



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# PROBLEMAS DE MÁXIMO E MÍNIMO NA GEOMETRIA EUCLIDIANA †

por

**Ednaldo Sena dos Santos**

sob orientação do

**Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como re-  
quisito parcial para obtenção do título de Mes-  
tre em Matemática.

Agosto/2013

João Pessoa - PB

---

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

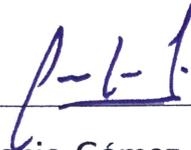
# PROBLEMAS DE MÁXIMO E MÍNIMO NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

por

**EDNALDO SENA DOS SANTOS**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

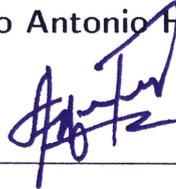
Aprovada por:



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas - UFPB (Orientador)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Agosto/2013

# Agradecimentos

*Quero agradecer à Deus pela vida que se renova a cada manhã e pelo livre arbítrio de lutar ou desistir, mas principalmente pela certeza de ser um vencedor e sempre persistir.*

*À minha esposa e filha pela paciência e apoio durante todo o tempo que me afastei na realização desse estudo.*

*Aos meus pais que me mostraram como viver a vida que é cheia de desafios, com lutas, vitórias e derrotas.*

*Aos meus sogros que têm sido verdadeiros pais para mim.*

*Ao professor, meu orientador, Venegas por toda a sua dedicação, apoio, orientação, contribuição e paciência durante toda a construção deste trabalho.*

*A todos os professores que fazem parte da equipe do PROFMAT, muito do que vocês me ensinaram, faz parte desse trabalho e da minha prática na sala de aula.*

*À amiga Yara Rabay pelo auxílio, liderança e exemplo de vida que foi um dos marcos no programa PROFMAT.*

*À Rosângela e Rildo que apesar da distância e dificuldades encontradas nunca desanimaram servindo de inspiração para muitos de nós.*

*Aos novos amigos que fizeram parte desta turma pioneira.*

*À minha equipe de estudos: Aderbal, Rosângela, Leônidas, Rildo, Rênad e João Evangelista, que me estimularam, me apoiaram e me ensinaram bastante, obrigado a todos.*

# Dedicatória

*Aos meus pais, Eudézia Sena (in memoriam) e João Bernardo, pelo dom da vida e pelo amor incondicional a mim dispensado.*

# RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa sobre problemas de máximos e mínimos da Geometria Euclidiana. Inicialmente apresentamos alguns resultados preliminares seguidos de suas demonstrações que em sua essência usam conceitos básicos de geometria. Em seguida apresentamos alguns problemas de maximização de área e de minimização de perímetro em triângulos e polígonos convexos, culminando com uma prova da desigualdade isoperimétrica para polígonos e comentário do caso geral. Resolvemos alguns problemas clássicos de geometria que estão relacionados com valores extremos e apresentamos outros como problemas propostos.

Palavras chaves: Geometria Euclidiana, Máximos e Mínimos, Desigualdade Isoperimétrica.

# ABSTRACT

This work presents a research on problems of maxima and minima of the Euclidean geometry. Initially we present some preliminary results followed by statements that in essence use basic concepts of geometry. Below are some problems of maximizing area and minimizing perimeter of triangles and convex polygons, culminating in a proof of the isoperimetric inequality for polygons and review the general case. Solve some classical problems of geometry that are related to outliers and present other problems as proposed.

Keywords: Euclidean geometry, Maxima and Minima, isoperimetric inequality.

# Sumário

<b>1</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>1</b>
1.1	Resultados preliminares . . . . .	1
<b>2</b>	<b>MAXIMIZANDO A ÁREA, MINIMIZANDO O PERÍMETRO</b>	<b>16</b>
2.1	Maximizando a área, minimizando o perímetro de triângulos . . . . .	16
2.2	Maximizando a área, minimizando o perímetro de polígonos . . . . .	21
2.3	A desigualdade isoperimétrica para polígonos . . . . .	27
<b>3</b>	<b>PROBLEMAS CLÁSSICOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS</b>	<b>32</b>
3.1	Problema de Regiomontanus . . . . .	32
3.2	Problema de Fagnano . . . . .	39
3.3	Problema de Fermat . . . . .	41
3.4	Problema de Dido . . . . .	51
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS PROPOSTOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>60</b>
<b>A</b>	<b>Protocolo de construção do Geogebra</b>	<b>61</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>63</b>

# Lista de Figuras

1.1	Relação entre os ângulos e os lados opostos de um triângulo. . . . .	2
1.2	A desigualdade triangular. . . . .	3
1.3	Consequências da desigualdade triangular. . . . .	4
1.4	Ponto interior e exterior à elipse. . . . .	5
1.5	Curva de menor comprimento ligando $P$ a $Q$ e tocando $r$ . . . . .	7
1.6	Curva ligando $P$ a $Q$ e tocando $r$ em dois pontos. . . . .	8
1.7	Ponto $B_1$ entre os pontos $A$ e $B$ . . . . .	9
1.8	Triângulo $APQ$ com $R$ ponto médio de $\overline{PQ}$ . . . . .	10
1.9	Retas tangente e normal à elipse. . . . .	13
1.10	Demonstração do Teorema de Viviani. . . . .	14
1.11	Semicírculo - $A\hat{P}B = 90^\circ$ . . . . .	15
2.1	Fixando a área e minimizando o perímetro. . . . .	17
2.2	Triângulo isósceles solução do Problema 1. . . . .	18
2.3	Fixando o perímetro e maximizando a área. . . . .	19
2.4	Polígono regular. . . . .	22
2.5	Polígono equiângulo - Prova. . . . .	23
2.6	Quadrilátero $BECF$ com $E$ entre $X$ e $C$ . . . . .	25
2.7	Quadrilátero $BECF$ com $X$ entre $E$ e $C$ . . . . .	25
2.8	Polígono $\varphi'$ obtido a partir de $\bar{\varphi}$ . . . . .	26
2.9	Polígono regular formado por $n$ triângulos isósceles . . . . .	27

---

3.1	Representação geométrica do problema de Regiomontanus . . . . .	33
3.2	Solução geométrica do problema de Regiomontanus . . . . .	34
3.3	Cálculo de $d$ no problema de Regiomontanus . . . . .	35
3.4	Esquema para o problema do campo . . . . .	37
3.5	Problema de Fagnano - Solução de Féjer - A . . . . .	40
3.6	Problema de Fermat - $P$ exterior ao triângulo $ABC$ não é solução . . . . .	42
3.7	Problema de Fermat - $P$ Pode ser interior ao triângulo $ABC$ . . . . .	43
3.8	Circunferência de centro $C$ tangente à elipse de focos $A$ e $B$ . . . . .	44
3.9	Problema de Fermat - $P$ não pertence a um dos lados do triângulo $ABC$ . . . . .	45
3.10	Problema de Fermat - Ponto $C$ exterior ao arco-capaz $AB$ . . . . .	46
3.11	Problema de Fermat - Ponto $C$ sobre o arco-capaz $AB$ . . . . .	46
3.12	Problema de Fermat - Ponto $C$ interior ao arco-capaz $AB$ . . . . .	47
3.13	Problema de Fermat - Ponto de Torricelli . . . . .	47
3.14	Problema de Fermat - solução de Simpson . . . . .	48
3.15	Problema de Fermat - Triângulo de altura máxima circunscrito $\Delta ABC$ . . . . .	50
3.16	Problema de Fermat - Triângulo $MNQ$ tem altura máxima . . . . .	51
3.17	A curva convexa engloba maior área . . . . .	53
3.18	$\overline{AB}$ divide a curva $\gamma$ nas regiões $R_1$ e $R_2$ . . . . .	54
3.19	$S_1, S_2$ fixos e $A\hat{P}B$ variável . . . . .	55
3.20	$A\hat{P}B = 90^\circ$ . . . . .	55
3.21	Triângulo de área máxima fixados $a$ e $b$ . . . . .	56
A.1	Protocolo de construção no Geogebra da Figura 1.5 . . . . .	61
A.2	Protocolo de construção no Geogebra da Figura 2.5 . . . . .	62

# Notações

$\overline{P_1P_2}$	segmento de reta de extremos $P_1$ e $P_2$ ,
$P_1P_2$	comprimento do segmento de reta de extremos $P_1$ e $P_2$ ,
$\overrightarrow{P_1P_2}$	semirreta com origem no ponto $P_1$ passando por $P_2$ ,
$\overleftrightarrow{P_1P_2}$	reta passando pelos pontos $P_1$ e $P_2$ ,
$P_1\hat{P}_2P_3$	ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{P_2P_1}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$ ,
$\hat{P}_1$	ângulo interno de um polígono, ângulo inscrito,
$\triangle ABC$	triângulo de vértices $A$ , $B$ e $C$ ,
LAL	Dois triângulos com dois lados correspondentes e o ângulo formado entre eles respectivamente iguais,

# INTRODUÇÃO

*"Entre dois espíritos iguais,  
postos nas mesmas condições,  
aquele que sabe geometria  
é superior ao outro  
e adquire um vigor especial."  
(Pascal)*

Este trabalho trata de uma pesquisa bibliográfica sobre problemas de valores extremos que em sua maioria são resolvidos com recursos puramente geométricos. Está baseado no artigo Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana de Djairo [2]. Os principais requisitos são a Geometria Euclidiana plana elementar e a Geometria Analítica, matérias do 1º e 2º graus. Alguns comentários e observações usam algum conhecimento de Trigonometria e Cálculo Diferencial, mas podem ser omitidos pelo leitor que não domine essa ferramenta. Não evitamos o uso de recursos mais avançados para dar oportunidade àquele aluno mais aplicado, bem como mostrar a relação da matemática em seus diversos níveis de conhecimento.

O interesse por esse tipo de problema é muito antigo, já na antiguidade os matemáticos demonstravam um grande interesse por eles. Euclides ( $\pm 300$  a.C.), em sua obra Elementos, (Livro 6, proposição 27) fala de um problema de maximização, que consiste em achar o maior produto possível de dois números cuja soma era

dada. Mais tarde, Zenodorus (200 a.C a 140 a.C) estudou a área de uma figura com perímetro fixado e o volume de um sólido com superfície fixada. Ele verificou que entre todos os polígonos regulares com mesmo perímetro o polígono regular é o que abrange a maior área. Problemas deste tipo vêm sendo abordados pelos matemáticos desde os primórdios da geometria.

Porém problemas sociais, políticos e de formação de professores têm acarretado um gradativo abandono do ensino de geometria no Brasil. Com o Movimento da Matemática Moderna na década de 60 isso se intensificou ainda mais, dado ao extremo formalismo apresentado naquela época. Eu, particularmente, não tive uma boa formação geométrica quando estudante das séries iniciais, e ainda percebo um grande despreparo pelos professores que lecionam esse importantíssimo tópico da matemática, muitos resultados simples e ainda assim elegantes me foram omitidos em minha formação. Como um apaixonado pela matemática, e em particular pela geometria me inquietava quando via pessoas com certo nível de conhecimento que não sabem diferenciar as simples figuras geométricas planas, tais como: quadrado, retângulo, losango, trapézio, tratando-as todas indistintamente de quadrado, por terem quatro lados. Essa realidade deve mudar, pois a geometria ajuda o cidadão a conhecer melhor o mundo em que habita. A escolha desse tema vai ao encontro desses objetivos, fascina pela beleza nas construções e resultados, é de fácil compreensão na sua essência, é comumente reconhecível na natureza, e traz muito de conhecimentos matemáticos, além de estimular o uso de novas tecnologias em sala de aula. Outrossim possibilita uma atuação diferente na sala de aula, transformando o aluno em um sujeito ativo da sua aprendizagem, entre o aplicar a matemática e o fazer arte.

O trabalho foi dividido em 4 capítulos:

No Capítulo 1 falamos de resultados preliminares, que são algumas Definições, Proposições, Colorários, Teoremas e Lemas. Os resultados apresentados nesse capítulo servirão para resolver os problemas que surgirão nos capítulos seguintes. Usamos dados de [2], [7], [8].

No Capítulo 2 usaremos os resultados apresentados no capítulo anterior para resolver problemas de maximização de área e minimização de perímetro de triângulos e polígonos convexos, apresentamos também uma prova da desigualdade isoperimétrica para polígonos. Usamos dados de [2], [4], [5], [7].

No Capítulo 3 apresentamos alguns problemas clássicos de máximos e mínimos, como o problema da estátua de Regiomontanus, que busca a distância ideal para um observador ter o maior ângulo de visão; o Problema de Fagnano que consiste em inscrever num triângulo acutângulo outro triângulo de menor perímetro possível; o Problema de Fermat que busca minimizar a soma  $PA + PB + PC$ , onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos de um plano e  $P$  um ponto genérico desse plano; o Problema de Dido que busca entre todas as curvas fechadas de um dado comprimento  $L$  aquela que engloba maior área. A solução de cada problema é comentada e servirá para solução de problemas similares e suas variações. Usamos dados de [1], [2], [7].

No Capítulo 4 apresentamos alguns exercícios propostos que podem ser resolvidos fazendo uso das afirmações feitas no capítulo 1, bem como de resultados apresentados nas resoluções dos problemas apresentados nos capítulos 2 e 3. Usamos dados de [3], [7].

Finalmente, nas Considerações Finais apresentamos os ganhos pela realização desse trabalho e a motivação para outros.

As ilustrações, foram produzidas com o auxílio do Geogebra e são de autoria própria.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

### 1.1 Resultados preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas Proposições, Corolários, Teoremas e Lemmas que serão conclusivos nas demonstrações das afirmações deste próprio capítulo, bem como dos problemas tratados nos capítulos seguintes.

**Proposição 1** *Se  $ABC$  é um triângulo com  $AB=c$ ,  $AC=b$  e  $BC=a$  tal que  $\hat{B} > \hat{C}$ , então  $AC = b > c = AB$ .*

**Demonstração:** Como  $\hat{B} > \hat{C}$ , podemos traçar a semirreta  $\overrightarrow{BP}$ , onde  $P$  é um ponto do lado  $\overline{AC}$  de tal modo que  $\hat{CBP} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$ . (ver Figura 1.1).

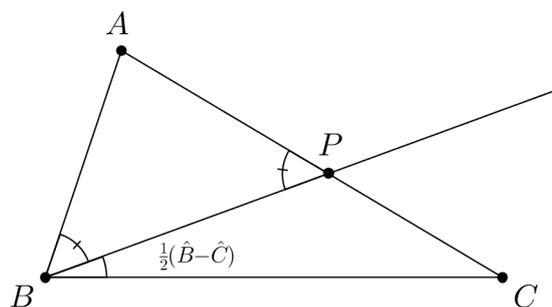


Figura 1.1: Relação entre os ângulos e os lados opostos de um triângulo.

