UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL- PROFMAT

ARLOS VALENTE FILHO

MÉTODO *POH-SHEN LO*:

ESTUDO DE CASO SOBRE A COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO E AQUELE TRADICIONAL APLICADO EM UMA TURMA DE 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

ABAETETUBA - PA
2022

ARLOS VALENTE FILHO

MÉTODO *POH-SHEN LO*:

ESTUDO DE CASO SOBRE A COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO E AQUELE TRADICIONAL APLICADO EM UMA TURMA DE 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, da Universidade Federal do Pará – Campus Universitário do Baixo Tocantins, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa.

ABAETETUBA – PARÁ
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V154m VALENTE FILHO, ARLOS.
Método Poh-Shen Lo : estudo de caso sobre a comparação entre o método e aquele tradicional aplicado em uma turma de 1º ano de ensino médio / ARLOS VALENTE FILHO. — 2022.
75 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2022.

1. Equações do Segundo Grau. 2. Poh-Shen Lo. 3. Matemática. 4. Estudo de caso. I. Título.

CDD 515.252

ARLOS VALENTE FILHO

MÉTODO *POH-SHEN LO*:

ESTUDO DE CASO SOBRE A COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO E AQUELE TRADICIONAL APLICADO EM UMA TURMA DE 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, da Universidade Federal do Pará – Campus Universitário do Baixo Tocantins, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO em: 27 de março de 2022.

PROF. DR. AUBEDIR SEIXAS COSTA
(Orientador – Presidente UFPA)

PROF. DR. ANTONIO TEÓFILO ATAÍDE DO NASCIMENTO
(Examinador Externo – UFPA)

PROF. DR. SEBASTIÃO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO
(Examinador Interno – UEPA)

PROF. DR. JOSÉ FRANCISCO DA SILVA COSTA
(Examinador Interno – UFPA)

Dedico este trabalho trabalho a minha família, meu porto seguro e abrigo em todos os momentos. Em especial meus pais, José Neto Filho e Maria Odete Valente Filho, que com muito amor, esforço e dedicação sempre me apoiaram nos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

São tantas as pessoas que merecem ser lembradas neste momento de agradecer, mas quero deixar aqui minha gratidão àqueles do meu círculo mais próximo.

Ao meu orientador, professor Dr. Aubedir Seixas Costa, que sempre esteve preocupado em criar pontes entre ele e eu, e que, nos momentos agudos teve paciência para me mostrar o melhor caminho;

Aos meus colegas/amigos do PROFMAT – Abaetetuba/2019, e faço questão de citar, nominalmente, os que moram em Abaetetuba: Nélio Nahum, Ivanilton Santos, Tonival Corrêa e Marcel Soares. Sempre muito solidários e receptivos, com suas portas escancaradas para nós os forasteiros.

À UFPA – Campus Universitário do Baixo Tocantins, pela oportunidade.

Minha mãe, dona Maria Odete, meu pai, seu José Neto, amo vocês. Obrigado pelo empenho e dedicação aplicados na minha educação, especialmente diante de tantos desafios pelos quais passamos juntos. Foram tantos altos e baixos que cheguei a duvidar que fosse capaz, mas a senhora, mãe, nunca desacreditou;

Á minha esposa, Driely Valente, que sempre me apoiou e, claro, ao meu filho querido, Davi Valente, que ouviu tantas vezes o meu ‘NÃO’ diante de suas investidas na tentativa me tirar do meu quarto de estudos.

E a todos os meus amigos que compartilharam comigo de todas as etapas para a realização deste sonho.

"O principal objetivo da educação é criar pessoas capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que outras gerações fizeram." (Jean Piaget)

RESUMO

Este trabalho de pesquisa aborda o novo método de Poh-Shen Lo para resolver equações de Segundo Grau. A motivação deu-se pela inquietação oriunda das experiências de sala de aula, juntamente com os debates com colegas de profissão. O objetivo deste trabalho é traçar um estudo comparativo entre o método de resolução de equações de segundo grau tradicional e o método desenvolvido pelo escritor Poh-Shen Lo, a fim de estabelecer se há vantagens no uso didático deste segundo. Para auxiliar nessa discussão, buscou-se argumentos de autores como Boyer (2003), Fragoso (2000) e de outros estudiosos que traçam opiniões sobre o assunto, além de documentos oficiais como o PCN (BRASIL, 1997; 1998). Na descrição da pesquisa bibliográfica, foi buscado destacar a importância da história nas aulas de matemática, relembrando algumas civilizações e matemáticos que contribuíram para a descoberta de fórmulas e métodos de solução prática. O conteúdo em questão foi desenvolvido usando fórmulas para solucionar questões em álgebra e analisar a série cronológica de fatos, identificando os pesquisadores importantes no processo de desenvolvimento da matemática e para desenvolver uma linha do tempo simplificada para que tenham contribuído para o desenvolvimento de tais equações. Como metodologia, além da pesquisa bibliográfica, este trabalho dedicou-se ao desenvolvimento de um estudo de caso em sala de aula do primeiro ano do ensino médio de uma escola no Pará, de modo que foram desenvolvidos planos de aula, testes práticos matemáticos e questionários com objetivos de medir não só a diferença na eficácia de ensino dos métodos analisados, mas o nível de satisfação dos alunos ao fazê-los. Por fim, como resultados, observou-se um aumento considerável na média aritmética da turma quando ensinados através do método de Poh-Shen Lo em relação ao tradicional. Também houve um ganho considerável na autoestima dos alunos em relação ao seu conhecimento matemático e um maior aproveitamento generalizado.

Palavras-chave: Equações do Segundo Grau; Poh-Shen Lo; Matemática.

ABSTRACT

This research work addresses the new Poh-Shen Lo method to solve Second Degree equations. The motivation was given by the restlessness arising from the classroom experiences, together with the debates with colleagues in the profession. The objective of this work is to draw a comparative study between the method of solving traditional quadratic equations and the method developed by the writer Poh-Shen Lo, in order to establish whether there are advantages in the didactic use of the Lo method. To assist in this discussion, arguments from authors such as Boyer (2003), Fragoso (2000) and other scholars who outline opinions on the subject were sought, in addition to official documents such as the PCN (BRASIL, 1997; 1998). In the description of the bibliographic research, it was sought to highlight the importance of history in mathematics classes, recalling some civilizations and mathematicians who contributed to the discovery of formulas and methods of practical solution. The content in question was developed using formulas to solve questions in algebra and analyze the time series of facts, identifying the important researchers in the process of developing mathematics and to develop a simplified timeline for those who have contributed to the development of such equations. As a methodology, in addition to the bibliographic research, this work was dedicated to the development of a case study in the classroom of the first year of high school in a school in Pará, so that lesson plans, practical mathematical tests and questionnaires were developed with the objective of measuring not only the difference in the teaching effectiveness of the analyzed methods, but also the students' level of satisfaction in doing so. Finally, as a result, there was a considerable increase in the arithmetic mean of the class when taught using the Poh-Shen Lo method compared to the traditional one. There was also a considerable gain in students' self-esteem in relation to their mathematical knowledge and a greater generalized achievement.

Keywords: High School Equations; Poh-Shen Lo; Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência fundamental para a sobrevivência humana. Existe uma atmosfera em torno dela que a torna uma disciplina difícil de entender e a coloca em um nível que a maioria das pessoas considera complicado e difícil de assimilar (MASOLA, ALLEVATO). Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o que é realmente necessário é compreender que, como as demais disciplinas, deve ser sempre vista pela sociedade como um todo, como um processo de habilidade e aprendizagem que deve ajudar a justificar as particularidades inseridas em uma ampla rede de relações e ao mesmo tempo a exercer influência nas relações que os sujeitos desenvolvem em seu meio cultural.

Acredita-se que as práticas educacionais diferem de escola para escola, mesmo quando se trata de conteúdos geralmente aceitos, como matemática. Essas diferenças estão relacionadas à forma como a sociedade se organiza e também a especificidades nas histórias de vida de professores e alunos. Ao definir educação, Gallo (2008) afirma que é um processo de formação social do aluno para que ele mesmo possa adotar atitudes de liberdade, respeito e responsabilidade perante a sociedade a partir da reflexão sobre a produção do conhecimento. Ele destacou a necessidade da escola, quando envolvida na formação social dos alunos, de garantir a identificação do caráter político e social desse processo de construção, ensino e aprendizagem do conhecimento.

Partindo de conhecimento empírico acumulado pelos anos como professor, identifico que na escola a matemática é frequentemente apresentada aos alunos sem referência à sua história, enfatizando procedimentos e técnicas em detrimento da reflexão sobre ideias matemáticas e da percepção do significado dos algoritmos, tornando-se uma atividade mecânica. A história é o registro da cultura, aprendendo tradições que podem ser encontradas nas práticas educacionais (GARNICA, SOUZA, 2012).

Com isso em mente, ainda segundo o pensamento de D'Ambrósio (1999), é importante discutir educação olhando os registros históricos e, portanto, não pode-se deixar de lado a história da álgebra, por exemplo, como parte da matemática, mas também como parte integrante do processo educacional. É sempre bom que os alunos compreendam a aplicação da matemática em diversas situações simples ou complexas, a partir das quais possam construir e expandir os seus conhecimentos num processo de aprendizagem permanente, ao longo de toda a sua vida de estudos. Para isso é necessário que o aluno se candidate a financiamento no contexto histórico da matemática.

Estudar as equações é uma parte importante da álgebra escolar, considerando que esta área da matemática é uma que carrega consigo um preconceito por parte dos alunos. Entre os motivos, a presença de letras em meio aos números passa uma imagem de dificuldade elevada, visto aquele é o primeiro contato das crianças e adolescentes com o conteúdo. Observe que os alunos são capazes de operar com símbolos matemáticos, mas às vezes são incapazes de fazer generalizações. Também, encontra-se dificuldades relacionadas ao mal-entendido das técnicas algébricas, juntamente com o mal-entendido dos conceitos algébricos, e geralmente eles sempre perguntam os motivos de se estudar tal conteúdo. Essas perguntas podem vir de métodos que ocultam a natureza da matemática e os processos de criação e generalização do conhecimento matemático (ZATTI et al., 2010).

Neste estudo, pretende-se apresentar uma técnica desenvolvida pelo professor Po-Shen Lo como recurso metodológico para a introdução ou continuação do ensino do conteúdo das equações de 2º grau, tradicionalmente ensinadas no 9º ano do ensino fundamental e no ensino médio. O estudo aqui apresentado é aplicado neste último caso.

Objetiva-se também, despertar a curiosidade dos alunos, motivá-los, e ao mesmo tempo apresentar as origens de alguns elementos que revelam o contexto histórico da matemática, descrevem antigos métodos de resolução e valorizam a construção do conceito de equações do 2º grau. Em resposta a essas questões, é discutido como uma abordagem histórica pode ajudar a esclarecer essas questões.

Será que uma demonstração da fórmula resolutiva de equações quadráticas e um método pedagógico tão simples podem ser novos? O autor e professor norte-americano Po-Shen Lo pesquisou a literatura na língua inglesa sobre a história da matemática e traduções para o inglês consultadas de manuscritos antigos, tradições matemáticas que vão de Diophantus a Brahmagupta, Yang Hui e al-Khwarizmi.

Conforme preservado em suas tabuletas cuneiformes, os babilônios tinham evidências de fórmulas para uma ampla variedade de problemas de natureza quadrática, que remonta ao Antigo Período Babilônico por volta de 2000-1600 a.C. Embora hoje seja possível facilmente usar a substituição para reduzi-los ao padrão de uma variável, os babilônios não tinham uma maneira de resolver essas equações quadráticas padrão, salienta Roque (2012). No entanto, eles consideraram o problema de encontrar as dimensões de um campo retangular dado seu perímetro e área, e tiveram a substituição como chave que foi usada no método de solução atual.

Os antigos matemáticos chineses tinham soluções para problemas práticos de natureza quadrática, como o Problema 20 no Capítulo 9 de Jiu Zhang Suan Shu (Os nove capítulos sobre a arte matemática). Problemas práticos de natureza quadrática continuaram a ser considerados por outros matemáticos chineses, como Yang Hui, do século 13.

Foram muitos os povos que dedicaram atenção às equações quadráticas. Além dos chineses citados anteriormente, gregos, indus, persas, árabes e europeus do período renascentistas contribuíram de maneira fantástica para que se chegasse à formula tal qual a conhecemos hoje. Tendo em vista todo este processo de evolução dos métodos de resolver equações e, inspirado no modelo babilônico, o professor norte-americano Po-Shen Lo publicou em 2019 um artigo no qual ele mostra seu método alternativo para resolver equações quadráticas. Tal método ignora o uso de fórmulas mecânicas e exige do aluno conhecimento voltado ao raciocínio lógico e conhecimento de álgebra natural para aqueles que estão saindo do Ensino Fundamental e entrando no Ensino Médio.

Po-Shen Lo teve seu trabalho publicado em 2019. Após, circularam pela Internet referências de mais trabalhos semelhantes ao seu. Alguns com propostas bem distintas da que o professor estadunidense apresentava; outros, mais semelhantes. O trabalho que mais se aproxima é o de Savage (1989), segundo o próprio autor. Sua abordagem essencialmente sobrepôs-se em alguns cálculos, mas teve algumas diferenças pedagógica sutis que cuminaram com resultados distintos no final. Gowers também havia apresentado uma abordagem semelhante, embora informalmente, mostrando uma maneira natural de deduzir a fórmula para equações de grau 3.

Desta forma, observa-se que o autor ainda não encontrou um livro ou artigo previamente existente que declarasse o mesmo método pedagógico que este artigo e justifica precisamente as etapas, mas existem referências independentes que contêm as ideias-chave e podem ser adaptadas para alcançar este objetivo. Assim, possibilita-se compreender que o método neste artigo tenha sido observado anteriormente por pessoas que não compartilharam suas descobertas.

Neste sentindo, levando em consideração essas observações, propõe-se como **objetivo geral**, destacar o uso da história como suporte no ensino da matemática, em particular, das equações quadráticas. Para alcançar o objetivo, propõe-se como **objetivos específicos:** verificar os processos históricos dos métodos de resolução de equações de grau 2; compreender o desenvolvimento do método apresentado pelo professor Po-Shen Lo; aplicar tal método em sala de aula através de metodologia comparativa com o método tradicional de resolução (Fórmula Resolutiva).

A motivação e justificativa da pesquisa surgiram das inquietações advindas da experiência na docência. Partindo novamente de observações empíricas, fica notória a dificuldade dos estudantes no trato com as equações do 2º grau, em especial, na aplicação da fórmula resolutiva que, na maioria das vezes, quando assimilado pelo aluno, torna-se um processo mecânico, longo, carregado na álgebra e que provoca no discente a sensação de incapacidade de pensar de maneira lógica (BRITO et al., 2019). Para melhor abordagem, o trabalho encontra-se estruturado da seguinte maneira:

Na seção 1, é feito um apanhado histórico dos métodos de resolução de equações quadráticas. Procura-se abordar com base em livros e artigos científicos os primeiros indícios daquilo que pode ser chamado de fórmula; dos métodos primitivos à sua evolução ao longo do tempo, até a publicação do artigo do professor norte-americano Po-Shen Lo que promete simplificar de maneira contundente a forma de resolver equações. Ao percorrer estes caminhos, busca-se entender as dificuldades apresentadas no processo de ensino e aprendizagem do tema.

A seção 2 destina-se a fundamentação teórica, aborda-se de maneira aprofundada o artigo do professor Po-Shen Lo, de dezembro de 2019 e intitulado "*A Simple Proof of the Quadratic Formula*". Aqui, examina-se com rigor a técnica desenvolvida pelo professor Lo, seu embasamento e inspirações. Além de considerar-se a aplicabilidade do processo em salas de aulas, sobretudo suas vantegens frente aos métodos tradicionais.

Nas seções 3 e 4, desenvolve-se a proposta para a aplicação do método desenvolvido por Po-Shen Lo em uma turma do 1º ano do ensino médio da Escola Estadual João Prudêncio de Brito, na Cidade de Parauapebas - Pará. Para tal, é criado um estudo comparativo entre o método tradicional e o de Poh-Shen Lo, de modo que são ministradas três aulas apresentando e explicando cada um dos métodos e aplicado um teste de cada um na quarta aula respectiva ao seu método. A seleção das atividades alinha-se às competências e habilidades que estão previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os resultados obtidos nesta pesquisa serão utilizados para discussão da eficiência do método do professor Lo e da possível adoção de tal método nas escolas.

