UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

REDES COMPLEXAS E SUAS APLICAÇÕES NO ESTUDO DE MATRIZES

FRANQUILANDE CERQUEIRA ARAGÃO

CRUZ DAS ALMAS - BAHIA
DEZEMBRO DE 2021

FRANQUILANDE CERQUEIRA ARAGÃO

REDES COMPLEXAS E SUAS APLICAÇÕES NO ESTUDO DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — PROFMAT, do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia — UFRB, como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre* em Matemática.

CRUZ DAS ALMAS - BAHIA

DEZEMBRO DE 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

A659r

Aragão, Franquilande Cerqueira.
Redes complexas e suas aplicações no estudo de matrizes / Franquilande Cerqueira Aragão._ Cruz das Almas, Bahia, 2021.
88f.; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Ariston Cardoso

1.Matemática – Estudo e ensino – Matrizes (Matemática). 2.Problemas, exercícios, etc. 3.Teoria dos grafos – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 512

Ficha elaborada pela Biblioteca Central de Cruz das Almas - UFRB.
Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).
(os *dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico*).

ATA DE DEFESA

Aos três dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e um, às 14h 30min, via videoconferência na plataforma Google Meet, instalou-se a Comissão Examinadora de dissertação de mestrado do discente Franquilande Cerqueira Aragão. A Comissão Examinadora foi composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. Ariston de Lima Cardoso UFRB, orientador, Prof. Dr. Adson Mota Rocha , UFRB, examinador interno e Prof. Dr. Genilson Ribeiro Melo, UFRB, examinador externo. Deu-se início a sessão de defesa pelo Prof. Dr. Ariston de Lima Cardoso, que, após a apresentação dos membros da banca, solicitou a candidato que iniciasse a apresentação da dissertação, intitulada *"REDES COMPLEXAS E SUAS APLICAÇÕES NO ESTUDO DE MATRIZES"*, marcando um tempo de 35 minutos para a mesma. Concluída a exposição, o presidente da sessão passou a palavra ao examinador externo para arguir o candidato, em seguida ao examinador interno para que fizesse o mesmo e finalizou a arguição através de suas próprias considerações sobre o trabalho em julgamento. A Comissão Examinadora reuniu-se em sessão reservada e deliberou pela recomendação pela APROVAÇÃO. Divulgado o resultado ao discente e aos demais participantes e encerrada a sessão de julgamento, eu Professor Ariston de Lima Cardoso, na qualidade de presidente da Comissão Examinadora, lavrei a presente ata que será assinada por mim e pelos demais membros.

Cruz das Almas, 03 de dezembro de 2021.

Prof. Dr. Ariston de Lima Cardoso
Presidente

Adson Mota Rocha.

Prof. Dr. Adson Mota Rocha
Examinador Interno

Prof. Dr. Genilson Ribeiro Melo
Examinador Externo

Campus Universitário de Cruz das Almas
Rua Rui Barbosa, nº 710 - Centro - Cruz das Almas/BA - CEP: 44380-000 - Tel.:(75) 3621-4314/9362
https://www.ufrb.edu.br/profmat/

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo ".

Galileu Galilei

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar, a Deus, que sempre norteou minhas ideias, caminhos e desafios, dando forças e sabedorias para superar todos os obstáculos.

Agradeço a minha esposa Márcia Virgínia Leite Aragão e filha Giovanna Leite Aragão que estiveram sempre ao meu lado incentivando e apoiando.

Agradeço aos meus pais Maria Margarida de Lima Cerqueira e in memória Antônio Freitas Aragão pela simplicidade e dedicação como me criaram.

Agradeço aos meus irmãos: Alexsandra, Antônio Marcos, Adriana, Andreia, Ariana, em especial, Maria da Conceição que foi como anjo nessa caminhada, sempre com paciência e boa vontade me incentivando e ajudando.

Agradeço a todos os professores da Universidade Federal do Recôncavo Baiano (UFRB), em especial, o professor Doutor Ariston de Lima Cardoso, que aceitou e cumpriu a dura tarefa de me orientar nesse trabalho, sempre com muita paciência e dedicação.

Agradeço os colegas de Mestrado, em especial, o grupo de estudo, Joílson, Renata, Itana, e in memória Luís Mário, que contribuíram bastante nos meus estudos, e hoje mantemos laços de carinho e amizade. A vocês minha admiração.

RESUMO

O presente trabalho aborda o estudo de Matrizes a partir da análise de Redes Complexas e da Teoria dos Grafos. A dissertação em epígrafe originou-se a partir da inquietação de se trabalhar Matrizes de modo que os discentes pudessem contextualizar os conhecimentos adquiridos e verificar sua importância na aplicação de diversas situações do cotidiano. Para tanto, será feita uma fundamentação de alguns aspectos acerca de Redes Complexas e da Teoria dos Grafos. Apresentaremos uma prática realizada com alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Feira de Santana-Ba, no ano de 2021. Redes Complexas e Teoria dos Grafos apresentam aspectos pertinentes que merecem espaço no currículo da Educação Básica. Apresentaremos uma seleção de possíveis atividades a serem implementadas numa perspectiva metodológica de Resolução de Problemas, pois, acreditamos que essa metodologia é um possível caminho para se ter uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Redes Complexas; Teoria dos Grafos; Matrizes; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The present work approaches the study of Matrices from the analysis of Complex Networks and Graph Theory. The dissertation in the title originated from the concern to work Matrices so that students could contextualize the acquired knowledge and verify its importance in the application of different situations of daily life. For that, a foundation of some aspects about Complex Networks and Graph Theory will be made. We will present a practice carried out with students in the 3rd year of high school at a state public school in Feira de Santana-Ba, in 2021. Complex Networks and Graph Theory present relevant aspects that deserve space in the Basic Education curriculum. We will present a selection of possible activities to be implemented in a methodological perspective of Problem Resolutions, because we believe that this methodology is a possible way to have a meaningful learning.

Keywords: Complex networks; Theory of graphs; Matrices; Problems Resolutions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Euller 15
Figura 2 – Cidade de Konigsberg 16
Figura 3 – A modelagem matemática de Kaliningrado proposta por Euler 16
Figura 4 – Rede de amizade do Facebook 20
Figura 5 – Exemplo de Rede Aleatória 22
Figura 6 – Ilustração de redes de pequeno mundo segundo os autores Watts e Strogatz para diferentes probabilidades de conexão. 1 - rede regular. 2 - rede aleatória. 3 - rede pequeno-mundo 23
Figura 7 – Rede aleatória (a) e rede de livre escala (b) 24
Figura 8 – (a) Exemplo de grafo não orientado e (b) exemplo de grafo orientado. 27
Figura 9 – (a) Exemplo de grafo com laço e (b) exemplo de grafo com arestas paralelas. 28
Figura 10 – Grafo que representa o problema das ponte de Konigsberg. 28
Figura 11 – (a) grafo nulo e (b) grafo vazio. 29
Figura 12 – Grafo com arestas e vértices adjacentes 29
Figura 13 – (a) exemplo de grafo de grau 12 30
Figura 14 – (a) ciclo euleriano (b) caminho euleriano (c) grafo não euleriano 32
Figura 15 – (a) multigrafo com ciclo euleriano (b) multigrafo com caminho euleriano (c) multigrafo não euleriano 33
Figura 16 – (a) grafo com ciclo hamiltoniano (b) grafo com caminho hamiltoniano (c) grafo não hamiltoniano 33
Figura 17 – (a) exemplo de grafo simples e (b) exemplo de grafo não simples. 34
Figura 18 – Grafos completos K_3 e K_4 34
Figura 19 – Grafos complementares 35
Figura 20 – Exemplos de grafos regulares 35
Figura 21 – (a) grafo conexo e (b) grafo desconexo 36
Figura 22 – (a) é grafo bipartido e (b) não é grafo bipartido 37
Figura 23 – Floresta formada por três arvores 38

Figura 24 – Grafo G e três árvores abrangentes de G. 38
Figura 25 – Exemplo de grafos isomorfos. 39
Figura 26 – Distribuição das pessoas ocupadas por regiões metropolitanas 41
Figura 27 – Diagonais de uma matriz 45
Figura 28 – Multigrafo de ordem 4 (G). 51
Figura 29 – Grafo com laços 53
Figura 30 – Grafo orientado G (dígrafo) 53
Figura 31 – Grafo isomorfos G e H. 55
Figura 32 – Grafo Simples 56
Figura 33 – Grafo pseudografo 57
Figura 34 – Cadeia alimentar. 62
Figura 35 – Grafo representativo da cadeia alimentar. 62
Figura 36 – Grafo representativo da rede de amizade. 64
Figura 37 – Mapa das regiões do Brasil 64
Figura 38 – Grafo representativo do mapa das regiões do Brasil 65
Figura 39 – A modelagem matemática de Kaliningrado proposta por Euler 67
Figura 40 – Grafo que representa o problema das ponte de Konigsberg. 67
Figura 41 – Grafo da questão 1 69
Figura 42 – Grafos da questão 2 69
Figura 43 – Grafo da Questão 1 71
Figura 44 – Grafo da matriz de adjacência da questão 2 72
Figura 45 – Grafo da questão 3 72
Figura 46 – Grafo da questão 4 73
Figura 47 – Alunos assistindo ao vídeo “O que são Redes Complexas?” 74
Figura 48 – Discussão sobre o vídeo “O que são Redes Complexas?” 74
Figura 49 – Discussão sobre o vídeo “O que são Redes Complexas?” 75
Figura 50 – Alunos resolvendo o problema das sete pontes de Königsberg 75
Figura 51 – Respostas dadas pelos alunos para o problema das sete pontes de Königsberg 76
Figura 52 – Explicando o problema das sete pontes de Königsberg 76
Figura 53 – Explicando a representação de uma rede complexa através de um grafo . . . 77
Figura 54 – Alunos resolvendo a atividade 3 77
Figura 55 – Respostas dadas pelos alunos para a atividade 3 78

Figura 56 – Explicando conceitos básicos de matrizes 78
Figura 57 – Alunos resolvendo a atividade 4 79
Figura 58 – Respostas dadas pelos alunos para a atividade 4 79
Figura 59 – Respostas dos alunos para a pergunta 4 80
Figura 60 – Finalização da oficina 80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quantidade de alunos de uma escola nas três séries do ensino médio por turnos de estudos: matutino, vespertino e noturno. 42
Tabela 2 – Representação do grafo da figura 28 em forma de tabela (A) 52
Tabela 3 – Representação do grafo G da figura 30. 54
Tabela 4 – Representação do Grafo G 55
Tabela 5 – Representação do Grafo H. 55
Tabela 6 – Representação do Grafo Simples da figura 32 57
Tabela 7 – Representação do Grafo pseudografo da figura 33 58

SUMÁRIO

1 REDES COMPLEXAS 15

1.1 Contexto histórico 15

1.2 Propriedades das Redes 17

1.2.1 Coeficiente de aglomeração 18

1.2.2 Distribuição de graus 19

1.2.3 Resistência 19

1.2.4 Misturas de padrão: 20

1.2.5 Correlação de Graus 20

1.3 Modelos de Redes Complexas 20

1.3.1 Redes Aleatórias 21

1.3.2 Redes Pequeno-mundo 23

1.3.3 Redes Livres de Escala 24

2 TEORIA DOS GRAFOS 26

2.1 Conceitos Básicos 26

2.1.1 Laços e arestas paralelas 27

2.1.2 Ordem e tamanho de um grafo 28

2.1.3 Arestas e vértices adjacentes 29

2.1.4 Grau de um vértice e grau de um grafo 30

2.1.5 Passeio, trilha caminho 31

2.1.6 Circuitos e ciclos 31

2.1.7 Ciclos e caminho euleriano 32

2.1.8 Ciclos e caminho Hamiltoniano 33

2.2 Tipos de grafos 33

2.2.1 Grafo simples 33

2.2.2 Grafo completo 34

2.2.3 Grafo complementar 34

2.2.4 Grafo regular . . . 35
2.2.5 Grafo conexo . . . 35
2.2.6 Grafo bipartido . . . 36
2.2.7 Grafo floresta . . . 37
2.2.8 Grafo árvore abrangente . . . 38
2.2.9 Grafos isomorfos . . . 38

3 MATRIZES . . . 40
3.1 Um breve histórico de Matrizes . . . 40
3.2 Matrizes . . . 40
3.3 Definição de Matrizes . . . 41
3.4 Representação genérica de uma matriz . . . 43
3.5 Tipos especiais de Matrizes . . . 43
3.6 Matriz Transposta . . . 46
3.7 Igualdade de matrizes . . . 47
3.8 Operações com Matrizes . . . 47
3.8.1 Adição de matrizes . . . 47
3.8.2 Matriz oposta . . . 48
3.8.3 Subtração de matrizes . . . 48
3.8.4 Multiplicação por escalar . . . 49
3.8.5 Multiplicação de matrizes . . . 49
3.8.6 Matriz inversa . . . 50
3.9 Representação Matricial das Redes Complexas . . . 50
3.9.1 Matriz de Adjacência . . . 51
3.9.2 Matriz de incidência . . . 56

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ESTUDO DE MATRIZES UTILIZANDO REDES COMPLEXAS . . . 59
4.1 Sequência didática . . . 59
4.2 Atividades propostas para o estudo de Matrizes utilizando Redes Complexas . . . 60
4.2.1 Atividade 1: Introdução a Redes Complexas . . . 60
4.2.2 Atividade 2: Grafos por meio de matrizes . . . 65

4.3 Oficina: Matrizes utilizando Redes complexas e Teoria dos Grafos . . . 73
4.3.1 Aplicação da oficina 74
4.3.2 Questionário que avaliou a aplicação da oficina 79

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 82

REFERÊNCIAS 84

INTRODUÇÃO

O estudo de redes complexas é um tema bastante interdisciplinar, pois envolve diversas áreas de conhecimento. Tente imaginar, por exemplo, o que tem em comum o sistema do nosso cérebro, o facebook, a internet, a sociedade das cadeias alimentares, o wikipédia, as proteínas e os aeroportos? A princípio eles não têm nada em comum, que a gente possa imaginar, no entanto, todos eles são exemplos de redes complexas. Mas afinal, o que são redes complexas ? Rede complexa pode ser definida como um conjunto de elementos chamados vértices e esses elementos se conectam através de arestas.

A nossa sociedade é um exemplo de rede complexa, onde as pessoas podem estar conectadas por laços de amizades, laços de trabalho, por gostarem das mesmas atividades, etc. As redes sociais, também, podem representar um exemplo de rede complexa, pois, os seus usuários estão conectados no Facebook, no Instagram, no Telegram ou no Twitter e essa conexão pode ser definida através de alguma singularidade de interesse ou amizade entre eles. Dessa forma, podemos observar que as redes complexas podem ser tanto físicas, como a nossa sociedade, quanto virtuais, como as interações através das redes sociais.

Um aspecto importante no estudo de redes está em descobrir, caracterizar e modelar a estrutura da rede. Mas, para que serve a estrutura de uma rede? Por que devemos caracterizar e modelar a estrutura de uma rede? Existem uma série de fenômenos que operam sobre as redes e que dependem fundamentalmente da estrutura das mesmas. Desta forma, para entender o comportamento de tais fenômenos é necessário antes entender a estrutura das redes.

Assim sendo, para poder generalizar resultados teremos que trabalhar não com as redes específicas mas sim com os processos que dão origem a elas e para isso iremos representar os processos que dão origem as redes através de modelos matemáticos que simplesmente determinam matematicamente como a rede será construída. O modelo matemático que usaremos para representar uma rede será o grafo, que por sua vez pode ser representado através de uma matriz.

Considerando a aplicabilidade do estudo de matrizes ao cotidiano e a necessidade de uma melhor compreensão deste tema pelos estudantes, o presente trabalho apresenta uma abordagem do estudo de matrizes na aprendizagem significativa para o estudante do Ensino Médio, uma vez que, a aplicação desse estudo está presente no cotidiano da sociedade, porém não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato, mostrando que este estudo faz parte da vida.

Dessa forma, o principal intuito desse trabalho é propor estratégias para o estudo de matrizes apresentando ferramentas de aprendizagem que induzam o estudante a perceber o uso das matrizes em situações do seu cotidiano, bem como, despertar no estudante a curiosidade e consequentemente o interresse pela matemática.

O desenvolvimento desse trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro deles aborda os conceitos relacionados a redes complexas, onde definiremos os três principais tipos de redes complexas. Já no segundo capítulo, definiremos o que é um grafo onde serão abordados os conceitos básicos de grafos, assim como, suas características. No terceiro capitulo, abordaremos o conceito e as propriedades referentes ao estudo de matrizes e também será abordado a representação matricial de um grafo. Finalmente, o quarto capítulo nos oferece uma proposta de utilização de métodos facilitadores para a realização de uma aprendizagem mais dinâmica, criativa e significativa no estudo de Matrizes.

CAPÍTULO 1

REDES COMPLEXAS

1.1 Contexto histórico

Segundo Figueiredo (2011), atualmente existem diversos centros de pesquisa nos EUA e na Europa dedicados exclusivamente a área de Redes Complexas e o aprofundamento desse estudo poderá ter um papel central para a Ciência moderna, revelando aspectos fundamentais e ainda desconhecidos sobre o mundo que nos cerca. Assim, compreender seus conceitos pode nos ajudar a entender melhor os diferentes tipos de sistemas, tais como o sistema das redes sociais.

Mas, o que é uma rede complexa? Figueiredo (2011), afirma que uma rede complexa compreende um grafo que representa um conjunto de nós ligados por arestas, que em conjunto formam uma rede. Já Barabási (2009) afirma que o termo redes complexas tem como base um grafo que apresenta uma estrutura topográfica não trivial. Dessa forma, o estudo de redes na forma de grafos é um dos pilares da matemática discreta e teve início quando o matemático suíço, Leonhard Euler, Figura 1, em 1736, propôs uma solução para o famoso problema da época, o conhecido Problema das sete pontes de Konisgsberg, figura 2. (METZ, 2007).

Figura 1 – Euller

Fonte: clube.sbm.pt (acesso em 21 de agosto de 2021)

Figura 2 – Cidade de Konigsberg

Fonte: wikiwand.com (acesso em 21 de agosto de 2021)

Segundo Almeida (2013), Euler morou durante muitos anos próximo à cidade de Königsberg, atualmente conhecida por Kaliningrad (Rússia), essa região de grande movimentação comercial é cortada pelo Rio Pregel e possui sete pontes para atravessá-la. As constantes idas e vindas dos habitantes dessa região, por essas setes pontes, fez surgir o "quebra-cabeça": seria possível percorrer todas as sete pontes sem jamais passar pela mesma ponte duas vezes?

A solução proposta por Euler para esse problema foi apresentada utilizando-se um modelo em grafo, Figura 3, ou seja, ele apresentou um diagrama onde as faixas de terra eram os vértices e as pontes eram as arestas. Assim, ele conseguiu representar o primeiro grafo da história e provou que não era possível percorrer as setes pontes sem passar pelo menos duas vezes na mesma ponte (ALMEIDA, 2013). Esta solução teve como base uma simples observação, Euler verificou que os vértices que possuem um número ímpar de arestas devem ser o ponto de partida ou chegada do percurso, e, uma passagem contínua que atravessasse todas as pontes só podia ter um único vértice desse tipo. Dessa forma, esse caminho não existiria em Königsberg, porque existiam mais de dois vértices com um número ímpar de arestas.