Como  $\hat{A}PB$  é um ângulo externo do triângulo  $BPC$ , temos:

$$\hat{A}PB = \hat{C}BP + \hat{BCP} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) + \hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}).$$

Por outro lado temos:

$$\hat{A}BP = \hat{B} - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}).$$

Concluimos que o triângulo  $ABP$  é isósceles de base  $\overline{BP}$ , então:

$$c = AB = AP < AP + PC = b.$$

■

**Proposição 2 (Desigualdade Triangular)** *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo com  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ . Nosso trabalho é mostrar a desigualdade  $a < b + c$ , sendo as demais obtidas de forma análoga.

Marque o ponto  $D$  no prolongamento do segmento  $\overline{CA}$  de modo que  $A \in \overline{CD}$  e  $AD = AB$  (ver Figura 1.2).

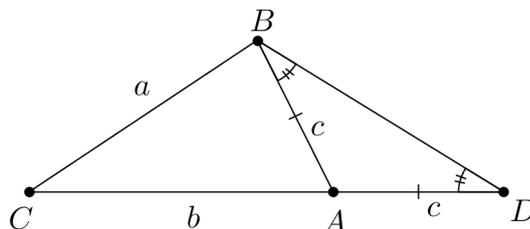


Figura 1.2: A desigualdade triangular.

Vemos que:

$$CD = CA + AD = CA + AB = b + c.$$

Pela Proposição 1 basta mostrarmos que  $B\hat{D}C < D\hat{B}C$ . Como

$$B\hat{D}A = D\hat{B}A,$$

observemos que:

$$B\hat{D}C = B\hat{D}A = D\hat{B}A < D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\hat{B}C.$$

Assim  $a < b + c$

De maneira análoga, obtemos os outros casos

$$b < a + c, \quad c < a + b.$$

■

Uma consequência importante da desigualdade triangular é a seguinte, que apresentamos como:

**Corolário 2.1** *Seja  $P$  um ponto do interior do triângulo  $ABC$ , então é válida a desigualdade  $PB+PC < AB+AC$ .*

**Demonstração:** Prolongue a semirreta  $\overrightarrow{BP}$  até que a mesma encontre o lado  $AC$  no ponto  $Q$ . (ver Figura 1.3).

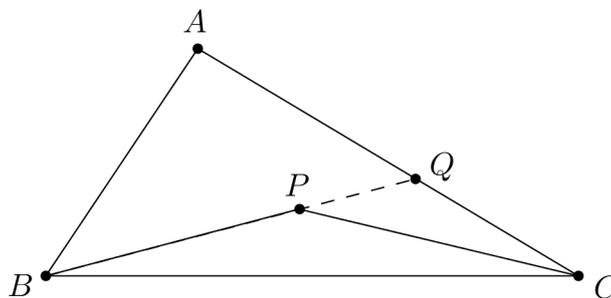


Figura 1.3: Consequências da desigualdade triangular.

Aplicando a desigualdade triangular sucessivamente aos triângulos  $ABQ$  e  $CPQ$ , obtemos:

$$BQ < AB + AQ$$

e

$$PC < QC + PQ.$$

Somando as desigualdades membro a membro, obtemos:

$$BQ + PC < AB + AQ + QC + PQ.$$

Subtraindo  $PQ$  de cada membro, obtemos:

$$(BQ - PQ) + PC < AB + (AQ + QC) + PQ - PQ.$$

Finalmente concluímos que:

$$PB + PC < AB + AC.$$

■

**Definição:** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , pertencentes a um plano  $\pi$ , seja  $2c$  a distância entre eles. *Elipse* é o conjunto dos pontos de  $\pi$  cuja soma das distâncias a  $A$  e  $B$  é constante  $2a$  (sendo  $2a > 2c$ ), ou seja,

$$\text{Elipse} = \{P \in \pi \mid PA + PB = 2a\}.$$

Uma consequência do Corolário 2.1 é a afirmação a seguir:

**Afirmção 1** Dado um ponto  $Q$  no interior de uma elipse, sendo  $A$  e  $B$  seus focos, então  $QA + QB < 2a$  e também, dado um ponto  $R$  no exterior de uma elipse, então  $RA + RB > 2a$  (ver Figura 1.4).

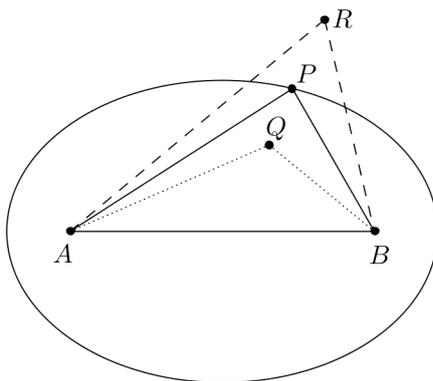


Figura 1.4: Ponto interior e exterior à elipse.

Perceba que  $Q$  é um ponto no interior do triângulo  $ABP$ , pelo corolário 2.1 temos que:

$$QA + QB < PA + PB = 2a.$$

Agora considerando o triângulo  $ABR$ , podemos notar que  $P$  é interior a ele e pelo mesmo corolário 2.1 temos que  $RA + RB > PA + PB = 2a$ . ■

O proposição a seguir é conhecida como problema de Heron de Alexandria, que viveu entre 150 a.C. e 250 d.C.

**Proposição 3 (Problema de Heron de Alexandria)** *Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  situados em um mesmo semiplano determinado pela reta  $r$ , a curva de menor comprimento ligando os pontos  $P$  e  $Q$  e tocando  $r$  é formada pelos segmentos de reta  $\overline{PA}$  e  $\overline{AQ}$ , onde  $A \in r$  é tal que os ângulos  $\hat{P}AN$  e  $\hat{N}AQ$  têm a mesma medida, onde  $\overrightarrow{AN}$  é a semirreta ortogonal a  $r$ , que tem origem  $A$  e que está do mesmo lado dos pontos  $P$  e  $Q$ .*

**Demonstração:** Seja  $P'$  o simétrico de  $P$  em relação à reta  $r$ , afirmamos que o ponto  $A$  desejado é o ponto de intersecção de  $\overline{P'Q}$  com  $r$  (ver Figura 1.5)

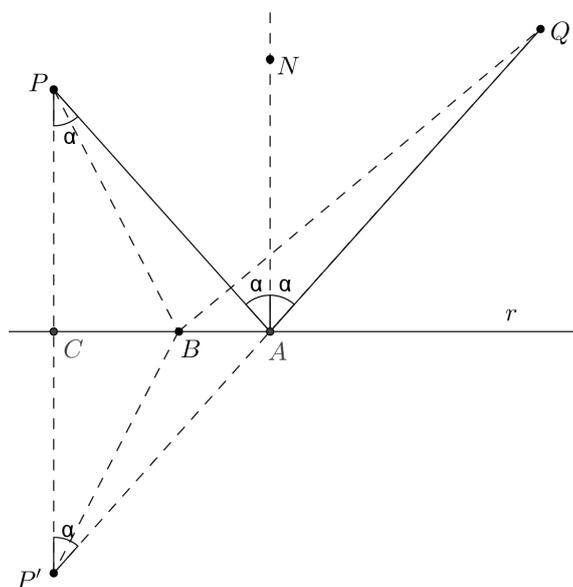


Figura 1.5: Curva de menor comprimento ligando  $P$  a  $Q$  e tocando  $r$ .

(O protocolo de construção dessa figura no Geogebra encontra-se no Apêndice)

De fato, seja  $B$  um outro ponto qualquer de  $r$  distinto de  $A$ , então  $PA + AQ < PB + BQ$ . Basta observar que os triângulos  $PCB$  e  $P'CB$  são congruentes, bem como os triângulos  $PCA$  e  $P'CA$ . Isso garante que  $P'A = PA$  e  $P'B = PB$ .

Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo  $P'BQ$ , temos:

$$P'Q < P'B + BQ$$

$$P'A + AQ = PA + AQ < PB + BQ.$$

Para concluirmos nossa demonstração precisamos provar a igualdade dos ângulos  $\hat{P}AN$  e  $\hat{N}AQ$ . Perceba que os triângulos  $PCA$  e  $P'CA$  são congruentes, consequentemente os ângulos  $\hat{APC}$  e  $\hat{AP'C}$  são iguais. Agora fundamentado pelo teorema das paralelas cortadas por uma transversal, justificamos que:

- a) Os ângulos  $\hat{A}PC$  e  $\hat{P}AN$  são iguais, pois são ângulos alternos internos, e
- b) Os ângulos  $\hat{A}P'C$  e  $\hat{N}AQ$  são iguais, pois são ângulos correspondentes.

Segue que  $\hat{P}AN = \hat{Q}AN$ . ■

Observação: A proposição 3 é um pouco mais geral, de fato, podemos provar que a curva de menor comprimento ligando os pontos  $P$  e  $Q$  e tocando  $r$  é formada pelos segmentos de reta  $\overline{PA}$  e  $\overline{AQ}$ . Usando um resultado de geometria que diz que "a curva de menor comprimento ligando dois pontos é o segmento de reta com extremidades nestes pontos". Vemos que:

- (i) A curva  $\gamma$  de comprimento mínimo toca  $r$  em apenas um ponto. De fato, suponha, por contradição, que  $\gamma$  toca  $r$  em dois pontos  $A$  e  $\bar{A}$ . Podemos perceber que a curva  $\bar{\gamma}$  obtida a partir de  $\gamma$  pela substituição do trecho  $AQ$  pelo segmento de reta  $\overline{AQ}$  tem um comprimento menor que o comprimento de  $\gamma$ . (ver Figura 1.6)
- (ii) A curva  $\gamma$  deve ser formada por dois segmentos de reta. De fato, seja  $A$  o ponto onde  $\gamma$  toca  $r$ , então necessariamente o trecho  $PA$  da curva é um segmento de reta.

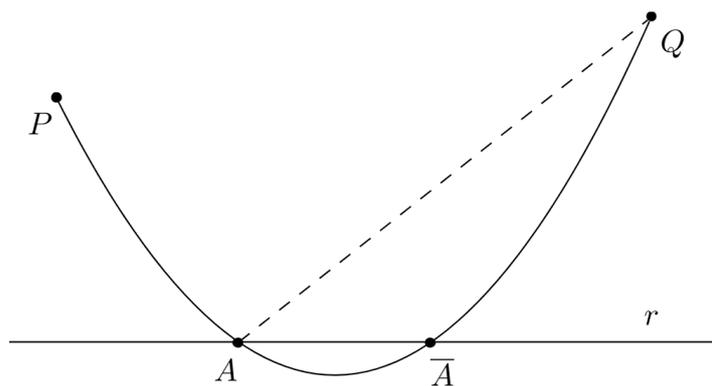


Figura 1.6: Curva ligando  $P$  a  $Q$  e tocando  $r$  em dois pontos.

Complementando a Proposição 3, temos

**Lema 3.1** *Seja  $A$  a solução do problema de minimização estudado na Proposição 3. Sejam  $B$  e  $B_1$  pontos da reta  $r$ , tais que  $B_1$  se situa (estritamente) entre  $A$  e  $B$ . Então*

$$PB + BQ > PB_1 + B_1Q.$$

**Demonstração:** Como na Proposição 3, seja  $P'$  o simétrico de  $P$  com relação a  $r$ . (ver Figura 1.7)

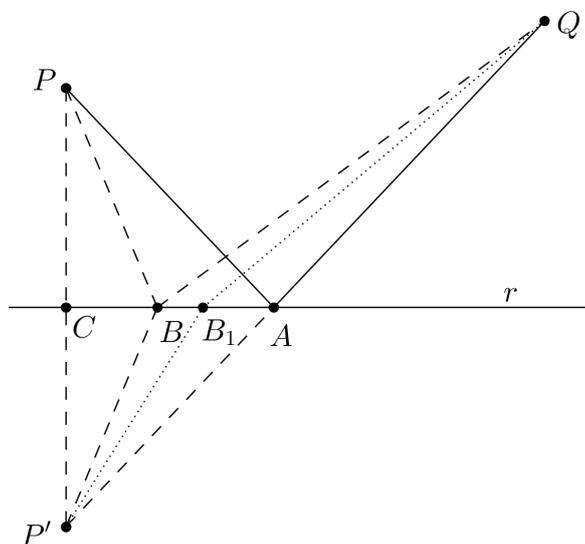


Figura 1.7: Ponto  $B_1$  entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Então a desigualdade a provar é equivalente a

$$P'B + BQ > P'B_1 + B_1Q.$$

Observe que  $B_1$  é um ponto do interior do triângulo  $P'BQ$ , pelo Corolário 2.1 a desigualdade fica provada. ■

**Proposição 4** *Considere um triângulo  $APQ$  e seja  $R$  o ponto médio do lado  $PQ$ . Então é válida a desigualdade*

$$RA < \frac{1}{2}(PA + QA)$$

**Demonstração:** Seja  $A'$  o ponto tal que  $A'PAQ$  é um paralelogramo. (ver Figura 1.8).

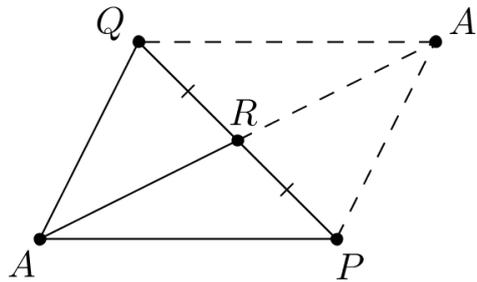


Figura 1.8: Triângulo  $APQ$  com  $R$  ponto médio de  $\overline{PQ}$ .