1 CONTEXTO HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES

Neste capítulo será feito um breve resumo histórico das equações de segundo grau. É sabido que os babilônios, egípcios e gregos usavam técnicas que podiam resolver esses tipos de equações anos antes de Cristo. É sabido também que em uma história da matemática é difícil escolher um ponto de partida. O que não é difícil é imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mais frequente é o de pastores de ovelhas que teriam tido a ideia de controlar o rebanho por meio de associação de cada animal a uma pedra; além disso, fontes indicam que a prática da matemática também estava relacionada a problemas administrativos e, menos frequente, com fins de entretenimento, como mostra o problema 79 do papiro de Rhind, o qual será comentando a seguir. Neste meio, os problemas eram realizados através de anotações em uma tábua de argila utilizando-se de palavras, como uma "receita matemática" que fornecia somente uma raiz positiva, como relata a professora Tatiana Roque, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (URFJ).

1.1 ORIGEM DAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Segundo Elon (2005), o problema de achar dois números conhecendo sua soma e seu produto, questão que pode ser classificada como precursora das equações do 2º grau, é muito antigo. De fato, ele foi resolvido pelos babilônios há cerca de 4 mil anos.

Observando exemplos de problemas que recaem numa equação do 2º grau, contidos em tabletes de argila encontrados na região da mesopotâmia e que datam de aproximadamente 4 mil anos a.C, é possível constatar um tipo de generalidade nos algoritmos usados na solução. Atualmente, estes exemplos são resolvidos por meio de regras gerais que podem ser especificadas para exemplos particulares, os quais são vistos como "casos" de um problema genérico. A generalidade dos algoritmos babilônicos é distinta, pois eles constroem uma lista de exemplos típicos, interpolando-os, em seguida, para resolver novos problemas (ELON, 2005, p.37).

Do citado, pode-se observar que os algoritmos eram enunciados para casos particulares, mas isso não significa que não houvesse um certo tipo de generalidade. Os passos seguidos neste exemplos citados anteriormente são reproduzidos sistematicamente, passando apenas por adaptações de uma situação para outra. Pode-se dizer, portanto, que os problemas eram resolvidos pelo método da interpolação, incorporando-se subalgoritmos dados por certos exemplos previamente resolvidos. Havia alguns exemplos que serviam a uma vasta gama de problemas, resolvidos pela redução a um dos exemplos de base e posterior conversão do resultado para se adaptar ao caso específico.

1.2 PRIMEIROS RELATOS E EVOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Para falar sobre os primódios das equações de segundo grau, deve-se considerar que este tema está presente em registros muito antigos e que o homem, há milênios, lida com problemas com este tipo de equação, sejam de ordem prática, no seu dia a dia, ou ainda com fins de passatempo. Dentre os poucos registros que resistiram ao tempo, destacam-se alguns tabletes em argila, papiros proveniente de uma planta da família das ciperáceas, o Cyperus papyrus, dentre os quais se estaca o Papiro de Rhind, datado de cerca de 1650 a.C., medindo cerca de 30cm de altura e 5m de comprimento e que hoje está localizado no British Museum, em Londres (exceto alguns fragmentos localizados no Brooklyn Museum, em Nova York).

O documento em questão contém e detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, trigonometria básica, geometria, equações lineares e equações quadráticas, sobre as quais dedicaremos maior atenção neste trabalho.

1.3 A “ÁLGEBRA” BABILÔNICA.

Segundo Roque (2012), além dos tabletes contendo o resultado de operações, os babilônios tinham um certo número de tabletes de procedimentos[1], como se fossem exercícios resolvidos. Correspondiam a problemas que, hoje, seriam solucionados por meio de equações. Analizaremos alguns deles em detalhes, com finalidade de mostrar como os babilônios sabiam resolver equações do segundo grau, dentre outras.

A Figura 1.1 traz algumas contas e seus respectivos resultados aritméticos que serão úteis na compreensão dos procedimentos.

[1] Este modelo babilônico de resolver equações quadráticas levou os historiadores O. Neugebauer e B.L. van der Waerden a conjecturarem que a matemática babilônica seria de natureza algébrica, afirma Boyer (2012). O. Neugebauer foi um dos principais responsáveis pelas primeiras traduções dos textos matemáticos babilônicos, mas J. Hoyrup mostrou, recentemente, que elas pressupunham, implicitamente, a natureza algébrica da matemática babilônica e que tais registro mostram que na região, entre os rios Tigre e Eufrates, tenha sido o que podemos chamar de berço das equações quadráticas (RAMOS, 2018).

Figura 1.1 - Resultados aritméticos usados.

(a) $1 \div 2 = 0,30$

(b) $0,30 \times 0,30 = 0,15$

(c) $0,40 \times 0,20 = 0,13;20$

(d) $0,10 \times 0,10 = 0,1;40$

(e) $1 \div 0,40 = 1,30$

(f) $1,30 \times 0,20 = 0,30$

Fonte: O autor.

O exemplo citado a seguir encontra-se na coleção do British Museum, na placa BM 13901. Este problema foi traduzido usualmente assim:

Exemplo 1:

Procedimento[2]: “Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?”

Solução:

(i) Tome 1

(ii) Fracione 1 tomando a metade (:0,30)

(iii) Multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)

(iv) Some 0,15 a 0,45 (:1)

(v) 1 é a raiz quadrada de 1

(vi) Subtraia os 0,30 de 1

(vii) 0,30 é o lado do quadrado.

1.4 TRADUÇÃO MODERNA DA “FÓRMULA” USADA NA BABILONIA.

Segundo ELON (2005), a partir da consulta aos exemplos deixados pelos povos que habitaram a região da Mesopotamia, pode-se constatar um tipo de generalidade nos algoritmos usados na solução dassas equações, o que pode ser traduzido através da álgebra moderna, em uma fórmula. Pode-se tratar tais exemplos pelo método de resolver equações atual. Se há uma equação

[2] Cada passo desse procedimento era executado com a ajuda de um tablete. Por exemplo, a etapa (iii) exigia a consulta a um tablete de multiplicação ou de quadrado, a etapa (v), evidente neste caso particular, era resolvida pela consulta a um tablete de raízes quadradas. Existem vários outros exemplos contidos na placa BM 13901, cujo procedimento para resolver aplica-se exatamente o exposto no exemplo acima, denotando os conhecimentos dos babilônios no que tange a resolução de equações de grau 2 (BARROS, 2020).

do tipo $Ax^2 + Bx = C$, o procedimento exposto a seguir equivale a um roteiro babilônico para resolvê-la. Assim:

1) Multiplique A por C (*obtendo AC*)
2) Encontre metade de B (*obtendo B/2*)
3) Multiplique B/2 por B/2 *(obtendo (B/2)*^{2}*)*
4) Adicione AC a $(B/2)^2$ *(obtendo* $(B/2)^2+AC$*)*
5) A raiz quadarad é $\sqrt{\left(B/_2\right)^2 + AC}$
6) Subtraia $B/_2$ da raiz acima
7) Tome o recíproco de A (obtedo$1/_A$)
8) Multiplique $1/_A$ pelo resultado do passo (6) para obter o lado do quadrado
9) O lado do quadrado é $L = \left(\sqrt{\left(B/_2\right)^2} + AC - \frac{B}{2}\right) . \frac{1}{A}$

Esse modelo de representar o procedimento babilônico para o caso geral de uma equação de tipo $Ax^2 + Bx = C$ sustentou a tese do historiador O. Neugebauer de que a fórmula resolutiva das equações de grau 2 é bem mais antiga que se supunha, visto que, partindo do procedimento acima e a partir de algumas manipulações algébricas é possível chegar à formula que se usa hoje em dia.

1.5 IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DO PROCEDIMENTO BABILÔNICO.

Para o historiador e pesquisador dinamarquês J. Høyrup, novas traduções de papiros e tabletes antigos podem nos levar a conclusões bastante distintas. Observando mais um exemplo, este agora encontrado na placa YBC 6967.

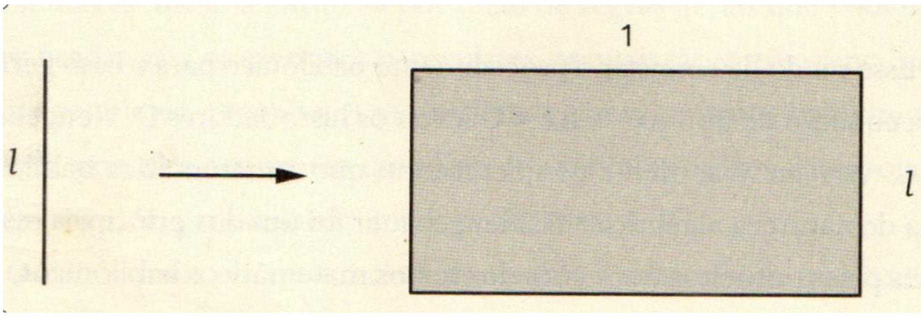
Procedimento: “A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45” (Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação: o lado da superfície, que é um quadrado).

Solução:

(i) 1 é prajoção
(ii) Quebre 1 na metade (obtendo 0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15
(iii) Agregue 0,15 a 0,45
(iv) 1 é o lado igual
(v) Retire do interior de 1 os 0,30 que você reteve
(vi) 0,30 é a confrontação

Segundo J. Høyrup essa versão motiva uma nova interpretação do procedimento, de natureza geométrica. Em primeiro lugar, faz-se uma projeção de 1, que permite interpretar a medida do lado procurado, supondo l, concretamente como um retângulo de lados 1 e l. Os babilônios transformavam, por meio de uma projeção, essa linha de comprimento l em um retângulo com um lado dado por l e o outro medindo 1. Ou seja, eles projetavam o lado l para que se tornasse o lado de um retângulo com área igual a l, como na ilustração 1,

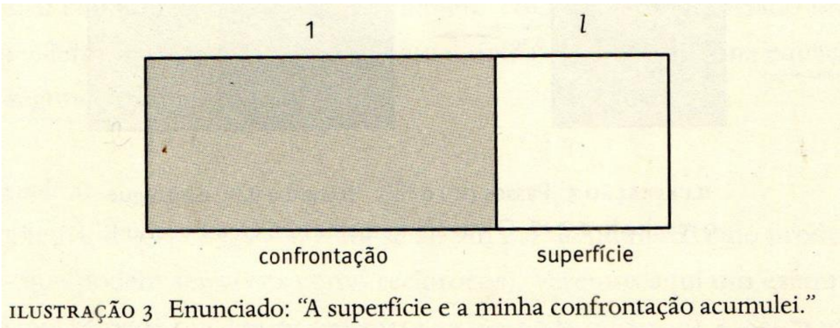
Figura 1.2 - Passo (i): projeção do lado *l*.



Fonte: Roque, 2012, p.67.

Na Figura 1.2, tem-se um retângulo de lados 1 e l e um quadrado de lado l, cuja soma deve dar 0,45 (valor dado no enunciado). Essa figura será “cortada e colada” com o fim de se estabelecer uma equivalência entre medidas de áreas que resolva o problema.

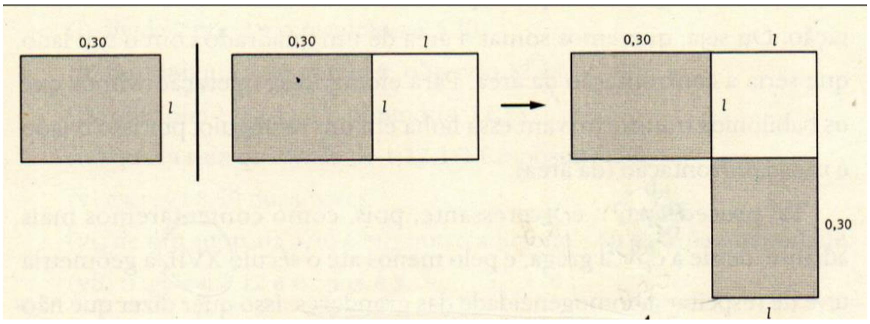
Figura 1.3 - Passo (ii).



Fonte: Roque, 2012, p.67.

No passo (ii), quebrando 1 na metade, o que divide o retângulo inicial em duas partes. Rearrumando as duas metades do retângulo, obtem-se a seguinte figura (Figura 1.3), cuja área é igual à dada inicialmente (0,45).

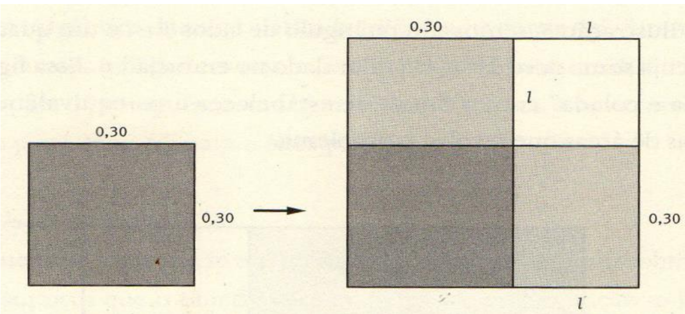
Figura 1.4 - Passo (iii): divisão do retângulo inicial em duas partes



Fonte: Roque, 2012, p.67.

Os lados quebrados, na figura final da ilustração 3, delimitam um quadrado de lado 0,30 que “retenho”, ou seja, multiplico por ele mesmo, obtendo a área de um novo quadrado (015). Essa área pode ser agregada ao conjunto, completando o quadrado e formando um quadrado maior de área 1 (Figura 1.5).

Figura 1.5 - Passo (iv).



Fonte: Roque, 2012, p.67.

Como 1 é o quadrado de 1, 1 é o lado igual. Desse lado, retiro o lado do quadrado menor (0,30). Obtemos, assim, o lado procurado, que é $1 - 0{,}30 = 0{,}30$. É importante observar que esse lado é chamado de “confrontação”, e o enunciado do problema pede que se acumule uma área e uma confrontação. Ou seja, deseja-se somar a área de um quadrado com seu lado, que seria a confrontação da área. Para efetuar essa operação, é observado que os babilônios transformavam essa linha em um retângulo, por isso o lado é uma confrontação da área[3].

1.6 EGITO

Em registros históricos é comum a divisão da humanidade em Eras e Períodos, em particular destacando as referencias culturais e marcos importantes de cada civilização. O surgimento de civilizações que habitavam as margens do rio Nilo é caracterizado pelo uso de metais, sendo uma das poucas tecnologias da época, e por viverem da agricultura e criação de animais como formas de sobrevivência (Boyer, 2010).

Uma parte da matemática egípcia foi encontrada escrita em pedras e através de calendários astronômicos, entretanto, toda a quantidade de informações e ideias seria imprecisa se houvesse dependência apenas destes recursos materiais. Felizmente, certa quantidade de Papiros resistiu ao desgaste do tempo, ao longo de mais de 3500 a.C., contribuindo assim para a descoberta da matemática praticada no Egito Antigo (BOYER, 2010).

O mais extenso dos papiros com natureza matemática é o Papiro de Rhind (Figura 1.6) medindo cerca de 30 cm de altura e 5 m de comprimento que está localizado no British Museum (exceto alguns fragmentos localizados no Brooklyn Museum). Este foi comprado em 1858 pelo escocês Henry Rhind, por isso é conhecido como Papiro de Rhind. Também é conhecido como Papiro de Ahmes em homenagem ao escriba que o copiou (Boyer, 2010).

Muitos dos problemas egípcios são de natureza aritmética, entretanto é possível encontrar no papiro de Rhind outros que merecem a designação de algébricos. Trata-se de soluções de equações lineares da forma $x + ax = b$ ou do tipo $ax^2 + bx = c$, onde a, b e c são conhecidos e x é a incógnita desconhecida denominada “aha”, cuja solução se dava pelo processo denominado de Falsa Posição. Um exemplo deste método pode ser encontrado no problema do papiro de Rhind, que, na linguagem atual é o seguinte: “A soma de áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles igual é igual ao quádruplo do lado do outro.” (PEDROSO, 2010, p. 2).

