UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Willem Mendonça Filgueira

Métodos de Resoluções das equações Algébricas

ABAETETUBA-PA
2022

Willem Mendonça Filgueira

Métodos de Resolução das Equações Algébricas

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Romulo Correa Lima

ABAETETUBA-PA
2022

Willem Mendonça Filgueira

Métodos de Resolução das Equações Algébricas

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 21 de Fevereiro de 2022.

Conceito:______________

BANCA EXAMINADORA

Rômulo Correa Lima

Prof. Dr. Romulo Correa Lima

Orientador- UFPA

Manuel de Jesus dos S. Costa.

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa

Examinador Interno - UFPA

José Francisco da S. Costa

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

Examinador Interno - UFPA

Antônio Maia de Jesus Chaves Neto

Prof. Dr. Antônio Maia de Jesus Chaves Neto

Examinador Externo - UFPA

ABAETETUBA-PA

2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus acima de tudo, pois foi quem me iluminou durante esta trajetória acadêmica e esteve sempre do meu lado me guiado.

A minha família, a minha mãe que me ajudou de todas as formas, aos meus irmãos pela força e pelo carinho.

A todos meus amigos que me ajudaram quando estava em dificuldade; aos amigos do mestrado que me deram forças no momento de dificuldade.

A todos os meus professores que me ajudara a chegar nesse momento, em especial ao Professor Romulo Correa Lima, por ter sido paciente e atencioso e se propós ajudar de todas as formas.

Agradeço imensamente a todos por fazerem parte desse momento e que eu um dia possa retribuir tudo que fizeram por mim.

RESUMO

O estudo das equações algébricas constitui uma parte muito importante da matemática. Neste trabalho serão abordados aspectos históricos sobre seus surgimentos e os desenvolvimentos das suas fórmulas. Ademais, apresenta-se as principais definições e os teoremas que são fundamentais para o estudo das raízes das equações algébricas. Busca-se mostrar as principais formas de resolver as equações do primeiro e segundo grau no ensino básico. Além disso, serão abordados os métodos de Cardano-Tartaglia para resolução das equações do terceiro grau e o método de Ferrari para resolução das equações do quarto grau, pois esses métodos de resolver equações são poucos difundidos no ensino básico.

Palavras-chave: Equações algébricas, Fórmula Geral, Cardano-Tartaglia, Ferrari.

ABSTRACT

The study of algebraic equations is a very important part of mathematics. In this work, historical aspects of its appearance and the development of its formulas will be approached. Furthermore, the main definitions and theorems that are fundamental for the study of the roots of algebraic equations are presented. It seeks to show the main ways to solve the equations for the first and second degree in basic education. In addition, the Cardano-Tartaglia methods for solving third-degree equations and the Ferrari method for solving fourth-degree equations will be addressed, because these methods of solving equations are not widespread in primary education.

Keywords: Algebraic equations, General Formula, Cardano-Tartaglia, Ferrari.

LISTA DE SÍMBOLOS

Θ	Argumeto do número complexo z
ρ	Distância do ponto T à origem do plano.
P	Polinômio
G	Polinômio
Q	Quociente na divisão de polinômio
R	Resto da divisão de polinômio
S	Soma das raízes de uma equação
H	Produto das raízes de uma equação
$\setminus$	Complemento teórico de conjuntos
α	Representa um número real qualquer
β	Representa um número real qualquer

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em razão da grande importância das equações algébricas para resolução de problemas matemáticos, nesse contexto o objetivo deste trabalho é mostrar os principais métodos algébricos que resolvam essas equações. Há vários tipos de equações algébricas, como por exemplo: a linear ou do primeiro grau, quadrática ou do segundo grau, cubicas ou do terceiro grau e outras que dependem do seu grau para ser classificada (DANTE, 2005, IEZZE et al, 2004; IEZZI, 2013). O estudo das equações algébricas abordam diversas aplicações do nosso cotidiano como, por exemplo, na física em que a posição de um objeto e descrita por uma equação do primeiro grau, no movimento uniformemente variado que é representada por equação do segundo grau, na geometria onde a representação de uma reta e feita por uma equação do primeiro grau. Nesse contexto, Na sociedade conteporânea, o conhecimento matemático é importante em diversas situações, como base a outras do conhecimento, como instrumento para lidar com situações do cotidiano (DANTE, 2005, BRASIL, 2002).

Quando fala-se em matemática no ensino médio, não se trata dos alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. Isso se enquadra muito bem na resolução das equações do terceiro e quarto grau, pois os métodos que vão ser mostrados serão um suporte para uma futura aplicação na resolução das equações (BRASIL, 1999).

No que segue, o capítulo 2, abordará um breve histórico do desenvolvimentos das equações algébricas. Onde monstrará os principais matemáticos e escritos que contribuiram para o desenvolvimento das equações algébricas.

Além disso, no capítulo 3, apresenta-se as noções iniciais de números complexos; algumas das terminologias habituais usadas, conceitos, definições, classificações e alguns teoremas relacionados com equações algébricas usadas no ensino básico.

Admais, o capítulo 4, direciona-se ao estudo das equações do primeiro grau, onde será mostrado sua forma de resolução e suas aplicações em situações problemas. Além disso, nesse mesmo topico tem-se a apresentação da equação do segundo grau sendo resolvida pelos métodos da fórmula geral, completar quadrado e pelo método das relações Girard, vale ressaltar, que estes métodos serão apenas como alternativos em contrapartida ao já existente.

O capítulo 5, destina-se as equações do terceiro grau resolvidas pelo método de Cardano-Tartaglia e do quarto grau, pelo método de Ferrari.

Outrossim, no capítulo 6, apresenta-se uma discusão sobre os métodos de resolução, em que será tratado os princípais aspectos dos métodos.

Por fim, o capítulo 7, apresenta-se as considerações finais deste trabalho no sentido de resaltar o que foi abordado no decorrer do rabalho.

2 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

2.1 O desenvolvimento das equações

Entre os documentos matemáticos mais antigos a serem estudados pelo homem, talvez os mais famosos sejam os chamados Papiro de Ahmes (ou de Rhind) e o Papiro de Moscou. O de Ahmes, adquirido por Alexander Henry Rhind, na cidade de Luxor, Egito, em 1858, é um longo papiro egípcio, de cerca de 1650 a.C., onde um escriba com aquele nome ensina as soluções de 85 problemas de Aritimética e Geometria. O Papiro de Moscou possui 25 problema de Aritmética e Geometria, é de cerca de 1850 a.C.. Nos dois papiros encontram-se problemas que contém equações do primeiro grau. Nessa época, apenas os números eram representados por símbolos, a resolução de problemas eram quase todas desenvolvidas por palavras, o que hoje chama-se de álgebra retorica (GARBI, 2009).

Um problema encontrado no Papiro de Ahmes em que estava expresso uma situação problema de uma equação do primeiro grau, descrito da seguinte forma: " Uma quantidade, somada a seu $\frac{2}{3}$ mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é esta quantidade?" em linguagem matemática atual pede-se escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x - 33 &= 0 \\ \frac{97}{42}x - 33 &= 0, \end{aligned}$$

que é uma equação do primeiro grau. Os egípcios resolviam esse tipo de equação por um método chamado de Regra da Falsa Posição. Um exemplo de resolução por esse método consiste no seguinte enunciado: qual o número que somado à sua terça parte dá 8? Logo, pela regra da falsa posição, fazia-se uma hipótese inicial qualquer a respeito do número e verificava-se o que ocorria. Supõe-se que, nesse caso, o número fosse 3. Ora, 3 somado com sua terça parte dá $3 + 1 = 4$, exatamente a metade de 8 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o dobro de 3, ou seja, 6. Essa é uma forma correta de se resolver, no entanto bastante complicada de se entender, pelo fato de se fazer uma hipótese conveniente e isso dependia da pessoa que estaria calculando o problema (GARBI, 2009).

Lendo Santos e Silva (2015) percebe-se que a história da equação do segundo grau é bastante longa, ela é abordada na história da matemática desde a época dos egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses. Um dos primeiros indícios do uso de equações do segundo grau está relacionado ao Papiro de Rhind. São conhecidos poucos registros do tratamento da equação do 2^o grau pelos egípcios, mas os historiadores suspeitam que eles dominavam alguma técnica de resolução dessas equações. Um exemplo encontra-se no papiro e remonta aproximadamente ao ano 1950 a.C. e também foi encontrada no Papiro de Kahun uma resolução da equação, hoje escrita como $x^2 + y^2 = k$, em que k é um número positivo, resolvida pelo método da falsa posição (PEDROSO, 2010).

Os babilônios resolviam equações do segundo grau por um método chamado "completamento de quadrado"(GARBI, 2009). Na Mesopotâmia o primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo a equação do 2^o grau data de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábua de argila através de palavras. A solução era apresentada como uma "receita matemática"e fornecia somente uma raiz positiva. Os mesopotâmios enunciavam a equação e sua resolução em palavras, mais ou menos do seguinte modo: Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870? O que hoje se escreve:

$$x^2 - x = 870,$$

e a "receita"era: Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, $(0,5 \cdot 0,5 = 0,25)$. Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado (870,25 = $29{,}5^2$) cujo lado somado à metade de 1 vai dar 30, que é o lado do quadrado procurado (PEDROSO, 2010).

Na Grécia, acredita-se que a dificuldade no tratamento com os números, racionais e irracionais, e a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além do gosto natural pela geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações do 2^o grau. Esse método é devido a Euclides que escreveu em seu livro os elementos (PEDROSO, 2010).

O indiano Bhaskara foi um dos matemáticos mais conhecido quando se trata da equação do segundo grau, principalmente, aqui no Brasil, pois ainda chama-se a fórmula geral de resolução de equação do segundo grau de fórmula de Bhaskara, no entanto a referida fórmula foi encontrada pelo matemático hindu Sridhara e não por Bhaskara, nessa época ainda não se utilizavam símbolos algébricos para representar as equações. A fórmula geral de resolução de equação de segundo grau fundamentou-se na ideia de buscar uma forma de reduzir o grau da equação, transformando em uma equação do primeiro grau

(GARBI, 2009).

A representação simbólica das equações na forma algébrica foi introduzida apenas no inicio da idade moderna, pelo francês François Viéte (1540 – 1603). Esse foi o grande responsável pelo desenvolvimento da álgebra no período da Renascença europeia. Ele introduziu uma convenção no tratamento das equações algébricas, utilizando letras do alfabeto para representar grandezas conhecidas e desconhecidas (NOBRE, 2003 apud SANTOS e SILVA, 2015). Mas, apenas no século XIX, quando os números negativos e complexos foram aceitos e elevados à categoria de números por Jean-Robert Argand (1786-1822) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), é que todas as soluções das equações passaram a ser definitivamente reconhecidas (IEZZI et al, 2004). É importante ressaltar que por ter prevalecido durante a maior parte da história da matemática, a resolução das equações de 2^o grau através de métodos geométricos não pode ser esquecida. Em 1637, René Descartes (1596-1650), além de possuir uma notação que diferia da atual somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico para obtenção da raiz positiva. No apêndice *La Géométrie* de sua obra, *O Discurso do Método*, Descartes resolveu indentidade do tipo (PEDROSO, 2010):

$$x^2 + bx = c^2 \;\; e \;\; x^2 = c^2 + bx.$$

Um professor de Matemática da Universidade de Bolonha de nome Scipione del Ferro (1465-1526) encontrou uma forma geral de resolver as equação do tipo $x^3+px+q=0$. O curioso é que del Ferro nunca publicou sua solução, comunicou apenas à duas pessoas sua descoberta: seus discípulos Annibale Della Neve e Antonio Maria Fiore. Em 1535 Fiore desafiou Niccoló Tartaglia (1499-1557), professor em Veneza, para uma disputa matemática, disputas como essa eram comuns naquela época. Fiore propôs 30 problemas envolvendo equações do terceiro grau e Tartaglia também propôs sua lista a Fiore. Para resolver sua lista Fiore utilizou a fórmula de Ferro enquanto que Tartaglia apenas seu conhecimento matemático. Depois de muitos tentativas, poucos dias antes do encontro, Tartaglia encontrou a fórmula da equação do terceiro grau e ganhou a disputa contra Fiore. Com isso, Girolamo Cardano (1501-1576) usou de todos os meios para atrair Tartaglia a sua casa em Milão, e com mediante promessa de guardar segredo, obteve dele, a regra para resolver a equação $x^3 + px = q$, dado em forma de versos. Cardano consegui demonstra a valides da fórmula de Tartaglia e mostrou que a substituição $x = y - \dfrac{a}{3}$ permite eliminar o termo de x^2 na equação (GARBI, 2009):

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Em 1542, Cardano e Ludovico Ferrari (1522-1560) visitaram Bolonha e lá examinaram os manuscritos deixados por Ferro, entre os quis estava a solução da equação $x^3 + px = q$, com isso se considerou livre das obrigações com Tartaglia e publicou a fórmula obtida por del Ferro, em 1545 no seu grande livro *Ars Magna*. No ano seguinte Tartaglia publicou em seu livros *Quesiti e Inventioni Diverse* em que apresentou soluções para vários problemas propostos. Isso explica o nome do método Cardano-Tartaglia (GARBI, 2009).

É importante entender que, por muitos séculos, a fórmula da equação do terceiro grau foi conhecida como "fórmula de Cardano", por ter sido publicada pela primeira vez na "Ars Magma" apesar de del Ferro ter descoberto a fórmula primeiro e redescoberta por Tartaglia. Logo, seria bem conveniente ser chamada de fórmula de del Ferro (LIMA, 1991).

A equação do quarto grau que tem uma abordagem em sua fórmula parecida com a do terceiro grau, pelo fato de seu método de resolução utilizar em algum momento a fórmula do terceiro grau e pela mudança de variável, teve sua fórmula desenvolvida por Ferrari que era um dos discípulos de Cardano. Ferrari desenvolveu a fórmula de resolução da equação do quarto grau devido um desafio proposto a Cardano que envolvia a seguinte equação:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Cardano passou a questão para Ferrari que conseguiu formular um método para resolver a equação. O método proposto por Ferrari envolvia a equação do terceiro e segundo grau. O raciocínio era reagrupar os termos de modo que nos dois lados da igualdade fosse possível obter quadrados perfeitos, logo a equação de quarto grau recairia em uma do segundo grau que seria facilmente resolvida (GARBI, 2009; MELO, 2014).

Soluções de equações algébricas até o quarto grau são solúveis por fórmula que envolvem os coeficientes, as quatro operações aritméticas e a extração de raizes. Entretanto, a resolução das equações polinomias de grau 5 continuou sendo um quebra-cabeça, pois todos acreditavam que elas também poderiam ser resolvidas por fórmulas. Assim muitos matemáticos tentaram, em vão, obte-la. Em 1799, Paolo Ruffini (1765-1822) publicou um trabalho em que , exceto por um pequeno engano, provava a impossibilidade de resolução das equações do quinto grau por fórmula. Como nessa época era um contra-senso acreditar que alguma equação algébrica não pudesse ser resolvida por fórmula, Ruffini morreu sem poder corrigir sua prova e sem ser reconhecido por ela (DANTE, 2005). A primeia prova correta da impossibilidade de resolver as equações do quinto grau por fórmulas foi publicada pelo norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) em 1824. O curioso é que, três anos antes, Abel chegou a acreditar ter obtido a fórmula de resolução das equações de grau 5, porém, ao produzir um exemplo usando-a, percebeu que se enganou e acabou provando o contrário: que as equações de grau maior que 5 não são em geral resolúveis alebricamente, resultado publicado em 1824 e que hoje é conhecido como teorema de Ruffini-Abel. Além deles, Galois (Évariste Galois, 1811-1832) também provou essa impossibilidade usando a sua própia teoria, mais tarde chamada Teoria de Galois (DANTE, 2005; IEZZI e at al, 2004).

3 EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições, teoremas e clasificações sobre números complexos, equação e raízes algébrica e divisão de polinômios encontrados nos livros didáticos.

3.1 Definições

Definição 1 Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. considera-se o produto cartesiano $\mathbb{R}$ X $\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R} = \{(x,\ y)|\ x \in \mathbb{R}\ \ e\ \ y \in \mathbb{R}\}$$

isto é, $\mathbb{R}$ é o cunjunto dos pares ordenados $(x,\ y)$ em que x e y são números reais. Toma-se dois elementos, $(a,\ b)$ e $(c,\ d)$, de $\mathbb{R}^2$ vale as seguintes definições (IEZZI et al, 2004; IEZZI, 2013; DANTE, 2005):

1) Igualdade: Dois pares ordenado são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e sugundo termos iguais.

$$(a, b) = (c,\ d) \Leftrightarrow a = c\ \ e\ \ b = d.$$

2) Adição: Chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e sugundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma do segundos termos dos pares dados.

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d)$$

3) Multiplicação: Chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo sugundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par pelo segundo termo do outro.

$$(a,\ b) \cdot (c,\ d) = (a \cdot c - b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c)$$

Definição 2 Chama-se unidade imaginária e indicado por i o número complexo $(0,\ 1)$.

Nota-se que:

$$i^2 = i \cdot i = (0,\ 1) \cdot (0,\ 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$$

isto é, a propriedade básica da unidade imaginária é $i^2 = -1$ (IEZZI, 2013; DANTE 2005).

Definição 3 Denomina-se equação polinômio ou algébrica toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (com \quad a_n \neq 0), \tag{1}$$

em que os a_i $(a_n,\ a_{(n-1)},....,\ a_2,\ a_1,\ a_0)$ são elementos do conjuntos dos números complexos, $n \in N$ e n é o grau da equação (DANTE, 2005; IEZZI e at al, 2004).

