Portanto, para determinarmos a equação da reta  $r$  no espaço, é suficiente que tenhamos dois pontos  $A$  e  $B$  que pertençam à ela ou um ponto e a sua direção, dado pelo **vetor diretor**  $\overrightarrow{AB}$ .

No exemplo a seguir, vamos estudar a conversão das três diferentes equações de reta. Optaremos por iniciar com a equação vetorial, no entanto essa escolha é arbitrária.

**Exemplo 2.8.** Determine a equação vetorial, paramétrica e simétrica da reta  $r$  que passa pelos pontos  $A = (1, 0, 3) \in \mathbb{E}^3$  e  $B = (3, -2, 6) \in \mathbb{E}^3$ .

*Resolução:* O vetor diretor da reta  $r$  é dado por  $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2, 3)$ . Assim, uma equação vetorial de  $r$  é dada por:

$$r : X = (1, 0, 3) + \lambda(2, -2, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considerando  $X = (x, y, z)$ , temos  $(x, y, z) = (1 + 2\lambda, 0 - 2\lambda, 3 + 3\lambda)$ , que pode ser representado pela equação paramétrica por:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 - 2\lambda, & \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$$

Por fim, isolando  $\lambda$  em cada igualdade anterior, temos a equação simétrica da reta, dada por:

$$r : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 0}{-2} = \frac{z - 3}{3}.$$

É importante ressaltar que as equações do plano, assim como as da reta, não são únicas, ou seja, dependendo dos pontos e vetores escolhidos, teremos equações numericamente equivalentes umas as outras.

Daremos prioridade daqui por diante em trabalhar com a forma vetorial da reta, pois dessa forma podemos aplicar as definições trabalhadas no Capítulo 2.

### 2.7.2 Posição Relativa Entre Retas

Assim como fazemos no plano, podemos determinar qual a posição entre duas retas no espaço. Intuitivamente, podemos dizer que ou duas retas tem a mesma direção ou

não tem. Se tiverem, ou elas são coincidentes, ou paralelas; se não tiverem, ou elas se intersectam ou não se intersectam. Assim, a mudança principal é que temos uma nova possibilidade, chamado de retas reversas, como explanado na definição a seguir.

**Definição 2.28.** Considere duas retas  $r$  e  $s$  com vetores diretores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente. Com relação a posição relativa entre as duas retas, temos que:

- $r$  e  $s$  são paralelas coincidentes se, e somente se,  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  e  $r \cap s \neq \emptyset$ ;
- $r$  e  $s$  são paralelas distintas se, e somente se,  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  e  $r \cap s = \emptyset$ ;
- $r$  e  $s$  são concorrentes se, e somente se,  $\vec{u} \nparallel \vec{v}$  e  $r \cap s \neq \emptyset$ ;
- $r$  e  $s$  são reversas se, e somente se,  $\vec{u} \nparallel \vec{v}$  e  $r \cap s = \emptyset$ .

---

**Exemplo 2.9.** Determine a posição relativa entre as retas  $r : X = (1, 2, 3) + \lambda(-2, 0, 1)$  e  $s : X = (3, 3, 3) + \lambda(6, 0, -3)$ .

*Resolução:* Como  $(6, 0, -3) = -3 \cdot (-2, 0, 1)$ , os vetores diretores são paralelos, logo as retas são paralelas coincidentes ou distintas. Agora verificaremos se um ponto  $A = (1, 2, 3) \in r$  pertence também a  $s$ , ou seja, se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$(1, 2, 3) = (3, 3, 3) + \lambda(6, 0, -3).$$

Manipulando a equação, anterior, temos:

$$\begin{cases} 1 = 3 + 6\lambda \\ 2 = 3 + 0\lambda, \\ 3 = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

o que claramente não tem solução pela segunda equação.

Portanto  $r$  e  $s$  são paralelas distintas.

---



---

**Exemplo 2.10.** Determine a posição relativa entre as retas  $r : X = (1, 2, 3) + \lambda(-2, 0, 1)$  e  $s : X = (3, 3, 3) + \lambda(4, 1, -1)$ .

*Resolução:* Como não existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $(4, 1, -1) = \alpha(-2, 0, 1)$ , os vetores diretores não são paralelos, logo as retas são reversas ou concorrentes. Agora verificaremos se existe um ponto  $\{A\} = r \cap s$ , ou seja, se existem  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tal que:

$$(1, 2, 3) + \lambda_1(-2, 0, 1) = (3, 3, 3) + \lambda_2(4, 1, -1).$$

Manipulando a equação, anterior, temos:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda_1 = 3 + 4\lambda_2 \\ 2 = 3 + \lambda_2, \\ 3 + \lambda_1 = 3 - \lambda_2 \end{cases}$$

o que resulta em  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ .

Portanto,  $r$  e  $s$  são concorrentes e o ponto de intersecção é  $A = (1, 2, 3) + 1 \cdot (-2, 0, 1) = (3, 3, 3) - 1 \cdot (4, 1, -1) = (-1, 2, 4)$ .

---

## 2.8 PLANOS

### 2.8.1 Equações de Plano

Dos postulados da Geometria Espacial, sabemos que duas retas concorrentes  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  determinam um plano  $\pi$ . Sejam  $\vec{u} \equiv \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} \equiv \overrightarrow{AC}$  e  $X$  um ponto qualquer pertencente a  $\pi$ . Como  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\overrightarrow{AX}$  são paralelos ao plano  $\pi$ , então, de acordo com a definição 2.10,  $\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AX}\}$  é LD. Ou seja, existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que:

$$\overrightarrow{AX} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}.$$

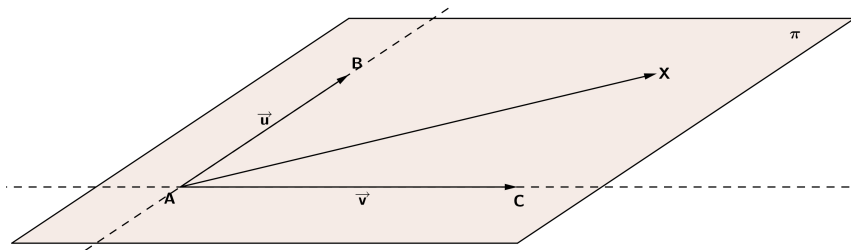


Figura 37: Plano determinado por duas retas.

Como  $\overrightarrow{AX} = X - A$ , podemos substituir na relação anterior, encontrando a **equação vetorial do plano  $\pi$** :

$$\pi : X = A + \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

sendo  $\overrightarrow{u}$  e  $\overrightarrow{v}$  os **vetores diretores** do plano  $\pi$ .

Considere agora  $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $A = (x_0, y_0, z_0)$ . Um ponto  $X = (x, y, z) \in \pi$  pode ser escrito como:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3),$$

ou ainda, como:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2, & \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases} \quad (2.14)$$

que é denominada **equação paramétrica do plano**.

Além disso, como  $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AX}\}$  é LD, de acordo com o Teorema 2.17, temos

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0, \\ & \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_a x + \underbrace{\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}}_b y + \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_c z - \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} x_0 - \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} y_0 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} z_0}_d = 0, \\ & ax + by + cz + d = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

que é chamada **equação geral do plano**.

Note que  $(a, b, c) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ , assim, os coeficientes da equação geral do plano nos fornecem as coordenadas do **vetor normal** ao plano  $\pi$ . Note que, se um ponto  $A$  pertence a  $\pi$ , então podemos reescrever a equação geral do plano como  $\overrightarrow{OA} \bullet \vec{n} + d = 0$ .



A seguir, veremos exemplo de como podemos manipular as diferentes equações do plano.

**Exemplo 2.11.** Dados  $A = (1, 0, 2)$ ,  $B = (-1, 2, 1)$  e  $C = (2, 2, 2)$  pontos de  $\mathbb{E}^3$ , mostre que os pontos não estão alinhados e, em seguida, determine uma equação vetorial, paramétrica e geral do plano determinado por esses pontos.

*Resolução:* Como  $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -1)$  e  $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 0)$  são vetores não paralelos (pois não há  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $(-2, 2, -1) = \lambda \cdot (1, 2, 0)$ ), os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados.

Uma equação vetorial do plano  $\pi$  que passa por esses pontos é dada por:

$$\pi : X = (1, 0, 2) + \alpha(-2, 2, -1) + \beta(1, 2, 0) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sendo  $X = (x, y, z)$ , podemos reescrever a equação anterior da forma paramétrica:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 0 + 2\alpha + 2\beta, \\ z = 2 - \alpha \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

A equação geral do plano é dada por:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1) \cdot 2 + y \cdot (-1) + (z-2) \cdot (-6) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 6z + 10 = 0.$$

**Exemplo 2.12.** Determine a equação vetorial e paramétrica do plano  $\pi : x + 2y + z - 2 = 0$ .

*Resolução:* Neste caso, podemos determinar quaisquer três pontos não alinhados e repetir o procedimento do último exemplo. Assim, para:

- $x = 0$  e  $y = 0$ , temos o ponto  $A = (0, 0, 2)$ ;
- $x = 0$  e  $z = 0$ , temos o ponto  $B = (0, 1, 0)$ ;
- $y = 0$  e  $z = 0$ , temos o ponto  $C = (2, 0, 0)$ .

Logo,  $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -2)$  e  $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$ , que são dois vetores não paralelos. Portanto,  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados.

Uma equação vetorial do plano é dada por:

$$\pi : X = (0, 0, 2) + \alpha(0, 1, -2) + \beta(2, 0, -2) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sendo  $X = (x, y, z)$ , podemos reescrever a equação anterior da forma paramétrica:

$$\pi : \begin{cases} x = 2\beta \\ y = \alpha, \\ z = 2 - 2\alpha - 2\beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

### 2.8.2 Posição Relativa Entre Reta e Plano

Ao compararmos a posição de uma reta e um plano, intuitivamente podemos dizer que ou a reta intersecta o plano ou não o intersecta. Se ela intersecta, ou a faz em um ponto ou em todos os pontos (ou seja, está contida no plano). Formalmente, as definições são dadas a seguir.

**Definição 2.29.** Em um sistema ortonormal, considere a reta  $r$  com vetor diretor  $\overrightarrow{v}$  e o plano  $\pi$  com vetor normal  $\overrightarrow{n}$ . Quanto a posição relativa entre a reta e o plano, temos:

- $r$  é transversal a  $\pi$  se os vetores  $\overrightarrow{v}$  e  $\overrightarrow{n}$  são não perpendiculares;
- $r$  é paralelo a  $\pi$  se os vetores  $\overrightarrow{v}$  e  $\overrightarrow{n}$  são perpendiculares e se  $r \cap \pi = \emptyset$ ;
- $r$  está contido em  $\pi$  se os vetores  $\overrightarrow{v}$  e  $\overrightarrow{n}$  são perpendiculares e se  $r \cap \pi = r$ .

**Exemplo 2.13.** Mostre que a reta  $r : X = (2, 0, -1) + \lambda(1, 3, -4)$  é transversal ao plano  $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$ . Determine a intersecção.

*Resolução:* Primeiramente vamos mostrar que o vetor diretor da reta  $\overrightarrow{v} = (1, 3, -4)$  não é perpendicular ao vetor normal  $\overrightarrow{n} = (1, 2, 3)$  do plano. De fato, pela definição 2.4.1,  $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -5 \neq 0$ , então os vetores são não perpendiculares.

Considere agora um ponto genérico da reta  $r$  dado por  $X = (x, y, z) = (2 + \lambda, 0 + 3\lambda, -1 - 4\lambda)$ . Substituindo as coordenadas do ponto no plano, temos:

$$2 + \lambda + 2 \cdot (0 + 3\lambda) + 3 \cdot (-1 - 4\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Assim, a intersecção da reta com o plano é dada por  $X = (2, 0, 1) - 1 \cdot (1, 3, -4) = (1, -3, 3)$ .

---



---

**Exemplo 2.14.** Determine a posição relativa entre a reta  $r : X = (0, 1, 2) + \lambda(1, 0, -1)$  e o plano  $\pi : x - 3y + z + 1 = 0$ .

*Resolução* Primeiramente vamos mostrar que o vetor diretor da reta  $\vec{v} = (1, 0, -1)$  é perpendicular ao vetor normal  $\vec{n} = (1, -3, 1)$  do plano. De fato, pela definição 2.4.1,  $\vec{v} \bullet \vec{n} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = 0$ , então os vetores são perpendiculares.

Agora basta ver se um ponto qualquer de  $r$  pertence a  $\pi$ . Testando  $A = (0, 1, 2)$ , temos  $0 - 3 \cdot 1 + 2 - 1 = 0$ , ou seja,  $A \in \pi$ .

Portanto,  $r$  está contida em  $\pi$ .