[3] Tal procedimento é interessante, pois, desde a época grega, e pelo menos até o século XVIII, a geometria teve de respeitar a homogeneidade das grandezas. Isso quer dizer que não era permitido somar uma área com um segmento de reta. A operação utilizada pelos babilônios releva que eles não experimentavam nenhuma dificuldade nesse sentido, uma vez que possuíam um método concreto de transformar um segmento de reta em retângulo, operação traduzida aqui como “projeção”. Høyrup explica que houve uma fase da matemática babilônica em que eram considerados segmentos com espessura, substituídos por retângulos como o da ilustração 1 em escritos posteriores, pertencentes a uma tradição de formação de escribas. Exemplos como esse, envolvendo operações de “cortar e colar” figuras geométricas parecem ter sido comuns na época. Høyrup caracteriza essas práticas como uma “geometria ingênua” (ROQUE, 2012).

Figura 1.6 - Papiro de Rhind.

Fonte: SILVA, 2013.

Convertendo para a linguagem algébrica atual é possível escrever o sistema de equações do segundo grau da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & (1) \\ 4x = 3y & (2) \end{cases}$$

Para resolver este problema é utilizada a álgebra simbólica e o método da falsa posição, aplicado no Egito à época, entretanto vale destacar que a matemática do Egito Antigo é de natureza retórica (forma verbal).

Passo 1: Suponhamos que $x_0 = 3$ então segue de (2) que $y_0 = 4$.

Passo 2: Assim, substituindo em (1) temos que

$3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$

Observe que o par ordenado (3,4) não é solução do problema em questão.

Passo 3: Entretanto, multiplicando os dois membros da expressão acima por 4 temos que:

$4.\ (3^2 + 4^2) = 4.25 \ \rightarrow\ 4.\ 3^2 + 4.\ 4^2 = 100$

Passo 4: Sendo $4 = 2^2$, podemos escrever desta forma:

$2^2.\ 3^2 + 2^2.\ 4^2 = 100 \quad \rightarrow \quad (2.3)^2 + (2.4)^2 = 100$

Logo, segue que $x = 6$ e $y = 8$ é solução do sistema de equações, pois $6^2 + 8^2 = 100$.

1.7 MESOPOTÂMIA.

Aproximadamente a 4000 a.C. foi um período marcado por um progresso cultural através do uso da escrita, da roda e dos metais. Nas regiões do vale mesopotâmico, região localizada entre os rios Tigre e Eufrates, habitava uma civilização que atingiu alto nível, responsáveis pela construção de casas e templos decorados com cerâmicas e mosaicos artísticos em desenhos geométricos: os sumérios (BOYER, 2010).

As civilizações antigas da mesopotâmia frequentemente são designadas de babilônicas, embora nem sempre a cidade da Babilônia tenha sido o centro cultural entre os rios. Um dos avanços culturais desta civilização foi o desenvolvimento da escrita cuneiforme que eram produzidas em tabuletas de barro mole com um estilete sendo estas cozidas pelo sol ou em fornos. Uma destas tabuletas pode ser observada na Figura 1.7.

Figura 1.7 - Exemplo de tabuleta com escrita cuneiforme.

Fonte: UFMG, 2022.

Uma das primeiras aparições das equações quadráticas na civilização babilônica pode ser encontrada no clássico problema a seguir:

Problema: Pede-se o lado de um quadrado sabendo que a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número 870 (BOYER, 2010).

Na simbologia atual, o problema acima é equivalente a resolver a equação quadrática $x^2 - x = 870$. Conforme Pedroso (2010, p. 3) o procedimento realizado pelos escribas nas tabuletas de argila é o seguinte:

Passo 1: Tome a metade de 1 (coeficiente de x).. = 0,5

Passo 2: Multiplique por ela mesma.. = 0,5 x 0,5 = 0,25

Passo 3: Some o resultado a 870 (termo independente)..............................=870,25

Passo 4: obtém-se um quadrado...870,25=$(29,5)^2$

Passo 5: Que é o lado que somado a metade de 1 vai dar 30, o lado do quadrado procurado.

1.8 GRÉCIA

A civilização antiga que desempenhou o papel mais significativo no formalismo matemático conhecido atualmente foi a civilização grega. A partir do século VIII a.C. houve uma destacada mudança de centro cultural do mundo civilizado dos vales dos Grandes Rios: Tigres e Eufrates (Mesopotâmia) e Nilo (Egito) para as margens do Mar Mediterrâneo (MOL, 2013)[4].

Deve-se dar destaque para dois períodos importantes na história matemática grega: O primeiro período conhecido como Helênico, do qual podemos destacar os sistemas de numeração gregos e as contribuições matemáticas de Tales de Mileto, Pitágoras, Platão, Aristóteles, Parmênides e Zenon, entre outros. Por outro lado no segundo período nomeado de Helenista, merecem destaque: Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu, Diofanto além da importante contribuição da obra Os Elementos de Geometria, de Euclides (figura 6). De acordo com Mol (2013, p. 45):

> Os elementos de geometria, de Euclides, representaram o apogeu da matemática na Grécia Clássica. Esta foi a mais brilhante obra matemática grega e um dos textos que mais influenciaram o desenvolvimento da matemática e da ciência. Foi um dos livros mais editados e lidos em toda a história, tendo sido usado como um livro-texto no ensino da matemática até o final do século XIX e início do século XX.

Esta obra é composta de treze livros ou capítulos. Os seis primeiros livros tratam da geometria Plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do circulo. Os três livros seguintes abordam a teoria dos números, o Livro X trata sobre os incomensuráveis, enquanto que os livros XI, XII e XIII enfatizam o estudo da geometria espacial (BOYER, 2010)

O desenvolvimento da Geometria na Grécia, especialmente a partir da obra de Euclides, além da dificuldade no tratamento de números não inteiros levou esta civilização a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre eles, a equação quadrática. Na obra **— Os Elementos de Geometria** é possível encontrar proposições que abordem essa temática. Conforme Pedroso (2010, p. 3):

[4] A matemática desenvolvida tanto na Mesopotâmia quanto no Egito era de natureza prática e concreta. Enquanto na Grécia era de natureza abstrata, com certa independência de aplicações práticas e muitas vezes tinha um viés filosófico. Foram os gregos responsáveis por orientar e organizar a matemática como ciência através do uso de demonstrações que eram instrumentos para garantir a validade dos resultados das argumentações.

> Proposição 28 - Livro VI: Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre a metade do segmento de reta. Em linguagem atual, $x2 - px + q2 = 0$, em que p e q são segmentos dados.

De Acordo com Pedroso (2010, p. 3) o procedimento realizado pela civilização grega para solução da proposição acima é o seguinte:

Passo 1: Sejam AB e PE dois segmentos de reta, em que $\overline{AB} = p$, e $\overline{PE} = q$ e $q < \frac{p}{2}$. Sendo P o ponto médio de AB e o segmento PE ortogonal a AB.

Passo 2: Escolhendo o ponto Q em AB com o ponto Q tal que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ} \,.\, \overline{QB} = q^2$, tem-se a solução procurada. Para isso basta traçar uma circunferência de centro em E e raio p, que cortará o segmento AB no ponto Q. Logo:

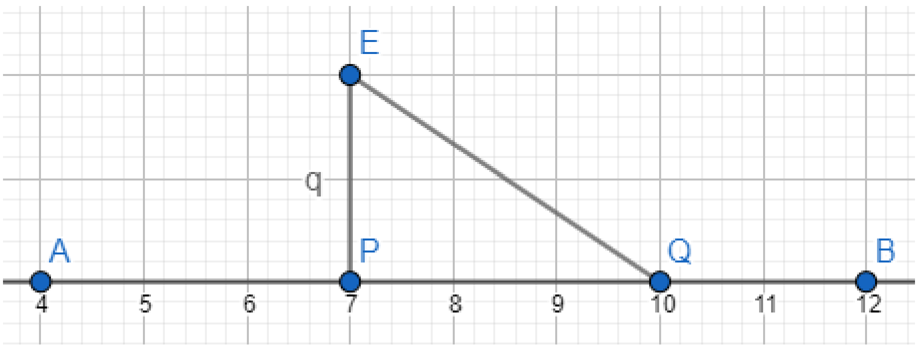
$$q^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2 = (\overline{PB} - \overline{PQ}).(\overline{PB} + \overline{PQ}) = \overline{QB}.\overline{AQ}$$

Passo 3: Finalmente, denotando po $r = \overline{AQ}$ e $s = \overline{QB}$ as raízes da equação dada, conclui-se que:

$$p = r + s \ \text{ e } \ q^2 = r.s$$

Pode-se ter uma representação gráfica da proposição anterior através da figura abaixo:

Figura 1.8 - Representação gráfica do passo 3.



Fonte: O autor.

Na obra de Euclides **Os elementos de geometria** é descrita outra proposição que aborda a temática de equações de segundo grau enunciadas no texto de Pedroso (2010, p. 5) da seguinte maneira:

> Proposição 11-Livro II (segmento áureo): Dividir uma linha reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes tenha área igual a do quadrado sobre a outra parte. De forma equivalente, dado um segmento de reta AB, deve-se determinar o ponto X desse segmento tal que o retângulo de lados AB e XB tenha a mesma área do quadrado de lado AX.

Passo 1: Indicando-se as medidas de AB e AX por a e x, respectivamente, tem-se que a e x devem satisfazer a seguinte equação: $a.(a-x)=x^2$;

Passo 2: Construir o quadrado $ABCD$ sobre o segmento dado AB;

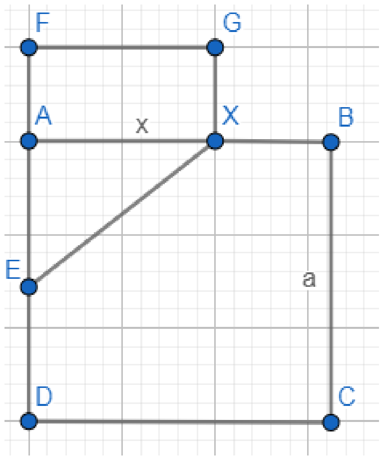
Passo 3: Tomar o ponto médio E, do segmento DA;

Passo 4: Tomar F sobre o prolongamento de DA de maneira que $\overline{EF}=\overline{EB}$;

Passo 5: Construir o quadrado sobre o lado AF no mesmo semi-plano de BC.

Passo 6: O vértice X desse quadrado, pertencente ao segmento AB, é a solução do problema. A Figura 1.9 apresenta com mais detalhes a construção geométricarealizada.

Figura 1.9 - Detalhes da construção geométrica realizada a partir do problema de Euclides.



Fonte: O autor.

Sendo E o ponto médio de AD, então:

$$\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}.a$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABE, tem-se que:

$$\overline{EB} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Sendo $\overline{AX} = \overline{AF} = x$ por construção e:

$$\overline{AF} = \overline{EF} - \overline{EA} = \overline{EB} - \overline{EA} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a.\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$$

Esta é a raiz positiva da equação $a(a - x) = x^2$ que é a medida do segmento AX (PEDROSO, 2010).

1.9 ÍNDIA

Após um longo período onde a Matemática esteve concentrada às Margens do Mar Mediterrâneo (Grécia), e nos Vales dos rios Tigres e Eufrates (Mesopotâmia) e a beira do Rio Nilo (Egito), esta ciência ganhou contribuições vindas da Índia e, sobretudo do Império Árabe (abordado no item seguinte), que trouxeram importantes consequências em sua estrutura. A matemática Indu produziu até o renascimento grandes personagens, dentre os quais destacan-se Aryabhata (séc. VI d.C.), Brahmagupta (séc. VII d.C.), Sridhara (séc XI d.C.) e Bhaskara (1114-1185), que muito contribuíram para a resolução da equação do 2º grau ao resolver problemas. Segundo o próprio Bhaskara a regra que usava e que originou a fórmula atual era devido a Shidhara.

Contudo, a contribuição mais significativa da Índia para a Matemática[5] foi seu sistema de numeração: decimal e posicional, com o uso de nove símbolos e do zero (Figura 1.10). Este sistema de numeração foi resultado de longa evolução interna e de contribuições de elementos de outros povos. A princípio, contava com apenas nove símbolos básicos, o zero surgiu posteriormente para preencher as posições vazias. Com o passar dos anos a grafia passou por transformações até ganhar a forma atual (MOL, 2013).

[5] A matemática hindu produziu grandes colaboradores, dentre estes são destacadas: Aryabhata (século VI D.C.), Brahmagupta (século VII D.C.), Sridhara (século XI D.C) e o mais famoso deles Bhaskara (1114-1185), que muito contribuíram para a resolução da equação de segundo grau (PEDROSO, 2010).

Figura 1.10 - Sistema de numeração Indo-arábico.

Fonte: USP, 2020.

1.10 BHASKARA

Mostrando-se como mais um dos expoentes da matemática ancestral[6], a Índia produziu diversos matemáticos importantes na segunda metade da Idade Média, dentre eles destacamos Bhaskara[7] (1114-1185), o mais importante matemático do século XII. Foi ele que preencheu as lacunas deixadas na obra de Brahmagupta, apresentando uma solução para a equação geral $x^2 = 1 + py^2$ e considerando o problema da divisão por zero (BOYER, 2010).

Mesmo para os mais brilhantes matemáticos hindus, qualquer problema que fosse expresso através de uma equação quadrática era considerado um verdadeiro desafio. Um dos mais famosos problemas do *Lilavati* foi lido em forma de versos em praça pública. Guelli (1995, p. 44) enunciou da seguinte forma:

> Problema Desafio: Um grupo de abelhas, cujo número era igual à raiz quadrada da metade de todo enxame, pousou sobre uml jasmim havendo deixado para trás 8/9 do enxame. Somente uma abelha do mesmo enxame volteava em torno de um lótus atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que, imprudentemente, havia caído no cálice da linda flor de doce fragância. Determine o número de abelhas do enxame.

Desta forma, a tabela disposta na Figura 1.11 apresenta a solução de Bhaskara (esquerda) utilizando a linguagem da época e à direita a tradução atual.

[6] A álgebra da antiguidade tinha carácter retórico (forma verbal) sendo essa uma das dificuldades encontradas pelos hindus nas soluções e no tratamento de equações quadráticas

[7] Suas obras mais conhecidas são o Lilavati 2 e o Vija-Ganita que contém problemas sobre os tópicos favoritos dos Hindus: equações lineares e quadráticas (determinadas e indeterminadas), mensuração, progressões aritméticas e geométricas, tríades pitagóricas, entre outros (BOYER, 2010).

Figura 1.11 - à esquerda a solução de Bháskara com linguagem da época e à direita a tradução atual.

Seja $ya\ v\ \ 2$ o número de abelhas do enxame	Seja $2x^2$ o número de abelhas do enxame
A raiz quadrada da metade desse número é $ya\ 1$	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$
Oito nonos de todo o enxame é $ya\ \ v\ \ \frac{16}{9}$	Oito nonos de todo o enxame é $\left(\frac{16}{9}\right)x^2$
A soma da raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame, isto é, $ya\ v\ \ 2$	$x + \left(\frac{16}{9}\right)x^2 + 2 = \ 2x^2$
Reduzindo-se ao mesmo denominador os dois membros da equação e eliminando o denominador, a equação transforma-se em: $ya\ \ v\ \ 18\ \ 0\ \ ru\ \ 0$ $ya\ \ v\ \ 16\ \ ya\ 9\ \ ru\ \ 18$	$\frac{9x+16x^2+18}{9} = \frac{18x^2}{9} \quad \leftrightarrow$ $18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$
Após a subtração a equação torna-se $ya\ \ v\ \ 2\ \ ya\ \ 9\ \ ru\ \ 0$	$18x^2 - 16x^2 - 9x = 18 \ \leftrightarrow$ $2x^2 - 9x = 18$
Portanto ya é 6	Portanto, $x = 6$
Donde $ya\ v\ \ 2$ é 72	Donde $2x^2 = 2\,.\,6^2 = 72$

Fonte: ROQUE, 2012.

1.11 ARÁBIA

No século VII da era cristã, surgiu uma civilização arábica cuja religião islâmica ou mulçumana teve fortes influências no desenvolvimento da ciência. Baseado nos ensinamentos do profeta Maomé e no texto sagrado do Alcorão, um dos princípios islâmico das cinco orações voltado para a cidade de Meca impuseram desafios para a medição do tempo e a orientação geográfica resultando em estímulos para o avanço da astronomia e da matemática (MOL, 2013).

O profeta Maomé fundou um Estado baseado na fé Islâmica, liderados por seus sucessores, os califas, que expandiram os territórios que se estendiam da Índia a península Ibérica, passando pelo Oriente Médio e Norte da África. Nos países conquistados, os árabes encontraram civilizações com grau avançado de desenvolvimento em se tratando de culturas e padrões intelectuais (MOL, 2013).