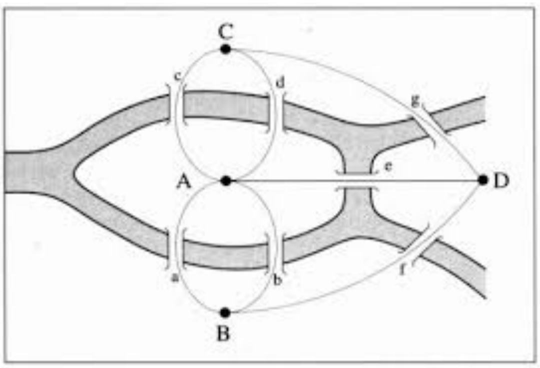


Figura 3 – A modelagem matemática de Kaliningrado proposta por Euler

Fonte: clube.sbm.pt (acesso em 21de agosto de 2021)

Segundo Netto (2009), para Euler o problema das pontes não passou de um simples desafio intelectual, ele não aprofundou o tema e nem o desenvolveu no sentido de achar alguma aplicação para verificar até onde esse tema poderia levar. Com isso, o estudo sobre grafos ficou parado por pelo menos 100 anos, sem que ninguém pensasse algo parecido sobre o tema.

Somente em 1847, Kirchhoff publicou o resultado de sua pesquisa sobre circuitos elétricos utilizando modelos grafos. Esse estudo produziu alguns resultados ainda hoje importantes para a Teoria dos Grafos e também interessantes para o estudo da eletricidade. (NETTO, 2009)

Dez anos depois, em 1857, utilizando o conceito de grafos, Cayley desenvolveu diferentes isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos (compostos químicos). E, em meados do século XIX, Guthrie descobriu um problema relacionado à cartografia. Esse problema consistia em provar que, para qualquer mapa, é necessário usar 4 cores diferentes para colorir as regiões neles representadas. Assim, um problema aparentemente simples tornou-se muito difícil, pois nem Guthrie, nem outros matemáticos da época conseguiram resolvê-lo. Foi somente em 1976 que surgiram resultados significativos para esse problema, ainda assim, utilizando extensivamente computadores para auxiliar na resolução. (NETTO, 2009)

Ainda segundo o autor, a resolução obtida para o problema de Guthrie contribuiu significativamente para o estudo dos Grafos, pois, nesse período ela se desenvolveu bastante e abriu caminho para que novas aplicações fossem descobertas. A partir daí, durante todo século XX, aumentou o interesse de muitos matemáticos pelo estudo dos Grafos, consequentemente, vários artigos e livros foram publicados sobre o tema.

O estudo de Grafos, atualmente, é uma área de interesse crescente e suas aplicações vão desde os problemas de localização e de traçados de rotas para diversos tipos de serviços, ao projeto de processadores eletrônicos, passando pelo planejamento de horários, pelo estudo da estrutura do DNA, dentre outras aplicações. (NETTO, 2009)

No próximo capítulo, abordaremos um pouco mais sobre a Teoria dos Grafos, verificaremos que, como essa teoria passou a ser aplicada em diversas áreas do conhecimento, houve a necessidade de aprimorar o seu formalismo matemático.

1.2 Propriedades das Redes

O estudo das redes complexas tem como base diferentes áreas do conhecimento, desde a neurobiologia a física estatística, por exemplo. E sua principal característica é a capacidade de modelar os relacionamentos existentes na natureza, na sociedade ou até mesmo em um conjunto de documentos. Assim, a Teoria dos Grafos foi a primeira área que se dedicou a estudar as abstrações desses problemas usando para isso grafos. De uma maneira simples, podemos dizer que uma rede é um grafo formado por um conjunto de vértices (ou nós) e um conjunto de arestas (ou arcos) que ligam esses vértices. No entanto, nem todo grafo pode ser considerado uma rede complexa, uma vez que, só é possível classificar um grafo como sendo uma rede, se ele apresentar algumas propriedades topográficas particulares que não aparecem em grafos simples. (METZ, 2007)

Apresentaremos a seguir, algumas propriedades principais das redes complexas, uma vez que essas propriedades podem ajudar nas análises dos mais variados aspectos das redes e com os mais diversos propósitos.

1.2.1 Coeficiente de aglomeração

Segundo Metz (2007), através do coeficiente de aglomeração os agrupamentos característicos das redes são quantificados. Esta tendência inerente ao agrupamento é chamada de aglomeração ou transitividade e pode ser quantificada de diferentes formas. Esse fenômeno acontece quando um vértice A se conecta a um vértice B, e o vértice B se conecta a um vértice C, aumentando, dessa forma, as chances do vértice A também se conectar ao vértice C. Ou seja, essa propriedade de transitividade pode indicar a presença de um grande número de triângulos na rede, isto é, um elevado número de conjuntos de três vértices que se conectam entre si.

Para uma melhor compreensão, podemos fazer uma analogia com as redes sociais, pois, nas redes sociais é bastante comum verificarmos a formação de círculos de amigos ou de pessoas conhecidas, onde todas as pessoas possivelmente têm relações diretas com as outras pessoas, possibilitando assim uma alta probabilidade de que, se uma pessoa A conhece uma pessoa B e C, então B e C se conheçam.

Ainda de acordo com os autores, a partir da equação 1, é possível obter o coeficiente de aglomeração (CA) de uma rede, onde o símbolo $\#\Delta$ representa o número de triângulos na rede e, o símbolo $\#v$ representa o número de "vértices que estão conectados triplamente", isto é, representa o número de vértices com arestas não direcionadas para o outro par de nós. Já o fator 3 que aparece no numerador indica que cada triângulo apresenta três triplas , ele também garante que o coeficiente de aglomeração seja um valor entre zero e o um.

$$CA = \frac{3 \cdot \#\Delta}{\#v} \tag{1}$$

1.2.2 Distribuição de graus

De acordo com Metz (2007), o grau de um vértice qualquer em uma rede define o número de arestas que conectam aquele vértice. Dessa forma, a distribuição de graus é uma função de distribuição probabilística que indica a probabilidade de um determinado vértice ter grau fixo. Assim, uma maneira de quantificar essa distribuição é através de uma função de distribuição cumulativa, equação 2, onde $p_{k'}$ é a fração de nós da rede com graus k e P_k é a função cumulativa de distribuição de probabilidades.

$$P_k = \sum_{k'=k}^{\infty} \tag{2}$$

No entanto, em um dígrafo cada vértice tem um grau de entrada e de saída, gerando assim uma equação diferente para o cálculo da distribuição de graus. A nova equação gerada é escrita em função de p_{jk} com duas variáveis, representando, simultaneamente, um grau de entrada j e um grau de saída k.

Metz (2007) afirmam que, a distribuição de graus nas redes aleatórias segue a distribuição de Poisson [1]. Já em muitas redes reais a distribuição de graus segue a Lei de Potência, onde $p_{k'} \sim k^{-\alpha}$ para uma constante α qualquer.

1.2.3 Resistência

A propriedade Resistência é definida por Metz (2007) como sendo a capacidade de resistência da rede em relação a remoção de alguns vértices, sem que seja necessário perder a sua funcionalidade. A principal característica dessa propriedade é que ela está diretamente ligada com a distribuição de graus dos vértices, pois, a retirada de vértices pode ocasionar na perda da conexão entre pares de vértices ou, ainda, pode ocasionar de maneira significativa o aumento do caminho de vértice ao outro.

[1] A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta de probabilidade aplicável a ocorrências de um número de eventos em um intervalo específico.

1.2.4 Misturas de padrão:

Metz (2007), afirmam que alguns tipos de redes apresentam uma mistura de padrões diferentes onde os vértices podem representar diferentes tipos de objetos. Por exemplo, analisando as redes de cadeias alimentares, pode ser observado que existem vértices que representam plantas, animais herbívoros e animais carnívoros. De uma forma geral, a probabilidade de conexão entre esses vértices depende muito do seu tipo, assim especificamente nesse caso, existem arestas conectando os herbívoros as plantas e os herbívoros aos carnívoros. No entanto, existem poucas conexões entre herbívoros e herbívoros ou entre animais carnívoros e plantas.

1.2.5 Correlação de Graus

De acordo com Metz (2007), a propriedade correlação de graus é a responsável por indicar se as arestas em uma rede associam vértices com graus parecidos. Essa correlação é usada, principalmente, em redes com variação de padrões, para investigar a probabilidade de conexão dos vértices de diferentes tipos.

1.3 Modelos de Redes Complexas

O estudo das redes complexas é bastante utilizado para modelar estruturas que são encontradas na natureza, denominadas de redes sociais. As interações das estruturas sociais, representadas pela interação entre indivíduos, é um exemplo de redes reais. As comunidades de discussão virtual como Facebook, Twitter, dentre outras, que criam um vinculo social de interação e aumentam a possibilidade de interação entre as pessoas, representam um exemplo de redes reais, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Rede de amizade do Facebook

Fonte: Visual Complexity (acesso em 21 de agosto de 2021)

Segundo Cardoso (2007), as redes complexas provenientes de modelagem matemática se destacam porque buscam reproduzir os aspectos quantitativos que emergem das redes complexas reais. Ainda segundo o autor, esse fato foi observado nas últimas décadas, onde os novos modelos propostos tornaram-se capazes de modelar mecanismos de muitos e diferentes sistemas complexos.

No entanto, compreender os mecanismos de uma rede não é uma tarefa fácil, porque envolve várias complicações como, por exemplo, verificar o padrão como os vértices se ligam, uma vez que essa ligação pode mudar com o passar do tempo; verificar as aresta, pois, elas podem aparecer ou desaparecer. Dessa forma, as redes complexas podem ser classificadas tendo como base as observações feitas em relação às suas propriedades, destacando-se entre elas a distribuição de graus e o coeficiente de aglomeração.

Assim, faremos uma breve descrição dos três principais modelos de redes que são os mais encontrados em trabalhos sobre Redes Complexas.

1.3.1 Redes Aleatórias

Erdös e Rényi propuseram, em 1959, esse modelo e tinha como objetivo descrever em um único esquema todas as redes complexas (METZ, 2007). Para construir redes nesse modelo é necessário representá-las como sistemas aleatórios. Dois pressupostos simples fundamentam esse modelo, o primeiro considera que o tamanho da rede é fixo e permanece imutável ao longo do tempo. E o segundo consiste na predição que todos os vértices, em uma determinada rede, têm aproximadamente a mesma quantidade de conexões ou igualdade nas chances de receber novas arestas. (BARABÁSI, 2009)

No modelo de redes aleatórias as arestas não direcionadas são acrescentadas aleatoriamente entre um número fixo de N vértices. Assim, cada aresta é representada de maneira independente, tendo como base alguma probabilidade p. O número de arestas que ligam cada vértice na rede, denominado grau do vértice, segue a distribuição de Poisson com um limite máximo N. A equação 3, representa o grau esperado de um vértice, onde p é a probabilidade de um vértice qualquer se conectar a um outro vértice qualquer, N representa o número de vértices da rede e k é o total de arestas que incidem em um determinado vértice. (METZ, 2007)

$$\langle k \rangle = p(N-1) \tag{3}$$

Portanto, as redes aleatórias, figura 5, são obtidas a partir de conexões aleatórias entre os vértices de um conjunto. Ou seja, dado um conjunto de vértices, é atribuída, para cada um de seus elementos, igual probabilidade de que ele se conectem com outro elemento qualquer deste conjunto.

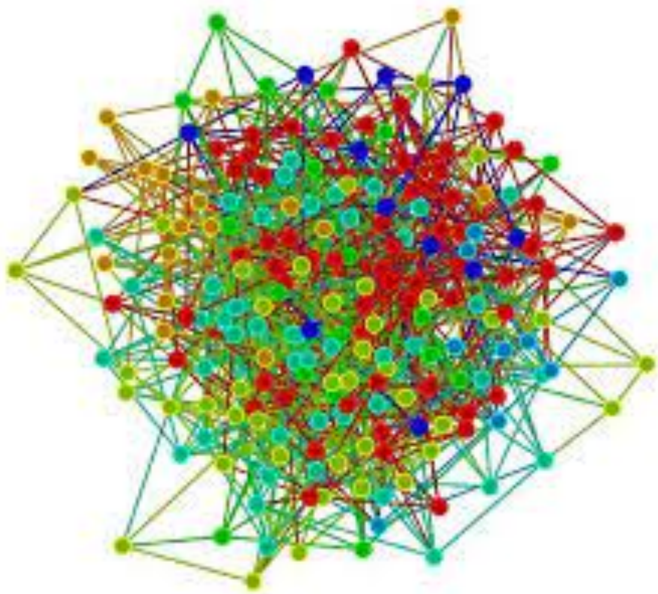


Figura 5 – Exemplo de Rede Aleatória

Fonte: researchgate.net (acesso em 21 de agosto de 2021)

As redes aleatórias abordam valores médios, sendo assim, se consideremos, por exemplo, uma comunidade com 5 bilhões de pessoas, teremos, de acordo com este modelo, que a maioria das pessoas deveria possuir aproximadamente o mesmo número de conhecidos; assim como, a maioria das empresas negociaria com aproximadamente o mesmo número de outras empresas e, também, teríamos que a maioria dos sites da Internet deveria ser acessado aproximadamente pelo mesmo número de visitantes. (SOUSA, 2016) Mas, é possível perceber facilmente que as previsões que possuem como base este modelo diferem do que se observa em relação ao comportamento da maioria das redes reais. Dessa forma, segundo Barabási (2009), mesmo não sendo adequado para descrever muitos sistemas reais, o modelo de redes aleatórias é de fundamental importância no estudo das redes, porque antes de sua criação, o estudo de redes era quase que exclusivamente voltado para o estudo de grafos regulares.

Cardoso (2007), reforça que mesmo sendo o primeiro modelo amplamente estudado, o modelo de redes aleatórias não possui muitas aplicações relevantes já que poucos sistemas possuem tal grau de aleatoriedade.

1.3.2 Redes Pequeno-mundo

Este modelo foi proposto por Duncan Watss e Steven Strrogatz, no final da década de 1990, para eles muitas redes apresentam padrões altamente conectados, tendendo a formar pequenas quantidades de conexões em cada vértice, ou seja, eles propuseram um modelo semelhante ao de Erdos e Reny, onde grande parte das conexões são estabelecidas entre vértices mais próximos, apresentando-se como um mundo pequeno. (METZ, 2007)

De acordo com Cardoso (2007), esse modelo consiste basicamente em reorientar todas as conexões de uma rede regular com uma probabilidade p. Quando $p = 0$ nada se altera e mantemos a topologia regular, mas quando $p = 1$, todas as conexões são alteradas e a rede torna-se aleatória. Para valores de p contido nesse intervalo a rede assume a topologia mundo pequeno, conforme a ilustração da figura 6: a rede (1) apresenta uma rede regular, que é considerada um caso particular de rede complexa, para rede (2) o fator de aleatoriedade é introduzido obtendo uma rede totalmente aleatória, e por fim uma rede pequeno mundo é apresentada em (3), para um determinado fator de aleatoriedade entre $p = 0$ e $p = 1$.

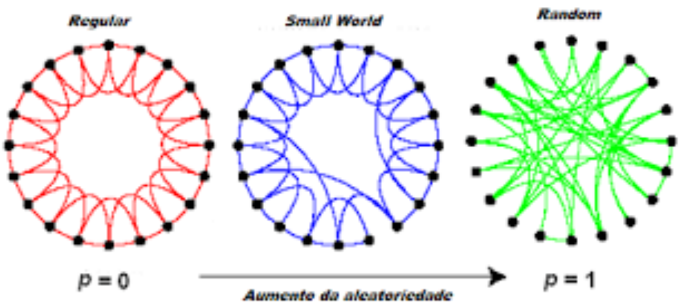


Figura 6 – Ilustração de redes de pequeno mundo segundo os autores Watts e Strogatz para diferentes probabilidades de conexão. 1 - rede regular. 2 - rede aleatória. 3 - rede pequeno-mundo

Fonte: gta.ufrj.br
(acesso em 21 de agosto de 2021)

Embora o modelo de redes de mundo pequeno disponha de características importantes no estudo de redes complexas, as conexões que são adicionadas neste modelo são feitas de forma inteiramente aleatória. Consequentemente, tanto o modelo de redes aleatórias de Erdös e Rényi, quanto o modelo de redes de mundo pequeno de Watts e Strogatz descrevem redes onde todos os vértices têm, aproximadamente, a mesma quantidade de arestas. (SOUSA, 2016).

1.3.3 Redes Livres de Escala

Barabási e Albert demonstraram que algumas redes apresentam uma ordem na dinâmica de estruturação, através de características bem específicas. Eles utilizaram, no final da década de 90, um software para mapear a topologia da rede Web com o intuito de encontrar uma rede aleatória onde as páginas ou vértices tivessem, aproximadamente, o mesmo número de links ou arestas, ou seja, eles queriam que todas as páginas da Web fossem igualmente populares. Mas, o que Barabasi e Albert encontraram foi uma rede com topologia bem diferente do que eles imaginavam, pois a rede que eles encontraram possuía muitos vértices com poucas arestas e poucos vértices com um número muito grande de arestas. Assim, em função dessa característica, a distribuição dos graus destes vértices segue uma lei de potências. (BARABÁSI, 2009)

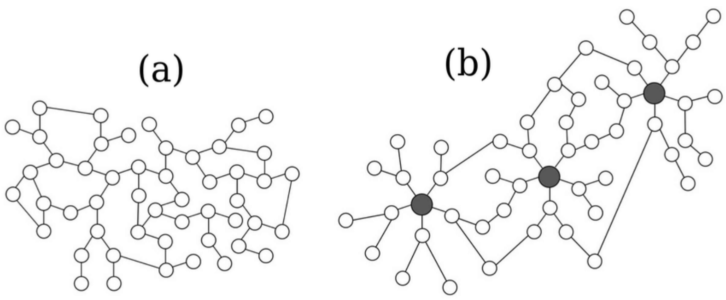


Figura 7 – Rede aleatória (a) e rede de livre escala (b)

Fonte: researchgate.net (acesso em 21 de agosto de 2021)

Barabasi e Albert demonstraram que uma das características principais das redes livres de escala é a tendência de um novo vértice se conectar a um vértice da rede que tem um alto grau de conexões, característica essa denominada de conexão preferencial. Ou seja, eles demonstraram que essa característica resulta em redes com poucos vértices com alto grau de conexão, denominados *hubs* [2], e em muitos vértices com poucas conexões.

Existem vários sistemas, onde é possível observar a formação das redes livres de escala, entre esses sistemas temos, por exemplo, a internet. A internet possui uma importante característica das redes livres de escala que é a resistência a falhas, pois ela possui poucos vértices muito conectados e muitos vértices poucos conectados fazendo com que as chances de um *hub* ser escolhido de maneira aleatória seja muito pequena.

[2] Hub, também conhecido como concentrador, é um equipamento utilizado na área da informática para realizar a conexão de computadores de uma rede e possibilitar a transmissão de informações entre essas máquinas.

