



LUIZ BARROS ORFÃO

A BROCA QUE FURA QUADRADO

Santo André, 2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

LUIZ BARROS ORFÃO

A BROCA QUE FURA QUADRADO

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição como exigência parcial para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO LUIZ BARROS ORFÃO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI.

SANTO ANDRÉ, 2021

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Orfão, Luiz Barros
A BROCA QUE FURA QUADRADO / Luiz Barros Orfão. — 2021.

96 fls. : il.

Orientador: Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Santo André, 2021.

1. Furo quadrado. 2. Triângulo de Reuleaux. 3. Curva de largura constante. 4. Uma variação do Triângulo de Reuleaux. I. Barbero Lodovici, Sinuê Dayan. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2021. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
 Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
 CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, LUIZ BARROS ORFÃO realizada em 07 de Junho de 2021:

Prof.(a) RAFAEL DE MATTOS GRISI
 UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) ROSAMARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES
 UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) ALEXANDRE LYMBEROPOULOS
 UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
 UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
 UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , 14 de julho de 2021 .

LUIZ BARROS ORFÃO Luiz Barros Orfão

Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI

Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)

Dedico este trabalho às pessoas que de alguma forma contribuíram positivamente a este curso de Mestrado Profissional em Matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e das maravilhas do mundo.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudo ao longo do curso, ação de grande importância.

Aos professores do Profmat pelo acolhimento e à UFABC por tornar possível a realização do curso.

Ao coordenador Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici que desde o início nos apoiou, propôs o tema desse trabalho, acompanhou o desenvolvimento do curso e nos orientou em busca do título de mestre.

À Banca que dedicou tempo para conhecer este trabalho.

Aos meus colegas de curso do Profmat Turma-2017 UFABC que juntos contribuímos mutuamente para o nosso aperfeiçoamento.

Aqueles com quem trabalhei e pude compartilhar das minhas expectativas desta jornada, que mostraram-se interessados em conhecer um pouco mais, com destaque aos meus alunos que me inspiram a querer ser um professor melhor.

A todos que dedicaram tempo para conhecer este trabalho, dele tirar inspiração e realizar bons propósitos.

Aos meus familiares que sempre estiveram presentes, me incentivando em todas as etapas de meus estudos, em especial à minha amada Miriam, que do e ao meu lado sempre esteve multiplicando minhas alegrias, ao meu filho Luiz Felipe e à minha filha Beatriz Mayumi, motivos de orgulho e paz.

Meu muito obrigado.

*Uma história pontual.
o ponto So é só na reta real
o ponto não é mais só se estiver no plano
o ponto passa a ser elegante quando está no espaço
o ponto não estará nesta posição se o real escalar e o
vetor que o orienta não forem zero, mas é crível que lá
esteve.
neste ponto, depois de um plano, fica marcado que aqui
estivemos.*

(Luiz Barros Orfão)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre um engenho que gera a trajetória de um instrumento capaz de construir um “furo quadrado” a partir do movimento de rotação circular simples, o destaque é uma figura de largura constante (cuja largura é a mesma em qualquer direção considerada). A motivação deste estudo são duas formas geométricas planas de largura constante: a primeira é o Triângulo de Reuleaux, que é construído a partir de um triângulo equilátero, traçando arcos de circunferência que cobrem cada lado de um triângulo equilátero, centralizando-se no vértice oposto, e a segunda é uma das variações dos polígonos de Reuleaux. Trata-se de uma curva construída a partir de dois triângulos isósceles retângulos e a combinação de quatro arcos de três raios diferentes.

Palavras-chave: Furo quadrado, Triângulo de Reuleaux, curva de largura constante.

ABSTRACT

In this work, we present a study about a contraption that generates the trajectory of a device capable of inducing a “ square-shaped hole ” from simple circular rotation motion, the highlight is a constant width figure (the width of which is the same in any direction considered). The motivation for this study is two flat geometric shapes of constant diameter: the first is the Reuleaux Triangle, which is constructed from an equilateral triangle, drawing circular arcs covering each side of an equilateral triangle, centering on the opposite vertex and the second is one of the variations of Reuleaux’s polygons. It is a curve constructed from two isosceles right triangles and the combination of four arcs of three different radius.

Keywords: square-shaped hole, Reuleaux triangle, constant width curve.

CONTEÚDO

Introdução	1
1 TRIÂNGULO DE REULEAUX	3
1.1 Propriedades Matemáticas	4
1.1.1 Construção	4
1.1.2 Distâncias	5
1.1.3 Perímetro	7
1.1.4 Área	8
1.1.5 Parametrização	9
1.1.5.1 Parametrização do Triângulo de Reuleaux como parte de três circunferências	12
1.1.5.2 Parametrização do Triângulo de Reuleaux com posicio- namento do ponto P em função do ângulo central	13
1.1.6 Estudo da parametrização do Triângulo de Reuleaux	16
1.2 Triângulo de Reuleaux Sem Bicos . . . TRSB	21
1.2.1 Construção do TRSB	21
1.2.2 TRSB é uma curva de largura constante $S_0 = 2a + s$	23
1.2.3 Perímetro do TRSB	24
1.2.4 Área do TRSB	24
1.2.5 Parametrização do TRSB com posicionamento do ponto P em função do ângulo central	25
2 UMA VARIAÇÃO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX (VTR)	29
2.1 Propriedades Matemáticas da VTR em estudo	30
2.1.1 Construção da VTR em estudo	31
2.1.2 Distâncias da VTR em estudo	33
2.1.3 A VTR tem largura constante	33
2.1.4 Perímetro da VTR em estudo	34
2.1.5 Área da VTR em estudo	35
2.1.6 Parametrização da VTR em estudo	35
2.2 Uma VTR sem bicos . . . VTRSB	38
2.2.1 Construção da VTRSB	38

2.2.2	Perímetro da VTRSB	40
2.2.3	Área da VTRSB	40
2.2.4	Parametrização da VTRSB com posicionamento do ponto P em função do ângulo central	41
2.2.5	VTRSB é uma curva de largura constante	45
3	CURVAS DE LARGURA CONSTANTE	47
3.1	Curvas Planas	47
3.2	Equações de Frenet	51
3.3	O Teorema Fundamental das Curvas	53
3.4	O Teorema de Barbier	54
4	DINÂMICA PARA GERAR O FURO QUADRADO	59
4.1	Rotacionando o Triângulo de Reuleaux	59
4.2	Rotacionando a VTR	62
4.3	Construções no Geogebra	64
4.3.1	Área de Trabalho do Geogebra	64
4.3.2	Triângulo de Reuleaux no Geogebra	65
4.3.3	Triângulo de Reuleaux no Geogebra com Rotação	67
4.3.4	Triângulo de Reuleaux no Geogebra com Rotação inserido na guia quadrada.	69
4.3.5	VTR no Geogebra	71
4.3.6	VTR Rotacionando no Geogebra inserido na Guia Quadrada	73
5	CONCLUSÃO	77
	Bibliografia	79

INTRODUÇÃO

Como uma furadeira pode executar um furo quadrado?

À primeira vista pode parecer impossível e ao conversar com as pessoas sobre isto era motivo de desconfiança, mas ao transcorrer da apresentação dos argumentos e apresentação de informações existentes sobre este tema é realmente admirável.

A broca que faz furos quadrados se tornou uma sensação entre profissionais do ramo de mecânica e curiosos em geral.

Como exemplo, é possível construir um dispositivo mecânico que acoplado a uma furadeira com uma ferramenta de corte com um formato especial será capaz de remover material de uma peça e gerar um furo quadrado. É claro que é possível fazer furos quadrados por outros processos diferentes como: estampagem, brochamento ou eletroerosão, temas que não serão abordados aqui.

O objetivo é apresentar um estudo sobre uma estrutura que possibilita a trajetória de um elemento capaz de construir um “furo quadrado” a partir do movimento de rotação “circular simples”. A motivação deste estudo são duas formas geométricas planas de largura constante: a primeira é o Triângulo de Reuleaux, que é construído a partir de um triângulo equilátero, traçando arcos de circunferência que cobrem cada lado, centralizando-se no vértice oposto e a segunda é uma das variações dos polígonos de Reuleaux, trata-se de uma curva construída a partir de dois triângulos isósceles retângulo e a combinação de quatro arcos de três raios diferentes. Essas duas formas exemplificam a estrutura de um modelo que torna possível a fabricação do “furo quadrado”.

Usamos esta apresentação como motivação para:

- demonstrar algumas das propriedades matemáticas do Triângulo de Reuleaux;
- elaborar uma forma geométrica com algumas das propriedades matemáticas do Triângulo de Reuleaux que gera o contorno de um quadrado;
- exemplificar o uso de um software de matemática dinâmico (Geogebra) para construção de figuras e funções;

- relacionar uma situação prática e a aplicação com a Matemática.
- abordar uma introdução do estudo de geometria diferencial para curvas no plano.
- mostrar uma forma dinâmica do movimento de um ponto e o estudo de sua trajetória ao longo de um caminho.

Nos dois primeiros capítulos, apresentamos o Triângulo de Reuleaux e uma de suas Variações, a VTR (Variação do Triângulo de Reuleaux), acompanhados de suas versões sem bicos, o TRSB (Triângulo de Reuleaux Sem Bico) e a VTRSB (Variação do Triângulo de Reuleaux Sem Bico). Como são suas construções e algumas de suas propriedades: distâncias, perímetros, áreas, e mostramos duas de suas parametrizações. Interessante aqui é mostrar que as parametrizações foram obtidas aplicando a lei dos cossenos, o método de resolução da equação quadrática e o estudo de funções por intervalos de ângulos.

No terceiro capítulo, justificaremos algumas propriedades das curvas de largura constante, para esta justificativa abordaremos conceitos de Geometria Diferencial que envolve as curvas planas, o vetor tangente, as fórmulas de Frenet, o teorema fundamental das curvas no plano e o teorema de Barbier para curvas de largura constante.

No capítulo quatro, mostramos a ideia de como é o dispositivo que possibilita o giro do Triângulo de Reuleaux a fim de produzir um furo quadrado, bem como a VTR. Neste capítulo trazemos também uma abordagem de elaboração destes objetos no Geogebra.

Todas as figuras aqui apresentadas foram feitas pelo autor e, para uma apresentação dinâmica, muitas destas figuras são seguidas de links de acesso às elaborações desenvolvidas no Geogebra. Tais elaborações podem ser consultadas pelo leitor que, inspirados nestas, podem delas fazer uso, em especial para nós que ensinamos matemática.

TRIÂNGULO DE REULEAUX

Ao traçar três arcos de circunferência com centro em um dos três vértices de um triângulo equilátero e unindo os outros dois vértices teremos um polígono de Reuleaux conhecido como Triângulo de Reuleaux, um polígono de *largura constante*. Ver [9].

Observação 1.1. Os polígonos de Reuleaux são figuras formadas por arcos de circunferências unindo dois vértices de um polígono regular de n lados, n ímpar, cuja uma das propriedades é ser polígono de largura constante.

Definimos a *largura de uma curva plana fechada*¹ como a menor distância entre duas retas paralelas, tangentes à esta curva e perpendiculares a uma direção fixada. Uma curva é dita *de largura constante* ou *de diâmetro constante* se a sua largura em todas as direções for a mesma. A circunferência é uma curva de largura constante cujo valor é o seu diâmetro (ver Figura 1).

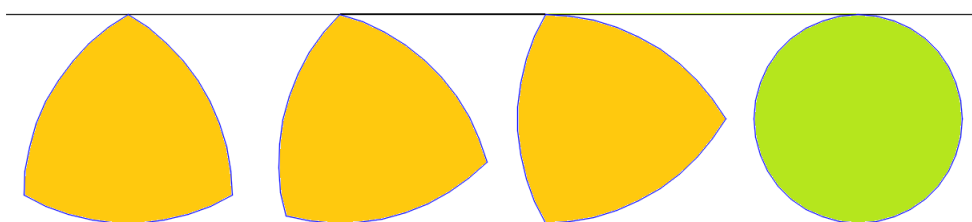


Figura 1: O Triângulo de Reuleaux de largura constante ou diâmetro constante.

Formalizaremos a construção do triângulo de Reuleaux nas próximas páginas. Nas referências [1] e [12] pode-se ler mais informações sobre curvas de largura constante.

¹ *curva plana*: Um panorama sobre curvas planas será introduzido no conteúdo do Capítulo 3.

1.1 PROPRIEDADES MATEMÁTICAS

A região limitada por um triângulo de Reuleaux é uma curva de largura constante baseada em um triângulo equilátero. Todos os pontos de um lado são equidistantes do vértice oposto (ver Figura 2).

Uma de suas propriedades é a **largura constante** ou **diâmetro constante**, o que significa que a figura pode ser girada completamente entre duas linhas tangentes e paralelas à curva separadas pela distância de medida **sempre igual** ao comprimento do lado do triângulo equilátero.

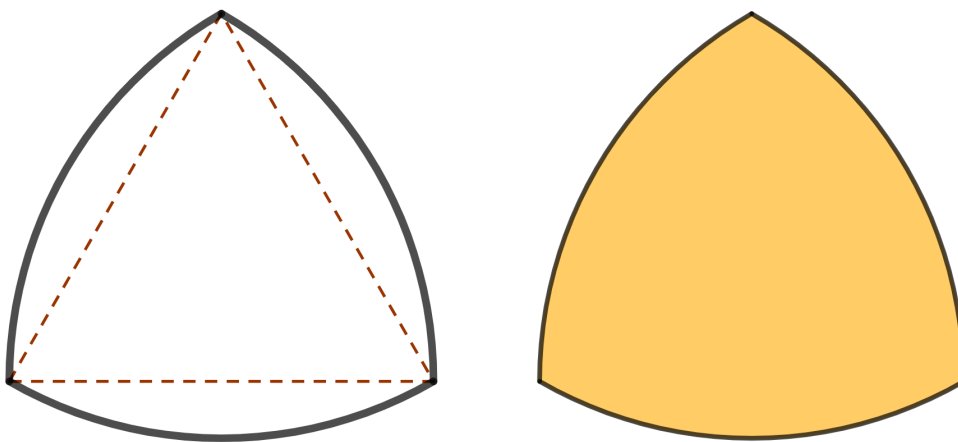


Figura 2: Triângulo de Reuleaux.

1.1.1 Construção

Com um compasso foram desenhados três círculos de raio s , o primeiro círculo é desenhado de forma arbitrária, o segundo círculo é desenhado tal que o centro deste seja um ponto da borda do primeiro e que necessariamente tenha o centro do primeiro em sua borda, afinal ambos têm o mesmo raio. Por fim, o terceiro círculo é desenhado com o centro em uma das duas intersecções dos dois primeiros círculos, passando pelo centros destes dois já desenhados (ver Figura 3).

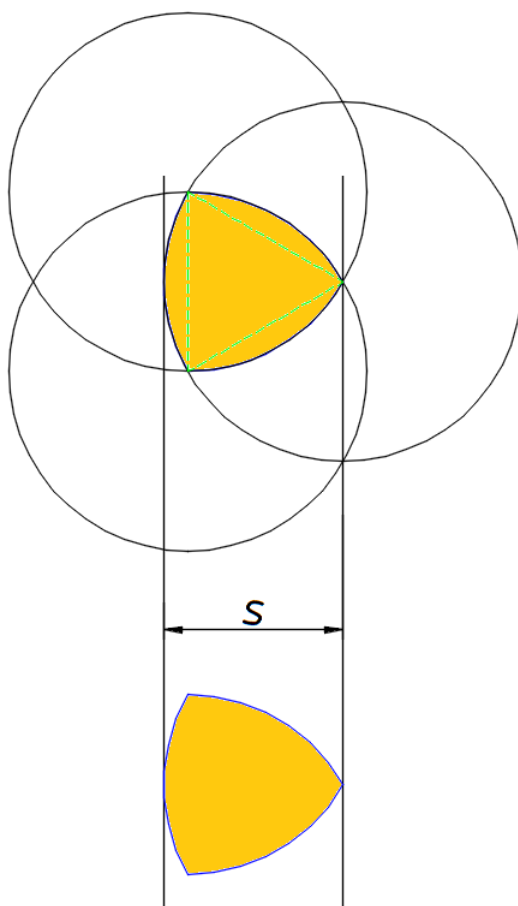


Figura 3: Construção de um triângulo de Reuleaux.

A região central resultante da intersecção desses três círculos é um Triângulo de Reuleaux de largura constante igual a s . Uma interessante construção pode ser vista no vídeo em [8].

1.1.2 Distâncias

Sendo o triângulo ABC equilátero de lado s e chamando de M o ponto médio do segmento \overline{BC} , e N o ponto médio do segmento \overline{AB} temos que as distâncias entre os pontos B e M , M e C , A e N , N e B são iguais a $\frac{s}{2}$ (ver Figura 4).

O fato de assumirmos que o triângulo ABC é equilátero e definido assim os pontos M e N , temos que os segmentos \overline{AM} e \overline{CN} são simultaneamente alturas, bissetrizes e

medianas do triângulo ABC . Sendo assim, temos que as distâncias entre os pontos A e M , C e N são iguais a $\frac{s\sqrt{3}}{2}$.

Seja o ponto G a intersecção dos segmentos \overline{AM} e \overline{CN} . Dessa forma, assim posto, o ponto G é chamado “baricentro” (intersecção das medianas) do triângulo ABC . E mais, o fato de assumirmos que o triângulo ABC é equilátero e definido assim o ponto G , temos que o ponto G é simultaneamente chamado de: ortocentro (intersecção das alturas), incentro (intersecção das bissetrizes) e circuncentro (intersecção das mediatrizes) do triângulo equilátero ABC . Portanto, temos que as distâncias entre os pontos A, B, C e o ponto G são iguais a $\frac{s\sqrt{3}}{3}$.

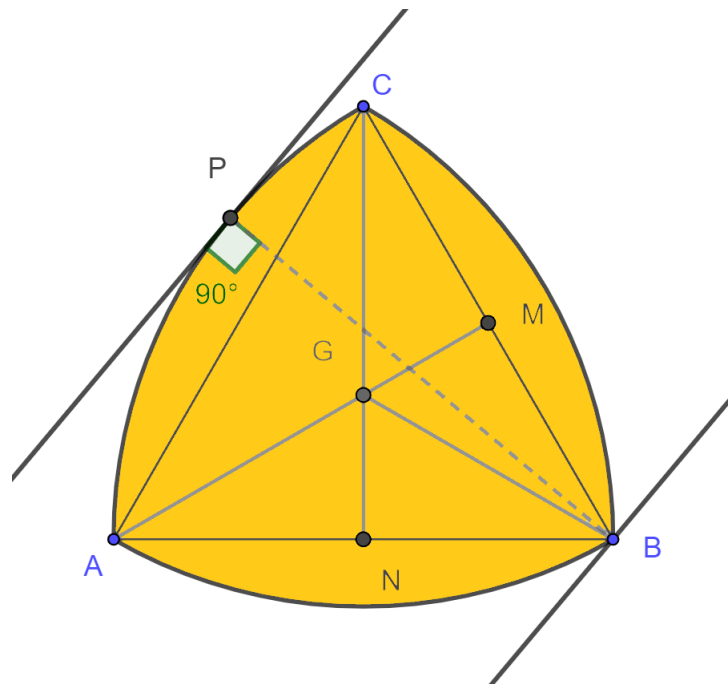


Figura 4: Temos que o ponto G é simultaneamente chamado de: ortocentro, incentro e circuncentro do triângulo equilátero ABC .

Para verificar que o Triângulo de Reuleaux é uma curva de largura constante, podemos escolher um ponto P que pertença a um dos três arcos e excluindo as extremidades dos arcos, afirmamos que existe uma reta T_P tangente a este arco e que passa por P , e considerando a reta T_V paralela a reta T_P que passa pelo vértice, ponto V , centro do arco que contém o ponto P , o Triângulo de Reuleaux está contido na região entre essas duas retas, pois a distância entre os pontos P e V é igual ao raio do arco, e o raio de origem no ponto V é perpendicular a reta tangente que passa pelo ponto P , temos que a distância entre as retas T_P e T_V é igual ao raio. A distância entre essas

retas independe da escolha do ponto P . Assim, concluímos que largura do Triângulo de Reuleaux é constante (ver Figura 5).

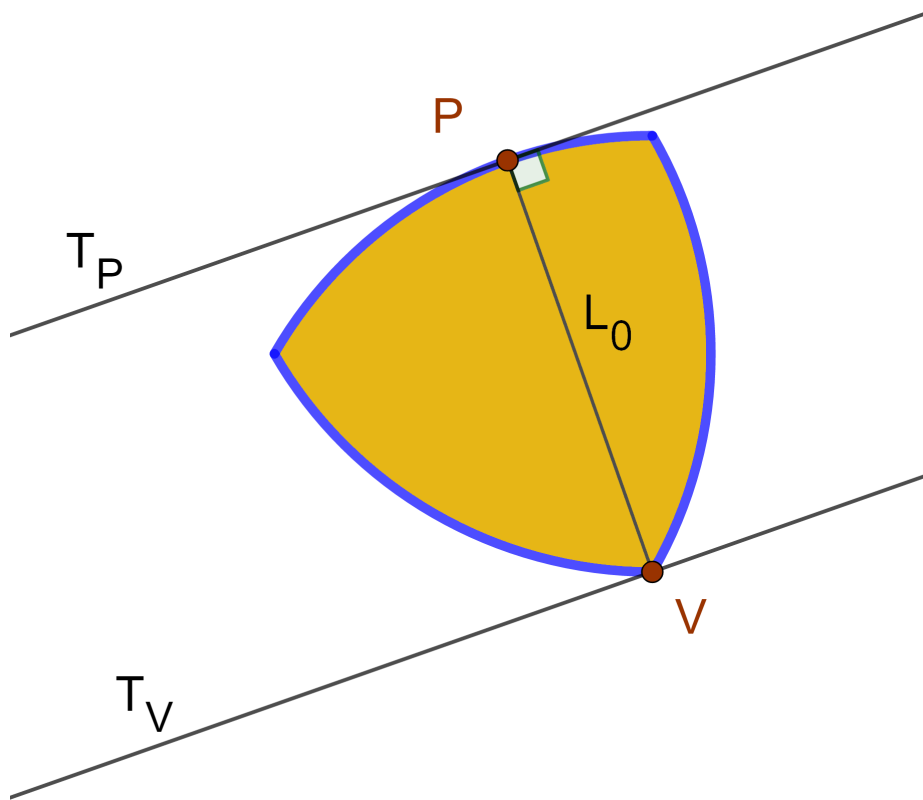


Figura 5: O Triângulo de Reuleaux é uma curva de largura constante.

1.1.3 Perímetro

Considerando que o ângulo θ (em radianos) é igual a razão entre a medida do comprimento L do arco e a medida do comprimento s do raio, temos que:

$$\theta = \frac{L}{s}$$

O $arco_1$ provém do vértice C do triângulo equilátero ABC de lado medida igual a s e a medida do ângulo do vértice C é igual a $\frac{\pi}{3}$ (ver Figura 6).

Assim, o comprimento do $arco_1$ é igual a $s \cdot \frac{\pi}{3}$

Analogamente os comprimentos dos $arco_2$ e $arco_3$ também são iguais a $s \cdot \frac{\pi}{3}$

Logo o perímetro é igual a soma dos comprimentos dos $arco_1$, $arco_2$ e $arco_3$ ou o triplo do comprimento de um dos arcos.

Assim posto e chamando de L_{TR} o perímetro do Triângulo de Reuleaux, temos:

$$L_{TR} = s \cdot \pi$$

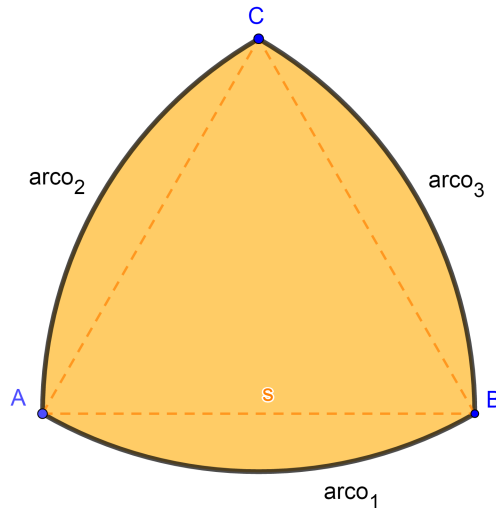


Figura 6: Perímetro: Soma do comprimento dos três arcos que formam o Triângulo de Reuleaux.