Através desta difusão cultural o mundo árabe passou a dar importância no desenvolvimento da ciência transformando suas cidades em grandes centros de saber.

1.12 A CASA DA SABEDORIA

A cidade de Bagdá construída pelo califa Abu Jafar al-Mansur passou a ser a capital oriental do conhecimento e produção cientifica. Nela foi fundada a biblioteca que ficou conhecida como Casa da Sabedoria, que inicialmente se ocupou de traduções para o árabe de textos persas, hindus e gregos. Posteriormente, evolui tornando-se uma instituição de pesquisa e produção cientifica de grande destaque no período entre os séculos IX e XIII (MOL, 2013).

Um estudioso de grande importância vinculado à casa da sabedoria foi o matemático e astrônomo Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780-850) que exerceu influência significativa nos rumos da matemática. Duas obras dele merecem destaque: ―Livro da Adição e da Subtração segundo o Cálculo dos Indianos” e o "Tratado sobre Cálculo da Al-Jabr e Al-Muqabalah”. No primeiro texto são discutidos temas sobre o sistema de numeração decimal hindu e as operações feitas neste sistema (MOL, 2013).

Uma segunda obra fundamental do árabe Al-Khowarizmi foi o Tratado sobre Cálculo da Al-Jabr e Al-Muqabalah, sendo este livro considerado o alicerce da álgebra como área de conhecimento matemático. Nesta obra, o autor descreve soluções de equações de primeiro e segundo graus, tratados de maneira retórica, isto é, na forma verbal. De acordo com o quadro abaixo disposto na Figura 1.12 pode ser observado o procedimento realizado por Al-Khowarizmi para solução da equação quadrática a seguir:

$$x^2 + 10x = 39$$

Figura 1.12 - à esquerda o procedimento usado por Al-Khowarizmi para solução de equação quadrática na época; à direita a solução atual.

Solução de Khowarizmi	Solução atual
Somando o quadrado com dez raízes, vamos encontrar trinta e nove.	$x^2 + 10x = 39.$
Devemos determinar a metade das raízes desta forma	$\frac{10}{2}$ (na linguagem atual representa a metade do coeficiente de x).
Multiplicar esta metade por si mesma, o que dá vinte e cinco.	$\frac{10}{2} \cdot \frac{10}{2} = 5 \cdot 5 = 25$
Vinte e cinco somado ao quadrado e às dez raízes resulta em sessenta e quatro	$x^2 + 10x + 25 = \underbrace{39 + 25}_{64}$
Então, o número que multiplicado por si mesmo dá sessenta e quatro é oito.	$(x+5)^2 = 64$ $x + 5 = \sqrt{64}$ $x + 5 = 8$
E se do oito diminuímos cinco unidades, vamos descobrir que uma raiz vale três unidades.	$x = 8 - 5 = 3$

Fonte: ROQUE, 2012.

Em sua segunda obra Al-Khowarizmi reduziu as equações de segundo grau em seis tipos canônicos. Conforme Mol (2013, p. 67) tem-se o seguinte:

Tipo 1: $ax^2 = bx$ (quadrado igual a uma raiz);

Tipo 2: $ax^2 = c$ (quadrado igual a um número);

Tipo 3: $bx = c$ (raiz igual a um número);

Tipo 4: $ax^2 + bx = c$ (quadrado e raiz igual a um número);

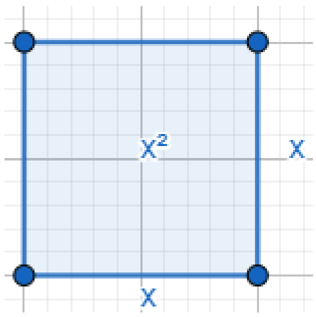
Tipo 5: $ax^2 + c = bx$ (quadrado e número igual a uma raiz);

Tipo 6: $bx + c = ax^2$ (raiz e número igual a um quadrado).

No século IX, o sábio mulçumano Al-Khowarizmi, descobriu um brilhante método para comprovar geometricamente quando um número positivo é raiz de uma equação do 2º grau dada, fato este que deu início a chamada álgebra geométrica. De acordo com Guelli (1995, p. 31), pode ser verificado se a resposta $x = 4$ é efetivamente a solução positiva da equação $x^2 + 8x = 48$, por exemplo.

Passo 1: Inicialmente ele desenhou um quadrado, cuja área representa o termo $x2$ (Figura 1.13).

Figura 1.13 - Passo 1 da solução do problema do número positivo.



Fonte: GUELLI, 1995, p.32.

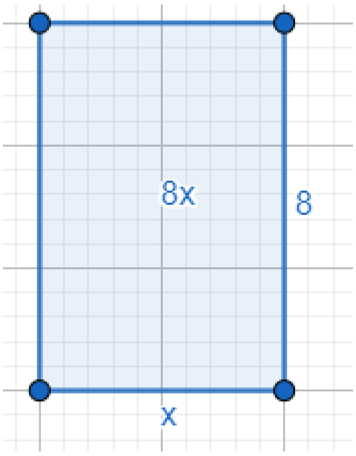
Passo 2: O termo $8x$ é interpretado como a área de um retângulo de lados

8 e x (Figura 1.14).

Passo 3: Dividimos esse retângulo em quatro retângulos de mesma área (Figura 1.15).

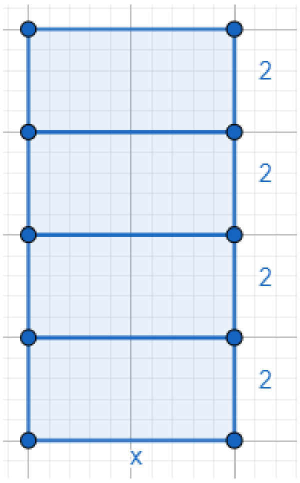
Passo 4: Sobrepondo cada um desses quatro retângulos sobre os lados do quadrado de área $x2$ (Figura 1.16).

Figura 1.14 - Passo 2 da solução do problema do número positivo.



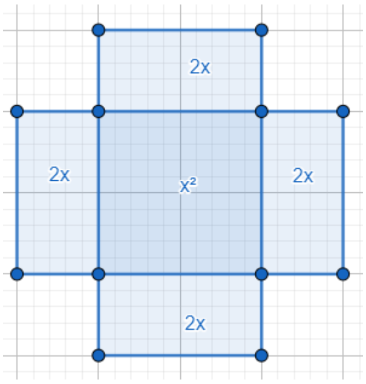
Fonte: O autor.

Figura 1.15 - Passo 3 da solução do problema do número positivo



Fonte: O autor.

Figura 1.16 - Passo 4 da solução do problema do número positivo.



Fonte: O autor.

A área da figura formada é igual a:

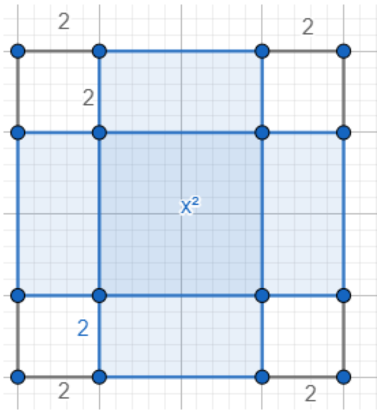
$$x^2 + 4 \cdot 2x = x^2 + 8x$$

Como:

$$x2 + 8x = 48$$

A área dessa figura é 48. Em seguida, Al-khowarizmi completou o quadrado (Figura 1.17):

Figura 1.17 - Complemento do quadrado por Al-Khowarizmi.



Fonte: O autor.

A área deste quadrado é igual a:

$$48 + 4.\, 2^2 = 48 + 16 = 64.$$

Portanto, o lado do quadrado é 8 e assim:

$$2 + x + 2 = 8$$

Resultando em $x = 4$. Desta forma, o famoso sábio árabe mostrou que 4 é uma raiz da equação $x^2 + 8x = 48$.

1.13 CHINA

A China antiga era um império vasto, em crescimento, com um código legal rigoroso, cobrança de impostos, e um sistema padronizado de pesos, medidas e dinheiro. O império usava o sistema decimal cerca de mil anos antes do Ocidente adotá-lo, e resolviam equações que só surgiriam no outro lado do mundo no início do século 19 (BOYER, 2010). A mitologia chinesa diz que o primeiro soberano da China, o Imperador Amarelo, fez com que uma de suas divindades criasse a matemática no ano 2800 a.C., pois acreditava que os números tinham um significado cósmico. Até hoje, a cultura chinesa mantém crenças no poder místico dos números: Números ímpares são vistos como "masculinos", os números pares, como "femininos". O número quatro deve ser evitado a todo custo. O número oito traz boa sorte.

Os antigos chineses eram fascinados por padrões em números, e desenvolveram sua própria versão do jogo sudoku. No século 6, o teorema do resto chinês já estava sendo usado na astronomia chinesa para medir movimentos planetários – e até hoje ele tem usos práticos, por exemplo, para criptografia na internet.

A civilização chinesa foi responsável por inúmeras inovações tecnológicas, tais como: o uso da impressão e da pólvora (oitavo século), do papel e da bússola (século onze), dentre tantas outras invenções importantes para a humanidade. Do ponto de vista da matemática chinesa é possível afirmar que havia vários matemáticos trabalhando em diversas partes da China, porém houve poucas relações entre eles (BOYER, 2010).

O texto matemático chinês antigo que mais merece destaque é os Nove Capítulos sobre a Arte matemática. De acordo com Eves (2004, p. 243):

> Nele estão estabelecidos os traços da matemática antiga da China: cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa sequencia de problemas aplicados. O trabalho é rico em conteúdo consta de 246 problemas sobre agriculta, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resoluções de equações e propriedades de triângulos retângulos. São dadas regras de resoluções, mas não há demonstrações nosentido grego.

O mais famoso matemático chinês foi Chu Shih-Chieh (1280-1303), porém, tem-se pouco conhecimento a respeito de vida e de suas obras. No entanto, tornou-se conhecido por escrever dois importantes tratados. O primeiro deles, escrito em 1299, foi a "Introdução aos estudos matemáticos", que influenciou fortemente a Coreia e o Japão. O segundo de maior interesse histórico e matemático foi o "Precioso espelho dos quatro elementos", de 1303 (BOYER, 2010).

Neste segundo tratado "Precioso espelho dos quatro elementos" desenvolveu-se uma técnica diferenciada baseada na construção por aproximações sucessivas de raízes de equações de 2° grau denominado de método fan-fa, sendo apresentada de maneira retórica e encontrava uma única raiz: a positiva (PEDROSO, 2010).

Em 1819, o método fan-fa foi rebatizado para método de Horner em homenagem ao matemático Inglês Willian George Horner que contestou a descoberta que parece ter surgido muito antes na China. Conforme Pedroso (2010, p. 10) para resolver a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$ utilizando esse método teremos que realizar o seguinte procedimento:

Passo 1: Primeiro obtinha-se uma solução aproximada, tomando x = 19 (A raiz positiva desta equação está entre 19 e 20);

Passo 2: Usava-se a seguinte transformação y = x − 19, para obter a seguinte equação y^2 + 290y = 143 em y, cuja solução aproximada para esta equação está entre 0 e 1;

Passo 3: Identificando y^2 com y, obtinha-se uma solução aproximada para essa equação: $y = \frac{143}{291}$. Assim o valor de x era corrigido para $x = 19 + \frac{143}{291} = 19{,}49$.

Passo 4: Fazendo z = x − 19,49, obtinha-se a seguinte equação em z:$z^2 + 290{,}98z = 0{,}66$. Daí, tem-se que $z = \frac{0{,}66}{291{,}98} = 0{,}0022$, o que já confirmava as duas casas decimais do valor encontrado no passo anterior (a propósito, os primeiros dígitos dessa raiz são 19,49226)

1.14 EUROPA OCIDENTAL

A criação da álgebra simbólica teve inicio com o jurista francês François Viète (1540-1603) considerado por muitos estudiosos como: —O pai da Álgebra. Isso se deve ao fato de ser o primeiro a representar uma incógnita de uma equação através de uma vogal. Viète criou os símbolos $\bar{p}$ e $\bar{m}$ que significava mais e menos respectivamente (GUELLI, 1995).

Os matemáticos europeus da época foram buscar com os comerciantes renascentistas dois sinais ainda desconhecidos na matemática. Daí tem-se que os símbolos + e – passou a ser usado em definitivo nesta ciência.

Com a colaboração de grandes matemáticos da antiguidade e a evolução do

simbolismo algébrico, François Viète conseguiu expressar pela primeira vez a expressão da formula geral de uma equação de 2° grau (Figura 1.18).

Figura 1.18 - Equação de segundo grau de Viète.

$$\boldsymbol{B\ in\ A\ \acute{a}rea + C\ in\ A + D\ \acute{e}\ igual\ 0}$$

Fonte: Adaptado de Guelli, 1995, p.40.

Outras contribuições significativas aconteceram para o avanço do simbolismo algébrico na fórmula geral de uma equação de 2° grau. O matemático inglês Thomas Harriot (1560-1621) introduziu o sinal de igualdade (=) e adotou uma nova notação para as potências de incógnitas ($\acute{a}rea \rightarrow AA$).

De acordo com Guelli (1995, p. 40) o matemático e filósofo francês René Descartes encontrou um método prático para representar os símbolos criados por Viéte:

- Começou a usar o expoente 2 para expressar a área.
- Substitui in pelo sinal (x), depois $(\cdot)$.
- Passou a representar as incógnitas de uma equação pelas últimas letras do alfabeto x, y, z e os coeficientes literais das incógnitas pelas primeiras letras: a, b, c.

A seguir é disposto um quadro comparativo com os símbolos criados inicialmente por Viéte que foram sendo aperfeiçoados ao longo do tempo por outros estudiosos matemáticos dentre eles Harriot e Descartes.

Quadro 1.1 - Quadro comparativo entre os símbolos criados por Viète, Harriot e Descartes.

Viète	Harriot	Descartes
A área é igual a 50	$AA = 50$	$x^2 = 50$
A área $\overline{m}$ $A2$ é igual a 0	$AA - A2 = 0$	$x^2 - x.2 = 0$
A área $\overline{m}$ $A5$ $\overline{p}$ 6 é igual a 0	$AA - A5 + 6 = 0$	$x^2 - x.5 + 6 = 0$
A área $\overline{m}$ $A2$ $\overline{p}$ 1 é igual a 0	$AA - A2 + 1 = 0$	$x^2 - x.2 + 1 = 0$
B in A área + C in $A + D$ é igual a 0	B in $AA + C$ in $A + D = 0$	$x^2.B + C.x + D = 0$

Fonte: Adaptado de Guelli, 1995, p.40.

Além de Viète outros matemáticos foram surgindo com suas respectivas colaborações para expressar a fórmula da equação geral de 2° grau. Desta forma, não foi apenas uma civilização, ou uma única pessoa que inventou a fórmula, mas sim matemáticos de varias regiões do velho continente que acabaram contribuindo para que se chegasse à fórmula que torna possível a resolução de qualquer equação quadrática.

A evolução é contínua. À medida que ocorrem avanços no tempo os processos, sejam eles na área da ciência, tecnologia, arquitetura, sociais ou políticas, também progridem. Graças a este espírito de inquietação e de vanguarda também dentro da matemática descobrimos respostas para questões que até bem pouco tempo pareciam insolucionaveis. Na esteira destes processos evolutivos, no final do ano 2019, o professor de Matemática Po-Shen Lo, da Universidade Americana Carnegie Mellon, descobriu o que ele acredita ser o método mais simplificado e eficiente de resolver equações de 2º grau. Este método é a razão deste trabalho e o no próximo capitulo são investigadas as nuances de tal procedimento.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

Neste capítulo 2 será apresentado o trabalho do professor e pesquisador norte-americano sobre métodos de resolução de equações de segundo grau. Será apresentada a justificativa algébrica do método, embasamento e ideias inspiradas em modelos babilônicos de cerca de 1700 anos a.C além de uma idéia geométrica que ajuda a entender o processo. Serão resolvidos alguns exemplos com o objetivo de mostrar que o método funciona para casos mais triviais de equações do tipo quadrática até os casos em que as equaçõs apresentam coeficienetes arbitrários raízes complexas. Por fim, será feita a demonstração da fórmula resolutiva aplicando justamente as ideias apresentadas pelo professor Lo.