O teorema seguinte fornece informação importante a respeito do número de raízes complexas de uma equação polinomial com coeficientes reais. (IEZZI et al, 2004).

Teorema 1 Se um numero complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação com coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Demonstração: Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_1 + a_0 = 0$, com a_n,$a_{(n-1)}$,. . . ,a_1,a_0 coeficientes reais.

Da hipótese, z é raiz da equação, isto é, $P(z) = 0$.

$$a_n z^n + a_{(n-1)} z^{(n-1)} + ... + a_1 + a_0 = 0 \tag{2}$$

$$\overline{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 + a_0)} = \overline{0} \tag{3}$$

Usando $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, pode-se escrever:

$$\overline{(a_n z^n)} + \overline{(a_{(n-1)} z^{(n-1)})} + ... + \overline{(a_1 z)} + \overline{(a_0)} = \overline{0}. \tag{4}$$

Tem-se que $\overline{(x.z_1)} = x.\overline{z_1}$ e $\overline{x} = x$, então:

$$a_n \overline{(z^n)} + a_{(n-1)} \overline{(z^{(n-1)})} + ... + a_1 \overline{z} + a_0 = 0. \tag{5}$$

Usando$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$,vem:

$$a_n(\overline{z})^n + a_{(n-1)}(\overline{z})^{(n-1)} + ... + a_1\overline{z} + a_0 = 0. \tag{6}$$

Isto é, $P(\overline{z}) = 0$, o que mostra que $\overline{z}$ é raiz de $P(x) = 0$.

□

Teorema 2 Se uma equação polinomial de coeficiente reais admite a raiz $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade n, então também admite a raíz $\overline{z} = a - bi$ com multiplicidade n.

Demonstração: Suponhamos que a equação P(x)=0 com coeficientes todos reais, admita a raiz $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade n e a raiz $\overline{z} = a - bi$ com multiplicidade n' $(n' \neq n)$. Provemos que isso leva a uma contradição. Seja m o menor dos números n e n'. Como o polinômio P é divisível por $(x - z)^n$ e $(x - \overline{z})^{(n')}$, P é divisível por $(x - z)^m$ e $(x - \overline{z})^m$. Sendo $z \neq \overline{z}$, resulta que P é divisível por $(x - z)^m$ e $(x - \overline{z})^m$, então:

$$P = [(x - z)^m \cdot (x - \overline{z})^m] \cdot Q = [(x - z)(x - \overline{z})]^m \cdot Q \tag{7}$$

$$P = [x^2 - (z + \overline{z}) \cdot x + z\overline{z}]^m \cdot Q = [x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)]^m \cdot Q \tag{8}$$

Como P e $[x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$ têm coeficientes reais, segue-se que Q tem todos os coeficientes reais. São possíveis dois casos:

$1^{\underline{o}}$) caso: $m = n < n'$

$P = (x - z)^m \cdot (x - \overline{z})^m \cdot Q = (x - z)^n \cdot (x - z)^n \cdot Q$ e, como n é a mutiplicidade da raíz z, decorre que Q não é divisível por $(x - z)$. Mas Q deve ter ainda $n' - n$ fatores $(x - \overline{z})$, pois $n' > n$.

Portanto Q não é divisível por $x - z$ e é divisível por $x - \overline{z}$, isto é, $Q(z) \neq 0$ e $Q(\overline{z}) = 0$. Isto é absurdo por contrariar o teorema anterior.

$2^{\underline{o}}$) caso: $m = n' < n$

$P = (x - z)^m(x - \overline{z})^m Q = (x - z)^n(x - \overline{z})^n Q$ e, como n é uma multiplicidade de raiz z, decorre que Q não é divisível por $(x - z)$. Mas Q deve ter ainda $n - n'$ fatores $x - z$, pois $n > n'$.

Dessa forma, Q não é divisível por $x - \overline{z}$ e é divisível por $x - z$. isto também é absurdo por contrariar o teorema anterior. Para evitar a contradição, tem-se a necessidade de fazer $n = n'$.

$\square$

É importante observa que os dois teoremas anteriores só se aplicam a equações polinomiais de coeficientes reais. Por exemplo, a equação $x^2 - ix = 0$ tem como raízes 0 e i, entretanto não admite a raiz $-i$, conjugado de i. Além disso, como toda raiz complexas $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ de uma equação com coeficiente rais $P(x) = 0$ corresponde uma outra raiz $\overline{z} = a - bi$, com igual multiplicidade, segue-se que o número de raízes complexas não reais de $P(x) = 0$ é necessariamente par (IEZZI, 2013).

3.2 Divisão de polinômio

Definição 4 Dado dois polinômios $P(x)$ e $G(x)$, com $G(x) \neq 0$. Dividir $P(x)$ por $G(x)$ significa encontra dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ que satisfaçam as seguintes condições:

a) $P(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$

b) O grau de $R(x)$ não pode ser igual nem maior do que o grau de $G(x)$ ou então $R(x) = 0$

Assim, tem-se que:

- $P(x)$ é o dividendo
- $G(x)$ é o divisor
- $Q(x)$ é o quociente
- $R(x)$ é o resto

$$\begin{array}{r|l} P(x) & G(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Esse metodo de divisão de polinômio é denominado de método da chave.(DANTE, 2005; IEZZI, 2204).

Há dois casos em que a divisão de P por G é imediata.

1° caso: O dividendo P é o polinômio nulo $P = 0$

Nesse caso, os polinômios $Q = 0$ e $R = 0$ satisfazem as condições (a) e (b) da definição de divisão, pois $QG + R = 0 \cdot G + 0 = P$ e $R = 0$.

$$P = 0 \Rightarrow Q = 0 \ \ e \ \ R = 0$$

2°) caso: o dividendo p não é polinômio nulo, mas tem grau menor que o divisor G.

Nesse caso, os polinômios $Q = 0$ e $R = P$ satifazem as condições (a) e (b) da definição, pois $QG + R = 0 \cdot G + P = P$ e o grau de R é igual o de P e menor que o grau de G (IEZZI, 2013)

$$Q = 0 \ \ e \ \ R = P$$

3.2.1 Método da chave

A construção do metodo da cheve é estabelecida aparti de P e G. Tem-se a seguinte divisão de $P = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ por $G = x^2 - 2x + 3$ (IEZZI, 2013).

1° grupo de operações Forma-se o primeiro termo de Q pela operação $\dfrac{3x^5}{x^2} = 3x^3$ e constroi-se o primeiro resto parcial $R_1 = P - (3x^3)G = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$, que tem grau maior que G

2° grupo de operações Forma-se o segundo termo de Q pela oeração $\dfrac{4x^3}{x^2} = 4x$ e constroi-se o segundo resto parcial $R_2 = R_1 - (4x)G = -x^2 - x - 1$, que tem grau menor que G.

3° grupo de operações Forma-se o terceiro termo de Q pela operação $\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ e constroi-se o terceiro resto parcial $R_3 = R_2 - (-1)G = -3x + 2$, que tem grau menor que G, encerando portanto a divisão.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -6x^4 & +13x^3 & -9x^2 & +11x & -1 & x^2-2x+3 \\ \cline{7-7}
-3x^5 & +6x^4 & -9x^3 & & & & 3x^3+4x-1 \\ \cline{1-3}
 & & 4x^3 & -9x^2 & +11x & & \\
 & & -4x^3 & +8x^2 & -12x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -x^2 & -x & -1 & \\
 & & & x^2 & -2x & +3 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -3x & +2 &
\end{array}
$$

3.2.2 Divisão por binômios do tipo $(x-a)$

Neste item será apresentado a divisão de um polinômio $P(x)$, com grau maior que 1, por um polinômio de grau igual a 1 do tipo $(x-a)$ ou $(x+a)$, sendo $a \in \mathbb{C}$.

Efetuando a divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5$ por $G(x) = x - 2$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +2x & -5 & x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2+x+4 \\ \cline{1-2}
 & x^2 & +2x & & \\
 & -x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 4x & -5 & \\
 & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 &
\end{array}
$$

Assim, tem-se que em qualquer divisão o grau de R e menor que o grau G. Como o grau de G é igual a 1, deve-se ter o grau de R menor do que 1, ou seja, o grau de R é igual a zero. Assim, o resto é um polinômio constante R. Nota-se que a raiz de $g(x) = x - 2$ é igual a 2. Calculando $P(2)$, tem-se:

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 3 \tag{9}$$

O valor encontrado para $P(2)$ é igual ao resto obitido na divisão . Assim, $R = P(2)$. (IEZZI et al, 2004; IEZZI, 2013).

3.3 Teorema do Resto

O teorema do resto é enunciado da seguinte forma (IEZZI at al, 2004).

Teorema 3 Seja $P(x)$ um polinômio tal que o grau de $P(x)$ é maior que 1. O resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$, ou seja, $R = P(a)$.

Demonstração: Considerando que a divisão de $P(x)$ por $x - a$ resulta em um quociente $Q(x)$ e um resto R, tem-se:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Fazendo $x = a$, vem:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R = 0 \cdot Q(a) + R \quad \Rightarrow \quad R = P(a) \tag{10}$$

Observa-se que como $(x - a)$ tem grau 1, o resto R ou é nulo ou tem grau zero; portanto, R é um polinômio constante.

$\square$

3.4 Teorema de D' Alembert

Uma consequência do teorema do resto é o teorema de D'Alembert (IEZZI at al, 2004).

Teorema 4 Se o número b é raiz do polinômial $P(x)$; então $P(x)$ é divisível por $x - b$.

Demonstração: Seja $P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots . + a_1 x^1 + a_0$, pelo teorema anterior $P(b) = R$ tem-se:

$$P(x) = P(x) - P(b) = (a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_1 x^1 + a_0) - (a_n b^n + a_{(n-1)} b^{(n-1)} + ... + a_1 b + a_0) = a_n (x^n - b^n) + a_{(n-1)} (x^{(n-1)} - b^{(n-1)}) + ... + a_1 (x - b)$$

$P(x) = a_n (x^n - b^n) + a_{(n-1)} (x^{(n-1)} - b^{(n-1)}) + ... + a_1 (x - b)$. Como $x^n - b^n$ é divisível por $x - b$ basta verifica que:

$$x^n - b^n = (x - b)(x^{(n-1)} + b x^{(n-2)} + ... + b^{(n-2)} x + b^{(n-1)})$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - b$.

$\square$

3.5 Dispositivo de Briot-Ruffini

Esse dispositivo permite encontra um quociente $Q(x)$ e também o resto R da divisão de um polinômio $P(x)$ por $G(x)$. É importante resaltar que $G(x)$ deve ser da forma $(x-a)$ ou $(x+a)$, já em relação a $P(x)$ não há restrição. O valor de a pode ou não ser raiz de $P(x)$. (IEZZI e at al, 2004).

Proposição 1 Sejam os polinômios complexos $P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_1 x^1 + a_0$ e $G(x) = x - a$, fazendo a divisão de $P(x)$ por $G(x)$. Obtém-se um quociente $Q(x)$ de grau $n-1$, dado por:

$$Q(x) = q_{(n-1)} x^{(n-1)} + q_{(n-2)} x^{(n-2)} + ... + q_1 x^1 + q_0.$$

O resto R dessa divisão é um número complexo, independente de x. Então tem-se:

$$\begin{cases} q_{(n-1)} & = & a_n \\ a_{n-1} & = & q_{n-2} - a q_{n-1} \Rightarrow q_{n-2} = a_{n-1} + a q_{n-1} \\ \vdots & & \\ a_1 & = & q_0 - a q_1 \Rightarrow q_0 = a_1 + a q_1 \\ a_0 & = & -a \cdot q_0 + r \Rightarrow R = a_0 + a \cdot q_0 \end{cases}$$

Demonstração: Na divisão de $P(x)$ por $G(x)$ o objetivo é obter o resto R e os coeficientes de $Q(x)$: q_{n-1}, q_{n-2},..., q_1 e q_0. Tem-se que:

$$P(x) = G(x)Q(x) + R$$

Isto é:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = (x-a)(q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} +$$
$$+ ... + q_1 x^1 + q_0) + r = (q_{(n-1)} x^n + q_{(n-2)} x^{(n-1)} + ... + q_1 x^2 + q_0 x) - (a q_{(n-1)} x^{(n-1)} +$$
$$+ a q_{(n-2)} x^{(n-2)} + ... + a q_1 x + a q_0) + R.$$

Agrupando os monômios de mesmo grau:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = q_{n-1} x^n + (q_{n-2} - a q_{n-1}) x^{n-1} + ... +$$
$$+ (q_0 - a q_1) x + (-a q_0 + R)$$

Segue que:

$$\begin{cases} q_{n-1} &= a_n \\ a_{n-1} &= q_{n-2} - aq_{n-1} \Rightarrow q_{n-2} = a_{n-1} + aq_{n-1} \\ \quad\vdots & \\ a_1 &= q_0 - aq_1 \Rightarrow q_0 = a_1 + aq_1 \\ a_0 &= -a \cdot q_0 + r \Rightarrow R = a_0 + a \cdot q_0 \end{cases}$$

De fato, como o grau de $G(x)$ é igual a 1 segue que o grau de R é igual a zero.

$\square$

3.5.1 Algoritmo de Briot-Ruffini

Usando o algoritmo descrito no item anterior, observa-se que de fato, o que foi mostrado acontece na divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x \pm a)$, em que a pode ou não ser uma raiz de $P(x)$. O dispositivo também é uma forma de verificar se o valor de a é uma raiz do polinômio. Pode-se fazer essa divisão da seguinte forma:

Faz-se,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0,$$

dividido por $(x - a)$, tem-se:

Coloca-se o valor de a

$$\underline{a| \qquad\qquad\qquad}$$

Em seguida coloca-se os coeficientes de $P(x)$ após a barra e separação

$$\underline{a \;\;|\;\; a_n \;\; a_{n-1} \;\; ... \;\; a_1 \;\; a_0}$$

Na parte de baixo da barra de separação vão aparece os coeficientes do quociente e o resto da divisão:

$$\begin{array}{ccccccc} a & | & a_n & a_{n-1} & ... & a_1 & a_0 \\ \hline & & q_{n-1} & q_{n-2} & ... & q_0 & | \; R \end{array}$$

Sabendo que $a_n = q_{n-1}$, dai:

$$\begin{aligned} q_{n-2} &= aq_{n-1} + a_{n-1} \\ &\vdots \\ q_0 &= aq_1 + a_1 \\ R &= aq_0 + a_0 \end{aligned}$$

3.6 Raiz de uma equação polinmial ou algébrica

Definição 5 Denomina-se raiz da equação algébrica:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{11}$$

o valor b de x que satisfaz a igualdade, ou seja, o valor tal que (DANTE, 2005).

$$a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2b^2 + a_1b + a_0 = 0. \tag{12}$$

3.7 Teorema fundamental da álgebra

Conhecimentos prévios para demonstração do teorema.

Definição 6 Seja k e n números naturais, com $k \leq n$. Também seja a sequência $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k, \cdots,\ a_n, \cdots)$. O produto dos termos a_k até a_n pode ser representado por:

$$\prod_{i\ =\ k}^{n} a_i = a_k \cdot a_{k-1} \cdot \cdots \cdot a_n$$

Assim pode-se multiplicar os termos de uma sequência. A quantidade de termos multiplicados é $n - k - 1$. É necessario, por fim, ter uma noção do que é um corpo (SALVADO, 2016).

Definição 7 Um anel ou anel comutativo $(E,\ +,\ \cdot)$ é um conjunto E com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotado por $+$ (chamada adição) e de uma operação denotada por $\cdot$ (chamada de multiplicação) que satisfazem as condições seguintes:

A. Axioma da adição

A.1 Assiciatividade: Qualquer que seja $a,\ b,\ c\ \in E$, tem-se $(a + b) + c = a + (b + c)$.

A.2 Comutatividade: Quaisquer que sejam a, $b \in E$, tem-se $a + b = b + a$.

A.3 Elemento neutro: Existe $0 \in E$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, quaquer que seja $a \in E$.

A.4 Simétrico: Todo elemento $a \in E$ possui um simétrico em E, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

B. Axioma da multiplicação

M.1 Associatividade: Quaisquer que seja $a,\ b,\ c \in E$, tem-se $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

M.2 Comutatividade: Quaisquer que seja $a,\ b \in E$, tem-se $a \cdot b = b \cdot a$.

M.3 Elemento neutro: Existe $1 \in E$ tal que $1 \neq 0$ e $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. qualquer que seja $a \in E$.

D. Axioma da distribuidade

D.1 Quaisquer que seja $a,\ b,\ c \in E$, tem-se $a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (LIMA, 2016).

Definição 8 Um anel $(E,\ +,\ \cdot)$ é chamado domínio ou domínio de integridade se ele satisfazer a seguinte condição:

M.4 O produto de quaisquer dois elementos não nulos de E é um elemento não nulo, isto é,

$$\forall a,\ b \in E \setminus \{0\}, \quad a \cdot b \neq 0$$

.

Um anel $(E,\ +,\ \cdot)$ é chamdo de corpo se ele satisfazer a seguite condição:

M.4’ Todo elemento diferente de zero de E possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é (GARCIA e LEQUAIN, 2005).

$$\forall a \in E \setminus \{0\}, \quad \exists\, b \in E \ \ tal\ que \ \ a \cdot b = 1.$$

Definição 9 Um corpo $(E,+,\cdot)$ é ordenado se nele está contida um subconjunto próprio $L \subset E$, que satisfaz as seguntes condições (SOUZA, 2013):

(L1) Dado $a,\ b \in L$, tem-se: $a + b \in L$ e $a \cdot b \in L$, ou seja, L é fechado em relação a adição “ $+$ ” e a multiplicação “ $\cdot$ ”.