1.1.4 Área

Considerando que a área de um *setor circular*² de raio igual a s e ângulo central θ radianos pode ser calculada como $\frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \theta$ e a área de um *triângulo*³ equilátero de lado com medida igual a s pode ser calculada como $\frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

A figura 7 mostra uma representação de como calcular a área do Triângulo de Reuleaux, e chamando de A_{TR} pode-se escrever:

² *setor circular*: parte de um círculo limitada por dois raios e um arco de circunferência.

³ área de um triângulo $ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot \text{sen}(\angle A)}{2}$

$$A_{TR} = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right)$$

Portanto

$$A_{TR} = \frac{s^2}{2} \cdot (\pi - \sqrt{3})$$

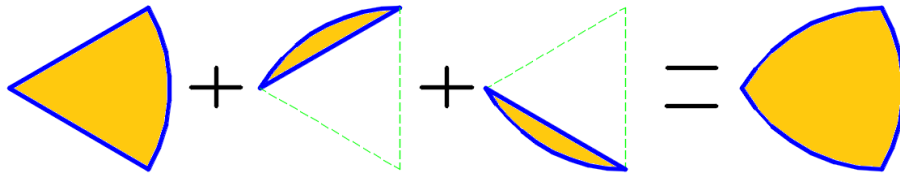


Figura 7: Temos que a área do Triângulo de Reuleaux pode ser calculada como a soma das áreas de um setor circular e o dobro da diferença entre as áreas de um setor circular e um triângulo equilátero.

1.1.5 Parametrização

Para essa seção nos baseamos nas referências [1], [4] e [10].

Uma *curva plana* pode ser descrita dando-se coordenadas de seus pontos como funções de uma variável independente.

No plano cartesiano (ver Figura 8), podemos escrever as coordenadas de um ponto P como um par ordenado:

- (x_P, y_P) sendo as *coordenadas retangulares* do ponto P , cujo x_P é o valor da medida da projeção do ponto P no eixo OX e y_P é o valor da medida da projeção do ponto P no eixo OY e;

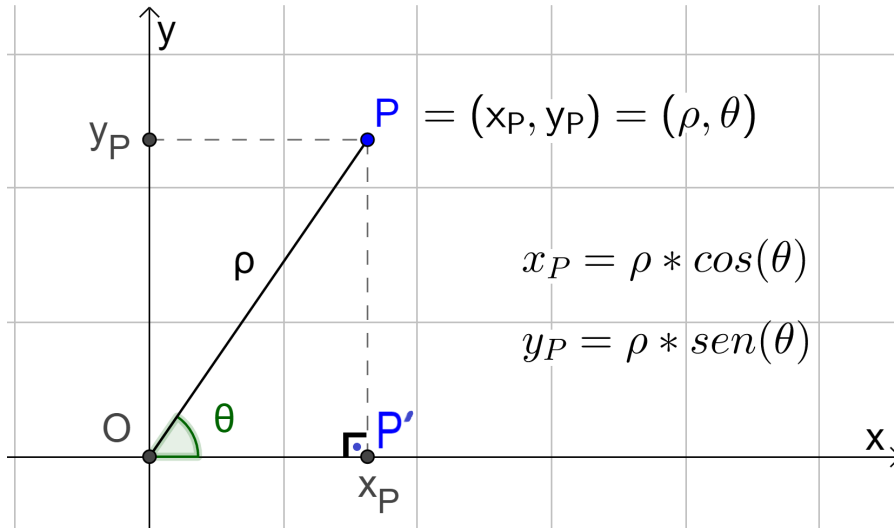


Figura 8: Ponto no plano cartesiano.

- (ρ, θ) sendo as *coordenadas polares* do ponto P , cujo ρ é o valor do *módulo*⁴ do ponto P no plano e θ é o valor do *argumento*⁵ do ponto P em relação ao eixo OX .
- Sendo o ponto $P' = (x_P, 0)$, temos que o triângulo $OP'P$ é retângulo em P' e as coordenadas do ponto $P = (x_P, y_P)$ podem ser expressas, em função de θ , como $x_P = x(\theta) = \rho \cdot \cos(\theta)$ e $y_P = y(\theta) = \rho \cdot \text{sen}(\theta)$, o que nós mostra a posição do ponto P em função do **parâmetro** θ .

Definição 1.2. Uma **curva contínua parametrizada** em \mathbb{R}^2 é uma aplicação $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, para alguns a, b reais com $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

$$\begin{aligned} \varphi :]a, b[\subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

onde $x :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ e $y :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto x(t)$ e $t \longmapsto y(t)$, com $a < t < b$, são chamadas **equações paramétricas** de φ com parâmetro t . A ideia de continuidade da curva aqui entendemos sendo único traço feito no plano, como um risco feito por um lápis sem sair do papel.

A parametrização de uma curva pode ser apresentada de diferentes formas.

⁴ *módulo*: é o valor da medida da distância entre a origem $(0, 0)$ ao ponto $P = (x, y)$

⁵ *argumento*: é o valor da medida do ângulo, em radianos, observado no sentido anti-horário entre o eixo OX e o segmento \overline{OP}

Exemplo 1.3. Sendo $C : x^2 + y^2 = R^2$ a circunferência com centro na origem e raio R , com $R > 0$, uma parametrização φ de uma volta completa com parâmetro θ , pode ser escrita com equações paramétricas $x(\theta) = R \cdot \cos(\theta)$ e $y(\theta) = R \cdot \sin(\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ e representada por:

$$\varphi(\theta) = (R \cdot \cos(\theta), R \cdot \sin(\theta))$$

Exemplo 1.4. Sendo $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ a circunferência com centro em (x_0, y_0) e raio R , com $R > 0$ e aplicando uma translação dos eixos OXY teremos um novo sistema de coordenadas $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ tal que $\tilde{O} = (x_0, y_0)$ seja o centro de C , assim as coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) são iguais a $(R \cdot \cos(\theta), R \cdot \sin(\theta))$ e teremos no sistema de eixos OXY as coordenadas: $x = x_0 + \tilde{x}$ e $y = y_0 + \tilde{y}$. E uma parametrização de C , β , de uma volta completa com parâmetro θ (ver Figura 9) pode ser escrita com equações paramétricas $x(\theta) = x_0 + R \cdot \cos(\theta)$ e $y(\theta) = y_0 + R \cdot \sin(\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ e representada por:

$$\beta(\theta) = (x_0 + R \cdot \cos(\theta), y_0 + R \cdot \sin(\theta))$$

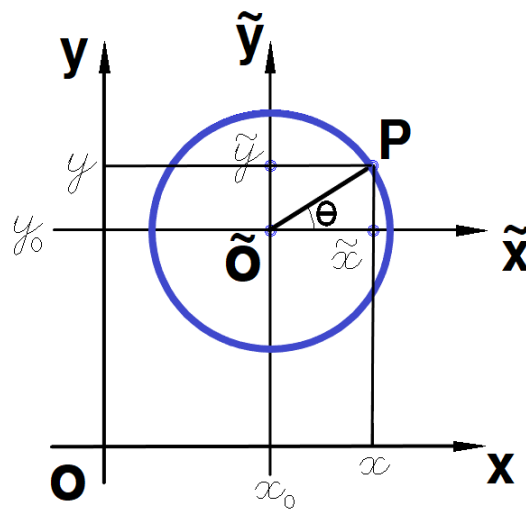


Figura 9: Circunferência com centro em (x_0, y_0) e raio R .

1.1.5.1 *Parametrização do Triângulo de Reuleaux como parte de três circunferências*

Sendo $\varphi(\theta)$ uma representação na forma paramétrica em coordenadas cartesianas de um arco de uma circunferência de centro em (x_0, y_0) e raio R , com $\theta \in [\alpha, \beta]$, com $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ (ver Figura 10) como:

$$\varphi(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (x_0 + R \cdot \cos(\alpha + \theta), y_0 + R \cdot \sin(\alpha + \theta))$$

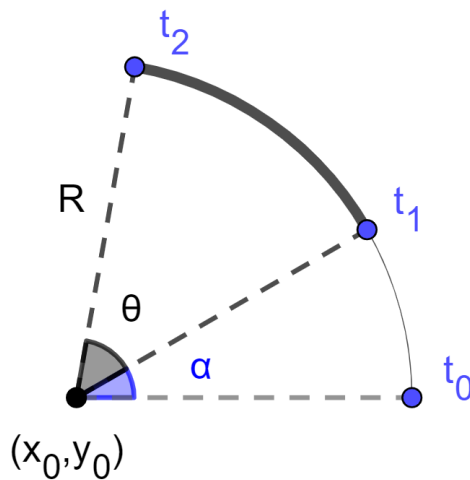


Figura 10: Parametrização de um arco de circunferência.

Podemos escrever uma parametrização $\varphi(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, de um Triângulo de Reuleaux de largura constante $s = 3$, com o baricentro do triângulo equilátero na origem no plano cartesiano, com vértices nos pontos $A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $B = (\sqrt{3}, 0)$ e $C = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Os pontos A , B e C devem ser *equipassados*⁶ na circunferência determinada por estes três pontos.

O intervalo $[0, \pi]$ do parâmetro θ foi dividido em três partes para parametrizar os três arcos de circunferência, assim dispostos: centrado no ponto A e arco com extremidades nos pontos B e C , centrado no ponto B e arco com extremidades nos pontos C e A e centrado no ponto C e arco com extremidades nos pontos A e B (ver Figura 11) como:

⁶ *equipassados*: posicionamento igualmente angular dos pontos na circunferência.

$$(x, y) = \varphi(\theta) = \begin{cases} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right), -\frac{3}{2} + 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \right), & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \left(\sqrt{3} + 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), 0 + 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right), & \text{se } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right), \frac{3}{2} + 3 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) \right), & \text{se } \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

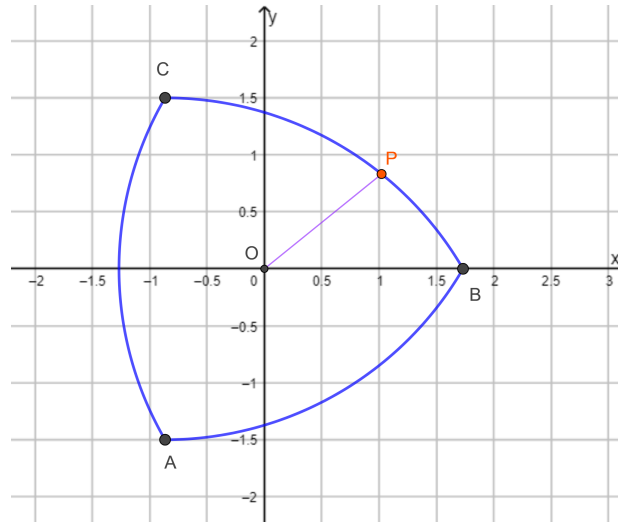


Figura 11: Triângulo de Reuleaux de centro na origem e vértices ABC. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/zgztmjvn>.

1.1.5.2 *Parametrização do Triângulo de Reuleaux com posicionamento do ponto P em função do ângulo central*

Indicando por D a distância do centro geométrico a cada um dos seus vértices do Triângulo de Reuleaux de largura s , e por $\rho(\theta)$ a distância do centro geométrico do Triângulo de Reuleaux até um ponto P da borda e, sendo θ o ângulo entre o eixo OX e o segmento \overline{OP} , com $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, pela Lei dos cossenos aplicada no triângulo AOP (ver Figura 13), temos:

$$(\rho(\theta))^2 + D^2 - 2 \cdot \rho(\theta) \cdot D \cdot \cos(\pi - \theta) = s^2$$

e o fato de

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

segue:

$$(\rho(\theta))^2 + 2 \cdot \rho(\theta) \cdot D \cdot \cos(\theta) + D^2 - s^2 = 0$$

As constantes s e D não são independentes, e tomando como referência o triângulo AOC , indicado na Figura 13, temos:

$$D^2 + D^2 - 2 \cdot D^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = s^2$$

logo $s^2 = 3 \cdot D^2$ e assim:

$$(\rho(\theta))^2 + 2 \cdot \rho(\theta) \cdot D \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot D^2 = 0$$

Resolvendo esta equação de segundo grau quanto a $(\rho(\theta))$, que é não negativo, segue:

$$\rho(\theta) = \frac{-2 \cdot D \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(2 \cdot D \cdot \cos(\theta))^2 - 4 \cdot (-2 \cdot D^2)}}{2}$$

Assim,

$$\rho(\theta) = D \cdot \left(-\cos(\theta) + \sqrt{(\cos(\theta))^2 + 2} \right)$$

e uma parametrização de uma circunferência de raio s e posicionamento do ponto P em função do ângulo fora do centro desta circunferência e raio $\rho(\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ (ver Figura 12), pode ser escrita como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \left(\cos(\theta), \sin(\theta) \right)$$

E assim, usando $\rho(\theta) = D \cdot \left(-\cos(\theta) + \sqrt{(\cos(\theta))^2 + 2} \right)$, uma parametrização de um dos três trechos do Triângulo de Reuleaux, com $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$, pode ser escrita como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \left(\cos(\theta), \sin(\theta) \right)$$

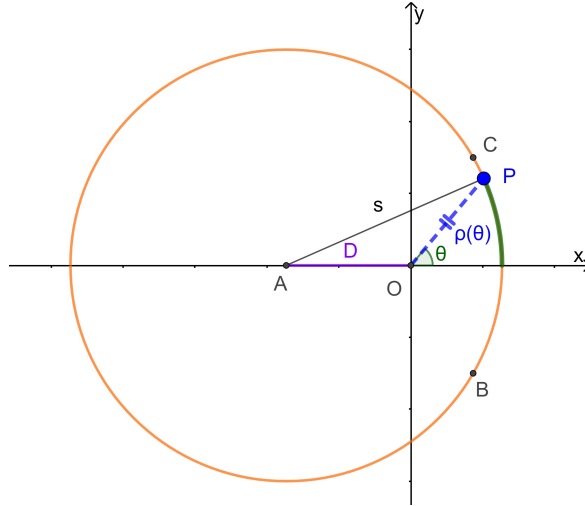


Figura 12: Parametrização de uma circunferência com s e posicionamento do ponto P em função do ângulo fora do centro e raio $\rho(\theta)$. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/x3g2ntuv>

Considerando $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ para uma parametrização dos três trechos, devemos fazer ajustes em ρ de acordo com o parâmetro (θ), assim:

$$\rho_1(\theta) = D \cdot \left(-\cos(\theta) + \sqrt{(\cos(\theta))^2 + 2}\right) \text{ para } \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\rho_2(\theta) = D \cdot \left(-\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + 2}\right) \text{ para } \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

$$\rho_3(\theta) = D \cdot \left(-\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + 2}\right) \text{ para } \theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$$

e podemos escrever uma parametrização $\varphi(\theta)$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, de um Triângulo de Reuleaux de largura constante s , com centro na origem no plano cartesiano com vértices nos pontos $A = (-D, 0)$, $B = \left(\frac{D}{2}, -\frac{D\sqrt{3}}{2}\right)$ e $C = \left(\frac{D}{2}, \frac{D\sqrt{3}}{2}\right)$, onde $D = \frac{s}{\sqrt{3}}$, mostrada na figura 14, como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = \begin{cases} \rho_1(\theta) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)), & \text{se } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \rho_2(\theta) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)), & \text{se } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \\ \rho_3(\theta) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)), & \text{se } \pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

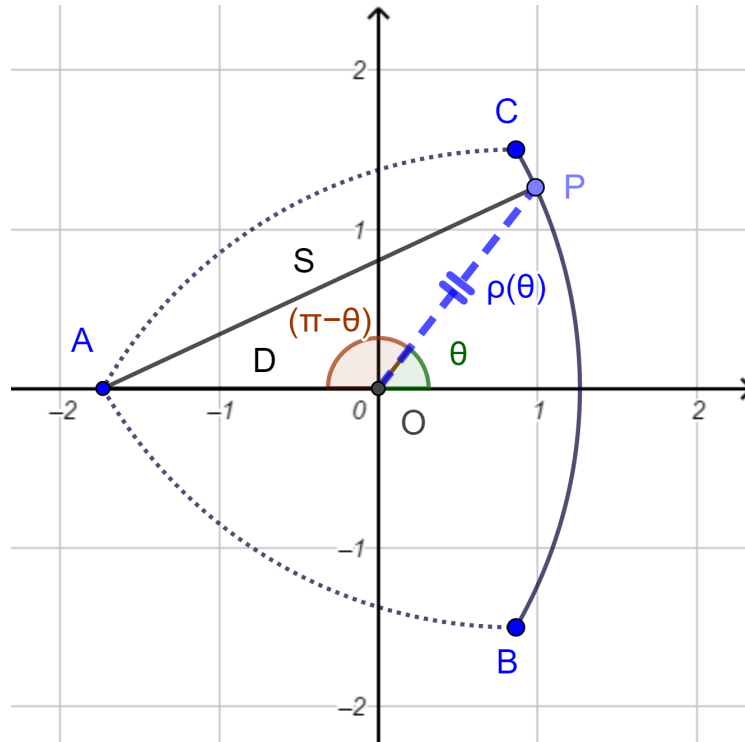


Figura 13: Parametrização de um trecho do Triângulo de Reuleaux com posicionamento do ponto P em função do ângulo central.

1.1.6 Estudo da parametrização do Triângulo de Reuleaux

A parametrização φ aqui apresentada é composta por três arcos em três intervalos. E calculando essa parametrização nos extremos de cada intervalo é possível analisar a continuidade e a não suavidade (bicos) do Triângulo de Reuleaux em seus vértices.

Para verificarmos a continuidade da curva no ponto C, mostrado na Figura 14, devemos ter:

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \varphi_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = C$$

Assim, calculando para $\theta = \frac{\pi}{3}$ por ρ_1 , temos:

$$\rho_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = D \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + 2} \right)$$

$$\rho_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = D \cdot \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \right)$$

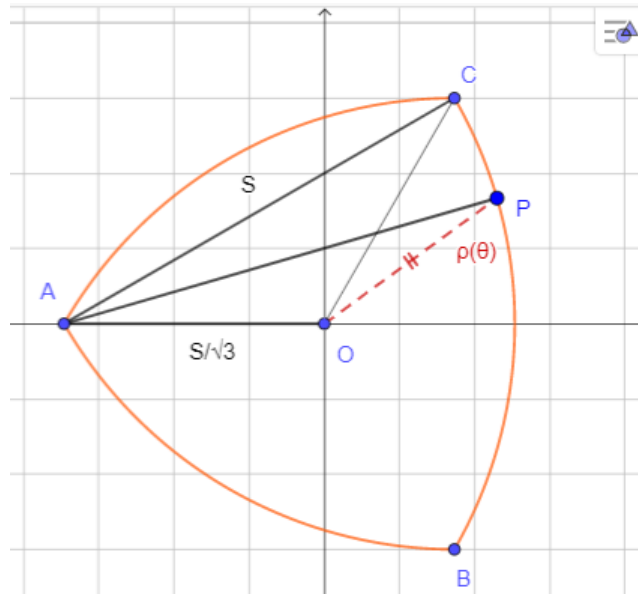


Figura 14: Parametrização do Triângulo de Reuleaux com posicionamento do ponto P em função do ângulo central. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/mxwkrty9>.

$$\rho_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = D$$

aplicando $\rho_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$ em $\varphi_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$ temos:

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \rho_1\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{D}{2}, \frac{D\sqrt{3}}{2}\right) = C$$

E calculando para $\theta = \frac{\pi}{3}$ por ρ_2 , temos:

$$\rho_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = D \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + 2}\right)$$

$$\rho_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = D \cdot \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2}\right)$$

$$\rho_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = D$$

aplicando $\rho_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ em $\varphi_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ temos:

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \rho_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{D}{2}, \frac{D\sqrt{3}}{2}\right) = C$$

E assim, podemos concluir a continuidade de φ no ponto C.

Analogamente, calculando $\varphi_2(\pi)$ e $\varphi_3(\pi)$ temos a continuidade da curva no ponto A , e calculando $\varphi_3\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ e $\varphi_1\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ temos a continuidade da curva no ponto B .

No Capítulo 3, veremos a definição de *vetor tangente* com mais detalhes.

A primeira derivada de φ é chamado *vetor tangente* (ou *vetor velocidade*) de φ no ponto $\varphi(\theta)$ é indicado por $\varphi'(\theta)$.

Sendo $\varphi(\theta) = \rho(\theta) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e usando a regra do produto para calcular a primeira derivada de φ , temos:

$$\varphi'(\theta) = \rho'(\theta) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)) + \rho(\theta) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta))'$$

Logo,

$$\varphi'(\theta) = (\rho'(\theta) \cdot \cos(\theta) - \rho(\theta) \cdot \sin(\theta), \rho'(\theta) \cdot \sin(\theta) + \rho(\theta) \cdot \cos(\theta))$$

Considerando $\rho(\theta) = D \cdot (-\cos(\theta) + \sqrt{(\cos(\theta))^2 + 2})$ e usando a regra da cadeia para calcular a primeira derivada de ρ , temos:

$$\rho'(\theta) = D \cdot \left(\sin(\theta) - \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{(\cos(\theta))^2 + 2}} \right)$$

Assim temos:

$$\varphi'(\theta) = \begin{cases} \varphi'_1(\theta) = (\rho'_1(\theta) \cdot \cos(\theta) - \rho_1(\theta) \cdot \sin(\theta), \rho'_1(\theta) \cdot \sin(\theta) + \rho_1(\theta) \cdot \cos(\theta)), \\ \varphi'_2(\theta) = (\rho'_2(\theta) \cdot \cos(\theta) - \rho_2(\theta) \cdot \sin(\theta), \rho'_2(\theta) \cdot \sin(\theta) + \rho_2(\theta) \cdot \cos(\theta)), \\ \varphi'_3(\theta) = (\rho'_3(\theta) \cdot \cos(\theta) - \rho_3(\theta) \cdot \sin(\theta), \rho'_3(\theta) \cdot \sin(\theta) + \rho_3(\theta) \cdot \cos(\theta)) \end{cases}$$

observando os intervalos de θ para $\varphi'_i(\theta)$, $i = 1, 2, 3$, são:

$$\varphi'(\theta) = \begin{cases} \varphi'_1(\theta) \text{ para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \varphi'_2(\theta) \text{ para } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \\ \varphi'_3(\theta) \text{ para } \pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

onde:

$$\rho'_1(\theta) = D \cdot \left(\sin(\theta) - \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{(\cos(\theta))^2 + 2}} \right)$$

$$\rho'_2(\theta) = D \cdot \left(\operatorname{sen} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\operatorname{sen} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)}{\sqrt{\left(\cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right)^2 + 2}} \right)$$

$$\rho'_3(\theta) = D \cdot \left(\operatorname{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\operatorname{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)}{\sqrt{\left(\cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right)^2 + 2}} \right)$$

Assim, calculando $\rho'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right)$ para aplicarmos em $\varphi'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right)$ temos:

$$\rho'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) = D \cdot \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) - \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{\left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)^2 + 2}} \right)$$

$$\rho'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) = D \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2}} \right)$$

$$\rho'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{D\sqrt{3}}{3}$$

e aplicando $\rho'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right)$ em $\varphi'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right)$ temos:

$$\varphi'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(\rho'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \rho_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right), \rho'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) + \rho_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

Logo:

$$\varphi'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{D\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} - D \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{D\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + D \cdot \frac{1}{2} \right)$$

Assim:

$$\varphi'_1 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{D\sqrt{3}}{3}, D \right)$$

E calculando $\rho'_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ para aplicarmos em $\varphi'_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ temos:

$$\rho'_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = D \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + 2}} \right)$$

$$\rho'_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = D \cdot \left(\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}} \right) = \frac{-D\sqrt{3}}{3}$$

Aplicando $\rho'_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ em $\varphi'_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ temos:

$$\varphi'_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\rho'_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \rho_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right), \rho'_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \rho_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Logo:

$$\varphi'_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{-D\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} - D \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-D\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + D \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Portanto:

$$\varphi'_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{-2D\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

Observamos que $\varphi'_1\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq \varphi'_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e assim confirmamos a não suavidade (bico) no vértice C do Triângulo de Reuleaux (ver Figura 15).