2.1 MÉTODO DE PO-SHEN LOH.

Po-Shen Loh é um professor norte-americano, nascido em 18 de junho de 1982. É professor associado de matemática na Universidade Carnegie Mellon, na cidade americana de Pittsburgh, no Estado da Pensilvânia.

Em seu artigo de 16 de dezembro de 2019 intitulado: *A Simple Proof of the Quadratic Formula* (Uma Pova Simples da Fórmula Quadrática), ele apresenta uma demonstração simples da fórmula resolutiva das equações de segundo grau, o que também produz um método eficiente para resolver equações quadráticas gerais. O procedimento é bastante simplificado e conceitualmente natural, além de ter potencial de desmistificar equações quadráticas para estudantes em todo o mundo.

No artigo, o professor Lo afirma que a fórmula quadrática foi uma conquista notável dos primeiros matemáticos, marcando a conclusão de uma longa busca de um método efetivo para resolver equações de grau 2, com uma história que remonta ao Período Babilônico, por volta de 2.000 a 1.600 a.C., e que, desde então, muitos nomes reconhecido na matemática deixaram sua marca neste tópico, cuminando com a fórmula que, doravente, viria se tornar parte padrão de um primeiro curso de álgebra em quase todo o mundo.

Para o professor Lo, mesmo depois de tantos anos, é inconcebível que o trato às equações continue sendo como era desde o introdução da fórmula, há centenas de anos, recorrendo-se a processos de decoração pouco eficientes, além de extensos, difíceis e traumático, em alguns casos.

> É lamentável que, para bilhões de pessoas em todo o mundo, a fórmula quadrática também seja sua primeira experiência de uma fórmula bastante complicada que elas tenham que memorizar. Muitos normalmente aprendem como uma alternativa sistemática para um método de adivinhação que só permite fatorar certos polinômios quadráticos. Inúmeras técnicas mnemônicas são abundantes, a partir de historinhas de abelhas, como nos poemas de Bhaskara, à canções infanto-juvenis que tentam simplificar de forma lúdica a aprendizagem deste conteúdo. A introdução do método de completar quadrado é geralmente incluída no currículo, mas sua motivação costuma ser um desafio para os alunos iniciantes de álgebra seguirem, e sua execução por escrito pode ser complicada (LO, 2019).

Neste trabalho apresentado pelo professor Po-Shen Lo ele mostra um modelo simples e independente da fórmula quadrática habitualmente usada, além de se mostrar extremamente eficiente e prática para resolver equações de grau 2. O autor confessa ainda estar realmente muito surpreso com o fato desta abordagem pedagógica ter escapado à descoberta humana até os dias atuais, dados os quase 4.000 anos de história sobre este assunto e as milhares de pessoas que, ao longo dos anos, esboçaram a fórmula resolutiva e sua demonstração.

No entanto, depois que uma versão anterior desta pré-impressão do material foi publicada, o autor confessa que fora contactado por muitas pessoas com referências potenciais de conteúdo próximo ao que ele apresentava, o que nos levar a acreditar que a ideia central do método em si não seja exatamente nova, embora apresente nueances até então nunca exploradas. Além do mais, o matemático acrescenta que ainda não teria encontrado nenhuma referência compartilhada publicamente, previamente existente, detalhando esta abordagem matematicamente completa e, formalmente correta.

Nas palavras do autor, seu artigo tem como objetivo fornecer um método referenciável e que seja logicamente correto e comprovado, com a garantia de ser aceito por seus colegas matemáticos. Dito isso, é inteiramente possível que este trabalho possa ajudar a difundir as idéias do pesquisador americano, além de popularizar uma abordagem pedagógica alternativa simplificada e prazerosa para resolver equações quadráticas, além de ser totalmente viável para integração em todos os currículos regulares (LO, 2019).

2.2 JUSTIFICATIVA ALGÉBRICA DO MÉTODO

Aqui o leitor será encorajado a lembrar-se de como foi ser um aluno inicianate de álgebra, quando tinha que se concentrar para combinar expressões algébricas, especialmente aquelas incluindo múltiplas variáveis e constantes. Esta seção foi escrita intencionalmente de maneira bastante simples, para enfatizar como são diretas todas as manipulações algébricas e conceitos.

Ao longo do que será dissertado aqui trabalharemos também com números complexos. O ponto de partida é que, se pudermos encontrar uma fatoração da seguinte forma:

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta) \quad \text{(EQ. 2.1)}$$

Então, um valor de x torna o produto igual a zero, precisamente, quando, pelo menos, um dos fatores é igual a zero, o que acontece exatamente quando $x = \alpha$ ou $x = \beta$. Daí, pela relação de Girard para polinômio de 2º grau tem-se que, para encontrar a soma das raízes, basta encontrar dois números α e β com soma $s = b$ e produto $p = c$ (dado que $a = 1$), então o conjunto $\{\alpha\ , \beta\}$ será o conjunto soluçãode de tal equação.

2.3 FATORANDO O TRINÔMIO

A priori, observa-se que $ax^2 + bx + c$ é trinômio do segundo grau então $a \neq 0$, portanto a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é equivalente a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, dividindo ambos os lados por a. Assim, sempre que for conveniente, é possível supor que a equação do segundo grau tem a forma $x^2 + px + q = 0$, onde $p = \frac{b}{a}$ e $q = \frac{c}{a}$. Certo! Mas como fazemos para escrever a equação $x^2 + px + q = 0$ sob a forma $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$? Simples! Fatorando o trinômio $x^2 + px + q = 0$. O Teorema da Decomposição, Elon (2002, p.106) garante que todo polinômio $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $(a_n \neq 0)$ e grau n $(n \geq 1)$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:

$$P = a_n(x - \propto)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \delta) \text{ em que } \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta \text{ são as raízes de } P$$

Voltando ao trinômio do segundo grau verifica-se que $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, portanto, para fatorar o trinômio $x^2 + px + q = 0$, é preciso achar números $\alpha\ e\ \beta$ tais que $\alpha + \beta = -p$ e $\alpha . \beta = q$. Em casos escolhidos a dedo, isto é fácil de fazer, mas de maneira geral, este não é um problema simples de resolver, especialmente, para alunos que estejam tendo o primeiro contato com a álgebra. Por exemplo, $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ porque $2 + 4 = 6\ e\ 2.4 = 8$.

Existem situações em que esta fatoração é ainda mais simples. Isto ocorre quando se tem uma equção do tipo incompleta: $x^2 + px = 0$ e $x^2 - q = 0$. É óbvio que $x^2 + px = x(x + p)$, logo tem-se $x^2 + px = 0$ se, e somente se $x = 0$ ou $x = -p$. A equação incompleta $x^2 - q = 0$ não possui solução real quando $q < 0$. Mas se $q \geq 0$ então $q = r^2$, onde r é a raiz quadrada de q, logo podemos escrever $x^2 - q = x^2 - r^2 = (x - r)(x + r)$ e a fatoração está feita: as raízes de $x^2 - q = 0$ são $r\ e - r$.

Mas nem sempre é tão fácil fatorar o trinômio $x^2 + px + q$. Tentemos, por exemplo, achar α e β tais que $x^2 - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$. Devemos ter $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha.\beta = -1$. É claro que α e β não podem ser números inteiros. Na verdade, neste caso eles são $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Não é prático procurar resolver a equação $x^2 + px + q = 0$ fatorando o primeiro membro, salvo em casos simples, mesmo quando p e q são inteiros.

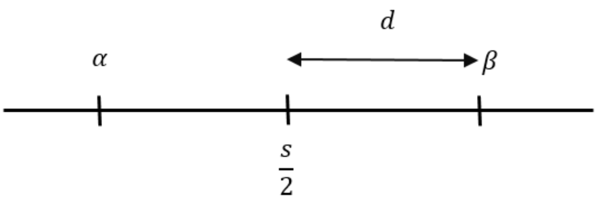
O professor Lo observou ainda que, dois números $\alpha\ e\ \beta$ somam $-p$, precisamente, quando sua média é $\frac{-p}{2}$, então é suficiente encontrar dois números da forma $\frac{-p}{2} \pm d$, cujo produto é q, sendo d a distância de $-\frac{p}{2}$ às raízes procuradas α e β. Desta forma, d passa a ser o único termo desconhecido, dado que p é constante e, consequentemente, $-\frac{p}{2}$ obtido facilmente. (Se $d = 0$, então fatoramos com $\alpha = \beta = -p$).

Inicialmente, é feita uma breve mudança de notação. São dados dois números $s\ e\ p$ (soma e produto) e procuram-se números $\alpha\ e\ \beta$ tais que $\alpha + \beta = s$ e $\alpha.\beta = p$. Não são conhecidos ainda $\alpha\ e\ \beta,$ mas sua média aritmética $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{2}$ é conhecida e é equidistante de $\alpha\ e\ \beta$, isto é, se admitirmos que $\alpha \leq \beta$ então:

$$\frac{s}{2} - \alpha = \beta - \frac{s}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} \qquad \text{(EQ 2.2)}$$

Observa-se a Figura 2.1:

Figura 2.1 - Notação feita para solução do problema.



Fonte: Po-Shen Lo, 2019.

Assim, dada a equação $x^2 + bx + c = 0$, cuja soma das raízes é s e produto p, temos que o produto $\alpha.\beta = \left(\frac{s}{2} - d\right).\left(\frac{s}{2} + d\right)$ corresponde, convenientemente, à forma de uma diferença de quadrado de dois termos, e é igual a p. Daí:

$$\alpha.\beta = p$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\frac{s}{2} - d\right).\left(\frac{s}{2} + d\right) = p$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\frac{s^2}{4} - d^2\right) = p$$
$$\Downarrow$$
$$d^2 = \frac{s^2}{4} - p.$$
$$\Downarrow$$
$$d = \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} \qquad \text{(EQ. 2.3)}$$

Sabendo-se que sempre existe uma raiz quadrada (estendendo-se a números complexos, se necessário), e desta forma, de maneira lógica, concluímos que os números $\alpha\ e\ \beta$ desejados existem e são:

$$\alpha = \frac{s}{2} - d \Rightarrow \alpha = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}, \text{ e } \beta = \frac{s}{2} + d \Rightarrow \beta = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}.$$

Assim, é encontrado que $\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ são todas as raízes da equação quadrática original.

2.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO ATRAVÉS DE EXEMPLOS.

A simplicidade conceitual deste procedimento realmente torna desnecessária memorização de qualquer fórmula, mesmo para coeficientes gerais de x^2. A prova naturalmente se transforma em um método, e os alunos podem executar suas etapas lógicas em vez de inserir números em uma fórmula que eles não entendem completamente. Considere, por exemplo, os seguintes exemplos de equação quadrática:

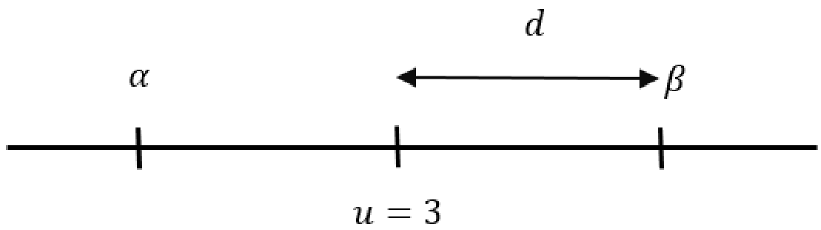
Exemplo 1: Resolver as seguintes equações:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Solução:

A equação tem coeficientes $a = 1, b = -6\ e\ c = 8$; a soma das raízes é $s = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{1} = 6$ e o produto $p = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$. Considerando as raízes procuradas como $\alpha\ e\ \beta,$ teremos o seguinte: A média das raízes $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{2}$, que doravente passaremos a chamar apenas de ***termo central***, e denotaremos por ***u,*** é, neste caso, $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{2} = \frac{6}{2} = 3$. A Figura a seguir respresenta esta situação.

Figura 2.2 - Representação da situação gráfica da equação a.



Fonte: Po-Shen Lo, 2019.

Agora, basta encontrar a distância d entre o número $u = \frac{s}{2}$ e as raízes $\alpha\ e\ \beta$. Assim, teremos:

$$d = \sqrt{u^2 - p} \Rightarrow d = \sqrt{3^2 - 8} \Rightarrow d = \sqrt{9 - 8} \Rightarrow d = \sqrt{1} \Rightarrow d = 1$$

Portanto:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{s}{2} - d \Rightarrow \alpha = 3 - 1 \Rightarrow \alpha = 2 \\ \beta = \dfrac{s}{2} + d \Rightarrow \beta = 3 + 1 \Rightarrow \beta = 4 \end{cases}$$

Daí, conclui-se que as raízes procuradas são $\alpha = 2$ e $\beta = 4$.

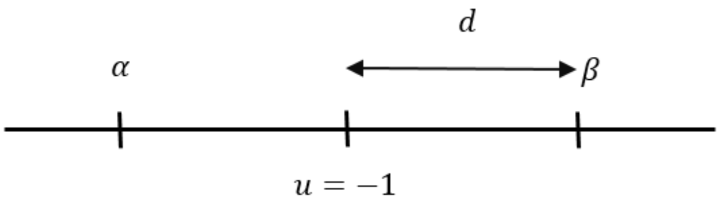
b) $2x^2 + 4x - 2 = 0$

Solução:

Como o coeficiente $a = 2 \neq 1$, dividiremos toda a equação por 2, obtendo a equação equivalente $x^2 + 2x - 1 = 0$. A equação passa a ter coeficientes $a = 1, b = 2\ e\ c = -1$; a soma das raízes $s = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$ e produto $p = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$. Considerando as raízes procuradas como $\alpha\ e\ \beta$, teremos o seguinte:

o termo central é $u = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{2} = \frac{-2}{2} = -1$. A Figura 2.3 a seguir respresenta esta situação.

Figura 2.3 - Representação da situação gráfica da equação b.



Fonte: Po-She Lo, 2019.

A distância d, entre u e as raízes α e β será dada por: $d = \sqrt{u^2 - p} \Rightarrow d = \sqrt{(-1)^2 - (-1)} \Rightarrow d = \sqrt{1+1} \Rightarrow d = \sqrt{2}$.

De posse do resultado $d = \sqrt{2}$, fica imediato encontrar as raízes $\alpha\ e\ \beta$.

$$\begin{cases} \alpha = u - d \Rightarrow \alpha = -1 - \sqrt{2} \\ \beta = u + d \Rightarrow \beta = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Portanto, concluimos que as raízes procuradas são $\alpha = -1 - \sqrt{2}$ e $\beta = -1 + \sqrt{2}$.

c) $\frac{x^2}{2} - x + 2 = 0$.

Solução:

A princípio, o fato de o coeficiente $a = \frac{1}{2}$ pode parecer um fator de complicação. Mas, ao multiplicar por 2 a equação, obteremos exatamente o coeficiente desejado, portanto, esta estratégia de multiplicar (ou dividir por número diferente de zero, claro), se mostra eficiente no trato com equações cujo coeficiente líder não seja exatamente o que é desejado. Daí, multiplicando a equação por 2 obteremos $x^2 - 2x + 4 = 0$. Agora, basta repetir o processo aplicado nos exemplos anteriores.

A equação obtida a partir da multiplicação do 2 pela equação original tem coeficientes $a = 1, b = -2\ e\ c = 4$; a soma de suas raízes é $s = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$ e o produto é $p = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$. O termo central $u = \frac{s}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Agora, é tido como objetivo encontrar a distância d do termo central u às raízes $\alpha\ e\ \beta$.

$$d = \sqrt{u^2 - p} \Rightarrow d = \sqrt{1^2 - 4} \Rightarrow d = \sqrt{1 - 4} \Rightarrow d = \sqrt{-3} \Rightarrow d = \sqrt{3.i^2} \Rightarrow d = i\sqrt{3}.$$

Portanto, as raízes serão:

$$\begin{cases} \alpha = u - d \Rightarrow \alpha = 1 - i\sqrt{3} \\ \beta = u + d \Rightarrow \beta = 1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

Logo, as raízes procuradas são $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$ e $\beta = 1 + i\sqrt{3}$. Na resolução deste exemplo “c”, pode-se observar que números racionais ou complexos não configuram nenhum obstáculo à aplicação do método.