(L2) Dados $x \in E$, tem-se que exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $x = 0$ ou $x \in L$ ou $-x \in L$, sendo que 0 é o elemento neutro da adição.

Definição 10 Seja a e b elementos de um corpo ordenado $(E,+,\cdot)$ e $L \subset E$ é um subconjunto que satisfaz as propiedades $L1$ e $L2$. Diz-se que a é menor que b, denotado por $a < b$ quando, $b - a \in L$. Diz-se a é menor que b, denotado por $a > b$, quando $a - b \in L$ (SOUZA, 2013).

Definição 11 E é um conjunto onde $(E,\ +,\ \cdot)$ é um corpo, $(E,\ +,\ \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado se(SALVADO, 2013):

(1) $\leq$ é uma relação de ordem total em E.

(2) Se $\forall a,\ b,\ c \in E$ tem-se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$.

(3) Se $\forall a,\ b \in E$ tem-se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ então $0 \leq a \cdot b$.

Proposição 2 Se $\forall\ a,\ b,\ c,\ d \in E$ tem-se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$.

Demonstração: Se $a \leq b$, então pela relação (2) da definição 13 tem-se :

$$c \leq d \Leftrightarrow a + c \leq b + c$$

Se $c \leq d$, então pela relação (2) da definição 13 tem-se:

$$c \leq d \Leftrightarrow c + b \leq d + b$$

Assim, tem-se que $a + c \leq b + c$ e $c + b \leq d + b$, conclui-se que $a + c \leq d + b$.

$\square$

Proposição 3 Sejam $(E,\ +,\ \cdot)$ um corpo ordenado e $L \subset E$ um subconjunto que satisfaz as propriedades $L1$ e $L2$ da definição 11. Se $a \neq 0$ e $a \in E$, então $a^2 \in L$ (SOUZA, 2013).

Demonstração: Como $a \neq 0$, então da propiedade $L2$ segue-se que $a \in L$ ou $-a \in L$. Assim, da propiedade $L1$ segu-se que $a \cdot a \in L$ ou $(-a) \cdot (-a) \in L$. Como $a \cdot a = (-a) \cdot (-a)$, decorre-se que: $a \cdot a = a^2 \in L$.

$\square$

Proposição 4 O quadrado de um número real não nulo é positivo, ou seja (SOUZA, 2013):

$$a \in \mathbb{R}, \quad com \quad a \neq 0 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração: Pondo $E = \mathbb{R}$ e $L = \mathbb{R}^+$ o resultado decorre-se da proposição 3.

□

Definição 12 Um corpo real fechado E é um corpo ordenado satisfazendo uma das seguntes condições equivalentes(PEREIRA, 2012):

- Todo elemento positivo é um quadrado e todo polinômio em $E[x]$ com grau ímpar tem uma raiz em E.
- Para todo o polinômio $P \in E[X]$ e para todo $a < b$ e $P(a)P(b) < 0$ existe $c \in E$, $a < c < b$, tal que $P(c) = 0$.
- $E[\sqrt{-1}] = E[X]/(X^2 + 2)$ é um corpo algebricamente fechado.

Teorema 5 Uma equação polinomial, com coeficiente complexos e de grau $n \geq 1$, tem pelo menos uma raiz complexa.

Tem-se que, se a e b forem dois números rais, então existem dois números complexos z_1 e z_2 tais que o polinômio $z^2 + az + b$ é igual a $(z - z_1)(z - z_2)$. Por outro lado, se um polinômio $P(z)$ tem coeficiente complexos, o polinômio $Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\overline{z})}$ tem coeficientes reais e se o número complexo z_0 for raiz de $Q(z)$ então z_0, ou seu conjugado, é raiz de $P(z)$. Desta forma, pode-se demonstra o teorema para um polinômio de coeficientes reais.

Utilizando indução para demonstar o teorema 6. Tem-se ao menor inteiro não negativo k, tal que 2^k divide o grau n de $P(z)$. seja F um corpo de decomposição de $P(z)$, visto como um polinômio de coeficentes complexos; em outras palavras, o corpo F contém $\mathbb{C}$ e há elementos $z_1,\ z_2, \ldots, z_n$ de F tais que.

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Demonstração: Se $k = 0$, então n é ímpar e, desta forma, $P(z)$ tem alguma raiz real. Suponha-se que $n = 2^k m$, com m ímpar e $k > 0$, e também que o teorema já se enconta demonstrado no caso em que o grau do polinômio é de forma $2^{k-1}m'$, com m' ímpar. Para um número real t, seja

$$Q_t(z) = \prod_{1\leq f<j\leq n} (z - z_f - z_j - tz_f z_j) \tag{13}$$

Os coeficientes de $Q_t(z)$ são polinômios nos z_f com coeficientes reais. Assim, pode-se expressar como polinômios com coeficientes reais nos polinômios simétricos elementares nas raízes z_f, ou seja, em $-a_1,\ a_2,\ -a_3, \cdots, (-1)^n a_n$, logo Q_t tem coeficiente reais. Além disso, O grau de Q_t é igual a $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}m(n-1)$, onde $m(n-1)$ é ímpar. Então, pela hipótese de indução, Q_t tem alguma raiz real. Logo, $z_f + z_j + tz_f z_j$ é real para dois elementos distintos f e j de $\{1,\ 2, \ldots, n\}$. Como existem mais números reais do que pares $(f,\ j)$, é possível encontrar números reais distintos t e s tais que $z_f + z_j + tz_f z_j$ e $z_f + z_j + sz_f z_j$ sejam rais, para os mesmos f e j. Consequentemente, tanto a soma, quanto o produto entre z_f e z_j são números reais e, portanto, z_f e z_j são números complexos, pois são as raizes do polinômio $z^2 + (z_f + z_j)z + z_f z_j$ (SALVADOR, 2016).

$\square$

3.8 Teorema da decomposição

Teorema 6 Todo polinômio $P(x)$ de grau $n(n \geq 1)$

$$P = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad com \quad (a_n \neq 0),$$

Pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é

$$P = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot ... \cdot (x - r_n),$$

em que $r_1,\ r_2,\ r_3$,..., r_n são as raízes de P. Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única (IEZZI et al, 2004).

Demonstração: $P(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, em que $P(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_1. Assim, $P(r_1) = 0$ e, pelo teorema 4, $P(x)$ é divisível por $x - r_1$. então:

$$P = (x - r_1)Q_1 \tag{14}$$

em que Q_1 é polinômio de grau $(n-1)$ e coeficiente dominante a_n (pois o divisor $x - r_1$, tem coeficiente denominado unitário).

Temos que:

a) Se $n = 1$, então $n - 1 = 0$ e Q_1 é um polinômio constante; portanto, $Q_1 = a_n$. Substituindo em (14), vem $P = a_n(x - r_1)$, e o teorema fica demonstrado.

b) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$. Dai $Q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_2. Assim, $Q_1(r_2) = 0$ e $Q_1(x)$ é divisível por $x - r_2$:

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x) \tag{15}$$

em que $Q_2(x)$ é um polinomio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n. Substituindo a equação (15) na equação (14), resulta em:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x). \tag{16}$$

Se $n = 2$, $Q_2(x)$ é um polinômio de grau 0, dado por $Q_2(x) = a_n$. Da equação (16), segue que $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)$, e o teorema fica demonstrado.

c) Aplicando sucessivamente n vezes o procedimento anterior , obtemos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)....(x - r_n)Q_n(x).$$

em que $Q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $Q_n(x) = a_n$. Assim

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)....(x - r_n)$$

$\square$

Obsevação: Pode-se mostra que, com exceção da ordem dos fatores do produto, a decomposição de $P(x)$ em termos de suas raízes é única. Dizemos também que um dos polinômio do 1^o grau, $x - r_1, x - r_2, ..., x - r_n$, é um fator de $P(x)$. Por outro lado, $P(x)$ é divisével por, individualmente, cada um de seus fatores.

3.9 Teorema das raízes racionais

O teorema abaixo não nos garante a existência de raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiras. No entanto, ele exibe todas as possibilidade para tais razes, em caso de existencia de raízes racionais (IEZZI et al, 2004).

Teorema 7 Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, é raiz dessa equação, então p é divisivor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração: Como $\dfrac{p}{q}$ é raiz da equação, temos

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0. \tag{17}$$

Multiplicando ambos os membros por q^n, tem-se:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0 \tag{18}$$

Isolando a_np^n e colocando em evidência q na equação (18), segue que:

$$a_n \cdot p^n = -q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\right). \tag{19}$$

Isolando a_0q^n e colocando p em evidência na equação (18), segue que:

$$a_0 \cdot q^n = -p\left(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_1q^{n-1}\right). \tag{20}$$

Como todos os coeficientes $a_0,\ a_1, \ldots, a_n,\ p$ e q são inteiros, segue que

$$\left(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\right)$$

e

$$\left(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_1q^{n-1}\right)$$

são inteiros. Fazendo:

$$\left(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\right) = K$$

e

$$\left(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_1q^{n-1}\right) = W$$

em (19) e (20) tem-se:

$$\begin{cases} a_n p^n &= -q \cdot K \Rightarrow \dfrac{a_n p^n}{q} = -K \in \mathbb{Z} \qquad (I) \\ \\ a_0 q^n &= -p \cdot W \Rightarrow \dfrac{a_0 q^n}{p} = -W \in \mathbb{Z} \qquad (II) \end{cases}$$

As igualdades acima obtidas mostram que:

(I) $a_n p^n$ é divisível por q. Como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q, isto é, q é divisor de a_n.

(II) $a_0 q^n$ é divisível por p. Como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p, isto é, p é divisor de a_0.

□

3.10 Relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação

As relações existentes entre os coeficientes de uma equação e suas raízes, conhecidas como relações de Girard, constituem uma ferramenta importante na resolução de equação quando conhece-se alguma informação sobre suas raizes. As relações de Girard são fórmulas matemática que relacionam os coeficientes com as raízes de uma equação algébricas (IEZZI et al, 2004; DANTE, 2005).

Para determinar essas relações, considera-se, primeiramente, uma equação do segundo grau.

$$ax^2 + bx + c = 0, com \quad a \neq 0, \tag{21}$$

cujas raízes são dadas por r_1 e r_2. Pelo teorema 6, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2). \tag{22}$$

Multiplicando os dois membros da igualdade (22) por $\dfrac{1}{a}$, obtém-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{a}{a}(x - r_1)(x - r_2)$$

dai,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x^2 - xr_1 - xr_2 + r_1 r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \tag{23}$$

Igualando os coeficientes de x e os termos independentes da igualdade (23), segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a} \\ \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Considerando uma equação do terceiro grau.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad com \quad a \neq 0 \tag{24}$$

Cujas raízes reais são r_1,r_2 e r_3. Tem-se que a equação do terceiro grau pode ser escrita sob a forma:

$$a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0.$$

Tem-se a identidade:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Isto é:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - r_1r_2r_3, \quad \forall x.$$

Portanto:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-b}{a}, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \frac{c}{a}, \quad r_1r_2r_3 = \frac{-d}{a}.$$

São as relações entre coeficientes e raízes da equação do 3º grau.

Considerando uma equação algébrica de grau n, a dedução da relação entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau n $(n \geq 1)$ é a seguinte. Tem-se:

$$P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_1 x = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

Cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$. Tem-se que:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n) = a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + ... + r_n)x^{(n-1)} +$$

$$+a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{(n-1)}r_n)x^{(n-2)} - a_n(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + ... + r_{(n-2)}r_{(n-1)}r_n)x^{(n-3)} +$$
$$+ ... + (-1)^h a_n S_h x^{(n-h)} + ... + (-1)^n a_n(r_1r_2r_3...r_n), \quad \forall x$$

Portanto, obtém-se as seguintes igualdades:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = \frac{-a_{(n-1)}}{a_n}$$
$$S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{(n-1)}r_n = \frac{a_{(n-2)}}{a_n}$$
$$S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + ... + r_{(n-2)}r_{(n-1)}r_n = \frac{a_{(n-3)}}{a_n}$$

....

S_h =(soma de todos as combinações $C_{n,h}$ dos produtos de h raizes da equação)= $(-1)^h \dfrac{a_{(n-h)}}{a_n}$

....

$$S_n = r_1r_2r_3...r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Essas são as relações entre coeficientes e raízes de uma equação algébrica.

É importante notar que as n relações de Girard para uma equação polinomial de grau n não são suficientes para obter r_1,r_2,r_3,..., r_n. Fazendo o cálculo de r_1, por exemplo, após várias substituições, obtém-se a equação:

$$a_n r_1^n + a_{(n-1)} r_1^{(n-1)} + a_{(n-2)} r_1^{(n-2)} + ... + a_1 r_1 + a_0 = 0$$

equivale à equação dada (IEZZI, 2013).

Exemplo 1 Aplica-se as relações de Girard na equação seguinte, para mostra que as relações não são suficientes para obter as raízes de uma equação de grau $n > 2$:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0 \tag{25}$$

Obtém-se pela relação de Girard os seguintes resultados da equação (25)

(1) $r_1 + r_2 + r_3 = 6;$

(2) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 3;$

(3) $r_1r_2r_3 = -10.$

Faz-se:

$$r_1(r_2 + r_3) + r_2r_3 = 3,$$

De (1) e (3)

$$r_1(6 - r_1) + \frac{(-10)}{r_1} = 3 \Rightarrow r_1^2(6 - r_1) - 10 = 3r_1 \Rightarrow r_1^3 - 6r_1^2 + 3r_1 + 10 = 0$$

A equação encontrada é $P(r_1) = P(x)$, isso mostra que sem uma condição imposta inicialmente à utilização da relações de Girard retoma a equação inicial sem obter de fato uma solução. Quando é dada uma condição para as raízes, por exemplo, soma de duas raízes é igual à 1, então é possível obter o conjunto solução.

3.11 Teorema de Bolzano

Teorema 8 Sejam $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficiente reais e $]a, b[$ um intervalo aberto:

(1) se $P(a)$ e $P(b)$ têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes da equação em $]a, b[$;

(2) Se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrário, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a, b[$.

Demonstração: Observa-se que, se a raiz r_w é interna ao intervalo $]a, b[$, então $a < r_w < b$, isto é: $a - r_w < 0$ e $b - r_w > 0$,então $(a - r_w)(b - r_w) < 0$. Nota-se também que, se r_e é externa ao intervalo $]a, b[$, por exemplo, se $a < b < r_e$ resulta: $a - r_e < 0$ e $b - r_e < 0$, então $(a - r_e)(b - r_e) > 0$ dai, fazendo $P(a) \cdot P(b)$, tem-se:

$$P(a) \cdot P(b) = [a_n \cdot Q(a) \cdot (a - r_1)(a - r_2)...(a - r_p)] \cdot [a_n \cdot Q(b) \cdot (b - r_1)(b - r_2)...(b - r_p)]$$
$$P(a) \cdot P(b) = a_n^2 \cdot [Q(x) \cdot Q(b)] \cdot [(a - r_1)(b - r_1)] \cdot [(a - r_2)(b - r_2)]...[(a - r_p)(b - r_p)]$$

Verifica-se que $P(a) \cdot P(b)$ é um produto de $p + 2$ fatores numéricos, a saber:

a) Um fator é $a_n^2 > 0$;

b) Um fator é $Q(a) \cdot Q(b) > 0$ pois $Q(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) p fatores do tipo $(a - r_m)(b - r_m)$, em que r_m é raiz da equação dada.

Assim, os único fatores negativos do segundo membro da relação (2) são os fatores correspondentes as raízes de $P(x) = 0$ internas ao intervalo $]a,\ b[$, o que permite concluir a existência de duas possibilidades:

1°) Quando $P(a)$ e $P(b)$ têm mesmo sinal, isto é, $P(a) \cdot P(b) > 0$, existe um número par de fatores negativos do tipo $(a - r_w)(b - r_w)$ e, portanto, existe um número par de raízes reais da equação $P(x) = 0$ que são internas ao intervalo $]a, b[$;

2°) Quando $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, isto é,$P(a) \cdot P(b) < 0$, existe um números ímpar de fatores negativos do tipo $(a - r_w)(b - r_w)$ e, portanto, existe um número ímpar de raízes reais da equação $P(x) = 0$ que são internas ao intervalo $]a, b[$.

$\square$

Considerando o teorema de Bolzano é possível obter o número de raízes de uma equação algébrica dentro de certo intervalo dado (RIBEIRO e BOTELHO, 2016).Uma aplicação disso é: Quantas raízes raiz a equação $x^3 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$ pode apresentar no intervalo $]-1, 1[$? Tem-se $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$, então:

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 1 = -10 < 0$$
$$P(1) = (1)^3 - 3 \cdot (1)^2 + 7 \cdot (1) + 1 = 6 > 0$$

Como $P(-1)$ e $P(1)$ têm sinais contrários, a equação pode ter uma ou três raízes reais no intervalo dado (IEZZI, 2013).

4 MÉTODOS DE RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU

As equações são sentenças matemáticas expressa por uma igualdade e apresenta pelo menos um valor desconhecido representado por um símbolo, geralmente uma letra, denominado incógnita (SILVEIRA, 2015).

4.1 Caminho para resolver uma equação do primeiro grau

O objetivo de resolver uma equação de primeiro grau é descobrir o valor desconhecido, ou seja, encontrar o valor da incógnita que torna a igualdade verdadeira. Assim, isolando o elemento desconhecido em um dos lados do sinal da igualdade e o valor constante do outro pode-se obter o valor da incógnita. Por outro lado, deve-se observa que a mudança de posição desses elementos deve ser feita de forma que a igualdade continue sendo verdadeira (SILVEIRA, 2015).