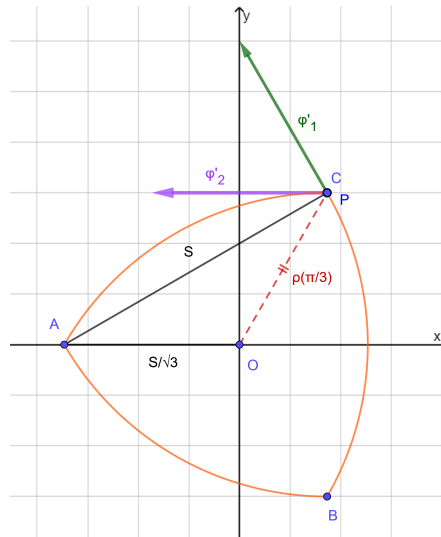


Figura 15: Vetores tangentes no vértice C do Triângulo de Reuleaux por $\varphi'_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e por $\varphi'_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

1.2 TRIÂNGULO DE REULEAUX SEM BICOS . . . TRSB

Se rolarmos uma circunferência k_1 de diâmetro a do lado externo do Triângulo de Reuleaux de *largura constante* s teremos um Triângulo de Reuleaux Sem Bicos que chamaremos de "TRSB". Essa curva também possui *largura constante* de medida igual a $(s + 2a)$ (ver Figura 16).

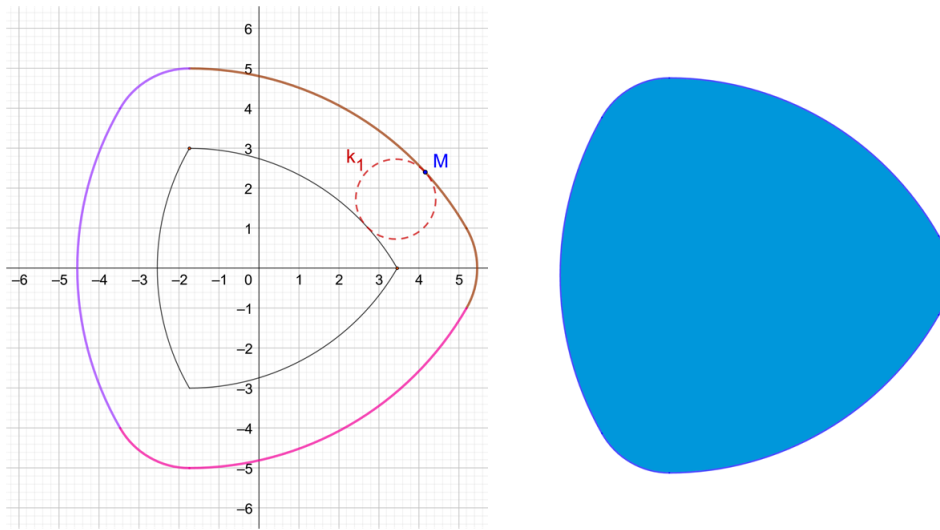


Figura 16: Triângulo de Reuleaux Sem Bicos.

1.2.1 Construção do TRSB

Construção a partir de um triângulo ABC equilátero de lado s .

A notação $D - A - B$ indica que queremos dizer que os pontos A , B e D pertencem a mesma reta e que o ponto A encontra-se entre os pontos B e D .

Desenhar três retas passando pelos vértices do triângulo ABC , retas: AB , AC e BC . Com um compasso desenhar três arcos de circunferência de raio a , $a \in \mathbb{R}_+^*$, com centro em cada um dos vértices do triângulo ABC e abertura entre os ângulos opostos aos ângulos internos do triângulo ABC . Seja o ponto D pertencente à reta AB , com

$D - A - B$ e seja o ponto E pertencente à reta AC , com $E - A - C$. Sejam os pontos D e E as extremidades do menor arco com centro no vértice A e raio a . Seja o ponto F pertencente à reta BC , com $F - B - C$ e seja o ponto G pertencente à reta AB , com $G - B - A$. Sejam os pontos F e G as extremidades do menor arco com centro no vértice B e raio a . Seja o ponto H pertencente à reta AC , com $H - C - A$ e seja o ponto I pertencente à reta BC , com $I - C - B$. Sejam os pontos H e I as extremidades do menor arco com centro no vértice C e raio a . Seja w a soma da medida s (lado do triângulo equilátero ABC) com a medida a (raio dos arcos desenhados na etapa anterior). Com um compasso e raio w , desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto A , e extremidades nos pontos G e H . Com um compasso e raio w , desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto B , e extremidades nos pontos I e D . Com um compasso e raio w , desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto C , e extremidades nos pontos E e F . E assim teremos o TRSB (ver Figura 17).

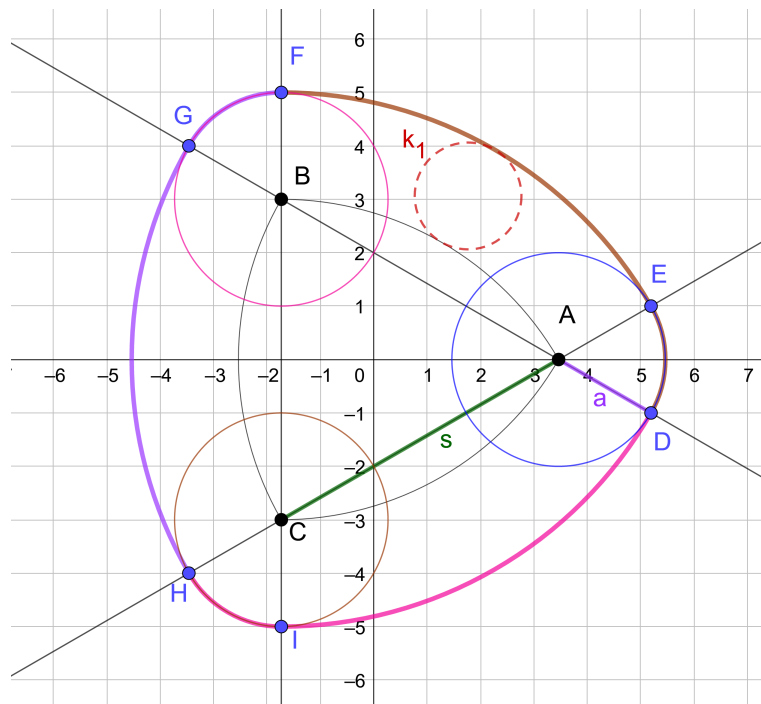


Figura 17: Construção TRSB a partir de um triângulo equilátero.

1.2.2 TRSB é uma curva de largura constante $S_0 = 2a + s$

A construção do TRBS são três pares de arcos de raios de medidas a e $(s+a)$ traçados em centros que são os vértices de um triângulo equilátero de lado s . Observe que, para para cada ponto K de um dos arcos do TRSB existe um correspondente ponto K' que pertence ao arco de mesmo centro e oposto ao arco que contém o ponto K . O traço dessa curva está contido na região entre a reta T_K tangente à curva em K e a reta $T_{K'}$ paralela a reta T_K passando por K' que pertence ao arco oposto que contém K . A reta $T_{K'}$ é tangente à curva em K' . Esses dois arcos possuem o mesmo centro C e, os pontos K , K' e C pertencem à mesma reta. A distância entre essas retas independe da escolha do ponto K e é igual a soma dos raios destes dois arcos. Concluimos, portanto, que a largura do TRSB é constante (ver Figura 18).

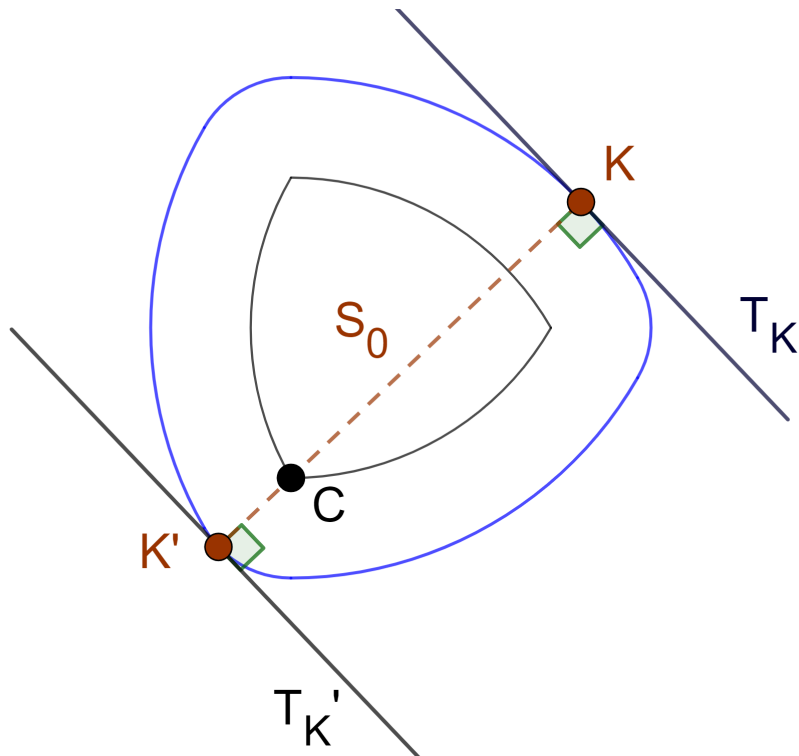


Figura 18: TRSB uma curva de largura constante $S_0 = 2a + s$. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/yvuxyp3x>.

1.2.3 *Perímetro do TRSB*

Observando que o perímetro do TRSB é composto de três arcos de raio a e ângulo $\frac{\pi}{3}$ e três arcos de raio w e ângulo $\frac{\pi}{3}$. Chamando de L_{TRSB} como perímetro do Triângulo de Reuleaux Sem Bicos, temos:

$$L_{TRSB} = 3 \cdot w \cdot \frac{\pi}{3} + 3 \cdot a \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$L_{TRSB} = w \cdot \pi + a \cdot \pi = (s + a) \cdot \pi + a \cdot \pi$$

Assim,

$$L_{TRSB} = (s + 2a) \cdot \pi$$

1.2.4 *Área do TRSB*

Observando que a área do TRSB é composta por um Triângulo de Reuleaux de *largura* s , três setores circulares de raio a e ângulo $\frac{\pi}{3}$ e três partes de setores circulares de (raio w - raio s) e ângulo $\frac{\pi}{3}$ (ver Figura 19). Chamando de A_{TRSB} a área do Triângulo de Reuleaux Sem Bicos, temos:

$$A_{TRSB} = \frac{s^2}{2} \cdot (\pi - \sqrt{3}) + 3 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{(w^2 - s^2)}{2} \cdot \frac{\pi}{3}$$

Assim,

$$A_{TRSB} = \frac{s^2}{2} \cdot (\pi - \sqrt{3}) + a \cdot \pi \cdot (s + a)$$

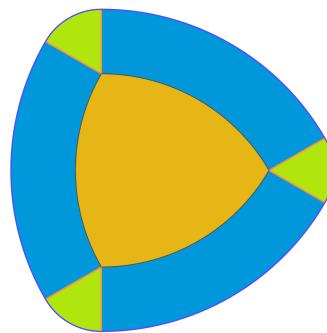


Figura 19: Temos que a área do TRSB pode ser calculada como a soma de um Triângulo de Reuleaux de *largura* s com três setores circulares de raio a e ângulo $\frac{\pi}{3}$ e três partes de setores circulares de (raio w - raio s) e ângulo $\frac{\pi}{3}$.

1.2.5 Parametrização do TRSB com posicionamento do ponto P em função do ângulo central

Seja $\beta = \arctan\left(\frac{a \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{D + a \cdot \cos \frac{\pi}{6}}\right)$, $\beta = \angle AOE$, e indicando por D a distância do centro geométrico a cada um dos seus vértices do Triângulo de Reuleaux de largura s , com $D = \frac{s}{\sqrt{3}}$, e por $\rho_1(\theta)$ a distância do centro geométrico do TRSB até um ponto P da borda e, sendo θ o ângulo entre o eixo OX e o segmento \overline{OP} , com $\theta \in [-\beta, \beta]$, posicionado como referência a Figura 20. Pela Lei dos cossenos aplicada no triângulo AOP , temos:

$$(\rho_1(\theta))^2 + D^2 - 2 \cdot \rho_1(\theta) \cdot D \cdot \cos(\theta) = a^2$$

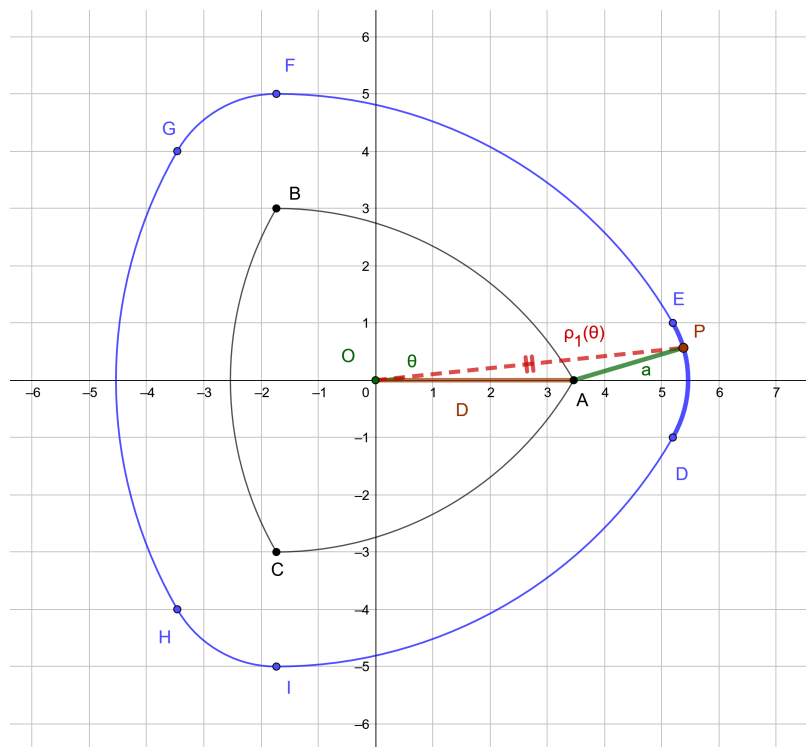


Figura 20: Parametrização do Triângulo de Reuleaux com posicionamento do ponto P em função do ângulo central, primeiro trecho.

segue:

$$(\rho_1(\theta))^2 - 2 \cdot \rho_1(\theta) \cdot D \cdot \cos(\theta) + (D^2 - a^2) = 0$$

Resolvendo esta equação de segundo grau quanto a $(\rho_1(\theta))$, e tomando a maior raiz, segue, para todo $\theta \in [-\beta, \beta]$, que:

$$\rho_1(\theta) = \frac{2 \cdot D \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(2 \cdot D \cdot \cos(\theta))^2 - 4 \cdot (D^2 - a^2)}}{2}$$

Assim,

$$\rho_1(\theta) = D \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(D \cdot \cos(\theta))^2 - (D^2 - a^2)}$$

e uma parametrização do primeiro dos seis trechos do TRSB, com $\theta \in [-\beta, \beta]$, pode ser escrita como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = (\rho_1(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_1(\theta) \cdot \sin(\theta))$$

Indicando por w a distância de cada um dos vértices do Triângulo de Reuleaux de largura s até um ponto P da borda, com $w = s + a$, e por $\rho_2(\theta)$ a distância do centro geométrico do TRSB até um ponto P da borda e, sendo θ o ângulo entre o eixo OX e o segmento \overline{OP} , com $\theta \in \left[\beta, \frac{2\pi}{3} - \beta\right]$, posicionando como referência a Figura 21, e pela Lei dos cossenos aplicada no triângulo COP , temos:

$$(\rho_2(\theta))^2 + D^2 - 2 \cdot \rho_2(\theta) \cdot D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = w^2$$

segue:

$$(\rho_2(\theta))^2 - 2 \cdot \rho_2(\theta) \cdot D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - (w^2 - D^2) = 0$$

Resolvendo esta equação de segundo grau quanto a $(\rho_2(\theta))$, que é não negativo, segue, para todo $\theta \in \left[\beta, \frac{2\pi}{3} - \beta\right]$, que:

$$\rho_2(\theta) = \frac{2 \cdot D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(2 \cdot D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + 4 \cdot (w^2 - D^2)}}{2}$$

Assim,

$$\rho_2(\theta) = D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + (w^2 - D^2)}$$

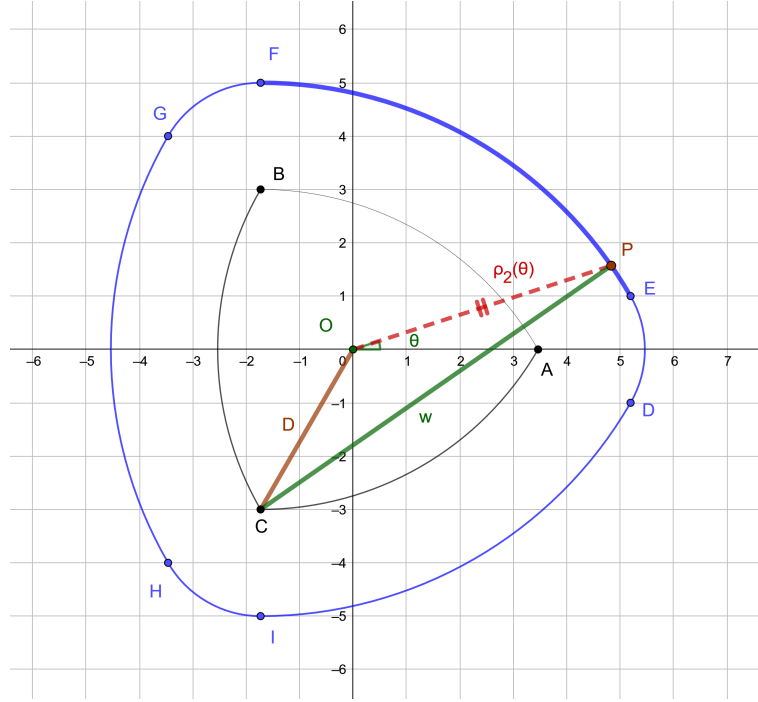


Figura 21: Parametrização do Triângulo de Reuleaux com posicionamento do ponto P em função do ângulo central, segundo trecho.

e uma parametrização do segundo dos seis trechos do TRSB, com $\theta \in \left[\beta, \frac{2\pi}{3} - \beta \right]$, pode ser escrita como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = (\rho_2(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_2(\theta) \cdot \sin(\theta))$$

Considerando com $\theta \in [-\beta, 2\pi - \beta]$ para uma parametrização de cada um dos seis trechos, devemos fazer ajustes em ρ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, de acordo com o parâmetro (θ), assim:

$$\rho_1(\theta) = D \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(D \cdot \cos(\theta))^2 + a^2 - D^2} \text{ para } \theta \in [-\beta, \beta]$$

$$\rho_2(\theta) = D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + w^2 - D^2} \text{ para } \theta \in \left[\beta, \frac{2\pi}{3} - \beta\right]$$

$$\rho_3(\theta) = D \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(D \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + a^2 - D^2} \text{ para } \theta \in \left[\frac{2\pi}{3} - \beta, \frac{2\pi}{3} + \beta\right]$$

$$\rho_4(\theta) = D \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(D \cdot \cos(\theta))^2 + w^2 - D^2} \text{ para } \theta \in \left[\frac{2\pi}{3} + \beta, \frac{4\pi}{3} - \beta\right]$$

$$\rho_5(\theta) = D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(D \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + a^2 - D^2} \text{ para } \theta \in \left[\frac{4\pi}{3} - \beta, \frac{4\pi}{3} + \beta\right]$$

$$\rho_6(\theta) = D \cdot \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt{\left(D \cdot \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right)^2 + w^2 - D^2} \text{ para } \theta \in \left[\frac{4\pi}{3} + \beta, 2\pi - \beta\right]$$

e podemos escrever uma parametrização $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-\beta, 2\pi - \beta]$, de um TRSB de largura constante $(s + 2a)$, s e a constantes, com centro na origem no plano cartesiano, onde $D = \frac{s}{\sqrt{3}}$ e $w = s + a$ (ver Figura 22), como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = \begin{cases} (\rho_1(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_1(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } -\beta \leq \theta \leq \beta \\ (\rho_2(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_2(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \beta \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} - \beta \\ (\rho_3(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_3(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \frac{2\pi}{3} - \beta \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} + \beta \\ (\rho_4(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_4(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \frac{2\pi}{3} + \beta \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} - \beta \\ (\rho_5(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_5(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \frac{4\pi}{3} - \beta \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} + \beta \\ (\rho_6(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_6(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \frac{4\pi}{3} + \beta \leq \theta \leq 2\pi - \beta \end{cases}$$

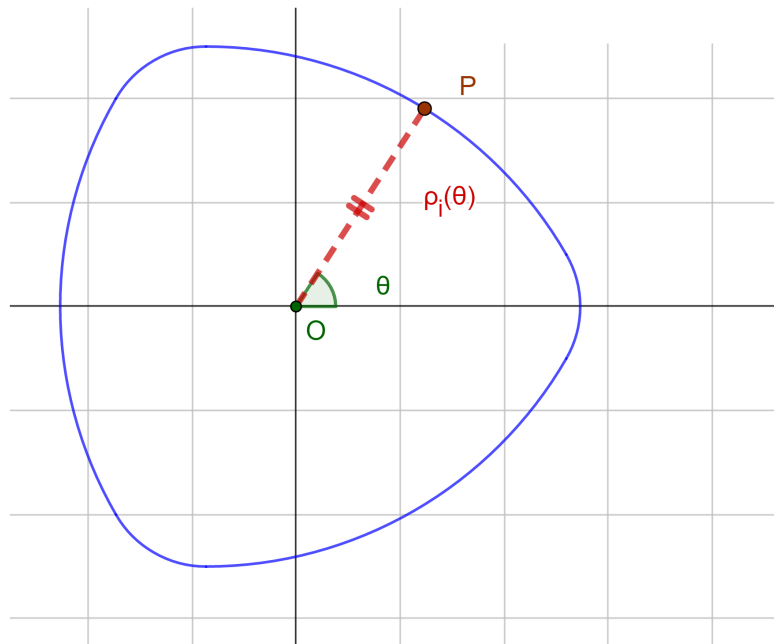


Figura 22: Parametrização do TRSB com deslocamento do ponto P em função do ângulo central. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/wyujc2mq>.

UMA VARIAÇÃO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX (VTR)

O Triângulo de Reuleaux é construído a partir de um triângulo equilátero e a combinação de três arcos de mesmo raio. Vamos estudar uma Variação do Triângulo de Reuleaux (VTR) construído a partir de dois triângulos isósceles retângulos e a combinação de quatro arcos de três raios diferentes (ver Figura 23).

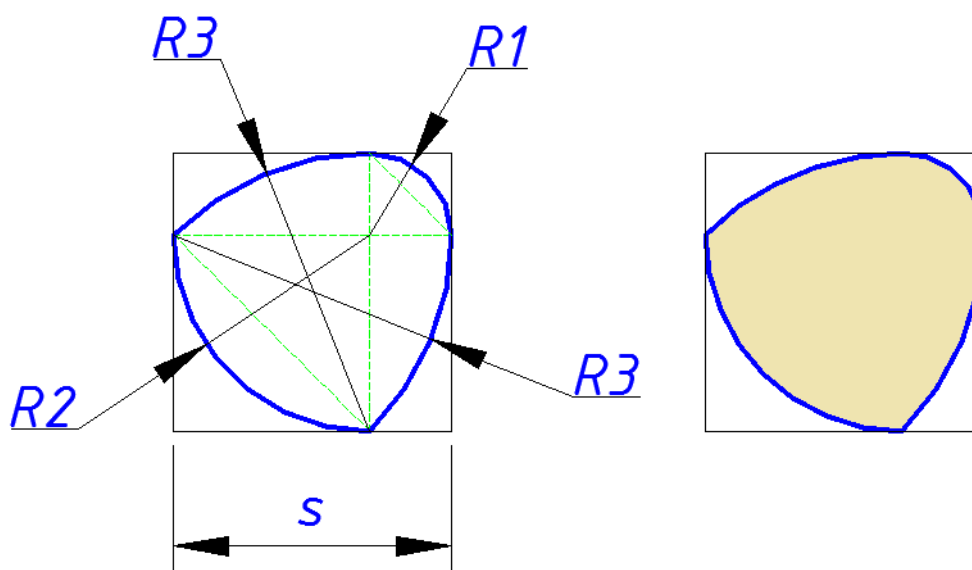


Figura 23: Variação de um Triângulo de Reuleaux (VTR).