2.5 APLICAÇÃO DO MÉTODO A EQUAÇÕES COM COEFICIENTES ARBITRÁRIO DE $\boldsymbol{x^2}$.

É verdade que a aplicação do método está restrita a casos em que o coeficiente líder vale 1, porém, em casos em que tivermos $a \neq 1$, basta aplicar o truque algébrico de dividir toda a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a, (suponha sempre a diferente de zero), para obter uma equação equivalente com características que permitam a aplicação do método, veja:

$$ax^2 + bx + c = 0 \div a$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - sx + p = 0,$$

Onde $s = -\frac{b}{a}$ e $p = \frac{c}{a}$. Vemos que $ax^2 + bx + c = 0$ se, e somente se, $x^2 - sx + p = 0$. Logo, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são os números $\alpha\ e\ \beta$ cuja soma é $\alpha + \beta = s = -\frac{b}{a}$ e cujo produto é $\alpha.\beta = p = \frac{c}{a}$.

2.6 DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA RESOLUTIVA ATRAVÉS DO MÉTODO DE PO-SHEN LO.

Aproveitando as ideias babilônicas e fazendo corretamente as devidas manipulações algébricas é possível chegar à fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

Chamando as raízes genericamente de x e aplicando a equação $x = u \pm d$, donde o termo central $u = \frac{s}{2}$ e a distância d do termo central u às raízes é dada por $d = \sqrt{u^2 - p}$, tem-se:

$$x = u \pm d$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Substituindo $s = -\frac{b}{a}$ e $p = \frac{c}{a}$.

$$\Downarrow$$
$$x = \frac{\frac{-b}{a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{-b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$
$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observe que, com esta abordagem, todos os conceitos úteis e interessantes são totalmente preservados em uma demonstração leve de uma fórmula que é exatamente a fórmula resolutiva utilizada atualmente, ao mesmo tempo que produz um eficiente e compreensível algoritmo. A parte mecânica rotineira, trabalhosa, é necessária apenas se uma fórmula geral é procurada para fins de memorização. À luz do eficiente algoritmo, no entanto, torna-se questionável se há mérito em memorizar uma fórmula sem entender. Por exemplo, embora a solução para uma equação linear geral $ax + b = 0$ seja $x = -\frac{b}{a}$ (assumir $a \neq 0$), a equação é normalmente resolvida por meio da manipulação, em vez de decorar-se a um fórmula.

Desta forma, é interessante colocar as idéias do professor estadunidense, se não como ferramenta única na hora de trabalhar as equações quadráticas, pelo menos como uma alternativa viável à fórmula resolutiva utilizada em grande escala nas escolas mundo a fora e em especial aqui no Brasil. Para tanto se faz necessário discutir a viabilidade e eficiência de tal modelo, o que será feito doravante a partir de um trabalho de pesquisa feita in loco, numa escola da região, cujos resultados estão compilados e serão discutidos no capítulo 4.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados o lócus da pesquisa e a metodologia empregada. Encontra-se dividido em três tópicos. O primeiro tópico refere-se ao lócus da pesquisa, a cidade de Parauapebas, onde se encontra a escola Estadual de Ensino Médio João Prudêncio de Brito. O segundo, faz uma abordagem sobre o procedimento metodológico, considerando alguns autores para o embasamento metodológico da pesquisa e descrevendo os passos que foram tomados na produção do trabalho. O terceiro tópico apresenta o trabalho de apresentação do modelo proposto pelo professor Po-Shen Lo numa turma do 1º ano do Ensino Médio. Além do mais, será feita uma discussão sobre a viabilidade de tal método.

3.1 LÓCUS DA PESQUISA E MÉTODO

Parauapebas é um município brasileiro, do estado do Pará, pertencente à mesorregião do Sudeste Paraense e principal municío da microrregião de Carajás. Localiza-se no norte do Brasil, distante 719km da capital do estado Belém. Segundo o ultimo censo, o município possui uma população estimada em 213 576 habitantes, produto interno bruto (PIB) de 23,036 bilhões de reais e renda per capita de 59 018,97 reais, um dos maiores do Brasil, segundo o IBGE.

O IBGE apontou ainda que, Parauapebas teve acréscimo de 0,1 ponto percentual na fatia do PIB de 2018 para 2019, o maior ganho nacional ao lado de São Paulo (SP), Maricá (RJ), Saquarema (RJ), Brasília (DF) e São José dos Pinhais (PR). A extração de minério de ferro e o início do ciclo de valorização da commodity, após anos anteriores de perdas, foram os fatores que contribuíram para a guinada do município paraense.

No estado do Pará, Parauapebas só fica atrás de Belém em produção de riquezas e é o 43º mais rico do país. Em 2019, a capital paraense registrou PIB de R$ 32,405 bilhões, o que é baixo em se tratando de uma metrópole com 1,5 milhão de habitantes, 11ª mais populosa do país. Belém ocupa o 27º lugar em riqueza, mesma posição de 2018. Goiânia (GO), com o mesmo tamanho de Belém, assina PIB de R$ 52,914 bilhões (14º), e Porto Alegre (RS), R$ 82,431 bilhões (7º).

Diante destes números, é notória a importancia financeira da cidade e o volume de dinheiro que este município arrecada anaulmente. Contudo, como acontece na maioria dos municípios brsileiros, o dinheiro não chega para todos e o investimento em educação ainda é aquem do ideal.

3.2 O PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

De acordo com Marconi e Lakatos (2010) método é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que permite alcançar o objetivo (conhecimentos válidos) com maior segurança.

A seleção dos métodos empregados na pesquisa científica está ligada diretamente ao problema a ser estudado, depende da natureza dos fenômenos, do objeto da pesquisa, dos recursos financeiros e de outros elementos que possam surgir no campo da investigação. Segundo Gil (2010), os meios técnicos têm a finalidade de proporcionar ao investigador as formas para garantir a objetividade, ou seja, visa fornecer a orientação necessária à realização da pesquisa social principalmente sobre a obtenção, processamento e validação dos dados.

Para Rudio (2004), pesquisa no seu sentido mais amplo é um conjunto de atividades orientadas para a busca de um determinado conhecimento, utilizando para isto métodos e técnicas próprios. Ou seja, a cada contexto é necessária uma investigação de qual metodologia será mais adequada para a pesquisa.

Este trabalho quanto a sua abordagem, tem caráter qualitativo, sendo caracterizada por obter maior compreensão do grupo pesquisado, ou seja, um contato prolongado do pesquisador com o ambiente e com a situação que está sendo investigada, e tem-se nas análises maior especificidades além de captar diferentes significados e experiências, de modo que:

> [...] a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 32).

No primeiro momento, para a realização da pesquisa, foram ministradas aulas sobre o tema, inicialmente sobre a fórmula resolutiva, a fim de fazer levantamento do quanto aqueles alunos entendiam sobre o assunto, além de reforçar o volume de conhecimentos que eles já possuíam; em seguida, aplicou-se um questionário composto de 05 equações quadráticas de diferentes níveis; durante as aulas seguintes, apresentou-se o novo método, teoria e prática, através de vários exemplos. Em seguida, outro questionário, também composto de 05 equações foi proposto aos estudantes, desta vez para resolver aplicando o método de Po-Shen Lo e, ao fim do exercício, os discentes foram subordinados a um terceiro questionário que indagava sobre a eficiência do aprendizado de cada método aos quais eles haviam sido submetidos.

Acerca disso, segundo Alegro (2008) “O que o aluno já sabe, o conhecimento prévio (conceitos, proposições, princípios, fatos, ideias, imagens, símbolos), é fundamental para o [...] processo de aprendizagem”. De posse desses resultados fez-se a organização dos rendimentos dos alunos nos dois grupos de questionário e os resultados foram comparados e serão apresentado a seguir.

4 ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo 4, são apresentados os resultados teóricos, qualitativos e quantitativos da pesquisa realizada, assim como feitas algumas discussões necessárias sobre o aprendizado, ensino de matemática e a evolução do conhecimento como ferramenta para satisfação pessoal e resolução de problemas relacionados ao próprio saber. A priori, é realizada uma breve discussão a respeito dos motivos que levaram o método de Poh-Shen Lo não ter sido explorado no passado, visto que tais conhecimentos já existiam desde os povos antigos. Em seguida, é feita uma discussão que trata a respeito das considerações que podem influenciar no desempenho escolar. Por fim, finalmente são apresentados os resultados práticos da metodologia comparativa aplicada em sala de aula com os alunos de 1º ano do Ensino Médio.

4.1 ANÁLISE DE RESULTADOS

4.1.1 Considerações sobre os fatores que podem influenciar no desempenho escolar de jovens

Antes de fazer qualquer tipo de consideração sobre a eficácia dos métodos de ensino, é importante compreender a complexidade dos fatores que podem influenciar no desempenho escolar de adolescentes e, desta forma, influenciar nos resultados dos testes aplicados neste estudo. A priori, entende-se que a adolescência é uma fase complicada por si só, sem que haja mesmo a influência de elementos externos, de modo que a criança/jovem passa por uma jornada de transições, descobrimento, dúvidas, medos e uma explosão de hormônios.

Como denotam Coutinho et al. (2016), é na adolescência que são descobertos e/ou desenvolvidos diversos transtornos psicológicos, mais comumente depressão e ansiedade. Deste modo, seria imprudente retirar o potencial efeito de um transtorno do tipo afetar no desempenho desses jovens. Outro ponto a ser considerado é a própria individualidade de cada um e a necessidade de atenção especial à cada uma de suas necessidades, compreendo assim a relação de cada jovem consigo mesmo, com o mundo e com o aprendizado. Estes tópicos colocam em cheque a própria metodologia de avaliação por notas, de modo que este assunto merece um foco maior, o qual este trabalho não se propõe a responder.

Assim, de acordo com Lobler (2013), são mencionados e brevemente discutidos alguns fatores potencialmente influenciadores do desempenho escolar de jovens em escolas públicas:

- Despesa por aluno: a discussão a respeito da influência da renda no desempenho escolar não é unânime, de modo que alguns autores ainda não se dão por convencidos de que a pobreza no Brasil possui relação intrínseca com o baixo nível educacional. Fato é que a falta de alimentação apropriada, transporte seguro e de qualidade e apoio familiar fomentam a desigualdade socioeconômica e educacional, afetando diretamente nas notas obtidas pelos alunos em sala de aula. Dentro das próprias escolas públicas, há jovens mais “privilegiados” do que os outros, o que denota um grave problema estrutural brasileiro;
- Instalações e recursos: ainda que não influencie tão fortemente quanto a renda, a ausência de bibliotecas e uma estrutura física e logística de qualidade impacta no processo de aprendizado, mas dificilmente causaria diferenças consideráveis em testes realizados com os alunos da mesma escola e mesma turma;
- Tamanho da turma: turmas grandes e cheias exigem maior atenção, gasto energético e intelectual do educador, de modo que praticamente liquida qualquer tipo de individualidade do aluno, criando assim anomalias educacionais, em que mesmo dentro de uma turma é possível observar alunos com altíssima facilidade de aprender, enquanto outros não compreendem o básico. No caso da turma da escola analisada, 23 alunos é um bom tamanho, de forma que o educador ainda consegue oferecer atendimento individual quando necessário;
- Tempo escolar: é apontado como um dos fatores de maior influência no desempenho escolar, visto que a escola é o local onde são formadas as “relações pedagógicas e apropriação dos saberes sistematizados e oportunizados pela escola”, como disserta Lobler (2013). Portanto, a frequência escolar e a participação ativa em atividades pedagógicas estimulam o sistema cognitivo das crianças e adolescentes, promovendo movimento intelectual e potencialização do conteúdo ministrado nas salas de aulas. Desta forma, são cada vez mais relavantes planejamentos e estratégicas que consigam engajar os estudantes para os projetos esculares, mesmo dentro do cenário da escola pública, que carrega consigo dificuldades particulares e desafios diários;
- Professor: não há dúvidas acadêmicas ou sociais sobre a importância do professor no processo de aprendizado do aluno. O educador envolve, empenha, dedica, se apresenta com seriedade e simultaneamente leveza, desenvolve

coerência, responsabilidade e engaja o jovem em atividades de grande relevância apra o seu desenvolvimento intrapessoal. São compreendidas aqui todas as dificuldades que a profissão carrega consigo, especialmente nos casos de escolas públicas, em que todos os desafios são potencializados, mas o professor é, não a figura mais firme e responsável por toda a escola ou pelo sucesso e fracasso, mas o gestor do conhecimento e o desbravador de mundos ainda desconhecidos. Tecnicamente, o educador precisa ter uma plena compreensão do seu papel e da sua relevância para o desenvolvimento do jovem e a elevação de sua comunidade;

- Clima escolar e alunos: é fundamental que haja paz e o mínimo de senso hierárquico por parte dos estudantes para que uma escola consiga prosperar. Em muitos casos, não há nem mesmo respeito, educação dos jovens ou o interesse dos pais em entender e se envolver mais na vida escolar dos filhos. Contudo, este se trata de um problema complexo de múltiplas raízes, análise que não cabe neste momento. Contudo, de forma geral, o círculo de amizades e a relação do aluno para com seus colegas e professores influencia diretamente no seu foco, determinação e disposição para o aprendizado, afetando assim seu desempenho em testes e atividades;
- Formação das turmas: a inconsistência das turmas escolares é ao mesmo tempo um processo comum e que causa problemas diversos, como a reprovação repetida, necessidade de recuperação e desajustes no tempo escolar. O sobrecarregamento das escolas força que as turmas sejam cada vez mais lotadas, fazendo com que o professor não consiga oferecer o tratamento e prover a atenção que cada especial que cada um dos alunos precisa. A diferença de nível entre alunos da mesma turma é normal, visto que um método de ensino é eficaz para alguns indivíduos mas para outros não, assim como cada um possui sua individualidade. Contudo, essa desigualdade cria dificuldades relacionados ao processo de aprendizado de alguns jovens.

4.1.2 Apresentação e análise dos dados coletados

Neste ponto, fica evidente que os testes realizados em sala de aula com os alunos foram sobre as aulas que apresentavam dois métodos distintos de resolução de equações de segundo grau: i) Método de resolução aplicando a fórmula resolutiva, também conhecido como método tradicional e já aplicado com alunos brasileiros há algumas décadas; ii) Método de Poh-Shen Lo, ferramenta relativamente nova e não aplicado por nenhuma escola brasileira, especialmente. Importa também ressaltar a relevância dos planos de aula construídos para tal, ambos disponíveis no Apêndice A. Nele, é possível observar os objetivos, a justificativa e o procedimento metodológico aplicado para cada um dos métodos aplicados.

A amostra deste estudo foi de 23 alunos da turma de 1º ano A do Ensino Médio da Escola João Prudêncio de Brito, localizada na cidade de Paraupebas – PA. Foram realizadas três aulas de 45 min dedicadas à apresentação da teoria e resolução de exercícios/exemplos para cada um dos métodos escolhidos (Tradicional e Poh-Shen Lo), de modo que os testes práticos foram aplicados na quarta aula de cada respectivo método. Todo o processo que engloba a aplicação das aulas durou entre os dias 06 e 14 de janeiro de 2022, compreendendo assim sete dias úteis totais, um para cada aula, totalizando seis aulas.

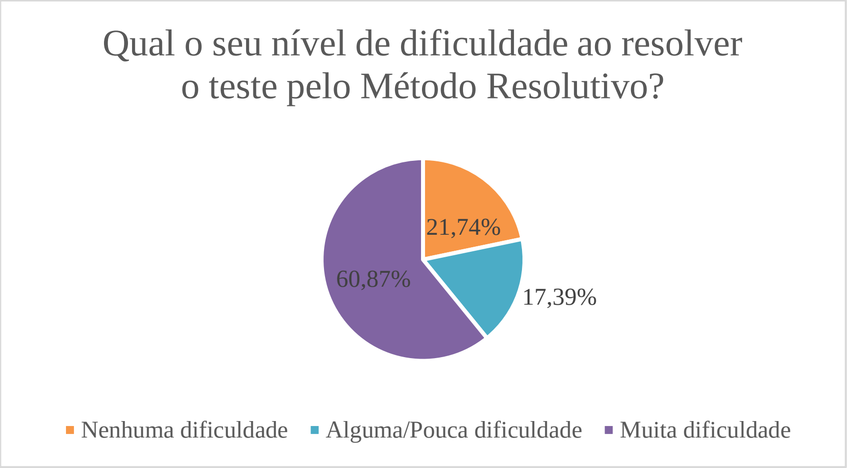
O questionário que trata da qualidade das aulas e da eficácia dos métodos foi construído com dois objetivos em mente: i) ser simples, direto e de fácil assimilação por parte dos alunos; ii) compreender e englobar as dificuldades matemáticas do povo brasileiro de modo geral, assim como transtornos do tipo de discalculia e déficit de atenção. Deste modo, para cada questionário foram criadas apenas três questões de múltipla escolha a fim de averiguar a hipótese de que o método de Poh-Shen Lo é mais eficiente do que o tradicional. Os questionários foram aplicados logo após os testes práticos resolutivos acerca de cada um dos métodos. A seguir, são apresentados os gráficos ilustrativos das respostas de cada uma das questões aplicadas.