Por outro lado, a internet é muito sensível a ataques, uma vez que a retirada de um *hub* pode fazer com que muitos vértices da rede sejam desconectados, ocasionando o aumento do diâmetro da rede aleatória seja muito pequena.

No capítulo a seguir, abordaremos as principais definições e conceitos básicos sobre a Teoria dos Grafos.

CAPÍTULO 2

TEORIA DOS GRAFOS

Como já citado no capítulo 1, dados históricos mostram que a Teoria dos Grafos iniciou-se, provavelmente, com a resolução do famoso problema das sete pontes de Königsberg, apresentada pelo matemático Leonhard Euler, em 1736. Mas, nos anos seguintes, pouco ou quase nada foi realizado e acrescentado à teoria iniciada por Euler. Apenas em meados do século XIX, deu-se continuidade ao estudo desta teoria, através de alguns trabalhos isolados, entre eles o Teorema das Quatro Cores. Assim, a Teoria dos Grafos evoluiu de maneira significativa a partir do desenvolvimento da tecnologia de computadores. (SZWARCITER, 1984)

Além de atingir diversas áreas do conhecimento, a Teoria dos Grafos está relacionada com muitos ramos da Matemática como, por exemplo, Teoria dos Grupos, Teoria de Matrizes, Análise Numérica, Probabilidade, Topologia e Combinatória. (RABUSKE, 1992)

Neste capítulo, introduziremos algumas definições e conceitos básicos sobre grafos, além disso serão citados alguns tipos de grafos e suas aplicações.

Apesar de buscarmos conceitos acerca da Teoria dos Grafos em muitos trabalhos e artigos científicos que estão disponibilizadas na internet ou em vários livros que tratam desse tópico, nosso embasamento teórico focaliza-se , principalmente, em três livros tais quais: Matemática Discretas e Suas Aplicações, de Rosen (2009) e Matemática Discreta, de Cardoso Domingos M.; Szymanski (2009), Estrutura de Dados, de Dovicchi (2007) e também no trabalho de conclusão, de Malta (2008).

2.1 Conceitos Básicos

No decorrer deste trabalho, consideramos os grafos finitos e usaremos a terminologia e a notação associada aos grafos não orientados e orientados.

Informalmente, um grafo pode ser definido como sendo um conjunto de pontos (os nós ou os vértices), ligados por segmentos de retas (as arestas ou os arcos). Mas, formalmente, um grafo pode ser definido por:

Definição 1. *Um grafo (não orientado) $G = (V, E)$ consiste de V, um conjunto não vazio de vértices (ou nós) e E, um conjunto de arestas. Cada aresta tem um ou dois vértices associados a ela, chamados de suas extremidades. Dizemos que cada aresta liga ou conecta suas extremidades.*

Um grafo também pode ser representado por outras notações, tais como, $G = (V(G), E(G))$, ou simplesmente G.

Definição 2. *Um grafo orientado (ou dígrafo) (V, E) consiste em, um conjunto não vazio de vértices V e um conjunto de arestas orientadas (ou arcos) E. Cada aresta orientada que associada a um par ordenado de vértices (u, v) representamos por uma flecha para indicar o sentido que começa em u e termina em v.*

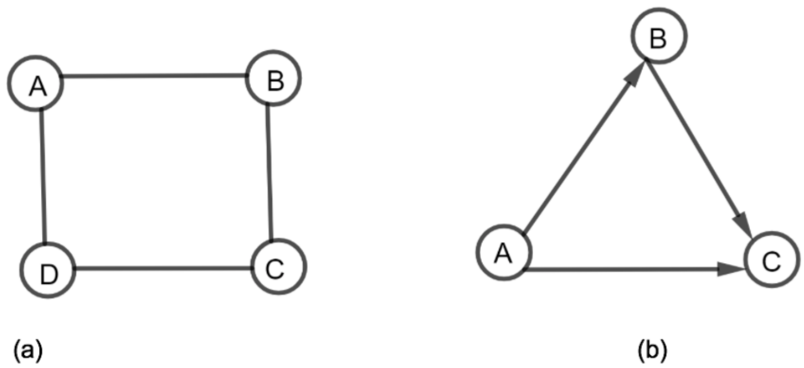


Figura 8 – (a) Exemplo de grafo não orientado e (b) exemplo de grafo orientado.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos conceitos preliminares, a seguir, usaremos somente para grafos orientados, porém, ressaltamos que todos conceitos que definimos posteriormente aplicam-se, também, a grafos orientados.

2.1.1 Laços e arestas paralelas

Definição 3. *Em um grafo, se uma aresta relaciona-se a um mesmo vértice, isto é, se a aresta do grafo é do tipo $e = \{u, u\}$, ela é chamada de laço, conforme ilustração da figura 9(a).*

Definição 4. *Em um grafo, se duas arestas estiverem ligadas entre dois vértices elas serão denominadas de paralelas ou múltiplas, conforme ilustração da figura 9(b). Dessa forma, se um grafo possui arestas paralelas ele é denominado de multigrafo e quando ele possui laços e arestas chama-se pseudografo.*

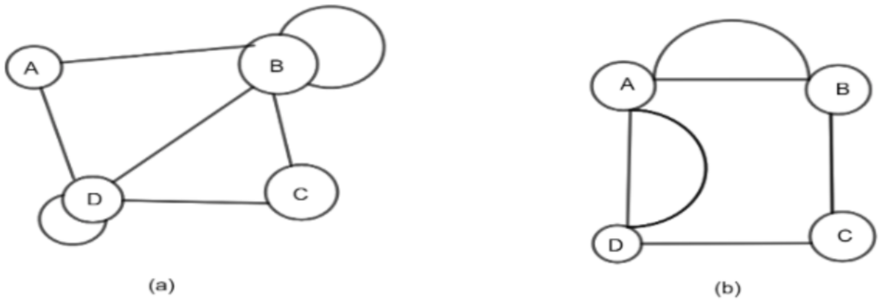


Figura 9 – (a) Exemplo de grafo com laço e (b) exemplo de grafo com arestas paralelas.

Fonte: Elaborado pelo autor

Um exemplo de multigrafo é o grafo que representa o problema das pontes de Königsberg, conforme ilustração da figura 10, neste grafo os vértices A e B tem duas arestas que se conectam, bem como os vértices A e C.

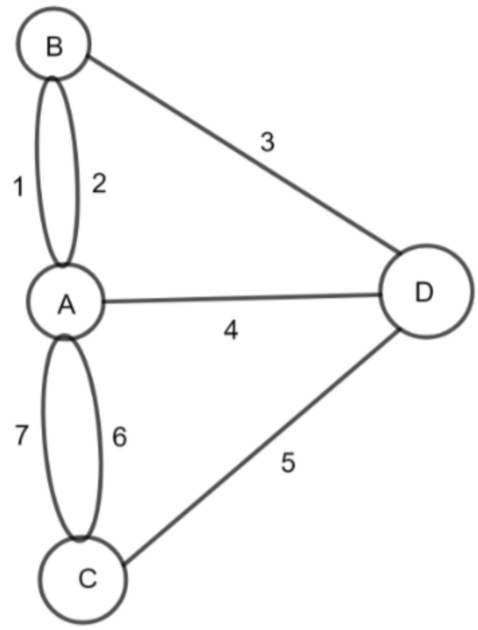


Figura 10 – Grafo que representa o problema das ponte de Konigsberg.

Fonte: Elaborado pelo autor

2.1.2 Ordem e tamanho de um grafo

Definição 5. *A quantidade de vértices que um grafo possui denomina-se ordem do grafo, ou seja, a quantidade de elementos do conjunto V representa a ordem do grafo.*

Definição 6. *A quantidade de arestas que um grafo possui denomina-se tamanho do grafo, ou seja, a quantidade de elementos do conjunto E representa o tamanho do grafo.*

Além destes conceitos, denominam-se grafo nulo, figura 11(a), o grafo que possui ordem e tamanho iguais a zero, e grafo vazio, o grafo que possui vértices, mas não possui arestas, a ilustração da figura 11(b) é um exemplo desse grafo.

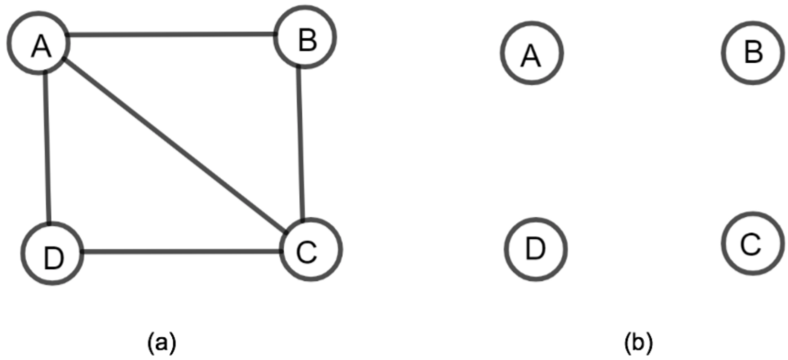


Figura 11 – (a) grafo nulo e (b) grafo vazio.

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.3 Arestas e vértices adjacentes

Definição 7. *Em um grafo G, duas arestas que incidem são chamadas adjacentes (ou vizinhos), conforme ilustração da figura 12.*

Definição 8. *Em um grafo G, dois vértices são ditos adjacentes (ou vizinhos) se são extremidades de uma aresta, conforme ilustração da figura 12.*

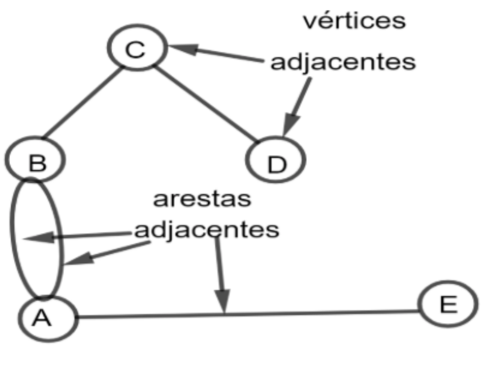


Figura 12 – Grafo com arestas e vértices adjacentes

Fonte: Elaborado pelo autor

2.1.4 Grau de um vértice e grau de um grafo

Definição 9. *Em um grafo G não orientado o grau de um vértice é o número de arestas incidentes a ele, exceto que o laço em um vértice contribui duas vezes ao grau daquele vértice. O grau do vértice v é indicado por gr(v).*

Definição 10. *Dizemos que o grau de um grafo G não orientado é a soma dos graus de seus vértices seus vértices.*

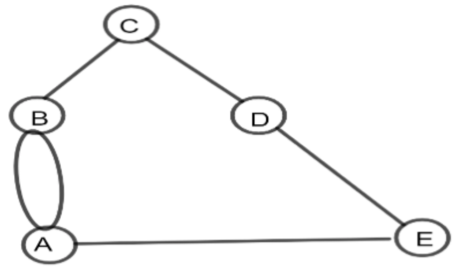


Figura 13 – (a) exemplo de grafo de grau 12

Fonte: Elaborado pelo autor

O grau do grafo da figura 13 é 12 , isto é, $gr(G) = 12$, e os graus dos vértices A, B, C, D e E são $3, 3, 2, 2$ e 2, ou seja, $gr(A) = 3$, $gr(B) = 3$, $gr(C) = 2$, $gr(D)$ e $gr(E) = 2$.

Muitos teoremas baseiam-se na quantidade de arestas que incidem em cada vértice de um grafo. Assim, através da definição 9 e 10 podemos enunciar os teoremas que seguem.

Teorema 1. *Seja G(V, E) um grafo não orientado com e arestas. Então,*

$$2e = \sum_{v \in V} gr(v)$$

Demonstração. De fato, considerando que o grafo é simples, cada aresta incide em dois vértices diferentes, isto é, na contagem do grau de cada vértice, uma aresta será contada em duas ocasiões. Dessa forma, ao somar os graus dos vértices, teremos que cada aresta será contada duas vezes. ■

Teorema 2. *Um grafo não orientado tem um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Sejam V_1 e V_2 o conjunto de vértices de grau par e o conjunto de vértices de grau ímpar, respectivamente, em um grafo não orientado $G = (V, E)$. Então,

$$2e = \sum_{v \in V} gr(v) = \sum_{v \in V_1} gr(v) + \sum_{v \in V_2} gr(v)$$

Como $gr(v)$ é par para $v \in V_1$, o primeiro termo do lado direito da última igualdade é par. Além disso, a soma dos dois termos do lado direito da última igualdade é par, porque sua soma é $2e$. Logo, o segundo termo na soma também é par. Como todos os termos desta soma são ímpares, deve existir um número par tais termos. Logo, existe um número par de vértices de grau ímpar. ■

2.1.5 Passeio, trilha caminho

Definição 11. *Um passeio P num grafo G é toda a sequência não vazia*

$$P = v_1 a_1 \cdot v_1 a_2 \cdots v_{i-1} a_{i-1}.v_i a_i$$

tal que, $v_1, v_2, \cdots v_i \in V(G)$, $a_1, a_2, \cdots, a_i \in E(G)$ *e os vértices* v_{i-1} *e* v_i *são vértices extremos da aresta* a_i*, para* $i = 1, \cdots, k$*. O vértice* v_1 *designa-se por vértice inicial do passeio P, o vértice* v_k *designa-se por vértice final do passeio e os vértices* $v_1, \cdots, v_{i-1}$ *designam-se por vértices intermédios de P. Podemos também dizer que P é um passeio entre os vértices* v_1 *e* v_i*.*

Assim,

• Se num passeio todas as arestas são distintas, então o passeio denomina-se por trajeto (trilha). E, se além disso, todos os vértices são distintos, o passeio denomina-se caminho.

• O comprimento de um passeio, ou trajeto, ou caminho é igual ao número de arestas que o constitui (com eventual repetição).

• A distância entre dois vértices em um grafo é o comprimento de menor caminho entre esses vértices.

2.1.6 Circuitos e ciclos

Definição 12. *Um passeio* $P = v_1 a_1 \cdot v_1 a_2 \cdots v_{i-1} a_{i-1}.v_i a_i$*, é dito fechado se* $v_1 = v_i$*, ou seja, ele começa e termina no mesmo vértice.*

Assim,

•Um circuito em grafo G é um passeio fechado.

• Um ciclo em grafo G é um circuito em que não há repetição de arestas ou vértices.(a menos do último vértice).

•Um grafo sem circuitos é chamado grafo acíclico

Teorema 3. *Se um grafo G tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então existe um caminho unindo estes dois vértices.*

Demonstração. Seja G um grafo com todos os vértices de grau par, exceto v_1 e v_2, que são de grau ímpar. O teorema 2. garante que nenhum grafo pode ter um número ímpar de vértices de grau ímpar. Portanto, no grafo G, os vértices v_1 e v_2 estão na mesma componente conexa e consequentemente existe um caminho entre eles. ∎

2.1.7 Ciclos e caminho euleriano

Definição 13. *Um ciclo euleriano em um grafo G é um ciclo simples que contém todas as arestas de G (Figura 14(a)) .*

Definição 14. *Um caminho euleriano em G é um caminho simples que contém todas as arestas de G (Figura 14(b)).*

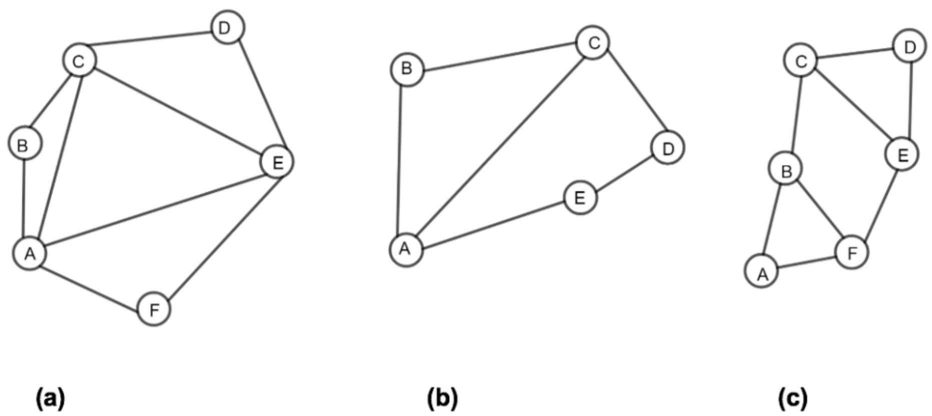


Figura 14 – (a) ciclo euleriano (b) caminho euleriano (c) grafo não euleriano

Fonte: Elaborado pelo autor

Teorema 4. *Um multigrafo conexo com , pelo menos, dois vértices tem um ciclo euleriano se e somente se cada um de seus vértices tiver grau par (Figura 15(a)).*

Teorema 5. *Um multigrafo conexo tem caminho euleriano, mas não ciclo euleriano se e somente se estiver exatamente dois vértices de grau ímpar (Figura 15(b)).*

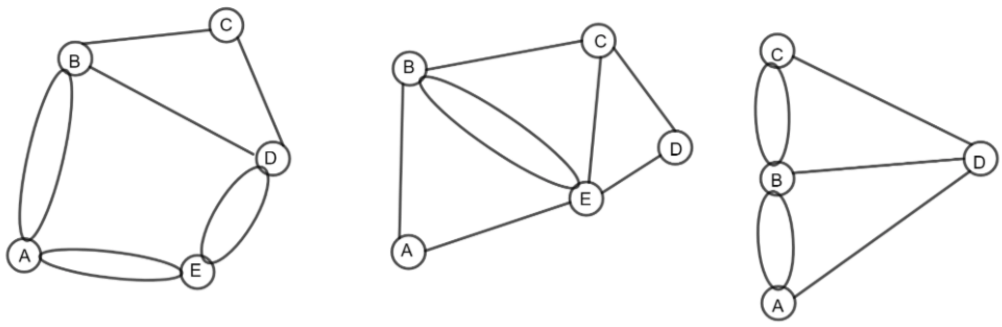


Figura 15 – (a) multigrafo com ciclo euleriano (b) multigrafo com caminho euleriano (c) multigrafo não euleriano

Fonte: Elaborado pelo autor

2.1.8 Ciclos e caminho Hamiltoniano

Definição 15. *Um caminho simples em grafo G que passe por todos os vértices exatamente uma vez é chamado caminho hamiltoniano e um ciclo simples em um grafo G que passe pelos vértices exatamente uma vez é chamado de ciclo hamiltoniano.*

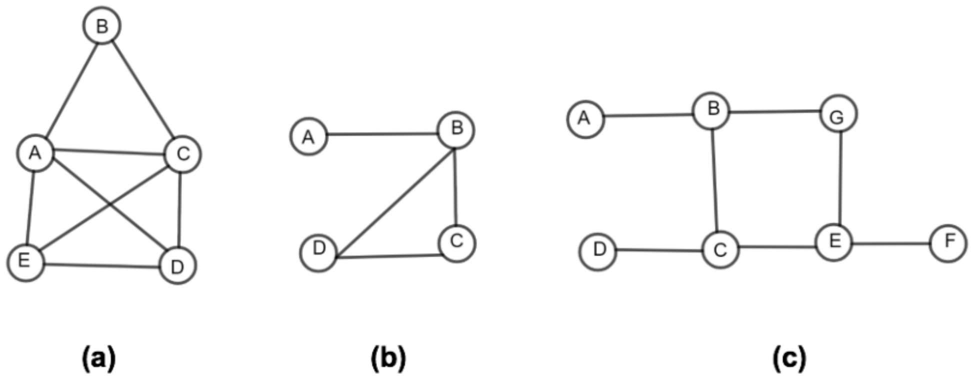


Figura 16 – (a) grafo com ciclo hamiltoniano (b) grafo com caminho hamiltoniano (c) grafo não hamiltoniano

Fonte: Elaborado pelo autor

2.2 Tipos de grafos

2.2.1 Grafo simples

Definição 16. *Se um grafo G não possui laço ou aresta múltipla ele é denominado de grafo simples. E, se um grafo G possui apenas um vértice ele é denominado de trivial.*

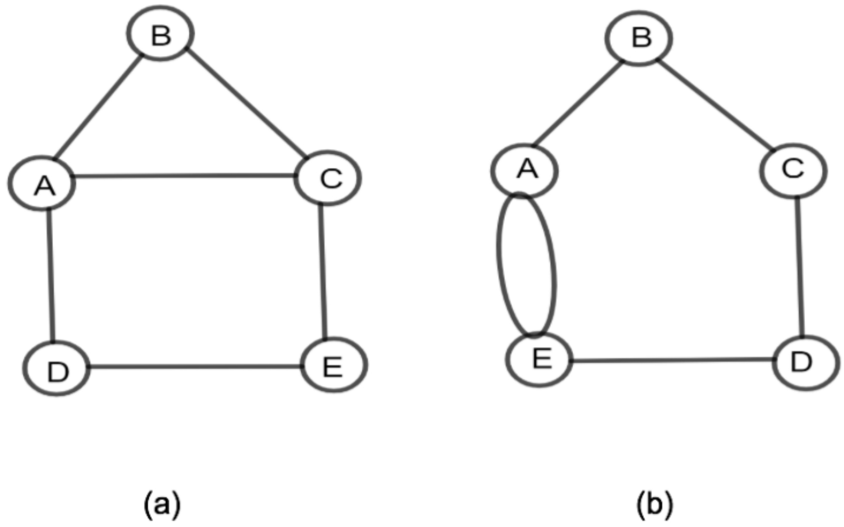


Figura 17 – (a) exemplo de grafo simples e (b) exemplo de grafo não simples.