Usando um argumento de geometria analítica temos que

$$(PQ)^2 + (AA')^2 = 2(AP)^2 + 2(AQ)^2$$

como  $A'PAQ$  é um paralelogramo temos  $AA' = 2AR$ , então

$$(PQ)^2 + 4(AR)^2 = 2[(AP)^2 + (AQ)^2] \quad (1.1)$$

$$\frac{(PQ)^2 + 4(AR)^2}{2} = (AP)^2 + (AQ)^2 \quad (1.2)$$

Usando a desigualdade triangular no triângulo  $APQ$  temos:

$$-PQ < AP - AQ < PQ$$

isto é,

$$|AP - AQ| < PQ$$

Elevando ao quadrado a expressão acima temos

$$(AP)^2 + (AQ)^2 - 2(AP)(AQ) < (PQ)^2$$

$$(AP)^2 + (AQ)^2 < (PQ)^2 + 2(AP)(AQ)$$

pela equação (1.2) temos

$$\frac{(PQ)^2 + 4(AR)^2}{2} < (PQ)^2 + 2(AP)(AQ)$$

e

$$4(AR)^2 < (PQ)^2 + 4(AP)(AQ)$$

somando  $4(AR)^2$  em cada membro da desigualdade acima temos:

$$8(AR)^2 < (PQ)^2 + 4(AR)^2 + 4(AP)(AQ)$$

pela equação (1.1) temos

$$8(AR)^2 < 2[(AP)^2 + (AQ)^2] + 4(AP)(AQ)$$

$$4(AR)^2 < (AP)^2 + (AQ)^2 + 2(AP)(AQ)$$

$$4(AR)^2 < (AP + AQ)^2$$

$$2AR < AP + AQ$$

$$AR < \frac{1}{2}(AP + AQ).$$

■

**Definição 1** *Um conjunto  $\Gamma$  será convexo se  $P$  e  $Q$  pertencem a  $\Gamma$ , então o ponto médio  $R$  do segmento  $\overline{PQ}$  também pertence a  $\Gamma$ .*

**Proposição 5** *A elipse é uma curva estritamente convexa*

**Demonstração:** Podemos mostrar que o conjunto  $\Gamma$  dos pontos  $P$  do plano tais que

$$PA + PB \leq 2a$$

é um conjunto convexo. E, além disso, mostraremos que se  $P$  e  $Q$  estão sobre a elipse, então  $R$  é tal que

$$RA + RB < 2a$$

Sendo  $A$  e  $B$  os focos da elipse e fazendo uso da proposição 4 que diz que

$$RA < \frac{1}{2}(PA + QA)$$

e

$$RB < \frac{1}{2}(PB + QB)$$

somando as duas desigualdades e lembrando que  $PA + QA = PB + QB = 2a$  concluímos a demonstração. ■

**Proposição 6** *Seja  $P$  um ponto sobre uma elipse, então a reta normal à elipse em  $P$  é a bissetriz do ângulo  $\hat{A}PB$ , onde  $A$  e  $B$  são os focos dessa elipse. (ver Figura 1.9)*

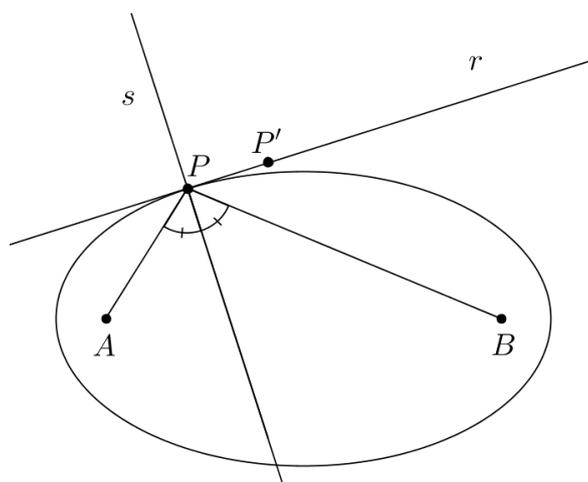


Figura 1.9: Retas tangente e normal à elipse.

**Demonstração:** Seja  $r$  a reta tangente à elipse no ponto  $P$  e seja  $P'$  outro ponto de  $r$  diferente de  $P$ , como a elipse é estritamente convexa  $P'$  é exterior à elipse, pela Afirmação 1 temos que  $P'A + P'B > 2a$ , ou seja, de todos os pontos de  $r$ ,  $P$  é o que minimiza a soma das distâncias aos focos  $A$  e  $B$ . Pela Proposição 3 a reta  $s$  perpendicular a  $r$  por  $P$  é a bissetriz do ângulo  $\widehat{APB}$ . ■

A afirmação seguinte é conhecida como Teorema de Viviani, sua prova pode ser feita facilmente utilizando o conceito de área.

**Teorema 2 (Teorema de Viviani)** *A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual à medida da altura do triângulo.*

**Demonstração:** Seja  $ABC$  um triângulo equilátero de lado  $a$ , altura  $h$  e área  $S$ , seja  $P$  um ponto do interior desse triângulo, (ver Figura 1.10).

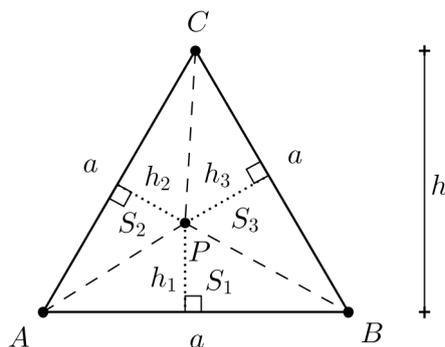


Figura 1.10: Demonstração do Teorema de Viviani.

É claro que a área do triângulo  $ABC$  é igual a soma das áreas dos triângulos  $ABP$ ,  $ACP$  e  $BCP$ , logo,

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h_1}{2} + \frac{a \cdot h_2}{2} + \frac{a \cdot h_3}{2}$$

colocando  $\frac{a}{2}$  em evidência no segundo membro, obtemos

$$\frac{a}{2}h = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + h_3)$$

e finalmente obtemos:

$$h = h_1 + h_2 + h_3$$

**Observação 1** Caso  $P$  esteja sobre um dos lados,  $P$  e os extremos desse lado não formará um triângulo, por estarem alinhados, mais a soma das áreas dos outros dois triângulos será igual a  $S$ .

**Observação 2** Se  $P$  estiver sobre um dos vértices a igualdade é evidente. ■

**Proposição 7** *Considere a região formada por uma curva convexa  $\gamma_1$  e pelo segmento  $\overline{AB}$ . Suponha que a seguinte propriedade se verifique: dado qualquer ponto  $P$  sobre  $\gamma_1$ , o ângulo  $\hat{APB}$  é reto. Então  $\gamma_1$  é um semicírculo. (ver Figura 1.11).*

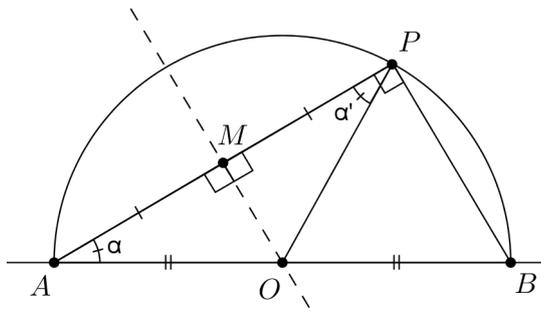


Figura 1.11: Semicírculo -  $\hat{APB} = 90^\circ$

**Demonstração:** Seja  $O$  o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Devemos então provar que  $OP = OA$ . Para isso basta mostrar que  $\alpha = \alpha'$ .

Trace uma reta passando por  $O$  paralela ao segmento  $\overline{PB}$ , essa reta cortará o segmento  $\overline{AP}$  em  $M$ , como os triângulos  $AOM$  e  $ABP$  são semelhantes  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AP}$ , os ângulos  $\hat{AMO}$  e  $\hat{PMO}$  são retos. Logo, pelo critério LAL os triângulos  $AMO$  e  $PMO$  são congruentes o que resulta em  $\alpha = \alpha'$ . ■

## Capítulo 2

# MAXIMIZANDO A ÁREA, MINIMIZANDO O PERÍMETRO

Nesse capítulo apresentaremos algumas problemas de máximos e mínimos relacionadas com a geometria. Principalmente no que diz respeito a maximizar a área e minimizar o perímetro de triângulos e de polígonos convexos.

### 2.1 Maximizando a área, minimizando o perímetro de triângulos

Esse nosso estudo consiste na seguinte problemática (por enquanto se referindo a triângulos): Tendo que cobrir uma área fixa qual deve ser o menor comprimento, ou tendo um comprimento determinado qual é a maior área que se pode abranger?

Para darmos início ao nosso diálogo iremos propor dois problemas:

PROBLEMA 1: Entre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

PROBLEMA 2: Entre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

Resolução do Problema 1: Afirmamos que é o triângulo equilátero.

**Observação 3** *Nesta demonstração estamos assumindo a existência de um triângulo de menor perímetro e de área constante.*

De fato, suponhamos por absurdo que os lados  $AB$  e  $BC$  do triângulo  $ABC$  sejam de comprimento diferentes. Seja  $r$  a reta que passa pelo ponto  $B$  e é paralela ao lado  $\overline{AC}$  e seja  $D$  a intersecção da reta  $r$  com a reta  $s$ , perpendicular à  $r$  passando pelo ponto médio de  $\overline{AC}$ . (ver Figura 2.1).

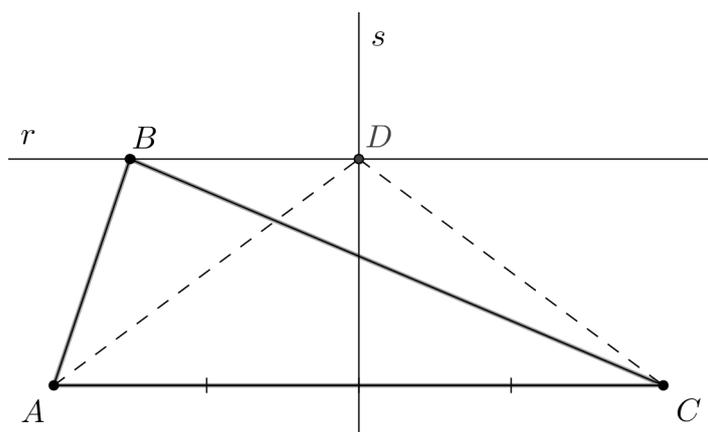


Figura 2.1: Fixando a área e minimizando o perímetro.

Pela Proposição 3, o triângulo  $ADC$  tem perímetro menor que o do triângulo  $ABC$ , mas ambos têm a mesma área, pois têm a mesma base e mesma altura, o que contradiz a hipótese. ■

**Observação 4** *É claro na demonstração do Problema 1 que o triângulo procurado tem que ser isósceles.*

Baseado na Observação 4 podemos ver que o problema tem solução. (ver Figura 2.2).

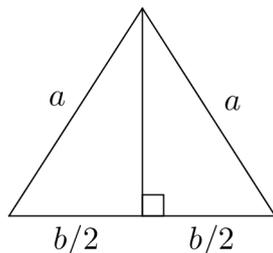


Figura 2.2: Triângulo isósceles solução do Problema 1.

De fato, então a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

e logo o perímetro é dado em função de  $b$  ( $0 < b < \infty$ ) pela função

$$p(b) = b + 2\sqrt{\frac{4A^2}{b^2} + \frac{b^2}{4}}$$

$p$  é função contínua e:

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} p(b) = \infty$$

e

$$\lim_{b \rightarrow \infty} p(b) = \infty$$

então  $p(b)$  tem que ter um mínimo.

Resolução do Problema 2: Novamente afirmamos que um triângulo com tal característica é equilátero.

**Observação 5** *Nesta demonstração estamos assumindo a existência de um triân-*

*gulo de perímetro constante e maior área.*

De fato, Usando as construções do problema 1, (ver Figura 2.3) temos  $AB$  e  $BC$  de comprimentos diferentes. Considere um ponto  $D' \in s$  acima de  $D$  que satisfaz:

$$AD' + D'C = AB + BC.$$

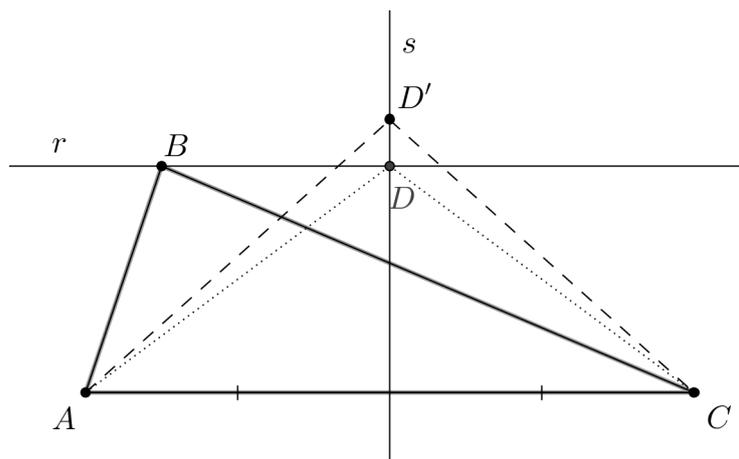


Figura 2.3: Fixando o perímetro e maximizando a área.

É claro que  $D'$  não pode ser interior ao triângulo  $ACD$ , pois pelo Corolário 2.1 teríamos  $AD' + D'C < AD + DC$  o que seria contraditório

Dessa forma a área do triângulo  $AD'C$  é maior que a área do triângulo  $ADC$ , e este último tem a mesma área do triângulo  $ABC$ , por terem mesma base e mesma altura, porém os triângulos  $AD'C$  e  $ABC$  têm o mesmo perímetro.

Vamos provar que a solução do problema 2 é um triângulo equilátero utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, que foi um tema amplamente abordado no programa PROFMAT.

A desigualdade entre as médias aritméticas e geométricas afirma que para um conjunto de valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , positivos sempre teremos:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Ou seja, a média aritmética sempre é maior do que ou igual a média geométrica e a igualdade só se verifica se  $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ . A demonstração pode ser obtida em [5].

Assim, considere um triângulo cujos lados medem:  $a$ ,  $b$  e  $c$ , de perímetro constante e igual a:

$$2p = a + b + c.$$

Pela a fórmula de Heron, podemos escrever a área de um triângulo em relação a seus lados:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

onde  $p$  é o semiperímetro.

A área será máxima se o produto  $(p-a)(p-b)(p-c)$  for máximo.

Vamos utilizar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica considerando os valores  $x_1 = (p-a)$ ,  $x_2 = (p-b)$  e  $x_3 = (p-c)$ . Conforme enunciado, temos:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

$$\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\frac{3p - (a + b + c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$\frac{3p - 2p}{3} = \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$\frac{p^3}{27} \geq (p - a)(p - b)(p - c)$$

Como  $p$  é constante,  $\frac{p^3}{27}$  também é, logo o produto  $(p - a)(p - b)(p - c)$  será menor do que ou igual a  $\frac{p^3}{27}$  e a igualdade, que é o valor máximo, só ocorrerá se, e somente se  $x_1 = x_2 = x_3$ , ou seja,  $(p - a) = (p - b) = (p - c)$  de onde obtemos que  $a = b = c$  concluindo a demonstração.

## 2.2 Maximizando a área, minimizando o perímetro de polígonos

Nesta seção estenderemos os problemas 1 e 2 para polígonos de  $n$  lados.

PROBLEMA 3. Entre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesma área, qual deles tem o menor perímetro?

PROBLEMA 4. Entre todos os polígonos de  $n$  lados e de mesmo perímetro, qual deles tem a maior área?

A resposta a ambos os problemas é a mesma: é o polígono regular com  $n$  lados.

Resolução do Problema 3.

Seja  $\varphi$  o polígono de  $n$  lados que satisfaz o problema 3, suponhamos que  $\varphi$  tem dois lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  de comprimentos diferentes. Seja  $r$  a reta que passa por  $B$  e é paralela ao segmento  $\overline{AC}$ , (ver Figura 2.4).

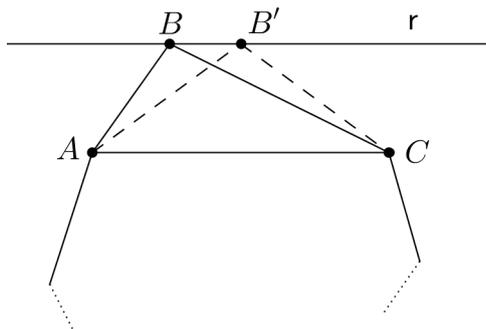


Figura 2.4: Polígono regular.