- Resultados do questionário sobre o Método da Fórmula Resolutiva:

Primeira Questão: *Qual o nível de dificuldade que você sentiu ao resolver o teste sobre equações de segundo grau pelo método aplicando a formula resolutiva (primeiro método) aplicado pelo professor?*

O gráfico da Figura 4.1 mostra que mais da metade dos alunos sentiu muita dificuldade ao resolver o teste pelo método resolutivo tradicional, de modo que apenas 21,74% relataram não sentir dificuldade alguma.

Figura 4.1 - Gráfico que corresponde aos resultados da primeira questão.

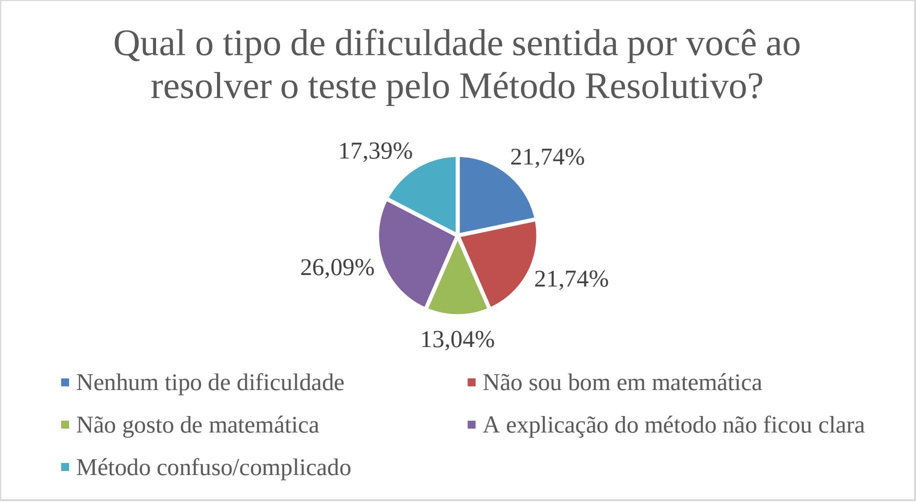


Fonte: O autor.

Segunda Questão: *Qual das alternativas mais representa o seu tipo de dificuldade ao resolver o teste pelo Método da Fórmula Resolutiva aplicado pelo professor?*

O gráfico disposto na Figura 4.2 mostra uma distribuição significativa das respostas através das alternativas disponíveis, de modo que "o método não ficou claro" se mostrou a mais comum pela diferença de apenas um voto.

Figura 4.2 - Gráfico que corresponde aos resultados da segunda questão.

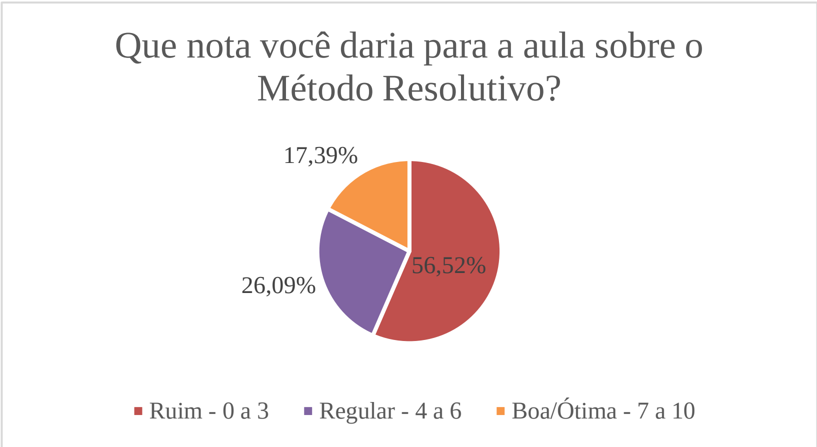


Fonte: O autor.

Terceira Questão: *Que nota você daria para a aula do professor sobre o método de resolução da fórmula resolutiva (primeiro método)?*

O gráfico da Figura 4.3 mostra que mais da metade dos alunos deu nota de zero a três para a aula do professor, mostrando assim clara falha no método de ensino aplicado e também a dificuldade dos alunos em compreender a resolução pelo método tradicional.

Figura 4.3 - Gráfico que corresponde as respostas da terceira questão.



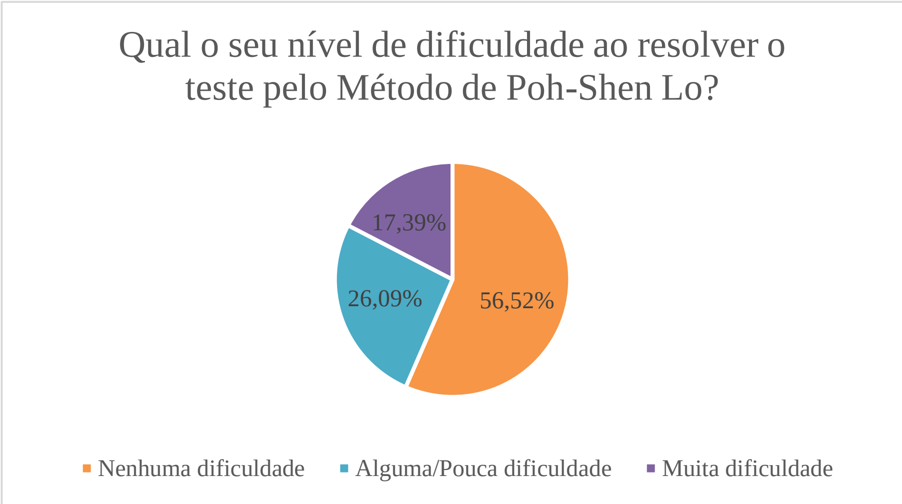
Fonte: O autor.

- Resultados do questionário sobre o Método de Poh-Shen Lo:

Quarta Questão: *Qual o nível de dificuldade que você sentiu ao resolver o teste sobre equações de segundo grau aplicando o método Poh-Shen Lo (segundo método) aplicado pelo professor?*

O gráfico da Figura 4.4 mostra que mais da metade dos alunos não sentiu dificuldade alguma na resolução do teste, de modo que 16,39% relataram altos níveis de dificuldade. Em comparação com o primeiro método houve crescimento de mais de 200% no número de alunos sem dificuldade e queda semelhante no número de alunos que relataram altos níveis de dificuldade na resolução dos testes. Ainda que o espaço amostral do estudo seja reduzido e localizado, a evolução da eficácia do primeiro para o segundo método mostra a capacidade educativa do Método de Poh-Shen Lo.

Figura 4.4 - Gráfico que corresponde aos resultados da quarta questão do questionário.

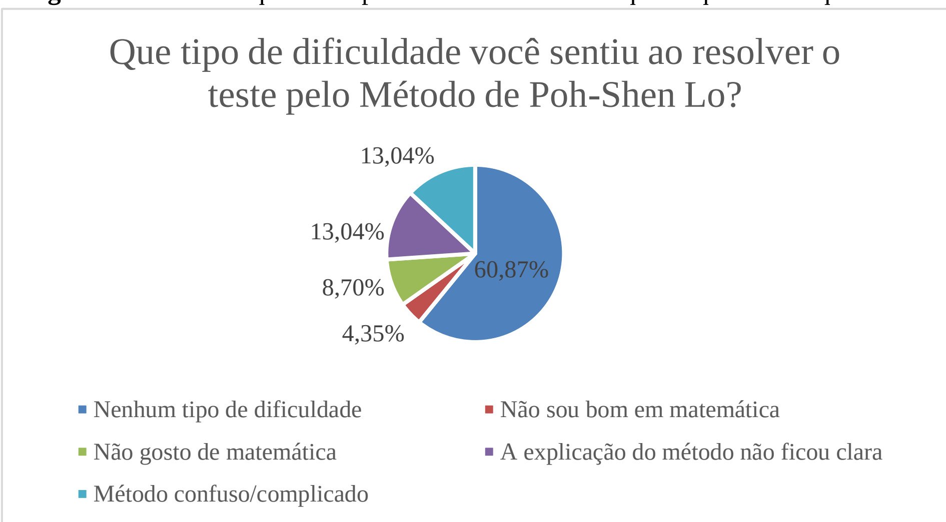


Fonte: O autor.

Quinta questão: *Qual das alternativas mais representa o seu tipo de dificuldade ao resolver o teste pelo Método de Poh-Shen Lo (segundo método) aplicado pelo professor?*

O gráfico disposto na Figura 4.5 mostra que 60,87% dos alunos relatou não ter sentido nenhum tipo de dificuldade ao resolver o teste de Poh-Shen Lo. Pode ser observada uma queda de 17,39% para 13,04% (25%) para a alternativa “método confuso complicado” e de 27,09% para 13,04% (50%) para a alternativa “a explicação do método não ficou clara”. Relevante também comentar sobre as alternativas “não sou bom em matemática” e “não gosto de matemática”. O Quadro 4.1 mostra a comparação para as alternativas em relação aos dois métodos estudados.

Figura 4.5 - Gráfico que corresponde aos resultados da quinta questão do questionário.



Fonte: O autor.

Quadro 4.1: Diferença percentual entre os dois métodos para as alternativas “não gosto de matemática” e “não sou bom em matemática”.

Método	Porcentagem “não sou bom em matemática”	Porcentagem “não gosto de matemática”
Fórmula Resolutiva	21,74%	13,04%
Poh-Shen Lo	4,35%	8,70%
Queda percentual	80%	33,28%

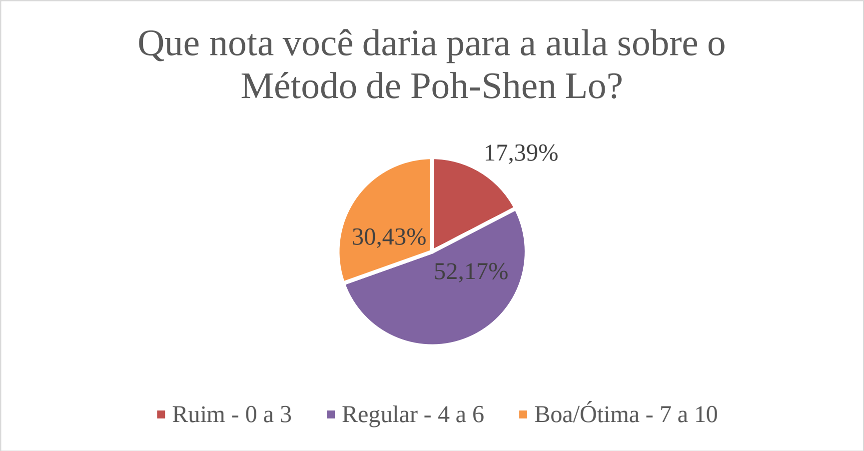
Fonte: O autor.

Teoricamente, quando é mantido o espaço amostral, caso deste estudo, os indivíduos que responderam ter dificuldade e/ou não gostarem da disciplina matemática na questão 2 do questionário deveriam responder o mesmo na questão 5, visto que elas questionam a mesma coisa. Contudo, é observada uma queda significativa de 33,28% na alternativa “não gosto de matemática”, demonstrando que um dos motivos dos alunos terem respondido isto é a frustração pela dificuldade que sentem quando tentam aprender matemática. Especificamente tratanto da alternativa que aborda do “gosto pela matemática”, ou seja, da satisfação sentida pelos alunos ao ter contato com o conteúdo e/ou tentarem resolver testes práticos, esta frustração se mostra ainda maior, visto que a diferença percentual de quase 80% demonstra a influência da dificuldade sentida na sensação pessoal de realização dos alunos. Estes 80% se traduzem na redução de cinco para um aluno, demonstrando assim o potencial do Método de Poh-Shen Lo em não só facilitar o estudo de equações de segundo grau, mas também alterar o paradigma dos estudantes de Ensino Médio, que possuem, de certo modo, receio, preguiça, medo ou preconceito de estudar matemática.

Sexta Questão: *Que nota você daria para a aula do professor sobre o método de resolução da fórmula resolutiva (primeiro método)?*

O gráfico da Figura 4.6 mostra que mais da metade dos alunos (52,17%) dos alunos questionados classificou a aula do professor como sendo ruim, com apenas 30,43% a classificando como boa/ótima. Contudo, em comparação com o primeiro método, observa-se uma queda leve de 8,34% para a alternativa ruim, mas um crescimento de quase 75% no número de alunos que consideraram a aula boa/ótima.

Figura 4.6 - Gráfico que corresponde as respostas da sexta questão do questionário.



Fonte: O autor.

Além de analisar a percepção dos alunos para com os métodos analisados, também é relevante avaliar as notas recebidas pelos mesmos nos testes aplicados e compará-las aos resultados já comentados aqui. A Tabela 4.1 traz a média dos 23 alunos em ambos os testes e o desvio padrão dos dados. O cálculo do desvio padrão tem como uma de suas funções compreender a distribuição das notas, verificando assim se algumas notas altas de poucos alunos contaminaram o cálculo da média, camuflando assim uma valor que seria menor.

Tabela 4.1: Resultados dos cálculos da média aritmética e do desvio padrão para as notas que os alunos receberam nas avaliações.

	Método da Fórmula Resolutiva	Método de Poh-Shen Lo
Média Aritmética	4,97	7,56
Desvio Padrão	4,08	3,24

Fonte: O autor.

Verificou-se, portanto, um aumento de 52% na nota média do teste realizado sobre o Método de Poh-Shen Lo em relação ao Método da Fórmula Resolutiva, além de uma queda de 26% no desvio padrão das amostras. Estes resultados demonstram mensurável maior facilidade dos alunos quando submetidos ao Método de Poh-Shen Lo para resolução de equações de segundo grau, especialmente quando combinados com os resultados de satisfação, que juntos demonstram um método de ensino mais eficaz, que traz melhores resultados, poupa esforços desnecessários e ainda contribui para a quebra do preconceito em torno da matemática e de seu conteúdo.

Importante lembrar que estas observações foram feitas sobre um programa de ensino teste que contemplava apenas três aulas de 45 min cada, totalizando assim 2,25 horas. Ainda assim, mesmo com tempo de aplicação limitado, o Método de Poh-Shen Lo mostrou resultados significativos não só nas notas objetivas dos alunos, metodologia clássica ocidental de avaliação, mas também uma melhora nas sensações experimentadas pelos alunos e na sua própria relação com o ensino da matemática.

Dando espaço para uma breve discussão, neste trabalho, procurou-se mostrar que no ensino de equações quadráticas, o professor do ensino fundamental e médio não pode apenas expor o conteúdo do livro didático adotado pela escola, pois sempre são encontradas deficiências que devem ser minimizadas por sua interferência. Como é possível observar na leitura, por exemplo, do livro de Antonio Machado, Matemática na Escola do Segundo Grau, Volume 1.

É preciso destacar o estudo desenvolvido por Prado (citado por Abreu, 2001, p. 23), cujo principal objetivo era apresentar e desenvolver uma proposta de didática da matemática com base na ordem histórica de produção do conhecimento, cujo elemento norteador é o princípio genético no Ensino e a lei biogenética básica de Haeckel (século 19) é que a aprendizagem eficaz requer que o aluno compreenda as etapas mais importantes no desenvolvimento histórico do assunto. Importa também ressaltar que a abordagem desse tema deve ser diferente no ensino médio e no ensino fundamental. No entanto, o que observamos nos próprios livros didáticos é que essa distinção nem sempre é acertada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A respeito dos testes práticos realizados, os resultados do questionário aplicado após estes testes trouxe uma verdade importante, o método de Poh-Shen Lo trouxe maiores níveis de satisfação dos alunos para com a qualidade da aula ministrada pelo professor, com o prazer pela matemática, além de reduzir o próprio preconceito com os cálculos e também diminuir o número de alunos com dificuldades para resolução das questões. Importa mencionar que tão importante quanto os resultados das avaliações quantitativas dos testes matemáticos é compreender o efeito das aulas no processo de aprendizado, na autoestima dos alunos e na relação entre professor, o saber e jovens dispostos a aprender.