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.2 Grafo completo

Definição 17. *Se em um grafo G todo vértice estiver conectado a qualquer outro vértice em G ele é denominado de grafo completo.*

Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n. Na figura 18 são apresentados exemplos dos grafos K_3 e K_4.

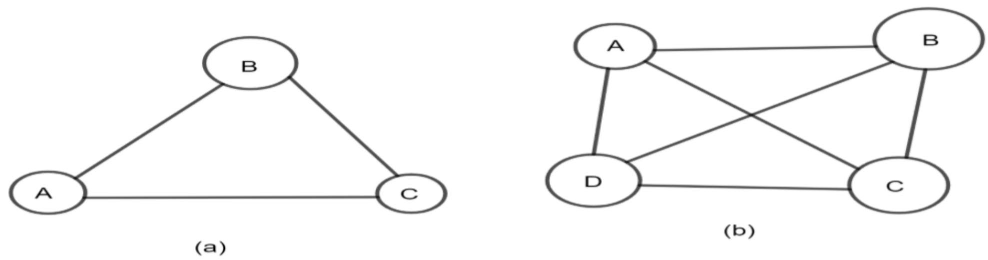


Figura 18 – Grafos completos K_3 e K_4

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.3 Grafo complementar

Definição 18. *Dado um grafo G ,designa-se por um grafo complementar de G e denota-se por G(C) , um grafo simples no qual quaisquer dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em G.*

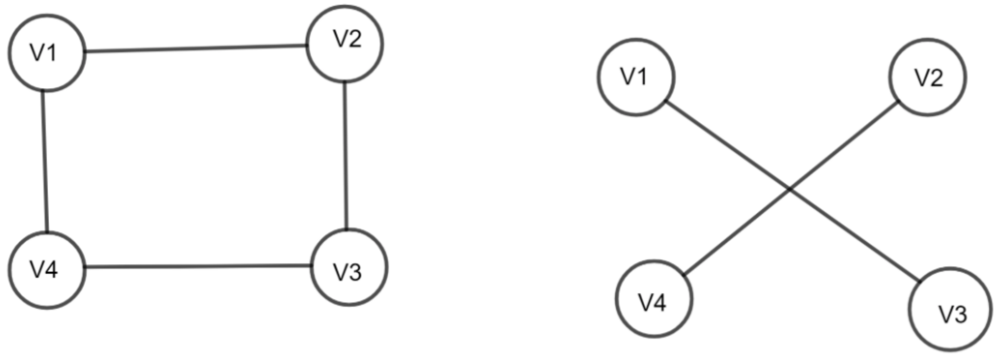


Figura 19 – Grafos complementares

Fonte: Elaborado pelo autor

2.2.4 Grafo regular

Definição 19. *Um grafo em que todos os seus vértices possuem o mesmo grau, denomina-se grafo regular.*

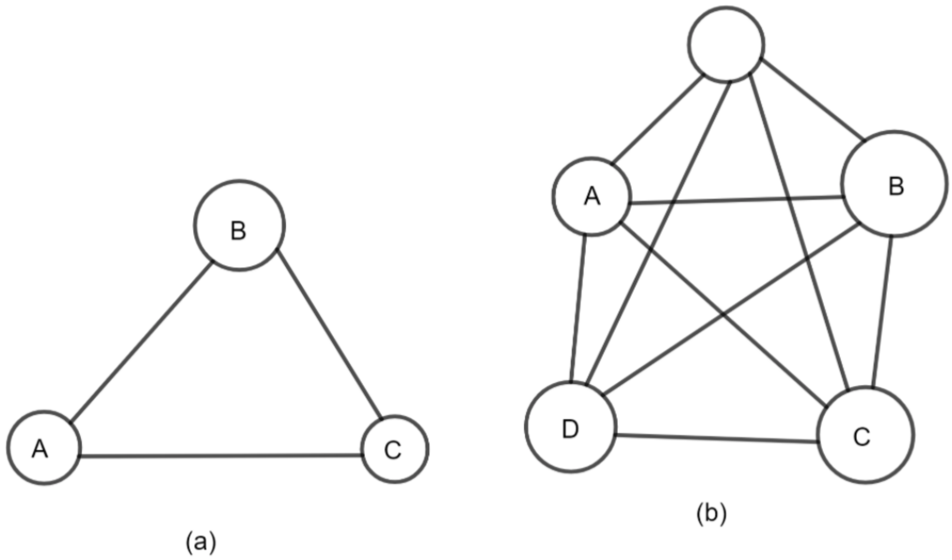


Figura 20 – Exemplos de grafos regulares

Fonte: Elaborado pelo autor

2.2.5 Grafo conexo

Definição 20. *Um grafo diz-se conexo se entre cada par de vértices existe um caminho que os une. Caso contrário, o grafo diz-se desconexo.*

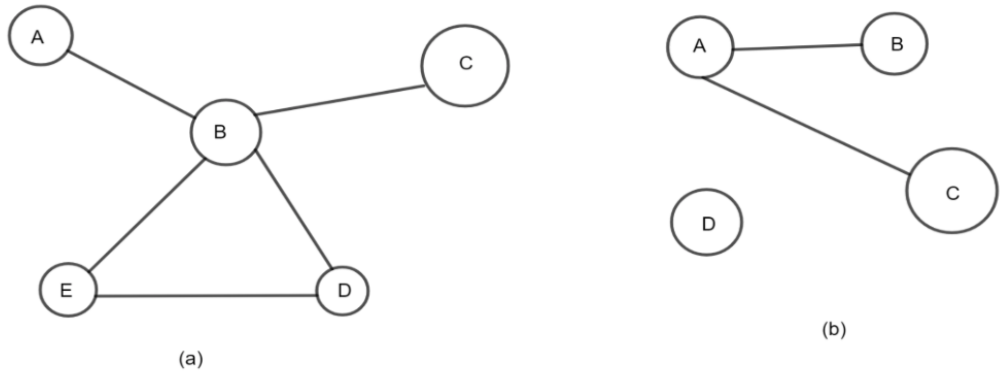


Figura 21 – (a) grafo conexo e (b) grafo desconexo

Fonte: Elaborado pelo autor

Teorema 6. *Um grafo é desconexo se e somente se o seu conjunto de vértices V pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos não vazios V_1 e V_2, tal que não existe aresta em G cujo vértice extremo está no subconjunto V_1 e outro no subconjunto V_2.*

Demonstração. Suponha que a partição de V existe. Consideremos dois vértices arbitrários a e b de G, tal que $a \in V_1$ e $b \in V_2$. Nenhum caminho pode existir entre os vértices a e b; de outra maneira, haveria pelo menos uma aresta com um vértice extremo em V_1 e outro em V_2. Consequentemente, se a partição existe, G não é convexo.

De maneira inversa, seja G um grafo desconexo. Considere um vértice a em G. Seja V_1 o conjunto de todos os vértices que estão ligados por caminhos até a. Uma vez que G é desconexo, V_1 não inclui todos os vértices de G. Os restantes vértices formaram o conjunto não vazio V_2. Nenhum vértice em V_1 é adjacente a algum em V_2.

■

2.2.6 Grafo bipartido

Definição 21. *Um grafo simples G é dito bipartido se seu conjunto V de vértices pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que cada aresta do grafo conecta um vértice em V_1 e um vértice em V_2 (de modo que nenhuma aresta em G conecta dois vértices , seja em V_1, seja em V_2). Quando essa condição é válida , chamamos o par (V_1, V_2) de bipartição do conjunto de vértices V de G.*

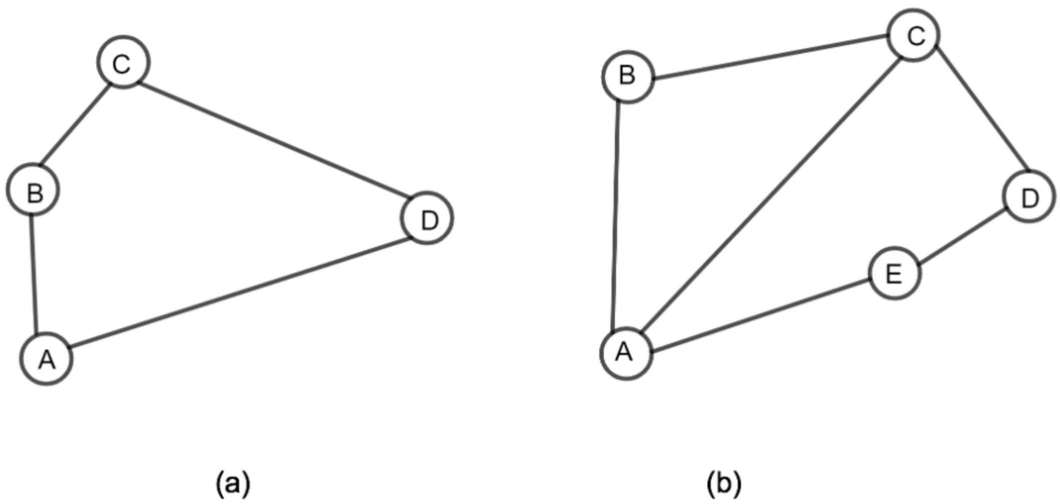


Figura 22 – (a) é grafo bipartido e (b) não é grafo bipartido

Fonte: Elaborado pelo autor

Teorema 7. *Um grafo simples é bipartido se e somente se for possível associar uma de duas cores diferentes a cada vértice do grafo de modo que nenhum par de vértices adjacentes tenha a mesma cor associada .*

Demonstração. Primeiro, suponha que $G = (V,E)$ grafo simples bipartido. Então $V_1 = V_2 \cup V_2$ em que V_1 e V_2 são conjuntos disjuntos e toda aresta E conecta um vértice V_1 e um vértice em V_2. Se associarmos uma cor cada vértice em V_1 e uma segunda cor a cada vértice em V_2, então nenhum par de vértices adjacentes tem a mesma cor associada a eles.

Suponha agora que seja possível associar cores aos vértices de um grafo usando apenas duas cores, de modo que nenhum par de vértices adjacentes tenha a mesma cor associada a eles. Seja V_1 o conjunto de vértices associado a uma cor e V_2 o conjunto de vértices associado à outra cor. Então, V_1 e V_2 são disjuntos e $V = V_1 \cup V_2$. Além disso, toda aresta conecta um vértice em V_1 a um vértice em V_2, pois nenhum par de vértices adjacentes está ou em V_1 ou em V_2. Consequentemente, G é bipartido .

■

2.2.7 Grafo floresta

Definição 22. *Um grafo simples G diz-se uma floresta se G não contém circuitos. Denomina-se por árvore uma floresta conexa, ou seja, uma árvore é uma componente conexa de uma floresta.*

A figura 23 a seguir, representa um exemplo de grafo floresta.

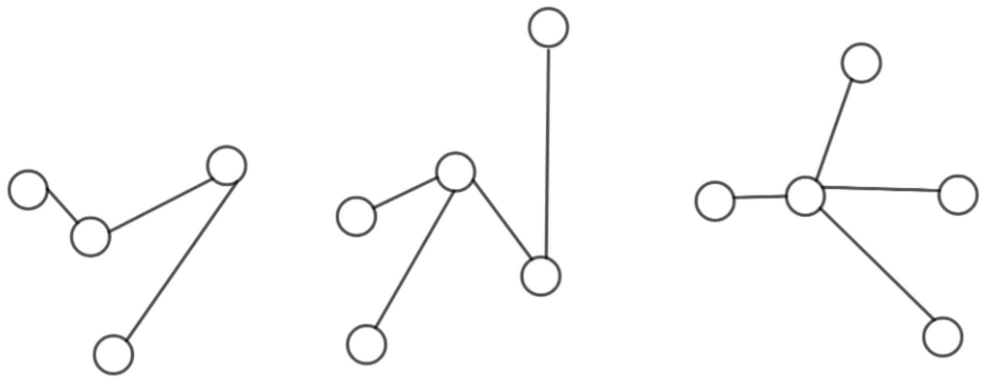


Figura 23 – Floresta formada por três arvores

Fonte: Elaborado pelo autor

2.2.8 Grafo árvore abrangente

Definição 23. *Designamos por árvore abrangente (ou de suporte) de um grafo conexo G a todo subgrafo abrangente de G que é uma árvore e contém todos os vértices do grafo.*

A figura 24 representa um exemplo de árvore abrangente.

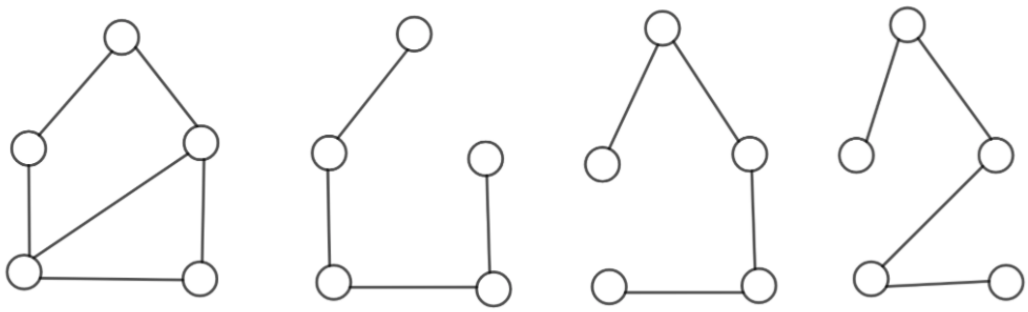


Figura 24 – Grafo G e três árvores abrangentes de G.

Fonte: Elaborado pelo autor

2.2.9 Grafos isomorfos

Definição 24. *Dois grafos simples são isomorfos quando existe uma correspondência biunívoca preservando a relação de adjacência entre seus vértices, isto é, suas estruturas são equivalentes.*

A figura 25 exibe um exemplo de dois grafos isomorfos porém postos de maneiras diferentes visualmente.

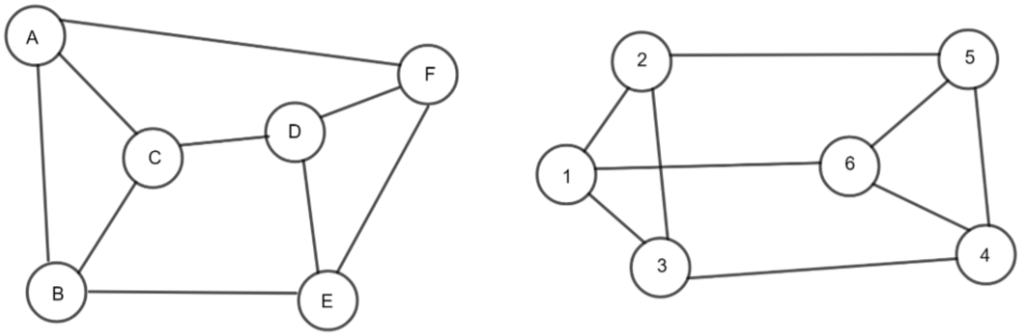


Figura 25 – Exemplo de grafos isomorfos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

CAPÍTULO 3

MATRIZES

A proposta deste capítulo é apresentar alguns resultados elementares relacionados aos conceitos de matrizes e também a representacao matricial de um grafo. Muitos dos resultados que aqui serão apresentados teve como base de estudo e pesquisa, as seguintes referências Dante (2004), Iezzi (2010) e Paiva (2010).

3.1 Um breve histórico de Matrizes

Segundo Iezzi (2010) as matrizes surgiram em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858, no entanto, vale ressaltar que bem antes, no século III a.c, os chineses já desenvolvia um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a idéias das matrizes.

Ainda segundo o autor, Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica, sem pensar em aplicações práticas que apareceriam posteriormente.

3.2 Matrizes

Os livros didáticos, em sua grande parte , começam o estudo da teoria das matrizes apresentando problemas relacionados a um determinado fato ou acontecimento do dia a dia através de tabelas, dispostas de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais). Para Paiva (2010), "as tabelas são uma forma de organizar várias informações em pequenos espaços proporcionando uma consulta rápida, dada 'a simplicidade de sua representação em linhas e colunas."

No livro de Matemática do 2º Ano do Ensino Médio, Iezzi (2010) introduz o estudo das matrizes com uma tabela que apresenta a distribuição das pessoas ocupadas, por regiões metropolitanas segundo a posição na ocupação. Como mostra a imagem da figura 26 , a seguir:

.Alegre	Total	Recife	Salvador	BH	RJ	SP	P
Empregados com carteira assinada no setor privado							
2003	39,7	31	36	39,7	37	42,9	42
2004	39,3	31,8	35,2	39,8	36,7	41,8	42,5
2005	403	33,9	35,1	41,5	36,9	43	44
2006	41,4	33,7	35,6	42,1	38,4	44,6	43,9
2007	42,4	36,6	36,7	43	39,6	45,4	44,5
Empregados sem carteira assinada no setor privado							
2003	15,5	17,1	14,1	13,5	14,1	17,5	12,7
2004	15,9	16,1	13,4	14,1	14	18,4	13
2005	15,6	15,2	14,1	12,9	13,9	18,2	13,3
2006	14,8	15,5	14,2	12,6	12,8	16,8	13
2007	14,8	13,9	14,3	13,4	11,7	15,8	12,9

Figura 26 – Distribuição das pessoas ocupadas por regiões metropolitanas

Fonte: Paiva (2010).