Uma adaptação de:

<https://demonstrations.wolfram.com/DrillingASquareHole/>

(acesso em 09/01/2020)

Essa *VTR* é uma curva assim como o Triângulo de Reuleaux também é dita *de largura constante*. Na referência [12] pode-se ler mais informações sobre curvas de largura constante (ver Figura 24).

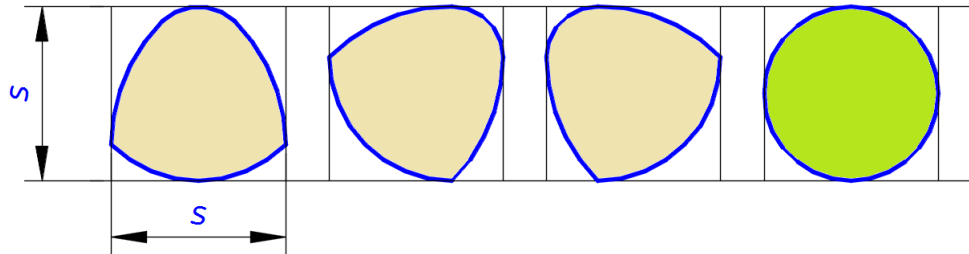


Figura 24: Variação de um Triângulo de Reuleaux (*VTR*).

Formalizaremos a construção da *VTR* nas próximas páginas.

2.1 PROPRIEDADES MATEMÁTICAS DA *VTR* EM ESTUDO

A região limitada por essa *VTR* é uma curva de largura constante baseada em dois triângulos isósceles retângulos e a combinação de quatro arcos de três raios diferentes (ver Figura 25).

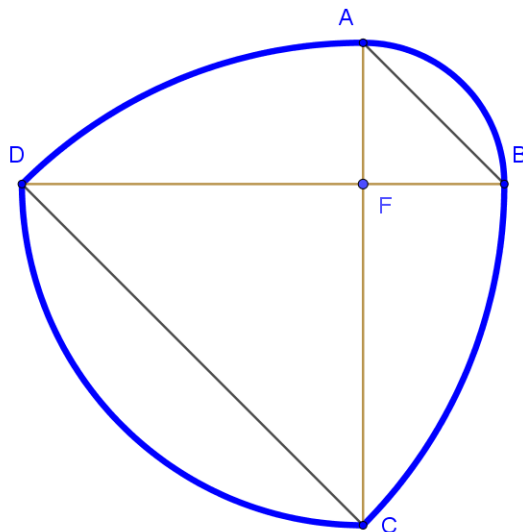


Figura 25: Variação de um Triângulo de Reuleaux (*VTR*).

2.1.1 Construção da VTR em estudo

Construção a partir de círculos

Com um compasso, desenhamos dois círculos de raio s , o primeiro círculo é desenhado de forma arbitrária, o segundo círculo é desenhado tal que o centro deste seja um ponto da borda do primeiro e que necessariamente tenha o centro do primeiro em sua borda, afinal ambos têm o mesmo raio. Sejam os pontos C e D os centros de cada um destes dois círculos. Traçamos o segmento \overline{CD} . Traçamos por C uma reta l_1 tal que forme um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com o segmento \overline{CD} . Traçamos por D uma reta l_2 perpendicular à l_1 . Seja F o ponto de intersecção entre l_1 e l_2 . Seja A o ponto de intersecção entre a reta l_1 e o círculo de centro C . Seja B o ponto de intersecção entre a reta l_2 e o círculo de centro D . Sejam o $arco_1$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto F , com extremidades nos pontos A e B , o $arco_2$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto F , com extremidades nos pontos C e D , o $arco_3$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto D , com extremidades nos pontos B e C e o $arco_4$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto C e com extremidades nos pontos A e D . Assim teremos a VTR (ver Figura 26).

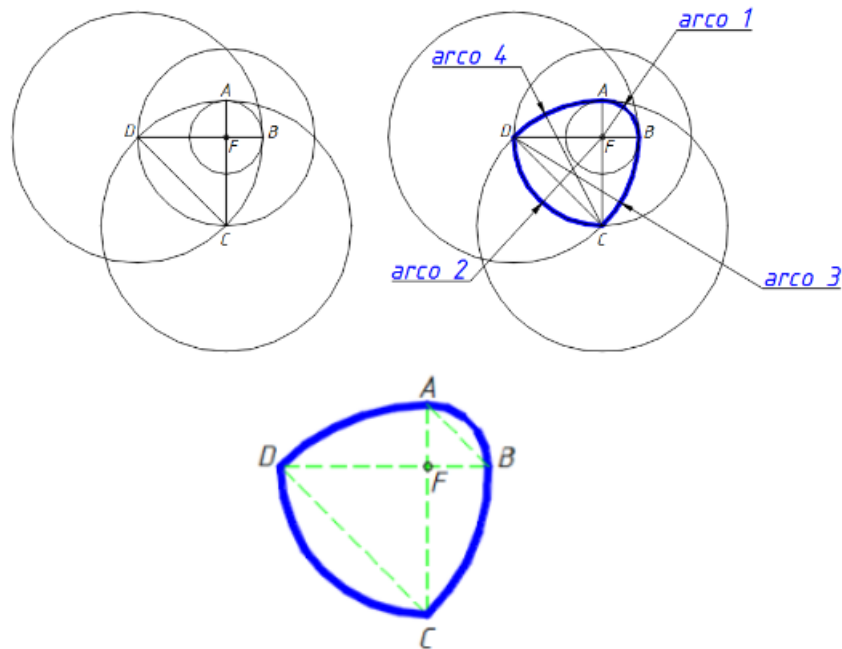


Figura 26: Construção VTR a partir de círculos.

Construção a partir de um quadrado

A partir de um quadrado $PQUT$ de lado s , traçamos o arco de circunferência de centro em P e raio s unindo os pontos Q e T . Seja F a intersecção deste arco com a diagonal \overline{PU} . Seja o ponto A do lado \overline{QU} e o ponto C do lado \overline{PT} , tal que o segmento \overline{AC} passe pelo ponto F e seja paralelo ao lado \overline{PQ} . Seja o ponto B do lado \overline{UT} e o ponto D do lado \overline{PQ} , tal que o segmento \overline{BD} passe pelo ponto F e seja paralelo ao lado \overline{PT} .

Temos que $s \equiv \overline{PT} \equiv \overline{PF} \equiv \overline{DB}$, também $\overline{PF} \equiv \overline{DC}$ pois são diagonais do quadrado $PDFC$, assim $\overline{DB} \equiv \overline{DC}$.

Sejam o $arco_1$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto F , com extremidades nos pontos A e B , o $arco_2$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto F , com extremidades nos pontos C e D , o $arco_3$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto D , com extremidades nos pontos B e C e o $arco_4$ o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto C e com extremidades nos pontos A e D . Observe que o $arco_3$ e o $arco_4$ provém dos centros D e C , do triângulos BCD e ACD isósceles e base \overline{BC} e \overline{AD} , respectivamente, de lados de medidas iguais a s e os ângulos opostos às bases são iguais a $\frac{\pi}{4}$. Logo, o comprimento dos $arco_3$ e $arco_4$ são iguais. Assim teremos a VTR (ver Figura 27).

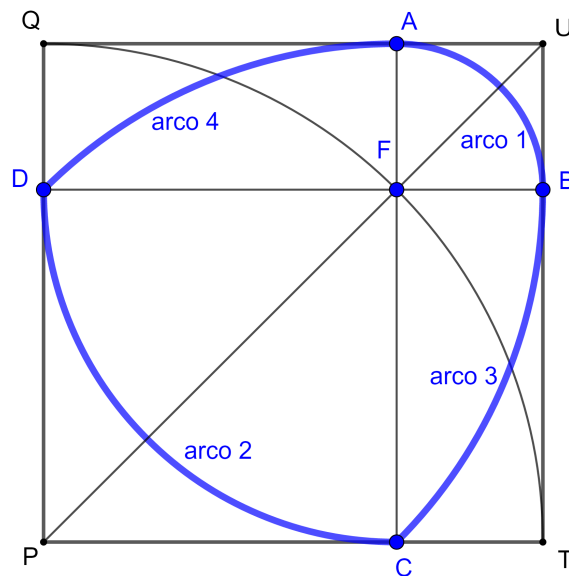


Figura 27: Construção VTR a partir de um quadrado de lado s .

2.1.2 Distâncias da VTR em estudo

Considerando um quadrado $PQRT$ de lado s (ver Figura 28), temos:

- ☞ os triângulos CAD e DBC são isósceles (não retângulos) de bases \overline{AD} e \overline{BC} , respectivamente, e que as distâncias entre os pontos C e A , C e D , D e B , são iguais a s ;
- ☞ o triângulo FDC é isósceles retângulo em F e base \overline{CD} , temos que a distância entre os pontos C e D é igual a s , visto que $PCFD$ é um quadrado de diagonal \overline{PF} , e que as distâncias entre os pontos F e D , F e C , são iguais a $R = s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- ☞ o triângulo FAB é isósceles retângulo em F e base \overline{AB} , temos que as distâncias entre os pontos F e A , F e B são iguais a $r = s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- ☞ e que a distância entre os pontos A e B é igual a $s \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$.

2.1.3 A VTR tem largura constante

Observe que, para cada ponto K da Variação do Triângulo de Reuleaux que pertença a um dos dois arcos centrado no ponto F , incluindo os extremos deste arco, existe um correspondente ponto K' que pertence ao outro arco centrado em F , o traço dessa curva está contido na região entre a reta T_K tangente à curva em K e reta paralela a T_K passando em K' tangente à curva em K' e a distância entre essas retas T_K e T'_K é $R + r = s$. Seja um ponto E que pertença a um dos dois arcos não centrados no ponto F , incluindo os extremos deste arco, a distância entre a reta T_E tangente à curva em E e a reta paralela a T_E passando pelo centro deste arco que contém E é igual a s . Concluimos, portanto, que a largura da Variação do Triângulo de Reuleaux é constante (ver Figura 28).

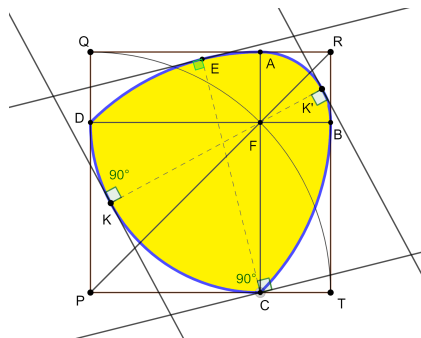


Figura 28: VTR é uma curva de largura constante.

2.1.4 Perímetro da VTR em estudo

Considerando que o ângulo θ (em radianos) é igual a razão entre a medida do comprimento L do arco e a medida do comprimento s do raio, temos que:

$$\theta = \frac{L}{s}$$

O $arco_1$ provém do centro F do triângulo FAB isósceles retângulo em F e base \overline{AB} de lados de medidas iguais a $s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Assim, o comprimento do $arco_1$ é igual a $s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$

O $arco_2$ provém do centro F do triângulo FCD isósceles retângulo em F e base \overline{CD} de lados de medidas iguais a $s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, o comprimento do $arco_2$ é igual a $s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

Os $arco_3$ e $arco_4$ provém dos centros D e C , dos triângulos BCD e ADC isósceles e base \overline{BC} e \overline{AD} , respectivamente, de lados de medidas iguais a s e os ângulos opostos às bases são iguais a $\frac{\pi}{4}$. Assim, o comprimento dos $arco_3$ e $arco_4$ são iguais a $s \cdot \frac{\pi}{4}$.

Logo o perímetro é igual à soma dos comprimentos dos $arco_1$, $arco_2$, $arco_3$ e $arco_4$ (ver Figura 29). Assim posto e chamando de L_{VTR} como perímetro da Variação do Triângulo de Reuleaux em estudo, temos:

$$L_{VTR} = s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} + s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot s \cdot \frac{\pi}{4}$$

Portanto

$$L_{VTR} = s \cdot \pi$$

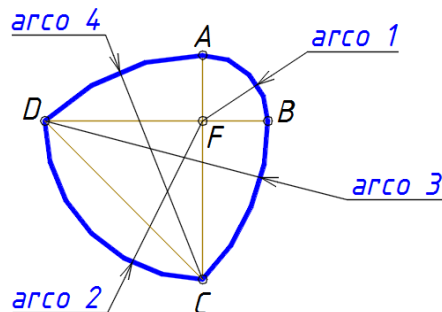


Figura 29: Cálculo do perímetro da VTR em estudo.

2.1.5 Área da VTR em estudo

Considerando que a área de um *setor circular* de ângulo central θ radianos e medida do raio igual a s pode ser calculada como $\frac{s^2 \cdot \theta}{2}$ e a área de um triângulo isósceles retângulo de lados com medidas iguais a k pode ser calculada como $\frac{k^2}{2}$ (ver Figura 30), temos que a área da VTR em estudo é representada por :

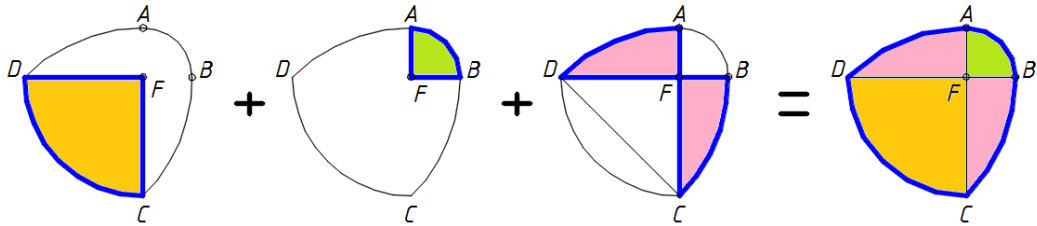


Figura 30: Cálculo da área da VTR em estudo.

A área da VTR em estudo é a soma dos setores circulares FDC , FBA , CAD , DCB e a subtração de dois triângulos FDC .

Assim posto e chamando de A_{VTR} a Área da Variação do Triângulo de Reuleaux em estudo podemos escrever:

$$A_{VTR} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \left[\frac{s^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]$$

Portanto

$$A_{VTR} = s^2 \cdot \left[\frac{\pi}{4} \cdot (3 - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \right]$$

2.1.6 Parametrização da VTR em estudo

Na Figura 31, indicamos por F o ponto de foco da VTR de largura s , e por $\rho(\theta)$ a distância do ponto F até um ponto P da borda, com $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, sendo θ o ângulo entre o eixo OX e o segmento \overline{FP} , conforme visto na construção da seção 2.1.1 na página 32. Pela Lei dos cossenos aplicada no triângulo CFP , temos:

$$(\rho(\theta))^2 + \left(s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \rho(\theta) \cdot \left(s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = s^2$$

Assim:

$$(\rho(\theta))^2 - \rho(\theta) \cdot s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) - \frac{s^2}{2} = 0$$

Resolvendo esta equação de segundo grau quanto a $(\rho(\theta))$, que é não negativo, para todo $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, segue que:

$$\rho(\theta) = \frac{s\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + \sqrt{\left(s\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\right)^2 + 2 \cdot s^2}}{2}$$

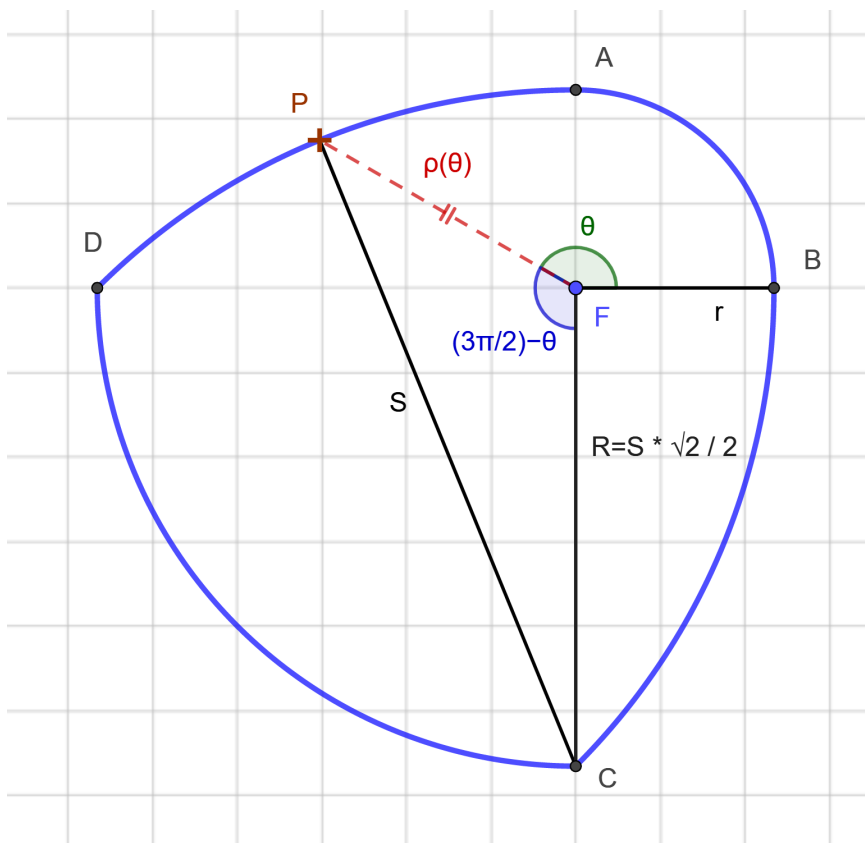


Figura 31: VTR ajustando ρ de acordo com o parâmetro (θ) no segundo quadrante.

Uma parametrização $\varphi(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, de uma Variação do Triângulo de Reuleaux, de largura constante s com foco no ponto $F = (0, 0)$ e com extremidades nos pontos $A = (0, r)$, $B = (r, 0)$, $C = (0, -R)$ e $D = (-R, 0)$, representada na Figura 32, com $r = s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $R = s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, e ajustando ρ de acordo com o parâmetro (θ) no segundo e quarto quadrante, temos:

$$\rho_2(\theta) = \frac{s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + \sqrt{\left(s\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\right)^2 + 2 \cdot s^2}}{2} \text{ para } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\rho_4(\theta) = \frac{s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\theta - \pi) + \sqrt{\left(s\sqrt{2} \cdot \cos(\theta - \pi)\right)^2 + 2 \cdot s^2}}{2} \text{ para } \theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

e podemos escrever essa parametrização, como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = \begin{cases} (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)), & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (\rho_2(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_2(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ (R \cdot \cos(\theta), R \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \\ (\rho_4(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_4(\theta) \cdot \sin(\theta)), & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

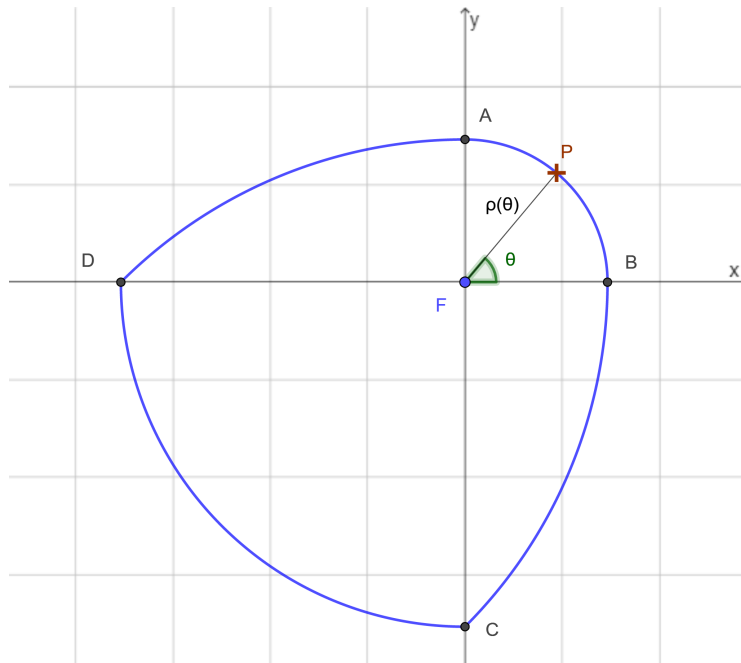


Figura 32: VTR Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/rbzyj6um>.

2.2 UMA VTR SEM BICOS . . . VTRSB

Se rolar uma circunferência k_1 de diâmetro a do lado externo de uma VTR de largura constante s teremos uma VTR sem bicos que chamaremos de "VTRSB". Essa curva também possui largura constante de medida igual a $(s + 2a)$.

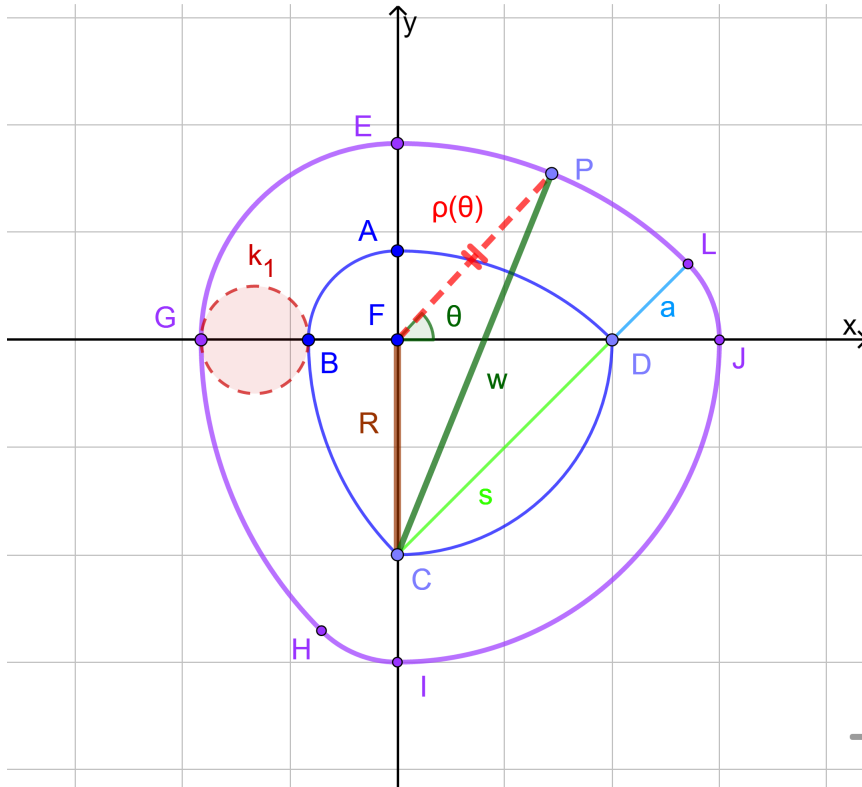


Figura 33: VTRSB sem bicos

2.2.1 Construção da VTRSB

Construção da VTRSB de largura constante igual $(s + 2a)$ a partir de duas retas perpendiculares.

Sejam s e a duas constantes positivas e $R = \frac{s \cdot \sqrt{2}}{2}$. Sejam t_1 e t_2 duas retas perpendiculares com intersecção no ponto F . Marque o ponto D pertencente à reta t_1 de modo que a distância entre os pontos F e D seja igual a R . Marque o ponto C pertencente à reta t_2 de modo que a distância entre os pontos F e C seja igual a R . Trace a reta t_3 que passa pelos pontos C e D . Marque o ponto J pertencente à reta t_1 , de modo que o

ponto D esteja entre os pontos F e J , $F - D - J$, e a distância entre os pontos D e J seja igual a a . Marque o ponto I pertencente à reta t_2 , de modo que o ponto C esteja entre os pontos F e I , $F - C - I$, e a distância entre os pontos C e I seja igual a a . Marque o ponto G pertencente à reta t_1 , de modo que o ponto F esteja entre os pontos G e D , $G - F - D$, e a distância entre os pontos D e G seja igual a $(s + a)$. Marque o ponto E pertencente à reta t_2 , de modo que o ponto F esteja entre os pontos E e C , $E - F - C$, e a distância entre os pontos C e E seja igual a $(s + a)$. Marque o ponto H pertencente a reta t_3 , de modo que o ponto C esteja entre os pontos D e H , $D - C - H$, e a distância entre os pontos D e H seja igual a $(s + a)$. Marque o ponto L pertencente à reta t_3 , de modo que o ponto D esteja entre os pontos C e L , $C - D - L$, e a distância entre os pontos C e L seja igual a $(s + a)$. Com um compasso e raio a , desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto D , e extremidades nos pontos J e L . Com um compasso e raio $(s + a)$, desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto C , e extremidades nos pontos L e E . Com um compasso e raio $(s + a - R)$, desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto F , e extremidades nos pontos E e G . Com um compasso e raio $(s + a)$, desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto D , e extremidades nos pontos G e H . Com um compasso e raio a , desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto C , e extremidades nos pontos H e I . Com um compasso e raio $(R + a)$, desenhar o menor dos dois arcos de circunferência de centro no ponto F , e extremidades nos pontos I e J . Assim teremos a VTRSB (ver Figura 34).