Por fim, comparando as notas que os alunos tiraram nos testes sobre o método tradicional (4,97) e o de Poh-Shen Lo (7,56), foi observado um crescimento de 52% na média aritmética da turma, de modo que os jovens seriam reprovados na disciplina caso fosse aplicado o primeiro método, mas aprovados caso fosse aplicado o método revolucionário de Poh-Shen Lo. Também, observou-se uma redução no desvio padrão dos dados coletados, o que traduz para uma maior unidade estatística das notas. Estes resultados comprovam, ainda que dentro de um estudo com espaço amostral limitado, os benefícios da aplicação do método de Poh-Shen Lo em sala de aula, tanto nos medidores mais subjetivos, como o nível de satisfação e dificuldade dos estudantes, quanto nas notas práticas.

Sobre o Método de Poh-Shen Lo, entende-se que ele foi criado a partir de anotações de documentos antigos de povos babilônicos e que a descoberta em si foi quase desacreditada pelo fato de ser tão simples. Este acontecimento permite levar à reflexão de que em alguns casos, a complexidade e até um caráter elitista da matemática dá lugar ao seu propósito inicial, de facilitação da vida moderna e popularização do conhecimento. No lugar da temida solução através da fórmula resolutiva, que sofre preconceito pelos algarismos gregos utilizados e por um histórico de falta de investimento em educação voltada para cálculos no Brasil, Poh-Shen Lo desenvolveu um método interativo, gráfico, de fácil visualização e assimilação. Relevante mencionar que o desenvolvimento deste método só foi possível através do estudo da história da matemática, de modo que por séculos este conhecimento fora ignorado pelos matemáticos de suas respectivas épocas, só ganhando importância recentemente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, I. M. O uso da História da Matemática no ensino de Matemática: reflexões teóricas e experiências, UEPA, Pará, 2001.

BARBEIRO, Heródoto. Et alli. História. Ed. Scipione. 2005

BARROS, K. M. da S. Equação Quadrática: História, Abordagens e Contextualização. Dissertação de Graduação, Intituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras – PB, fev. 2020, 75 f.

BASTOS, G. Gurgel, Resolução de Equações Algébricas por Radicais, UFC, 2003.

BESSA, K. P. Dificuldades de Aprendizagem em Matemática na Percepção de Professores e Alunos do Ensino Fundamental. 2007. 14 f. Trabalho de Conclusão de Curso. – Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2007.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria do Ensino Fundamental Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 1° e 2° ciclos (1º a 4° séries)- Brasília: MEC/SEF, 1997

BRITO, R. G. S. de; BRANCO, M. N.; BRITO, E. M. S. de. Dificuldade de aprendizagem em resolver equação quadrática no ensino médio: uma pesquisa qualitativa. *Science and Knowledge in Focus*, Macapá, v.2, n.1, p.05-17, jun. 2019. ISSN: 2594-9233

BROLEZZI, A. C., A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática (tese de doutorado), Universidade de São Paulo, 1996.

CLARETO, S. M. NASCIMENTO, L. A. S. do. (2012). A sala de aula e a constituição de um currículo-invenção. Currículo sem Fronteiras, 12 (3), 306-321.

CLARETO, S. M. (2013a) Matemática como acontecimento na sala de aula. Conferência apresentada na 36ª Reunião Nacional da ANPEd, Goiânia, Brasil.

CLARETO, S. M. (2013b) Entre maçãs e números: a sala de aula de matemática, políticas cognitivas e educação matemática. Revista Horizontes, 31 (1), 63-70

COUTINHO, M. da P.; PINTO, A. V. L.; CAVALCANTI, J. G. ARAÚJO, L. S. de. & COUTINHO, M. de L. Relação entre Depressão e Qualidade de Vida de Adolescentes no Contexto Escolar. Psicologia, Saúde & Doenças, 2016, 17(3), p.338-351. http://dx.doi.org/10.15309/16psd170303

D’AMBROSIO, B. S. Como Ensinar Matemática Hoje? SBEM, Brasília, ano 2, n.2, p.15-19, 1989.

DCE. Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

EBERHARDT, I. F. N.; COUTINHO, C. V. S. Dificuldades de Aprendizagem em Matemática nas Séries Iniciais: diagnóstico e intervenções. Vivências. Erechim, RS, v. 7, n. 13, p. 62-70, out., 2011.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. Equação do 2º grau: Uma Abordagem Histórica. Ijuí: UNIJUÍ, 1999.

GALLO, S. Transversalidade e educação: pensando uma educação não-disciplinar. In: ALVES, N. & GARCIA, R.L. (Org.). O sentido da escola. Petrópolis: DP, 2008.

GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. de. Elementos de História da Educação Matemática. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. (Coleção PROPG Digital - UNESP). ISSN: 9788579832932

LOBLER, L. M. B. Fatores Influenciadores no Desempenho das Escolas Públicasde Ensino Fundamental: Uma Análise Multicasos. Dissertaçaõ de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria – RS, 2013. 138 f.

MAFRA, José Ricardo e Souza. MENDES, Iran Abreu. História no Ensino da Matemática Escolar: o que pensam os professores. In: CUNHA, Emmanuel Ribeiro. SÁ, Pedro Franco de (Orgs). Ensino e formação docente: propostas, reflexões e práticas. Belém: [s.n.], 2002. 150p.

MASOLA, W. de J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de Aprendizagem em matemática: Algumas reflexões. Educação Matemática Debate, Montes Carlos, Brasil, v.3, n.7, p.52-67, jan./abr. 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.24116/emd.v3n7a03

RAMOS, F. dos. S. Problemas do segundo grau na Babilônia. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, 2018. 59 f.

REGO, R. G. Tópicos Especiais em Matemática III. In: Licenciatura em Matemática a Distância./ Ângelo Maria Dias Fernandes...[et al]. _ João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2009.

ROQUE, T. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora Zahar, 2012.

SILVA, C. M. S. Conhecendo e usando da história da matemática. Revista da Associação de Professores de Matemática. Nº.61. Jan/Fev./2001.

SILVA, T. B. da. Aritmética e Frações do Egito Antigo. Dissertação de Graduação, Universidade Federal de São Carlos, jul. 2013.

UFMG. Uma Breve História da Escrita. 2022. Disponível em: https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/historia-escrita/. Acesso em: 05 jan. 2022.

USP. Sistema de Numeração. 2022. Universidade de São Paulo. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4475041/mod_resource/content/1/SISTEMAS%20DE%20NUMERA%C3%87%C3%83O.pdf. Acesso em: 07 jan. 2022

ZATTI, F.; AGRANIONIH, N. T.; ENRICONE, J. R. B. Aprendizagem matemática: Desvendando dificuldades de cálculo dos alunos. Perspectiva, Erechin, v.34, n.128, p.115-132, dez. 2010.

APÊNDICE A - PLANOS DE AULAS

PLANO DE AULA 1: RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU UTILIZANDO A FÓRMULA RESOLUTIVA TRADICIONAL.

ESCOLA MUNICIPAL DE ENSINO MÉDIO JOÃO PRUDENCIO DE BRITO

TEMA: Equações do 2º grau

PÚBLICO ALVO: Alunos do 1º ano do ensino médio

DURAÇÃO: 03 aulas

OBJETIVO GERAL: Compreender e explorar o processo de cálculos para resolução de equações de 2º grau utilizando a fórmula resolutiva.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos diversos a partir do uso da fórmula resolutiva;

Resolver problemas que envolvam equações do 2º grau;

Compreender o aspecto conceitual da fórmula;

JUSTIFICATIVA: Levando-se em consideração a importância deste conteúdo para os alunos do 9º ano que irão utilizá-lo em outras disciplinas como: Física, Química e Biologia, devem ser abordadas de forma contextualizada, clara e objetiva que contribuirá também para o entendimento referente à aplicação da equação de 2º grau no dia-a-dia. O estudo da equação demonstra a necessidade de conhecimento de formas de resolução, relacionando aplicações e aspectos históricos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS:

Levantamento dos conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre equação através da roda de conversa;

Contextualização histórica sobre o surgimento das equações de 2º grau a partir da leitura compartilhada de um texto de cunho didático.

Retomada do problema proposto na aula anterior e da equação gerada a fim de buscar soluções para a equação por meio do método de completar quadrados;

Propor um novo problema com o objetivo de permitir que os alunos transcrevam a situação para a linguagem matemática através de uma equação do 2º grau e busquem maneiras de resolvê-la;

Retomada da aula anterior de modo a socializar os procedimentos de resolução encontrados pelos alunos;

RECURSOS MATERIAIS E TECNOLÓGICOS: Textos didáticos, poema matemático, caderno do aluno 9º ano volume 2, livros didáticos e paradidáticos, pesquisa na internet, lousa, giz.

AVALIAÇÃO: A avaliação será feita de forma contínua, observando o envolvimento dos alunos com a proposta de trabalho. Propor atividades diagnósticas para avaliar a aprendizagem dos alunos e auto avaliação.

PLANO DE AULA 2: RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU UTILIZANDO O MÉTODO ALTERNATIVO DE POH-SHEN LO.

TEMA: Equações do 2º grau

PÚBLICO ALVO: Alunos do 1º ANO do ensino médio

DURAÇÃO: 03 aulas

OBJETIVO GERAL: Compreender e explorar o processo de cálculos para resolução de equações de 2º grau utilizando aplicando o método resolutivo desenvolvido por Poh-Shen Lo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos diversos a partir do uso do procedimento desenvolvido por Poh-Shen Lo.

Resolver problemas que envolvam equações do 2º grau aplicando tal processo;

Compreender o aspecto conceitual do procedimento;

JUSTIFICATIVA: há muito tempo se busca alternativas relativamente mais simples para resolver equações quadráticas. O método desenvolvido pelo professor Norte-Americano tras luz a esta discussão e possibilita o contato dos alunos com um método que, no mínimo, dará aos estudantes uma outra opção na hora de trabalhar com as equações quadráticas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS:

Como os estudantes já conhecem as características de uma equação do 2º grau, o procedimento metodológico consistirá em fazer a apresentação deste novo método, justificando algebricamente tal processo e resolvendo alguns exemplos.

RECURSOS MATERIAIS E TECNOLÓGICOS: Textos didáticos, pesquisa na internet, lousa, giz.

AVALIAÇÃO: A avaliação será feita de forma contínua, observando o envolvimento dos alunos com a proposta de trabalho. Propor atividades diagnósticas para avaliar a aprendizagem dos alunos e auto avaliação.

APÊNDICE B – RELATÓRIO DE DADOS DO TESTE DE QUALIDADE

Do dia 06 de janeiro de 2022 ao dia 12 de janeiro de 22 foi feita uma pesquisa com 23 alunos da turma 1º ano A na Escola Estadual de Ensino Médio João Prudencio de Brito, localizada na rua C, bairro primavera, na cidade de Parauapebas, Pará. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Sobre o Método de resolução aplicando a fórmula resolutiva:

Pergunta 1) *Qual o nível de dificuldade que você sentiu ao resolver o teste sobre equações de segundo grau pelo método aplicando a fórmula resolutiva (primeiro método) aplicado pelo professor?*

Respostas:

- 05 alunos, ou seja, 21,7% responderam não ter dificuldades;
- 04 alunos, ou 17,4% responderam ter sentido um pouco de dificuldade;
- 14 alunos, ou seja, 60,8% responderam ter tido muita dificuldade.

Pergunta 2) *qual das alternativas mais representa o seu tipo de dificuldade ao resolver o primerio teste aplicado pelo professor?*

- 05 alunos , ou seja, 21,7% disseram não ter tido nenhum tipo de dificuldade;
- 05 alunos, isto é, 21,7% responderam que não eram bons em matemática;

-03 alunos, ou 13,0% disseram não gostar de matemática;

- 06 alunos ou 26,08 disseram que o método de resolução não ficou claro para eles;
- 04 alunos ou 17,3% acharam o método confuso/complicado.

Pergunta 3*) Que nota os alunos daria à aula (primeira aula, usando a fórmula resolutiva) do professor sobre o primerio método de resolução de equações de segundo grau?*

-13 alunos, ou seja, 56,5% deram notas de 0 a 3.

-06 alunos, ou seja 26,08% deram notas de 4 a 6;

-04 alunos, ou seja 17,39% deram notas de 7 a 10.

<u>Sobre o método de resolução de equações de segundo grau aplicando aplicando o metodo de Poh-Shen Lo</u>

Pergunta 1)) *Qual o nível de dificuldade que você sentiu ao resolver o teste sobre equações de segundo grau pelo método aplicando a formula resolutiva (primeiro método) aplicado pelo professor?*

-13 alunos, isto é, 56,5% responderam não ter tido dificuldades;

-06 alunos, ou 26,08% responderam ter sentido um pouco de dificuldade

-04 alunos ou 17,4% disseram ter sentido muita dificuldade.

Pergunta 2) *qual das alternativas mais representa o seu tipo de dificuldade ao resolver o primerio teste aplicado pelo professor?*

-14 alunos ou 60,1% disseram não ter tido dificuldade de nenhum tipo;

-01 aluno ou 4,3% disse não ser bom em matemática;

-02 alunos ou 8,7% disseram não gostar de matemática;

-03 alunos ou 13,04% disseram que o método não ficou claro para elas;

-03 alunos ou seja 13,03% disseram achar o método confuso/complicado

Pergunta 3)

-04 alunos ou seja 17,4% deram notas de 0 a 3;

-12 alunos, istoé, 52,1% deram notas de 4 a 6;

-07 alunos, isto é, 30,4% deram notas de 7 a 10.

APÊNDICE C – EXERCÍCIOS APLICADOS EM SALA DE AULA

Exercício 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Exercício 2) $x^2 - 5x + 8 = 0$

Exercício 3) $6x^2 + x – 1 = 0$

Exercício 4) $4x^2 + 9 = 12x$

Exercício 5) $7x^2 +x + 2 = 0$

ANEXO A – CARTA DE APRESENTAÇÃO

Exma. Elisângela Matilda Carvalho, tendo em vista o término do curso de Pós-graduação *stricto sensu,* Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, UFPA, na qual destaca em sua legislação que para a obtenção do título de mestre, faz-se necessário o desenvolvimento da dissertação. Mediante a esta norma eu, Arlos Valente Filho, desejo desenvolver minha pesquisa de trabalho de dissertação na Estadual de Ensino Médio João Prudêncio de Brito, localizada à Rua C, Q/Especial 68515-000 - Cidade Nova, Parauapebas – PA. A dissertação é intitulada: "**MÉTODO *POH-SHEN LO*:** UMA PROPOSTA DE ENSINO COM UMA NOVA ABORDAGEM PARA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU EM UMA ESCOLA DE ENSINO MÉDIO", orientado pelo professor Prof. Dr. Aubedir Seixas - PROFMAT/UFPA. Assim, serão direcionadas observações em sala de aula, juntamente com aplicações de atividades aos alunos do 1º ano A do Ensino Médio, com gravação de imagens em fotografias sem mencionar nomes. Todas as observações e conclusões serão usadas unicamente para fins didáticos de pesquisa e divulgação de conhecimento científico.

Subscrevo-me, com a mais elevada consideração.

Arlos Valente Filho.

ANEXO B – IMAGENS DA SALA DE AULA DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO NA QUAL FOI APLICADA A METODOLOGIA DESTE ESTUDO

ANEXO C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu____, declaro estar ciente da minha participação no trabalho de dissertação de mestrado de Sebastião Junior Monteiro Costa, aluno do Curso de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, pela Universidade Federal do Pará, intitulado "**MÉTODO *POH-SHEN LO*:** UMA PROPOSTA DE ENSINO COM UMA NOVA ABORDAGEM PARA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU EM UMA ESCOLA DE ENSINO MÉDIO", orientado pelo professor Prof. Dr. Aubedir Seixas - PROFMAT/UFPA.

Sendo assim, eu autorizo a vincular minha imagem e depoimentos oral e escrito no trabalho que será desenvolvido, a fim de contribuir para um maior entendimento sobre o tema. Autorizo unicamente para fins de pesquisa e divulgação de conhecimento científico sem quaisquer ônus e restrições. Fica ainda autorizada, de livre e espontânea vontade, para os mesmos fins, a cessão de direito de vinculação, não recebendo para tanto qualquer tipo de remuneração.

Abaetetuba (Pa) ____de _______________, 2022.