---

### 2.8.3 Posição Relativa Entre Dois Planos

A posição relativa entre dois planos segue o mesmo raciocínio da posição entre retas, ou seja, dois planos no espaço podem se intersectar ou não. Se o fazem, podem se intersectar em uma reta ou em todos os pontos; se não, são paralelos.

As definições formais a seguir são de fundamental importância para compreendermos as reflexões com relações a planos.

**Definição 2.30.** Considere dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  de vetores normais  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$ , respectivamente. Quanto a posição relativa entre os planos, temos:

- $\pi_1$  e  $\pi_2$  são concorrentes se  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são não paralelos, ou seja,  $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$  é LI;

- $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos se  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são paralelos, ou seja,  $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$  é LD. Além disso, se  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ , dizemos que  $\pi_1$  é paralelo distinto a  $\pi_2$  e, se  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ , dizemos que  $\pi_1$  é coincidente a  $\pi_2$ .

**Proposição 2.31.** *Considere dois planos distintos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  de vetores normais  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$ , respectivamente. Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são concorrentes, então a intersecção será uma reta com vetor diretor  $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ .*

*Demonstração.* Dos postulados da Geometria Espacial, sabemos que a intersecção de dois planos concorrentes é uma reta. Seja  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .

Como  $r$  pertence a  $\pi_1$ , então  $r$  tem vetor diretor perpendicular a  $\vec{n}_1$ . Analogamente, como  $r$  pertence a  $\pi_2$ , então  $r$  tem vetor diretor perpendicular a  $\vec{n}_2$ . Portanto, pela definição 2.4.2,  $r$  tem vetor diretor paralelo a  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ .  $\square$

---

**Exemplo 2.15.** Analise a posição relativa entre a reta  $r$ , intersecção dos planos  $x - y + 2z = 0$  e  $3x + y - 2z + 4 = 0$ , com o plano  $\pi : -x + y - 2z - 9 = 0$ .

*Resolução* A reta  $r$  é determinada pela intersecção de dois planos, com vetores normais iguais a  $(1, -1, 2)$  e  $(3, 1, -2)$ . Assim, o vetor diretor da reta  $r$  é  $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0, 8, 4)$ . Como  $(-1, 1, -2) \bullet (0, 8, 4) = 0$ , o vetor diretor da reta é perpendicular ao vetor normal ao plano, ou seja,  $r \parallel \pi$ .

Agora, vamos verificar se  $r$  está contida em  $\pi$ . Para isso, basta pegar um ponto qualquer de  $r$  e ver se ele pertence a  $\pi$ . Tomando, por exemplo,  $z = 0$  no sistema acima, temos  $x = -1$  e  $y = -1$ . Como  $(-1, -1, 0) \notin \pi$  pois  $-(-1) + (-1) - 2 \cdot 0 - 9 \neq 0$ ,  $r$  é paralela mas não está contida em  $\pi$ .

---

#### 2.8.4 Distância Entre Planos

Nessa seção explicitaremos como é calculado a distância entre dois planos, que será de grande serventia ao estudarmos as reflexões com relação a planos. Primeiramente,

definiremos formalmente como é medido essa distância e então, deduziremos uma expressão para ela.

**Definição 2.32.** A distância entre dois planos distintos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é:

- 0, se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  forem planos concorrentes;
- $AA'$ , sendo  $A$  um ponto qualquer de  $\pi_1$  e  $A'$  a projeção ortogonal de  $A$  em  $\pi_2$ , se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  forem planos paralelos.

A distância  $d$  entre dois planos paralelos distintos  $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$  e  $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$  é dada por

$$d = \frac{|d_2 - d_1|}{\|\vec{n}\|}. \quad (2.16)$$

Para encontrarmos essa expressão, consideremos um ponto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  qualquer pertencente a  $\pi_1$ . Um ponto da reta perpendicular a  $\pi_1$  por  $A$  é do tipo  $(x_A + \lambda \cdot a, y_A + \lambda \cdot b, z_A + \lambda \cdot c)$  para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A projeção ortogonal de  $A$  em  $\pi_2$  pertence tanto a reta quanto ao plano, logo:

$$a \cdot (x_A + \lambda \cdot a) + b \cdot (y_A + \lambda \cdot b) + c \cdot (z_A + \lambda \cdot c) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-(a \cdot x_A + b \cdot y_A + c \cdot z_A + d_2)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{-(d_1 + d_2)}{\|\vec{n}\|^2}.$$

Logo  $A' = A + \frac{(d_2 - d_1)}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$ . Portanto  $\overrightarrow{A'A} = \frac{(d_2 - d_1)}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$  e

$$A'A = \frac{|d_2 - d_1|}{\|\vec{n}\|^2} \|\vec{n}\| = \frac{|d_2 - d_1|}{\|\vec{n}\|}.$$

### 2.8.5 Ângulo Entre Planos

A determinação do ângulo entre dois planos concorrentes é um conceito que utilizaremos ao falarmos de reflexão com relação a planos. Para isso, transformaremos esse problema para a determinação do ângulo entre duas retas, que nada mais é que o ângulo agudo formado entre os vetores diretores destas retas, como definido a seguir.

**Definição 2.33.** Definimos o ângulo  $\theta$  entre dois planos concorrentes  $\pi_1$  e  $\pi_2$  como o ângulo entre duas retas  $r_1 \subset \pi_1$  e  $r_2 \subset \pi_2$ , ambas perpendiculares a intersecção destes planos.

É possível perceber que o ângulo agudo formado entre dois planos não paralelos possui mesma medida que o ângulo agudo formado entre seus vetores normais, que pode ser calculado pela relação encontrada em 2.3.

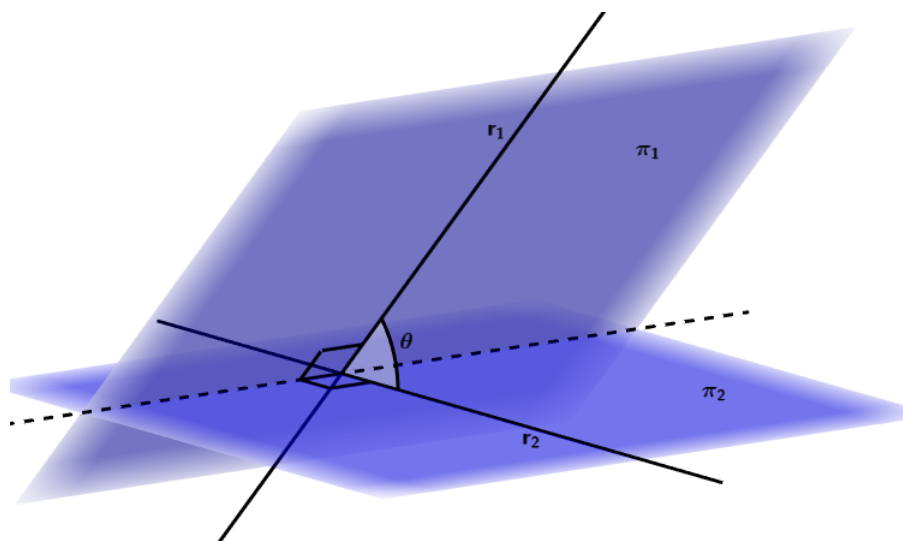


Figura 38: Ângulo entre planos.

---

## ISOMETRIAS NO ESPAÇO

---

### 3.1 TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Nessa seção, introduziremos informalmente o conceito de transformações geométricas, que nada mais são do que mudanças que podemos fazer em figuras geométricas.

Algumas transformações preservam a distância entre dois pontos, outras preservam o ângulo entre duas retas e outras preservam a distância entre dois pontos quaisquer. Para entendermos melhor as transformações que estudaremos, tomamos como base uma representação do mapa do Brasil abaixo:



Figura 39: Representação do mapa do Brasil. Fonte: página do Wikipédia [15].

Podemos fazer uma **translação** da figura acima algumas unidades para a direita e para cima, mantendo a distância entre dois pontos quaisquer da figura:

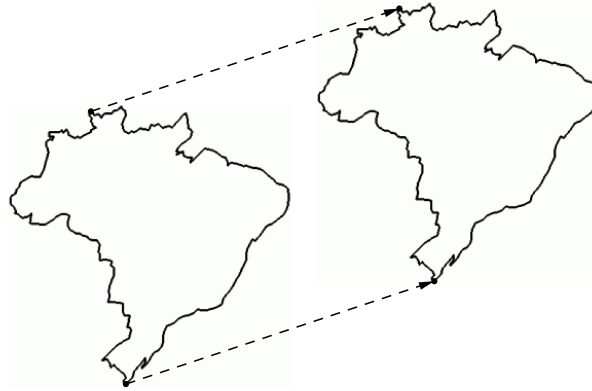


Figura 40: Exemplo de translação.

Podemos também fazer uma **rotação** da figura acima em alguns graus no sentido anti-horário, mantendo a distância entre dois pontos quaisquer da figura:

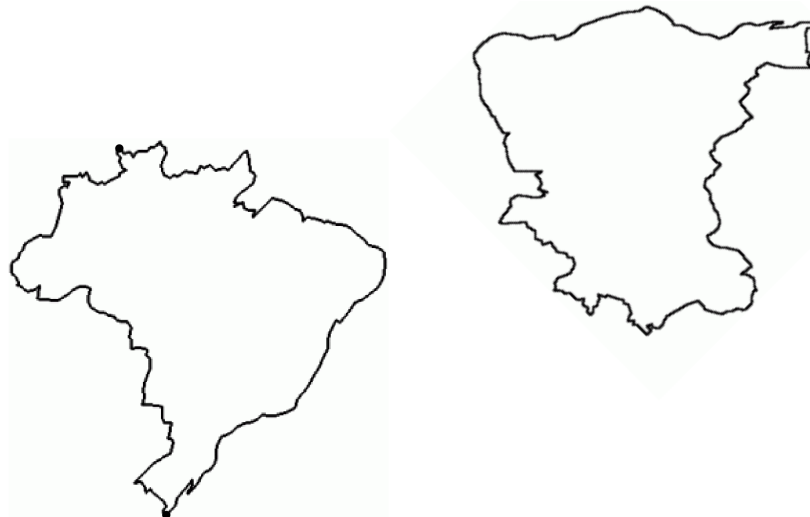


Figura 41: Exemplo de rotação.

Uma outra transformação que podemos fazer na figura original é a **reflexão** em torno de uma reta, ainda mantendo a distância entre dois pontos quaisquer da figura:



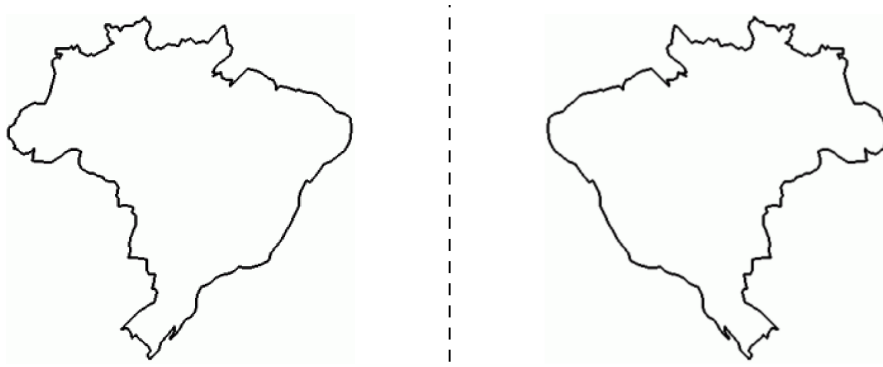


Figura 42: Exemplo de reflexão.

Podemos ampliar/reduzir a figura por meio de uma **dilatação**. Nesse caso, a distância entre dois pontos não se conserva:



Figura 43: Exemplo de dilatação.

Esses são apenas alguns exemplos de transformações que podemos fazer no **plano**. A seguir, introduziremos formalmente os conceitos necessários para entendermos as transformações no **espaço**.

### 3.2 TRANSFORMAÇÕES NO ESPAÇO

Antes de estudarmos isometrias, vamos brevemente falar sobre um conceito mais amplo, que são as **transformações** no espaço. Elas podem ser entendidas como funções bijetoras aplicadas ao conjunto de todos os pontos do espaço euclidiano  $E^3$ , tendo como imagem também todo o conjunto  $E^3$ . Convencionaremos que o conjunto de todas as transformações é denotado por  $\mathbb{T}(E^3)$ .

O fato de trabalharmos com bijeções nos permite estudar a composição e a inversão das transformações, o que faremos a seguir.

**Teorema 3.1.** *Uma aplicação  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  é uma bijeção se, e somente se,  $\varphi$  tem inversa.*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ ): Seja  $B \in \mathbb{E}^3$  um ponto qualquer. Como  $\varphi$  é sobrejetiva, existe  $A \in \mathbb{E}^3$  tal que  $\varphi(A) = B$ . Como  $\varphi$  é injetiva, então  $A$  é único. Seja  $\sigma : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  a aplicação definida por  $\sigma(B) = A$  se e somente se  $\varphi(A) = B$ . Desse modo,  $\sigma$  é a inversa de  $\varphi$ .