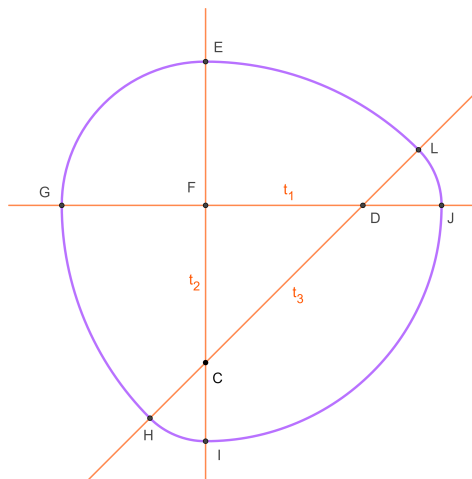


Figura 34: Construção da VTRSB de largura constante igual $(s + 2a)$ a partir de duas retas perpendiculares.

2.2.2 Perímetro da VTRSB

Observando que o perímetro da VTRSB é composto de dois arcos de raio a e ângulo $\frac{\pi}{4}$, dois arcos de raio $(s+a)$ e ângulo $\frac{\pi}{4}$, um arco de raio $(s+a-R)$ e ângulo $\frac{\pi}{2}$ e um arco de raio $(R+a)$ e ângulo $\frac{\pi}{2}$ e chamando de L_{VTRSB} como perímetro da Variação Triângulo de Reuleaux Sem Bicos, temos:

$$L_{VTRSB} = 2 \cdot a \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \cdot (s+a) \cdot \frac{\pi}{4} + (s+a-R) \cdot \frac{\pi}{2} + (R+a) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$L_{VTRSB} = a \cdot \frac{\pi}{2} + (s+a) \cdot \frac{\pi}{2} + (s+a-R) \cdot \frac{\pi}{2} + (R+a) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Assim,

$$L_{VTRSB} = (s+2a) \cdot \pi$$

2.2.3 Área da VTRSB

Observando que a área da VTRSB é composta pela soma das áreas de dois setores circulares de raio a e ângulo $\frac{\pi}{4}$, dois setores circulares de raio $(s+a)$ e ângulo $\frac{\pi}{4}$, um setor circular de raio $(s+a-R)$ e ângulo $\frac{\pi}{2}$, um setor circular de raio $(R+a)$ e ângulo $\frac{\pi}{2}$ e subtraída da área de dois triângulos isósceles retângulos de lado R (ver Figura 35), e chamando de A_{VTRSB} como área da Variação Triângulo de Reuleaux Sem Bicos, temos:

$$A_{VTRSB} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (s+a)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot (s+a-R)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot (R+a)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2$$

Portanto

$$A_{VTRSB} = \pi \cdot \left(a^2 + \frac{s^2}{2} + a \cdot s \right) + s^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot (1 - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \right)$$

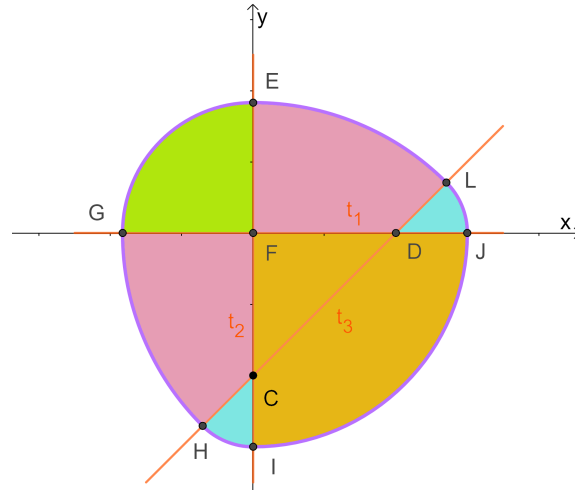


Figura 35: Cálculo da área da VTRSB em estudo.

2.2.4 Parametrização da VTRSB com posicionamento do ponto P em função do ângulo central

Seja $\beta = \arctan\left(\frac{a \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{R + a \cdot \cos \frac{\pi}{4}}\right)$, $\beta = \angle DFL$, e indicando por R a distância do ponto

F ao ponto D , com $R = \frac{s\sqrt{2}}{2}$, e por $\rho_1(\theta)$ a distância do ponto F até um ponto P da borda da VTRSB e, sendo θ o ângulo entre o eixo Ox e o segmento \overline{FP} , com $\theta \in [0, \beta]$, posicionado como referência a Figura 36, e pela Lei dos cossenos aplicada no triângulo DFP , temos:

$$(\rho_1(\theta))^2 + R^2 - 2 \cdot \rho_1(\theta) \cdot R \cdot \cos(\theta) = a^2$$

segue:

$$(\rho_1(\theta))^2 - 2 \cdot \rho_1(\theta) \cdot R \cdot \cos(\theta) + (R^2 - a^2) = 0$$

Resolvendo esta equação de segundo grau quanto a $(\rho_1(\theta))$, que deve ser a maior raiz, segue, para todo $\theta \in [0, \beta]$, que:

$$\rho_1(\theta) = \frac{2 \cdot R \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(2 \cdot R \cdot \cos(\theta))^2 - 4 \cdot (R^2 - a^2)}}{2}$$

Assim,

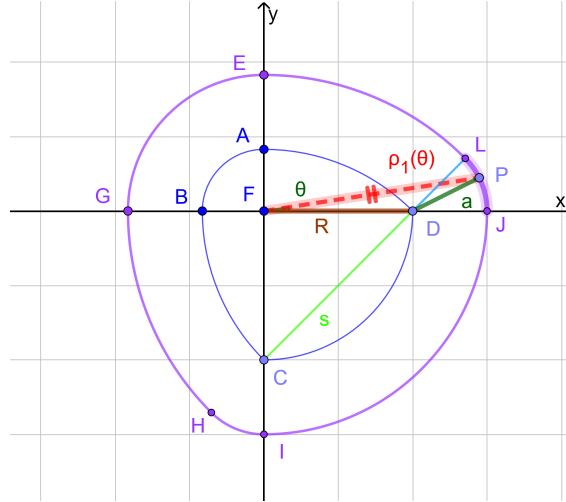


Figura 36: Parametrização da VTRSB com posicionamento do ponto P em função do ângulo central, primeiro trecho.

$$\rho_1(\theta) = R \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(R \cdot \cos(\theta))^2 + a^2 - R^2}$$

e uma parametrização do primeiro dos seis trechos da VTRSB, com $\theta \in [0, \beta]$, pode ser escrita como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = (\rho_1(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_1(\theta) \cdot \sin(\theta))$$

Indicando por w a distância de cada entre o ponto C até um ponto P da borda, com $w = s + a$, e por $\rho_2(\theta)$ a distância do ponto F até um ponto P da borda da VTRSB e, sendo θ o ângulo entre o eixo Ox e o segmento \overline{FP} , com $\theta \in [\beta, \frac{\pi}{2}]$, posicionado como referência a Figura 37, e pela Lei dos cossenos aplicada no triângulo CFP , temos:

$$(\rho_2(\theta))^2 + R^2 - 2 \cdot \rho_2(\theta) \cdot R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = w^2$$

segue:

$$(\rho_2(\theta))^2 - 2 \cdot \rho_2(\theta) \cdot R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + (R^2 - w^2) = 0$$

Resolvendo esta equação de segundo grau quanto a $(\rho_2(\theta))$, que é não negativo, segue, para todo $\theta \in [\beta, \frac{\pi}{2}]$, que:

$$\rho_2(\theta) = \frac{2 \cdot R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{\left(2 \cdot R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - 4 \cdot (R^2 - w^2)}}{2}$$

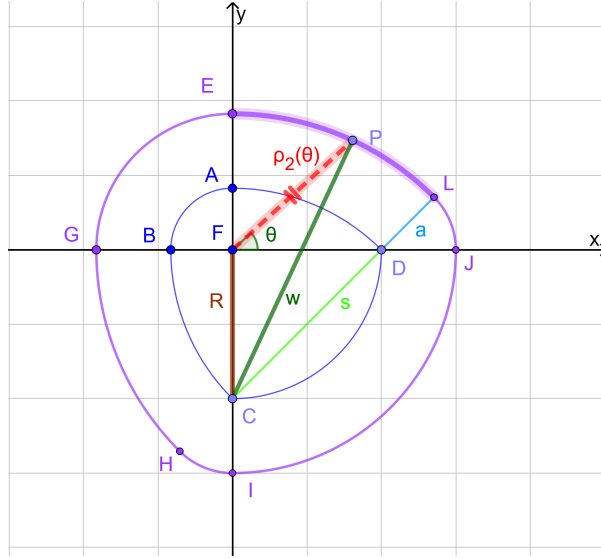


Figura 37: Parametrização da VTRSB com posicionamento do ponto P em função do ângulo central, segundo trecho.

Assim,

$$\rho_2(\theta) = R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{\left(R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + w^2 - R^2}$$

e uma parametrização do segundo dos seis trechos do VTRSB, com $\theta \in \left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$, pode ser escrita como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = (\rho_2(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_2(\theta) \cdot \sin(\theta))$$

Considerando com $\theta \in [0, 2\pi]$ para uma parametrização de cada um dos seis trechos, devemos fazer ajustes em ρ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, de acordo com o parâmetro (θ), assim:

$$\rho_1(\theta) = R \cdot \cos(\theta) + \sqrt{(R \cdot \cos(\theta))^2 + a^2 - R^2} \quad \text{para } \theta \in [0, \beta]$$

$$\rho_2(\theta) = R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{\left(R \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + w^2 - R^2} \quad \text{para } \theta \in \left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\rho_3(\theta) = R \cdot (\sqrt{2} - 1) + a \quad \text{para } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\rho_4(\theta) = R \cdot \cos(2\pi - \theta) + \sqrt{(R \cdot \cos(2\pi - \theta))^2 + w^2 - R^2} \quad \text{para } \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} - \beta\right]$$

$$\rho_5(\theta) = R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + \sqrt{\left(R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)\right)^2 + a^2 - R^2} \quad \text{para } \theta \in \left[\frac{3\pi}{2} - \beta, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\rho_6(\theta) = R + a \quad \text{para } \theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

e podemos escrever uma parametrização $\varphi(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, de uma VTRSB de largura constante $(s + 2a)$, s e a constantes, com foco F na origem no plano cartesiano com vértices nos pontos $C = (0, -R)$ e $D = (R, 0)$, com $R = \frac{s\sqrt{2}}{2}$ e $w = s + a$ (ver Figura 38), como:

$$(x, y) = \varphi(\theta) = \begin{cases} (\rho_1(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_1(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)), & \text{se } 0 \leq \theta \leq \beta \\ (\rho_2(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_2(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)), & \text{se } \beta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (\rho_3(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_3(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)), & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ (\rho_4(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_4(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)), & \text{se } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} - \beta \\ (\rho_5(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_5(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)), & \text{se } \frac{3\pi}{2} - \beta \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \\ (\rho_6(\theta) \cdot \cos(\theta), \rho_6(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)), & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

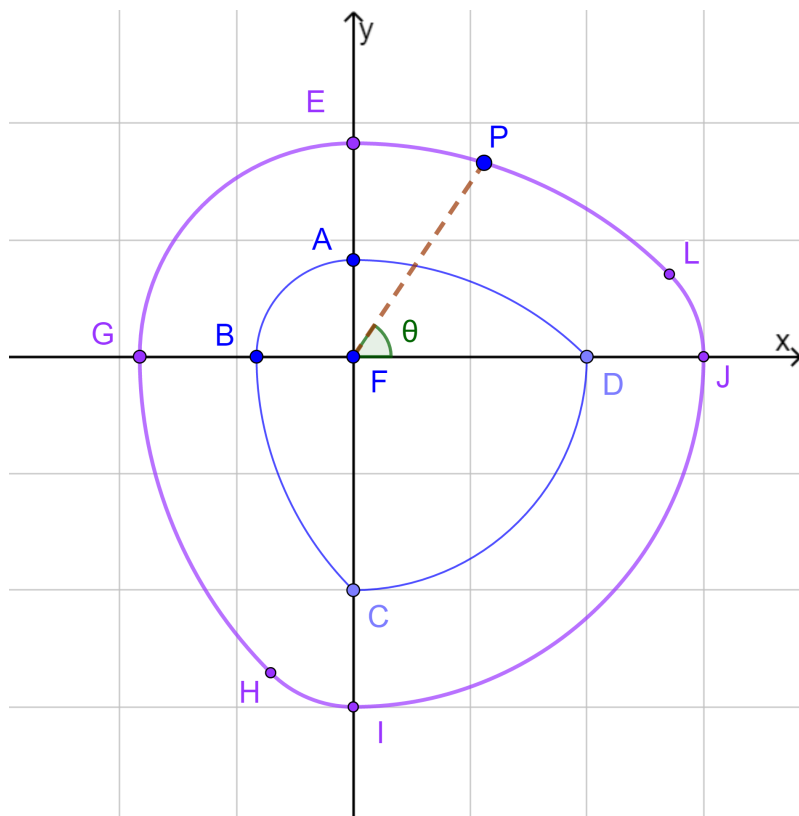


Figura 38: Parametrização da VTRSB com posicionamento do ponto P em função do ângulo central. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/a6ykqgnr>.

2.2.5 VTRSB é uma curva de largura constante

A construção da curva da VTRBS são três pares de arcos de circunferências com três centros distintos, cada par de arcos com mesmo centro. Podemos observar que, para cada ponto K da VTRSB que pertence a um dos arcos, existe um ponto K' correspondente que pertence ao arco oposto de mesmo centro do primeiro arco que contém o ponto K . Temos que esses três pontos, K , K' e o ponto de centro deste par de arcos estão em uma mesma reta, então as retas tangentes aos arcos em K e K' são paralelas pois são perpendiculares à reta que contém os raios dos arcos, e ainda, o traço dessa curva está contido na região entre essas duas retas, a reta T_K tangente à curva em K e a reta $T'_{K'}$ paralela à reta T_K passando em K' tangente à curva em K' . A distância entre essas retas independe da escolha do ponto K e é igual ao segmento $\overline{KK'}$ que é igual a soma dos raios destes dois arcos. Concluimos, portanto, que a *largura* do VTRSB é constante (ver Figura 39).

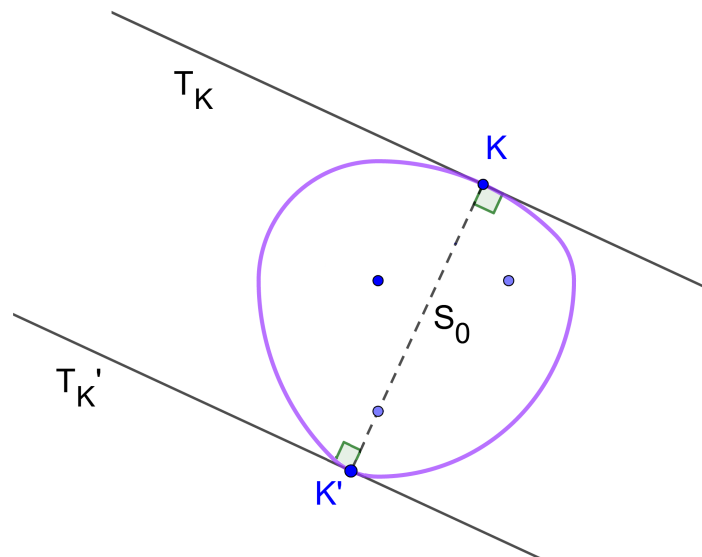


Figura 39: VTRSB uma curva de *largura constante*. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/kjrb9fs4>.

CURVAS DE LARGURA CONSTANTE

No desenvolvimento deste trabalho, fomos levados ao estudo das curvas de largura constante e à Geometria Diferencial. O Triângulo de Reuleaux e as VTR são curvas de largura constante s e suas duas versões sem bicos de largura constante $(s+2a)$, sendo possível a rotação dentro de uma guia quadrada de lado igual a s e $(s+2a)$.

Neste capítulo tomaremos como referências [1], [5], [7] e [12] para relacionar os conceitos matemáticos e suas propriedades, alguns resultados geométricos e análise de suas características como o vetor tangente, o vetor normal e a curvatura da curva.

3.1 CURVAS PLANAS

Uma curva plana é uma imagem da trajetória de um movimento de uma partícula no plano, ou o rastro dessa partícula fazendo o traço desta curva. No estudo da Geometria Analítica uma curva em \mathbb{R}^2 pode ser representada como o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que satisfazem uma equação do tipo:

$$F(x, y) = 0$$

Escrevendo as coordenadas x e y dos pontos desta curva em função de uma variável independente como $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $t \in \mathbb{R}$, teremos uma maneira conveniente de descrever essa curva. Então cada número t no domínio comum a f e g determina um ponto desta curva, $(f(t), g(t))$, a variável t é chamado de **parâmetro** e $x = f(t)$ e $y = g(t)$ são chamadas de **equações paramétricas** da curva. Denotaremos as coordenadas dos pontos da curva como $(x(t), y(t))$, em vez de $(x, y) = (f(t), g(t))$, na intenção de simplificar o entendimento. Quando t varia, o ponto $(x(t), y(t))$ varia e traça a curva \mathcal{C} , que chamamos **curva parametrizada**.

Considerando φ uma parametrização de uma curva \mathcal{C} e $\varphi(t)$ um ponto desta curva representando a posição de uma partícula em movimento contínuo em t , quando t varia em um intervalo $[a, b]$, o conjunto de pontos que iremos considerar é $\mathcal{C} = \{\varphi(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}$, esta forma de abordagem permite a análise das informações sobre como o ponto $\varphi(t)$ de φ percorre \mathcal{C} .

Definição 3.1. Uma curva $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, I = [a, b]$, é uma aplicação parametrizada, dada por $\varphi(t) = (x(t), y(t))$:

1. É dita **contínua** se cada função coordenada $x(t)$ e $y(t)$ é **contínua**;
2. É dita **fechada** se $\varphi(a) = \varphi(b)$;
3. É dita **simples** se para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$, então $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, ou seja, uma curva simples não tem auto intersecção;
4. É dita **periódica** se existe um número real $\mathcal{M} > 0$, tal que, $\varphi(t + \mathcal{M}) = \varphi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor valor \mathcal{M}_0 para o qual a equação $\varphi(t + \mathcal{M}) = \varphi(t)$ se verifica é chamado de **período** de φ . E variando t no intervalo $[t_0, t_0 + \mathcal{M}_0]$ a curva φ fica completamente determinada.

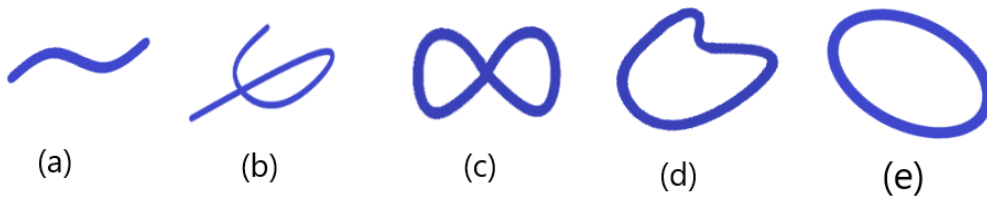


Figura 40: (a) curva aberta simples, (b) curva aberta não simples, (c) curva fechada não simples, (d) curva fechada simples, (e) curva fechada simples convexa.

Definição 3.2. Seja $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, para cada $t \in I$, associa $\varphi(t) = (x(t), y(t))$. Temos que o vetor tangente de φ em (t_0) é dado por:

$$\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

Se φ descreve o movimento de uma partícula movendo-se no plano, então o vetor tangente é a velocidade da partícula no instante t_0 .

O módulo do vetor tangente é chamado de **velocidade escalar** no instante t_0 e é determinado por:

$$\|\varphi'(t_0)\| = \sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2}$$

Definição 3.3. Uma curva $\varphi(t)$ diferenciável é dita **regular** se $\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$, isto é, o vetor tangente nunca se anula:

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \neq 0$$

Se $\|\varphi'(t_0)\| = 0$, dizemos que $\varphi(t_0)$ é uma singularidade de φ , isto é, $\varphi(t_0)$ é um ponto singular da curva.

Exemplo 3.4. A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(t) = (x_0, y_0) + (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$$

com $r \in \mathbb{R}_+^*$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\varphi'(t) = (-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t))$ com $\|\varphi'(t)\| = r \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

O traço da curva φ é o círculo de centro em (x_0, y_0) e raio r .

A parametrização de uma curva pode ser apresentada de formas diferentes.

Observação 3.5. Se $\varphi(t)$ é uma curva regular, temos $\|\varphi'(t)\| \neq 0$, então existe uma função $T(s)$ tal que a curva $\beta(s) = \varphi(T(s))$ tem vetor tangente de norma igual a 1, isto é: $\|\beta'(s)\| = 1$.

Exemplo 3.6. A curva $\varphi(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$, com $t \in [0, 2\pi]$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$, é uma parametrização de um círculo e raio r e centro na origem. Temos que $\|\varphi'(t)\| = r$. Entretanto, se definirmos um novo parâmetro $t = \frac{s}{r}$, com $s \in [0, 2\pi \cdot r]$, a curva $\beta(s) = (r \cdot \cos(\frac{s}{r}), r \cdot \sin(\frac{s}{r}))$ tem $\|\beta'(s)\| = 1$ e β é uma reparametrização de φ .

Definição 3.7. Uma curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *diferenciável* (ou suave) se ela possui em todos os pontos, derivadas de todas as ordens.

Definição 3.8. Uma curva regular $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *parametrizada pelo comprimento de arco*, se para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 < t_1$, o comprimento do arco da curva φ é igual a $t_1 - t_0$. Isto é:

$$\mathcal{L}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\varphi'(t)\| dt = t_1 - t_0$$

$\mathcal{L}(t)$ é denominada a função comprimento de arco da curva φ a partir de t_0 .

Proposição 3.9. Uma curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\varphi'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$.

Demonstração: Ver [1] p. (26).

Proposição 3.10. Toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Demonstração: Ver [1] p. (28, 29).

Seja \mathcal{C} uma curva regular e β uma parametrização por comprimento de arco desta curva \mathcal{C} e dada por $\beta(s) = (x(s), y(s))$, então T , definido por $T(s) = (x'(s), y'(s))$, é chamado de vetor tangente a curva \mathcal{C} em $\beta(s)$ e se β está parametrizada pelo comprimento de arco, p.p.c.a., teremos $\|T(s)\| = 1$. Seja N , dado por $N(s) = (-y'(s), x'(s))$, temos que $\|N(s)\| = 1$ e, aplicando o *produto interno*¹, indicado na Figura 41, teremos:

$$\langle T(s), N(s) \rangle = -x'(s) \cdot y'(s) + y'(s) \cdot x'(s) = 0$$

isto é, T é perpendicular a N . N é chamado *vetor normal* a β em $\beta(s)$.

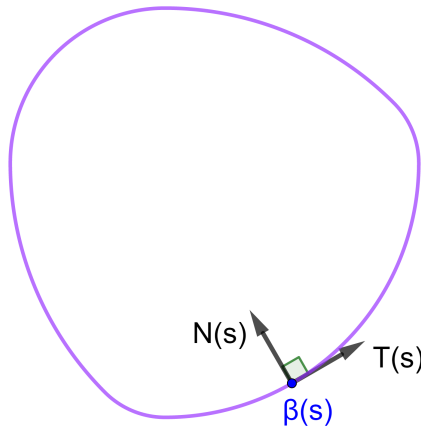


Figura 41: Vetor tangente e vetor normal de módulo unitário em um ponto de uma curva p.p.c.a. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/qphys86c>.