Pela proposição 3 existe  $B'$  sobre  $r$  tal que:

$$AB' + B'C < AB + BC.$$

Logo, podemos obter um polígono de  $n$  lados com menor perímetro e de igual área substituindo os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  por  $\overline{AB'}$  e  $\overline{B'C}$ . Procedendo de igual maneira, considerando dois a dois os lados consecutivos do polígono, concluímos que ele deve ser equilátero.

Devemos provar que o polígono deve ser equiângulo. Considere três lados consecutivos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$ , que já sabemos serem congruentes. Suponhamos que os ângulos  $\hat{A}BC = \alpha > \beta = \hat{B}CD$ . (ver Figura 2.5).

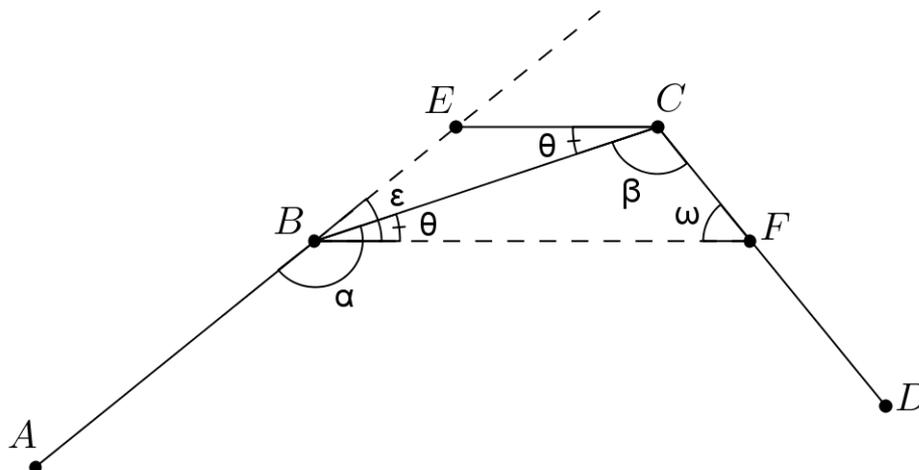


Figura 2.5: Polígono equiângulo - Prova.

(O protocolo de construção dessa figura no Geogebra encontra-se no Apêndice)

Agora, escolhamos o ponto  $F$  sobre o lado  $\overline{CD}$  de modo que o ângulo  $C\hat{B}F = \theta$  seja tal que  $2\theta < \alpha - \beta$ , ou seja,  $\alpha - \beta - 2\theta > 0$ . Sobre o prolongamento de  $\overline{AB}$  tome o ponto  $E$  de modo que  $\overline{EC}$  seja paralelo a  $\overline{BF}$ . Seja  $\varepsilon$  a medida do ângulo  $E\hat{B}F$  e  $\omega$  a medida do ângulo  $B\hat{F}C$ . Temos os seguintes ângulos rasos:

$$\alpha + \varepsilon - \theta = 180^\circ$$

e

$$\beta + \omega + \theta = 180^\circ.$$

Igualando as duas expressões, obtemos:

$$\beta + \omega + \theta = \alpha + \varepsilon - \theta$$

daí, obtemos:

$$\omega - \varepsilon = \alpha - \beta - 2\theta > 0.$$

Então, concluímos:

$$\omega > \varepsilon$$

Consequentemente obtemos (provaremos em seguida):

$$BE + EF < BC + CF. \quad (2.1)$$

Daí, substituindo a parte  $ABCD$  do polígono considerado por  $AEFD$ , obtemos um outro polígono de mesma área e perímetro menor que o anterior, o que é absurdo, pois já foi provado que o polígono equilátero é o de menor perímetro. ■

Demonstração da desigualdade 2.1:

Considere o quadrilátero  $BECF$  da Figura 2.5, de lados  $\overline{BF}$  e  $\overline{EC}$  paralelos e ângulos da base  $\omega > \varepsilon$ . Traçamos a reta  $s$  pelo ponto médio de  $\overline{BF}$  que intersecta a reta  $r = \overleftrightarrow{EC}$  no ponto  $X$ , pela Proposição 3 de todos os pontos de  $r$ ,  $X$  é o que minimiza a soma das distâncias aos pontos  $B$  e  $F$ . Levando em consideração a posição do ponto  $E$  destacamos duas situações:

Situação 1:  $E$  está entre  $X$  e  $C$ , (ver Figura 2.6).

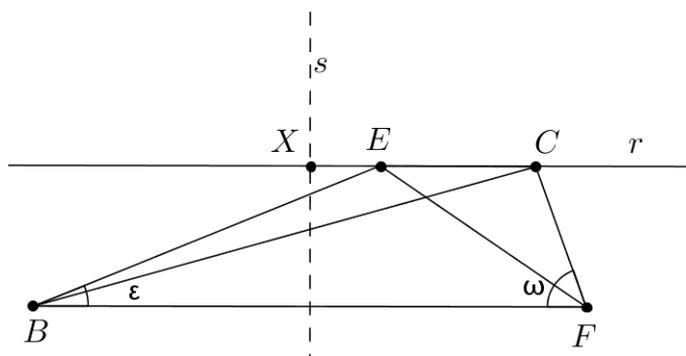


Figura 2.6: Quadrilátero  $BECF$  com  $E$  entre  $X$  e  $C$ .

Nesse caso a desigualdade 2.1 fica provada pelo Lema 3.1

Situação 2:  $X$  está entre  $E$  e  $C$ , (ver Figura 2.7).

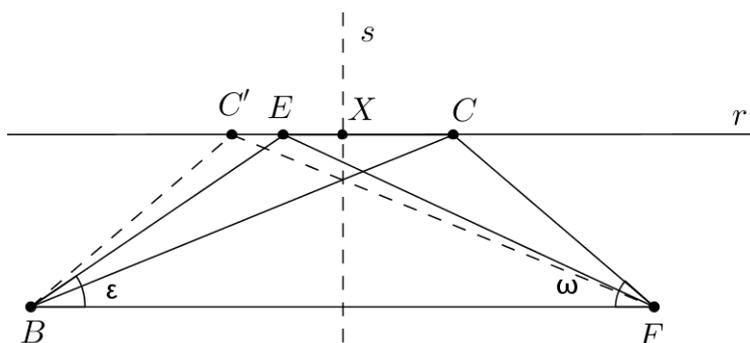


Figura 2.7: Quadrilátero  $BECF$  com  $X$  entre  $E$  e  $C$ .

Neste caso se designarmos por  $C'$  o simétrico de  $C$  em relação à reta  $s$ , a desigualdade 2.1 é equivalente a:

$$BE + EF < BC' + C'F$$

a qual é precisamente o caso apresentado na Situação 1, pois  $E$  está entre  $X$  e  $C'$ .

Resolução do Problema 4: Vamos utilizar argumentos utilizados e já provados

no Problema 3.

Seja  $\varphi$  o polígono de  $n$  lados de maior área entre todos os polígonos de  $n$  lados que têm o mesmo perímetro  $\mathcal{P}$ . Digamos que a área desse polígono seja  $\mathcal{S}$ . Se  $\varphi$  não for regular, então, pelo que ficou provado na resolução do Problema 3, existe um outro polígono  $\bar{\varphi}$  regular de mesma área  $\mathcal{S}$  e perímetro  $\bar{\mathcal{P}} < \mathcal{P}$ . A partir de  $\bar{\varphi}$  podemos construir um polígono  $\varphi'$  de  $n$  lados de perímetro  $\mathcal{P}$  e área  $\mathcal{S}' > \mathcal{S}$ , o que é absurdo, pois  $\varphi$  já tem área máxima.

Tome dois lados consecutivos de  $\bar{\varphi}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , (ver Figura 2.8).

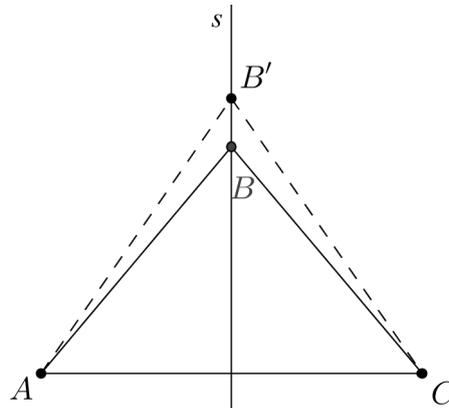


Figura 2.8: Polígono  $\varphi'$  obtido a partir de  $\bar{\varphi}$ .

Agora escolha um ponto  $B'$  sobre a reta  $s$  perpendicular a  $\overline{AC}$  de modo que

$$(AB' + B'C) - (AB + BC) = \mathcal{P} - \bar{\mathcal{P}}.$$

O polígono  $\varphi'$  é obtido de  $\bar{\varphi}$  substituindo-se os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  por  $\overline{AB'}$  e  $\overline{B'C}$ . ■

## 2.3 A desigualdade isoperimétrica para polígonos

PROBLEMA 5: Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro  $\mathcal{P}$ , aquele que tem maior área é o que possui um maior número de lados.

Para a demonstração desse problema usaremos um pouco de trigonometria e limite.

Resolução do Problema 5:

Um polígono regular é a união de  $n$  triângulos isósceles congruentes de base e altura medindo respectivamente  $\ell_n$  e  $a_n$ , onde  $\ell_n$  é a medida de cada lado do polígono e  $a_n$  o seu apótema (distância do centro a qualquer um dos lados). (Ver Figura 2.9).

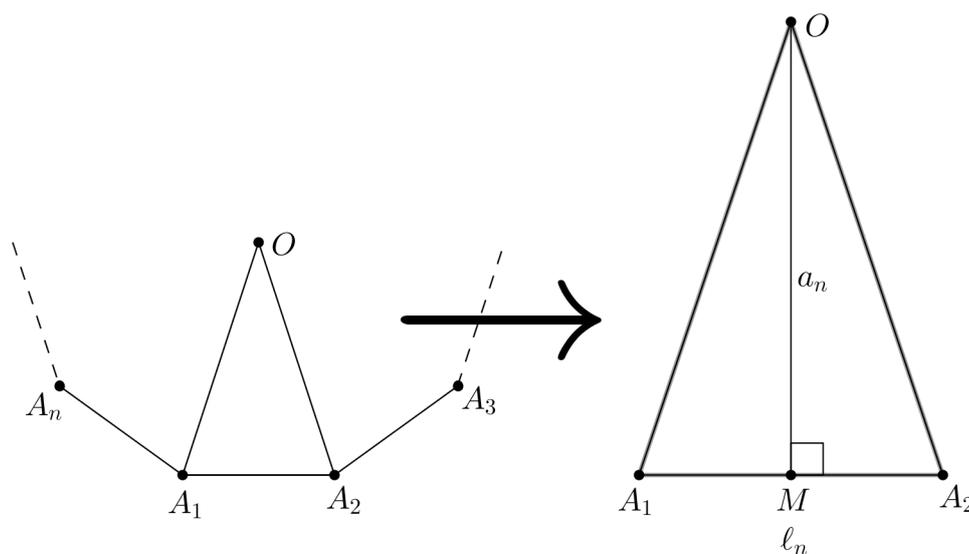


Figura 2.9: Polígono regular formado por  $n$  triângulos isósceles

O perímetro do polígono será  $n$  vezes a medida do seu lado e sua área será  $n$  vezes a área de um dos triângulos isósceles que o compõe. Vamos expressar a área do polígono regular por  $\mathcal{S}(n)$  e seu perímetro por  $\mathcal{P}$ , Temos as seguintes equações:

$$\mathcal{S}(n) = n \frac{\ell_n a_n}{2} \quad (2.2)$$

e

$$\mathcal{P} = n \ell_n \quad (2.3)$$

O ângulo  $A_1 \hat{O} A_2$  é o ângulo de uma volta completa dividido por  $n$ , ou seja,  $\frac{2\pi}{n}$  radianos, queremos enfatizar na Figura 2.9 o triângulo retângulo  $A_1 M O$  reto em  $M$ , como o triângulo  $A_1 O A_2$  é isósceles, a altura  $\overline{OM}$  é também a bissetriz, logo o ângulo  $A_1 \hat{O} M$  é a metade do ângulo  $A_1 \hat{O} A_2$ , ou seja,  $A_1 \hat{O} M = \frac{\pi}{n}$  radianos. E também  $A_1 M$  é a metade de  $A_1 A_2$ , ou seja,  $A_1 M = \frac{\ell_n}{2}$ . Calculando a tangente de  $A_1 \hat{O} M$ , obtemos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\ell_n}{2a_n} = \frac{A_1 M}{OM} \quad (2.4)$$

Dividindo (2.2) por (2.3), obtemos:

$$\frac{\mathcal{S}(n)}{\mathcal{P}} = \frac{n \frac{\ell_n a_n}{2}}{n \ell_n}$$

que podemos escrever como:

$$a_n = \frac{2\mathcal{S}(n)}{\mathcal{P}} \quad (2.5)$$

Agora, dividindo (2.3) por (2.4), obtemos:

$$\frac{\mathcal{P}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n \ell_n}{\frac{\ell_n}{2a_n}}$$

dessa, obtemos:

$$\frac{\mathcal{P}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 2na_n$$

e finalmente:

$$a_n = \frac{\mathcal{P}}{2ntg(\frac{\pi}{n})} \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6), obtemos:

$$\frac{2\mathcal{S}(n)}{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}}{2ntg(\frac{\pi}{n})}$$

que é melhor representada por:

$$\mathcal{S}(n) = \frac{\mathcal{P}^2}{4tg(\frac{\pi}{n})} \cdot \frac{1}{n} \quad (2.7)$$

Agora, em (2.7) fazemos a substituição  $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n}$ , obtemos:

$$\mathcal{S}(n) = \frac{\mathcal{P}^2}{4tg(\frac{\pi}{n})} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n}$$

Arrumando os elementos, obtemos:

$$\mathcal{S}(n) = \frac{\mathcal{P}^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{tg(\frac{\pi}{n})} \quad (2.8)$$

Como  $\mathcal{P}$  é constante,  $\mathcal{S}(n)$  varia em função de  $n$ . Como  $n > 2$ , então  $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ , basta estudar a função:

$$f(x) = \frac{x}{tg(x)} \quad (2.9)$$

no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , onde  $x = \frac{\pi}{n}$ .

