



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



RODRIGO DIAS MATOS

**GEOMETRIA PLANA: PROPRIEDADES E TEOREMAS NÃO MUITO
USUAIS NO COTIDIANO DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

ABAETETUBA – PARÁ

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

RODRIGO DIAS MATOS

**GEOMETRIA PLANA: PROPRIEDADES E TEOREMAS NÃO MUITO
USUAIS NO COTIDIANO DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal do Pará – ABAETETUBA, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional.

Orientação do Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro.

ABAETETUBA - PARÁ

2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

M425g Matos, Rodrigo Dias.
Geometria plana : propriedades e teoremas não muito usuais no
cotidiano da educação básica / Rodrigo Dias Matos. — 2021.
77 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação
em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2021.

1. Propriedades, Stewart, Menelaus, Ceva. I. Título.


CDD 516

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

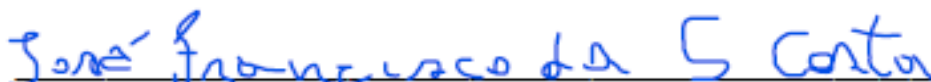
GEOMETRIA PLANA: PROPRIEDADES E TEOREMAS NÃO MUITO USUAIS NO COTIDIANO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal do Pará – ABAETETUBA, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional.


Dissertação aprovada em: 15/12/2021



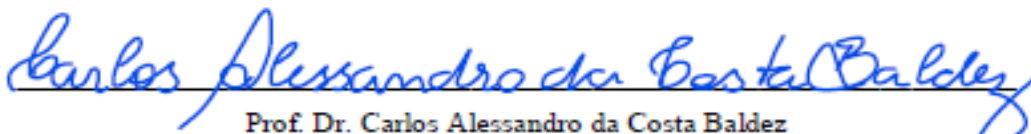
Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
(Orientador)



Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez
(Examinador Externo)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os professores e educadores matemáticos que acreditam e lutam por uma educação melhor. Educação esta capaz de transformar um indivíduo e modificar por completo uma sociedade, desde que esta tenha convicção de seu poder.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus! Por tudo que permitiu na minha vida, pois tudo o que sou, tudo que tenho e tudo o que há de vim, foi e será segundo a sua permissão. Então, a ele eu devo toda honra e toda a glória.

A todos os professores pertencentes ao programa do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Campus Universitário do Baixo Tocantins, polo Abaetetuba, pelos 02 anos de condução segura e paciente ao conhecimento. E a todos aqueles educadores que direta ou indiretamente contribuíram e contribuem com a minha qualificação profissional.

Também a todos os membros da minha família, pelo apoio e incentivo que me deram, entre esses destaco os meus avôs, sendo eles: MARIA DE NAZARÉ PEREIRA DIAS e CARLITO GONÇALVES, pelo incentivo em todos os momentos que galguei durante o tempo necessário à conclusão desta pós graduação.

A minha esposa REGIANE ALVES DE FREITAS, pela paciência e por compreender a minha ausência em muitos momentos durante esse período e pelos filhos maravilhosos que me concedeu.

Finalmente, aquele que me acolheu de braços abertos, me conduzindo pelos caminhos da pesquisa com paciência e maestria: prof. Dr. SEBASTIÃO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO. Não poderia esquecer também, os meus amigos de curso em especial aqueles que foram peças fundamentais nessa caminhada, como; IVANILTON PEDRO LOBATO DOS SANTOS, MARCELO CUNHA POMPEU, NÉLIO SANTOS NAHUM, RENNERSON RENNER MALATO DE SOUZA e tantos outros, o meu muito obrigado!

EPÍGRAFE

“Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura”.