Note também que  $\sigma(\varphi(A)) = \sigma(B) = A$  e  $\varphi(\sigma(B)) = \varphi(A) = B$ . Logo,  $\sigma = \varphi^{-1}$ .

( $\Leftarrow$ ): Por definição,  $\forall B \in \mathbb{E}^3$ ,  $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = B$ , assim,  $\varphi$  é sobrejetiva.

Sejam  $A_1, A_2, B \in \mathbb{E}^3$ , tal que  $\varphi(A_1) = \varphi(A_2) = B$ . Assim,  $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(\varphi(A_1)) = A_1$  e  $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(\varphi(A_2)) = A_2$ . Logo,  $A_1 = A_2$ , o que implica que  $\varphi$  é injetiva.  $\square$

**Proposição 3.2.** *Sejam  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  duas transformações de  $\mathbb{T}(\mathbb{E}^3)$ . Então:*

- a)  $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \mathbb{T}(\mathbb{E}^3)$ ;
- b)  $\varphi_1^{-1} \in \mathbb{T}(\mathbb{E}^3)$ .

*Demonstração.*

a) Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos de  $\mathbb{E}^3$ . Assim,  $A \neq B \Rightarrow \varphi_2(A) \neq \varphi_2(B) \Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2(A) \neq \varphi_1 \circ \varphi_2(B)$ , pois  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são injetivas. Logo,  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  é injetiva.

Seja  $C$  um ponto de  $\mathbb{E}^3$ . Como  $\varphi_1$  é sobrejetiva, existe  $B \in \mathbb{E}^3$  tal que  $\varphi_1(B) = C$ . Como  $\varphi_2$  é sobrejetiva, existe  $A \in \mathbb{E}^3$  tal que  $\varphi_2(A) = B$ .

Logo,  $\forall C \in \mathbb{E}^3, \exists A \in \mathbb{E}^3$  tal que  $\varphi_1 \circ \varphi_2(A) = C$ . Portanto,  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  é sobrejetiva.

b) Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos de  $\mathbb{E}^3$  tais que  $\varphi_1^{-1}(A) = \varphi_1^{-1}(B) \Rightarrow \varphi_1(\varphi_1^{-1}(A)) = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(B)) \Rightarrow A = B$ , pois  $\varphi_1$  é injetiva. Logo,  $\varphi_1^{-1}$  é injetiva.

Além disso, por definição  $\forall A \in \mathbb{E}^3, \varphi_1^{-1}(\varphi_1(A)) = A$ . Portanto,  $\varphi_1^{-1}$  é sobrejetiva.  $\square$

**Definição 3.3.** Uma aplicação  $\varphi$  **preserva reta** se  $\forall r \in \Lambda(\mathbb{E}^3)$ , temos que  $\varphi(r) = r'$ , para algum  $r' \in \Lambda(\mathbb{E}^3)$ . O conjunto de todas as retas é denotado por  $\Lambda(\mathbb{E}^3)$ .

**Definição 3.4.** Uma transformação  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  que **preserva retas** é chamada de **colineação**.

**Definição 3.5.** Uma aplicação  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  **preserva distância** se  $\forall A, B \in \mathbb{E}^3, AB = A'B'$ , onde  $A' = \varphi(A)$  e  $B' = \varphi(B)$ .

Por fim, chegamos ao tema principal de nosso trabalho que são as **isometrias**. Mesmo que de definição simples, elas possuem complexidades que são muito importantes no estudo das transformações geométricas.

**Definição 3.6.** Uma isometria do espaço  $\mathbb{E}^3$  é uma transformação que preserva distância.

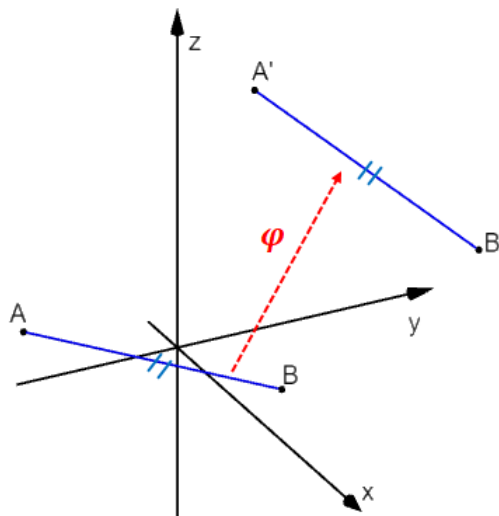


Figura 44: Isometria  $\varphi$  que leva  $\overline{AB}$  em  $\overline{A'B'}$ .

De posse da definição, estudaremos agora algumas propriedades interessantes.

**Proposição 3.7.** Sejam  $\varphi_1 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  e  $\varphi_2 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  duas isometrias no espaço. Assim:

- a) A composição  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  é uma isometria;  
 b) A inversa  $\varphi_1^{-1}$  é uma isometria.

*Demonstração.*

- a) Pela Proposição 3.2, sabemos que  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  é uma transformação. Resta mostrar que ela preserva distância.

Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos quaisquer de  $\mathbb{E}^3$ , com  $\varphi_2(A) = A'$ ,  $\varphi_1(A') = A''$ ,  $\varphi_2(B) = B'$  e  $\varphi_1(B') = B''$ . Notemos que  $\varphi_1 \circ \varphi_2(A) = \varphi_1(\varphi_2(A)) = \varphi_1(A') = A''$  e  $\varphi_1 \circ \varphi_2(B) = \varphi_1(\varphi_2(B)) = \varphi_1(B') = B''$ . Como  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  preservam distância, então  $AB = A'B' = A''B''$ .

- b) Pela Proposição 3.2, sabemos que  $\varphi_1^{-1}$  é uma transformação. Resta mostrar que ela preserva distância.

Sejam  $A$  e  $B$  pontos quaisquer de  $\mathbb{E}^3$ , com  $A' = \varphi_1^{-1}(A)$  e  $B' = \varphi_1^{-1}(B)$ . Assim,  $\varphi_1(A') = A$  e  $\varphi_1(B') = B$ . Como  $\varphi_1$  preserva distância, então  $AB = A'B'$ .

□

**Exemplo 3.1.** Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{E}^3 &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta + h, x \sin \theta + y \cos \theta + k, z + p) \end{aligned}$$

é uma isometria.

*Resolução:* Para provar que  $\varphi$  é uma bijeção, basta provar que possui inversa.

Seja  $\varphi(x, y, z) = (x', y', z')$ . É possível mostrar que o sistema

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + h \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + k \\ z' = z + p \end{cases}$$

nas incógnitas  $x, y$  e  $z$  possui solução e faremos isso utilizando, sem explicações detalhadas, uma abordagem matricial.

Note que o sistema abaixo pode ser representado como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \\ p \end{pmatrix},$$

e rearranjando, temos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} x' - h \\ y' - k \\ z' - p \end{pmatrix}}_B.$$

Portanto, temos  $X = A^{-1} \cdot B$ . Como  $\det A = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0$ , a matriz  $A$  possui inversa  $A^{-1} = \frac{(\text{cof}(A))^t}{\det A}$ . Assim

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{\begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc|c} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| & - & \left| \begin{array}{cc|c} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| & & \left| \begin{array}{cc|c} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ - & & \left| \begin{array}{cc|c} -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| & - & \left| \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ & & \left| \begin{array}{cc|c} -\sin \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 0 \end{array} \right| & - & \left| \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{array} \right| \end{pmatrix}^t}{1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' - h \\ y' - k \\ z' - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x' - h) \cos \theta + (y' - k) \sin \theta \\ (y' - k) \cos \theta - (x' - h) \sin \theta \\ z' - p \end{pmatrix}$$

Logo, existe  $\varphi^{-1} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  que é dada por

$$\varphi^{-1}(x', y', z') = ((x' - h) \cos \theta + (y' - k) \sin \theta, (y' - k) \cos \theta - (x' - h) \sin \theta, z' - p).$$

Agora é necessário provar que  $\varphi$  preserva distância. Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B) \in \mathbb{E}^3$ , com

$$A' = \varphi(A) = (x_A \cos \theta - y_A \sin \theta + h, x_A \sin \theta + y_A \cos \theta + k, z_A + p)$$

e

$$B' = \varphi(B) = (x_B \cos \theta - y_B \sin \theta + h, x_B \sin \theta + y_B \cos \theta + k, z_B + p).$$

Assim,

$$A'B'^2 = [\cos \theta (x_A - x_B) - \sin \theta (y_A - y_B)]^2 + [\sin \theta (x_A - x_B) + \cos \theta (y_A - y_B)]^2 + (z_A - z_B)^2$$

$$A'B'^2 = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (x_A - x_B)^2 + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2$$

$$A'B'^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2.$$

**Definição 3.8.** Dizemos que um ponto  $B$  **está entre**  $A$  e  $C$  ( $A - B - C$ ) se  $A, B$  e  $C$  são pontos distintos e  $AB + BC = AC$ .

**Observação 3.2.1.** Em geral, a definição de que  $B$  está entre  $A$  e  $C$  é dada a partir das condições de que  $A, B$  e  $C$  são três pontos distintos, colineares e tais que  $AB + BC = AC$ . No entanto, no caso do espaço euclidiano  $\mathbb{E}^3$ , graças à desigualdade triangular, a colinearidade de  $A, B$  e  $C$  é uma consequência da condição  $AB + BC = AC$ . De fato, caso  $A, B$  e  $C$  não fossem colineares, eles determinariam o triângulo  $\triangle ABC$ . Neste caso, valeria a desigualdade triangular  $AB + BC > AC$ , que estaria em contradição com  $AB + BC = AC$ .

**Teorema 3.9.** Seja  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  uma isometria. Então:

- a)  $\varphi$  preserva a relação de "estar entre", isto é, se  $A - B - C$  então  $A' - B' - C'$ , com  $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B)$  e  $C' = \varphi(C)$ . Em particular,  $\varphi$  preserva a colinearidade de pontos.
- b)  $\varphi$  é uma colineação.

*Demonstração.*

- a) Como  $\varphi$  é injetiva, então  $A', B'$  e  $C'$  são pontos distintos.

Como  $\varphi$  é isometria, então  $A'B' = AB, B'C' = BC$  e  $A'C' = AC$ . De  $AB + BC = AC$  temos que  $A'B' + B'C' = A'C'$ . Segue da Observação (3.2.1) que  $\varphi$  preserva a colinearidade de pontos.

- b) Seja  $r \in \Lambda(\mathbb{E}^3)$  uma reta qualquer. Tomamos  $A, B, C$  três pontos distintos sobre  $r$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $A - B - C$ . Sendo  $A' = \varphi(A)$ ,

$B' = \varphi(B)$  e  $C' = \varphi(C)$ , segue do item a) que  $A' - B' - C'$ . Desse modo, sendo  $r' = \overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{B'C'} = \overleftrightarrow{A'C'}$ , temos que  $\varphi(r) \subset r'$ . Agora, seja  $P'$  um ponto qualquer de  $r'$ , distinto de  $A', B'$  e  $C'$ . Como  $\varphi$  é sobrejetiva, existe  $P \in \mathbb{E}^3$  tal que  $\varphi(P) = P'$ . Como  $\varphi^{-1}$  é isometria,  $P', A'$  e  $B'$  são colineares,  $\varphi^{-1}(P') = P$ ,  $\varphi^{-1}(A') = A$  e  $\varphi^{-1}(B') = B$ , concluímos que  $P, A$  e  $B$  são colineares, de modo que  $P \in r$ . Assim,  $r' \subset \varphi(r)$ . Portanto,  $\varphi(r) = r'$ .

Dado  $P \in r$ , com  $P \neq A$  e  $P \neq B$ , vale uma das condições:  $P - A - B$ ,  $A - P - B$  ou  $A - B - P$ . Por (a), segue que  $P' - A' - B'$ ,  $A' - P' - B'$  ou  $A' - B' - P'$ , onde  $P' = \varphi(P)$ . Em qualquer caso,  $P' \in \overleftrightarrow{A'B'} = r'$ , sendo  $r'$  a reta que contém  $A'$  e  $B'$ .

Portanto,  $\varphi(S) \subset \varphi(r) \subset r' \Rightarrow \varphi(r)$  é reta.

□

**Teorema 3.10.** *Seja  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  uma isometria. Então  $\varphi$  preserva a medida angular; isto é,  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{A'B'C'})$ , com  $A' = \varphi(A)$ ,  $B' = \varphi(B)$  e  $C' = \varphi(C)$ .*

*Demonstração.* Como  $\varphi$  preserva a distância, temos que  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  e  $BC = B'C'$ . Ou seja,  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  e  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ . Segue do caso lado-lado-lado de congruência de triângulos que  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , com relação à correspondência  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  entre seus vértices. Em particular, temos que  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{A'B'C'})$ . □

**Definição 3.11.** Diz-se que  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  fixa um ponto  $A$  se  $\varphi(A) = A$ . Neste caso, diz-se que  $A$  é um **ponto fixo** de  $\varphi$ .