Sabemos que  $tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ , assim:

$$f(x) = \frac{x}{\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}}$$

que podemos escrever:

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \cos(x) \quad (2.10)$$

Quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$ , para  $n > 2$ , temos os limites (provaremos em seguida):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$$

Como  $\operatorname{sen}(x) > 0$  em  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  então  $f$  é contínua no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  e sua derivada  $f'(x) < 0$ , ela é estritamente decrescente, dessa forma  $\mathcal{S}(n)$  é estritamente crescente quando  $n$  cresce, assim se  $n < m$  as áreas dos polígonos regulares de  $n$  e  $m$  lados será tal que:

$$\mathcal{S}(n) < \mathcal{S}(m)$$

■

A demonstração acima tem algo mais a nos dizer. À medida que  $n$  cresce a área  $\mathcal{S}(n)$  também cresce, sendo limitada superiormente por  $\frac{\mathcal{P}^2}{4\pi}$ , pois  $f(x)$  tende a 1, quando  $n$  cresce, mas não atinge esse valor, então em (2.8), temos:

$$\mathcal{S}(n) = \frac{\mathcal{P}^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})} < \frac{\mathcal{P}^2}{4\pi} \cdot 1 \quad (2.11)$$

Designando por  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{P}$  respectivamente a área e o perímetro de um polígono (regular ou não), segue-se de (2.11):

$$4\pi\mathcal{S} < \mathcal{P}^2,$$

que é chamada de desigualdade isoperimétrica para polígonos.

A seguinte forma mais geral da desigualdade isoperimétrica pode ser vista em [6].

A área  $\mathcal{S}$  englobada por qualquer curva simples plana  $\mathcal{C}$ , de comprimento  $\mathcal{P}$ , satisfaz a desigualdade

$$4\pi\mathcal{S} \leq \mathcal{P}^2,$$

e a igualdade ocorre, se e somente se,  $\mathcal{C}$  for um círculo.

Na demonstração anterior usamos o fato que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen}(x)} = 1$$

Uma demonstração geométrica desse limite básico, pode ser obtida no livro de Serge Lang [4].

## Capítulo 3

# PROBLEMAS CLÁSSICOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Nesse capítulo mostraremos alguns problemas de extremos clássicos. O termo clássico é devido a sua origem histórica. No estudo desses problemas, na maioria das vezes, será feita uma demonstração construtiva da solução. Entretanto, em alguns casos, começaremos com a hipótese de que a solução exista e em seguida, analisaremos esta hipótese e extrairemos conclusões que finalmente nos permitirão descrever e construir a solução.

### 3.1 Problema de Regiomontanus

Problema: Suponha uma estátua de altura  $h$  sobre um pedestal de altura  $p$ . Um homem de altura  $m$  ( $m < p$ ) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo  $\alpha$ , que varia de acordo com a distância  $d$  entre o homem e a base do pedestal. Determinar  $d$  para que o ângulo de visão  $\alpha$  seja o maior possível (um maior ângulo de visão determinaria uma imagem maior na retina ou, de outra forma, uma visão mais completa do objeto). (Ver Figura 3.1)

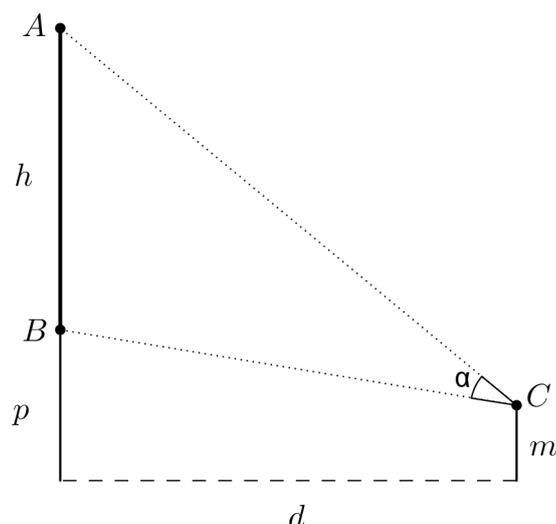


Figura 3.1: Representação geométrica do problema de Regiomontanus

### Solução do problema de Regiomontanus

Esse problema poderia ser resolvido com as ferramentas do Cálculo, mas preferimos uma solução simples e engenhosa, utilizando argumentos da geometria euclidiana, por estar mais relacionado com a essência desse trabalho, que apresentamos a seguir.

Primeiramente, iremos deixar claro que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  na figura 3.1 representam, respectivamente, o topo da estátua, o pé da estátua e os olhos do observador. É claro que o problema tem solução, pois se o ponto  $C$  se deslocar para a direita da estátua, podemos notar que o ângulo de visão vai se tornando cada vez menor. Por outro lado, se o ponto  $C$  for se aproximando da estátua, poderemos notar que o ângulo de visão aumenta, e torna a diminuir tendendo a zero quando ficar muito próximo da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Assim, deve existir uma posição para o ponto  $C$  tal que o ângulo  $\alpha = \widehat{ACB}$  de visão é máximo, e portanto o problema tem solução.

Para construirmos então a solução traçamos a reta  $r$  paralela à linha do chão

que passa pelo ponto  $C$ . Agora, traçamos a circunferência que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  e tangencia à reta  $r$ . Esta circunferência tem centro na mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  e raio igual à distância do ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  até a reta  $r$ . Essa circunferência tangencia a reta  $r$  em um ponto  $C'$ , o qual queremos mostrar que é o ponto que nos fornece a distância exata para o maior ângulo de visão. (ver Figura 3.2)

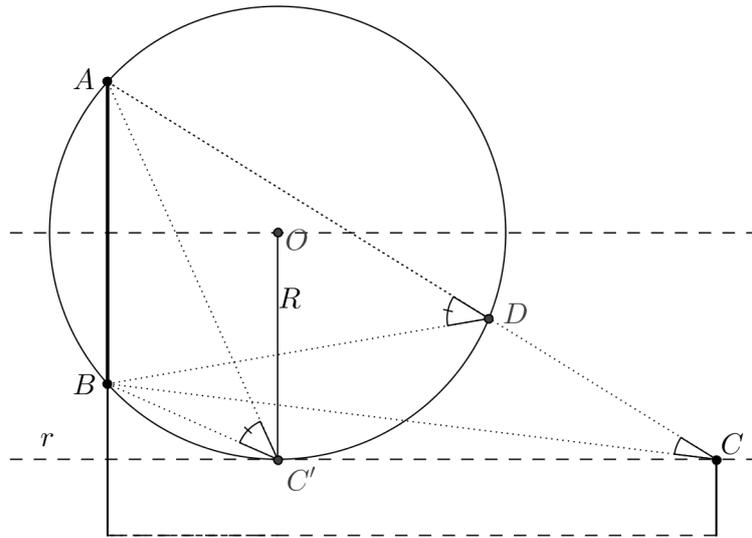


Figura 3.2: Solução geométrica do problema de Regiomontanus

Consideremos que o ponto  $C$  percorre livremente a reta  $r$ . Para uma determinada posição de  $C$  o ângulo  $\alpha$  será o maior possível. Queremos mostrar que o  $\hat{A}C'B > \hat{A}CB$  para todo  $C'$ ,  $C \neq C'$ . Seja  $D$  o ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $C$  com a circunferência. Note que  $\hat{A}C'B = \hat{A}DB$ , pois são ângulos inscritos em uma mesma circunferência e determinados pelo mesmo arco. Agora baseado no fato que a medida de qualquer ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, o que nos permite escrever que ( $\hat{A}DB$  é ângulo externo relativo ao vértice  $D$  no  $\triangle DBC$ ):

$$\hat{A}C'B = \hat{A}DB = \hat{A}CB + \hat{D}BC > \hat{A}CB.$$

Portanto o ponto de tangência  $C'$  é o que nos fornece o ângulo máximo de visão.

Conhecido o ponto  $C'$  que torna o ângulo de visão máximo, pretendemos obter a distância  $d$  do homem ao pedestal em função dos parâmetros:  $h$  (altura da estátua),  $p$  (altura do pedestal) e  $m$  (altura do homem). (ver Figura 3.3)

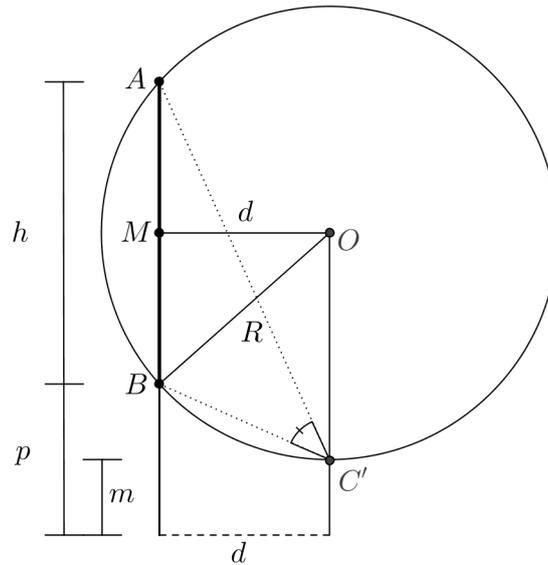


Figura 3.3: Cálculo de  $d$  no problema de Regiomontanus

O triângulo  $BMO$  é retângulo em  $M$  que é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Nele temos os catetos  $BM = h/2$  e  $MO = d$  e a hipotenusa  $BO = R = h/2 + p - m$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $BMO$  obtemos:

$$(MO)^2 + (BM)^2 = (BO)^2$$

substituindo os parâmetros fornecidos para cada lado do triângulo obtemos

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{h}{2}\right) + (p - m)\right]^2$$

desenvolvendo a potência no segundo membro, obtemos:

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2\frac{h}{2}(p - m) + (p - m)^2$$

e agora cancelando os termos iguais e pondo em evidência  $(p - m)$ , obtemos

$$d^2 = (p - m)(h + p - m)$$

e finalmente

$$d = \sqrt{(p - m)(h + p - m)}.$$

■

### Variação do problema de Regiomontanus

Este problema foi apresentado na segunda avaliação nacional da disciplina MA11 - Números, Conjuntos e Funções Elementares - turma de 2011 PROFMAT.

Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol ver Figura 3.4 . Os postes da meta distam  $a$  e  $b$  (com  $a < b$ ) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância  $x$  ao fundo do campo é igual a  $\sqrt{ab}$ .

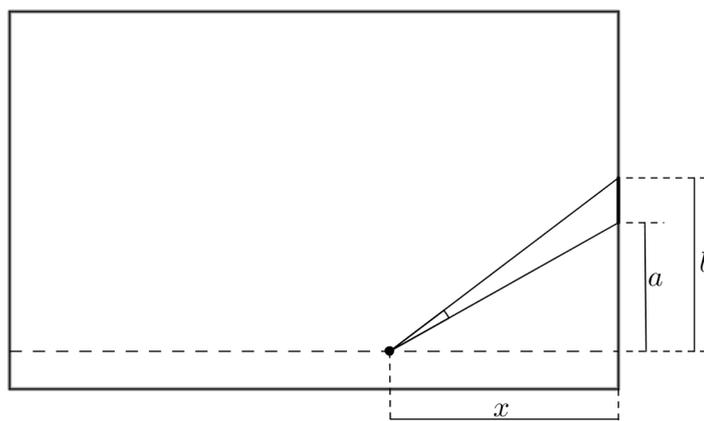


Figura 3.4: Esquema para o problema do campo

A solução para esse problema levou em consideração a seguinte hipótese:

Levando em conta que um ângulo é máximo num certo intervalo quando sua tangente é máxima, use a fórmula:

$$tg(x - y) = \frac{tg(x) - tg(y)}{1 + tg(x) \cdot tg(y)}$$

para resolver o problema acima.

Solução:

Em cada instante, o jogador vê a meta sob o ângulo  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ , onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os ângulos entre sua trajetória e as retas que o ligam aos postes da meta.

Temos:

$$tg(\alpha) = \frac{tg(\alpha_2) - tg(\alpha_1)}{1 + tg(\alpha_2) \cdot tg(\alpha_1)}$$

Se  $x$  é a distância do jogador ao fundo do campo, temos  $tg(\alpha_1) = \frac{a}{x}$  e  $tg(\alpha_2) = \frac{b}{x}$ ,

logo

$$tg(\alpha) = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{\frac{b-a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}}$$

Agora multiplicando numerador e denominador da expressão acima por  $x$ , obtemos

$$tg(\alpha) = \frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}.$$

Como o numerador  $b - a$  é constante,  $tg(x)$  é máxima quando o denominador for mínimo. Ou seja, é preciso achar  $x$  que minimiza a expressão  $x + \frac{ab}{x}$ .

Como a média aritmética é sempre maior do que ou igual à média geométrica, então

$$\frac{1}{2} \left( x + \frac{ab}{x} \right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} = \sqrt{ab},$$

ou seja, o denominador é sempre maior do que ou igual a  $2\sqrt{ab}$ . A igualdade vale se e somente se os dois termos da média são iguais, isto é, quando

$$x = \frac{ab}{x},$$

$$x^2 = ab,$$

$$x = \sqrt{ab}.$$

Portanto

$$x + \frac{ab}{x}$$

atinge seu menor valor quando  $x = \sqrt{ab}$ . ■

É claro que esse problema poderia ser resolvido de maneira bem mais simples, aproveitando os resultados já demonstrados do problema original de Regiomontanus. No problema original temos uma estátua de altura  $h$ , sobre um pedestal de altura  $p$  e um homem de altura  $m$ .

Nessa variação apresentada podemos apresentar a associação  $m = 0$ , pois a linha apresentada não é a linha de visão do homem e sim a linha que o aproxima da meta, também percebemos que  $h + p = b$ ,  $p = a$  e  $d = x$ .

No problema original a distância  $d$  que fornece maior ângulo de visão é obtido pela expressão

$$d = \sqrt{(p - m)(h + p - m)}$$

fazendo as devidas substituições obtemos

$$x = \sqrt{(a - 0)(b - 0)}$$

e finalmente

$$x = \sqrt{ab}$$

que é precisamente o resultado obtido pela utilização da tangente da diferença de dois ângulos e da desigualdade entre as médias aritméticas e geométricas.

## 3.2 Problema de Fagnano

Problema: Dado um triângulo acutângulo inscrever nele um outro triângulo com o menor perímetro possível.

Solução de Fejér

A solução seguinte foi dada em 1900 pelo matemático húngaro L. Fejér. Seja  $ABC$  o triângulo dado. Nós queremos encontrar pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, tal que o perímetro do triângulo  $MNP$  é mínimo. Primeiro, consideramos uma versão mais simples do problema. Considere um ponto arbitrário  $P$  sobre  $\overline{AB}$ . Devemos agora encontrar pontos  $M$  e  $N$  em  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ , respectivamente, tal que  $\Delta MNP$  tem perímetro mínimo. (Esse número mínimo é claro vai depender da escolha de  $P$ .) seja  $P'$  o simétrico do ponto  $P$  em relação ao lado  $\overline{BC}$  e  $P''$  o simétrico de  $P$  em relação ao lado  $\overline{AC}$  (ver Figura 3.5).