Em matemática, as tabelas como essa são chamadas de matrizes, sobre as quais definimos a relação de igualdade e algumas operações.

3.3 Definição de Matrizes

Definição 25. *Sejam m e n números naturais não nulos . Uma matriz do tipo $m \times n$ (ou simplesmente $m \times n$) é uma tabela de números dispostos em m linhas (fileiras horizontais) e n colunas (fileiras verticais).*

A tabela abaixo refere-se a quantidade dos alunos de uma escola nas três séries do ensino médio por turnos de estudos: matutino, vespertino e noturno.

Tabela 1 – Quantidade de alunos de uma escola nas três séries do ensino médio por turnos de estudos: matutino, vespertino e noturno.

Série	Matutino	Vespertino	Noturno
1º Ano	230	220	140
2º Ano	190	175	108
3º Ano	132	104	86

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos 3 linhas e 3 colunas, denomina-se matriz 3×3 (lê-se: matriz três por três) e podemos representá-la por:

$$A = \begin{pmatrix} 230 & 220 & 140 \\ 190 & 175 & 108 \\ 132 & 104 & 86 \end{pmatrix}$$

Usualmente representamos uma matriz colocando os seus elementos (números) entre parênteses ou entre colchetes, e além dessas duas formas, mas com menor frequência, podemos representar uma matriz colocando duas barras verticais à sua esquerda e à sua direita. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1 :

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ \frac{1}{4} & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2

c) $C = \begin{Vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$ é uma matriz 2×2

d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 12 \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{4}{3} & -8 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3

3.4 Representação genérica de uma matriz

Representamos uma matriz de m linhas e n colunas por:

Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice i refere-se á linha em que se encontra tal elemento, e o índice j refere-se á coluna em que se encontra o elemento.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podemos também representar essa matriz A do tipo $m \times n$ por $A = (a_{ij})m \times n$, em que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, com a_{ij} um elemento qualquer de A.

Exemplo 2 :

Vamos construir a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$

Solução:

Temos, por definição que:

$a_{11} = 2.1 + 1 = 3$

$a_{12} = 2.1 + 2 = 4$

$a_{21} = 2.2 + 1 = 5$

$a_{22} = 2.2 + 2 = 6$

Logo, a matriz procurada é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

3.5 Tipos especiais de Matrizes

Algumas matrizes apresentam tipos especiais de estruturas e propriedades que são fundamentais. É importante salientar que essas matrizes aparecem com frequência no estudo de grafos e, portanto, uma breve apresentação se faz necessária o estudo desses tipos de Matrizes

Nos casos a seguir considere a matriz $A_{n\times m}$ com m linhas e n colunas.

Matriz Linha: é uma matriz formada por uma única linha.

Exemplo 3:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×3.

b) $B = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 78 & 19 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×4.

Matriz Coluna: é uma matriz formada por uma única coluna.

Exemplo 4:

a) $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 2×1.

b) $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1.

Matriz Nula: é uma matriz cujos os elementos são todos iguais a zero.

Pode-se indicar a matriz nula $m \times n$ por 0_{mxn}

Exemplo 5:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula 2×2.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula 3×3.

Matriz Quadrada: é aquela em que $m = n$, ou seja, o número de linhas e colunas coincide. Uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ também é chamada de matriz de ordem n

Exemplo 6:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{10} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2×2. Dizemos que A é quadrada de ordem 2.

b) $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 10 \\ -5 & 31 & 2 \\ \frac{7}{3} & -7 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3×3. Dizemos que B é quadrada de ordem 3.

Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a diagonal principal da matriz, e os elementos $a_i j$ tais que $i + j = n + 1$ é diagonal secundária.

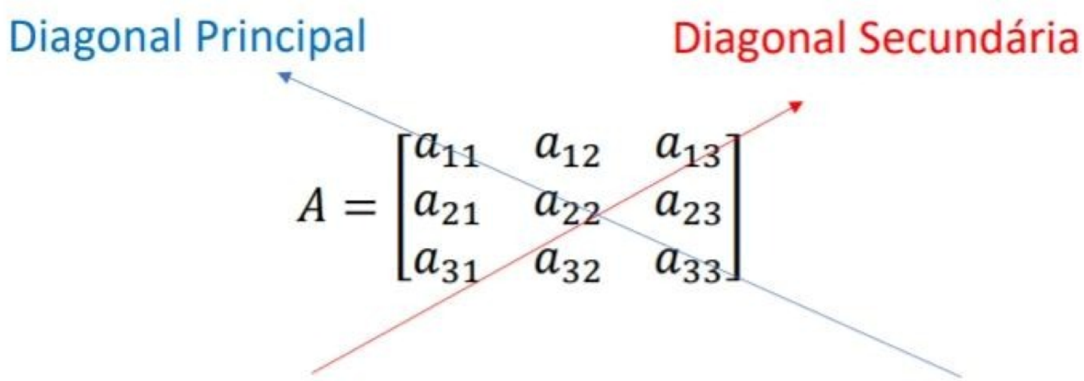


Figura 27 – Diagonais de uma matriz

Fonte: Elaborada pelo autor

Matriz Diagonal: é a matriz quadrada que contém elementos apenas na diagonal principal.

Exemplo 7:

a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal 2×2.

b) $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal 3×3.

Matriz Identidade:é um tipo especial de matriz diagonal, cujos os elementos da diagonal principal são iguais ao número 1. Usualmente representamos a matriz identidade de ordem n por In.

Exemplo 8:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 2.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 3.

Matriz Triangular Superior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplo 9:

a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior de ordem 2.

b) $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 31 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior de ordem 3.

Matriz Triangular inferior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Exemplo 10:

a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior de ordem 2.

b) $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 31 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior de ordem 3.

3.6 Matriz Transposta

Definição 26. *De uma matriz $A = a_{ij}(mxn)$, podemos obter uma matriz $A^t = b_{ij}(nxm)$, onde as linhas de A serão as colunas de A^t, ou seja, $b_{ij} = a_{ji}$. Dizemos que A^t é a transposta de A.*

Exemplo 11:

a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 31 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^t = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 0 & 31 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.7 Igualdade de matrizes

Definição 27. *Duas matrizes* $A_{(m\times n)}$ = $[a_i j]$ *e* $B_{(r\times s)}$ = $[b_{ij}]$ *são iguais,* $A = B$*, se estas têm o mesmo número de linhas* $(m = r)$ *e colunas* $(n = s)$ *e todos os seus elementos correspondentes são iguais* $(a_{ij} = b_{ij})$*.*

Exemplo 12: As matrizes abaixo são iguais, porém com representações distintas.

$$\begin{bmatrix} 5^{-2} & 0 & \cos 45^o \\ \frac{1}{4} & e^{i\pi} & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2^{-2} & -1 & 48 \end{bmatrix}$$

3.8 Operações com Matrizes

A seguir apresentaremos as principais operações envolvendo matrizes.

3.8.1 Adição de matrizes

A adição entre duas matrizes de mesma ordem, $A_{n\times m} = [a_{ij}]$ e $B_{n\times m} = [b_{ij}]$ é uma matriz $n\times m$, que denotaremos por $A+B$, cujos os elementos são somas dos elementos de A e B. Ou seja,

$$A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times m}$$

Em outras palavras, a matriz soma é do mesmo tipo que A e B e, é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de A e B.

Exemplo 13:

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 20 \\ -5 & 1 & 10 \\ 14 & 8 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 7 & 3 & -3 \\ 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 & 25 \\ 2 & 4 & 7 \\ 23 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

Propriedade 1. *Dadas A, B e C matrizes do mesmo tipo* $(m\times n)$ *e* $0_{m\times n}$ *a matriz nula, do tipo* $m\times n$ *valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:*

1. $A+B = B+C$ *(Comutatividade)*

2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ *(Associatividade)*

3. $A+0 = A$*,* 0 *representa a matriz nula* $m\times n$ *(Existência do elemento neutro)*

4. $A+(-A) = 0$ *(Existência do oposto ou simétrico)*

Demonstração. A demonstração dessas propriedades é simples, uma vez que elas estão diretamente relacionadas às propriedades da adição de números reais.

Provando 1: $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=(b_{ij})+(a_{ij})=B+A$

Provando 2: $A+(B+C)=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))=((a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}))=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=(A+B)+C$

Provando 3: $A+0=a_{ij}+0=a_{ij}=A$

Provando 4: $A+(-A)=(a_{ij})+(-a_{ij})=(a_{ij}-(a_{ij})=0$ ■

3.8.2 Matriz oposta

Definição 28. *Dada a matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$, chama-se oposta de A a matriz representada por $-A$, tal que $A+(-A)=0_{m\times n}$, sendo $0_{m\times n}$ a matriz nula do tipo $m\times n$.*

Observe que no exemplo 14 abaixo, a matriz $-A$ é obtida de A trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

Exemplo 14:

a) $A=\begin{bmatrix}5 & -8 & 9\\ 7 & 2 & -4\end{bmatrix}$ e $-A=\begin{bmatrix}-5 & 8 & -9\\ -7 & -2 & 4\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}9 & 7\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ e $-B=\begin{bmatrix}-9 & -7\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

3.8.3 Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes do mesmo tipo $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times n}$, chama-se diferença entre A e B (representa-se por $A-B$) a matriz soma de A com a oposta de B, isto é: $A-B=A+(-B)$.

Exemplo 15:

a) $\begin{bmatrix}5 & -8 & 9\\ 7 & 2 & -7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -1 & 6\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -7 & 3\\ 11 & 0 & -5\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}6 & 7 & 20\\ -5 & 1 & 10\\ 14 & 8 & 11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 10 & 5\\ 7 & 3 & -3\\ 9 & 7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 15\\ -12 & -2 & 13\\ 5 & 1 & 12\end{bmatrix}$

3.8.4 Multiplicação por escalar

Definição 29. *Seja $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ e um número real (ou complexo), então o produto pela matriz A (indica-se αA) é a matriz $B = (b_{ij})_{mxn}$, em que $b_i = \alpha a_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 16:

a) $3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -21 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -12 & 9 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & \frac{9}{2} \\ \frac{7}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Propriedade 2. *Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $(n\times m)$ e $\alpha\beta \in R$ (ou C) quaisquer, temos que:*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

3. $0 \cdot A = 0$

A seguir definiremos a operação mais importante envolvendo matrizes: a Multiplicação de Matrizes.

3.8.5 Multiplicação de matrizes

Definição 30. *Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_n xp$, chama-se produto A por B, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$, em que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$, para todo $i \in \{1,2,3,\cdots,m\}$ e todo $k \in \{1,2,3,\cdots,p\}$.*

Procedimentos para obter o elemento c_{ik} da matriz C:

1)Tomamos ordenadamente os n elementos da linha i da matriz $A : a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$. (I)

2)Tomamos ordenadamente os n elementos da coluna k da matriz $B : b_{1k}, b_{2k}, \cdots, b_{nk}$. (II)

3)Multiplicamos o 1 elemento de (I) pelo 1 elemento de (II), o 2 elemento de (I) pelo 2 elemento de (II), e assim sucessivamente .

4) Somamos os produtos obtidos.

Assim: $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$.

Observação 1. *1. A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.*

2. A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B.

Exemplo 17:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 3+8\cdot 1+9\cdot(-2) & 5\cdot 6+8\dot{0}+9\cdot 5 \\ 7\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot(-2) & 7\cdot 6+2\cdot 0+4\cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+8-18 & 30+0+45 \\ 21+2-8 & 42+0+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 75 \\ 15 & 62 \end{bmatrix}$$

Propriedade 3. *I. Associativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ II. Distributiva à direita em relação à adição: $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$. III. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$*

Observação 2. *1. A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, em geral $A. \cdot B \neq B \cdot A$.*

2. Não vale a propriedade de anulamento do produto na multiplicação de matrizes.

3.8.6 Matriz inversa

Definição 31. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é dita inversível se existe uma matriz B (quadrada de ordem n), tal que: $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.*

Nesse caso, B é dita inversa de A e indica-se por A^{-1}.

Exemplo 18:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, são matrizes inversas pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

3.9 Representação Matricial das Redes Complexas

Nesta seção será apresentada a representação de um grafo através de uma matriz, pois, esse tipo de representação de grafo é uma forma conveniente e útil para representá-lo no computador.

Muitos dos resultados que aqui serão apresentados teve como base de estudo e pesquisa, as principais referências foram Rossi (2010) e o (Paiva 1995 e 2009)...

3.9.1 Matriz de Adjacência

A matriz Adjacência tem a função de codificar todas as arestas de um grafo relacionando vértices a linhas e colunas da matriz.

Esta matriz denotada por $A(G)$, é quadrada de ordem n, onde os vértices se relacionam,ou seja, se tiver uma ligação entre os vértices coloca o elemento 1, caso contrário coloca o elemento 0. Podemos então definir a matriz A da seguinte forma:

Definição 32. *Seja um grafo $G = (V,A)$, com n vértices. Denominamos de matriz de adjacência de G, representada por $A(G)$, a matriz quadrada de ordem n, tal que: cada elemento $A_{(i,j)}$ representa o par de vértices (i, j). Se o par estiver relacionado, então temos que $A_{(i,j)} = 1$, caso contrário $A_{(i,j)} = 0$, isto é,*

$$A_{(i,j)} = \begin{cases} 1, se(i,j) \in V \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Para grafo não direcionado, temos sempre uma matriz de adjacência simétrica, usaremos como exemplo o famoso problema das setes pontes de konigsberg para ilustrar.

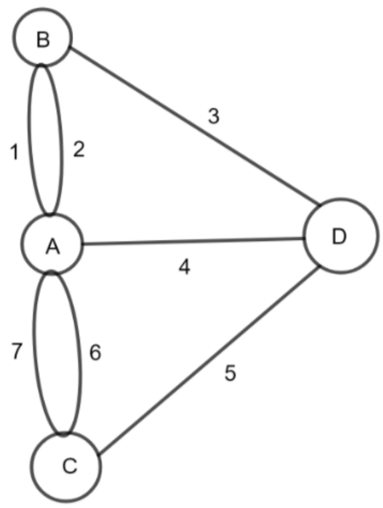


Figura 28 – Multigrafo de ordem 4 (G).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Representação do grafo da figura 28 em forma de tabela (A)

	A	B	C	D
A	0	2	2	1
B	2	0	0	1
C	2	0	0	1
D	1	1	1	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $A(G)$ é uma matriz de adjacência de ordem 4, obtida através das informações do multigrafo de ordem 4 da figura 28.

Algumas observações podem ser verificadas sobre a matriz de adjacência $A(G)$ de um grafo G :

Observação 3. *1. A matriz $A(G)$ é simétrica em relação à diagonal principal.*

2. Os elementos da diagonal principal de $A(G)$ são iguais a zero se e somente se o grafo não tiver laços.

3. Se o grafo não tiver laços e nem arestas múltiplas, o grau de um vértice é igual a $1's$ nas correspondentes linhas e colunas de $A(G)$.

Exemplo 2:

Desenhe um grafo com a matriz adjacência abaixo com relação à ordenação dos vértices a,b,c,d.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Um grafo dessa matriz adjacência é mostrada na figura abaixo:

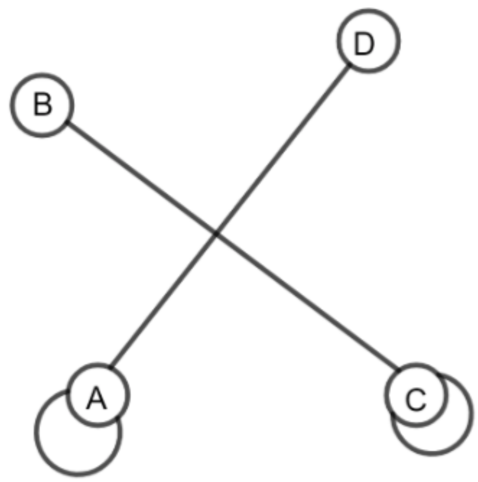


Figura 29 – Grafo com laços

Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos utilizar também a matriz de adjacência para representar um grafo orientado (dígrafo), nesse caso, a matriz não é simétrica.

Exemplo 3: Dado o grafo orientado G abaixo, represente na forma de uma matriz adjacência.

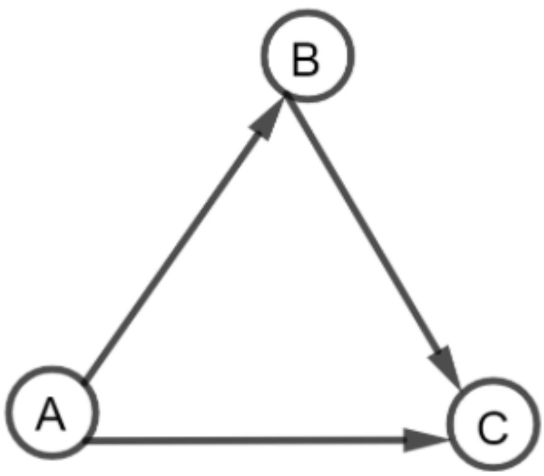


Figura 30 – Grafo orientado G (dígrafo)

Fonte: Elaborado pelo autor

Resolução:

Tabela 3 – Representação do grafo G da figura 30.

	A	B	C
A	0	1	1
B	0	0	1
C	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $A(G)$ é a matriz adjacência 3×3 do grafo da figura 30.

Teorema 8. *Seja G um grafo simples e $A(G)$ a sua matriz adjacência. O número de passeios de comprimento k entre os vértices v_i e v_j de $G, P_{ij}(k)$, é igual á entrada $a_{ij}(k)$ da matriz $AK(G)$.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por indução sobre k.

Para $k = 1$ o resultado é verdadeiro, na medida em que só existe um único passeio de comprimento 1 entre os vértices v_i e v_j se existir uma aresta que ligue e nesse caso, por definição de matriz adjacência $a_{ij} = 1 = p_{ij}(1)$.

Admitamos, por hipótese de indução, que para $k \geq 2$ (só maior) o número de passeios $k-1$ entre os vértices v_i e v_j em G é igual á entrada $a_{ij}(k-1)$ da matriz $A_{K-1}(G)$.

Vejamos para os passeios de comprimento k.

Ora, $A_{K(G)} = A_{K-1(G)} \cdot A(G)$. Assim, qualquer que sejam $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ vem que:

$a_{ij}(k) = \sum_{r=1}^{n} air(k-1)srj = \sum_{r=1}^{n} pir(k-1)prj(1) = p_{ij}(k)$

já que cada passeio de comprimento $k-1$ entre os vértices i e j acrescentamos uma aresta, obtemos passeios de comprimento k.

Logo $a_{ij}(k) = p_{ij}(k)$, para todo $k \geq$1.Assim , concluímos a demonstração.

■

Propriedade 4. *Teste de isomorfismo*

Dizemos que dois grafos arbitrários são isomorfos se é possível ordenar os seus respectivos conjunto de vértices tal que as suas matrizes de adjacências sejam iguais .

Exemplo 4: Os grafos das figuras abaixo são isomorfos porque ordenando os vértices A,B,C,D,E,F e os vértices $V1$, $V2$, $V3$, $V4$, $V5$,$V6$, os grafos têm a mesma matriz de adjacência.