(Hermann Hankel)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal fornecer um material de apoio e também de aprofundamento na disciplina de Geometria Plana, mais especificamente no estudo de resoluções de problemas envolvendo áreas, e desta forma contribuir com professores e alunos do Ensino Básico que participam ou pretendem participar de competições olímpicas como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas – OBMEP, OBMEP na Escola e outros. Servindo também como um material auxiliar para os discente do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT na disciplina MA 13. O presente trabalho abordará propriedades e teoremas não muito usuais no currículo da disciplina de matemática no Ensino Básico, mais de grande importância e relevância no estudo da Geometria Plana e no contexto das Olimpíadas atuais, explanando os Teoremas de Stewart, Ceva e Menelaus, que se referem a segmentos notáveis em um triângulo e que são fundamentais para a solução de muitos problemas nesta área. Assim, ficou evidenciado nesta dissertação através de vários exemplos a simplicidade na solução dos mesmos, mostrando que a Matemática, a Geometria vai muito além de formulas fechadas do cálculo pelo cálculo, mas sim de toda uma estrutura de pensamento e manuseio de algumas propriedades bastantes simples desta importante área das exatas que é a Geometria Plana.

Palavras-chave: Propriedades, Stewart, Menelaus, Ceva.

ABSTRACT

The main objective of this work is to provide support material and also to deepen the discipline of Plane Geometry, more specifically in the study of problem solving involving areas, and in this way to contribute to Basic Education teachers and students who participate or intend to participate in competitions Olympics such as the Brazilian Mathematics Olympiad for Public and Private Schools – OBMEP, OBMEP na Escola and others. Also serving as auxiliary material for students of the Professional Master's Degree in Mathematics – PROFMAT in the subject MA 13. The present work will address properties and theorems not very usual in the curriculum of the subject of Mathematics in Basic Education, more of great importance and relevance in the study of Plane Geometry and in the context of the current Olympics, explaining the Stewart, Ceva and Menelaus Theorems, which refer to remarkable segments in a triangle and which are fundamental to the solution of many problems in this area. Thus, in this dissertation, the simplicity in their solution was evidenced through several examples, showing that Mathematics, Geometry goes far beyond closed formulas of calculus through calculus, but rather a whole structure of thought and handling of some very simple properties of this important area of exacts which is Plane Geometry.

Keywords: Properties, Stewart, Menelaus, Ceva.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Dois Triângulos Congruentes.	16
Figura 2: Caso de Congruência (LAL).	17
Figura 3: Caso de Congruência (ALA)	18
Figura 4: Caso de Congruência (LLL).	18
Figura 5: Semelhança de Figuras.	19
Figura 6: Semelhanças de figuras Poligonais.....	20
Figura 7: Dois Triângulos Semelhantes.	21
Figura 8: Teorema Fundamental, Esquema 01.	22
Figura 9: Teorema Fundamental, Esquema 02.	23
Figura 10: Critério de Semelhança (AA).	24
Figura 11: Critério de Semelhança (LAL).	25
Figura 12: Critério de Semelhança (LLL).	26
Figura 13: Relação de Área 01.....	27
Figura 14: Aplicação 01 da Propriedade 01.	28
Figura 15: Passo 01 da Aplicação 01, Propriedade 01.....	29
Figura 16: Aplicação 02 da Propriedade 01.	29
Figura 17: Passo 01 da Aplicação 02, Propriedade 01.....	30
Figura 18: Passo 02 da Aplicação 02, Propriedade 01.....	30
Figura 19: Passo 03 da Aplicação 02, Propriedade 01.....	31
Figura 20: Passo 04 da Aplicação 02, Propriedade 01.....	32
Figura 21: Passo 05 da Aplicação 02, Propriedade 01.....	32
Figura 22: Relação de Área 02.....	33
Figura 23: Aplicação 01 da Propriedade 02.	34
Figura 24: Passo 01 da Aplicação 01, Propriedade 02.....	34
Figura 25: Passo 02 da Aplicação 01, Propriedade 02.....	35
Figura 26: Aplicação 02 da Propriedade 02.	35
Figura 27: Passo 01 da Aplicação 02, Propriedade 02.....	36
Figura 28: Passo 02 da Aplicação 02, Propriedade 02.....	36
Figura 29: Passo 03 da Aplicação 02, Propriedade 02.....	37
Figura 30: Relação de Área 03.....	38
Figura 31: Figura para Auxiliar a Demonstração.....	38