A equação do primeiro grau pode ser definida da seguinte forma:

Definição 13 Diz-se que uma equação é do primeiro grau com uma incógnita quando tem a seguinte forma:

$$ax + b = 0, com \quad a \neq 0 \tag{26}$$

em que a e b são números reais, sendo x a incógnita.

A incógnita de uma equação pode assumir diversos valores, mas a sentença obtida pode não ser verdadeira para alguns desses valores. Se um desses valores torna a sentença verdadeira, ele é chamado de raiz da equação (SILVEIRA, 2015).

Exemplo 2 Tem-se a identidade $x + 2 = 5$, utilizando a substituição torne essa setença verdadeira.

Solução:

Substituí-se x por 3, obtem-se uma sentença verdadeira.

$$3 + 2 = 5$$

Logo, o número 3 é raiz da equação $x + 2 = 5$.

4.1.1 Equações equivalentes

Considerando as equações $x - 3 = 0$ e $x + 2 = 5$, sendo x pertencente aos reais. O numero 3 é raiz dessa duas equações.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \qquad & x + 2 &= 5 \\ 3 - 3 &= 0 \qquad & 3 + 2 &= 5 \\ 0 &= 0 \qquad & 5 &= 5 \end{aligned}$$

Tem-se que as equações $x - 3 = 0$ e $x + 2 = 5$ são equações equivalentes, pois tem a mesma solução.

Definição 14 Quando uma mesma quantidade é adicionada aos dois membros de uma equação ou subtraída dos dois membros de uma equação, obtém-se uma equação equivalente à equação dada. Esse é o princípio aditivo das igualdades (SILVEIRA, 2015).

Exemplo 3 Aplica-se a definição 14 para resolve a equação abaixo:

$$x - 6 = 10. \tag{27}$$

Solução:

Adiciona-se 6 unidades em cada membro da equação (27)

$$\begin{aligned} x - 6 + 6 &= 10 + 6 \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Faz-se um estudo da raiz da equação (27), tem-se que:

$$x - 6 = 10 \Leftrightarrow x - 16 = 0$$

Aplica-se o teorema 6 no polinômio:

$$P(x) = x - 16$$

Tem-se que o polinômio já se encontra decomposto em fatores do primeiro grau. Como $(x - 16)$ divide $P(x) = x - 16$ pelo teorema 4 16 é raiz da equação (27).

Definição 15 Multiplicando ou dividindo os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à equação dada. Esse é o princípio multiplicativo das igualdades (SILVEIRA, 2015).

Exemplo 4 Aplica-se a definição 15 para resolver a equação abaixo:

$$3y = 15 \tag{28}$$

Solução:

Dividi-se cada membro da equação (28) por 3

$$\frac{3}{3}y = \frac{15}{3}$$
$$y = 5.$$

Faz-se um estuda da raiz da equação (28), tem-se que:

$$3y = 15 \Leftrightarrow 3y - 15 = 0.$$

Usa-se o teorema 6 no polinômio:

$$P(y) = 3y - 15,$$

coloca-se o número 3 em evidência:

$$P(y) = 3(y - 5).$$

logo, o número 5 é raiz da equação (28).

Isso também pode ser mostrado pelo teorema 4. Utiliza-se a preposição 1 para dividir $P(y) = 3y - 15$ por $(y - 5)$

$$\begin{array}{c|cc} & 3 & -15 \\ 5 & & 15 \\ \hline & 3 & 0 \end{array}$$

como $(y-5)$ divide $P(y) = 3y - 15$, então 5 é raiz da equação (28).

Para resolver uma equação do primeiro grau, fazem-se operações aplicando os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, de modo que possam-se obter equações equivalentes cada vez mais simples, até encontrar as soluções da equação (SILVEIRA, 2015).

Exemplos de situações problemas que envolver equações do primeiro grau.

Exemplo 5 Fábio tem x anos e Jorge, $x+42$ anos. Com base na informação de que, juntos, eles têm 66 anos. Qual a idade de Fábio?

Solução:

$$\begin{aligned} x + x + 42 &= 66 \\ 2x + 42 &= 66 \end{aligned} \tag{29}$$

Soma-se -42 em ambos os membros da equação (29)

$$\begin{aligned} 2x + 42 + (-42) &= 66 + (-42) \\ 2x &= 24 \end{aligned} \tag{30}$$

Dividi-se os dois membro da equação (30) por 2:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2}x &= \frac{24}{2} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Logo, a idade de Fábio é 12 anos.

Faz-se um estudo da raiz da equação (29), tem-se que:

$$x + x + 42 = 66 \Leftrightarrow 2x - 24 = 0 \tag{31}$$

Aplicando o teorema 6 no polinômio:

$$P(x) = 2x - 24,$$

coloca-se o número 2 em evidência:

$$P(x) = 2x - 24 = 2(x - 12).$$

Logo, pelo teorema 6 12 é raiz da equação (31). Isso também pode ser provado aplicando a proposição 1 para dividir o polinômio $P(x) = 2x - 24$ por $(x - 12)$:

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & -24 \\ 12 & & 24 \\ \hline & 2 & 0 \end{array}$$

Como $(x - 12)$ dividi $P(x) = 2x - 24$, pelo torema 4, 12 é raiz da equação (31).

Exemplo 6 Pedro e Ernesto colheram juntos, 55 laranjas. Pedro colheu $\frac{4}{7}$ da quantidade colhida por Ernesto. Quantas laranjas Pedro colheu?

Solução:

Sendo x a quantidade de laranjas colidas por Ernesto, a quantidade de laranjas colhidas por Pedro é igual a $\dfrac{4x}{7}$.

$$x + \frac{4x}{7} = 55, \tag{32}$$

multiplica-se o numero 7 em ambos os membro da igualdade (32), tem-se:

$$\begin{aligned} 7x + \frac{7 \cdot 4x}{7} &= 7 \cdot 55 \\ 7x + 4x &= 385 \\ 11x &= 385 \end{aligned} \tag{33}$$

Dividi-se ambos os membros da igualdade (33) por 11:

$$\begin{aligned} \frac{11}{11}x &= \frac{385}{11} \\ x &= 35 \end{aligned}$$

Assim, a quantidade de laranja colhida por Ernesto é 35, por outro lado a quantidade de laranja colhida por Pedro é igual a 20.

Faz-se um estudo da raiz da equação, tem-se que:

$$x + \frac{4x}{7} = 55 \Leftrightarrow 11x - 385 = 0$$

Aplica-se o teorema 6 no polinômio

$$P(x) = 11x - 385,$$

coloca-se o número 11 em evidência:

$$P(x) = 11(x - 35).$$

Logo, 35 é raiz da equação (32).

Por outro lado, utiliza-se a proposição 1 para dividir $P(x) = 11x - 385$ por $(x - 35)$.

$$\begin{array}{c|cc} & 11 & -385 \\ 35 & & 385 \\ \hline & 11 & 0 \end{array}$$

Portanto, pelo teorema 4 35 é raiz da equação (32).

Dessa forma, para resolver uma equação da forma $ax + b = 0$, soma-se o posto de b nos dois lados da igualdade e obtém-se: $ax + b + (-b) = 0 + (-b)$, isso resultará em $ax = -b$. Daí multiplicando ambos os membros da igualdade por $a^{-1} = \frac{1}{a}$, tem-se:

$$x = \frac{-b}{a}$$

obtendo o resultado da equação.

4.2 Procedimentos para resolução de uma equação do segundo grau

Serão analisados três métodos de resolução de equações do segundo grau, o método de completar quadrado, o método no qual é utilizada as relações de Girard e a fórmula geral.

4.2.1 Equações quadráticas

Definição 16 Uma equação do segundo grau ou equação quadrática é uma equação polinomial de grau dois que pode ser escrita da seguinte forma geral:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em que x é uma variável, sendo a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ (SILVEIRA, 2015).

Definição 17 Uma equação do segundo grau é incompleta quando b ou c ou os dois forem iguais a zero, em que $b \ \ e \ \ c$ são números reais (SILVEIRA, 2015).

4.2.2 Fórmula Geral

Aproximadamente na mesma época em que os árabes, entre ele Khowarizmi, estudavam equações, os matemáticos indianos também estudavam a equação do segundo grau. Naquele tempo, os indianos não utilizavam fórmulas como conhecemos hoje, mas o processo de resolução das equações, baseado em regras, se aproxima dos procedimentos que utilizam-se atualmente para resolver uma equação. Hoje, chama-se de formulas geral, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$ (GARBI, 2009).

Pode-se determinar à fórmula geral da seguinte maneira.
Seja a equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad com \quad a \neq 0 \tag{34}$$

1. Somando $-c$ em ambos os membro da equação (34)

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c + (-c) &= (-c) \\ ax^2 + bx &= -c \end{aligned} \tag{35}$$

2. Multiplica-se os dois membros por da identidade (35) $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \tag{36}$$

3. Adiciona-se b^2 aos dois membros da identidade (36):

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \tag{37}$$

4. Com isso, pode-se escrever o primeiro membra da identidade (37) na forma de quadrado da soma:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \tag{38}$$

5. Extraí-se a raiz quadrada dos dois membros da identidade (38), tem-se:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \tag{39}$$

6. soma-se $(-b)$ em ambos os lados da identidade (39), obtém-se:

$$\begin{aligned} 2ax + b - b &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \end{aligned} \tag{40}$$

7. multiplica-se ambos os membros da igualdade 41 por $\dfrac{1}{2a}$, obtém-se:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.2.3 O Método de Completar Quadrados

Completar o quadrado é uma técnica para converter um polinômio que tem o formato da equação (34) em $a(x - m)^2 + h = 0$, em que $h = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ e $m = -\dfrac{b}{2a}$. (DANTE, 2005; MIRANDA, 2003; Khan Academy, 2021).

O procedimento é simples, usando a equação (34) colocando a, obtém-se:

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0 \tag{41}$$

Soma-se $\left(\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2}\right)$ em ambos os membros da equação (41):

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + 0,$$

onde tem-se a seguinte identidade $x^2 + x\dfrac{b}{a} + \dfrac{b^2}{4a^2} = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

Daí,

$$
\begin{aligned}
a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] &= 0 \\
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{4ac - b^2}{4a^2} \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Aplica-se a raiz quadrada nos dois membros da igualdade (42), obtem-se:

$$
\begin{aligned}
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

ou

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observa-se que o método em questão é a base da demonstração da formula geral.

4.2.4 Relações de Girard

Reescreve-se a equação (34), com isso analisa-se o método usando as raízes fórmula geral (SILVEIRA, 2015)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Sabe-se que as raízes da equação do segundo grau resolvido pela formula geral são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad e \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pode-se escrever a soma S das raízes:

$$S = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logo:

$$S = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Usa-se o mesmo procedimento para o produto H das raízes:

$$H = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Desenvolve-se o produto da soma pela diferença dos dois termos:

$$H = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Exemplo 7 Obter soma dos quadrados das raízes da equação(PROFMAT, 2018):

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \tag{43}$$

Solução:

Inicialmente, faz-se um estudo da raízes da equação (43. Pelo teorema 7. Observa-se que as possiveis raízes tem a forma $\frac{p}{q}$ em que p é divisor de 6 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Daí, se a equação tiver raízes racionais, essas estarão no conjunto:

$$\{1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6\}$$

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^4 - 5x + 6$, utiliza-se o intervalo $]-7,\ 7[$, tem-se:

$$P(-7) = 49 + 49 + 6 = 104 > 0$$

$$P(7) = 49 - 49 + 6 = 6 > 0$$

Como $P(-7)$ e $P(7)$ possuem o mesmo sinal, logo existe um número par de raízes reais no intervalo ou não existe raízes reais no intervalo $]-7,\ 7[$. Substituí-se as possíveis raízes racionais na equção $x^4 - 5x + 6 = 0$:

$$\begin{aligned}
1^4 - 5 \cdot 1 + 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 2 = 0\\
(-1)^4 - 5 \cdot (-1) + 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 12 = 0\\
(2)^4 - 5 \cdot (2) + 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 12 = 0\\
(-2)^4 - 5 \cdot (-2) + 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 32 = 0\\
(3)^4 - 5 \cdot (3) + 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 72 = 0\\
(-3)^4 - 5 \cdot (-3) + 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 102 = 0\\
(6)^4 - 5 \cdot (6) + 6 = 0 &\Leftrightarrow 1272 = 0\\
(-6)^4 - 5 \cdot (-6) + 6 = 0 &\Leftrightarrow 1332 = 0
\end{aligned}$$

Assim, pode-se concluir que as raízes da equação não são números racionais.

Faz-se a mudança de variável $x^2 = y$, e subtituindo na equação (43), tem-se a seguinte equação (YOUSSEF et al, 2015):

$$y^2 - 5y + 6 = 0. \tag{44}$$

Serão usados os métodos da fórmula geral, as relações de Girard e o método de completar quadrado para resolver a equação (44).

1°) **Método**: Pelo formula geral, temos que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\\
y &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1}\\
y &= \frac{5 \pm 1}{2}.
\end{aligned}$$

Daí, $y_1 = 3$ e $y_2 = 2$, assim :

$$(x_1)^2 = 3 \Longleftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{3}; \quad e \quad (x_2)^2 = 2 \Longleftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{2}.$$

Dessa forma, a solução da equação (44) são $-\sqrt{3}, \quad -\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}$ e a soma dos quadrados das soluções é:

$$(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 10.$$

2°) **Método**: Resolve-se a equação (44) pelas relações de Girard. Tem-se que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \\ y_1 y_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

assim,

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\dfrac{-5}{1} = 5 \\ \\ y_1 y_2 = \dfrac{6}{1} = 6 \end{cases}$$

Sabe-se que a soma das raízes é 5 e o produto das raízes é 6. Dessa forma, existe alguns números inteiros em que o produto resultará em 6: $\{-2, -3\}$; $\{-1, -6\}$, $\{1,\ 6\}$ *e* $\{2,\ 3\}$; no entanto apenas um desses pares de números resultará em uma soma de valor 5. Logo as raízes procuradas são.

$$y_1 = 2 \quad e \quad y_2 = 3.$$

Com isso,

$$(x)^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}; \quad e \quad (x)^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Portanto, as soluções da equação (43) são $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Somando os quadrados das raízes, tem-se:

$$(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 10$$

3°) **Método**: Usa-se o método de completar quadrado para resolver a equação (44).

Assim, soma-se $[(2{,}5)^2 - (2{,}5)^2]$ na equação (44)

$$\begin{aligned} y^2 - 5y + 6 + (2{,}5)^2 - (2{,}5)^2 &= 0 \\ (y - 2{,}5)^2 - 0{,}25 &= 0 \\ (y - 2{,}5)^2 &= 0{,}25; \end{aligned} \tag{45}$$

Aplica-se a raiz quadrada nos dois membros da equação (45), tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{(y-2{,}5)^2} &= \sqrt{0{,}25} \\ (y - 2{,}5) &= \pm 0{,}5 \\ y_1 = 0{,}5 + 2{,}5 = 3 \quad &e \quad y_2 = -0{,}5 + 2{,}5 = 2 \end{aligned}$$

Daí,

$$x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

e

$$x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Portanto, as soluções da equação (43) são $\{-\sqrt{3}, \ -\sqrt{2}, \ \sqrt{2}, \ \sqrt{3}\}$. Com isso, somando os quadrados das raízes, obtém-se:

$$(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 10.$$

É possível observa que os três métodos têm suas particularidades, nessa questão o método de Girard tem vantagem quanto à eficiência de obtenção de uma resposta em relação aos outros dois métodos.

Exemplo 8 Resolva a equação do segundo grau (PCI CONCURSOS, 2016):

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \tag{46}$$

Solução:

Faz-se, inicialmente, um estudo da raízes da equação (46):

Pelo teorema 7. Observa-se que as possíveis raízes tem a forma $\dfrac{p}{q}$ em que p é divisor de 6 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Daí, se a equação tiver raízes racionais, essas estarão no conjunto:

$$\{1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6\}$$

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^2 - 7x + 6$, utilizar-se o intervalo $]-7,\ 7[$, tem-se:

$$P(-7) = 49 + 49 + 6 = 104 > 0$$

$$P(7) = 49 - 49 + 6 = 6 > 0$$

Como $P(-7)$ e $P(7)$ possuem o mesmo sinal, logo existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais no intervalo $]-7,\ 7[$. Substituí-se as possiveis raízes na equção (46)

$$\begin{aligned}
1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 0 &\Leftrightarrow\ 0 = 0\\
(-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 6 = 0 &\Leftrightarrow 14 = 0\\
(2)^2 - 7 \cdot (2) + 6 = 0 &\Leftrightarrow\ 4 = 0\\
(-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 6 = 0 &\Leftrightarrow 24 = 0\\
(3)^2 - 7 \cdot (3) + 6 = 0 &\Leftrightarrow -6 = 0\\
(-3)^2 - 7 \cdot (-3) + 6 = 0 &\Leftrightarrow 36 = 0\\
(6)^2 - 7 \cdot (6) + 6 = 0 &\Leftrightarrow\ \ 0 = 0\\
(-6)^2 - 7 \cdot (-6) + 6 = 0 &\Leftrightarrow\ 84 = 0
\end{aligned}$$

Assim, as raízes são $\{1,\ 6\}$.

Utiliza-se a fórmula geral, o método de completar quadrado e as relações de Girard para resolver a equação (46).