¹ *produto interno de dois vetores:* é a soma dos produtos de suas coordenadas, ou, $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$
 $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

3.2 EQUAÇÕES DE FRENET

Considerando $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, com $T(s) = \beta'(s)$, e seja $N(s)$ o vetor unitário de \mathbb{R}^2 ortonormal a $T(s)$, tal que, a base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada pelos vetores $T(s)$ e $N(s)$ têm a mesma orientação que a base $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 . O vetor $N(s)$ é dito vetor normal a β em $\beta(s)$. Então $N(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Proposição 3.11. *Em qualquer curva β , $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco,*

$$\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle = 0$$

para qualquer s , isto é, ou $\beta''(s) = 0$ ou $\beta''(s)$ é perpendicular a $\beta'(s)$, para todo $s \in I$.

Demonstração. Como a curva está parametrizada por comprimento de arco, temos

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \|\beta'(s)\|^2 = \|T(s)\|^2 = 1$$

para qualquer s . Derivando em relação a s obtemos

$$\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle + \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$$

ou seja,

$$2 \cdot \langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle = 0$$

Portanto

$$\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle = 0$$

Assim, $\beta''(s)$ é perpendicular a $\beta'(s)$, para todo $s \in I$.

□

Observamos que $T(s)$ e $N(s)$ são funções de I em \mathbb{R}^2 , diferenciáveis de classe C^∞ e para cada $s \in I$, os vetores de \mathbb{R}^2 , $T'(s)$ e $N'(s)$, podem ser escritos como combinação linear de $T(s)$ e $N(s)$. Como $T(s)$ é unitário, segue que $T'(s)$ é ortogonal a $T(s)$ e portanto $T'(s)$ é proporcional a $N(s)$.

Definição 3.12. Este fator de proporcionalidade, denotado por $k(s)$, é chamado *curvatura* de β em s , isto é,

$$T'(s) = k(s) \cdot N(s)$$

Considerando a curva $\beta(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, segue da definição que

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle \beta''(s), N(s) \rangle$$

Logo,

$$k(s) = -x''(s) \cdot y'(s) + y''(s) \cdot x'(s)$$

Analogamente como $N(s)$ é unitário, segue que $N'(s)$ é ortogonal a $N(s)$ e portanto, $N'(s)$ é proporcional a $T(s)$. Como

$$\langle N'(s), T(s) \rangle = -x'(s) \cdot y''(s) + x''(s) \cdot y'(s)$$

Concluimos que:

$$N'(s) = -k(s) \cdot T(s)$$

Definição 3.13. As equações

$$\begin{cases} T'(s) = k(s) \cdot N(s) \\ N'(s) = -k(s) \cdot T(s) \end{cases}$$

são chamadas **as equações de Frenet** de uma curva plana.

Exemplo 3.14. Seja a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco

$$\beta(s) = \left(x_0 + r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right), y_0 + r \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

com $s \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$, e seu traço é o círculo de centro (x_0, y_0) e raio r . Temos,

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \text{ e } N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

Logo, $k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \frac{1}{r} > 0$, pois $T'(s) = \frac{1}{r} \cdot \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$

Ou seja, a curvatura de β é constante igual a $\frac{1}{r}$. O círculo tem curvatura constante e isto caracteriza os círculos. Podemos notar também quanto maior é o seu raio, menor é a sua curvatura. Quando o raio tende ao infinito, a curvatura tende a zero, neste sentido, o círculo aproxima-se de uma reta.

O sinal da curvatura representa o lado para onde a curva “**se curva**” enquanto que seu módulo representa a intensidade com que “**se curva**”, isto é, a direção e o quanto ela se afasta da reta tangente no ponto (ver Figura 42). Considerando um observador com a visão alinhada com o vetor $T(s)$ o sinal da curvatura é positivo quando o observador vira para a esquerda e negativo caso contrário.

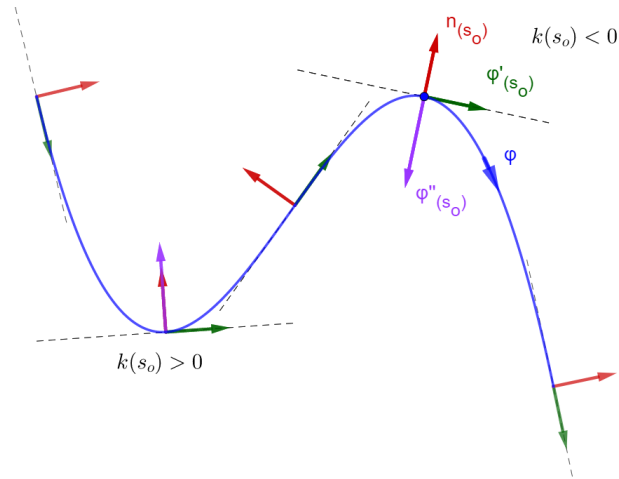


Figura 42: Variação do Sinal da Curvatura. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/xkzvgyf5>.

Definição 3.15. Uma curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular, fechada e simples é dita *convexa*, se sua curvatura é diferente de zero e não muda de sinal, isto é, se para cada ponto $\varphi(t)$, $t \in I$, φ está contida em um dos semiplanos determinados pela reta tangente a φ no ponto $\varphi(t)$.

A Definição 3.15 pode ser vista como Teorema da Curva Convexa enunciado e demonstrado no capítulo 6 de [1], p. 196 - 199.

3.3 O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS

Nesta seção apresentamos que o Teorema Fundamental das Curvas nos mostra que uma curva parametrizada pelo comprimento de arco fica determinada a partir do momento em que conhecemos a sua curvatura, isto é, duas curvas α e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que possuem a mesma curvatura são congruentes, diferenciadas por um movimento rígido, uma rotação e / ou uma translação, e ainda, se possuem mesmo ponto inicial e vetor tangente, são idênticas.

Teorema 3.16 (Teorema Fundamental das Curvas). *Seja $k(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , existe $\varphi(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco única a menos de isometria² do plano, para qual $k(s)$ é sua curvatura e s é seu parâmetro de comprimento de arco.*

Demonstração: Ver capítulo 1 de [1] p. 54, 55.

² *isometrias do plano:* são aplicações de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 que preservam as distâncias por combinações de rotações, translações e reflexões.

3.4 O TEOREMA DE BARBIER

Nesta seção, iremos apresentar a noção de largura de uma curva no plano em relação a uma direção de \mathbb{R}^2 e o Teorema de Barbier demonstrando que o comprimento \mathcal{L} de uma curva de largura constante S_0 depende apenas de S_0 e é igual a $\pi \cdot S_0$.

Definição 3.17. Sejam r uma reta e C uma curva regular, fechada, simples e convexa, em \mathbb{R}^2 , parametrizada pela aplicação $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$:

- r é tangente a C se $r \cap C$ for apenas um ponto, $\varphi(t_0)$ com $t_0 \in I$, chamado *ponto de tangência*.
- Se r é tangente a C em $\varphi(t_0)$, a reta que passa por $\varphi(t_0)$ e é perpendicular a r é chamada de *reta normal* a C em $\varphi(t_0)$.
- Se r é tangente a C em $\varphi(t_0)$ então C está contida num dos semiplanos fechados definidos por r .

Existem infinitos pares de retas paralelas e tangentes à φ tendo o traço de φ inteiramente contido na região determinada por este par de retas.

Definição 3.18. A largura S de uma curva φ regular, fechada, simples, convexa em uma direção é a *menor distância* entre duas retas paralelas e tangentes à φ , ortogonais à direção dada, tendo o traço de φ inteiramente contido na região determinada por este par de retas (ver Figura 43).

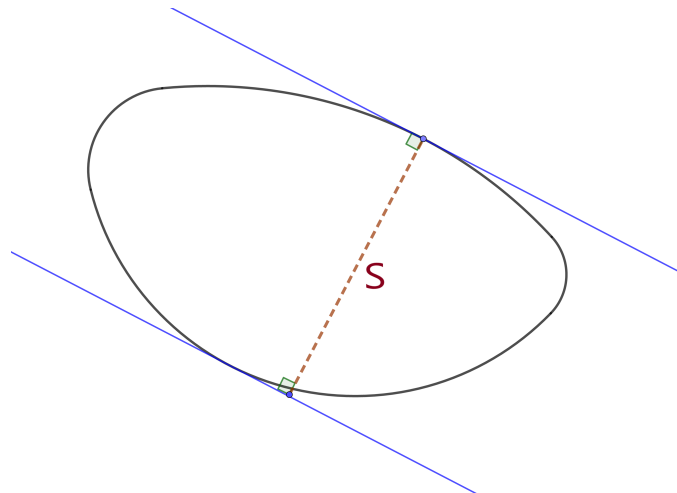


Figura 43: Largura S de uma curva regular, fechada, simples, convexa.

Definição 3.19. Uma curva \mathcal{C} regular, fechada, simples, convexa é dita uma curva de largura constante, S_0 , se a largura de \mathcal{C} em todas as direções for a mesma, isto é, a diferença entre as distâncias entre quaisquer dois pares de retas paralelas e tangentes à \mathcal{C} é zero.

Definição 3.20. Seja $\beta : [0, \mathcal{L}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização por comprimento de arco da curva \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 . A indicatriz tangente $T : [0, \mathcal{L}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(s) = (x'(s), y'(s))$, é uma curva cujo traço está contido num círculo unitário de raio 1.

Observação 3.21. Conforme as fórmulas de Frenet, o vetor tangente da indicatriz é dado por $T'(s) = k(s) \cdot N(s)$ e denotando por $\theta(s)$ o ângulo que $T(s)$ faz com o eixo Ox (ver Figura 44), teremos:

$$T(s) = \left(\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)) \right)$$

e, derivando essa equação, temos:

$$T'(s) = \theta'(s) \cdot \left(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)) \right) = \theta'(s) \cdot N(s)$$

seguindo a definição 3.12, temos que $\theta'(s) = k(s)$ e assim, teremos:

$$\theta(s) = \int_0^s k(r) dr + \theta(0)$$

Como \mathcal{C} é uma curva fechada, temos que a variação total de θ é um múltiplo inteiro I de 2π , isto é:

$$\int_0^{\mathcal{L}} k(s) ds = \theta(\mathcal{L}) - \theta(0) = 2\pi \cdot I$$

Definição 3.22. Considerando \mathcal{C} uma curva, fechada e de classe \mathcal{C}^2 definimos como índice de rotação³ de \mathcal{C} ao inteiro

$$I = \frac{\theta(\mathcal{L}) - \theta(0)}{2\pi}$$

Teorema 3.23. O índice de rotação de uma curva simples fechada é ± 1 , onde o sinal depende da orientação da curva. (Referência [3], capítulo 5, p 476).

³ índice de rotação: é o número de voltas (orientadas) que o vetor tangente de \mathcal{C} dá em torno da origem, quando percorremos o traço de \mathcal{C} .

Lema 3.24. *Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização pelo comprimento de arco da curva \mathcal{C} regular, fechada, simples, convexa, de largura constante e período (comprimento) \mathcal{L} . Seja $\tilde{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a parametrização da curva de mesma imagem de β , que associa ao parâmetro s o ponto antípoda a $\beta(s)$ (ver Figura 44). Então existe uma função diferenciável $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\beta}(s) = (\beta \circ h)(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, a função h é tal que $h(s + \mathcal{L}) = h(s) + \mathcal{L}$, é crescente e sua derivada é estritamente positiva em todos os pontos. (Referência [2], capítulo 1, Lema 1.6.4, p. 27).*

Demonstração. Considerando h dada por $h(s) = \theta^{-1}(\theta(s) + \pi)$. Então h é diferenciável e sua derivada é positiva

$$(\theta'(s_1) = k(s_1) > 0 \Rightarrow (\theta^{-1})'(\theta(s_1)) = \frac{1}{\theta'(s_1)} > 0$$

observando que $(\theta \circ h)(s) = \theta(s) + \pi$ e sendo T é a indicatriz tangente de $\tilde{\varphi}$, segue que:

$$\begin{aligned} T(h(s)) &= \left(\cos((\theta \circ h)(s)), \text{sen}((\theta \circ h)(s)) \right) \\ &= \left(\cos(\theta(s) + \pi), \text{sen}(\theta(s) + \pi) \right) \\ &= \left(-\cos(\theta(s)), -\text{sen}(\theta(s)) \right) = -T(s) \end{aligned}$$

Assim $T(h(s)) = -T(s)$, e portanto os pontos $\beta(s)$ e $\tilde{\beta}(s)$ são antípodas um do outro.

$$\tilde{\beta}(s) = \beta(h(s))$$

□

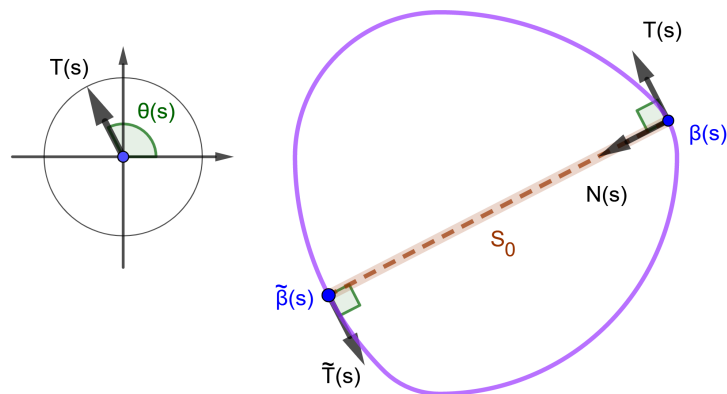


Figura 44: Um ponto $\beta(s)$ da curva \mathcal{C} e seu antípoda $\tilde{\beta}(s)$ correspondente, o segmento S_0 tem medida igual a largura constante da curva \mathcal{C} . Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/ncsmghfp>.

Teorema 3.25 (Teorema de Barbier). *Uma curva \mathcal{C} regular, fechada, simples, convexa e de largura constante S_0 tem comprimento igual a $\pi \cdot S_0 = \mathcal{L}$.*

Demonstração. Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização periódica, de período \mathcal{L} , pelo comprimento de arco da curva \mathcal{C} , como do enunciado, dada por $\beta(s) = (x(s), y(s))$. Considerando a parametrização positivamente orientada, como a curva é simples, segue do teorema 3.23 que o índice de rotação é 1. Logo $\theta(s + \mathcal{L}) = \theta(s) + 2 \cdot \pi$, para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Notamos que como θ é estritamente convexa $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente e possui inversa diferenciável.

Indicamos a aplicação antípoda de $\beta(s)$ por $\tilde{\beta}(s)$, e podemos escrevê-la como:

$$\tilde{\beta}(s) = \beta(s) + S_0 \cdot N(s) \quad (3.1)$$

Pelo Lema 3.24, existe uma função h tal que $\tilde{\beta}(s) = \beta(h(s))$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, h é tal que:

$$h(s + \mathcal{L}) = h(s) + \mathcal{L} \quad (3.2)$$

e assim, podemos reescrever a equação (3.1) como:

$$\beta(h(s)) = \beta(s) + S_0 \cdot N(s) \quad (3.3)$$

e derivando essa equação (3.3), e usando $N'(s) = -k(s) \cdot T(s)$, uma das equações de Frenet, temos:

$$\beta'(h(s)) \cdot h'(s) = \beta'(s) + S_0 \cdot \left(-k(s) \cdot T(s) \right) \quad (3.4)$$

Observando que $\beta'(h(s)) = T(h(s)) = -T(s)$, $\beta'(s) = T(s)$ e, conforme observação 3.21, $k(s) = \theta'(s)$, podemos reescrever a equação (3.4) na forma:

$$-T(s) \cdot h'(s) = T(s) - S_0 \cdot \left(\theta'(s) \cdot T(s) \right) \quad (3.5)$$

Usando o produto interno na equação (3.5) por $-T(s)$, e considerando que $\|T(s)\| = 1$ obtemos:

$$h'(s) = S_0 \cdot \theta'(s) - 1 \quad (3.6)$$

Fazendo $s = 0$ na equação (3.2), temos:

$$h(0 + \mathcal{L}) = h(0) + \mathcal{L}$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever:

$$\mathcal{L} = h(\mathcal{L}) - h(0) = \int_0^{\mathcal{L}} h'(s) ds$$

Integrando a equação (3.6), obtemos:

$$\int_0^{\mathcal{L}} h'(s) ds = \int_0^{\mathcal{L}} \left(S_0 \cdot \theta'(s) - 1 \right) ds$$

Logo:

$$\mathcal{L} = S_0 \cdot \int_0^{\mathcal{L}} \left(\theta'(s) \right) ds - \int_0^{\mathcal{L}} 1 ds$$

Assim:

$$\mathcal{L} = S_0 \cdot \left(\theta(\mathcal{L}) - \theta(0) \right) - \mathcal{L}$$

Donde temos:

$$\mathcal{L} = S_0 \cdot 2 \cdot \pi - \mathcal{L}$$

Portanto:

$$\mathcal{L} = S_0 \cdot \pi$$

□

Observação 3.26. *Essa demonstração se aplica às curvas com um número finito de bicos, como o TR e a VTR, porque as funções serão diferenciáveis por partes.*

DINÂMICA PARA GERAR O FURO QUADRADO

4.1 ROTACIONANDO O TRIÂNGULO DE REULEAUX

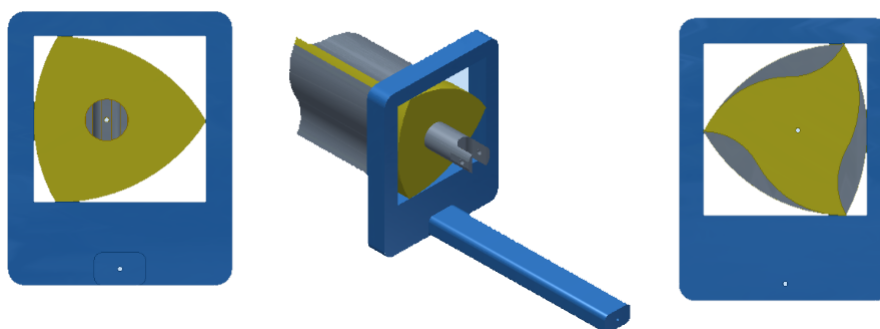


Figura 45: Triângulo de Reuleaux e guia quadrada.

Para gerar um furo quadrado a partir de uma broca com o conceito do Triângulo de Reuleaux faz-se necessário um dispositivo guia para ser possível girar essa broca em movimento circular “fora da linha de centro”, a trajetória do centro é uma curva relacionada com a guia quadrada.

Podemos observar na Figura 45 uma "*janela quadrada*" acoplada ao rotor (furadeira), assim com as rotações da broca seria possível remover material de uma peça fixa, pré-furada, executando um furo quadrado. Veja o vídeo ilustrativo [6]. No entanto, apesar de sua importância e de não ser o assunto desta dissertação, contribui para o entendimento da construção do conhecimento.

Como vimos, o Triângulo de Reuleaux é uma curva de largura constante, isto é, esta curva pode ser envolvida por um par de retas paralelas e tangentes a esta curva por uma distância constante, independentemente da posição deste par de retas tangentes.

Podemos envolver o Triângulo de Reuleaux por um quadrado guia de lado com mesma medida da largura deste triângulo e fazer uma rotação completa do Triângulo de Reuleaux dentro deste quadrado guia (ver Figura 45). O centro geométrico do Triângulo de Reuleaux gira em torno do centro do quadrado (ver Figura 46).

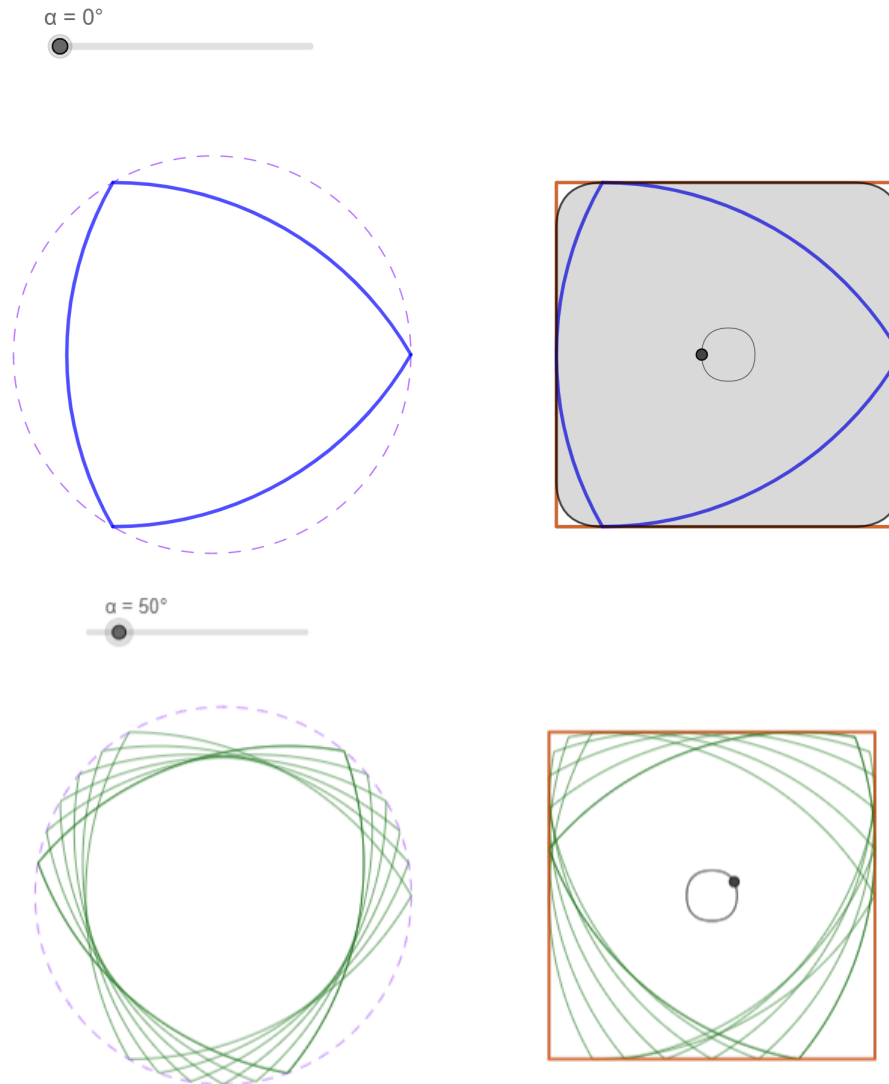


Figura 46: Triângulo de Reuleaux e a guia quadrada. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/classic/zfzk5v2g>.

Observação 4.1. Para poder vivenciar e reproduzir uma experiência e visualizar o traço feito com a caneta do resultado do movimento, construí esses elementos em diferentes materiais: papel cartão, papelão ondulado e metal. Aqueles feitos em papel cartão e papelão ondulado não foram satisfatórios, não resistiram aos movimentos. Este feito em metal não se deformou, mas seu peso dificulta o controle da caneta, no entanto é satisfatório. Este, da Figura 47, acompanhar-me-á. Recomendo que você faça o seu, é interessante.

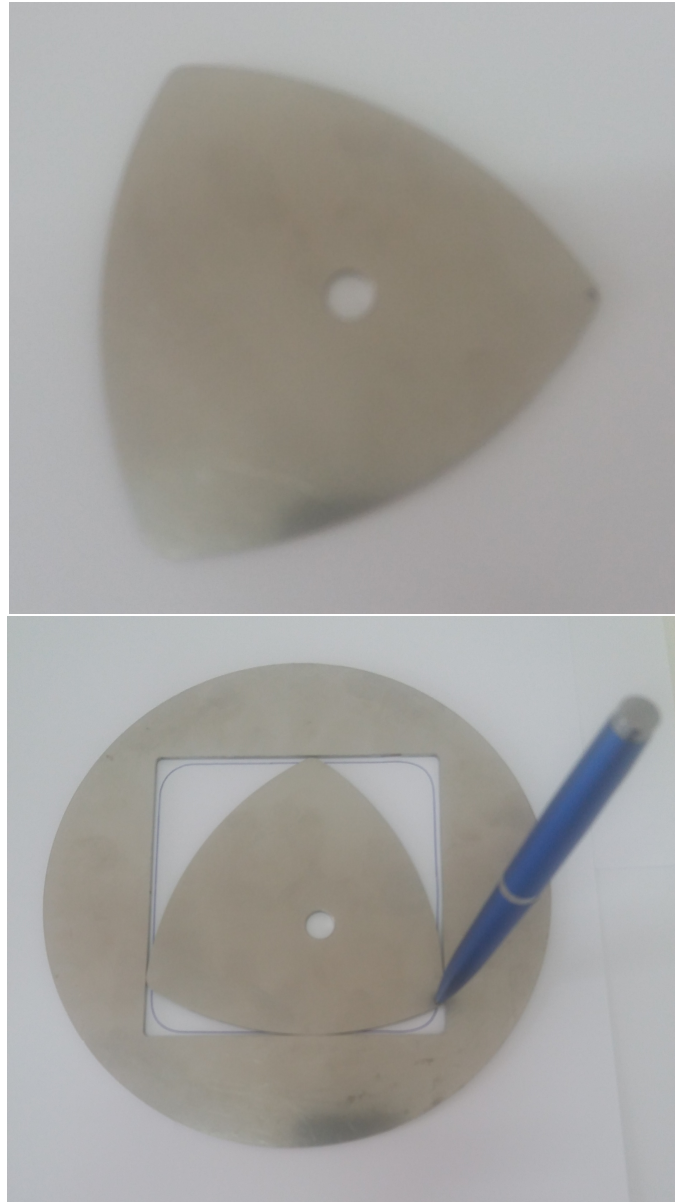


Figura 47: Triângulo de Reuleaux em metal.