Figura 32: Aplicação 01 da Propriedade 03.	39
Figura 33: Aplicação 02 da Propriedade 03.	40
Figura 34: Passo 01 da Aplicação 2, Propriedade 03.	40
Figura 35: Passo 02 da Aplicação 2, Propriedade 03.	41
Figura 36: Relação de Área 04.	42
Figura 37: Aplicação 01 da Propriedade 04.	43
Figura 38: Aplicação 02 da Propriedade 04.	44
Figura 39: Passo 01 da Aplicação 02, Propriedade 04.	45
Figura 40: Relação de Área 05.	46
Figura 41: Aplicação 01 da Propriedade 05.	47
Figura 42: Aplicação 02 da Propriedade 05.	48
Figura 43: Teorema de Tales.	50
Figura 44: Teorema de Tales, Esquema 01 da Prova 01.	51
Figura 45: Teorema de Tales, Esquema 01 da Prova 02.	52
Figura 46: Teorema de Tales, Esquema 02 da Prova 02.	53
Figura 47: Teorema de Teles, Esquema 01 da Prova 03.	54
Figura 48: Relação de Stewart.	56
Figura 49: Relação de Stewart, Esquema 01.	57
Figura 50: Relação de Stewart, Aplicação 01.	58
Figura 51: Relação de Stewart, Aplicação 02.	59
Figura 52: Passo 01 da Relação de Stewart, Aplicação 02.	60
Figura 53: Relação de Menelaus.	61
Figura 54: Relação de Menelaus, Esquema 01.	62
Figura 55: Relação de Menelaus, Esquema 02.	63
Figura 56: Relação de Meneluas, Possível Caminho.	64
Figura 57: Relação de Menelaus, aplicação 01.	65
Figura 58: Passo 01 da Relação de Menelaus, Aplicação 01.	66
Figura 59: Passo 02 da Relação de Menelaus, Aplicação 01.	66
Figura 60: Relação de Meneluas Aplicação 02.	67
Figura 61: Relação de Ceva.	69
Figura 62: Relação de Ceva, Esquema 01.	70
Figura 63: Relação de Ceva, Aplicação 01.	71
Figura 64: Relação de Ceva, Aplicação 02.	72

Figura 65: Passo 01 da Relação de Ceva, Aplicação 02.	73
Figura 66: Passo 02 da Relação de Ceva, Aplicação 02.	73

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1. FUNDAMENTAÇÃO TEORICA	16
1.1. Conceito, Congruência de Triângulos	16
1.2. Casos de Congruência	17
1.2.1. Caso: LAL (lado, ângulo, lado)	17
1.2.2. Caso: ALA (ângulo, lado, ângulo)	17
1.2.3. Caso: LLL (lado, lado, lado).....	18
1.3. Conceito de Semelhança	19
1.4. Conceito de Semelhança de Triângulos	21
1.5. Teorema Fundamental	22
1.6. Casos ou Critérios de Semelhança de Triângulos	23
1.6.1. Critério (AA).....	23
1.6.2. Critério (LAL).....	24
1.6.3. Critério (LLL)	25
2. PROPRIEDADES ABORDADAS E SUAS APLICAÇÕES	27
2.1. Propriedade - 01	27
2.1.1. Aplicação da Propriedade - 01	28
2.2. Propriedade - 02	33
2.2.1. Aplicações da propriedade - 02.....	33
2.3. Propriedade - 03	38
2.3.1. Aplicações da Propriedade - 03	39
2.4. Propriedade – 04	42
2.4.1. Aplicações da propriedade - 04.....	43
2.5. Propriedade - 05	46
2.5.1. Aplicações da propriedade – 05	47
3. TEOREMA DE TALES E PROPRIEDADES DE ÁREAS	50
3.1. Teorema de Tales	50

3.1.1.	Primeira Prova do Teorema de Tales (Via Propriedades)	50
3.1.2.	Segunda Prova do Teorema de Tales (Via propriedades)	52
3.1.3.	Terceira Prova do Teorema de Tales (Via Propriedades).....	53
4.	TEOREMAS ABORDADOS E SUAS APLICAÇÕES	56
4.1.	O Teorema de Stewart	56
4.1.1.	Aplicações do Teorema de Stewart.....	58
4.2.	O Teorema de Menelaus	60
4.2.1.	Relação de Menelaus, Uma Possível Construção	64
4.2.2.	Aplicações do Teorema de Menelaus.....	65
4.3.	O Teorema de Ceva	68
4.3.1.	Aplicações do Teorema de Ceva.....	70
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
	REFERÊNCIAS	76