1° **Método**: Pela fórmula geral, temos $a = 1$, $b = -7$ e $c = 6$:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \\ x &= \frac{7 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Dai,

$$x_1 = \frac{7+5}{2} = 6 \quad e \quad x_2 = \frac{7-5}{2} = 1;$$

Portanto, as soluções são $\{1,\ 6\}$.

2° **Método**: Usa-se o método de completa quadrado para obter as raizes da equação (46)

Como $a = 1$, soma-se $(3{,}5)^2 - (3{,}5)^2$ na equação (46)

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 6 + (3{,}5)^2 - (3{,}5)^2 &= 0 \\ (x - 3{,}5)^2 - 6{,}25 &= 0 \\ (x - 3{,}5)^2 &= 6{,}25. \end{aligned}$$

Daí,

$$(x - 3{,}5) = \pm 2{,}5$$

com isso,

$$x_1 = 3{,}5 + 2{,}5 = 6 \qquad e \qquad x_2 = 3{,}5 - 2{,}5 = 1.$$

Logo, as raízes da equação (46) são $\{1,\ 6\}$.

3° **Método**: Pelas relações de Girard. Tem-se que, $a = 1$, $b = -7$ e $c = 6$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{-7}{1} = 7 \\ \\ x_1 x_2 = \dfrac{6}{1} = 6 \end{cases}$$

Analisa-se os dados, tem-se que a soma das raízes é igual a 7 e o produto das raízes é igual a 6. Os números inteiros em que o produto resultará em 6 são: $\{-3, -2\}$; $\{1,\ 6\}$; $\{2,\ 3\}$; $\{-1, -6\}$. No entanto, os únicos números em que a soma resultá em 7 são $\{1,\ 6\}$. Portanto, as soluções da equação são $\{1,\ 6\}$.

Nesse outro exemplo, o método que envolve a relação estre os coeficientes e as raízes da equação tem uma eficiência maior que os outros dois métodos, o tempo de resolução da fórmula geral e do método de completa quadrado é maior quando comparado com o último método.

Exemplo 9 Determinar as raízes da equação (MENDONÇA, 2021):

$$x^2 - 4x + 12 = 0 \tag{47}$$

Solução:

Faz-se, primeiramente, um estudo das raízes da equção (47). Tem-se que pelo teorema 7 as possiveis raízes tem a forma $\dfrac{p}{q}$ em que p é divisor de 12 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Daí, se a equação tiver raízes racionais, essas estarão no conjunto $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12\}$.

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^2 - 4x + 12$, utiliza-se o intervalo $]-12,\ 12[$. tem-se que:

$$P(x) = x^2 - 4x + 12$$

$$P(12) = 12^2 - 4 \cdot 12 + 12 = 108 > 0$$

$$P(-12) = (-12)^2 - 4 \cdot (-12) + 12 = 204 > 0$$

Como $P(12)$ e $P(-12)$ possuem o mesmo sinal, logo existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais no intervalo $]-12,\ 12[$. Substituí-se as possíveis raízes na equação (47), tem-se:

$$
\begin{aligned}
1^2 - 4 \cdot 1 + 12 &\Longleftrightarrow 9 = 0\\
(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 12 &\Longleftrightarrow 17 = 0\\
2^2 - 4 \cdot 2 + 12 &\Longleftrightarrow 8 = 0\\
(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 12 &\Longleftrightarrow 24 = 0\\
3^2 - 4 \cdot 3 + 12 &\Longleftrightarrow 9 = 0\\
(-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 12 &\Longleftrightarrow 33 = 0\\
4^2 - 4 \cdot 4 + 12 &\Longleftrightarrow 12 = 0\\
(-4)^2 - 4 \cdot (-4) + 12 &\Longleftrightarrow 44 = 0\\
6^2 - 4 \cdot 6 + 12 &\Longleftrightarrow 24 = 0\\
(-6)^2 - 4 \cdot (-6) + 12 &\Longleftrightarrow 72 = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, pode-se concluir que os raízes da equação não são números racionais.

1° **Método**: Pela fórmula geral na equação (47), temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 12$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substitui-se os valores.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}\\
x &= \frac{4 \pm \sqrt{-32}}{2}\\
x &= \frac{4 \pm \sqrt{-32}}{2}\\
x &= \frac{4 \pm 4i\sqrt{2}}{2}\\
x &= 2 \pm 2\sqrt{2}\ i\\
x_1 &= 2 + 2\sqrt{2}\ i \qquad e \qquad x_2 = 2 - 2\sqrt{2}\ i.
\end{aligned}
$$

Esse resultado é assegurado pelo teorema 1.

2° **Método**: Usa-se o método de completar quadrado para obter as raizes da equação

(47):

Soma-se $(+(2)^2 - (2)^2)$ na equação (47), obtém-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 12 + 4 - 4 = 0 \\ (x-2)^2 + 8 = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

adiciona-se (-8) em ambos os membros da equação (48)

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + 8 + (-8) = 0 + (-8) \\ (x-2)^2 = -8 \\ (x-2) = \pm\sqrt{-8}, \end{aligned} \tag{49}$$

soma-se 2 em ambos os membros da igualdade (49)

$$\begin{aligned} x - 2 + 2 &= 2 \pm \sqrt{-8} \\ x &= 2 \pm 2\sqrt{2}\, i \\ x_1 &= 2 + 2\sqrt{2}\, i \quad e \quad x_2 = 2 - 2\sqrt{2}\, i \end{aligned}$$

3° **Método**: Pelas relações de Girard. Tem-se que, $a = 1$, $b = -4$ e $c = 12$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{-4}{1} = 4 \\ \\ x_1 x_2 = \dfrac{12}{1} = 12 \end{cases}$$

Com isso, não se consegui imaginar dois número inteiro que somado dei 4 e o produto dei 12. no entanto, somando e multiplicando as raízes encontrado pela fórmula geral. Tem-se:

A soma

$$S = (2 + 2\sqrt{2}\, i) + (2 - 2\sqrt{2}\, i) = 4,$$

e o produto

$$H = (2 + 2\sqrt{2}\ i) \cdot (2 - 2\sqrt{2}\ i) = 12.$$

Dessa forma, é mais conveniente resolver as equações, em que suas raízes são números complexos, pelo fórmula geral.

5 MÉTODOS DE RESOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO E QUARTO GRAU

No ensino médio as equações do terceiro e quarto grau são resolvidas pela pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficiente inteiro, usando o teorema das raízes racionais, ou pelo método utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini dado uma das raízes, isso significa que a obtenção das outras raízes depende da divisão da equação por essa raiz, consequentemente transformando a equação inicial em uma de grau menor, ou ainda usando a relação de Girard. No entanto, existem formas algébrica de ser resolver esses tipos de equações chamadas de fórmulas de Cardano-Tartaglia para as equações cúbicas e de fórmula de Ferrari para as de quarto grau.

5.1 Procedimentos para resolver uma equação do terceiro grau

O método consiste na substituição $x = y - \dfrac{b}{3}$ na equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ permitindo eliminar o termo de x^2, tornando a equação na variável y da forma $y^3+\alpha y+\beta = 0$ (LIMA, 1987).

Definição 18 A equação mais geral do terceiro grau é:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad como \quad a \neq 0. \tag{50}$$

em que a, b, c e d são números reais (RIBEIRO e BOTELHO, 2016; LIMA, 1987).

Dividi-se a equação (50) por a, tem-se uma equação equivalente da seguinte forma (LIMA, 1987).

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \tag{51}$$

A demonstração do método de Cardano-Tartaglia será mostrada a seguir.

Faz-se a seguinte mudança de variável:

$$x = y - \frac{\frac{b}{a}}{3} = y - \frac{b}{3a}. \tag{52}$$

Substituí-se equação (52) na (51), obtém-se:

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0,$$

desenvolvem-se as potências e distribuindo os coeficientes tem-se:

$$y^3-\frac{2by^2}{3a}+\frac{b^2y}{9a^2}-\frac{by^2}{3a}+\frac{2b^2y}{9a^2}-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{by^2}{a}-\frac{2yb^2}{3a^2}+\frac{b^3}{9a^3}+\frac{cy}{a}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a}=0,$$

como,

$$-\frac{2by^2}{3a}-\frac{by^2}{3a}+\frac{by^2}{a}=0.$$

Obtem-se o seguinte resultado:

$$y^3+\frac{b^2y}{9a^2}+\frac{2b^2y}{9a^2}-\frac{2b^2y}{3a^2}+\frac{cy}{a}-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{9a^3}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a}=0. \tag{53}$$

colocando y em evidência na equação (53), tem-se:

$$\begin{aligned} y^3+\left(\frac{b^2}{9a^2}+\frac{2b^2}{9a^2}-\frac{2b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)y+\left(\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{9a^3}-\frac{bc}{a^2}+\frac{d}{a}\right)&=0\\ y^3+\left(\frac{b^2+2b^2-6b^2+9ac}{9a^2}\right)y+\left(\frac{-b^3+3b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\right)&=0\\ y^3+\left(\frac{-3b^2+9ac}{9a^2}\right)y+\left(\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\right)&=0.\end{aligned}$$

Logo a equação anterior é desprovida do termo x^2, dai pode-se fazer:

$$\alpha=\left(\frac{-3b^2+9ac}{9a^2}\right)$$

e

$$\beta=\left(\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\right).$$

Assim a equação fica na forma:

$$y^3+\alpha y+\beta=0 \tag{54}$$

Para resolver a equação, escreve-se $y = u + v$ e substituí-se não equação (54)

$$
\begin{aligned}
(u+v)^3 + \alpha(u+v) + \beta &= 0 \\
u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + \alpha u + \alpha v + \beta &= 0 \\
u^3 + v^3 + 3u^2v + \alpha u + 3uv^2 + \alpha v + \beta &= 0.
\end{aligned}
$$

Coloca-se u e v em evidência, tem-se:

$$
\begin{aligned}
u^3 + v^3 + (3uv + \alpha)u + (3uv + \alpha)v + \beta &= 0 \\
u^3 + v^3 + (3uv + \alpha)(u+v) + \beta &= 0 \qquad (55)
\end{aligned}
$$

Para que $y = u + v$ seja raiz da equação (54), u e v devem satisfazer a seguintes relações.

$$
\begin{cases}
u^3 + v^3 = -\beta \\
\\
uv = -\dfrac{\alpha}{3}
\end{cases}
$$

ou ainda:

$$
\begin{cases}
u^3 + v^3 = -\beta \\
\\
u^3v^3 = -\dfrac{\alpha^3}{27}
\end{cases}
$$

Observa-se que na relação, tem-se a soma e o produto de dois números quaisquer. Para obter esses dois números u^3 e v^3, deve-se resolver a equação do segundo grau.

$$
s^2 + \beta s - \frac{\alpha^3}{27} = 0
$$

Utiliza-se a fórmula geral;

$$
s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
$$

Tem-se

$$s = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\left(-\frac{\alpha^3}{27}\right)}}{2}$$
$$s = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\left(\frac{\alpha^3}{27}\right)}}{2}$$

Assim, as raízes da equação são:

$$s_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}$$

e

$$s_2 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}$$

daí,

$$u^3 = s_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}$$
$$u = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}.$$

Por outro lado, tem-se:

$$v^3 = s_2 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$$

Como $y = u + v$, obtém-se:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} \tag{56}$$

Dessa forma, o resultado (56 é raiz da equação (54). Considerando uma equação completa:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{57}$$

Tem-se que pela igualdade (52), o valor da raiz da equação (57) é:

$$x = y - \frac{b}{3a}$$
$$x = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} - \frac{b}{3a} \tag{58}$$

Existem três variações para o valor $\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}$, isso mostrará a quantidade de raízes reais ou complexas que a equação possui (RIBEIRO e BOTELHO, 2016).

a) se $\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27} > 0$, a equação tem uma raiz real e duas complexas conjugadas;

b) se $\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27} = 0$, a equação tem três raízes reais, sendo uma repetida;

c) se $\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27} < 0$, as raízes da equação são reais e distintas.

É importante observa que para a variação $\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27} < 0$ tem-se $y = u + v$ como sendo a soma de duas raízes cubica de números complexos, em que as raízes da equação são números reais e distintos, chamado de caso irredutível. Pelo fato de que ao tentar eliminar os radicais, obtem-se outra equação do terceiro grau (LIMA, 1987).

A seguir tem-se a dedução da conveniência subustituição na equação do terceiro grau da expressão $x = y - \frac{b}{3a}$.

Usando a equação (51):

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Faz-se,

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0. \tag{59}$$

Em que A, B e C são números reais. O objetivo é anular o coeficiente de x^2 na mudança de variável:

$$x = y + w \tag{60}$$

Substituí-se (60) em (59), tem-se:

$$(y + w)^3 + A(y + w)^2 + B(y + w) + C = 0$$

Resolvem-se as potências, obter-se o seguinte resultado:

$$y^3 + (2w + w + A)y^2 + (3w^2 + 2wA + B)y + w^3 + w^2A + Bw + C = 0$$

Para que o coeficiente de x^2 seja igual a zero, tem-se que:

$$3w + A = 0$$
$$w = -\frac{A}{3}$$

Portanto, a mudança de variável $x = y - \dfrac{A}{3}$ transforma a equação do terceiro grau completa em uma equação incompleta.

Exemplo 10 Resolva a equação algébrica pelo método mostrado acima (SCHUVAAB, 2013):

$$x^3 - 12x + 16 = 0. \tag{61}$$

Solução:

Faz-se, inicialmente, um estudo das raízes da equação (61).

Pelo teorema 7, tem-se que as possiveis raízes tem a forma $\dfrac{p}{q}$ em que p é divisor de 16 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm 16\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Daí, se a equação possuir raízes racionais, essas estarão no conjunto:

$$\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm 16\}$$

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^3 - 12x + 16$, utilaza-se o intervalo $]-17,\ 17[$:

$$P(-17) = (-17)^3 - 12 \cdot (-17) + 16 = -4693 < 0$$
$$P(17) = (17)^3 - 12 \cdot (17) + 16 = 4725 > 0.$$

Como $P(-17)$ e $P(17)$ têm o sinais diferentes, logo existe um número ímpar de raízes racionais no intervalo $]-17,\ 17[$. Assim, existem uma ou três raízes nesse intervalo.

Substituem-se as possíveis raízes racionais na equação (61):

$$
\begin{aligned}
1^3 - 12 \cdot 1 + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5 = 0\\
(-1)^3 - 12 \cdot (-1) + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 27 = 0\\
2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 32 = 0\\
4^3 - 12 \cdot 4 + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 32 = 0\\
(-4)^3 - 12 \cdot (-4) + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
8^3 - 12 \cdot 8 + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 432 = 0\\
(-8)^3 - 12 \cdot (-8) + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -400 = 0\\
16^3 - 12 \cdot 16 + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3920 = 0\\
(-16)^3 - 12 \cdot (-16) + 16 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -3888 = 0
\end{aligned}
$$

Tem-se que os números 2 e -4 são raízes da equação (61), aplica-se a proposição 1 para dividir $P(x) = x^3 - 12x + 16$ por $(x-2)$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -12 & 16\\
2 & & 2 & 4 & -16\\
\hline
 & 1 & 2 & -8 & 0
\end{array}
$$

Obtém-se a equação:

$$x^2 + 2x - 8 = 0. \tag{62}$$

Aplica-se proposição 1 para dividir $G(x) = x^2 + 2x - 8$ por $(x+4)$:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & -8\\
-4 & & -4 & 8\\
\hline
 & 1 & -2 & 0
\end{array}
$$

obtém-se que $G(x) = x^2 + 2x - 8 = (x+4) \cdot (x-2)$. Pelo teorema 6 tem-se que

$P(x) = x^3 - 12x + 16 = (x-2)\cdot(x+4)\cdot(x-2)$, assim as raízes da equção (61) são $x_1 = x_2 = 2$ e $x_3 = -4$

1°) Pelo procedimento da demomstração:

Aplica-se o método de Cardano-Tartaglia para resolver a equação (61), tem-se que a equação já está na forma:

$$x^3 + \alpha x + \beta = 0.$$

Faz-se a seguinte igualdade:

$$x = u + v, \tag{63}$$

substituí-se(63) em (61), obtém-se:

$$(u+v)^3 - 12(u+v) + 16 = 0,$$

desenvolve-se a equação;

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 12u - 12v + 16 &= 0 \\ (u^3+v^3) + (3uv-12)(u+v) + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Para que $x = u + v$ seja raiz da equação, u e v devem satisfazer a seguinte relação:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 &= -16 \\ \\ u \cdot v &= 4 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} u^3 + v^3 &= -16 \\ \\ u^3 \cdot v^3 &= 64 \end{cases}$$

Como essa relação é de soma e produtos de dois números, pode-se utilizar as relações de Girard. Assim, tem-se a seguinte equação do segundo grau.

$$s^2 + 16s + 64 = 0$$

Pela a fórmula geral, tem-se:

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$s = \frac{-(+16) \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2}$$
$$s = \frac{-16}{2} = -8$$

Como $16^2 - 4.64 = 0$, logo tem-se uma raiz dupla.

$$s_1 = s_2 = -8.$$

Então,

$$u^3 = -8 \Longrightarrow u = -2$$

e

$$v^3 = -8 \Longrightarrow v = -2.$$

Sabe-se que $x = u + v$

$$x = -2 + (-2) = -4.$$

Dessa forma, -4 é raiz da equação (61). Usa-se a proposição 1 para dividir a equação (61)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -12 & 16 \\ -4 & & -4 & 16 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

Tem-se a equação:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \tag{64}$$

Utiliza-se a fórmula geral para resover a equação (64):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

O valor do discriminante da raiz é $(-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$. Logo, obtém-se uma raiz dupla.

$$x = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

Portanto, as raízes da equação (61) são $x_1 = -4$ e $x_2 = x_3 = 2$.