4.2 ROTACIONANDO A VTR

O Triângulo de Reuleaux é muito interessante e como aqui mostrado é capaz de, depois de acoplado, produzir a trajetória de um formato “quadrado”, quando rotacionado.

No entanto, esse quadrado tem cantos arredondados. Assim, nas pesquisas feitas, encontrei a VTR, como foi visto é capaz de realmente produzir a trajetória de um formato do traço “quadrado”.

Como vimos, a VTR também é uma curva de largura constante, isto é, esta curva também pode ser envolvida por um par de retas paralelas e tangentes a esta curva, independentemente da posição deste par de retas tangentes.

Podemos envolver a VTR por um quadrado de lado com mesma medida da largura desta curva (ver Figura 48), e, ao girar a VTR, o seu centro geométrico gira em torno do centro do quadrado guia (ver Figura 49).

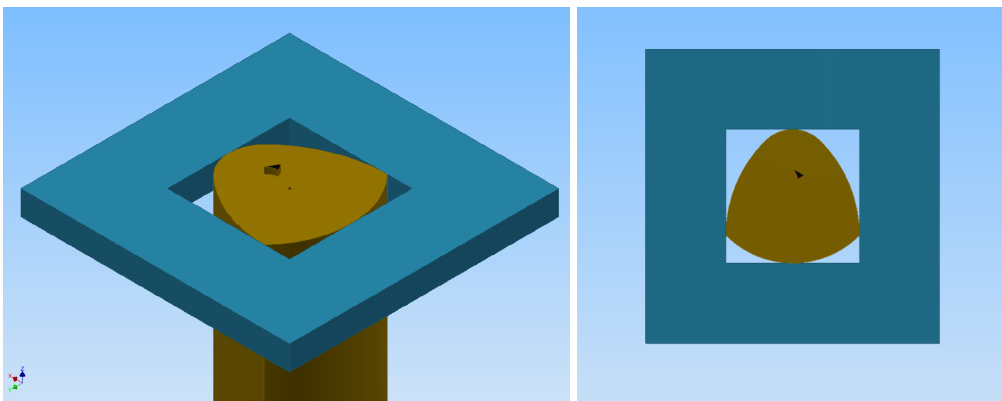


Figura 48: VTR - Variação do Triângulo de Reuleaux e guia quadrada.

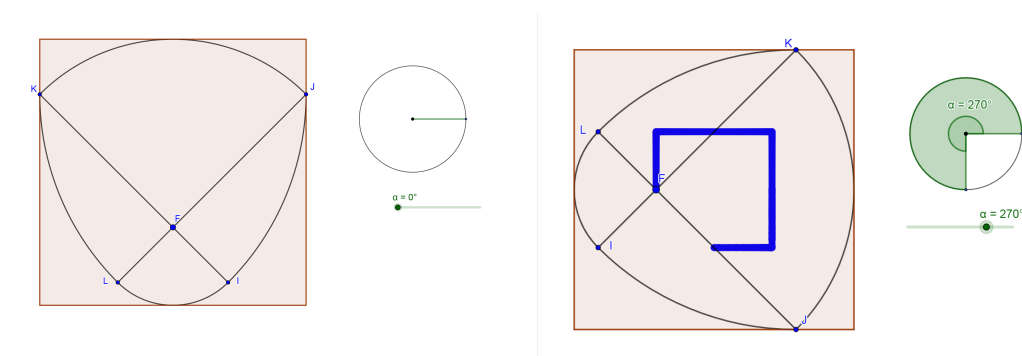


Figura 49: VTR no Geogebra. Uma ilustração dinâmica pode ser vista em <https://www.geogebra.org/m/mcncpyhut>.

Observação 4.2. Também em metal construí a VTR para realizar a experiência de traçar o contorno do quadrado que está indicado na Figura 50. Por considerar interessante também recomendo que construa o seu.

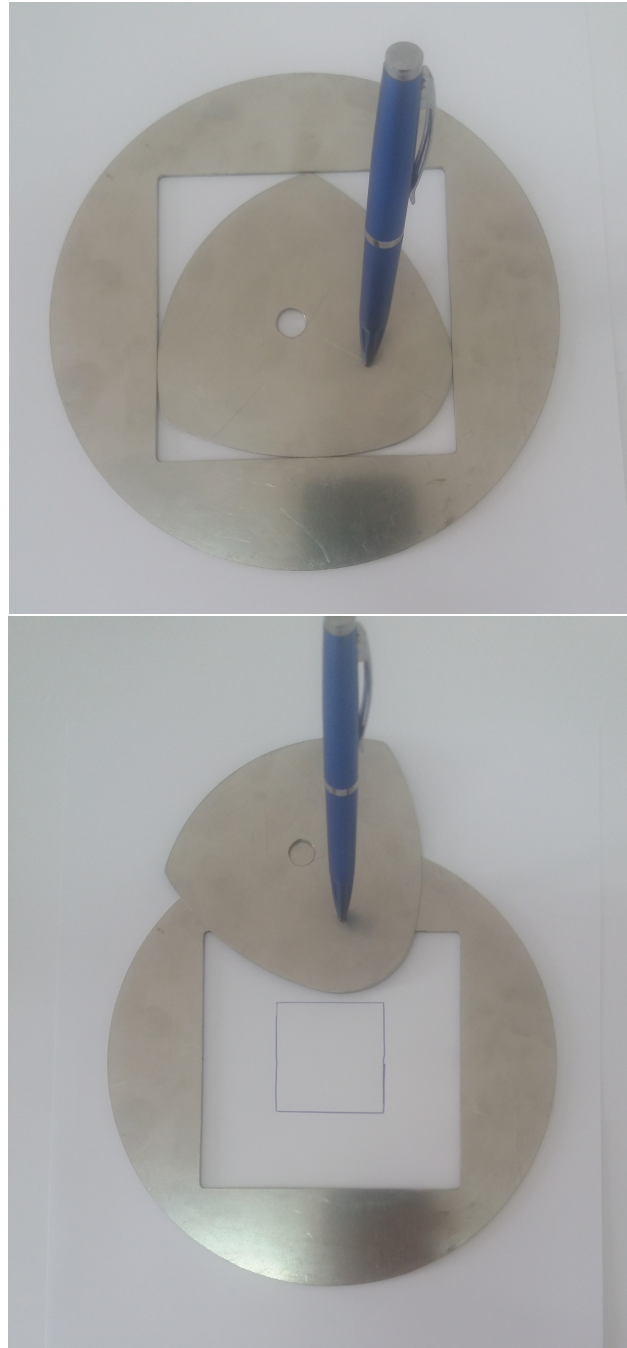


Figura 50: Variação do Triângulo de Reuleaux em metal.

4.3 CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Os softwares de geometria dinâmica são ferramentas que facilitam a exploração, o estudo e a aprendizagem de Matemática por alunos, professores e interessados na área, e portanto acreditamos que poderiam ser mais explorados. Devemos considerar sua utilidade para a aprendizagem, desde que os resultados sejam interpretados corretamente e verificados analiticamente. Descreveremos o software Geogebra, utilizado neste trabalho na construção de figuras, equações e representações de funções, nas parametrizações e apresentaremos também, a construção detalhada do Triângulo de Reuleaux.

4.3.1 Área de Trabalho do Geogebra

Mais informações para uso do Geogebra, ver o Tutorial [11].

O Geogebra é um *software* de Geometria Dinâmica disponível de forma gratuita e pode ser baixado em sua *webpage* <https://www.geogebra.org> na opção *Downloads*. Opcionalmente poderá ser utilizado de forma *on line*. Este *software* traz os recursos de geometria, álgebra e cálculo. É utilizado na Geometria Analítica, no estudo de propriedades dos elementos geométricos: ponto, reta, planos, vetores, circunferências, arcos, funções e gráficos, em ambientes de duas e três dimensões com interpretações dinâmicas.

É possível “criar” um perfil de usuário no Geogebra para gravar projetos no Geogebra e compartilhar projetos já elaborados por outros usuários.

Ao iniciar o Geogebra, a área de trabalho apresenta a barra de opções de ferramentas, caixa de entrada, janela de álgebra e de visualização 2D (ver Figura 51).

Para utilizar uma ferramenta, basta selecioná-la e em seguida criar os objetos que serão construídos.

Existe a opção de utilizar o teclado do Geogebra: Operadores matemáticos, números e funções (ver Figura 52). Letras gregas, a alteração está ao alcance no ícone inferior esquerdo (ver Figura 53).

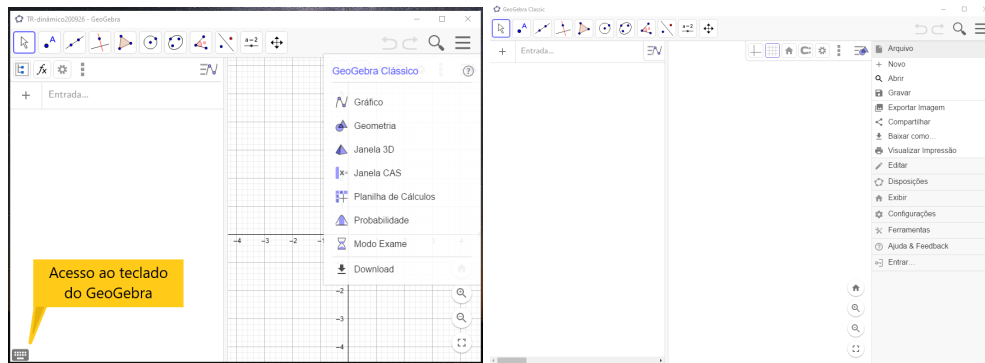


Figura 51: Área de trabalho do Geogebra. Para utilizar uma ferramenta, basta selecioná-la.

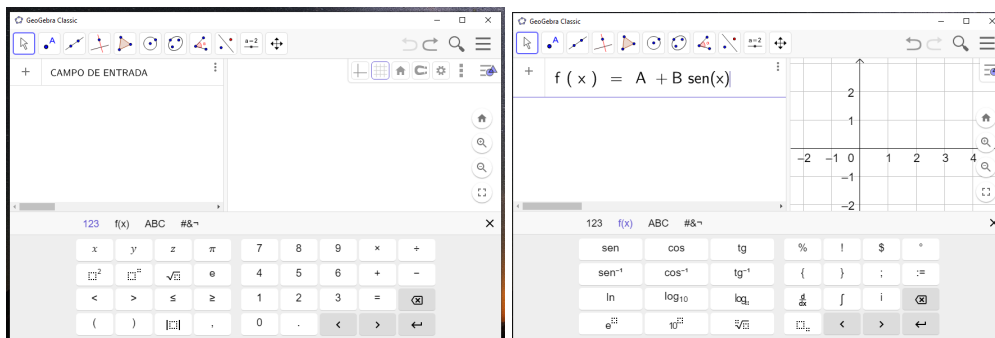


Figura 52: Teclado do Geogebra: Operadores matemáticos, números e funções.

4.3.2 Triângulo de Reuleaux no Geogebra

Para construir o Triângulo de Reuleaux, vamos detalhar os quatro passos (existem outras maneiras). O controle deslizante tem a função de aumentar ou diminuir o tamanho da figura, o valor auxiliar D facilita a escrita dos pontos A , B e C que formam os vértices deste polígono, e os três arcos irão formar os lados do Triângulo de Reuleaux de largura constante (ver Figura 56).

1. Construa o controle deslizante NÚMERO de “nome” S .
Intervalo: mín.: 1 ; máx.: 5 ; Incremento: 1 (ver Figura 54).
2. Construa o “valor auxiliar” $D = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{3}$ (digitando no “Campo de Entrada”).
3. Construa os pontos $A = (-D, 0)$, $B = \left(\frac{D}{2}, -\frac{D \cdot \sqrt{3}}{2}\right)$ e $C = \left(\frac{D}{2}, \frac{D \cdot \sqrt{3}}{2}\right)$.
4. Construa os três arcos circulares: de centro A unindo os pontos B e C , de centro B unindo os pontos C e A e o de centro C unindo os pontos A e B (ver Figura 55).



Figura 53: Teclado do Geogebra: Letras gregas, a alteração está ao alcance no ícone inferior esquerdo.

Assim, tem-se o Triângulo de Reuleaux no Geogebra. O controle “S” possibilita a alteração do tamanho da figura.

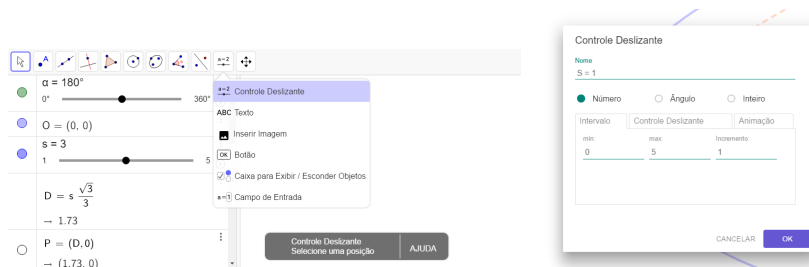


Figura 54: Controle Deslizante NÚMERO.

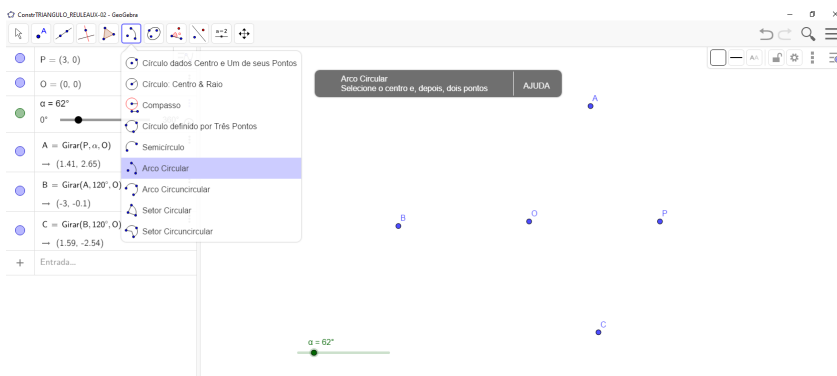


Figura 55: Comando construir ARCO CIRCULAR.

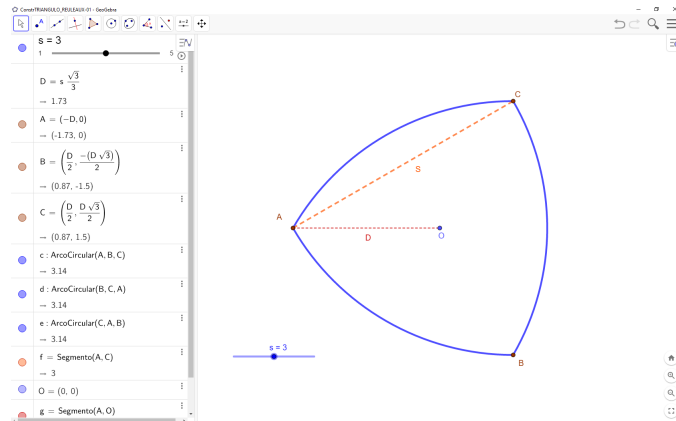


Figura 56: O Triângulo de Reuleaux no Geogebra. O parâmetro S possibilita alterar o tamanho. Acesso no Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/dmy2yysw>.

4.3.3 Triângulo de Reuleaux no Geogebra com Rotação

Na seção 4.3.2 foi construído um Triângulo de Reuleaux fixo, com a possibilidade de alterar o tamanho segundo o parâmetro do controle deslizante S . Agora ele será construído incluindo a possibilidade de rotacioná-lo, com centro no ponto de centro geométrico, acrescentando um controle deslizante de ângulo. Para construir um Triângulo de Reuleaux de largura constante S e que possa ser rotacionado (ver Figura 58), seguir os passos de construção no Geogebra:

1. Construa o controle deslizante ÂNGULO de “nome” α
Intervalo: mín.: 0° ; máx.: 360° ; Incremento: 1° .
2. Construa o controle deslizante NÚMERO de “nome” S .
Intervalo: mín.: 1 ; máx.: 5 ; Incremento: 1.
3. Construa o “valor auxiliar” $D = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{3}$ (digitando no “Campo de Entrada”).
4. Construa o ponto de centro $O = (0, 0)$.
5. Construa o ponto auxiliar $P = (D, 0)$.
6. Usando o comando GIRAR, construa os pontos $A = \text{Girar}(P, \alpha, O)$,
 $B = \text{Girar}(A, 120^\circ, O)$ e $C = \text{Girar}(B, 120^\circ, O)$ (ver Figura 57).
7. Construa os três arcos circulares: de centro A unindo os pontos B e C,
de centro B unindo os pontos C e A e o de centro C unindo os pontos A e B.

Assim, tem-se o Triângulo de Reuleaux no Geogebra, com a possibilidade de rotacioná-lo. O controle “S” possibilita a alteração do tamanho e o controle “ α ” aciona o movimento de rotação da figura.

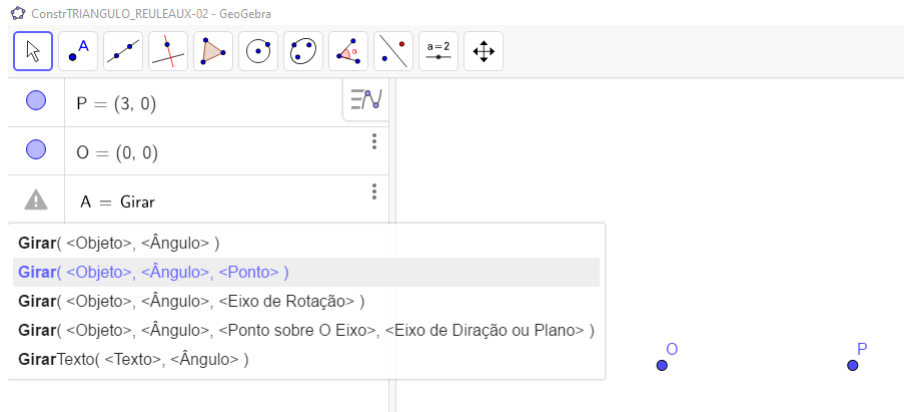


Figura 57: Comando GIRAR.

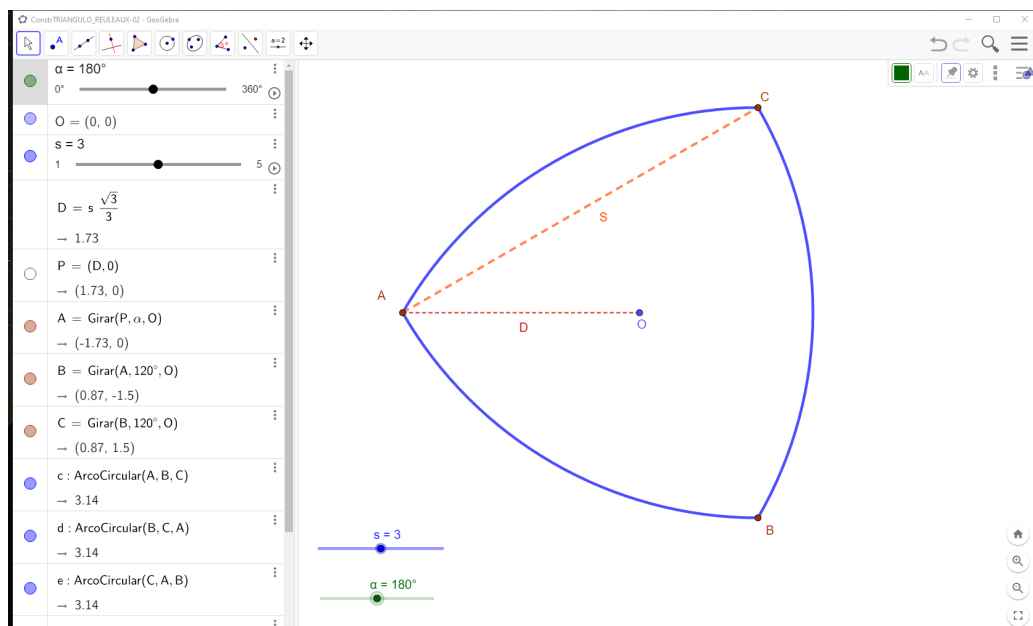


Figura 58: O Triângulo de Reuleaux no Geogebra com rotacional. Acesso no Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/fkvc8ha>.

4.3.4 Triângulo de Reuleaux no Geogebra com Rotação inserido na guia quadrada.

Na seção 4.3.3 foi construído um Triângulo de Reuleaux com o acréscimo de um parâmetro de controle de ângulo para rotacioná-lo. Agora ele será construído incluindo a possibilidade de rotacioná-lo no interior de um quadrado de lado S igual à largura constante do Triângulo de Reuleaux definido. Para construir um Triângulo de Reuleaux de largura constante S e que possa ser rotacionado no interior de um quadrado (ver Figura 61), seguir os passos de construção no Geogebra:

1. Construa o controle deslizante ÂNGULO de “nome” α
Intervalo: mín.: 0° ; máx.: 360° ; Incremento: 1° .
2. Construa o controle deslizante NÚMERO de “nome” S .
Intervalo: mín.: 1 ; máx.: 5 ; Incremento: 1.
3. Construa o “valor auxiliar” $D = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{3}$.
4. Construa o ponto de centro $O = (0, 0)$.
5. Construa o ponto $P = (D, 0)$.
6. Usando o comando GIRAR, construa os pontos $A = Girar(P, \alpha, O)$,
 $B = Girar(A, 120^\circ, O)$ e $C = Girar(B, 120^\circ, O)$.
7. Construa os três arcos circulares: de centro A unindo os pontos B e C,
de centro B unindo os pontos C e A e o de centro C unindo os pontos A e B.
8. Construa o ponto $D = (5, -3)$ (ou utilize outros valores quaisquer, esse ponto é um dos vértices da guia quadrada).
9. Construa o ponto $E = (x(D) + s, y(D))$.
10. Use o comando de construir um Polígono Regular e construa um **QUADRADO** selecionando os pontos D e E (ver Figura 59).
11. Construa o “valor auxiliar” $Dh = Se(\alpha < 30^\circ, x(A) - s, Se(30^\circ \leq \alpha < 90^\circ, x(B), Se(90^\circ \leq \alpha < 150^\circ, x(C) - s, Se(150^\circ \leq \alpha < 210^\circ, x(A), Se(210^\circ \leq \alpha < 270^\circ, x(B) - s, Se(270^\circ \leq \alpha < 330^\circ, x(C), x(A) - s))))))$
12. Construa o “valor auxiliar” $Dv = Se(\alpha < 60^\circ, y(C), Se(60^\circ \leq \alpha < 120^\circ, y(A) - s, Se(120^\circ \leq \alpha < 180^\circ, y(B), Se(180^\circ \leq \alpha < 240^\circ, y(C) - s, Se(240^\circ \leq \alpha < 300^\circ, y(A), y(B) - s))))$.
13. Construa o ponto $H = (Dh, Dv)$ (ver Figura 60).

14. Construa o ponto $J = A - H + D$.
15. Construa o ponto $K = B - H + D$.
16. Construa o ponto $L = C - H + D$.
17. Construa os três arcos circulares: de centro J unindo os pontos K e L, de centro K unindo os pontos L e J e o de centro L unindo os pontos J e K.