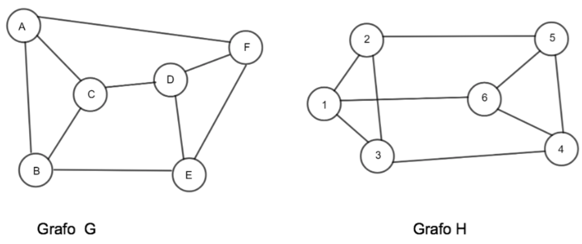


Figura 31 – Grafo isomorfos G e H.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Resolução:

Tabela 4 – Representação do Grafo G

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	1
B	0	1	1	0	1	0
C	1	1	0	1	0	0
D	0	0	1	0	1	1
E	0	1	0	1	0	1
F	1	0	0	1	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 5 – Representação do Grafo H.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	1	0	0	1
v_2	0	1	1	0	1	0
v_3	1	1	0	1	0	0
v_4	0	0	1	0	1	1
v_5	0	1	0	1	0	1
v_6	1	0	0	1	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.9.2 Matriz de incidência

A matriz incidência denotada por A, é uma matriz de ordem $n \times m$, onde se relaciona vértice com arestas, assim invés de relacionar o vértice a outro vértice, por exemplo, vamos analisar o vértice as arestas, se tiver uma ligação entre 0 com aresta coloca o elemento 1, caso contrário coloca o elemento 0. Podemos então definir a matriz A da seguinte forma:

Definição 33. *Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado. Suponha que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sejam os vértices e $e_1, e_2, \cdots, e_m$ sejam as arestas de G. Então a matriz incidência com relação a esta ordem de V e E é a matriz $n \times m$ tal que $M = [m_{ij}]$, em que*

$$m_{(i,j)} = \begin{cases} 1, \text{quando a aresta } e_j \text{ for incidente a } v_i \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 5: Represente o grafo da figura abaixo com uma matriz de incidência.

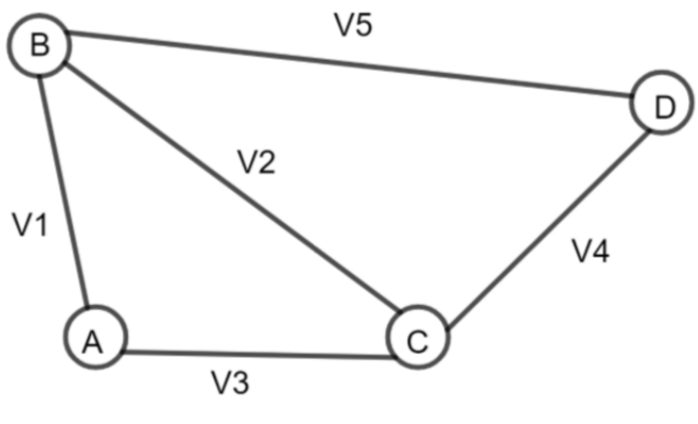


Figura 32 – Grafo Simples

Fonte: Elaborado pelo autor

Resolução:

Tabela 6 – Representação do Grafo Simples da figura 32

	V1	V2	V3	V4	V5
A	1	0	1	0	0
B	1	1	0	0	1
C	0	1	1	1	0
D	0	0	0	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6: Represente o pseudografo da figura abaixo com uma matriz de incidência.

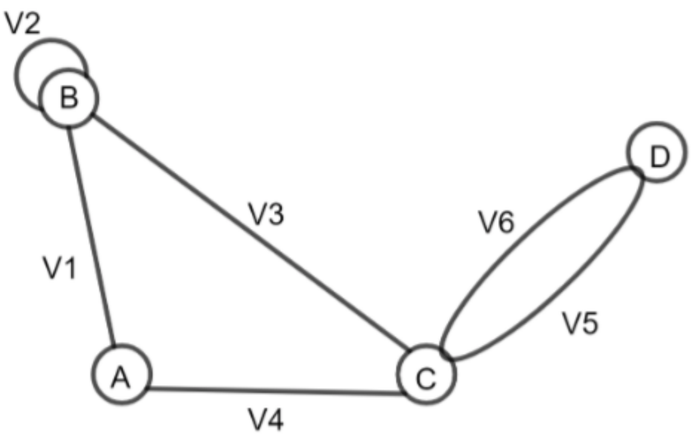


Figura 33 – Grafo pseudografo

Fonte: Elaborado pelo autor

Resolução:

Tabela 7 – Representação do Grafo pseudografo da figura 33

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
A	1	0	0	1	0	0
B	1	1	1	0	0	0
C	0	0	1	1	1	1
D	0	0	0	0	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 4

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ESTUDO DE MATRIZES UTILIZANDO REDES COMPLEXAS

As atividades preparadas na sequência didática que será proposta são destinadas aos professores que procuram introduzir alguns conceitos de redes complexas e de grafos a seus alunos. Mas, mesmo trazendo essas atividades de forma simples e educativa, é importante que os professores que tentem usar essas propostas tenham compreensão dos termos e conceitos de redes complexas e de grafos, pois, sempre que for necessário, cabe ao professor intermediar o conhecimento ao seu aluno.

Essas atividades foram elaboradas para que os alunos compreendam o conceito de redes complexas, algumas representações de grafos e saibam transitar entre elas. Além disso, o ideal é que essas atividades sejam aplicadas em sequência, pois alguns assuntos abordados em uma atividade posterior podem ter sido explicados na anterior. Caso o professor deseje aplicar alguma atividade fora da sequência, é importante que ele defina alguns tópicos a respeito de grafos, uma vez que seus alunos podem não possuir o conhecimento necessário para o desenvolvimento da mesma. Dessa forma, descrevemos no início de cada atividade, os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da mesma.

4.1 Sequência didática

Leal & Rôças (2012, p.7) definem uma Sequência Didática como:

> *um conjunto de atividades, estratégias e intervenções planejadas etapa por etapa pelo docente para que o entendimento do conteúdo ou tema proposto seja alcançado pelos discentes (KOBASHIGAWA et al., 2008). Lembra um plano de aula, entretanto, é mais amplo que este por abordar várias estratégias de ensino e aprendizagem e por ser uma sequência de vários dias (LEAL; RÔÇAS, 2012, p.7).*

Dessa forma, as atividades propostas em uma sequência didática devem ser ordenadas de forma a aprofundar o tema que está sendo estudado e são variadas em termos de estratégias:

leituras, situações problemas, aula dialogada, experimentos, vídeos, etc. Além disso, o tema deverá ser abordado durante um conjunto de aulas de modo que o aluno se aprofunde e se aproprie do tema desenvolvido.

Ainda segundo os autores, o uso de uma sequência didática é muito importante porque proporciona a organização e a implementação de um ensino que possibilita uma Aprendizagem Significativa. Assim, a sequência didática que vamos apresentar tem como ponto de partida os problemas históricos e clássicos que contribuíram para o surgimento da Teoria dos Grafos. E em seguida, apresentaremos problemas atuais que necessitam da Teoria dos Grafos para que possam ser resolvidos.

4.2 Atividades propostas para o estudo de Matrizes utilizando Redes Complexas

4.2.1 Atividade 1: Introdução a Redes Complexas

Redes complexas estão em toda parte, como por exemplo, nas interações entre proteínas, nas redes sociais, na internet e na Wikipedia. O estudo de redes complexas torna-se importante porque a partir desse estudo é possível entendermos, por exemplo: as relações sociais de amizades, as epidemias, as mudanças climáticas, as economias, dentre outros fenômenos.

• **Objetivo:** Introduzir o conceito de redes complexas, assim como, relacionar uma rede complexa a um grafo.

• **Público alvo:** Alunos do 2º e/ou 3º anos do Ensino Médio.

• **Pré-requisito:** Conceitos básicos de conjuntos

• **Materiais e tecnologias:** Essa atividade pode ser trabalhada utilizando um computador e um retroprojetor para reproduzir o vídeo sobre redes complexas. Além disso, um material impresso como a atividade proposta ajudará consideravelmente em relação ao tempo de aplicação da atividade.

• **Recomendações metodológicas:** Essa atividade foi planejada para que inicialmente, na 1ª aula, os alunos permaneçam em seus respectivos lugares para assistir ao vídeo e na sequência a turma poderá ser organizada em círculo para que seja iniciado uma espécie de debate sobre o tema proposto no vídeo. Nas aulas seguintes, sugere-se que o professor separe a turma em grupos de 5 ou 6 pessoas para a realização das outras atividades.

•**Dificuldades previstas:** Os alunos podem apresentar dificuldades com as nomenclaturas relacionadas a grafos, principalmente, no momento da modelagem matemática das redes complexas.

•**Descrição geral da atividade:** A atividade foi planejada para ser aplicada em 3 aulas sequenciadas de 50 minutos cada.

1ª Aula: Essa aula será programada para introduzir os conceitos de sistemas complexos e redes complexas, a partir do vídeo sobre o tema. Em seguida, após a exibição do vídeo, será proposta uma discussão sobre o que os alunos compreenderam em relação aos conceitos e quais situações do cotidiano deles poderiam representar exemplos de redes complexas.

2ª Aula: Essa aula será utilizada para formalizar o conceito de redes complexas relacionando-a a um grafo. Nesse momento, o professor aproveita para introduzir o conceito de grafo usando alguns modelos de redes complexas e representando esses modelos na forma de grafo.

3ª Aula: Essa aula será utilizada para que o professor aplique uma atividade com alguns tipos de redes complexas e peça aos alunos que criem uma rede complexa, a partir da sua rede de amizade no Instagram, por exemplo, e em seguida represente essa rede em forma de grafo.

•**Detalhamento da atividade:**

1ª Aula:

1. Solicitar aos alunos que assistam com bastante atenção ao vídeo: o que são redes complexas? (https://youtu.be/55v3RMNdMkg), cuja duração é de 20:44 minutos.

2. Solicitar aos alunos que relatem o que entenderam sobre redes complexas.

3. Induzir os alunos a associarem o conceito de redes complexas com situações do seu cotidiano.

2ª Aula:

Introduzir o conceito formal de redes complexas, exemplificado-o com alguns tipos de redes complexas.

Relacionar redes complexas a grafos através da sua representação matemática.

Introduzir alguns conceitos básicos de grafos, como por exemplo: arestas, vértices e grau.

3ª Aula:

Aplicar o exercício, a seguir, sobre o tema para reforçar os conceitos estudados anteriormente.

Exercícios Propostos

Questão 1:

Uma rede complexa é um tipo grafo que apresenta uma estrutura tipológica não-trivial de conexão, composta por um conjunto extremamente elevado de vértices (nós) que são conectados por meio de arestas (conexões, ligações ou links) (BARABÁSI, 2009). A figura abaixo ilustra exemplo de redes complexas, faça a representação de cada uma delas na forma de grafos e em seguida verificar o número de vértices e de arestas de cada um.

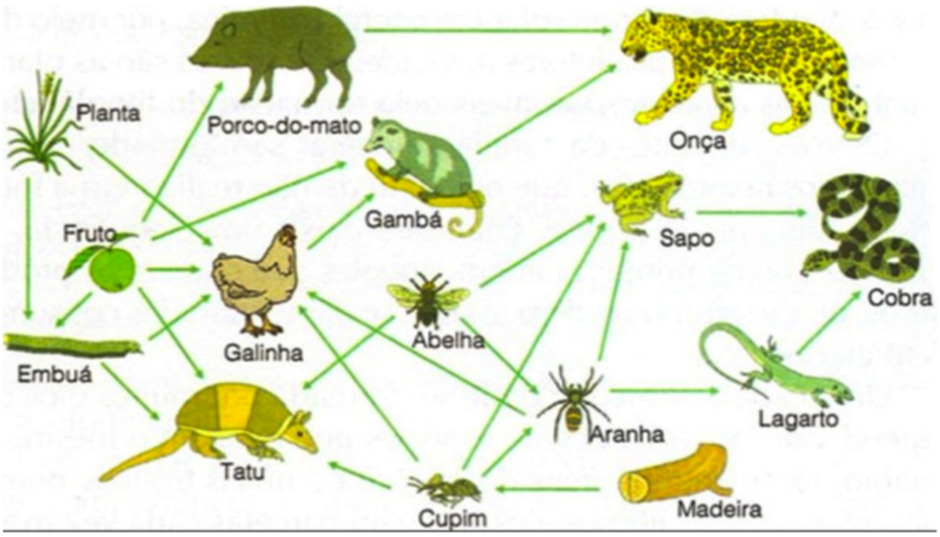


Figura 34 – Cadeia alimentar.

Fonte:

Provável solução:

Observa-se pelo grafo (figura 35) representativo da figura 34 que o número de vértices é 15 e o número de arestas é 24.

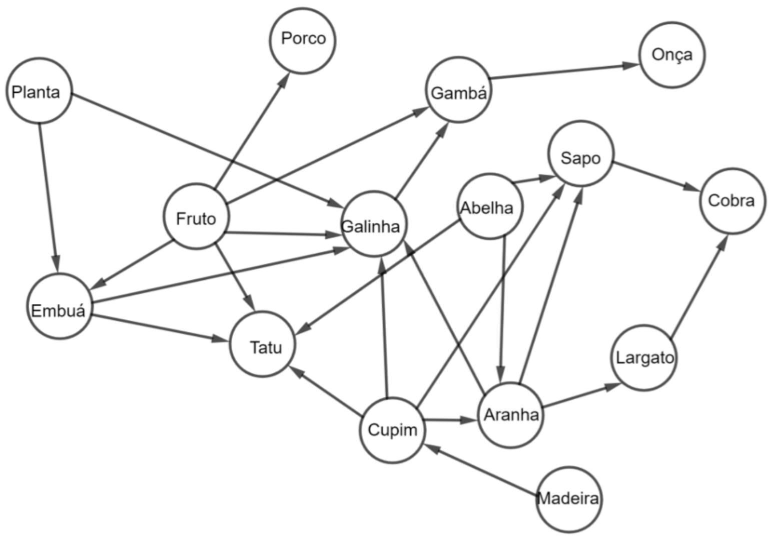


Figura 35 – Grafo representativo da cadeia alimentar.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Questão 2:

Em uma empresa de marketing digital, com dez funcionários, foi realizada uma pesquisa para avaliar quem seria o diretor artístico, como Ana e Beatriz eram as mais velhas na empresa, seu chefe pediu para que elas nomeassem dois possíveis candidatos para o cargo. Sabendo que as pessoas escolhidas por elas seriam amigos em comum das duas, seu chefe decidiu consultar uma rede social, na qual todos os seus funcionários fazem parte e constatou o seguinte:

•Ana possui cinco amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Beatriz, Cláudio, Gabriel, Helena e Jamile.

•Beatriz possui quatro amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Ana, Gabriel, Daniel e Helena.

•Cláudio possui dois amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Ana e Jamile.

•Daniel possui quatro amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Beatriz, Carlos, Igor e Flávia.

•Carlos possui três amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Daniel, Flávia e Igor.

•Flávia possui quatro amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Gabriel, Beatriz, Carlos e Daniel .

•Gabriel possui três amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Ana, Beatriz e Flávia.

•Helena possui quatro amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Beatriz, Ana, Jamile e Igor.

•Igor possui quatro amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Daniel, Carlos, Helena e Jamile.

•Jamile possui três amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles: Ana, Cláudio e Igor.

Analisando essas relações de amizades, quais devem ser as duas prováveis indicações de Ana e Beatriz.

Provável solução:

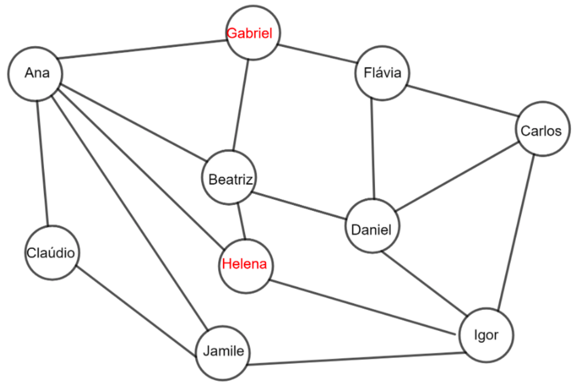


Figura 36 – Grafo representativo da rede de amizade.

Fonte: Elaborado pelo autor

Observando o grafo da Figura 36, concluímos que os amigos em comum a Ana e Beatriz são: Gabriel e Helena.

Questão 3:

Represente as fronteiras do mapa do Brasil por região, abaixo, através de um grafo, e em seguida determine o número de vértices e arestas desse grafo.

Figura 37 – Mapa das regiões do Brasil

Fonte:

Provável solução:

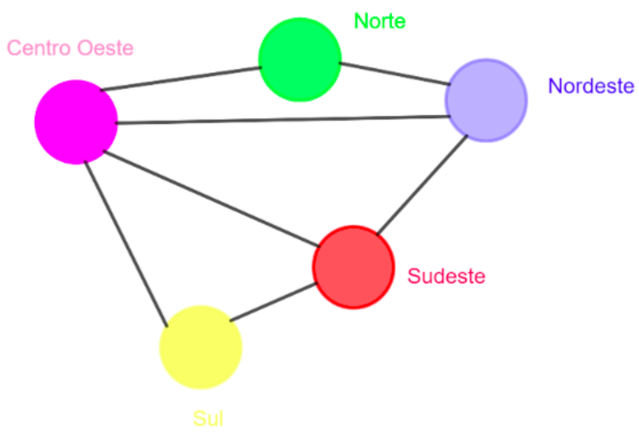


Figura 38 – Grafo representativo do mapa das regiões do Brasil

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se pelo grafo (figura 38) representativo da figura 37 que o número de vértices é 5 e o número de arestas é 7.

4.2.2 Atividade 2: Grafos por meio de matrizes

• **Objetivo:** Contextualizar através de um breve histórico a origem do conceito de grafos, trabalhar através de atividades propostas os principais elementos de um grafo e por fim, relacionar grafos ao estudo de matrizes.

• **Público alvo:** Alunos do 2º e/ou 3º anos do Ensino Médio.

• **Pré-requisito:** Conceitos básicos de matrizes.

• **Materiais e tecnologias:** Essa atividade pode ser trabalhada utilizando o quadro ou um retroprojetor para reproduzir os slides sobre os principais conceitos de grafos e de matriz adjacência e incidência . Além disso, um material impresso como a atividade proposta ajudará consideravelmente em relação ao tempo de aplicação da atividade.

• **Recomendações metodológicas:** Essa atividade foi planejada para que inicialmente, na 1a aula, os alunos permaneçam em seus respectivos lugares para assistir a explicação dos conceitos e tipos básicos de grafos pelo professor e na sequência a turma pode ser organizada em dupla para que seja iniciada a primeira atividade proposta dessa atividade 2 . Nas aulas seguintes, sugere-se que o professor separe a turma em grupos de 3 ou 4 pessoas para a realização das outras atividades.

• **Dificuldades previstas:** Os alunos podem apresentar dificuldades com as nomenclaturas e em assimilar com segurança os conceitos básicos de grafos pelo curto espaço de tempo , visto que é um assunto novo para eles e além disso , na passagem do grafo para sua representação matricial .

• **Descrição geral da atividade:** A atividade foi planejada para ser aplicada em 4 aulas sequenciadas de 50 minutos cada.