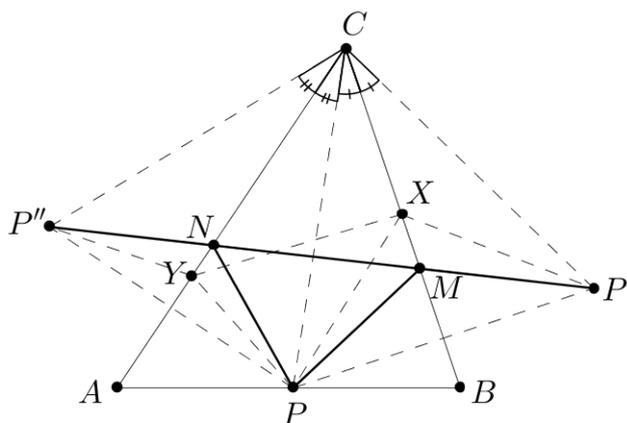


Figura 3.5: Problema de Fagnano - Solução de Féjer - A

Então  $CP' = CP = CP''$ ,  $P'\hat{C}B = P\hat{C}B$  e  $P''\hat{C}A = P\hat{C}A$ . Definindo  $\gamma = B\hat{C}A$ , temos, então,  $P'\hat{C}P'' = 2\gamma$ . Além disso,  $2\gamma < 180^\circ$ , pois, por suposição  $\gamma < 90^\circ$ . Consequentemente, o segmento de reta  $P'P''$  intercepta os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente, e o perímetro do triângulo  $MNP$  é igual a  $P'P''$ . De forma semelhante, se  $X$  é qualquer ponto do lado  $\overline{BC}$  e  $Y$  é qualquer ponto do lado  $\overline{AC}$ , o perímetro do triângulo  $XPY$  é igual ao comprimento da linha quebrada  $P'XYP''$ , que é maior ou igual a  $P'P''$ . Assim, o perímetro do triângulo  $PXY$  é maior do que ou igual ao perímetro do triângulo  $PMN$ , e a igualdade ocorre precisamente quando  $X = M$  e  $Y = N$ . Assim, temos de encontrar um ponto  $P$  sobre  $\overline{AB}$  tal que o segmento de reta  $P'P''$  tem comprimento mínimo. Observe que este segmento de reta é a base de um triângulo isósceles  $P''P'C$  com ângulo constante  $2\gamma$  em  $C$  e lados  $CP' = CP'' = CP$ . Assim, temos que escolher  $P$  sobre o lado  $\overline{AB}$  tal que  $CP' = CP$  é mínima. Obviamente, para que isso aconteça  $P$  deve ser o pé da altura do triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $\overline{AB}$ . Observe agora que, se  $P$  é o pé da altura do triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $\overline{AB}$ , então  $M$  e  $N$  são os pés das alturas do triângulo  $ABC$  relativos aos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente.

Considerando  $P$  como o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ , existe um (único)

triângulo de perímetro mínimo inscrito no triângulo  $ABC$ , dentre todos aqueles que têm  $P$  como vértice. Considere agora as soluções análogas, sendo  $M$  o pé da altura relativa ao lado  $\overline{BC}$  e aquela com  $N$  sendo o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ . Uma das três tem que ter o menor perímetro possível. O que se quer argumentar agora é que as três soluções são a mesma solução. Suponhamos que uma delas é a mínima (por exemplo, aquela obtida com  $P$  sendo o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ ). Se, nesta solução, o ponto  $M$  obtido sobre  $\overline{BC}$  não fosse o pé da altura relativa a este lado, então a solução obtida com  $M$  no pé da altura relativa ao lado  $\overline{BC}$  teria perímetro menor ainda, o que é uma contradição. Logo, os pontos  $P$ ,  $M$  e  $N$  devem ser, respectivamente, os pés das alturas relativas aos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ . Portanto, de todos os triângulos inscritos no triângulo  $ABC$ , o com vértices nos pés das alturas do triângulo  $ABC$  tem perímetro mínimo. ■

### 3.3 Problema de Fermat

Problema: Três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dados em um plano, e um quarto ponto  $P$  no plano é procurado de modo que a soma  $PA + PB + PC$  seja mínima.

Solução do problema de Fermat

Este problema foi proposto por Fermat em seu *Métodos de determinação de máximos e mínimos e tangentes a curvas*. Evangelista Torricelli lendo este trabalho, resolveu este problema em algum período antes de 1640, localizando o ponto do problema (Chamado ponto de Fermat, Torricelli ou Steiner). Isto é conhecido pelo fato que seu aluno Vincenzo Viviane (1622 - 1703) publicou a solução de seu mestre no livro *De maximis et minimis* (1659).

Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares e se  $B$  estiver entre  $A$  e  $C$ , então  $B$  é o ponto solução do problema.

Quando  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares, então formarão o triângulo  $ABC$ . Note que a solução não está fora do triângulo  $ABC$ , pois ao considerarmos um ponto  $P$  fora do triângulo  $ABC$ , sempre existirá um ponto  $P'$  no triângulo  $ABC$  tal que  $P'A + P'B + P'C < PA + PB + PC$ , pois  $P'B < PB$  e  $P'A + P'B < PA + PB$  (Ver Figura 3.6)

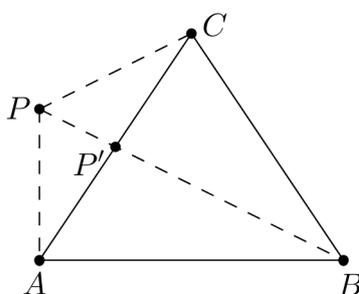


Figura 3.6: Problema de Fermat -  $P$  exterior ao triângulo  $ABC$  não é solução

Assim, basta analisar o problema para o ponto no triângulo  $ABC$  ou no seu interior, que é um conjunto fechado e limitado.

**Observação 6** *Vejamos inicialmente, com um exemplo simples, que o ponto  $P$  pode estar no interior do triângulo  $ABC$ . Suponha que  $ABC$  seja um triângulo equilátero. Então  $P$  é o centro deste triângulo, pois traçando por  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente paralelas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , obtemos um triângulo equilátero  $MNQ$ . (Ver Figura 3.7)*

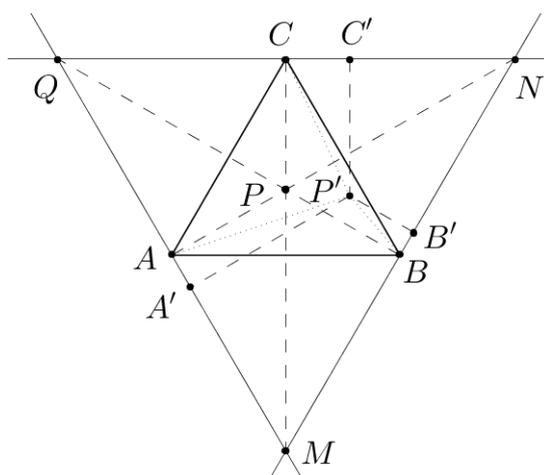


Figura 3.7: Problema de Fermat -  $P$  Pode ser interior ao triângulo  $ABC$

Se  $P'$  for qualquer outro ponto distinto de  $P$ , no triângulo  $ABC$  no seu interior, e denominando de  $C'$  o pé da perpendicular a  $\overline{QN}$  de  $P'$ , denominando de  $B'$  o pé da perpendicular a  $\overline{MN}$  de  $P'$  e denominando de  $A'$  o pé da perpendicular a  $\overline{MQ}$  de  $P'$ , teremos:

$$P'A + P'B + P'C > P'A' + P'B' + P'C'.$$

Pelo Teorema de Viviani, apresentado no capítulo 1, temos que:

$$P'A + P'B + P'C > P'A' + P'B' + P'C' = PA + PB + PC.$$

Suponhamos que o ponto  $P$  solução do problema esteja no interior do triângulo  $ABC$ . Consideremos que a soma  $PA + PB$  esteja fixada. O lugar geométrico de todos os pontos  $P$  para os quais a soma  $PA + PB$  é dada, é a elipse com focos  $A$  e  $B$  e a medida do eixo maior é igual a  $PA + PB$ . Agora precisamos encontrar o ponto  $P$  da elipse para o qual a distância de  $P$  até o ponto  $C$  é mínima. A menor distância de  $C$  à elipse vai ser alcançada quando a circunferência de centro  $C$  tangencia a elipse. Neste caso o centro da circunferência vai está sobre a reta normal à elipse, e pela Proposição 6 da seção 1.1 a reta  $\overleftrightarrow{CP}$  é a bissetriz interna do ângulo  $\hat{A}PB$  (ver

Figura 3.8)

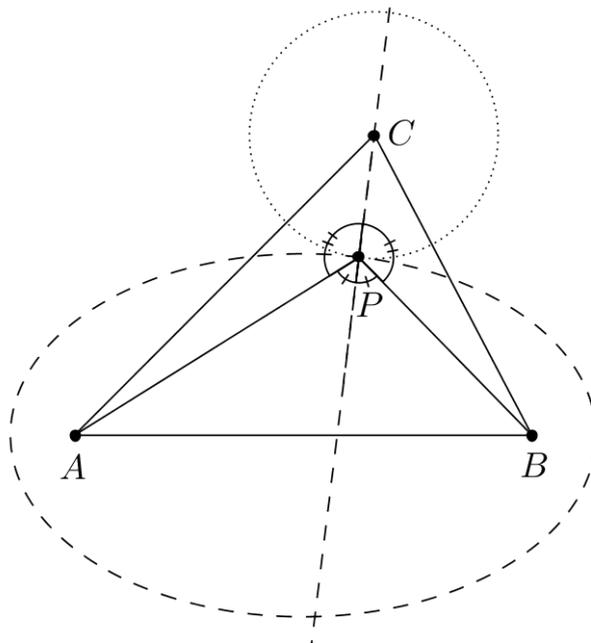


Figura 3.8: Cincunferência de centro  $C$  tangente à elipse de focos  $A$  e  $B$

Conseqüentemente, teremos que  $C\hat{P}A = C\hat{P}B$ . Agora, fixando a soma  $PB + PC$  chegaremos analogamente a conclusão que  $C\hat{P}A = B\hat{P}A$ . Portanto concluímos que  $C\hat{P}A = C\hat{P}B = B\hat{P}A = 120^\circ$ .

Este mesmo argumento nos mostra que o ponto  $P$  não pode estar sobre os lados pois, suponhamos que  $P$  estivesse no lado  $\overline{AB}$  do triângulo  $ABC$ . Então  $C\hat{P}A = C\hat{P}B$  se, e somente se, esta medida for igual a  $90^\circ$  e não a  $120^\circ$ . (ver Figura 3.9)

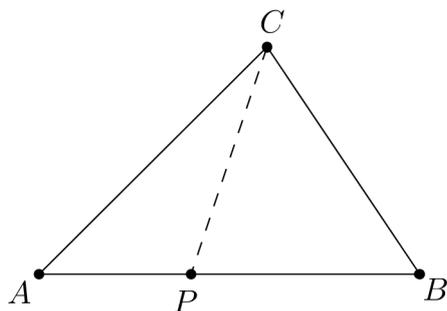


Figura 3.9: Problema de Fermat -  $P$  não pertence a um dos lados do triângulo  $ABC$

Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos sobre um círculo. Para todo ponto  $M$  em um mesmo arco determinado por  $A$  e  $B$ , o ângulo  $\alpha = \widehat{AMB}$  é constante. Este arco chama-se arco capaz do ângulo  $\alpha$  sobre o segmento  $\overline{AB}$ .

Mas será que o ponto  $P$  poderá estar sobre um dos vértices? Observe que para que  $C\hat{P}A = C\hat{P}B = B\hat{P}A = 120^\circ$  o ponto  $P$  deve estar na interseção dos arcos-capazes de  $120^\circ$  relativos aos segmentos (no mesmo semi-plano do triângulo  $ABC$ )  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente.

Suponhamos que  $\overline{AB}$  seja o maior lado do triângulo  $ABC$ , de acordo com a proposição 1  $A\hat{C}B$  é o maior ângulo do triângulo  $ABC$ . Considere o arco capaz de  $120^\circ$  relativo ao lado  $\overline{AB}$ . Teremos três possibilidades para o ponto  $C$  no semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que contém o arco capaz:

a)  $C$  está no exterior do arco-capaz.

Neste caso  $A\hat{C}B < 120^\circ$  e o arco-capaz relativo ao segmento  $\overline{AC}$  (ou  $\overline{BC}$ ) cruzará o arco-capaz relativo ao segmento  $\overline{AB}$  em um ponto no interior do triângulo. (ver Figura 3.10)

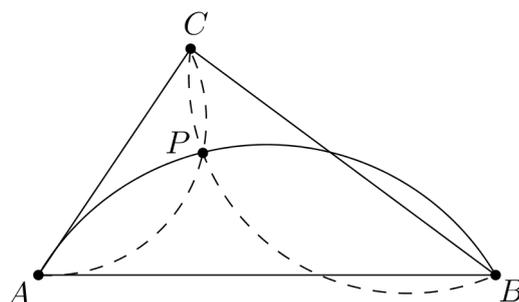


Figura 3.10: Problema de Fermat - Ponto  $C$  exterior ao arco-capaz  $AB$

- b)  $C$  está sobre o arco-capaz de  $120^\circ$  relativo ao lado  $\overline{AB}$ .

Neste caso  $\widehat{ACB} = 120^\circ$  e  $C$  é o ponto de intersecção dos três arcos-capazes relativos aos lados do triângulo. Observe que para qualquer ponto  $Q$  no interior ou sobre os lados do triângulo, exceto o ponto  $C$ ,  $\widehat{AQB} > 120^\circ$ . Como o problema tem solução, e como tal solução não está no exterior nem nos lados do triângulo, então a solução  $P$  deve estar em um dos vértices. Mas este vértice deve ser  $C$  pois  $AC + BC < AC + AB$  e  $AC + BC < BC + AB$ . (ver Figura 3.11)

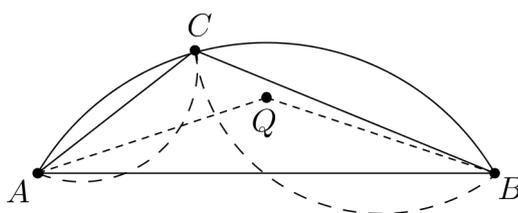


Figura 3.11: Problema de Fermat - Ponto  $C$  sobre o arco-capaz  $AB$

- c)  $C$  está entre o arco-capaz de  $120^\circ$  relativo ao lado  $\overline{AB}$  e a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Neste caso  $\widehat{ACB} > 120^\circ$ , pelo mesmo argumento usado no caso anterior, podemos concluir que  $P$  só pode ser o ponto  $C$ . (ver Figura 3.12)

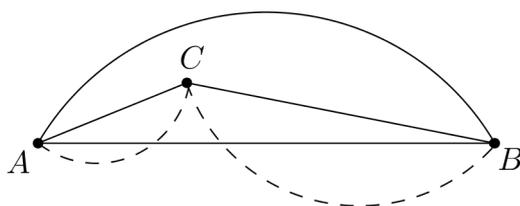


Figura 3.12: Problema de Fermat - Ponto  $C$  interior ao arco-capaz  $AB$

Como vimos acima, quando o maior ângulo do triângulo  $ABC$  for menor do que  $120^\circ$ , o ponto  $P$  é a intersecção dos arcos-capazes de  $120^\circ$  relativos aos lados do triângulo.