2°) Aplica-se a fómula de Cardano-Tartglia para resolver a equação (61):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}}$$
$$x = \sqrt[3]{-\frac{16}{2} + \sqrt{\frac{16^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{16}{2} - \sqrt{\frac{16^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27}}}$$
$$x = \sqrt[3]{-8 + \sqrt{64 - 64}} + \sqrt[3]{-8 - \sqrt{64 - 64}}$$

Como $\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27} = 0$, tem-se três raízes reais sendo duas iguais:

$$x = \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-8} = -2 - 2 = -4$$

Como -4 é raiz da equação. Aplica-se o raciocínio anterior, usa-se a proposição 1 para dividir a equação (61), obtendo uma equação do segundo grau de raízes duplas $x_2 = \ x_3 = 2$. Assim as raízes encontradas são $x_1 = -4$ e $x_2 = x_3 = 2$.

Exemplo 11 Encontre as raízes equação (SCHUVAAB, 2013):

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0. \tag{65}$$

Solução:

Faz-se, inicialmente, um estuda das raízes da equação (65):

Pelo teorema 7, tem-se que as possíveis raízes tem a forma $\dfrac{p}{q}$ em que p é divisor de (-5) e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 5\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Daí, se a equação possuir raízes racionais, essas estarão no conjunto:

$$\{\pm 1,\ \pm 5\}$$

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$, utiliza-se o intervalo $]-6,\ 6[$:

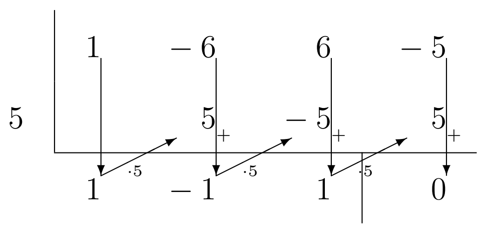
$$\begin{aligned} P(-6) = (-6)^3 - 6 \cdot (-6)^2 + 6 \cdot (-6) - 5 = -390 < 0 \\ P(6) = (6)^3 - 6 \cdot (6)^2 + 6 \cdot (6) - 5 = 31 > 0 \end{aligned}$$

Como $P(-6)$ e $P(6)$ tem o sinais diferentes, logo existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $]-6,\ 6[$. Assim, existem uma ou três raízes nesse intervalo.

Substituí-se as possíveis raízes racionais na equação (65):

$$\begin{aligned} (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -18 = 0 \\ (1)^3 - 6 \cdot (1)^2 + 6 \cdot (1) - 5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 = 0 \\ (-5)^3 - 6 \cdot (-15)^2 + 6 \cdot (-5) - 5 = 0 \quad &\Leftrightarrow -310 = 0 \\ (5)^3 - 6 \cdot (15)^2 + 6 \cdot (5) - 5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

Tem-se que número 5 é raiz da equação (65), aplica-se a proposição 1 para dividir $P(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$ por 5.



Obtém-se a equação:

$$x^2 - x + 1 = 0. \tag{66}$$

Pelo teorema 7, tem-se qua as possíveis raízes estarão no conjunto $\{\pm 1\}$

Usa-se novamente o teorema 8 no poliômio $G(x) = x^2 - x + 1$, e no intervalo $]-2,\ 2[$

$$G(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7 > 0$$
$$G(-2) = (2)^2 - (2) + 1 = 3 > 0$$

Como $G(-2)$ e $G(2)$ tem o mesmo sinal, logo existe um número par de raízes reais ou não existe raízes reais no intervalo.

Substitui-se as possiveis raízes racionais na equação (66), tem-se:

$$(-1)^2 - (-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0(1)^2 - (1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$$

pode-se concluir que a raízes da equação (66) não são números racionais.

Utiliza-se o método de Cardano-Tartaglia para resolver a equação.

Faz-se a mudança de variável:

$$x = y - \frac{b}{3 \cdot a} = y + \frac{6}{3} = y + 2 \tag{67}$$

Substitui-se (67) em (66), tem-se:

$$\begin{aligned} (y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 6(y+2) - 5 = 0 \\ (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) + (-6y^2 - 24y - 24) + (6y + 12) + 5 = 0 \\ y^3 - 6y - 9 = 0 \end{aligned}$$

Aplica-se a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver a equação (65):

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} - \frac{b}{3a} \\ x &= \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} - \frac{6}{3 \cdot 1} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} + 2 \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} + 2 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} + 2$$
$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} + 2$$
$$x = 5$$

Usa-se a proposição 1 para dividir $P(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$ por $(x - 5)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6 & 6 & -5 \\
5 & & 5 & -5 & 5 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}$$

Assim tem-se a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Utiliza-se a fórmula geral de resolução da equação do segundo grau para resolver a equação anterior:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \qquad e \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Assim as raízes da equação (65) são $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ e $x_3 = 5$.

Exemplo 12 Resolva a equação seguinte pelo método de Cardano-Tartaglia (SCHUVAAB, 2013):

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0. \tag{68}$$

Solução:

Faz-se, inicialmente, um estuda das raízes da equação (68):

Pelo teorema 7, tem-se que as possíveis raízes possui a forma $\dfrac{p}{q}$ em que p é divisor de (-6) e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Dai, se a equação tiver raízes racionais, essas estarão no conjunto:

$$\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$$

Usa-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, utiliza-se o intervalo $]-7,\ 7[$:

$$P(-7) = (-7)^3 - 6\cdot(-7)^2 + 11\cdot(-7) - 6 = -720 < 0$$
$$P(7) = (7)^3 - 6\cdot(7)^2 + 11\cdot(7) - 6 = 120 > 0$$

Como $P(-7)$ e $P(7)$ tem o sinais diferentes, logo existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $]-7,\ 7[$. Assim, existem uma ou três raízes nesse intervalo.

Substitui-se as possiveis raízes racionais na equação (68):

$$\begin{aligned}
(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 + 11\cdot(-1) - 6 = 0 &\Leftrightarrow -24 = 0\\
(1)^3 - 6\cdot(1)^2 + 11\cdot(1) - 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-2)^3 - 6\cdot(-2)^2 + 11\cdot(-2) - 6 = 0 &\Leftrightarrow -60 = 0\\
(2)^3 - 6\cdot(2)^2 + 11\cdot(2) - 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-3)^3 - 6\cdot(-3)^2 + 11\cdot(-3) - 6 = 0 &\Leftrightarrow -120 = 0\\
(3)^3 - 6\cdot(3)^2 + 11\cdot(3) - 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-6)^3 - 6\cdot(-6)^2 + 11\cdot(-6) - 6 = 0 &\Leftrightarrow -504 = 0\\
(-6)^3 - 6\cdot(-6)^2 + 11\cdot(-6) - 6 = 0 &\Leftrightarrow \quad 60 = 0
\end{aligned}$$

Tem-se que as raízes da equação (68) são $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.

Utiliza-se o método de Cardano-Tartaglia.

Faz-se a mudança de variável

$$x = y - \frac{b}{3\cdot a} = y - \frac{-6}{3} = y + 2 \tag{69}$$

substitui-se o resultado (69) na equação (68):

$$\begin{aligned}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= 0 \\
(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 11(y+2) - 6 &= 0 \\
y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 16 &= 0 \\
y^3 - y &= 0
\end{aligned}$$

Aplica-se a fórmula de Cardano-Tartaglia

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} - \frac{b}{3a} \\
x &= \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} - \frac{(-6)}{3 \cdot 1} \\
x &= \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}} + 2 \\
x &= \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + 2 \\
x &= 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

Utiliza-se proposição 1 para dividir $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $(x-2)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
2 & & 2 & -8 & 6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & 0
\end{array}$$

Assim, obtém-se a segunte equação do segundo grau.

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

pela fórmula geral, tem-se:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{4 \pm 2}{2} \\
x_1 = 3 \quad e \quad x_2 &= \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Logo as raízes da equação (68) são $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$.

5.2 Método de Ferrari para resolver equações do quarto grau

O método de Ferrari consiste em transforma a equação do quarto grau da forma:

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0 \tag{70}$$

Em uma diferença entre dois quadrados, utiliza-se para isso a equação do terceiro grau (GABI, 2009; MELO, 2014)

Definição 19 Chama-se equação do quarto grau, a uma equação da forma:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad com \quad a \neq 0 \tag{71}$$

em que a, b, c, d, e são números reais (MELO, 2014; RIBEIRO e BOTELHO 2016).

Para transforma a equação (71) na forma da equação (70), tem-se que fazer uma substituição conveniente. Inicialmente, faz-se a divisão da equação (71) pelo coeficiente a.

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0 \tag{72}$$

Faz-se $x = y + m$, com $m \in \mathbb{R}$, e substituí-se na equação (72).

$$(y+m)^4 + \frac{b}{a}(y+m)^3 + \frac{c}{a}(y+m)^2 + \frac{d}{a}(y+m) + \frac{e}{a} = 0 \tag{73}$$

Colocar a equação (72) na variável y, tem-se que objetivo dessa substituição é anular o termo x^3. Calcula-se as potências da equação (73):

1) y^4

2) $\left(4m + \frac{b}{a}\right) y^3$

3) $\left(6m^2 + \frac{b}{a}3m + \frac{c}{a}\right) y^2$

4) $\left(\frac{b}{a}3m^2 + 4m^3 + 2\frac{c}{a}m + \frac{d}{a}\right) y$

5) $\left(m^4 + \frac{b}{a}m^3 + \frac{c}{a}m^2 + \frac{d}{a}m + \frac{e}{a}\right)$

Assim, para $\left(4m + \frac{b}{a}\right) y^3 = 0$, tem-se $\left(4m + \frac{b}{a}\right) = 0$.

$$\begin{aligned}\left(4m + \frac{b}{a}\right) &= 0\\ m &= -\frac{b}{4a}.\end{aligned} \tag{74}$$

Faz-se o coeficiente de y^2 igual a A,

$$A = \left(6m^2 + \frac{b}{a}3m + \frac{c}{a}\right), \tag{75}$$

substituí-se o valor de (74) em (75).

$$\begin{aligned}A &= \left[6\left(-\frac{b}{4a}\right)^2 + \frac{b}{a}3\left(-\frac{b}{4a}\right) + \frac{c}{a}\right]\\ A &= \frac{3b^2}{8a^2} - \frac{3^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\\ A &= \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}.\end{aligned}$$

Iguala-se o coeficiente de y a B, tem-se:

$$B = 4m^3 + \frac{b}{a}3m^2 + \frac{2c}{a}m + \frac{d}{a}, \tag{76}$$

substituí-se (74) em (76), obtém-se:

$$B = \left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right).$$

Por outro lado, fazem-se os coeficientes independentes de y iguais a C:

$$C = \left(m^4 + \frac{b}{a}m^3 + \frac{c}{a}m^2 + \frac{d}{a}m + \frac{e}{a}\right), \tag{77}$$

substituí-se (74) na equação (77), tem-se:

$$C = -\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{cb^2}{16a^3} - \frac{db}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

Dessa forma, substituindo:

$$x = y - \frac{b}{4a}$$

na equação (71), reduz a equação eliminando o termo de x^3 ficando da seguinte forma:

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0 \tag{78}$$

$$y^4 + Ay^2 = -By - C \tag{79}$$

No que segue deve-se soma um valor $\dfrac{A^2}{4}$ de forma a transforma o primeiro membro da equação (79) em um quadrado perfeito.

$$\begin{aligned} y^4 + Ay^2 + \frac{A^2}{4} &= -By - C + \frac{A^4}{4} \\ \left(y^2 + \frac{A}{2}\right)^2 &= -By - C + \frac{A^2}{4} \end{aligned} \tag{80}$$

Agora deve-se soma um valor qualquer D de forma a transforma o segundo membro da equação (80) em um quadrado perfeito, no entanto não se deve altera o primeiro membro da equação, mantendo-o como um quadrado perfeito.

$$\left(y^2 + \frac{A}{2}\right)^2 + D = -By - C + \frac{A^2}{4} + D$$

Assim, $D = 2\left(y^2 + \dfrac{A}{2}\right)w + w^2$, com $w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left(y^2 + \frac{A}{2}\right)^2 + 2\left(y^2 + \frac{A}{2}\right)w + w^2 &= -qy - r + \frac{A^2}{4} + 2\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)w + w^2 \\ \left(y^2 + \frac{A}{2} + w\right)^2 &= -By - C + \frac{A^2}{4} + 2wy^2 + Aw + w^2 \\ \left(y^2 + \frac{A}{2} + w\right)^2 &= 2wy^2 - By + \left(-C + \frac{A^2}{4} + Aw + w^2\right). \end{aligned} \tag{81}$$

Para que o segundo membro da equação (81) seja um polinômio quadrado perfeito, tem-se que $b^2 - 4ac = 0$.

Pela formula geral de resolução da equação do segundo grau, tem-se:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
b^2 - 4ac &= 0 \\
B^2 - 8w\left(-C + \frac{A^2}{4} + Aw + w^2\right) &= 0 \\
B^2 - 2wA^2 + 8wC - 8Aw^2 - 8w^3 &= 0 \\
-8w^3 - 8Aw^2 + 8wC - 2wA^2 + B^2 &= 0 \\
-8w^3 - 8Aw^2 + \left(8C - 2A^2\right) w + B^2 &= 0. \qquad (82)
\end{aligned}
$$

Considera-se w_1 como sendo uma solução da equação (82). Substituí-se w_1 na equação (81), tem-se:

$$\left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1\right)^2 = 2w_1y^2 - By + \left(-C + \frac{A^2}{4} + Aw_1 + w_1^2\right), \qquad (83)$$

Pode-se escrever o segundo membro da equação (83) da seguinte forma:

$$2w_1y^2 - By + \left(-C + \frac{A^2}{4} + Aw_1 + w_1^2\right) = 2w_1 \left(y - y_1\right)\left(y - y_2\right),$$

pois w_1 garante que o segundo membro da equação (83) é um quadrado perfeito. Logo, $y_1 = y_2$.

Daí, tem-se que:

$$2w_1 \left(y - y_1\right)^2 = \left(\sqrt{2w_1}\right)^2 \left(y - y_1\right)^2 = \left(y\sqrt{2w_1} - y_1\sqrt{2w_1}\right)^2.$$

Rescreve-se a equação (83), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1\right)^2 &= \left(y\sqrt{2w_1} - y_1\sqrt{2w_1}\right)^2 \\
\left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1\right)^2 - \left(y\sqrt{2w_1} - y_1\sqrt{2w_1}\right)^2 &= 0 \qquad (84)
\end{aligned}
$$

Coloca-se y_1 em função de w_1, como $y_1 = y_2$ tem-se que a soma das raízes é $S = 2y_1$. Assim, conforme o segundo membro da equação (83):

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{B}{2w_1}$$

daí,

$$\begin{aligned} 2y_1 &= \frac{S}{2} \\ y_1 &= \frac{B}{4w_1} \end{aligned} \tag{85}$$

Pode-se transformar a equação (84) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1\right)^2 - \left(y\sqrt{2w_1} - y_1\sqrt{2w_1}\right)^2 = 0 \\ \left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1 - y\sqrt{2w_1} + y_1\sqrt{2w_1}\right)\left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1 + y\sqrt{2w_1} - y_1\sqrt{2w_1}\right) = 0, \end{aligned}$$

substituí-se a equação (85) na anterio. Tem-se:

$$\left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1 - y\sqrt{2w_1} + \frac{B}{4w_1}\sqrt{2w_1}\right)\left(y^2 + \frac{A}{2} + w_1 + y\sqrt{2w_1} - \frac{B}{4w_1}\sqrt{2w_1}\right) = 0$$

Com isso, tem-se as esquações do segundo grau em y:

$$y^2 - y\sqrt{2w_1} + \frac{A}{2} + w_1 + \frac{B}{4w_1}\sqrt{2w_1} = 0 \tag{86}$$

e

$$y^2 + y\sqrt{2w_1} + \frac{A}{2} + w_1 - \frac{B}{4w_1}\sqrt{2w_1} = 0 \tag{87}$$

Pela formula geral, inicialmente, resolve-se a equação (86):

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{\sqrt{2w_1} \pm \sqrt{2w_1 - 4\left(\frac{A}{2} + w_1 + \frac{B}{4w_1}\sqrt{2w_1}\right)}}{2}$$

Tem-se

$$y_1 = \frac{\sqrt{2w_1} + \sqrt{2w_1 - 4\left(\frac{A}{2} + w_1 + \frac{B}{4w_1}\sqrt{2w_1}\right)}}{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2w_1} + \sqrt{-2w_1 - 2A - \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right)$$

e

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2w_1} - \sqrt{-2w_1 - 2A - \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right)$$

além disso, resolve-se a equação (87):

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-\sqrt{2w_1} \pm \sqrt{2w_1 - 4\left(\frac{A}{2} + w_1 - \frac{B}{4w_1}\sqrt{2w_1}\right)}}{2}$$

Tem-se:

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2w_1} + \sqrt{-2w_1 - 2A + \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right)$$

e

$$y_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2w_1} - \sqrt{-2w_1 - 2A + \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right)$$

Dessa forma, as raízes da equação (78) são y_1, y_2, y_3 e y_4. Portanto, as raízes da equação (71) são:

$$x_1 = y_1 + m = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2w_1} + \sqrt{-2w_1 - 2A - \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right) - \frac{b}{4a}$$
$$x_2 = y_2 + m = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2w_1} - \sqrt{-2w_1 - 2A - \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right) - \frac{b}{4a}$$
$$x_3 = y_3 + m = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2w_1} + \sqrt{-2w_1 - 2A + \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right) - \frac{b}{4a}$$
$$x_4 = y_4 + m = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2w_1} - \sqrt{-2w_1 - 2A + \frac{B\sqrt{2w_1}}{w_1}}\right) - \frac{b}{4a}.$$

Exemplo 13 Resolva a equação seguinte pelo método de Ferrari (MENDONÇA, 2021).