Diz-se que  $\varphi$  fixa um conjunto  $X$  ponto a ponto se  $\varphi(A) = A$  para qualquer  $A \in X$ .

**Exemplo 3.2.** Seja  $\varphi(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$ , com  $0 < \theta < 2\pi$ . Determine os pontos fixos de  $\varphi$ .

*Resolução:* Seja  $A = (x, y, z)$  um ponto fixo de  $\varphi$ . Assim:

$$\begin{cases} x = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z = z \end{cases} .$$

Note que  $z$  é uma incógnita livre do problema, ou seja,  $z$  pode ser qualquer número. Rearranjando as duas primeiras equações, temos:

$$\begin{cases} x(1 - \cos \theta) = -y \sin \theta \\ y(1 - \cos \theta) = x \sin \theta \end{cases}$$

Note que se  $x = y = 0$ , o sistema está resolvido. Supondo  $x \cdot y \neq 0$ , multiplicaremos a primeira equação por  $y$  e a segunda por  $x$ , obtendo

$$\begin{cases} xy(1 - \cos \theta) = -y^2 \sin \theta \\ xy(1 - \cos \theta) = x^2 \sin \theta \end{cases}$$

o que resulta em  $-y^2 \sin \theta = x^2 \sin \theta$ , ou seja,  $\sin \theta \cdot (x^2 + y^2) = 0$ . Aqui temos duas possibilidades: ou  $\sin \theta = 0$  (implicando, pelo sistema inicial, que  $\cos \theta = 1$ ), o que é impossível já que  $0 < \theta < 2\pi$ , ou  $x^2 + y^2 = 0$ , implicando que  $x = y = 0$ .

Assim, os pontos fixos são do tipo  $(0, 0, z)$ , ou seja, o próprio eixo  $z$ .

---

**Teorema 3.12.** *Seja  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  uma isometria. Se  $\varphi$  fixa dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , então  $\varphi$  fixa  $\overleftrightarrow{AB}$  ponto a ponto.*

*Demonstração.* Seja  $P \in \overleftrightarrow{AB}$  com  $P \neq A$  e  $P \neq B$ . Então, ou  $A - P - B$ , ou  $P - A - B$  ou  $A - B - P$ .

Suponhamos que  $A - P - B$  e seja  $\varphi(P) = P'$ . Como  $\varphi$  preserva "estar entre", então  $A - P' - B$ . Além disso, como  $\varphi$  preserva distância, então  $AP = AP'$ . Logo,  $P' = P$ .

Os outros casos são análogos. □

**Definição 3.13.** Uma isometria que fixa todos os pontos em  $\mathbb{E}^3$  é a identidade, definida por  $Id(x, y, z) = (x, y, z)$ .

**Definição 3.14 (Plano Mediador).** O lugar geométrico dos pontos no espaço que são equidistantes de dois pontos dados  $P$  e  $Q$  em  $\mathbb{E}^3$  é o plano perpendicular a  $\overline{PQ}$ , passando pelo seu ponto médio.



**Teorema 3.15.** *Seja  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  uma isometria. Se  $\varphi$  fixa quatro pontos não coplanares, então  $\varphi$  é a identidade.*

*Demonstração.* Sejam  $A, B, C$  e  $D$  quatro pontos não coplanares tais que  $\varphi(A) = A$ ,  $\varphi(B) = B$ ,  $\varphi(C) = C$  e  $\varphi(D) = D$ . Suponha, por absurdo, que  $\varphi \neq Id$ . Logo, existe  $P \in \mathbb{E}^3$  tal que  $\varphi(P) = Q$ , com  $P \neq Q$ . Como  $\varphi$  é isometria, então  $AP = AQ$ ,  $BP = BQ$ ,  $CP = CQ$  e  $DP = DQ$ . Ou seja,  $A, B, C$  e  $D$  equidistam de  $P$  e  $Q$ , logo, pertencem ao plano mediador de  $\overline{PQ}$ , o que é absurdo, pois  $A, B, C$  e  $D$  são não coplanares.  $\square$

**Teorema 3.16.** *Sejam  $\varphi_1 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  e  $\varphi_2 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  isometrias. Se  $\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$ ,  $\varphi_1(B) = \varphi_2(B)$ ,  $\varphi_1(C) = \varphi_2(C)$  e  $\varphi_1(D) = \varphi_2(D)$ , onde  $A, B, C$  e  $D$  são não coplanares. Então  $\varphi_1 = \varphi_2$ .*

*Demonstração.* Sabemos que  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  é uma isometria. Logo

$$\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)(A) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(A)) = \varphi_2^{-1}(\varphi_2(A)) = \left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_2\right)(A) = Id(A) = A.$$

Analogamente, temos  $\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)(B) = B$ ,  $\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)(C) = C$  e  $\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)(D) = D$ . Logo, pelo Teorema 3.15,  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = Id$ . Portanto,

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = Id \Leftrightarrow \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ Id \Leftrightarrow Id \circ \varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

$\square$

A seguir, veremos todas as isometrias no espaço.

### 3.3 REFLEXÕES

Uma reflexão pode ser entendida informalmente como uma transformação no espaço que espelha uma figura geométrica. Esse espelhamento pode ser feito em torno de um ponto, de uma reta ou de um plano.

Iremos estudar estas três reflexões utilizando coordenadas.

## 3.3.1 Reflexão em Relação a um Ponto

**Definição 3.17.** Uma reflexão  $\sigma_M : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  de um ponto  $A \in \mathbb{E}^3$  arbitrário em relação a um ponto  $M \in \mathbb{E}^3$  fixado é uma aplicação no espaço tal que:

- $\sigma_M(M) = M$ ;
- $\sigma_M(A) = A'$ , sendo  $M$  o ponto médio de  $\overline{AA'}$ .

Pela definição acima e pela Proposição 2.27, sabemos que a reflexão de um ponto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  com relação a um ponto  $M = (x_M, y_M, z_M)$  resulta no ponto

$$A' = (2x_M - x_A, 2y_M - y_A, 2z_M - z_A). \quad (3.1)$$

O Teorema a seguir garante que, de fato,  $\sigma_M$  é uma isometria.

**Teorema 3.18.** Uma reflexão  $\sigma_M : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  em relação a um ponto  $M$  é uma isometria.

*Demonstração.* Notemos que  $\sigma_M$  é uma involução do espaço, isto é,  $(\sigma_M)^2 = \text{Id}$ , donde temos que  $\sigma_M$  é inversível e  $(\sigma_M)^{-1} = \sigma_M$ . Portanto, uma reflexão com relação a um ponto é uma transformação do espaço. Vamos provar que essa transformação preserva distância.

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $B = (x_B, y_B, z_B)$  e  $M = (x_M, y_M, z_M)$ , com  $\sigma_M(A) = A'$  e  $\sigma_M(B) = B'$ . Pela Proposição 2.27, temos que  $A' = (2x_M - x_A, 2y_M - y_A, 2z_M - z_A)$  e  $B' = (2x_M - x_B, 2y_M - y_B, 2z_M - z_B)$ . Pelo Teorema 2.5, temos:

$$A'B'^2 = (2x_M - x_A - (2x_M - x_B))^2 + (2y_M - y_A - (2y_M - y_B))^2 + (2z_M - z_A - (2z_M - z_B))^2$$

$$A'B'^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = AB^2$$

□

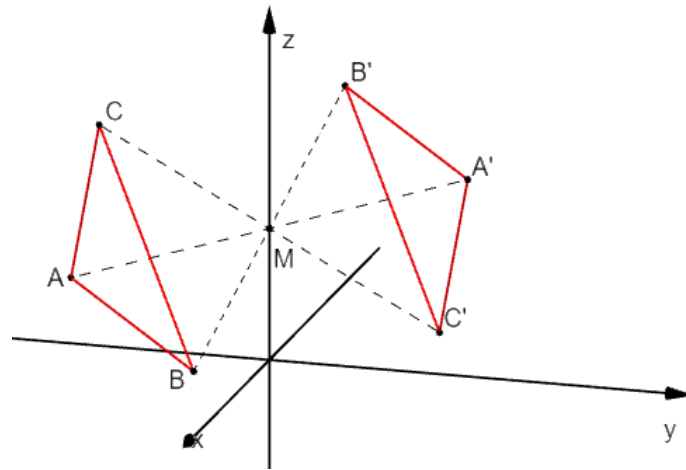


Figura 45: Reflexão de um triângulo  $\Delta ABC$  em relação a um ponto  $M$ . <https://www.geogebra.org/classic/vaxpk2sx>

Note que a composição de reflexões com relação a pontos não é comutativa, pois

$$\sigma_M \circ \sigma_N(A) = (2x_M - 2x_N + x_A, 2y_M - 2y_N + y_A, 2z_M - 2z_N + z_A)$$

enquanto

$$\sigma_N \circ \sigma_M(A) = (2x_N - 2x_M + x_A, 2y_N - 2y_M + y_A, 2z_N - 2z_M + z_A),$$

que só coincidem se  $M = N$ .

### 3.3.2 Reflexão em Relação a uma Reta

**Definição 3.19.** Uma reflexão  $\sigma_r : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  de um ponto  $A \in \mathbb{E}^3$  arbitrário em relação a uma reta  $r$  fixada de  $\mathbb{E}^3$  é uma aplicação no espaço tal que:

- $\sigma_r(A) = A$ , se  $A \in r$ ;
- $\sigma_r(A) = A'$ , sendo  $r$  a mediatriz de  $\overline{AA'}$ , se  $A \notin r$ .

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $r : X = P + \lambda \cdot \vec{u} = (x_P, y_P, z_P) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$  um ponto e uma reta qualquer, com  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

Seja  $\{M = (x_M, y_M, z_M)\} = \overline{AA'} \cap r$  o pé da perpendicular de  $A$  sobre a reta  $r$ . Primeiramente, vamos descobrir as coordenadas de  $M$  para depois fazer a reflexão  $\sigma_r(A) = \sigma_M(A) = A'$ .

Como  $M \in r$ , então  $M = (x_P + \lambda u_1, y_P + \lambda u_2, z_P + \lambda u_3)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Assim, temos  $\overrightarrow{AM} = (x_P - x_A + \lambda u_1, y_P - y_A + \lambda u_2, z_P - z_A + \lambda u_3)$ . Como  $\overrightarrow{AM} \perp r$ , temos:

$$\overrightarrow{AM} \bullet \vec{u} = 0$$

$$u_1(x_P - x_A + \lambda u_1) + u_2(y_P - y_A + \lambda u_2) + u_3(z_P - z_A + \lambda u_3) = 0$$

$$\lambda = \frac{u_1(x_A - x_P) + u_2(y_A - y_P) + u_3(z_A - z_P)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Logo:

$$M = \left( x_P + \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_1, y_P + \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_2, z_P + \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_3 \right).$$

Pela Proposição 2.7, temos que

$$A' = \left( 2x_P + 2 \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_1 - x_A, 2y_P + 2 \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_2 - y_A, 2z_P + 2 \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_3 - z_A \right).$$

Em particular, se  $A \in r$ , temos que  $\overrightarrow{PA} = \alpha \vec{u}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , isto é,  $(x_A - x_P, y_A - y_P, z_A - z_P) = \alpha(u_1, u_2, u_3)$ . Logo,  $\frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PA}}{\|\vec{u}\|^2} = \alpha$  e  $A' = A$ .

**Teorema 3.20.** Uma reflexão  $\sigma_r : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  em relação a uma reta  $r$  de  $\mathbb{E}^3$  é uma isometria.

*Demonstração.* Notemos que  $\sigma_r$  é uma involução do espaço, isto é,  $(\sigma_r)^2 = \text{Id}$ , donde temos que  $\sigma_r$  é inversível e  $(\sigma_r)^{-1} = \sigma_r$ . Portanto, uma reflexão com relação a uma reta é uma transformação. Vamos provar que essa transformação preserva distância.