Acontece que, estes arcos-capazes estão respectivamente contidos nas circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados do triângulo  $ABC$ . (ver Figura 3.13)

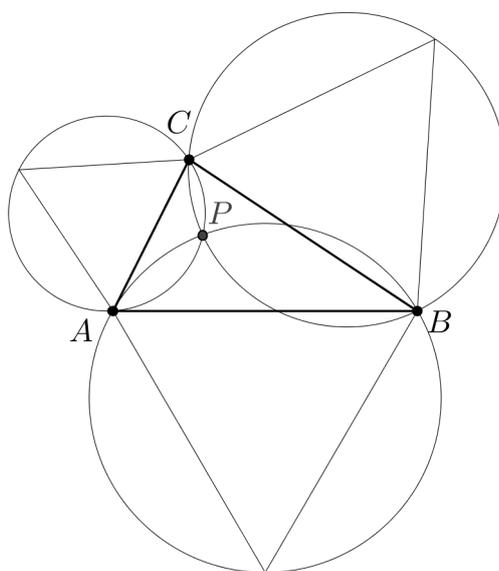


Figura 3.13: Problema de Fermat - Ponto de Torricelli

Em 1647 Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647) mostrou em seu livro *Exercitationes Geometricae* que os três ângulos  $\hat{A}PC$ ,  $\hat{B}PC$  e  $\hat{A}PB$  têm a mesma

medida de  $120^\circ$ .

Mais tarde, em 1750 o matemático inglês Thomas Simpson (1710 - 1761) publicou no seu livro *Doctrine and Application of Fluxions* que o ponto de Torricelli, isto é, o ponto de intersecção das três circunferências circunscritas respectivamente aos triângulos equiláteros construídos sobre cada lado do triângulo  $ABC$  pode ser obtido, ligando-se os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  aos vértices externos daqueles triângulos equiláteros (ver Figura 3.14).

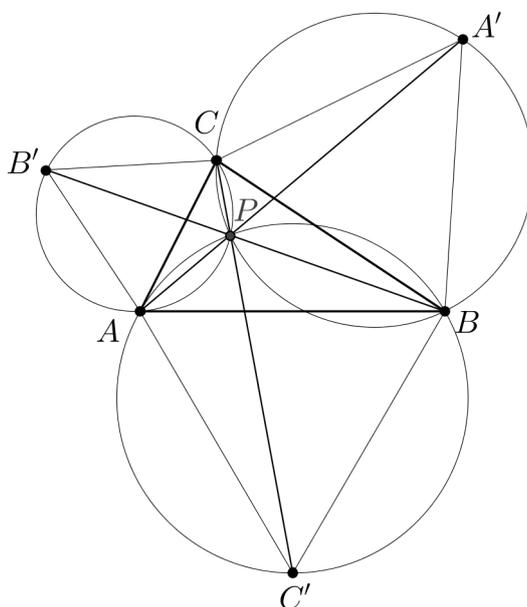


Figura 3.14: Problema de Fermat - solução de Simpson

Vejamos como provar este resultado. Liguemos os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  ao ponto  $P$  e prolonguemos cada segmento até cruzar as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros externos nos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  respectivamente (ver Figura 3.14).

Como os ângulos  $\hat{A}PC'$  e  $\hat{A'PC}$  são congruentes, pois são opostos pelo vértice,

e como  $\hat{A}PC' + \hat{B}PC' = \hat{A}PB = 120^\circ = \hat{B}PC = \hat{A}PB + \hat{A}PC$  segue-se que  $\hat{A}PB + \hat{A}PC' = 120^\circ$  e que  $\hat{B}PC' + \hat{A}PC = 120^\circ$ . Como  $\hat{A}PC + \hat{B}PC' + \hat{A}PB = 180^\circ$  e como  $\hat{B}PC' + \hat{A}PB + \hat{A}PC = 180^\circ$  segue-se que  $\hat{B}PC' = \hat{A}PB = 60^\circ$ . Conclui-se que  $\hat{C}AB = \hat{A}C'B = 60^\circ$ , e portanto o triângulo  $AC'B$  é equilátero, e que  $\hat{B}CA' = \hat{B}AC = 60^\circ$ , e portanto o triângulo  $BA'C$  é equilátero. Analogamente mostra-se que o triângulo  $AB'C$  é equilátero. Logo, o ponto  $P$  é intersecção dos segmentos que unem os vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , dos triângulos equiláteros construídos sobre as bases, respectivamente com os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo  $ABC$ .

Vamos provar agora que, se  $P$  é o ponto de Torricelli do triângulo  $ABC$  (com  $\hat{A} < 120^\circ$ ,  $\hat{B} < 120^\circ$  e  $\hat{C} < 120^\circ$ ) então  $PA + PB + PC$  é igual à altura máxima entre todos os triângulos equiláteros circunscritos ao triângulo  $ABC$ .

Considere os arcos exteriores das circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo  $ABC$ . Tais arcos são arcos-capazes de  $60^\circ$ . Seja agora a reta  $m$ , perpendicular ao segmento  $\overline{PC}$ , passando por  $C$ , e sejam  $M$  e  $N$  os pontos de cruzamento de  $m$  respectivamente com os arcos-capazes  $AC$  e  $BC$  (ver Figura 3.15).

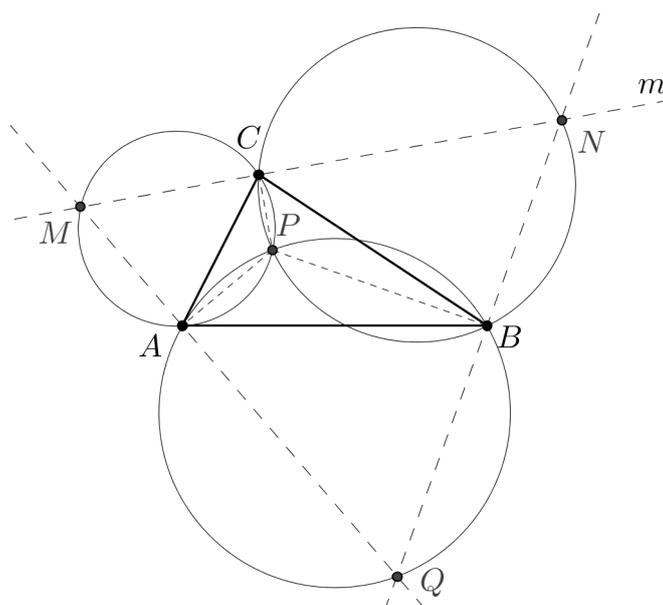


Figura 3.15: Problema de Fermat - Triângulo de altura máxima circunscrito  $\triangle ABC$

Então as retas  $\overleftrightarrow{MA}$  e  $\overleftrightarrow{NB}$  devem se cruzar em um ponto  $Q$  sobre o arco-capaz  $AB$  pois, como  $\widehat{CMA} = \widehat{CNB} = 60^\circ$ , então  $\widehat{MON} = 60^\circ$ . Além disso, a reta  $\overleftrightarrow{MA}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{PA}$  pois, o quadrilátero  $MCPA$  é inscritível e  $\widehat{MCP} = 90^\circ$ . Logo  $\widehat{MAP} = 90^\circ$ . Analogamente tem-se que a reta  $\overleftrightarrow{NB}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{PB}$ . Segue-se então que  $PA + PB + PC$  é igual à altura do triângulo  $MNQ$  (Teorema de Viviani). Este é o triângulo equilátero, circunscrito ao triângulo  $ABC$ , de maior altura possível.

Veja a prova dessa afirmativa:

Seja agora  $DEF$  outro triângulo equilátero qualquer circunscrito ao triângulo  $ABC$ . Então  $\overline{DE}$  e  $\overline{PC}$  não são perpendiculares, nem  $\overline{DF}$  e  $\overline{PA}$  e nem  $\overline{EF}$  e  $\overline{PB}$ . Sejam  $G$ ,  $H$  e  $I$  respectivamente os pés das perpendiculares por  $P$  aos lados  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$  e  $\overline{EF}$  do triângulo  $DEF$ .

Então,  $PG < PC$ ,  $PH < PA$  e  $PI < PB$ . Logo,  $PG + PH + PI < PC + PA + PB$ . Mas  $PG + PH + PI$  é igual à altura do triângulo equilátero  $DEF$ . Logo o

triângulo  $MNQ$  é o triângulo equilátero circunscrito ao triângulo  $ABC$  de maior altura possível. (ver Figura 3.16)

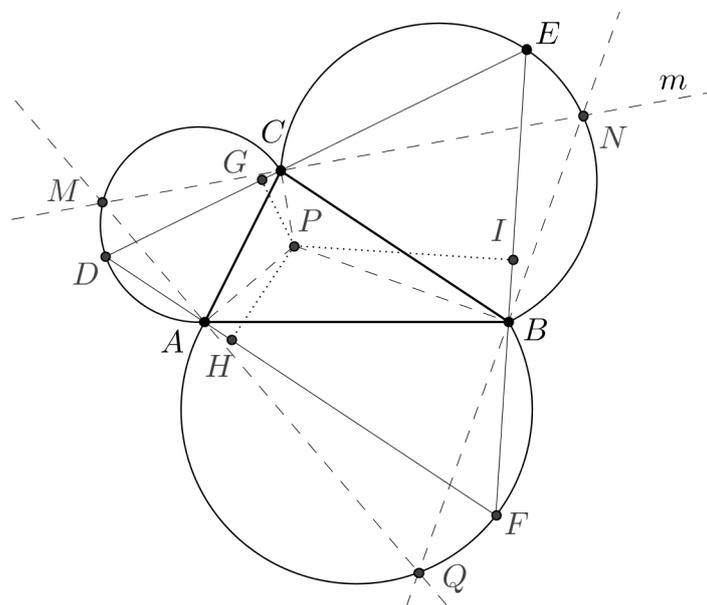


Figura 3.16: Problema de Fermat - Triângulo  $MNQ$  tem altura máxima

### 3.4 Problema de Dido

Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África, depois que seu marido foi assassinado. Foi-lhe prometida a extensão de Terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Diz a lenda que ela preparou com o couro uma longa e fina correia, e cercou com a mesma um terreno circular. Essa é a legendaria estória da fundação da cidade de Cartago.

O problema de Dido é o seguinte: Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento  $L$  encontrar aquela que engloba maior área.

Na seção 2.3 do capítulo 2 abordamos a desigualdade isoperimétrica para polígonos regulares, na demonstração usamos recursos da trigonometria e do cálculo. Pelo processo de construção lá apresentado podemos inferir que a resposta ao problema de Dido é um círculo. Dessa forma o problema de Dido é apenas parte do enunciado da desigualdade isoperimétrica.

É interessante observar que podemos resolver o problema de Dido sem fazer uso da desigualdade isoperimétrica.

Vamos fazer uso da demonstração atribuída a Jakob Steiner (1796-1863), que utiliza recursos puramente geométricos, nada de trigonometria ou cálculo como foi utilizado no capítulo anterior.

Steiner provou que a circunferência encerra a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado. A demonstração de Steiner parte da hipótese de que a solução do problema existe, supondo que a curva  $\gamma$  com comprimento  $L$  seja a solução do problema.

Steiner provou inicialmente que a curva  $\gamma$  procurada deve ser convexa, no sentido de que ela delimita uma região convexa (qualquer segmento de reta unindo dois pontos quaisquer da região deve estar inteiramente contido na região - a curva  $\gamma$  incluída na região).

A demonstração é dividida em três etapas:

**Etapa 1:**  $\gamma$  é uma curva convexa. De fato, suponha por contradição, que  $\gamma$  possua uma reentrância  $\sigma$  entre  $A$  e  $B$  de modo que o segmento aberto  $\overline{AB}$  está fora da região delimitada por  $\gamma$ . (ver Figura 3.17).

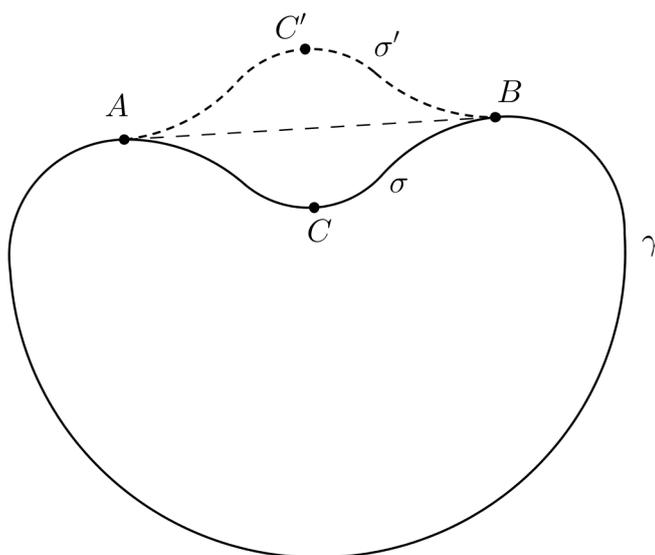


Figura 3.17: A curva convexa engloba maior área

Seja  $\sigma'$  a reflexão do trecho  $\sigma$  da curva com relação ao segmento  $\overline{AB}$ . A curva  $\bar{\gamma}$  obtida a partir de  $\gamma$  substituindo-se o trecho  $\sigma$  por  $\sigma'$  tem o mesmo comprimento de  $\gamma$  e engloba maior área.

**Etapa 2:** Agora mostraremos que o problema de Dido é equivalente ao seguinte: Problema de Dido com Parede: Seja  $r$  uma reta do plano e  $X$  a união de  $r$  com um dos semiplanos determinado por  $r$ .

Consideremos as curvas em  $X$  de um dado comprimento e cujos pontos inicial e final estão sobre  $r$ . Mostrar que entre essas curvas aquelas que juntamente com  $r$  englobam a maior área são os semicírculos com base sobre  $r$ .

Sejam  $A$  e  $B$  pontos de  $\gamma$  que a divide em dois arcos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  de mesmo comprimento. Então o segmento  $\overline{AB}$  divide a área no interior de  $\gamma$  em duas regiões  $R_1$  e  $R_2$  de áreas iguais.

Para demonstrar essas afirmações suponha que as áreas de  $R_1$  e  $R_2$  são distintas, (ver Figura 3.18).

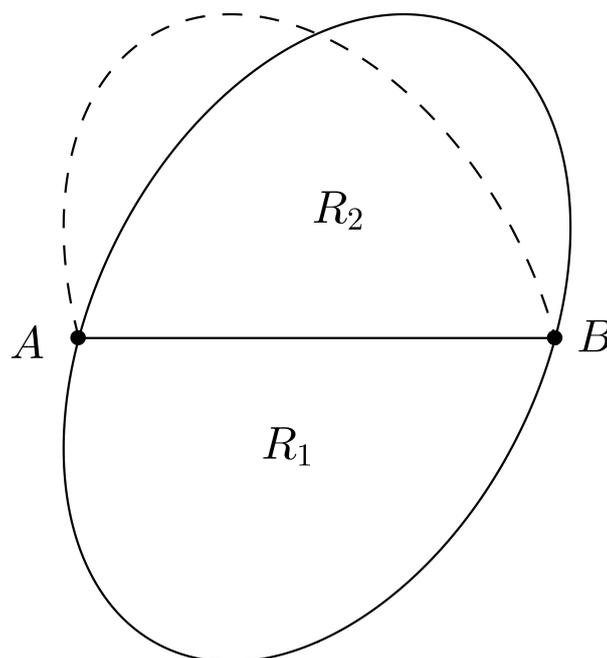


Figura 3.18:  $\overline{AB}$  divide a curva  $\gamma$  nas regiões  $R_1$  e  $R_2$ .