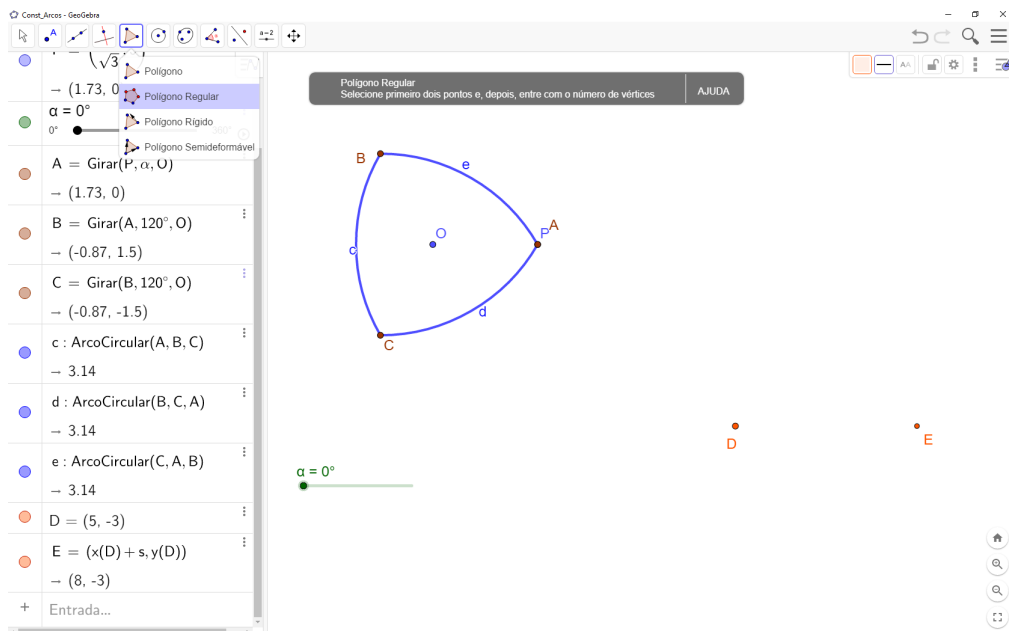


Figura 59: Construindo um QUADRADO a partir de dois pontos.

Assim, tem-se o Triângulo de Reuleaux no Geogebra, inserido em uma guia quadrada, com a possibilidade de rotacioná-lo. O controle “S” possibilita a alteração do tamanho e o controle “ α ” aciona o movimento de rotação da figura.

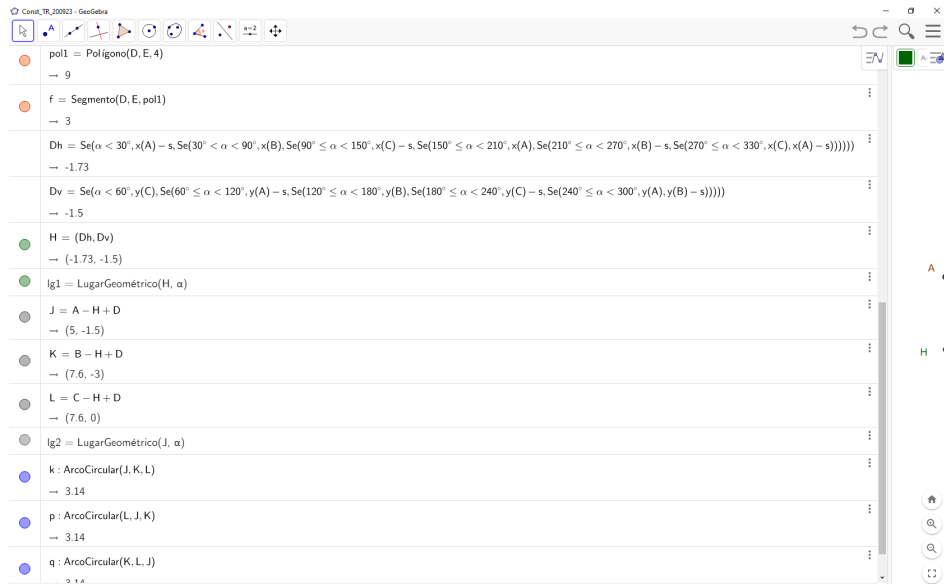


Figura 60: Valores para os vértices do Triângulo de Reuleaux rotacionando dentro da guia quadrada.

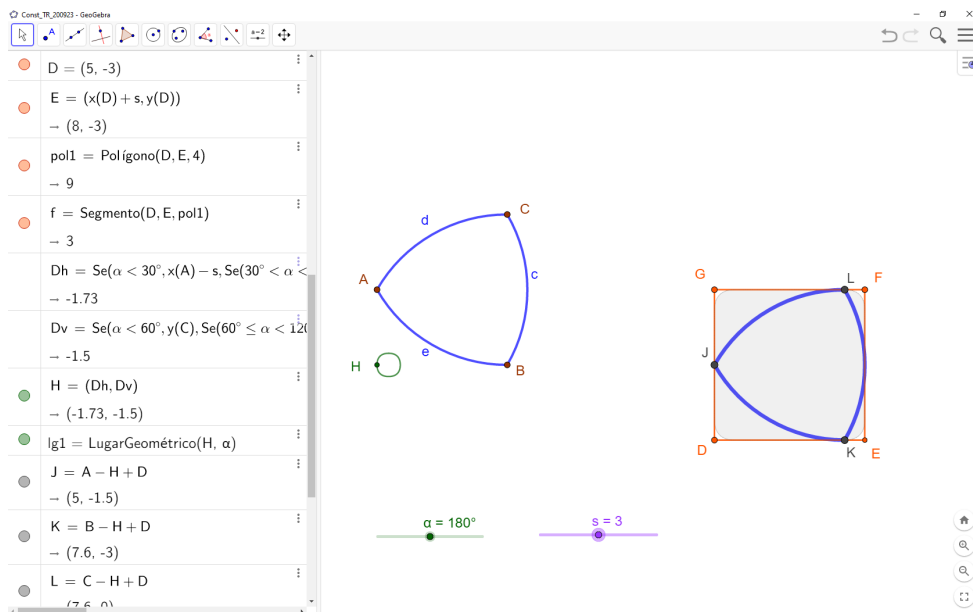


Figura 61: O Triângulo de Reuleaux no Geogebra com rotacional inserido na guia quadrada. Acesso no Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/fkvc8ha>.

4.3.5 VTR no Geogebra

Para construir uma VTR de largura constante S , como na Figura 62, seguir os passos de construção no Geogebra:

1. Construa o controle deslizante NÚMERO de “nome” S.
Intervalo: mín.: 1 ; máx.: 10 ; Incremento: 1.
2. Construa o “valor auxiliar” $R = s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ (digitando no “Campo de Entrada”).
3. Construa o “valor auxiliar” $r = s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
4. Construa o ponto $F = (0,0)$
5. Construa os pontos $A = (0, r)$, $B = (r, 0)$, e $C = (0, -R)$ e $D = (-R, 0)$.
6. Construa os quatro arcos circulares: de centro F unindo os pontos B e A, de centro C unindo os pontos A e D, de centro F unindo os pontos D e C, e o de centro D unindo os pontos C e B.

Assim, tem-se a VTR no Geogebra, com a possibilidade de rotacioná-lo. O controle “S” possibilita a alteração do tamanho da figura.

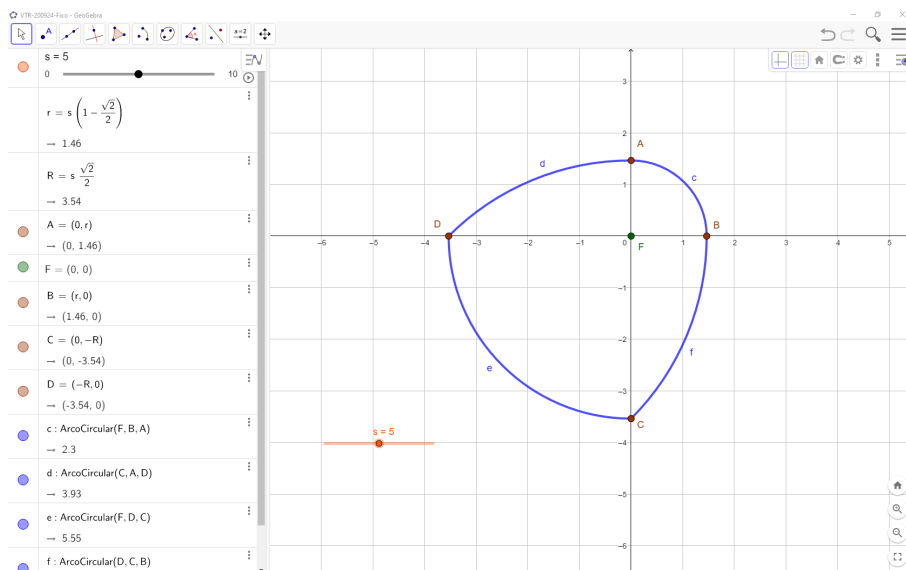


Figura 62: VTR construído no Geogebra.

4.3.6 VTR Rotacionando no Geogebra inserido na Guia Quadrada

Para construir uma VTR de largura constante S com a possibilidade de rotacionar no interior de um quadrado, como na Figura 64, seguir os passos de construção no Geogebra:

1. Construa o controle deslizante NÚMERO de “nome” S .
Intervalo: mín.: 1 ; máx.: 10 ; Incremento: 1.
2. Construa o controle deslizante ÂNGULO de “nome” α
Intervalo: mín.: 0° ; máx.: 360° ; Incremento: 0.5° .
3. Construa o “valor auxiliar” $R = s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ (digitando no “Campo de Entrada”).
4. Construa o “valor auxiliar” $r = s \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
5. Construa o “valor auxiliar” $r2 = \sqrt{2}$.
6. Construa o “valor auxiliar” $b = \tan \alpha$.
7. Construa o “valor auxiliar” $h1 = \cos \alpha$.
8. Construa o “valor auxiliar” $h2 = \sin \alpha$.
9. Construa o “valor auxiliar” $Dx = \text{Se}(\alpha < 45^\circ, h1 + h2 - 1, \text{Se}(45^\circ \leq \alpha < 90^\circ, r2 - 1, \text{Se}(90^\circ \leq \alpha < 135^\circ, r2 - 1, \text{Se}(135^\circ \leq \alpha < 180^\circ, -h1 + h2 - 1, \text{Se}(180^\circ \leq \alpha < 225^\circ, h1 + h2 + 1, \text{Se}(225^\circ \leq \alpha < 270^\circ, -r2 + 1, \text{Se}(270^\circ \leq \alpha < 315^\circ, -r2 + 1, \text{Se}(315^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ, -h1 + h2 + 1))))))))$.
10. Construa o “valor auxiliar” $Dy = \text{Se}(\alpha < 45^\circ, 0, \text{Se}(45^\circ \leq \alpha < 90^\circ, -h1 - h2 + r2, \text{Se}(90^\circ \leq \alpha < 135^\circ, -h1 + h2 - 2 + r2, \text{Se}(135^\circ \leq \alpha < 180^\circ, -2 + 2r2, \text{Se}(180^\circ \leq \alpha < 225^\circ, -2 + 2r2, \text{Se}(225^\circ \leq \alpha < 270^\circ, -h1 - h2 + r2 - 2, \text{Se}(270^\circ \leq \alpha < 315^\circ, -h1 + h2 + r2, \text{Se}(315^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ, 0))))))))$.
11. Construa o ponto $E = (Dx, 1 - r2 + Dy)$.
12. Construa o vetor $u = (1 + \sqrt{2}) \cdot \text{Vetor}(E)$.
13. Construa o ponto $F = \frac{r \cdot u}{\sqrt{2}}$.
14. Construa a reta $w(x) = y(F) + b \cdot x - b \cdot x(F)$.

15. Construa a reta $l = \text{Perpendicular}(F, w)$.
16. Construa a reta $m = \text{Perpendicular}(F, l)$.
17. Construa a reta $k = \text{Bissetriz}(l, m)$, reta n (imediata).
18. Construa o círculo $c = \text{Círculo}(F, r)$.
19. Construa o círculo $d = \text{Círculo}(F, R)$.
20. Construa o ponto $P = \left(\frac{-s}{2}, \frac{-s}{2}\right)$.
21. Construa o ponto $T = \left(\frac{s}{2}, \frac{-s}{2}\right)$.
22. Use o comando de construir um Polígono Regular e construa um **QUADRADO** selecionando os pontos P e T .
23. Construa o ponto $P1 = \text{Interseção}(c, n)$.
24. Construa o ponto $P2 = \text{Interseção}(c, n)$.
25. Construa o ponto $Q1 = \text{Interseção}(c, k)$.
26. Construa o ponto $Q2 = \text{Interseção}(c, k)$.
27. Construa o ponto $T1 = \text{Interseção}(d, n)$.
28. Construa o ponto $T2 = \text{Interseção}(d, n)$.
29. Construa o ponto $S1 = \text{Interseção}(d, k)$.
30. Construa o ponto $S2 = \text{Interseção}(d, k)$.
31. Use o comando SE para construir os pontos:

$$A = \text{Se}(90^\circ \leq \alpha < 270^\circ, (x(P2), y(P2)), (x(P1), y(P1)))$$

$$B = \text{Se}(90^\circ \leq \alpha < 270^\circ, (x(Q2), y(Q2)), (x(Q1), y(Q1)))$$

$$C = \text{Se}(90^\circ \leq \alpha < 270^\circ, (x(T2), y(T2)), (x(T1), y(T1)))$$

$$D = \text{Se}(90^\circ \leq \alpha < 270^\circ, (x(S2), y(S2)), (x(S1), y(S1))).$$
32. Construa os quatro arcos circulares: de centro F unindo os pontos A e B, de centro C unindo os pontos D e A, de centro F unindo os pontos C e D, e o de centro D unindo os pontos B e C (ver Figura 63).

Assim, tem-se a VTR no Geogebra, inserida em uma guia quadrada, com a possibilidade de rotacioná-la. O controle “S” possibilita a alteração do tamanho e o controle “α” aciona o movimento de rotação da figura.

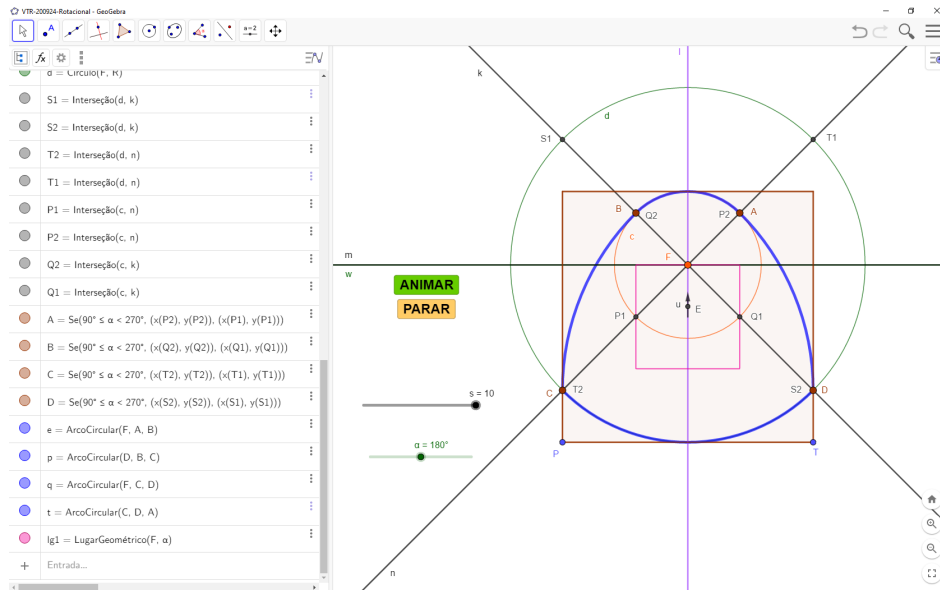


Figura 63: VTR no interior de um Quadrado de lado S construída no Geogebra.

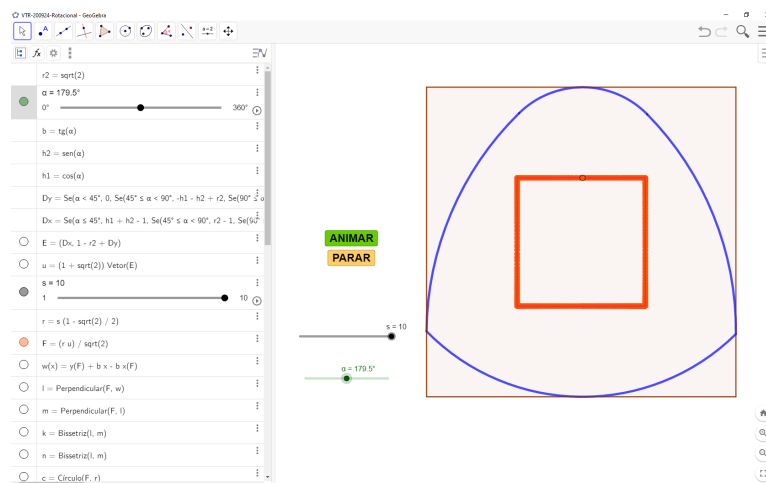


Figura 64: VTR rotacionando no interior de um Quadrado de lado S construído no Geogebra. Acesso: <https://www.geogebra.org/classic/j7dsnrkd>.

Para acrescentar o botão de comando “ANIMAR” e “PARAR” (ver Figura 65), selecione do ícone na barra de ferramentas do Geogebra. Em “configurações” altere a cor de fundo do Botão e formate o estilo do texto.

Para o Botão “ANIMAR”: Insira o código do GeoGebra “IniciarAnimação(α)” (na primeira caixa ou na aba de “Programação”) (ver Figura 66).

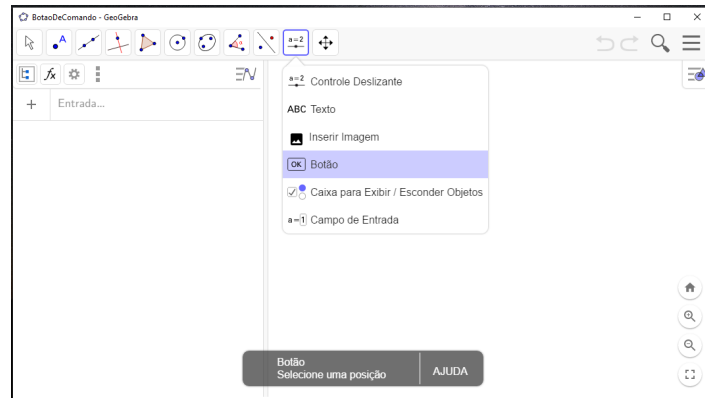


Figura 65: Para adicionar um botão de comando no Geogebra.

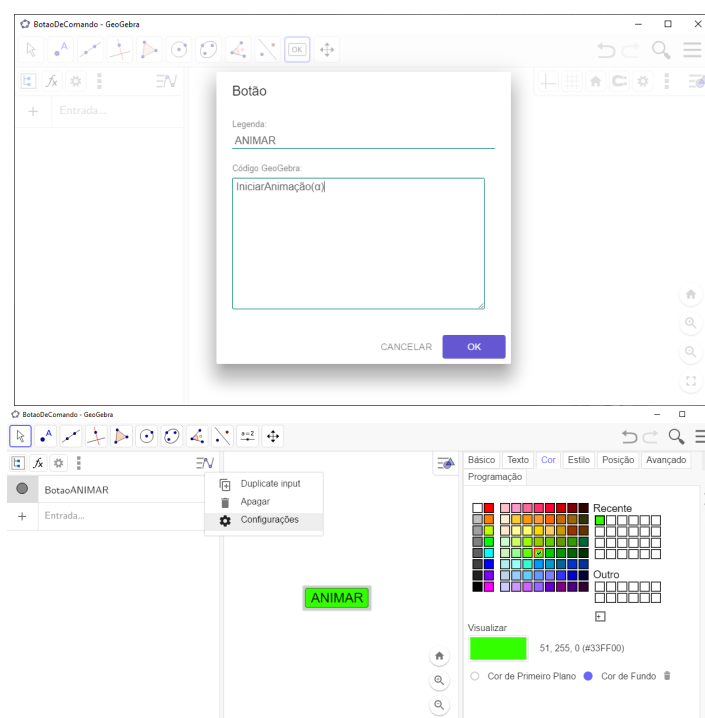


Figura 66: Para adicionar o botão de comando “ANIMAR” no Geogebra.

Para o Botão “PARAR”: Insira o código do GeoGebra “IniciarAnimação(α ,false)” na primeira caixa ou na aba de “Programação”.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve a finalidade de mostrar como seria possível abrir um furo quadrado com uma broca e, além de se ter a clareza dessa possibilidade, usou-se esse fato para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos relacionados ao tema.

Motivados por uma aplicação real, foram utilizados régua e compasso para desenhar o Triângulo de Reuleaux, a VTR e suas versões com os cantos arredondados. Conhecer algumas propriedades como perímetros, áreas e escrever suas equações paramétricas.

O estudo de curvas no plano propiciou a oportunidade de conhecer um pouco da Geometria Diferencial e, mais particularmente, rever o conceito de curvatura de uma curva plana. Neste trabalho considerou-se o enfoque nas curvas planas, fechadas, simples, convexas e de largura constante. Essas características mostram um pouco da amplitude que poderá ser alcançada neste assunto quando não são colocadas essas restrições, fazendo uso de Álgebra, Geometria e Cálculo.

A utilização de um *software* matemático de geometria dinâmica, como o Geogebra, é de grande importância no desenvolvimento da aprendizagem e no ensino, por acrescentar mais detalhes ao que está sendo estudado e incluir movimentos de animação.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALENCAR, H. ; SANTOS, W. ; SILVA NETO, G.: *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. SBM, 2020, acesso em 14 de setembro de 2020. – URL https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2020/07/Geometria_Diferencial_das_Curvas_em_R2.pdf
- [2] ARAÚJO, P. V.: *Geometria Diferencial*. IMPA, Coleção Matemática Universitária, 3 ed. Rio de Janeiro, 2016
- [3] CARMO, M. P. do: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, Textos Universitários, 6 ed. Rio de Janeiro, 2014
- [4] CARVALHO, M. ; OLIVEIRA, A.: *Estradas Para Rodas Exóticas*. Boletim da SPM 65, 2011, acesso em 27 de julho de 2018. – URL <https://revistas.rcaap.pt/boletimspm/article/view/736>
- [5] DELGADO, J. ; FRENSEL, K.: *Geometria Diferencial*. Instituto de Matematica - UFF, 2019, acesso em 01 de setembro de 2020. – URL <http://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>
- [6] KAYMA, M: *Como é feito o furo quadrado (2012)*. YouTube, 2012, acesso em 08 de julho de 2019. – URL <https://www.youtube.com/watch?v=reKmsqTMwU8>
- [7] LIMA, R. F.: *Introdução à Geometria Diferencial*. IV Colóquio de Matemática da Região Norte - UNIFAP - SBM, 2016, acesso em 2 de julho de 2019
- [8] MAOR, J.: *Essa construção é brevemente descrita por Maor & Jost (2014) e pode ser vista, por exemplo, no vídeo Fun with Reuleaux triângulos de Alex Franke, 21 de agosto de 2011*. YouTube, 2011, acesso em 08 de julho de 2019. – URL <https://www.youtube.com/watch?v=0dY9Y-6DsgU>
- [9] MELLO, J. L. P.: *Polígonos de Reuleaux e a Generalização do Pi*. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática, nº 81, 2º Quadrimestre de 2013, acesso em 08 de julho de 2019. – URL https://ogeogebra.com.br/arquivos/reuleaux_rpm81.pdf

- [10] PACIOTTI, L.: *Curves of constant width and their shadows*. Whitman Senior Project, 2010, acesso em 28 de março de 2020. – URL https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/SeniorProject_LuciaPaciotti.pdf
- [11] SIQUEIRA, R. F.: *Tutorial para GeoGebra*. Universidade Federal Fluminense - UFF, 2017, Curso de Engenharia de Telecomunicações - TGT, acesso em 28 de março de 2020. – URL http://www.telecom.uff.br/pet/petws/downloads/tutoriais/geogebra/Tutorial_GeoGebra.pdf
- [12] VOLOCH, J. F.: *Curvas de largura constantes*. IMPA, Rio de Janeiro : Matemática Universitária, nº 5, junho de 1987, acesso em 08 de julho de 2019. – URL https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo05.pdf