Seja  $B'$  a reflexão do ponto  $B = (x_B, y_B, z_B)$  com relação à mesma  $r$  anterior. Sabemos que

$$B' = \left( 2x_P + 2 \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PB}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_1 - x_B, 2y_P + 2 \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PB}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_2 - y_B, 2z_P + 2 \frac{\vec{u} \bullet \overrightarrow{PB}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_3 - z_B \right).$$

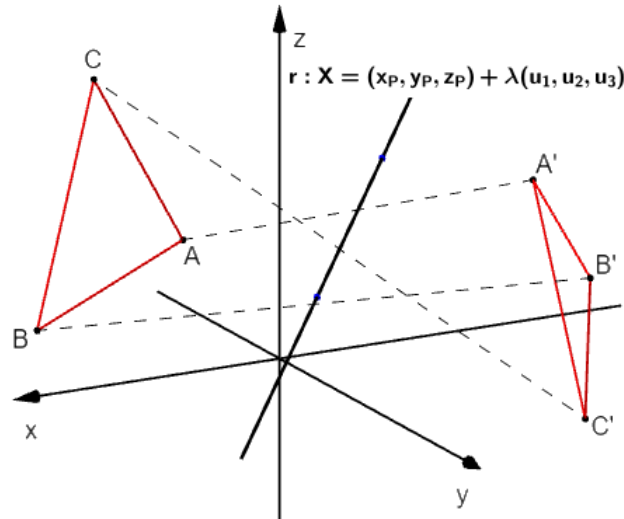


Figura 46: Reflexão de um triângulo  $\triangle ABC$  em relação a uma reta  $r$ . <https://www.geogebra.org/classic/taynpfs6>

Temos que

$$\begin{aligned}
 A'B'^2 &= \left( x_A - x_B + 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_1 \right)^2 + \left( y_A - y_B + 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_2 \right)^2 + \left( z_A - z_B + 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot u_3 \right)^2 \\
 &= \underbrace{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}_{AB^2} + 4 \frac{\vec{u} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{u}\|^2} \underbrace{(u_1(x_A - x_B) + u_2(y_A - y_B) + u_3(z_A - z_B))}_{\vec{u} \cdot \vec{BA}} + \\
 &\quad + 4 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{AB})^2}{\|\vec{u}\|^4} \underbrace{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}_{\|\vec{u}\|^2} \\
 &= AB^2 - 4 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{AB})^2}{\|\vec{u}\|^2} + 4 \frac{(\vec{u} \cdot \vec{AB})^2}{\|\vec{u}\|^2} = AB^2.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.3.** Encontre a reflexão  $\sigma_r(A)$  do ponto  $A = (-1, 0, 3)$  com relação à reta  $r : X = (1, 1, 0) + \lambda \cdot (2, 0, 3)$ .

*Resolução:* Sejam  $A' = \sigma_r(A)$  e  $\{M\} = \overline{AA'} \cap r$ . Logo,  $M = (1 + 2\lambda, 1 + 0\lambda, 0 + 3\lambda)$  e também  $\overline{AM} = (2 + 2\lambda, 1, 3\lambda - 3)$ . Como  $\overline{AM} \perp r$ , temos:

$$(2 + 2\lambda, 1, 3\lambda - 3) \cdot (2, 0, 3) = 0$$

$$4 + 4\lambda + 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{13}.$$

Assim, temos  $M = \left(\frac{23}{13}, 1, \frac{15}{13}\right)$  e  $A' = \left(\frac{59}{13}, 2, -\frac{9}{13}\right)$ .

### 3.3.3 Reflexão em Relação a um Plano

**Definição 3.21.** Uma reflexão  $\sigma_\pi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  de um ponto  $A \in \mathbb{E}^3$  arbitrário em relação a um plano  $\pi$  de  $\mathbb{E}^3$  fixado é uma aplicação no espaço de tal forma que:

- $\sigma_\pi(A) = A$ , se  $A \in \pi$ ;
- $\sigma_\pi(A) = A'$ , sendo  $\pi$  o plano mediador de  $\overline{AA'}$ , se  $A \notin \pi$ .

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  um ponto qualquer e  $A'$  sua imagem após a reflexão com relação ao plano  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ .

Seja  $\{M = (x_M, y_M, z_M)\} = \overline{AA'} \cap \pi$  a projeção ortogonal de  $A$  sobre o plano  $\pi$ . Primeiramente, vamos descobrir as coordenadas de  $M$  para depois fazer a reflexão  $\sigma_\pi(A) = \sigma_M(A) = A'$ . Para isso, traçamos uma reta  $r$  perpendicular a  $\pi$  passando por  $A$ .

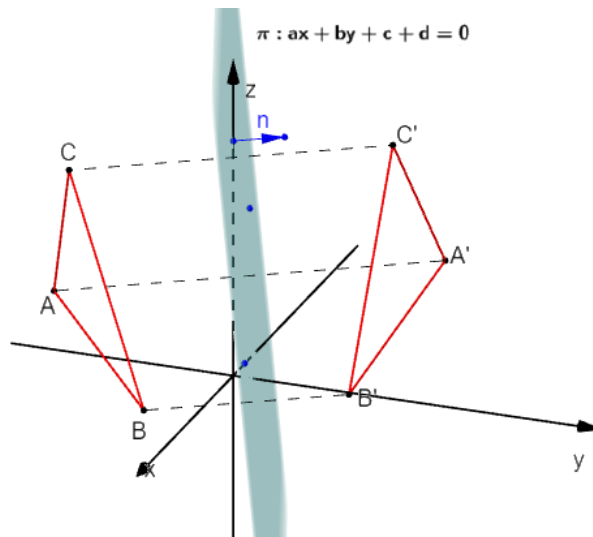


Figura 47: Reflexão de um triângulo  $\Delta ABC$  em relação a um plano  $\pi$ . <https://www.geogebra.org/classic/vbzu2f5n>

Como  $\vec{n} = (a, b, c)$  é o vetor normal ao plano  $\pi$ , então ele é o vetor diretor da reta  $r$ . Assim, esta reta tem equação  $r : X = (x_A, y_A, z_A) + \lambda \cdot (a, b, c)$ . Se  $M \in r$ , então  $M = (x_A + \lambda a, y_A + \lambda b, z_A + \lambda c)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $M \in \pi$ , assim:

$$a \cdot (x_A + \lambda a) + b \cdot (y_A + \lambda b) + c \cdot (z_A + \lambda c) + d = 0$$

$$\lambda = \frac{-(d + ax_A + by_A + cz_A)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{-(\vec{OA} \cdot \vec{n} + d)}{\|\vec{n}\|^2}.$$

Logo,

$$M = \left( x_A - \frac{a(d + ax_A + by_A + cz_A)}{\|\vec{n}\|^2}, y_A - \frac{b(d + ax_A + by_A + cz_A)}{\|\vec{n}\|^2}, z_A - \frac{c(d + ax_A + by_A + cz_A)}{\|\vec{n}\|^2} \right)$$

$$= A - \left( \frac{\vec{OA} \cdot \vec{n} + d}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n}$$

Pela Proposição 2.27, temos que

$$A' = A - 2 \left( \frac{\vec{OA} \cdot \vec{n} + d}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n}. \quad (3.2)$$

**Teorema 3.22.** *Uma reflexão  $\sigma_\pi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  em relação a um plano  $\pi$  de  $\mathbb{E}^3$  é uma isometria.*

*Demonstração.* <sup>1</sup> Notemos que  $\sigma_\pi$  é uma involução do espaço, isto é,  $(\sigma_\pi)^2 = \text{Id}$ , donde temos que  $\sigma_\pi$  é inversível e  $(\sigma_\pi)^{-1} = \sigma_\pi$ . Portanto, uma reflexão com relação a um plano é uma transformação. Vamos provar que essa transformação preserva distância.

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  dois pontos quaisquer do espaço,  $A'$  e  $B'$  as imagens de  $A$  e  $B$ , respectivamente, pela reflexão em relação a um plano  $\pi$  de equação  $ax + by + cz + d = 0$ .

Se  $A, B \in \pi$  então  $A' = A$  e  $B' = B$ , donde temos que  $A'B' = AB$ . Se  $A \in \pi$  e  $B \notin \pi$ , então  $A' = A$  e  $A'B' = AB' = AB$ , pois  $\pi$  é o plano mediador de  $\overline{BB'}$ . O mesmo ocorre se  $A \notin \pi$  e  $B \in \pi$ . Suponhamos, agora, que  $A, B \notin \pi$ . Assim,

$$A' = A - 2 \left( \frac{\vec{OA} \cdot \vec{n} + d}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n}$$

e

$$B' = B - 2 \left( \frac{\vec{OB} \cdot \vec{n} + d}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n}.$$

<sup>1</sup> Uma demonstração mais elegante pode ser encontrada em [11]

Temos que

$$\begin{aligned}
 A'B'^2 &= \left( x_B - x_A + \frac{2a(a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) + c(z_A - z_B))}{\|\vec{n}\|^2} \right)^2 + \\
 &\quad \left( y_B - y_A + \frac{2b(a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) + c(z_A - z_B))}{\|\vec{n}\|^2} \right)^2 + \\
 &\quad \left( z_B - z_A + \frac{2c(a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) + c(z_A - z_B))}{\|\vec{n}\|^2} \right)^2 = \\
 &\quad \left( x_B - x_A + \frac{2a\vec{n} \cdot \vec{BA}}{\|\vec{n}\|^2} \right) + \left( y_B - y_A + \frac{2b\vec{n} \cdot \vec{BA}}{\|\vec{n}\|^2} \right) + \left( z_B - z_A + \frac{2c\vec{n} \cdot \vec{BA}}{\|\vec{n}\|^2} \right) = \\
 &\quad \underbrace{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}_{AB^2} + 4 \frac{\vec{n} \cdot \vec{BA}}{\|\vec{n}\|^2} \underbrace{(a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A))}_{\vec{n} \cdot \vec{AB}} + \\
 &\quad + 4 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{BA})^2}{\|\vec{n}\|^4} \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{\|\vec{n}\|^2} = \\
 &\quad AB^2 - 4 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{BA})^2}{\|\vec{n}\|^2} + 4 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{BA})^2}{\|\vec{n}\|^2} = AB^2.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.4.** Encontre a reflexão  $\sigma_\pi(A)$  do ponto  $A = (0, -1, 4)$  com relação ao plano  $\pi : 3x + 4y + 10z - 15 = 0$ .

*Resolução:* Sejam  $A' = \sigma_\pi(A)$  e  $\{M\} = \overline{AA'} \cap \pi$ . Logo,  $M = (0 + 3\lambda, -1 + 4\lambda, 4 + 10\lambda)$ . Como  $M \in \pi$ , temos:

$$3 \cdot (0 + 3\lambda) + 4 \cdot (-1 + 4\lambda) + 10 \cdot (4 + 10\lambda) = 15 \Rightarrow \lambda = -\frac{21}{125}.$$

$$\text{Assim, temos } M = \left( -\frac{63}{125}, -\frac{209}{125}, \frac{58}{25} \right) \text{ e } A' = \left( -\frac{126}{125}, -\frac{293}{125}, \frac{16}{25} \right).$$

**Teorema 3.23.** Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos não colineares de  $\mathbb{E}^3$  e  $\pi$  o plano determinado por esses três pontos. Se uma isometria  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  fixa estes três pontos, então ela fixa todo ponto de  $\pi$ .

*Demonstração.* Seja  $D$  um ponto qualquer do plano  $\pi$ , distinto de  $A, B$  e  $C$ . Suponha, por absurdo, que  $\varphi(D) = D'$ , com  $D' \neq D$ . Como  $\varphi$  preserva distância, então  $D$  e  $D'$



são equidistantes de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , logo,  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem ao plano mediador de  $\overline{DD'}$ . Assim, esses três pontos pertencem à intersecção de dois planos concorrentes, o qual é uma reta, o que é absurdo, pois  $A$ ,  $B$  e  $C$  são não colineares.

Conclui-se que  $D = D'$ , e que  $\varphi$  fixa todo ponto de  $\pi$ . □

**Teorema 3.24.** *Se uma isometria  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  fixa três pontos não colineares  $A, B$  e  $C$  de  $\mathbb{E}^3$ , então ou  $\varphi = Id$  ou  $\varphi = \sigma_\pi$ , onde  $\pi$  é o plano determinado pelos três pontos.*

*Demonstração.* Suponha  $\varphi \neq Id$ . Segue do Teorema 3.23 que existe um ponto  $D \in \mathbb{E}^3$  não pertencente a  $\pi$  tal que  $\varphi(D) = D'$ , com  $D' \neq D$ .

Como  $\varphi$  é uma isometria com  $\varphi(A) = A$ ,  $\varphi(B) = B$  e  $\varphi(C) = C$ , temos que  $D$  e  $D'$  equidistam de  $A, B$  e  $C$ , de modo que o plano  $\pi$  determinado por  $A, B$  e  $C$  é o plano mediador de  $\overline{DD'}$ . Deste modo,  $\varphi = \sigma_\pi$ .

Portanto,  $\varphi = Id$  ou  $\varphi = \sigma_\pi$ . □

**Corolário 3.25.** *Se duas isometrias  $\varphi_1 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  e  $\varphi_2 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  coincidem em três pontos não colineares  $A, B$  e  $C$  de  $\mathbb{E}^3$ , então  $\varphi_1 = \varphi_2$  ou  $\varphi_1 = \sigma_{\pi'} \circ \varphi_2$ , onde  $\pi'$  é o plano determinado pelos pontos  $A', B'$  e  $C'$ , imagens comuns de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Como  $A, B$  e  $C$  são não colineares, então suas respectivas imagens por  $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$  são não colineares, portanto formam um único plano  $\pi'$ .