1ª Aula: Essa aula será programada para fazer uma breve retomada histórica do surgimento da Teoria dos grafos na matemática com foco principal no problema das Pontes de Konisgbergue (1736) resolvido por Leonard Euler mais famoso considerado a base da Teoria dos grafos e em seguida aplica-se uma atividade referente ao tema .

2ª Aula: Essa segunda aula será programada para dar uma retomada na representação de um grafo , destacando os elementos (vértices e arestas) , definir grau do vértice , grau de um grafo e também definir o que é um caminho euleriano (aberto ou fechado) e em seguida aplica-se uma atividade referente ao tema.

3ª Aula: Essa terceira aula tem como objetivo representação matricial de um grafo . E as duas matrizes que podemos associar a grafo são a matriz adjacência e a incidência .Nessa aula o professor irá fazer uma breve abordagem dos conceitos dessas duas matrizes, e em seguida aplica-se uma atividade referente ao tema.

• **Detalhamento da atividade:**

1ª Aula:

1. Solicitar aos alunos que assistam com bastante atenção a aula expositiva ministrada pelo professor através do quadro ou slide e até mesmo por um vídeo de como e quando surgiu a Teoria dos grafos.

2. Após esta introdução propor o Problema das sete Pontes Konisgbergue (1736). E com material impresso de um desenho da cidade de konisgbergue distribui para cada grupo 3 ou 4 pessoas , onde consta a questão tal e qual conhecemos:

“ Os moradores da cidade de konisgbergue questionavam -se , com a possibilidade de fazer um passeio pela cidade que partindo de algum lugar , atravessando as sete pontes exatamente uma vez e então retornasse ao ponto de partida “.

O problema foi proposto a Euler e agora está posto para vocês para que respondam se é possível ou não .Para cada resposta deve ser argumentada que a segure a resposta dada.

Pede-se também que seja feita uma representação da cidade com as pontes por uma modelagem matemática (grafo).

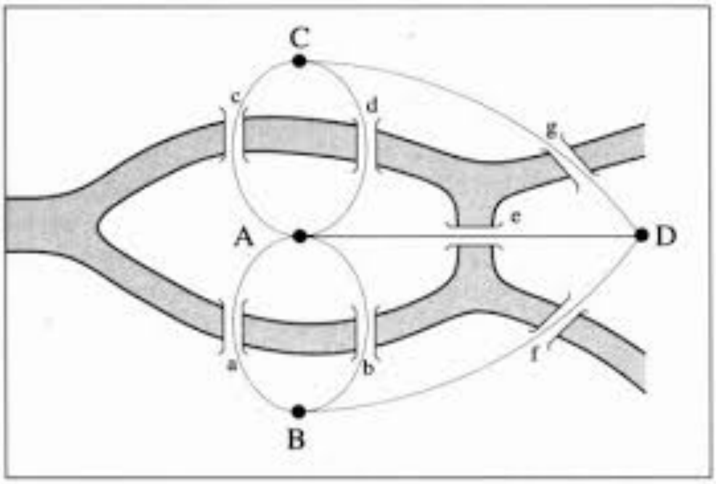


Figura 39 – A modelagem matemática de Kaliningrado proposta por Euler

Fonte: clube.sbm.pt (acesso em 21 de agosto de 2021)

Provável solução:

A ideia era que cada grupo pensasse no problema e verificasse se é possível solucioná-lo . Caso não fosse, argumentar que esse problema foi solucionado por Euler (1736), onde ele prova só seria possível se cada porção de terra (vértice) ligadas as pontes (arestas) teriam de ter uma quantidade par de pontes (arestas) o que não é o caso das setes pontes de Konigsberg, pois todas tem quantidade ímpar.

Um modelagem matemática (grafo) é:

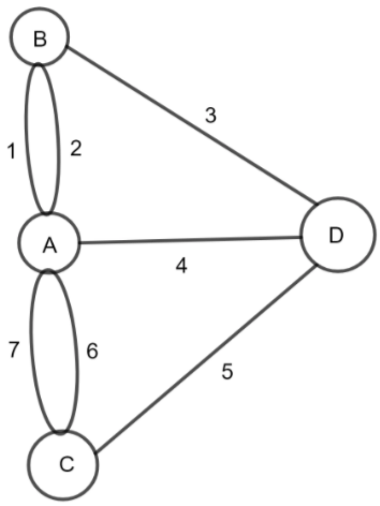


Figura 40 – Grafo que representa o problema das ponte de Konigsberg.

Fonte: Elaborado pelo autor

2ª Aula:

1. Solicitar aos alunos que assistam com bastante atenção a aula expositiva ministrada pelo professor através do quadro ou slide, em que a partir da retomada, foi definido grau de um vértice, grau de um grafo e o que vem a ser caminho euleriano.

Definição 34. *Em um grafo G não orientado o grau de um vértice é o número de arestas incidentes a ele, exceto que o laço em um vértice contribui duas vezes ao grau daquele vértice. O grau do vértice v é indicado por gr(v).*

Definição 35. *Dizemos que o grau de um grafo G não orientado é a soma dos graus de seus vértices.*

Definição 36. *Um caminho euleriano em G é um caminho simples que contém todas as arestas de G. Um caminho é fechado quando o ponto de partida é o mesmo de chegada ou, é aberto quando o ponto de partida não coincide com o ponto de chegada.*

2. Após a explanação desses conceitos, propor as seguintes atividades:

Questão 1:

Num grupo de cinco pessoas queremos representar as possibilidades de diálogo entre eles. Observe os idiomas que cada um fala:

•João: inglês, espanhol, japonês e português.

•José: inglês e português.

•Maria: espanhol, japonês e português.

•Bete: inglês, espanhol e português.

•Isabel: inglês e espanhol

Construa um grafo que representa as possibilidades de diálogo entre as pessoas e em seguida diga se existe um caminho euleriano, caso exista, se é aberto ou fechado, justificando.

Provável solução:

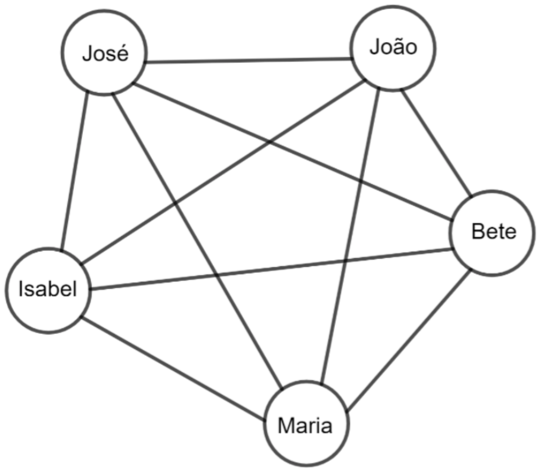


Figura 41 – Grafo da questão 1

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que esse grafo representa um caminho euleriano fechado, pois qualquer pessoa (vértice) consegue ir por todos os caminhos (arestas) uma vez somente e retornar ao ponto de partida (vértice). Além disso, nota-se que todas as pessoas (vértices) tem uma quantidade par de caminhos (arestas) o que comprova o teorema de Euler.

Questão 2:

Para cada grafo representado abaixo, determine o grau de cada vértice e o grau de cada grafo.

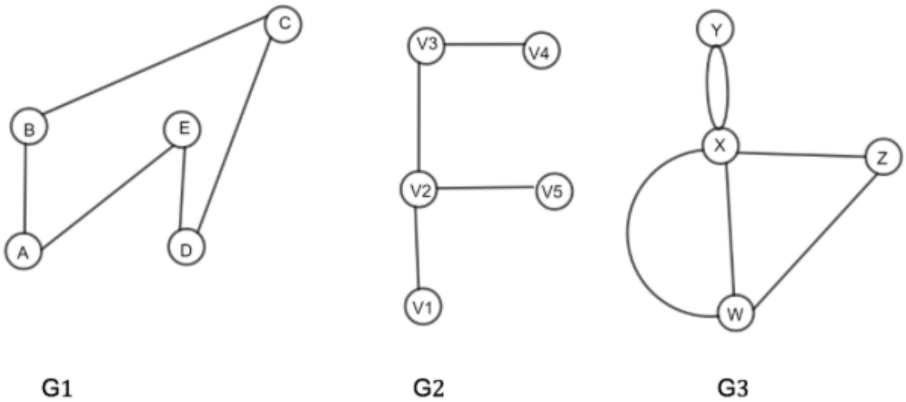


Figura 42 – Grafos da questão 2

Fonte: Elaborado pelo autor

Provável solução:

Observe que o grafo $G1$ tem -se: $gr(A) = 2, gr(B) = 2, gr(C) = 2, gr(D) = 2$ e $gr(E) = 2$, logo, o grau do grafo $gr(G1) = 10$.

Em grafo $G2$ tem-se: $gr(V1) = 1, gr(V2) = 3, gr(V3) = 2, gr(V4) = 1$ e $gr(V5) = 1$, logo, o grau do grafo $gr(G2) = 8$.

Por fim, o grau do grafo $G3$ tem-se: $gr(X) = 5, gr(Y) = 2, gr(Z) = 2$ e $gr(W) = 3$, logo, o grau do grafo $gr(G3) = 12$.

3ª Aula:

1. Solicitar aos alunos que assistam com bastante atenção a aula expositiva ministrada pelo professor através do quadro ou slide a respeito dos conceitos básicos de matrizes de adjacência e incidência.

A matriz Adjacência tem a função de codificar todas as arestas de um grafo relacionando vértices a linhas e colunas da matriz.

Definição 37. *Seja um grafo $G = (V,A)$, com n vértices. Denominamos de matriz de adjacência de G, representada por $A(G)$, a matriz quadrada de ordem n, tal que: cada elemento $A_{(i,j)}$ representa o par de vértices (i, j). Se o par estiver relacionado, então temos que $A_{(i,j)} = 1$, caso contrário $A_{(i,j)} = 0$, isto é,*

$$A_{(i,j)} = \begin{cases} 1, se(i, j) \in V \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

A matriz incidência denotada por A, é uma matriz de ordem $n \times m$, onde se relaciona vértice com arestas, assim invés de relacionar o vértice a outro vértice, por exemplo, vamos analisar o vértice as arestas, se tiver uma ligação entre o com aresta coloca o elemento 1, caso contrário coloca o elemento 0. Podemos então definir a matriz A da seguinte forma:

Definição 38. *Seja $G = (V,E)$ um grafo não orientado. Suponha que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sejam os vértices e $e_1, e_2, \cdots, e_m$ sejam as arestas de G. Então a matriz incidência com relação a esta ordem de V e E é a matriz $n \times m$ tal que $M = [m_{ij}]$, em que*

$$m_{(i,j)} = \begin{cases} 1, \text{quando a aresta } e_j \text{ for incidente a } v_i \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

2. Após esta explanação sobre as matrizes adjacências e incidências propor as seguintes atividades:

Questão 1:

Determine a matriz adjacência do grafo dado abaixo:

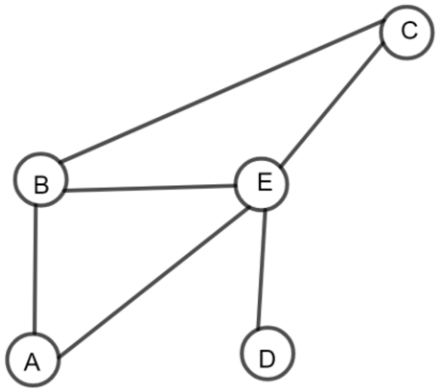


Figura 43 – Grafo da Questão 1

Fonte: Elaborado pelo autor

Provável solução:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questão 2:

Para a matriz de adjacência dada abaixo, determine seu grafo correspondente.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Provável solução:

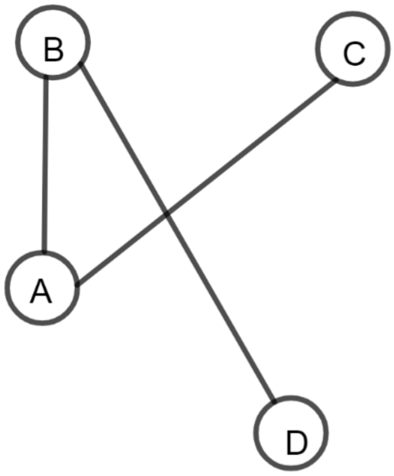


Figura 44 – Grafo da matriz de adjacência da questão 2

Fonte: Elaborado pelo autor

Questão 3:

Determine a matriz de incidência do grafo dada abaixo:

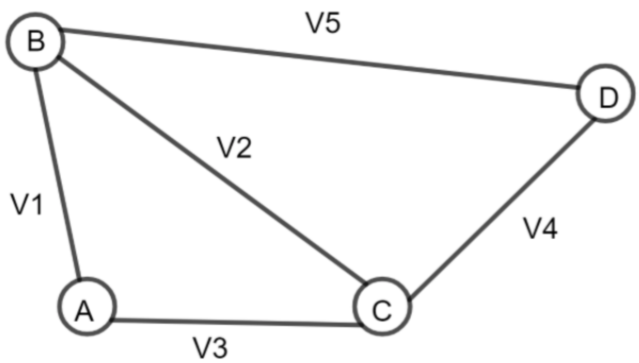


Figura 45 – Grafo da questão 3

Fonte: Elaborado pelo autor

Provável solução:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 4:

Para a matriz de incidência dada abaixo, determine seu grafo correspondente.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Provável solução:

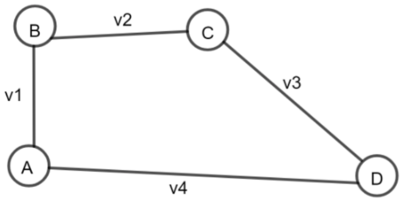


Figura 46 – Grafo da questão 4

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Oficina: Matrizes utilizando Redes complexas e Teoria dos Grafos

No inicio desse trabalho a ideia era elaborar uma proposta didática através de uma sequência didática sem aplicabilidade nesse momento inicial porque devido a pandemia as aulas presenciais estavam suspensas. No entanto, com avanço da vacinação e com os índices de internações e mortes por covid-19 baixando, o governo do estado da Bahia começou a flexibilizar algumas restrições, e uma delas foi a volta das aulas no formato semi presenciais, com turma reduzidas em 50% dos alunos e seguido todos os protocolos de higienização. Assim, a maioria das escolas públicas estaduais da Bahia voltaram as aulas no formato semi presencias em setembro de 2021, com isso, analisamos a possibilidade da aplicação da sequência didática proposta.

A principio as atividades da sequência didática foram elaboradas e organizadas para serem aplicadas a partir do dia 28 de setembro de 2021, no formato de minicurso, onde foram abertas inscrições para 20 alunos, no período de cinco dias consecutivos com 50 minutos cada encontro. Porém, não foi possível aplicar as atividades conforme planejado, devido a identificação de um caso de covid -19 positivo testado por professores da escola, assim, as aulas foram suspensas durante 3 semanas, então, foi necessário pensar em uma nova estratégia para a aplicação dessas atividades, uma vez que, tínhamos pouco tempo para concluir a dissertação. Dessa forma, as atividades foram reformuladas e seu formato deixou de ser um minicurso, e passou a ser uma oficina, como período de duração de 4 horas, para 10 alunos inscritos.

4.3.1 Aplicação da oficina

Atividade 1: Introdução a Redes Complexas

1º momento

Foi solicitado aos alunos que assistissem com bastante atenção ao vídeo "o que são redes complexas?" (https://youtu.be/55v3RMNdMkg), conforme mostra a figura 47.

Figura 47 – Alunos assistindo ao vídeo "O que são Redes Complexas?"

Fonte: Elaborado pelo autor

2º momento

Após assistirem ao vídeo os alunos foram organizados em semicírculo e foram induzidos a comentar e escrever o que entenderam sobre o vídeo apresentado, conforme mostra a figura 48.

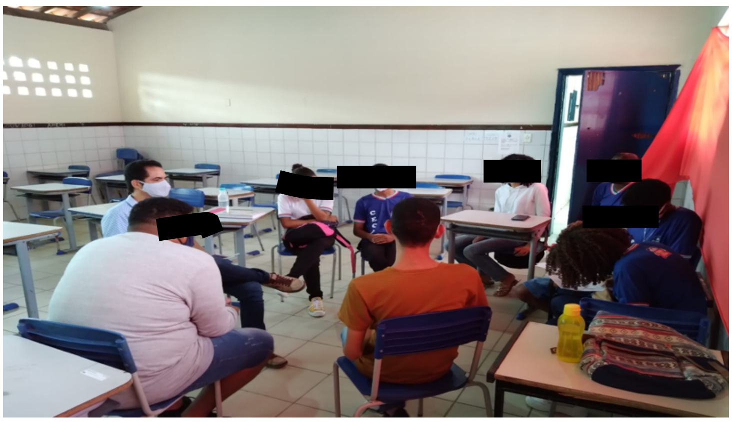
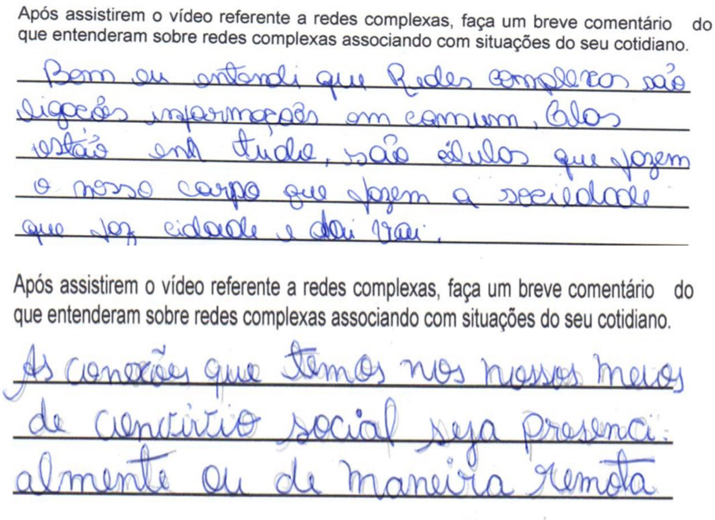


Figura 48 – Discussão sobre o vídeo "O que são Redes Complexas?"

Fonte: Elaborado pelo autor

Dentre as repostas dadas pelo alunos sobre o que eles entenderam sobre Redes Complexas destacamos duas que estão na figura 49.


Após assistirem o vídeo referente a redes complexas, faça um breve comentário do que entenderam sobre redes complexas associando com situações do seu cotidiano.

Bem eu entendi que Redes complexas são ligações informações em comum, Elas estão em tudo, são elas que fazem o nosso corpo que fazem a sociedade que faz cidade e dai vai.

Após assistirem o vídeo referente a redes complexas, faça um breve comentário do que entenderam sobre redes complexas associando com situações do seu cotidiano.

As conexões que temos nos nossos meios de convívio social seja presencialmente ou de maneira remota

Figura 49 – Discussão sobre o vídeo “O que são Redes Complexas?”

Fonte: Elaborado pelo autor

Depois desse momento de discussão, foram esclarecidas as dúvidas, dos alunos, que surgiram sobre o tema e encerrou-se a atividade 1. Assim, essa atividade teve como objetivo introduzir aos alunos o conceito de Redes Complexas fazendo com que eles associassem esse conceito com situações do seu cotidiano.