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0 \tag{88}$$

Solução:

Faz-se , inicialmente, um estudo das raízes da equação (88).

Pelo teorema 7, tem-se que as possíveis raízes possui a forma $\frac{p}{q}$ em que p édivisor de 4 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4\}$ e $q \in \{\in 1\}$.

Daí, se a equação possuir raízes racionais, logo estarão no conjunto.

$$\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4\}$$

Aplica-se o teorema 7 no polinômio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$, utiliza-se intervalo $]-5,\ 5[$:

$$P(-5) = (-5)^4 + 4(-5)^3 + 8(-5)^2 - 8(-5) + 4 = 369 > 0$$
$$P(5) = (5)^4 + 4(5)^3 + 8(5)^2 - 8(5) + 4 = 1289 > 0$$

Como $P(-5)$ e $P(5)$ tem o mesmo sinal, logo existe um número par ou nao existe raízes reais no intervalo.

Substituí-se as possíveis raízes racionais na equação (88):

$$\begin{aligned}
(-4)^4 + 4(-4)^3 + 8(-4)^2 - 8(-4) + 4 = 0 &\Leftrightarrow 164 = 0 \\
(4)^4 + 4(4)^3 + 8(4)^2 - 8(4) + 4 = 0 &\Leftrightarrow 612 = 0 \\
(-2)^4 + 4(-2)^3 + 8(-2)^2 - 8(-2) + 4 = 0 &\Leftrightarrow \ 36 = 0 \\
(2)^4 + 4(2)^3 + 8(2)^2 - 8(2) + 4 = 0 &\Leftrightarrow \ 68 = 0 \\
(-1)^4 + 4(-1)^3 + 8(-1)^2 - 8(-1) + 4 = 0 &\Leftrightarrow \ 17 = 0 \\
(1)^4 + 4(1)^3 + 8(1)^2 - 8(1) + 4 = 0 &\Leftrightarrow \quad 9 = 0
\end{aligned}$$

Assim, as raízes da equação (88) não são números racinais.

Aplica-se o método de Ferrari para resolver a equação (88).

Faz-se:

$$x = y - \frac{b}{4a} = y - \frac{1}{4} = y - 1$$

substituí-se na equação (88), tem-se:

$$\begin{aligned}
x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0 \\
(y-1)^4 + 4(y-1)^3 + 8(y-1)^2 - 8(y-1) + 4 = 0,
\end{aligned}$$

desenvolvem-se as potências:

1) $(y-1)^4 = y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$

2) $4(y-1)^3 = 4y^3 - 12y^2 + 12y - 4$

3) $8(y-1) = 8y^2 - 16y + 8$

4) $-8(y-1) = -8y + 8$

5) 4

soma-se os valores dos itens anteriores:

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + 4y^3 - 12y^2 + 12y - 4 + 8y^2 - 16y + 8 - 8y + 8 + 4.$$

Com isso, obtém-se a seguinte equação do quarto grau na variável y;

$$y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0 \tag{89}$$

Outra forma de se chegar a essa equação é calculando o valores de A, B e C:

$$y^4 + Ay^2 + Bx + C,$$

assim,

$$A = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}$$
$$A = \frac{8 \cdot 1 \cdot 8 - 3 \cdot 4^2}{8 \cdot 1^2} = 2;$$

por outro lado, o valor de B é:

$$B = \left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right),$$
$$B = \left(\frac{4^3}{8 \cdot 1^3} - \frac{4 \cdot 8}{2 \cdot 1^2} + \frac{(-8)}{1}\right) = -16;$$

por fim, o valor de C é:

$$C = -\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{cb^2}{16a^3} - \frac{db}{4a^2} + \frac{e}{a}$$
$$C = -\frac{3 \cdot 4^4}{256 \cdot 1^4} + \frac{8 \cdot 4^2}{16 \cdot 1^3} - \frac{(-8) \cdot 4}{4 \cdot 1^2} + \frac{4}{1} = 17$$

com isso, tem-se a equação: $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$.

Faz-se a seguinte manipulação na equação (89):

$$y^4 + 2y^2 = 16y - 17 \tag{90}$$

soma-se 1 na equação (90), obtém-se:

$$y^4 + 2y^2 + 1 = 16y - 17 + 1$$
$$(y^2 + 1) = 16y - 16. \tag{91}$$

Soma-se $2w(y^2+1)+w^2$, com $w \in \mathbb{R}$, na equação (91):

$$\begin{aligned}
(y^2+1)+2w(y^2+1)+w^2 &= 16y-16+2w(y^2+1)+w^2\\
[(y^2+1)+w]^2 &= w^2+2wy^2+2w+16y-16\\
[(y^2+1)+w]^2 &= 2wy^2+16y+(w^2+2w-16) \qquad (92)
\end{aligned}$$

Calcula-se o valor de w para que o segundo membro da igualdade seja um quadrado perfeito. Desse modo, tem-se que o discriminante b^2-4ac da fórmula da equação do segundo grau terá que ser igual a zero.

$$\begin{aligned}
b^2-4ac &= 0\\
(16)^2-4\cdot 2w\cdot(w^2+2w-16) &= 0\\
-8w^3-16w^2+128w+16^2 &= 0 \qquad (93)
\end{aligned}$$

simplifica-se a equação (56) por -8, tem-se:

$$w^3+2w^2-16w-32=0. \qquad (94)$$

Pelo teorema da raízes raicionais, observa-se, nos divisores de -32, que uma das raíze da equação (94) é -2.

Substituí-se -2 na equação (92):

$$\begin{aligned}
[(y^2+1)+w]^2 &= 2wy^2+16y+(w^2+2w-16)\\
[(y^2+1)-2]^2 &= 2\cdot(-2)\cdot y^2+16y+((-2)^2+2\cdot(-2)-16)\\
(y^2-1)^2 &= -4y^2+16y-16\\
(y^2-1)^2 &= -(2y-4)^2.
\end{aligned}$$

Daí, aplica-se a raiz quadrada na equação anterior:

$$\begin{aligned}
(y^2-1) &= \pm\sqrt{-(2y-4)^2}\\
y^2-1 &= \pm i\cdot(2y-4),
\end{aligned}$$

soma-se 1 em ambos os membros da igualdade anterior:

$$y^2 - 1 + 1 = 1 \pm i \cdot (2y - 4)$$
$$y^2 = 1 \pm i \cdot (2y - 4).$$

Logo, obtém-se:

$$y^2 = 1 + i \cdot (2y - 4)$$
$$y^2 - 2iy + 4i - 1 = 0 \tag{95}$$

e

$$y^2 = 1 - i \cdot (2y - 4)$$
$$y^2 + 2iy - 4i - 1 = 0 \tag{96}$$

Usa-se a fórmula geral de resolução da equação do segundo grau nas equações (95):

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4i - 1)}}{2 \cdot 1}$$
$$y = \frac{2i \pm \sqrt{-16i}}{2}$$
$$y = \frac{2i \pm 4i\sqrt{i}}{2}$$
$$y = i \pm 2i\sqrt{i},$$

obtém-se disso $y_1 = (1 + 2\sqrt{i})i$ e $y_2 = (1 - 2\sqrt{i})i$.

Além disso, aplica-se na equação (96):

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y = \frac{-(2i) \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4i - 1)}}{2 \cdot 1}$$
$$y = \frac{-2i \pm \sqrt{16i}}{2}$$
$$y = \frac{-2i \pm 4\sqrt{i}}{2}$$

$$y = -i \pm 2\sqrt{i},$$

obtém-se disso $y_3 = -i + 2\sqrt{i}$ e $y_4 = -i - 2\sqrt{i}$.

Como as raízes da equação (51) são da forma $x = y - 1$, tem-se que:

$$x_1 = y_1 - 1 = (1 + 2\sqrt{i})i - 1$$

$$x_2 = y_2 - 1 = (1 - 2\sqrt{i})i - 1$$

$$x_3 = y_3 - 1 = -i + 2\sqrt{i} - 1$$

$$x_4 = y_4 - 1 = -i - 2\sqrt{i} - 1$$

Portanto, essa são as raízes da equação (88).

Exemplo 14 Resolução da equação do quarto grau pelo método de Ferrari (RIBEIRO e BOTELHO 2016):

$$x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = 0 \tag{97}$$

Solução:

Faz-se , inicialmente, um estudo das raízes da equação (97).

Pelo teorema 7, tem-se que as possíveis raízes possui a forma $\frac{p}{q}$ em que p é divisor de -5 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 5\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Daí, se a equação possuir raíses racionais, essas estarão no conjunto.

$$\{\pm 1,\ \pm 5\}$$

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^4 - 12x^2 + 24x - 5$, utliza-se o intervalo $]-6,\ 6[$:

$$P(-6) = (-6)^4 - 12(-6)^2 + 24(-6) - 5 = 715 >$$

$$P(6) = (6)^4 - 12(6)^2 + 24(6) - 5 = 1003 > 0$$

Como $P(-6)$ e $P(6)$ tem o mesmo sinal, logo existe um número par ou nao existe raízes reais no intervalo.

Substituí-se as possíveis raízes racionais na equação (97):

$$\begin{aligned}(-5)^4 - 12(-5)^2 + 24(-5) - 5 = 0 &\Leftrightarrow \; 200 = 0\\ (-5)^4 - 12(-5)^2 + 24(-5) - 5 = 0 &\Leftrightarrow \; 440 = 0\\ (-1)^4 - 12(-1)^2 + 24(-1) - 5 = 0 &\Leftrightarrow -40 = 0\\ (1)^4 - 12(1)^2 + 24(1) - 5 = 0 &\Leftrightarrow \quad\; 8 = 0\end{aligned}$$

Assim, as raízes da equação (97) não são números racinais.

Como a equação (97) possui o coeficiente de x^3 é igual a zero, aplica-se diretamente o método de Ferrari.

Faz-se a seguinte manipulação na equação (97):

$$x^4 = 12x^2 - 24x + 5 \tag{98}$$

Soma-se $2yx^2 + y^2$ em (98) :

$$\begin{aligned}x^4 + 2yx^2 + y^2 &= 12x^2 - 24x + 5 + 2yx^2 + y^2\\ (x^2 + y)^2 &= (12 + 2y)x^2 - 24x + 5 + y^2 \end{aligned} \tag{99}$$

Para que o segundo membro da equação (99) seja um quadrado perfeito, o discriminante terá que ser igual a zero, assim:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Dai,

$$\begin{aligned}0 &= b^2 - 4ac\\ 0 &= (-24)^2 - 4(12 + 2y)(5 + y^2)\\ 0 &= 576 - (8y^3 + 48y^2 + 40y + 240)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -8y^3 - 48y^2 - 40y + 336 \\
0 &= 8y^3 + 48y^2 + 40y - 336 \\
0 &= y^3 + 6y^2 + 5y - 42 \qquad (100)
\end{aligned}
$$

Pelo teorema 7, analiza-se os divisores de 42, tem-se que 2 é raiz da equação (100).

Substituí-se y por 2, na equação (99):

$$
\begin{aligned}
(x^2 + y)^2 &= (12 + 2y)x^2 - 24x + 5 + y^2 \\
(x^2 + 2)^2 &= 16x^2 - 24x + 9 \\
(x^2 + 2)^2 &= (4x - 3)^2.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$x^2 + 2 = \pm\sqrt{(4x - 3)^2}.$$

Com isso, obtém-se duas equações do segundo grau:

$$x^2 + 2 = +(4x - 3) \qquad (101)$$

e

$$x^2 + 2 = -(4x - 3) \qquad (102)$$

Usa-se a formula geral de resolução da equação do segundo grau na equação (101):

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2 &= +(4x - 3) \\
x^2 - 4x + 5 &= 0
\end{aligned}
$$

tem-se que;

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5}}{2} \\
x &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$x_1 = 2 + i \quad e \quad x_2 = 2 - i$$

Por outro lado; utiliza-se a formula geral na equação (102):

$$x^2 + 2 = -(4x - 3)$$
$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

tem-se que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$
$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x_3 = -2 + \sqrt{5} \quad e \quad x_4 = -2 - \sqrt{5}$$

Logo as raízes da equação(97) são:

$$x_1 = 2 + i; \quad x_2 = 2 - i; \quad x_3 = -2 + \sqrt{5}; \quad x_4 = -2 - \sqrt{5}.$$

Exemplo 15 Ultiliza-se o metodo de ferrari par resolver a equação (RIBEIRO e BOTELHO 2016):

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \tag{103}$$

Solução:

Faz-se , inicialmente, um estudo das raízes da equação (103).

Pelo teorema 7, tem-se que as possíveis raízes possui a forma $\frac{p}{q}$ em que p édivisor de -2 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2\}$ e $q \in \{\in 1\}$.

Daí, se a equação possuir raízes racionais, logo estarão no conjunto:

$$\{\pm 1,\ \pm 2\}$$

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2$, utiliza-se o intervalo $]-3,\ 3[$:

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^4 - 2(-3)^3 + 2(-3)^2 - (-3) - 2 = 154 > 0 \\ P(3) &= (3)^4 - 2(3)^3 + 2(3)^2 - (3) - 2 = 40 > 0 \end{aligned}$$

Como $P(-3)$ e $P(3)$ tem o mesmo sinal, logo existe um número par ou nao existe raízes reais no intervalo.

Substituí-se as possíveis raízes racionais na equação (103):

$$\begin{aligned} (-2)^4 - 2(-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = 0 &\Leftrightarrow\ 40 = 0 \\ (2)^4 - 2(2)^3 + 2(2)^2 - (2) - 2 = 0 &\Leftrightarrow\ \ 4 = 0 \\ (-1)^4 - 2(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = 0 &\Leftrightarrow\ \ 4 = 0 \\ (1)^4 - 2(1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2 = 0 &\Leftrightarrow -2 = 0 \end{aligned}$$

Assim, as raízes da equação (103) não são números racinais.

Aplica-se o método de Ferrari para resolver a equação (103). Faz-se a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 &= -2x^2 + x + 2 \\ (x^2)^2 - 2x^2x &= -2x^2 + x + 2 \end{aligned} \tag{104}$$

soma-se x^2 em (104):

$$\begin{aligned} (x^2)^2 - 2x^2x + x^2 &= -2x^2 + x + 2 + x^2 \\ \left(x^2 - x\right)^2 &= -x^2 + x + 2 \end{aligned} \tag{105}$$

adiciona-se $y^2 + 2y(x^2 - x)$ em ambos os membros da equação (105)

$$\begin{aligned} y^2 + 2y(x^2 - x) + (x^2 - x)^2 &= y^2 + 2y(x^2 - x) - x^2 + x + 2 \\ (y + (x^2 - x))^2 &= y^2 + 2yx^2 - 2yx - x^2 + x + 2 \\ (y + (x^2 - x))^2 &= (2y - 1)x^2 + (1 - 2y)x + y^2 + 2 \end{aligned} \tag{106}$$

para que o segundo membra da (106) seja um quadrado perfeito tem-se que $b^2 - 4ac = 0$.

Assim:

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(1-2y)^2 - 4(2y-1)(y^2+2) = 0$$
$$(1-2y)[(1-2y) + 4(y^2+2)] = 0.$$

Daí, observa-se que quando y e igual a $\frac{1}{2}$ o segundo membra da equação (106) é um quadrado perfeito.

Substituí-se y pelo número $\frac{1}{2}$ na equação (106):

$$\left(\frac{1}{2} + (x^2 - x)\right)^2 = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) x^2 + \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2$$
$$\left(\frac{1}{2} + (x^2 - x)\right)^2 = \frac{9}{4}$$
$$\left(\frac{1}{2} + (x^2 - x)\right) = \pm\frac{3}{2}$$

Com isso, tem-se duas equações do segundo grau:

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{107}$$

e

$$x^2 - x + 2 = 0 \tag{108}$$

Usa-se a fórmula geral de resolução de equação do segundo grau para resolver a equação (107):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1_)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

com isso, as raízes são :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por outro lado, aplica-se o mesmo procedimento na equação (108):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2};$$

dessa forma, as raízes são:

$$\frac{1+\sqrt{7}i}{2} \quad e \quad \frac{1-\sqrt{7}i}{2}.$$

logo, as raizes da equação (103) são $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{7}i}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$.

5.2.1 Caso Particular, $b = 0$ e $d = 0$.

Ao aplicar a mudança de variável $x_n = y_n - \frac{b}{4a}$ na equação do quarto grau:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0 \tag{109}$$

tem-se que os coeficiente de x^3 e x se anulam gerando a seguinte equação:

$$y^4 + Ay^2 + C = 0 \tag{110}$$

Esse tipo de equação do quarto grau pode ser resolvido aplicando a substituição $y^2 = s$, em que s é a nova incógnita (YOUSSEF et al, 2015). Por outro lado, tem-se que a solução da equação (109) que é da forma:

$$x_n = y_n - \frac{b}{4a}; \quad n = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Substituí-se $y^2 = s$, na equação (110):

$$s^2 + As + C = 0 \tag{111}$$

Observa-se que, a equação (111) é do segundo grau, logo pede-se aplicar a fórmula geral:

$$s_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad s_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Daí,

$$y^2 = s_1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{s_1} \begin{cases} y_1 = +\sqrt{s_1} \\ \\ y_2 = -\sqrt{s_1} \end{cases}$$

$$y^2 = s_2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{s_2} \begin{cases} y_3 = +\sqrt{s_2} \\ \\ y_4 = -\sqrt{s_2}. \end{cases}$$

Como a raiz de uma equação do quarto grau, vista anteriormente, e da forma:

$$x_n = y_n - \frac{b}{4a}$$

Logo a equação (109) têm as seguintes raízes:

$$y_1 - \frac{b}{4a}, \quad y_2 - \frac{b}{4a}, \quad y_3 - \frac{b}{4a} \quad e \quad y_4 - \frac{b}{4a}$$

Exemplo 16 Usa-se a substituição $x_n = y_n - \frac{b}{4a}$ para determinar as raízes da equação seguinte: (MELO, 2014).