Note que  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(A') = \varphi_1(A) = A'$ , assim como  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(B') = \varphi_1(B) = B'$  e  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(C') = \varphi_1(C) = C'$ . Logo,  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  fixa os três pontos  $A', B'$  e  $C'$ , e pelo Teorema 3.24, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \sigma_{\pi'} \\ \text{ou} \\ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = Id \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \sigma_{\pi'} \circ \varphi_2 \\ \text{ou} \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right. .$$

□

Uma das utilidades de isometrias é formalizar alternativamente o conceito de congruência de triângulos.

**Teorema 3.26.** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  de  $\mathbb{E}^3$ , temos que  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ , com relação à correspondência  $ABC \leftrightarrow DEF$  entre seus vértices, se, e somente se, existe uma isometria  $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  tal que  $\varphi(A) = D$ ,  $\varphi(B) = E$  e  $\varphi(C) = F$ .*

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ ): Se  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ , então  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  e  $AC = DF$ . Vamos construir  $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$  onde  $\varphi_j$  é  $Id$  ou  $\sigma_\pi$  para algum plano  $\pi$ .

Se  $D = A$ , tomamos  $\varphi_1 = Id$  e se  $D \neq A$ , tomamos  $\varphi_1 = \sigma_{\pi_1}$ , onde  $\pi_1$  é o plano mediador de  $\overline{AD}$ . Em qualquer caso,  $\varphi_1(A) = D$ . Sejam  $\varphi_1(B) = B'$  e  $\varphi_1(C) = C'$ .

Se  $B' = E$  tomamos  $\varphi_2 = Id$  e se  $B' \neq E$ , tomamos  $\varphi_2 = \sigma_{\pi_2}$ , onde  $\pi_2$  é o plano mediador de  $\overline{B'E}$ . Note que  $DB' = AB = DE$ , ou seja,  $D \in \pi_2$ . De qualquer forma,  $\varphi_2(D) = D$  e  $\varphi_2(B') = E$ . Seja  $\varphi_2(C') = C''$ .

Se  $C'' = F$ , tomamos  $\varphi_3 = Id$  e se  $C'' \neq F$ , tomamos  $\varphi_3 = \sigma_{\pi_3}$ , onde  $\pi_3$  é o plano mediador de  $\overline{C''F}$ . Note que  $DC'' = DF$  e  $EC'' = EF$ , logo  $D \in \pi_3$  e  $E \in \pi_3$ . De qualquer forma,  $\varphi_3(C'') = F$ ,  $\varphi_3(D) = D$  e  $\varphi_3(E) = E$ . Concluimos que  $(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(A) = D$ ,  $(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(B) = E$  e  $(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(C) = F$ , conforme esquema a seguir:

$$\varphi_1 \begin{cases} A \mapsto D \\ B \mapsto B' \\ C \mapsto C' \end{cases} \quad \varphi_2 \begin{cases} D \mapsto D \\ B' \mapsto E \\ C' \mapsto C'' \end{cases} \quad \varphi_3 \begin{cases} D \mapsto D \\ E \mapsto E \\ C'' \mapsto F \end{cases}$$

( $\Leftarrow$ ): Se existe isometria  $\varphi$  tal que  $\varphi(A) = D$ ,  $\varphi(B) = E$  e  $\varphi(C) = F$ , então  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ , logo,  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$  pois os três lados são congruentes.  $\square$

### 3.4 TRANSLAÇÃO

Uma translação pode ser entendida informalmente como uma aplicação que leva uma figura de um lugar para outro, de modo que a figura e sua imagem diferem somente pela posição no espaço.

**Definição 3.27.** Uma translação  $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  de um ponto  $A \in \mathbb{E}^3$  arbitrário por um vetor  $\vec{v}$  é uma aplicação no espaço de tal forma que  $\tau_{\vec{v}}(A) = A + \vec{v}$ .

Notemos que  $\tau_{\vec{0}} = Id$ .

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  um ponto qualquer e  $A'$  sua imagem após a translação por um vetor  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Assim, pela Definição 2.2.3, temos que

$$A' = (x_A + v_1, y_A + v_2, z_A + v_3). \quad (3.3)$$

**Teorema 3.28.** Uma translação  $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  de um ponto  $A$  por um vetor  $\vec{v}$  é uma isometria.

*Demonstração.* Notemos que  $\tau_{\vec{v}}^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$ , logo uma translação por um vetor é uma transformação. Vamos provar que essa transformação preserva distância.

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  dois pontos quaisquer do espaço e  $A', B'$  suas respectivas imagens por uma translação de vetor  $\vec{v}$ . Assim, pela Definição 2.2.3, temos que  $A' = (x_A + v_1, y_A + v_2, z_A + v_3)$  e  $B' = (x_B + v_1, y_B + v_2, z_B + v_3)$ .

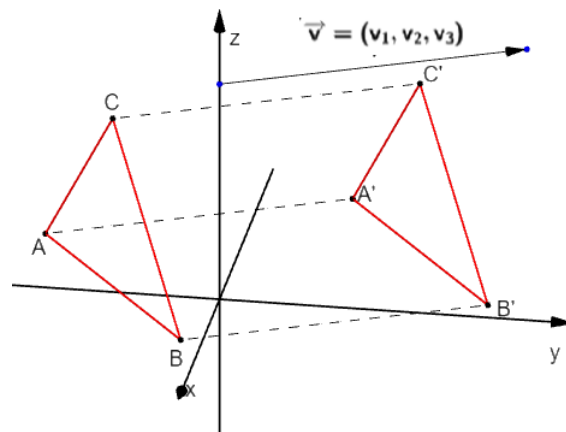


Figura 48: Translação de um triângulo  $\Delta ABC$  por um vetor  $\vec{v}$ . <https://www.geogebra.org/classic/qvwmtkkt>

Pelo Teorema 2.5, temos:

$$\begin{aligned} A'B'^2 &= (x_A + v_1 - (x_B + v_1))^2 + (y_A + v_2 - (y_B + v_2))^2 + (z_A + v_3 - (z_B + v_3))^2 = \\ &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2. \end{aligned}$$

□

### 3.5 ROTAÇÃO

Uma rotação pode ser entendida informalmente como uma aplicação no espaço que gira uma figura geométrica, tendo como centro uma reta, como ilustrado na Figura 49.

**Definição 3.29.** Uma rotação  $\rho_{\theta, r} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  de um ponto  $A \in \mathbb{E}^3$  arbitrário em relação a uma reta  $r$  de  $\mathbb{E}^3$  de um ângulo  $\theta$  ( $0 < |\theta| < 2\pi$ ) é uma aplicação no espaço tal que:

- $\rho_{\theta,r}(A) = A$ , se  $A \in r$ ;
- $\rho_{\theta,r}(A) = A'$ , onde  $A'$  é a imagem de  $A$  pela rotação de ângulo  $\theta$  e centro  $O$ , que é a projeção ortogonal de  $A$  sobre  $r$ , no plano ortogonal a  $r$  que passa por  $A$ .

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  um ponto qualquer e  $A' = (x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$  sua imagem após a rotação de ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $z$ . Seja também  $O$  a projeção ortogonal de  $A$  sobre o eixo  $z$ . Como  $\overline{A'O}$  é perpendicular ao eixo  $z$ , então  $z_{A'} = z_A$ .

Considerando o plano  $z = z_A$ , pelo Teorema 1.5, temos que

$$A' = (x_A \cos \theta - y_A \sin \theta, x_A \sin \theta + y_A \cos \theta, z_A). \quad (3.4)$$

**Teorema 3.30.** Uma rotação  $\rho_{\theta,z} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  em relação ao eixo  $z$  de um ângulo  $\theta$  ( $0 < |\theta| < 2\pi$ ) é uma isometria no espaço.

*Demonstração.* Notemos que  $\rho_{\theta,z}^{-1} = \rho_{-\theta,z}$ , logo uma rotação em torno do eixo  $z$  é uma transformação no espaço. Vamos provar que essa transformação preserva distância entre dois pontos quaisquer do espaço.

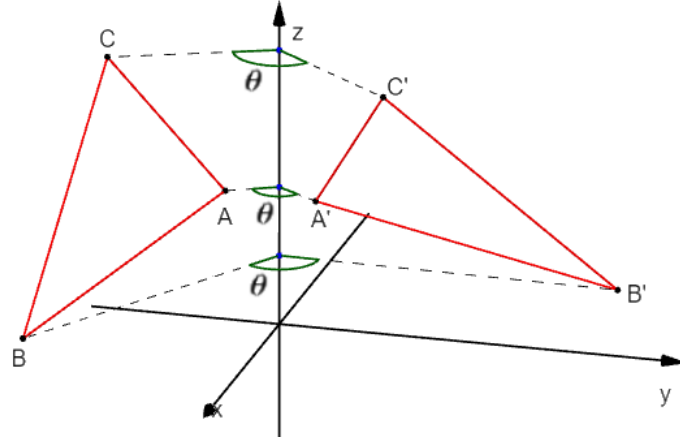


Figura 49: Rotação de um triângulo  $\Delta ABC$  em torno da reta  $r$  de um ângulo  $\theta$ . <https://www.geogebra.org/classic/hc2dkmb9>

Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  dois pontos quaisquer de  $\mathbb{E}^3$ , e  $A', B'$  suas respectivas imagens pela rotação  $\rho_{\theta,z}$ . Assim, temos que

$$A' = (x_A \cos \theta - y_A \sin \theta, x_A \sin \theta + y_A \cos \theta, z_A)$$

e

$$B' = (x_B \cos \theta - y_B \sin \theta, x_B \sin \theta + y_B \cos \theta, z_B).$$

O fato que  $AB = A'B'$  foi mostrado em um caso mais geral no Exemplo 3.1, considerando  $h = k = p = 0$ .  $\square$

Embora tenhamos feito a rotação apenas com relação a um eixo específico, a rotação com relação a uma reta  $r$  qualquer é um processo análogo. Não demonstraremos neste trabalho, mas ele pode ser entendido como uma mudança na posição dos eixos coordenados de forma que o novo eixo  $z$  seja a reta  $r$ . Assim, qualquer rotação do tipo  $\rho_{\theta,r}$  é uma isometria.

### 3.6 COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS

Nesta seção estudaremos a composição, também conhecida como sequência ou produto, de duas ou mais isometrias. Usaremos o fato que a composição de isometrias é uma isometria, como visto na Proposição 3.7.

#### 3.6.1 Composição de Translações

**Teorema 3.31.** *A composição de translações é comutativa e também é uma translação.*

*Demonstração.* Sejam  $A \in \mathbb{E}^3$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$ . Notemos que  $A + \vec{u} + \vec{v} = A + \vec{v} + \vec{u} = A + (\vec{u} + \vec{v})$ , e  $\vec{u} + \vec{v}$  é um vetor.

Portanto,  $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u} + \vec{v}}$   $\square$

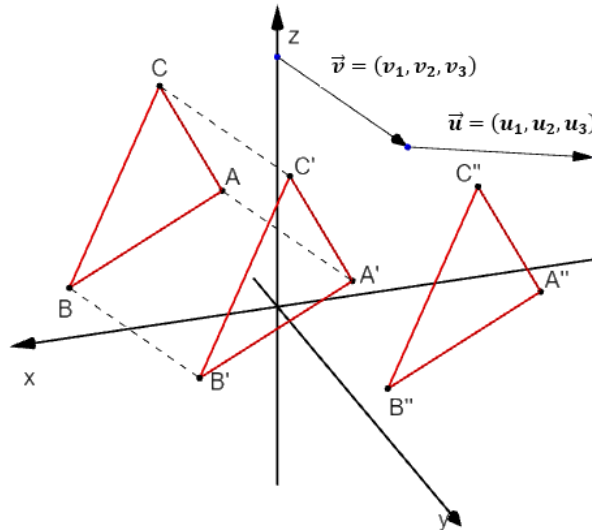


Figura 50: Composição de translações  $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}$  aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/jjp4fkrp>

### 3.6.2 Composição de Reflexões com Relação a Pontos

**Teorema 3.32.** A composição de duas reflexões com relação a pontos  $\sigma_M \circ \sigma_N$  é uma translação  $\tau_{2\overrightarrow{NM}}$ .