Atividade 2: O problema das sete pontes de Königsberg

1º momento

A partir da atividade 2, os alunos foram organizados em duplas para realização das atividades. Assim, foi apresentado a eles o problema das sete de Königsberg e em seguida foi proposto que eles analisassem e identificasse uma possível solução para esse problema, conforme mostra a figura 50.

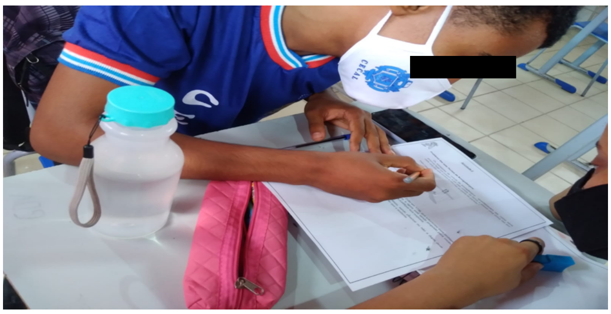


Figura 50 – Alunos resolvendo o problema das sete pontes de Königsberg

Fonte: Elaborado pelo autor

2º momento

Foi solicitado aos alunos que apresentassem a possível solução, para o problema das sete pontes, identificada por cada dupla. A figura 51 apresenta duas das repostas dadas pelas duplas.

Figura 51 – Respostas dadas pelos alunos para o problema das sete pontes de Königsberg

Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida foi explicado o por quê esse problema não têm solução, de acordo com a resposta dada por Euler, em 1736, conforme mostra a figura 52. Essa atividade teve como objetivo fazer uma retomada histórica sobre o surgimento da Teoria dos Grafos, bem como sua importância nos dias atuais.

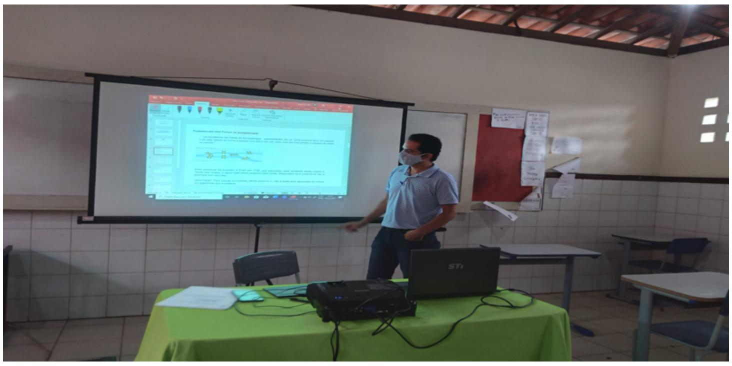


Figura 52 – Explicando o problema das sete pontes de Königsberg

Fonte: Elaborado pelo autor

Atividade 3: Redes Complexas associada a um grafo

1º momento

Foi feita uma breve explicação sobre a representação de uma rede complexa através de um grafo, conforme mostra a figura 53 e, também foram apresentados alguns conceitos básicos sobre grafos, como por exemplo: grau de um vértice, grau de um grafo e seguida foi feito um exemplo onde era solicitada a representação de uma rede complexa através de uma modelagem matemática (grafo) e além disso, foi solicitado a identificação do grau de cada vértice e o grau do grafo.

Figura 53 – Explicando a representação de uma rede complexa através de um grafo

Fonte: Elaborado pelo autor

2º momento

Foi proposto uma atividade referente a essa explicação, ou seja, uma representação de redes complexas através de um grafo, identificando o grau do vértice e o grau do grafo, conforme mostra a figura 54.

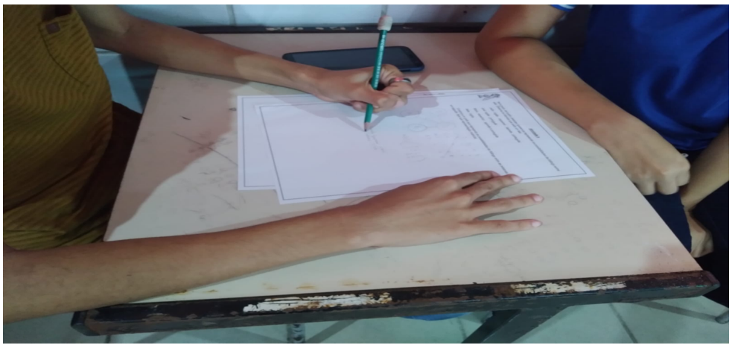


Figura 54 – Alunos resolvendo a atividade 3

Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 55 apresenta duas das respostas dadas pelos alunos para a atividade 3. Essa atividade teve como objetivo utilizar uma situação do cotidiano, as redes sociais, para fazer a representação dessa situação através da modelagem matemática, ou seja, um grafo e também, identificar o grau de cada vértice e o grau do grafo.

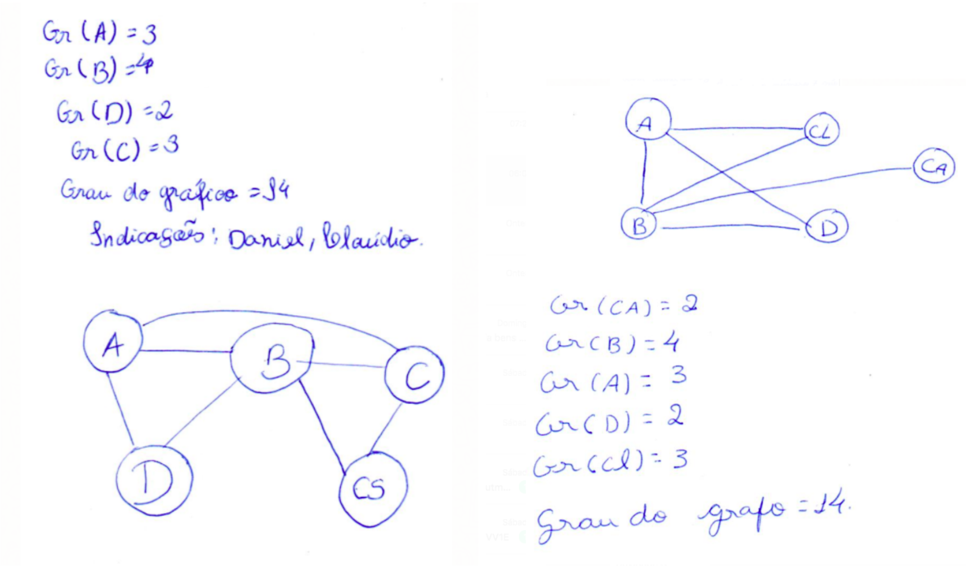


Figura 55 – Respostas dadas pelos alunos para a atividade 3

Fonte: Elaborado pelo autor

Atividade 4: Redes complexas associando a grafo e sua representação matricial

1º momento

Foi explicado alguns conceitos básicos de matrizes para reforçar o conhecimento que os alunos já tinha sobre matrizes. Em seguida, foi acrescentado a explicação sobre o conceito de matriz adjacência, pois, esse tipo de matriz é um dos tipos de matrizes que são utilizadas para representar um grafo, conforme mostra figura 56.

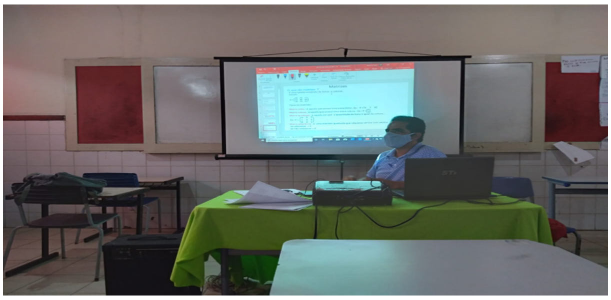


Figura 56 – Explicando conceitos básicos de matrizes

Fonte: Elaborado pelo autor.

2º momento

Foi proposto que os alunos resolvessem uma atividade referente a essa explicação, ou seja, uma representação de redes complexas através de um grafo e também pela sua representação matricial, conforme mostra a figura 57.

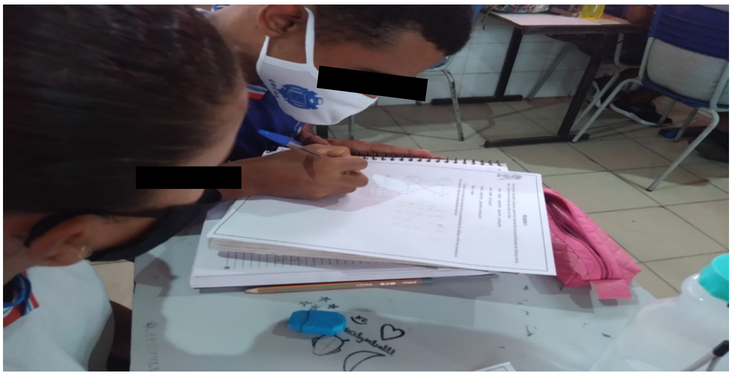


Figura 57 – Alunos resolvendo a atividade 4

Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 58 apresenta duas das respostas dadas pelos alunos para a atividade 4. Essa atividade teve como objetivo fazer com que o aluno perceba que utilizando uma situação do cotidiano, é possível simplificar essa situação através de uma modelagem matemática, ou seja, um grafo e a partir desse grafo é possível fazer a sua representação matricial. Assim, o aluno poderá concluir que o estudo de matrizes está presente em diversas situações do cotidiano.

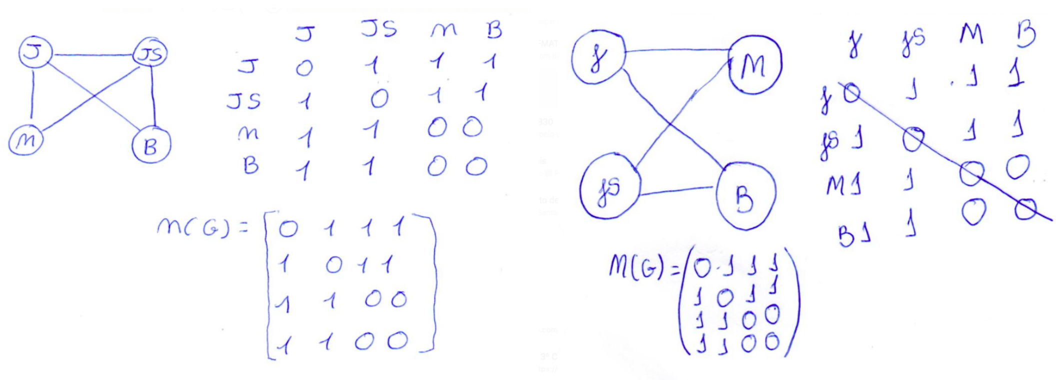


Figura 58 – Respostas dadas pelos alunos para a atividade 4

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3.2 Questionário que avaliou a aplicação da oficina

Pergunta 1: Você compreendeu os conceitos relacionados a redes complexas e grafos?

De acordo com as respostas dadas pelos alunos a pergunta 1, 80 % deles responderam sim, muito e 20% responderam sim, pouco. Observamos então que a maioria dos alunos que participaram da oficina conseguiram compreender de maneira satisfatória os conceitos básicos de redes complexas e grafos.

Pergunta 2: Você conseguiu compreender a relação entre o estudo de matrizes e situações do cotidiano?

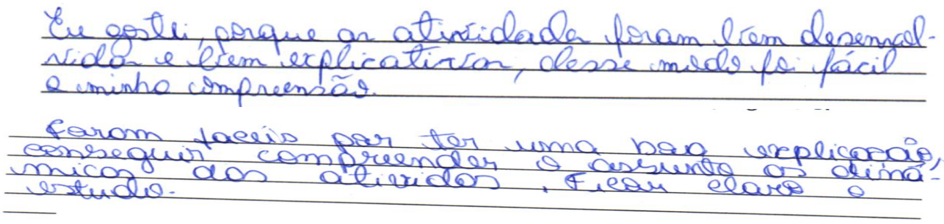
De acordo com as respostas dadas pelos alunos a pergunta 2, 70 % deles responderam sim, muito, 20% responderam sim, pouco e 10% responderam não. Observamos então que a maioria dos alunos que participaram da oficina conseguiram compreender que existem diversas aplicações do estudo de matrizes em situações do cotidiano.

Pergunta 3: Como você avalia as atividades propostas nessa oficina?

De acordo com as respostas dadas pelos alunos a pergunta 3, 90 % deles responderam “gostei muito” e 10% responderam “gostei pouco” . Observamos então que a maioria dos alunos que participaram da oficina aprovaram a aplicação das atividades propostas.

Pergunta 4: Escreva abaixo uma justificativa sobre sua resposta em relação a pergunta 3?

A figura 60 apresenta algumas das repostas dadas pelos alunos para a pergunta 4.


Eu gostei porque as atividade foram bem desenvol-vidas e bem explicativas, desse modo foi fácil a minha compreensão.

Foram faceis por ter uma boa explicação, conseguir compreender o assunto os dinâmicos das atividades, ficou claro o estudo.

Figura 59 – Respostas dos alunos para a pergunta 4

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 60 – Finalização da oficina

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com os resultados obtidos através do questionário que avaliou a oficina, verificou-se uma avaliação positiva dos discentes em relação as atividades aplicadas. O resultado do questionário mostrou que é interessante fundamentar o ensino e a aprendizagem da Matemática de forma construtivista e integrada com a construção do novo conceito, apoiando o mesmo em conceitos já existentes na sua estrutura cognitiva. Para desenvolver as atividades pedagógicas descritas neste estudo, procurou-se utilizar material de baixo custo de forma a tornar acessível e atrativa, a outros professores, a sequência didática desenvolvida.

.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos educadores apontam que a educação de verdade acontece quando o aluno é instigado a explorar, observar, jogar, resolver situações problemas e a acreditar em si mesmo, enquanto ser pensante, e também quando estimular cada indivíduo a desenvolver ao máximo possível todo o seu potencial de aprendizagem. Levando em consideração essa perspectiva, é necessário que a educação organize seus conhecimentos, tendo como ponto de partida despertar o interesse dos alunos pela aprendizagem e, a parti daí, levá-los a patamares de aprendizagem, que são fundamentais para a sua formação e ao exercício de sua cidadania. Dessa forma, merece destaque especial a elaboração e aplicação da sequência didática planejada para esse estudo, uma vez que, a sequência didática é uma ferramenta de aprendizagem muito importante, pois, ela proporciona a organização e a implementação de um ensino que possibilita ao aluno uma aprendizagem significativa. Além disso, a sequência didática é um instrumento que valida a intervenção do professor junto à sala de aula, por ser mais dinâmica que uma aula tradicional, ela trás inovação e ressignifica o conhecimento.

Durante este estudo destacou-se a importância de introduzir o estudo de Redes Complexas e Grafos para os alunos do Ensino Médio, pois, diversos aspectos do mundo real podem ser representados por meio de redes complexas a partir de analogias para a resolução de problemas específicos. É possível, por exemplo, modelar toda a estrutura física de uma grande rede de computadores tal como a Internet. Nesse caso, os computadores conectados à Internet referem-se aos vértices da rede enquanto que os cabos e meios de transmissão representam as arestas do grafo. Assim, relacionar o estudo de matizes, que na maioria das vezes é abordado apenas algebricamente, com o tema de redes complexas e grafos possibilita a contextualização desse estudo, fazendo que que os alunos associem esse conteúdo matemático com questões do seu cotidiano.

Com base nesta constatação, foi elaborada uma sequência didática que serviu de base para essa Dissertação, e teve como principal objetivo verificar se o estudo das Redes Complexa e a Teoria dos Grafos é uma metodologia eficiente para despertar nos alunos um interesse maior pelo ensino da matemática, assim como, estimular a curiosidade deles em associar o estudo de matrizes com situações do cotidiano. Durante o início do presente trabalho, buscou-se, na revisão bibliográfica, entender os conceitos básicos de redes complexas e, também, o processo histórico de como surgiu a Teoria dos Grafos.

Por meio do estudo relatado, procurou-se enfatizar a importância de uma abordagem pedagógica que dê oportunidade ao aluno de concentrar-se numa tarefa, exercitar a sua paciência, criar imagens, interpretar desenhos e intuir soluções para problemas. Consequentemente, acredita-se que a aprendizagem tornou-se mais significativa, pela participação destes, na descoberta do conteúdo e pelo crescimento de suas capacidades cognitivas. Assim, buscou-se, com a aplicação da oficina, minimizar as dificuldades que os alunos apresentam em relacionar o estudo de Matrizes com situações do cotidiano e, buscou-se também reconstruir conceitos, tornando os discentes sujeitos participantes de um ambiente de aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. L. Análises estatísticas em redes complexas: Propriedades topológicas, críticas e dinâmicas. *Dissertação de Mestrado. UFRGN. Natal*, 2013. Citado na página 16.

BARABÁSI, A.-L. *Linked (conectado): a nova ciência dos networks*. *[S.l.]*: São Paulo: Leopardo, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 15, 21, 22, 24 e 62.

CARDOSO, A. d. L. Estudo de um modelo tight-binding na rede apoloniana. *Dissertação de mestrado, Salvador*, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.

CARDOSO DOMINGOS M.; SZYMANSKI, J. R. M. *Matemática Discreta*. *[S.l.]*: Escolar Editora, 2009. Citado na página 26.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. *[S.l.]*: São Paulo: Ática, 2004. Citado na página 40.

DOVICCHI, J. *Estrutura de Dados*. *[S.l.]*: Disponível em:, 2007. Citado na página 26.

FIGUEIREDO, D. R. Introdução a redes complexas. atualizações em informática. *Atualizações em Informática*, p. 303–358, 2011. Citado na página 15.

IEZZI, G. M. *Fundamentos de Matemática Elementar*. *[S.l.]*: São Paulo: Ed. Atual, 2010. Citado na página 40.

LEAL, C.; RÔÇAS, G. *Sequência didática: brincando em sala de aula: uso de jogos cooperativos no ensino de ciências.* Dissertação (Mestrado), Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 59.

MALTA, G. H. S. *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível*. *[S.l.]*: Dissertacao de mestrado, 2008. Citado na página 26.

METZ, J. e. a. Redes complexas: conceitos e aplicações. 2007. Citado 6 vezes nas páginas 15, 18, 19, 20, 21 e 23.

NETTO, P. O. B. *Grafos: Introdução e prática*. *[S.l.]*: São Paulo: Blucher, 2009. Citado na página 17.

PAIVA, M. R. *Matemática*. *[S.l.]*: São Paulo: Moderna, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

RABUSKE, M. A. Introdução a teoria dos grafos. *Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992. RANKA, Sanjay; SAHNI, Sartaj. Hypercube algorithms: with applications to image processing and pattern recognition. New York: Springer-Verlag, 2011.*, 1992. Citado na página 26.

ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e suas Aplicações*. *[S.l.]*: [Tradução João Giudice]. São Paulo : McGraw-Hill, 2009. Citado na página 26.

SOUSA, R. d. A. Redes de interação preferencial: um modelo de redes complexas com dinâmica de arestas ponderadas. *Dissertação de Mestrado UFBA, Instituto de Física, Salvador*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

SZWARCITER, J. L. *Grafos e algoritmos computacionais*. *[S.l.]*: Rio de Janeiro: Campus, 1984. Citado na página 26.