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0 \tag{112}$$

Solução:

Faz-se , inicialmente, um estudo das raízes da equação (112).

Pelo teorema 7, tem-se que as possíveis raízes possui a forma $\frac{p}{q}$ em que p édivisor de 4 e q é divisor de 1, isto é, $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12,\ \pm 24\}$ e $q \in \{\in 1\}$.

Daí, se a equação possuir raíses racionais, essas estarão no conjunto.

$$\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12,\ \pm 24\}$$

Aplica-se o teorema 8 no polinômio $P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$, utiliza-se o intervalo $]-25,\ 25[$:

$$P(-25) = (-25)^4 - 10(-25)^3 + 35(-25)^2 - 50(-25) + 24 = 570024 > 0$$
$$P(25) = (25)^4 - 10(25)^3 + 35(25)^2 - 50(25) + 24 = 255024 > 0$$

Como $P(-25)$ e $P(25)$ tem o mesmo sinal, logo existe um número par ou nao existe raízes reais no intervalo.

Substituí-se as possíveis raízes racionais na equação (112):

$$\begin{aligned}
(-1)^4 - 10(-1)^3 + 35(-1)^2 - 50(-1) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 120 = 0\\
(1)^4 - 10(1)^3 + 35(1)^2 - 50(1) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-2)^4 - 10(-2)^3 + 35(-2)^2 - 50(-2) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 360 = 0\\
(2)^4 - 10(2)^3 + 35(2)^2 - 50(2) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-3)^4 - 10(-3)^3 + 35(-3)^2 - 50(-3) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 840 = 0\\
(3)^4 - 10(3)^3 + 35(3)^2 - 50(3) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-4)^4 - 10(-4)^3 + 35(-4)^2 - 50(-4) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 1680 = 0\\
(4)^4 - 10(4)^3 + 35(4)^2 - 50(4) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 0 = 0\\
(-6)^4 - 10(-6)^3 + 35(-6)^2 - 50(-6) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 5040 = 0\\
(6)^4 - 10(6)^3 + 35(6)^2 - 50(6) + 24 = 0 &\Leftrightarrow \quad 120 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-12)^4 - 10(-12)^3 + 35(-12)^2 - 50(-12) + 24 = 0 &\Leftrightarrow 43680 = 0\\
(12)^4 - 10(12)^3 + 35(12)^2 - 50(12) + 24 = 0 &\Leftrightarrow 7920 = 0\\
(-24)^4 - 10(-24)^3 + 35(-24)^2 - 50(-24) + 24 = 0 &\Leftrightarrow 491400 = 0\\
(24)^4 - 10(24)^3 + 35(24)^2 - 50(24) + 24 = 0 &\Leftrightarrow 212520 = 0
\end{aligned}$$

Assim, as raízes da equação (112) são $1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Faz-se a substituição $x = y - \dfrac{b}{4a}$ na equação (112):

$$x = y - \frac{b}{4a} \Longrightarrow x = y + \frac{5}{2}$$

Daí, substituí-se na equação (112):

$$\left(y+\frac{5}{2}\right)^4-10\left(y+\frac{5}{2}\right)^3+35\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-50\left(y+\frac{5}{2}\right)+2=0$$

Tem-se que,

$$A=\frac{8ac-3b^2}{8a^2}=\frac{8\cdot 35-3(-10)^2}{8}=-\frac{5}{2},$$

$$B=\frac{b^3}{0a^3}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{d}{a}=\frac{(-10)}{8}-\frac{(-10)\cdot 35}{2}+\frac{(-50)}{1}=0$$

e

$$C=\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{cb^2}{16a^3}-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a}=-\frac{3(-10)^4}{256+\frac{35(-10)^2}{16}}-\frac{(-50)(-10)}{4}+\frac{24}{1}=\frac{9}{16}$$

O desenvolvimento da equação resulta em:

$$y^4-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{16}=0$$

Faz-se $y^2=s$, tem-se:

$$s^2-\frac{5}{2}y+\frac{9}{16}=0$$

Pela fórmula geral, tem-se:

$$s=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$s=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\frac{9}{16}}}{2}$$

$$s=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\cdot\frac{9}{4}}}{2}$$

$$s=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pm 2}{2}=\frac{5\pm 4}{4}$$

$$s_1 = \frac{9}{4} \quad e \quad s_2 = \frac{1}{4}$$

Como $y^2 = s_n$, para $n = \{1, 2\}$ tem-se:

$$y^2 = s_1 = \frac{9}{4} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$
$$y_1 = \frac{3}{2} \quad e \quad y_2 = -\frac{3}{2}$$

Por outro lado;

$$y^2 = s_2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$
$$y_3 = \frac{1}{2} \quad e \quad y_4 = \frac{1}{2}$$

Sabe-se que a solução geral da equação (112) é:

$$x_n = y_n + \frac{5}{2}$$

Para $n = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

$$x_1 = y_1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$
$$x_2 = y_2 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$$

$$x_3 = y_3 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$
$$x_4 = y_4 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

Logo, as raízes da equação (112) são $1,\ 2,\ 3$ *e* 4.

Exemplo 17 Por meio do método anterio resolva o exemplo 15:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \tag{113}$$

Solução:

Faz-se a mudança de variável:

$$x = y - \frac{b}{4a} \tag{114}$$

substituí-se (114) em (113)

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(y+\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y+\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

tem-se os seguintes desenvolvimento:

1) $\left(y+\frac{1}{2}\right)^4 = y^4 + 2y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$

2) $-2\left(y+\frac{1}{2}\right)^3 = -2y^3 - 3y^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$

3) $2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 2y^2 + 2y + \frac{1}{2}$

4) $-\left(y+\frac{1}{2}\right) = -y - \frac{1}{2}$

5) -2

Com isso, obtém-se seginte equação:

$$y^4 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{35}{16} = 0$$

faz-se $y^2 = s$, tem-se:

$$s^2 + \frac{1}{2}s - \frac{35}{16} = 0$$

usa-se a formula para resolver essa equação do segundo grau:

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

tem-se que:

$$s_1 = -\frac{7}{4} \quad e \quad s_2 = \frac{5}{4}$$

para $s_1 = -\dfrac{7}{4}$ tem-se $y = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$. Por outro lado, para $s_2 = \dfrac{5}{4}$ tem-se $y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Como as raizes da equação (113) são representadas por $x = y + \dfrac{1}{2}$, logo pode-se ter as seguntes raizes.

$$x_1 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2},\ x_2 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2},\ x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad e \quad x_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Dessa forma, pode-se observa que usando a substituição de variável, não só elimina o termo de x^3. Como também o termo de x. Aplicando, assim, a fórmula geral da equação do segundo grau.

6 DISCUSSÕES SOBRE OS MÉTODOS DE RESOLUÇÕES

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de mostra as formas algébricas de resolução das equações até o quarto grau.

É impotante observa que, a utilização dos teoremas da decomposição e D'Alembert tornam-se um forma interessante de se chegar a solução de uma equação do primeiro grau. Em relação as equações do sugundo, terceiro e quarto grau, percebe-se que alguns teoremas são de fundamental importância como auxiliadores na resolução de uma equação algébrica. Nesse contexto, o conhecimento desses teoremas tornam-se muito importante na educação básica.

As equações do primeiro grau tem sua forma de resolução baseada nas operações de adição e multiplicação chamados de princípios aditivo e multiplicativo. Percebe-se que a forma ultilizada pelas pessoas quando fazem algum cálculo, possui sua premisa nos princípios aditivo e multiplicativo. Esse algoritmo de resolução é, de fato, o método correto de se resolver. No entanto, esse processo, ao passar do tempo, se transformou em um forma coloquial de se chegar a solução da equação do primeiro grau, à qual em geral é mais aceita pelas pessoas.

A equação do segundo grau, ao contrário a do primeiro, tem três métodos, encontrados nos livros didaticos, de se chegar a sua solução. Esses são denominados de fórmula geral, completar quadrado e relações de Girard. Tem-se que para algumas equações do segundo grau o método que usa as relações de Girard tem uma eficiência maior em relação aos outros dois em questão, principalmente quando as raízes são números inteiros e de valores pequenos. Entretanto, em se tratando de raízes não inteiras, torna-se bastante complicada a resolução pelas relações de Girard. A fórmula geral nos casos em que as raízes não são números inteiros é a melhor opção. Por outro lado, em concursos públicos, a maioria das quetões que envolvem equação do segundo grau são favoráveis a ser resolvidas pelas relações de Girard. Com isso, gera um ganho maior de tempo nesse tipo de prova. Dessa forma, é interessante um estudo mais aprofudado das relações de Girard no ensino fundamental e médio, igualmente à fórmula geral.

Além disso, tem-se a equação do terceiro grau, à qual no ensino médio só é mostrado métodos que auxiliam na resolução da equação, tendo uma raíz conhecida ou alguma relação já evidenciada das raízes. No entanto, aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia pode-se chegar a um solução da equação, como foi observado nos exemplos. Observa-se que o método de Cardano-Tartaglia possui muitas ramificações tornando a resolução da equação mais difícil em alguns casos ou simples em outros, tal qual as relações de Girard para a equação do segundo grau quando a solução não são números inteiro.

Paralelamente a isso, a equação do quarto grau tem uma forma semelhante com a do terceiro grau de se chegar a solução. A substituição, $x = y - \dfrac{b}{4a}$, pode em alguns casos transforma uma equação do quarto grau em uma equação desprovida dos termos x^3 e x. Dessa forma, sendo facilmente resolvida pela fórmula geral. Sabe-se que, a troca de variável elimina o termo x^3, no entanto como foi visto, no exemplo, elimina também o termo de x. Isso demonstra que ao ultilizar a substituição, pode-se rescair em dois tipos de equações do quarto grau; uma resolvida por método de Ferrari é a outra pela fórmula geral.

Como foi observado nos exemplos, as fórmulas de Cardano-Tartaglia e a de Ferrari é de grande ajuda na resolução das equações do terceiro e quarto grau. Nesse sentido, é interessante ser vista no ensino médio, igualmente as equações do primeiro e segundo grau no ensino fundamental.

Em relação ao ensino da matemática pode-se retira do conteúdo do trabalho algumas atividades que podem ser aplicada no ensino básico. Primeiramente, o uso do teorema da decomposição para resolução de uma equação do primeiro grau. Ademais, o uso das relações de Girard em atividades para resoluções de questões do segundo grau relacinada a concursos púplicos e vertibulares. Em relação a equação do terceiro e quarto grau, pode-se aplicar atividades que envolva a substituições de variáveis tonando a equações resoluveis por manipulações algébricas, quando essa for uma equação do terceiro grau, e pela fórmula geral de resolução das equações do segundo grau, quando essa for uma equação do quarto grau.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa que foi realizada teve um papel importante na ampliação da visão das formas de resoluções das equações algébricas, principalmente as dos terceiro e quarto grau.

Inicialmente, apresentou-se os métodos de resoluções das equações do primeiro e segundo grau, em que ultilizou-se alguns livros didaticos, os quais se assemelham a proposta deste trabalho. Mostrou-se as principais formas de resoluções, sendo que alguns métodos tem uma dinâmica muito interesante de se apresentar e facilitar o cálculo, como exemplo, disso, as relações de Girard.

Além disso, discorreu-se sobre as equações do terceiro e quarto grau em que foram apresentadas suas formas algébricas de resoluções, consequentimente suas validações. Assim, sendo possíveis suas abordagens na educação básica. Contrariando os livros didaticos usados na pesquisa deste trabalho, pois não apresentam essas fórmulas como métodos que se possa usar para obter as soluções das referidas equações.

Espera-se que este trabalho inspire os professores a mostrar os vários métodos de resolução de uma equação aos seus alunos. Outrossim, métodos algébricos que torne a resolução simplificada. Por outro lado, que este possa ampliar a visão matemática dos educandos e que isso possa contribuir para sua formação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília:MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em 04 setembro de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília:MEC, 1999. Disponivel em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 15 junho 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Dante Volume único: ensino médio**. 1.ed. São Paulo: Editora Ática, 2005.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algebricas**. 3.ed. São Paulo: Editora Livraria da Fisica, 2009.

GARCIA, Armando e LEQUAIN, Yves. **Elemento da álgebra**. 3.ed. Rio de janeiro:IMPA, 2005.

IEZZI, Gerson. **Fundamentos de Matemática elementar**. 8.ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

IEZZI, Gerson; DOLCE ,Osvaldo; DEGENSZAJN, DAVID; PÉRIGO, Roberto; ALMEI DA, NILZE. **Matemática: Ciências e Aplicações**. 2.ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

Khan Academy, **Método de completar quadrados**. 2021 . Disponivel em :https:pt.khan academy.org/math/algebra/quadratics/solving-quadratics-by-completing-the-square/a/c ompleting-the-square-review. Acesso em 17de novembro de 2021.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras história**. 1991. 2019. Disponivel em :https://matematicatransformadora.com/wp-content/uploads/2019/04/5-SBM-Elon-Lages-Lima-Meu-Professor-de-Matematica-e-Outras-Hist%C3%B3rias.pdf. Acesso em 04 de janeiro de 2021.

LIMA, Elon Langes. **Curso de análise** ; v.1. 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

LIMA, Elon Lages.**EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU**. Matemática Universitária. N^0 5, julho de 1987, 9-23. 2018. Disponivél em : https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_ Artigo01.pdf. Acesso 02 de julho de 2021.

MELO, Claudio Umberto. **O Método de Cardano e Sua Aplicação no Ensino Médio**. Disponivél em :https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3976/2/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Claudio%20Umberto%20de%20Melo%20-%202014.pdf. acesso em 15 de maio 2021.

MIRANDA, Clarice Borges de. **EQUAÇÕES DO** 2 **GRAU E TECNICAS DE RESOLUÇÃO (Um estudo didático da classe** 8^a **série)**. 2003. Disponivél em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96721/Clarice_Borges_Miranda.PDF?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 5 de setembro de 2021.

PCI Concursos. **Infomações Sobre Concursos Publicos. provas** . 2016. Dinponivél em : https://www.pciconcursos.com.br/provas/download/advogado-i-prefeitura-toledo-pr-fafipa-2016 . Acesso em 13 de novenbro de 2020.

PEDROSO, Hermes Antônio. **Um Breve Histórico da Equação do Segundo grau**. 2010. Disponivem em :https://repositorio.unesp.br/handle/11449/122614 . Acesso em 26 de dezembro 2020

PROFMAT. **Mestrado Profinal em Matemática em Rede Nacional, Provas**. 2020. Disponível em : https://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/. Acesso em 20 de outubro de 2020.

RIBEIRO, A. N. L.; BOTELHO, D. S..**Estudo do Cálculo de Raízes de Equações Poli - nomiais**. (2016). Disponível em : https:www2.unifap.br/matematica/files/2017/01/Arlediane-de-Nazar%c3%a9-Lobato-Ribeiro-e-Dayla-Silva-Botelho1.pdf . Acesso em 05 de maio 2021.

PEREIRA, Rodrigo Mendes. **Homolgia Semialgébrica Sobre Corpos Reais Fechados**. 2012. Disponível em : http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/7288/1/2012_dis_rmpereira.pdf . Acesso em 26 de setembro de 2021.

SALVADO, Claudio D' Alessandro. **Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstração para Alunos do Ensino Médio**. 2016. Disponivem em : https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/TCC_Claudio_Salvado.pdf . Acesso em 20 de maoio 2021.

SANTOS, Fernada Manhães; SILVA, Ingred Suély Queiros da. **O ESTUDO DAS EQUAÇÕES QUA DRÁTICAS EM UMA ABORDAGEM HISTÓRICA: CONTRIBUIÇÃO DE RENÉ DESCARTES**. Diponivél em : http://licenciaturas.centro.iff.edu.br/cursoslicen ciatura/licenciatura-em-matematica/trabalho-de-conclusao-de-curso/2015/o-estudo-das - equacoes-quadraticas-em-uma-abordagem-historica-contribuicoes-de-rene- descartes/view. Acesso em 12 de novembro 2020.

SCHUVAAB, Jair Luís. **Resolução de equações algebricas até quarto grau: uma abordagem histórica**. 2013. Disponível em : http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos /File/fevereiro2016/matematica_dissertacoes/dissertacao_jair_schuaab.pdf. Acesso em 11 de março 2021.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e pratica** 7 **ano**. 3.ed. . São Paulo:Editora Modena, 2015

SILVEIRA, Ênio. **Matemática : compreensão e prática** 9 **ano**. 3.ed. São Paulo: Editora Moderna, 2015.

SOUZA, Jadson da Silva. **Números Rais: Um Corpo Ordenado e Completo**. 2013.Disponível em :https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2951/5/Numeros%20Reais%20Um%20Corpo%20Ordenado%20Completo.pdf. Acesso em 25 setembro de 2021.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; Pachi, Clarice da Fonseca; Hessel, Heloísa Maria. **Lingua - gens e aplicações: Matemática**. Ensino Fundamental - Anos Finais - 9 ano - São Paulo: Cereja Editora, 2015.