*Demonstração.* Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $M = (x_M, y_M, z_M)$  e  $N = (x_N, y_N, z_N)$ . Pelo rquação (3.1),  $\sigma_N(A) = (2x_N - x_A, 2y_N - y_A, 2z_N - z_A)$  e

$$\begin{aligned} \sigma_M \circ \sigma_N(A) &= (2x_M - 2x_N + x_A, 2y_M - 2y_N + y_A, 2z_M - 2z_N + z_A) \\ &= (x_A, y_A, z_A) + 2 \cdot (x_M - x_N, y_M - y_N, z_M - z_N) \\ &= A + 2 \cdot \overrightarrow{NM}. \end{aligned}$$

□

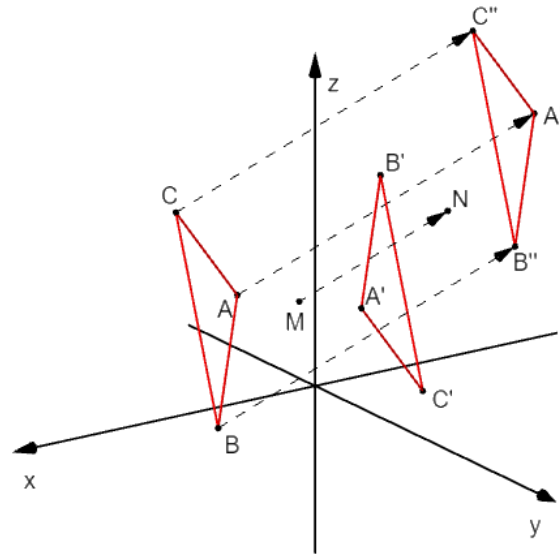


Figura 51: Composição de reflexões com relação a pontos  $\sigma_M \circ \sigma_N$  aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/dbs9jqdm>

### 3.6.3 Composição de Reflexões com Relação a Planos Paralelos

**Teorema 3.33.** A composição de duas reflexões com relação a planos paralelos  $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2}$  é uma translação por um vetor de módulo igual ao dobro da distância entre os dois planos.

*Demonstração.* Sejam  $A$  um ponto qualquer de  $\mathbb{E}^3$  e  $\vec{n}$  um vetor normal unitário aos planos paralelos  $\pi_1 : \vec{OA} \cdot \vec{n} + d_1 = 0$  e  $\pi_2 : \vec{OA} \cdot \vec{n} + d_2 = 0$ . De acordo com a equação (3.1), temos que

$$A' = \sigma_{\pi_2}(A) = A - 2(\vec{OA} \cdot \vec{n} + d_2) \vec{n}$$

e

$$\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2}(A) = \sigma_{\pi_1}(A') = A' - 2(\vec{OA}' \cdot \vec{n} + d_1) \vec{n}$$

Mas,  $\vec{OA}' = \vec{OA} - 2(\vec{OA} \cdot \vec{n} + d_2) \vec{n}$ . Logo,

$$\vec{OA}' \cdot \vec{n} = \vec{OA} \cdot \vec{n} - 2(\vec{OA} \cdot \vec{n} + d_2) \vec{n} \cdot \vec{n} = -\vec{OA} \cdot \vec{n} - 2d_2.$$

Assim,

$$\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2}(A) = A - 2(\vec{OA} \cdot \vec{n} + d_2 - \vec{OA} \cdot \vec{n} - 2d_2 + d_1) \vec{n} = A + 2(d_2 - d_1) \vec{n}$$

que é a translação do ponto  $A$  pelo vetor  $2(d_2 - d_1) \cdot \vec{n}$ , que possui módulo igual ao dobro da distância entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , por (2.16).  $\square$

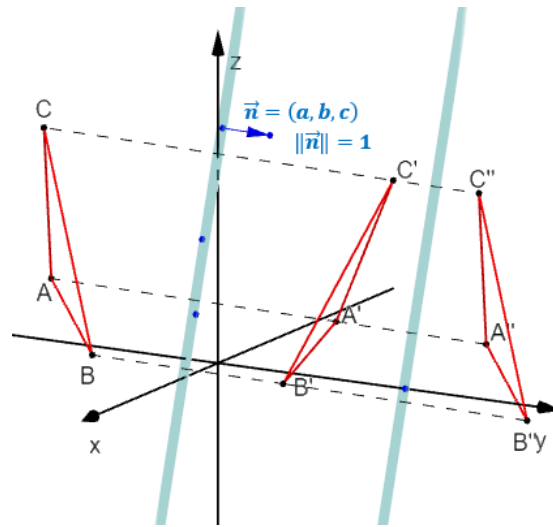


Figura 52: Composição de reflexões com relação a planos paralelos  $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2}$  aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/gtbjps2a>

### 3.6.4 Composição de Reflexões com Relação a Planos Não Paralelos

**Teorema 3.34.** *Seja  $r$  a intersecção de dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  que formam um ângulo agudo  $\theta$ . A composição  $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2}$  é uma isometria que:*

- *fixa qualquer ponto de  $r$ ;*
- *rotaciona um ponto com relação ao eixo  $r$  em  $2\theta$ , se ele não pertence a  $r$ .*

*Demonstração.* Se  $A \in r$ , então  $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2}(A) = \sigma_{\pi_1}(A) = A$ , pois  $A \in \pi_1 \cap \pi_2$ .

Suponhamos que  $A \notin r$ . Há várias possibilidades para estudarmos, mas elas são análogas. Consideremos o caso ilustrado na Figura 53 e seja  $\pi$  o plano perpendicular a  $r$  passando por  $A$ .



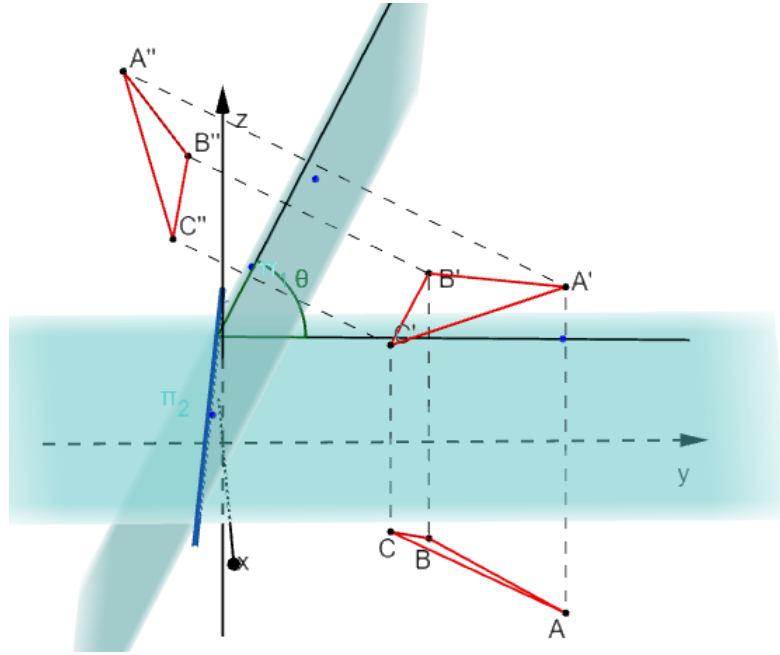


Figura 53: Composição de reflexões  $\sigma_{\pi_1} \circ \sigma_{\pi_2}$  com relação a planos não paralelos aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/a8demw5u>

Sejam  $A' = \sigma_{\pi_2}(A)$  e  $A'' = \sigma_{\pi_1}(A')$ , com  $\{M_1\} = \overline{AA'} \cap \pi_2$  e  $\{M_2\} = \overline{A'A''} \cap \pi_1$ . Considere também  $r_1 = \pi \cap \pi_1$  e  $r_2 = \pi \cap \pi_2$ . Note que o ângulo formado entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é o mesmo ângulo formado entre as retas  $r_1$  e  $r_2$ , ou seja, o ângulo  $M_1\hat{O}M_2$ .

Como  $\sigma_{\pi_1}$  e  $\sigma_{\pi_2}$  são isometrias, então  $AO = A'O = A''O$ . Além disso,  $m(A\hat{O}A'') = m(A\hat{O}A') + m(A'\hat{O}A'') = 2(m(M_1\hat{O}A') + m(A'\hat{O}M_2)) = 2m(M_1\hat{O}M_2) = 2\theta$ .  $\square$

### 3.6.5 Composição de Rotações

**Teorema 3.35.** *A composição de duas rotações  $\rho_{\alpha,z} \circ \rho_{\beta,z}$  com relações ao eixo  $z$  é comutativa e também é uma rotação  $\rho_{\alpha+\beta,z}$ .*

*Demonstração.* Seja  $A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{E}^3$ . Assim, pela equação (1.5), temos:

$$\rho_{\beta,z}(A) = (x_A \cos \beta - y_A \sin \beta, x_A \sin \beta + y_A \cos \beta, z_A)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,z} \circ \rho_{\beta,z}(A) &= ((x_A \cos \beta - y_A \sin \beta) \cos \alpha - (x_A \sin \beta + y_A \cos \beta) \sin \alpha, \\ &\quad (x_A \cos \beta - y_A \sin \beta) \cos \alpha + (x_A \sin \beta + y_A \cos \beta) \sin \alpha, z_A) \\ &= (x_A \cos(\alpha + \beta) - y_A \sin(\alpha + \beta), x_A \sin(\alpha + \beta) + y_A \cos(\alpha + \beta), z_A) \\ &= \rho_{\alpha+\beta,z}. \end{aligned}$$

□

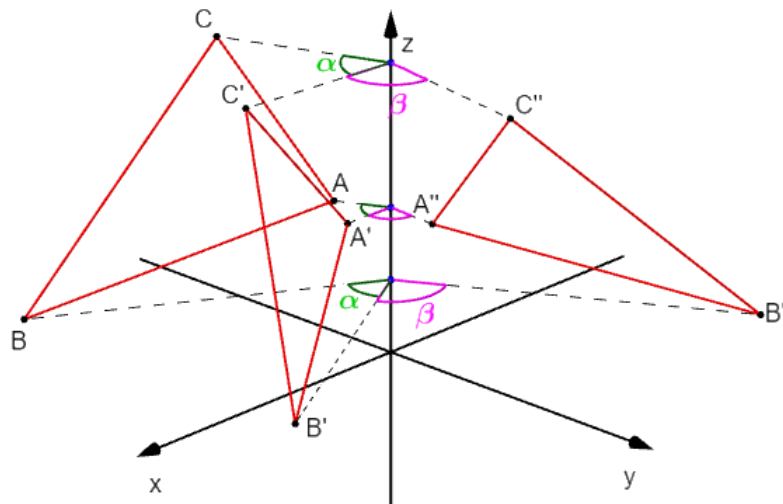


Figura 54: Composição de rotação  $\rho_{\beta,z} \circ \rho_{\alpha,z}$  com relação ao eixo  $z$  aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/rurqqjzr>

Novamente podemos generalizar o resultado acima para qualquer eixo de rotação.

### 3.6.6 Composição de Reflexão e Translação

**Definição 3.36.** A aplicação dada pela composta de uma reflexão em relação a um plano com uma translação é chamada de reflexão com deslizamento.

**Teorema 3.37.** Uma reflexão com deslizamento é uma isometria.

*Demonstração.* Segue do fato da composição de duas isometrias ser uma isometria. □

**Teorema 3.38.** A composição de uma translação  $\tau_{\vec{v}}$  e uma reflexão com relação a um ponto  $\sigma_M$  é uma reflexão tal que:

- a)  $\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_M = \sigma_{M + \frac{1}{2}\vec{v}}$ ;
- b)  $\sigma_M \circ \tau_{\vec{v}} = \sigma_{M - \frac{1}{2}\vec{v}}$ .

*Demonstração.* Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $M = (x_M, y_M, z_M)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Assim:

- a) Pelo equação (3.1), temos que  $\sigma_M(A) = (2x_M - x_A, 2y_M - y_A, 2z_M - z_A)$  e, por (3.3)

$$\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_M(A) = \left( 2 \left( x_M + \frac{1}{2}v_1 \right) - x_A, 2 \left( y_M + \frac{1}{2}v_2 \right) - y_A, 2 \left( z_M + \frac{1}{2}v_3 \right) - z_A \right),$$

que representa a reflexão em relação ao ponto  $M + \frac{1}{2}\vec{v}$ ;

- b) Por (3.3), temos que  $\tau_{\vec{v}}(A) = (x_A + v_1, y_A + v_2, z_A + v_3)$  e, pela equação (3.1)

$$\sigma_M \circ \tau_{\vec{v}}(A) = \left( 2 \left( x_M - \frac{1}{2}v_1 \right) - x_A, 2 \left( y_M - \frac{1}{2}v_2 \right) - y_A, 2 \left( z_M - \frac{1}{2}v_3 \right) - z_A \right),$$

que representa a reflexão em relação ao ponto  $M - \frac{1}{2}\vec{v}$ .