Neste caso, o lado de maior área poderia ser refletido em torno do segmento  $\overline{AB}$  e, assim obtém-se uma nova curva de mesmo comprimento, mais que engloba maior área que a anterior, novamente uma contradição com o fato que a área é máxima.

As curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  acima são soluções do problema de Dido com parede, pois se não fossem existiria uma curva  $\gamma_3$  de igual comprimento unindo pontos  $C$  e  $D$  de  $r$  e delimitando com  $r$  uma área maior. Seja  $\gamma'_3$  a imagem refletida de  $\gamma_3$  com relação a  $r$ . A curva fechada  $\gamma_3 \cup \gamma'_3$  teria o mesmo comprimento de  $\gamma$  e delimitaria uma maior área, o que não é possível.

**Etapa 3:** Agora o problema de Dido se reduz a determinar o arco de comprimento  $L/2$  com pontos extremos  $A$  e  $B$  tal que a área entre esse arco e o segmento  $\overline{AB}$  seja máxima.

Seja  $\gamma_1$  uma curva convexa de comprimento  $L/2$  com pontos extremos  $A$  e  $B$  tal que a área entre o arco  $\gamma_1$  e o segmento  $\overline{AB}$  seja máxima. Provemos usando a Proposição 7 que  $\gamma_1$  é um semicírculo. Com efeito, se  $P \in \gamma_1$  então o ângulo  $\hat{A}PB$  é um ângulo reto. Novamente por contradição, suponha que  $P$  é tal que o ângulo  $\hat{A}PB$  não é reto. A área delimitada pelo arco  $APB$  e o segmento  $\overline{AB}$  é dividido em três partes: as áreas  $S_1$  e  $S_2$  limitada pela curva e os segmentos  $\overline{AP}$  e  $\overline{PB}$ , respectivamente, e a área  $S_3$  limitada pelo triângulo  $APB$ , (ver Figura 3.19)

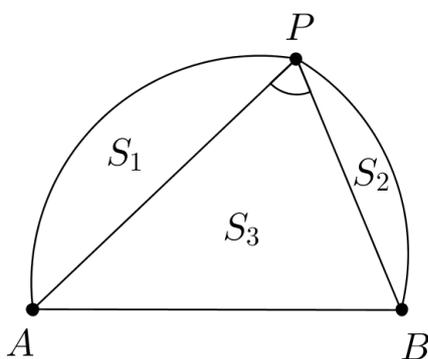


Figura 3.19:  $S_1, S_2$  fixos e  $\hat{A}PB$  variável

Fixando  $A$  e deslocando  $B$  por meio de uma rotação em  $P$ , mas mantendo o comprimento  $PB$  podemos obter um ângulo reto em  $P$ , (ver Figura 3.20).

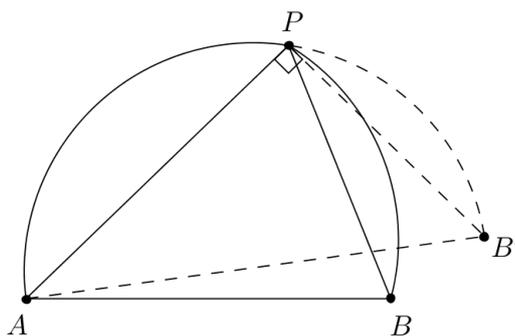


Figura 3.20:  $\hat{A}PB = 90^\circ$

Logo o comprimento de  $\gamma_1$  é mantido.

Neste caso as áreas  $S_1$  e  $S_2$  também foram mantidas inalteradas, enquanto que a área  $S_3$  varia. Por outro lado, a área  $S_3$  será máxima justamente quando o ângulo  $A\hat{P}B$  é reto. De fato, entre todos os triângulos com dois lados de comprimentos fixos, o que possui área máxima é o triângulo retângulo, (ver Figura)

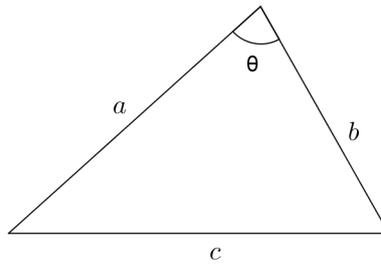


Figura 3.21: Triângulo de área máxima fixados  $a$  e  $b$

A área é dada pela expressão

$$\frac{ab \operatorname{sen}(\theta)}{2}$$

sendo  $\theta$  o ângulo entre os lados  $a$  e  $b$ , ( $\theta \in [0, \pi]$ ). Daí, quando  $\operatorname{sen}(\theta) = 1$ , teremos o maior valor para a área, isto é, quando  $\theta = 90^\circ$ . Logo a curva  $\gamma_1$  em questão é um semicírculo.

## Capítulo 4

# PROBLEMAS PROPOSTOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Problemas extraídos do livro Círculos Matemáticos. A Experiência Russa [3]

**Problema 01:** Encontre um ponto no interior de um quadrilátero convexo tal que a soma das distâncias do ponto aos vértices é mínima.

**Problema 02:** Um colhedor de cogumelos sai da floresta em um determinado ponto. Ele precisa chegar a uma estrada, que segue uma linha reta, e voltar para a floresta em outro ponto dado. Como ele deve fazer isso para seguir o menor caminho possível?

**Problema 03:** A cabana de um lenhador fica no interior de uma península que tem a forma de um ângulo agudo. O lenhador tem que sair de sua cabana, andar até a praia de um dos lados da península, depois até à praia do outro lado, depois voltar para casa. Como ele deveria escolher o caminho mais curto?

**Problema 04:** O ponto  $C$  está dentro de um ângulo reto e os pontos  $A$  e  $B$  estão nos lados. Prove que o perímetro do triângulo  $ABC$  não é menor do que o dobro da distância  $OC$ , onde  $O$  é o vértice do ângulo reto dado.

**Problema 05:** Resolva o Problema 03 supondo que a península tem a forma de um ângulo obtuso.

Problemas extraídos do artigo de Kely Cristina Pasquali [7]

**Problema 06:** Seja  $A$  um ponto sobre o círculo de centro  $O$  e raio  $a$  e seja  $P$  um ponto sobre a extensão de  $\overline{OA}$  através de  $A$ . Uma linha secante a  $P$  intercepta o círculo nos pontos  $Q$  e  $Q'$ . Dada uma posição fixa de  $P$  determinar a área máxima do triângulo  $AQQ'$ .

**Problema 07:** Dado o triângulo  $ABC$ , escolha  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$  de modo que a área do triângulo  $MNP$  ( $P$  sobre  $\overline{AB}$ ) seja máxima?

**Problema 08:** Dado o triângulo  $ABC$  e  $P$  sobre  $\overline{AB}$  fixado. Escolher pontos  $M$  e  $N$  sobre  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, de modo que a área do triângulo  $PMN$  seja máxima?

**Problema 09:** Existe um triângulo de área máxima inscrito em uma circunferência dada?

**Problema 10:** Dada uma circunferência de raio  $R$  achar o triângulo de área máxima inscrito na circunferência com uma das alturas igual a  $h$ ?

**Problema 11:** Dados uma reta  $l$  e dois pontos  $P$  e  $Q$  em lados opostos de  $l$  encontre um ponto  $R$  em  $l$  tal que a quantidade  $|p - q|$ , isto é, o valor absoluto da diferença das distâncias de  $P$  e  $Q$  para  $R$ , seja um máximo?

**Problema 12:** De todos os triângulos de mesma base e com mesmo ângulo oposto a base, qual tem área máxima?

**Problema 13:** Dadas as retas  $r$  e  $s$  concorrentes e um ponto  $M$  no interior do ângulo por elas formado, encontrar os pontos  $B$  sobre  $r$  e  $C$  sobre  $s$  de forma que  $\overline{BC}$  passe por  $M$  e a área de  $ABC$  seja mínima.

**Problema 14:** Dada um circunferência encontrar o polígono de  $n$  lados inscrito nesta circunferência que tem área máxima.

**Problema 15:** Dada uma semicircunferência encontrar o trapézio de área máxima com vértices nesta circunferência.

## Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso da geometria em sala de aula prova que a matemática não é uma ciência pronta, ela precisa ser construída. Porém as aplicações práticas e de fácil compreensão, bem como as formas que se assemelham com a própria natureza, mostram que a matemática que se estuda é aplicável. Esperamos que as pessoas que tiverem acesso a este trabalho possam se encantar com a beleza da geometria e percebam que com apenas argumentos puramente geométricos é possível resolver problemas de máximos e mínimos de maneira bastante elegante.

Deixo aqui como desafio a resolução dos problemas apresentados no capítulo 4. Tais problemas podem ser utilizados em sala de aula por professores nos diversos níveis do ensino.

Espero seguir pesquisando e descobrindo novos problemas geométricos de fácil compreensão e aplicação para utilizá-los em sala de aula mostrando a beleza e a elegância da geometria.

# Apêndice A

## Protocolo de construção do Geogebra

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto $A_1$			$A_1 = (1, 2)$	
2	Ponto $B_1$			$B_1 = (7, 2)$	
3	Reta $r$		Reta $A_1 B_1$	$r: y = 2$	$rS$
4	Texto texto1			"r"	
5	Ponto P			$P = (1, 6)$	$SPS$
6	Ponto Q			$Q = (9, 7)$	$SQS$
7	Ponto $P'$		Reflexão (ou Inversão) de P em relação a $r$	$P' = (1, -2)$	$SPS$
8	Segmento d		Segmento $[P, P']$	$d = 8$	
9	Ponto B		Ponto de interseção de $r, d$	$B = (1, 2)$	$SCS$
10	Segmento b		Segmento $[P', Q]$	$b = 12.04$	
11	Ponto A		Ponto de interseção de $r, b$	$A = (4.56, 2)$	$SAS$
12	Segmento a		Segmento $[P, A]$	$a = 5.35$	
13	Segmento c		Segmento $[A, Q]$	$c = 6.69$	
14	Ponto C		Ponto sobre $r$	$C = (3.05, 2)$	$SBS$
15	Segmento e		Segmento $[P, C]$	$e = 4.5$	
16	Segmento f		Segmento $[C, P']$	$f = 4.5$	
17	Segmento g		Segmento $[C, Q]$	$g = 7.77$	
18	Reta h		Reta passando por A e perpendicular a $r$	$h: x = 4.56$	
19	Ponto D		Ponto sobre h	$D = (4.56, 7.3)$	$SNS$
20	Segmento i		Segmento $[A, D]$	$i = 5.3$	
21	Ângulo $\alpha$		Ângulo entre B, P, A	$\alpha = 41.63^\circ$	
22	Ângulo $\beta$		Ângulo entre A, P', B	$\beta = 41.63^\circ$	$\alpha$
23	Ângulo $\gamma$		Ângulo entre D, A, P	$\gamma = 41.63^\circ$	$\alpha$
24	Ângulo $\delta$		Ângulo entre Q, A, D	$\delta = 41.63^\circ$	$\alpha$

Figura A.1: Protocolo de construção no Geogebra da Figura 1.5

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A		Ponto sobre EixoX	$A = (-0.46, 0)$	\$A\$
2	Ponto B			$B = (2, 2)$	\$B\$
3	Segmento a		Segmento [A, B]	$a = 3.17$	
4	Ponto C			$C = (5, 3)$	\$C\$
5	Segmento b		Segmento [B, C]	$b = 3.16$	
6	Ponto D			$D = (7, 0.54)$	\$D\$
7	Segmento c		Segmento [C, D]	$c = 3.17$	
8	Ângulo $\alpha$		Ângulo entre A, B, C	$\alpha = 159.32^\circ$	
9	Ângulo $\beta$		Ângulo entre B, C, D	$\beta = 110.68^\circ$	
10	Ponto F		Ponto sobre c	$F = (5.82, 2)$	\$F\$
11	Segmento d		Segmento [B, F]	$d = 3.82$	
12	Ângulo $\gamma$		Ângulo entre F, B, C	$\gamma = 18.49^\circ$	$\theta$
13	Reta e		Reta AB	$e: -2x + 2.46y = 0.92$	
14	Ponto G		Ponto sobre e	$G = (4.5, 4.03)$	\$G\$
15	Segmento h		Segmento [B, G]	$h = 3.22$	
16	Reta f		Reta passando por C e paralela a d	$f: 0x + 3.82y = 11.46$	
17	Ponto E		Ponto de interseção de e, f	$E = (3.23, 3)$	\$E\$
18	Segmento g		Segmento [C, E]	$g = 1.77$	
19	Ângulo $\delta$		Ângulo entre B, C, E	$\delta = 18.49^\circ$	$\theta$
20	Ângulo $\epsilon$		Ângulo entre F, B, E	$\epsilon = 39.16^\circ$	
21	Ângulo $\zeta$		Ângulo entre C, F, B	$\zeta = 50.84^\circ$	$\omega$

Figura A.2: Protocolo de construção no Geogebra da Figura 2.5

## Referências Bibliográficas

- [1] ANDREESCU, Titu [et all]. *Geometric Problems on Maxima and Minima*. Boston: Birkhäuser, 2006.
- [2] FIGUEIREDO, D. G. *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. Revista Matemática Universitária, número 9/10, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1989.
- [3] FORMIN, Demiti; GENKIN, Sergey; ITEMBER, Ilia *Círculos Matemáticos. A experiência Russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [4] LANG, Serge. *Cálculo: tradução de Genésio Lima dos Reis*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.
- [5] LIMA, Elon Lages [et all]. *A Matemática do Ensino médio, 2*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [6] MOREIRA, C. G. T. de A.; SALDANHA, N. C. *A desigualdade isoperimétrica*. Matemática Universitária N° 15, 13-19, (1993). Disponível em: [http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n15/n15\\_Artigo02.pdf](http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n15/n15_Artigo02.pdf). Acesso em: 27/03/2013.
- [7] PASQUALI, Kely Cristina. *Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana*. Florianópolis, 2004. Disponível em: «

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

[http://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96564/Kely\\_Cristina\\_Pasquali.pdf?sequence=1](http://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96564/Kely_Cristina_Pasquali.pdf?sequence=1) ». Acesso em 07/05/2013.

- [8] PENEIREIRO, João Batista; SILVA, Maurício Franza da *Geometria Plana e Desenho Geométrico*. Santa Maria, 2008. Disponível em: <<http://w3.ufsm.br/coordmat/arquivos/GeometriaPlana.pdf>>. Acesso em 05/02/2013.