□

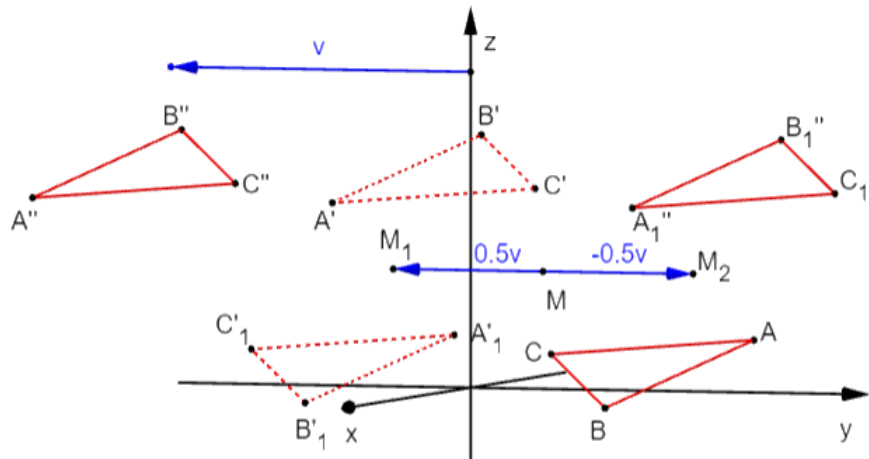


Figura 55: Composição de reflexão com relação a ponto e translação  $\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_M$  e  $\sigma_M \circ \tau_{\vec{v}}$  aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/seshadsp>

### 3.6.7 Composição de Rotação e Translação

Para estudar a composição de uma rotação e uma translação, devemos separar em três casos: quando o vetor da translação é paralelo ao eixo de rotação, quando é perpendicular e quando não é nem paralelo e nem perpendicular.

**Definição 3.39.** A aplicação dada pela composta de uma rotação em relação a um eixo com uma translação por um vetor paralelo a este eixo é chamada de transformação helicoidal, ou rotação deslizante ou parafuso.

**Teorema 3.40.** Uma transformação helicoidal  $\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta, r}$ , com  $r \parallel \vec{v}$ , é uma isometria, sendo que sua composição é comutativa.

*Demonstração.* Segue do fato da composição de duas isometrias ser uma isometria. Para mostrar que a composição é comutativa, vamos supor que a rotação seja feita em torno do eixo  $z$ . Sejam  $A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{E}^3$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{V}^3$ . Assim, pelas equações (3.3) e (1.5), temos:

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta, z}(A) &= \tau_{\vec{v}}(x_A \cos \theta - y_A \sin \theta, x_A \sin \theta + y_A \cos \theta, z_A) \\ &= (x_A \cos \theta - y_A \sin \theta + v_1, x_A \sin \theta + y_A \cos \theta + v_2, z_A + v_3) \\ &= (v_1 + x_A \cos \theta - y_A \sin \theta, v_2 + x_A \sin \theta + y_A \cos \theta, v_3 + z_A) \\ &= \rho_{\theta, z} \circ \tau_{\vec{v}}(A) \end{aligned}$$

Novamente, podemos generalizar para qualquer eixo de rotação. □

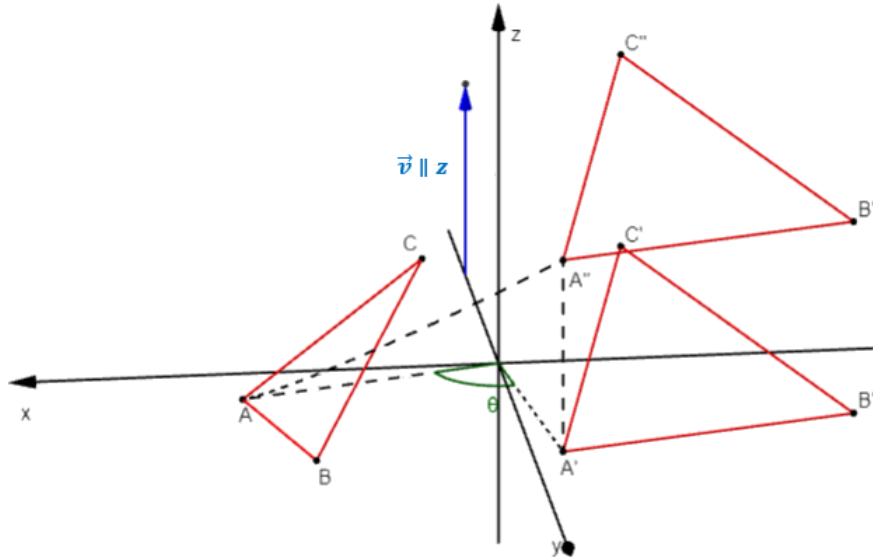


Figura 56: Isometria helicoidal  $\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta, z}$  aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/xzjkpeea>

Agora estudaremos o caso onde o vetor  $\vec{v}$  é perpendicular ao eixo de rotação. Para isso, vamos enunciar um lema que não será provado, mas a demonstração se encontra em [10, pp. 83-84].

**Lema 3.41.** *Sejam  $\pi$  um plano qualquer de  $\mathbb{E}^3$  e  $\vec{v}$  um vetor paralelo a  $\pi$ . A composição de uma rotação, em  $\pi$ , por um ângulo  $\alpha$  em torno de um ponto  $O \in \pi$  com a translação por vetor  $\vec{v}$  é uma rotação de ângulo  $\alpha$  em torno de um ponto  $O' \in \pi$ .*

**Teorema 3.42.** *Uma isometria  $\rho_{\alpha, r} \circ \tau_{\vec{v}}$ , com  $v \perp r$ , é uma rotação de mesmo ângulo em torno de uma reta  $s$ , com  $s \parallel r$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\pi$  um plano qualquer perpendicular a  $r$ , e  $\{O\} = \pi \cap r$ . Notemos que, para um ponto qualquer em  $\pi$ , temos  $\rho_{\alpha, r} \circ \tau_{\vec{v}} = \rho_{O, \alpha} \circ \tau_{\vec{v}}$  e, pelo Lema 3.41,  $\rho_{O, \alpha} \circ \tau_{\vec{v}} = \rho_{O', \alpha}$ .

Seja  $s$  a reta perpendicular a  $\pi$  por  $O'$ . Sabemos que a isometria  $\rho_{\alpha, r} \circ \tau_{\vec{v}}$  fixa qualquer ponto da reta  $s$ , ou seja,  $\rho_{\alpha, r} \circ \tau_{\vec{v}}$  coincide com  $\rho_{\alpha, s}$  nesta reta, além de coincidir com todos os pontos em  $\pi$ , logo,  $\rho_{\alpha, r} \circ \tau_{\vec{v}} = \rho_{\alpha, s}$ .  $\square$

Por fim, estudaremos o caso onde o vetor  $\vec{v}$  não é nem paralelo e nem perpendicular ao eixo de rotação  $r$ .

Podemos decompor o vetor  $\vec{v}$  como  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ , de modo que o vetor  $\vec{u}$  seja perpendicular a  $r$  e o vetor  $\vec{w}$  seja paralelo a  $r$ . Pelo Teorema 3.31, temos que  $\tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{u} + \vec{w}} = \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{w}}$ . Logo,

$$\rho_{\alpha,r} \circ \tau_{\vec{v}} = \rho_{\alpha,r} \circ (\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{w}}) = (\rho_{\alpha,r} \circ \tau_{\vec{u}}) \circ \tau_{\vec{w}} = \rho_{\alpha,s} \circ \tau_{\vec{w}}.$$

Como  $s$  é paralelo a  $r$ , logo  $s$  é paralelo a  $\vec{w}$ , portanto,  $\rho_{\alpha,r} \circ \tau_{\vec{v}}$  é uma isometria helicoidal.

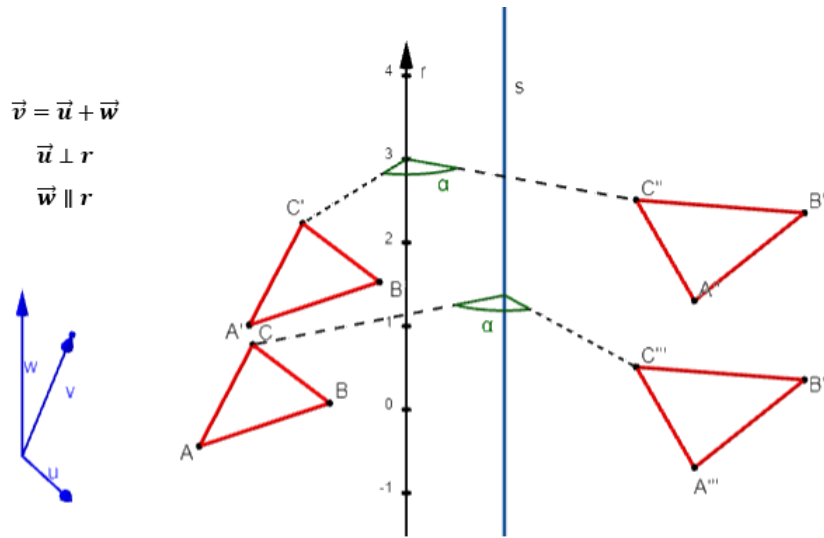


Figura 57: Composição de rotação e translação  $\rho_{\alpha,r} \circ \tau_{\vec{v}}$  aplicada em um triângulo  $\Delta ABC$ . <https://www.geogebra.org/classic/djbufy7d>

---

## CONCLUSÃO

---

Este trabalho destinou-se a estudar as isometrias no espaço euclidiano através dos conceitos da geometria analítica em  $\mathbb{R}^3$  através do uso de coordenadas no espaço. Além da definição e de exemplos das isometrias no espaço, o trabalho também tratou de suas composições.

Embora haja vários trabalhos, inclusive no programa PROFMAT, que se dediquem ao estudo das isometrias, muitos deles se limitam àquelas em  $\mathbb{R}^2$ . Este trabalho, portanto, teve como um dos objetivos expandir as isometrias do plano para o espaço.

Sempre que foi possível, ilustramos o texto com o uso de figuras de autoria própria feitas no *Geogebra*. O leitor, caso desejasse, poderia explorar as isometrias no espaço por meio de pequenas alterações dinâmicas acessando os *links* das imagens. Incentivamos, inclusive, que professores e alunos utilizem dessa ferramenta para explorar as transformações no espaço, já que é um *software* de domínio público e de fácil manipulação.

É importante ressaltar que o trabalho ainda deixa temas para serem explorados, como o fato do conjunto das isometrias formarem um grupo algébrico, ou até mesmo a utilização de matrizes para o cálculo das imagens das isometrias. No entanto, esperamos que ela seja uma fonte importante de consulta para uma primeira aprendizagem sobre geometria das transformações, tema este pouco explorado na educação básica e superior.





---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] ALVES, S.; *Um estudo geométrico das transformações elementares* , IME-USP, 1996.
- [2] BOULOS, P.; Oliveira, I.; *Geometria analítica: um tratamento vetorial* , Prentice Hall Brasil, 2005.
- [3] BOYER, C.; *History of analytic geometry* , Scripta Mathematica, 1956.
- [4] BOYER, C.; Merzbach, C.; *História da matemática* , Editora Blucher, 2019.
- [5] EULER, L.; *Formvlae generales pro translatione qvacvnqve corporvm rigidorvm* , 2020.
- [6] HILBERT, D.; *Grundlagen der Geometrie*, Vieweg+Teubner Verlag, 2013.
- [7] IEZZI, G.; Hazzan, S; *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas* , Atual, 2004.
- [8] IEZZI, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; De Almeida, N. *Matemática ciência e aplicações 3: conecte* , Saraiva, 2020.
- [9] LEDERGERBER-RUOFF, E.; *Isometrias e ornamentos do plano euclidianos* , Atual Editora, 1982.
- [10] LIMA, E.; *Isometrias*, SBM, 2007.
- [11] MACAU, U.; *Isometries of Euclidean space*, 2020.
- [12] SILVA, J.; Pietropaolo, R.; *Um Estudo sobre as Contribuições de Felix Klein para a Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática no Ensino Fundamental* , Revista do programa de pós-graduação em educação matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), 2020.
- [13] SOARDI, P.; *Potential Theory on Infinite Networks* , Springer-Verlag Berlin Heideberg, 1994.
- [14] STEWART, J.; *Cálculo Volume 2: Tradução Da 8a. Edição Norte-Americana* ,

Pioneira Thompson Learning Ltda, 2017.

[15] WIKIPÉDIA; *Contorno do mapa do Brasil*, Wikipedia, 2020.

# Índice

alinhamento, 10, 46

composição de isometrias, 85

coordenadas polares, 5

distância entre planos, 60

distância entre pontos, 8, 45

equação geral da reta, 17

equação reduzida da reta, 17

espaço cartesiano, 40

espaço cilíndrico, 41

espaço esférico, 42

isometrias, 67

norma, 35

operação com vetores, 24

plano, 3

plano cartesiano, 4

ponto, 3

ponto fixo, 71

ponto médio, 11, 49

produto de vetor por escalar, 27

produto escalar, 35

quadrantes, 4

reflexão, 73–75

reta, 3

retas perpendiculares, 20

rotação, 15, 83

soma de ponto com vetor, 28

soma de vetores, 25

termos não definidos, 3

transformações, 63

translação, 82

vetores, 23

vetores linearmente dependente, 29

vetores paralelos, 28

ângulo entre planos, 61