INTRODUÇÃO

A geometria plana é um ramo da matemática de grande importância para a construção e desenvolvimento do conhecimento, por suas inúmeras aplicações no âmbito da sociedade que vem desde os primórdios até a civilização atual (SANTOS, 2018). Ganhando proporções ainda maiores com surgimento das competições e dos programas de aperfeiçoamento e qualificação tanto dos alunos quanto dos profissionais da educação, voltados ao ensino e aprendizagem do saber matemático, competições estas como: A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas – OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM, Olimpíada Internacional de Matemática – IMO e por fim, mas não menos importantes, têm-se as olimpíadas regionais, com destaque por exemplo para a Olimpíada Cearense de Matemática – COM, que vem revelando muitos talentos nos últimos anos. E segundo Aires e Pereira (2019), percebe-se que tais argumentos são pertinentes, quando afirma que:

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organiza desde 1979 a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e mais recentemente, em 2005, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), programa que em sua última edição (2016) teve uma participação de quase de 18 milhões de alunos inscritos nos quatro cantos do país e neste ano (2017) esse número chegou a marca de exatamente 18.240.497 alunos inscritos, com a participação de 99,57% dos municípios brasileiros, esse aumento se deu pelo fato de que tivemos a participação de alunos das escolas particulares (AIRES; PEREIRA, 2019, p. 10).

No ano de 2020 teve exatamente 17.731.504 alunos inscritos para a 1ª fase da OBMEP. Nota-se que houve uma certa redução, mais ainda é um número significativo que representa 99,84% dos municípios brasileiros com participação na OBMEP (OBMEP, 2020).

Já no quesito programas destinados aos alunos, destaca-se o Programa de Iniciação Científica Jr – PIC, Polo Olímpico de Treinamento Intensivo – POTI, Programa OBMEP na Escola e outros.

Por outro lado, os programas voltados aos educadores matemáticos que vêm servir como instrumento de estímulo à busca de novos conhecimentos, ressaltam-se o Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio – PAPMEM, o Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, dentre inúmeros outros programas voltados para o aperfeiçoamento e qualificação de tais profissionais.

Observando e vivenciando esse cenário como professor de matemática do ensino básico e como discente do programa PROFMAT, mestrado profissional, percebe-se que ainda tem muito a se fazer pelo ensino da matemática, pois existem propriedades básicas e teoremas da Geometria Plana que ficam de certa forma esquecidos por uma boa parte dos professores, ou até mesmo os desconhecem, mas que são fundamentais para a solução de vários exercícios da disciplina e de competições, não o bastante, em alguns casos estes são as únicas ferramentas para resolver um dado problema nesta área da matemática.

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo geral; apresentar certas propriedades básicas e alguns teoremas, servir como um importante material de apoio e de aprofundamento a professores e alunos na disciplina de Geometria Plana dentro do currículo da educação básica, dos projetos e programas como, OBMEP, OBMEP na Escola que busca preparar alunos para tal competição e a quem mais interessar.

Além disso, vê essa preocupação também por parte de Aires e Pereira (2019, p. 10) quando os mesmos afirmam “Nesse contexto é natural que surja a necessidade de elaboração de materiais escritos em português que sirvam de apoio para a preparação dos alunos para estas competições”.

Então, dentro deste panorama do que está sendo apresentado e da preocupação que se tem em produzir materiais atendendo as exigências atuais da matemática olímpica, da matemática instigante, estimuladora e desafiadora que levem o aluno a usar sua criatividade e que também sirva como um instrumento de inclusão social por meio da difusão do conhecimento é que este trabalho surge.

Assim, essa dissertação composta por 05 capítulos que se estruturam da seguinte forma:

No **capítulo 1**, será abordado um pouco de teoria da Geometria Plana, tais como, conceitos iniciais, congruência, semelhança que fundamentaram o entendimento do que se propõe este trabalho.

No **capítulo 2**, apresente-se as propriedades que são em número um total de 05, com suas respectivas provas e aplicações.

O **capítulo 3**, explanará o teorema de Tales e conseqüentemente três demonstrações, utilizando as propriedades do capítulo 2.

Já o **capítulo 4**, abordará os teoremas de Stewart, Ceva e Menelaus, que assim como as propriedades são os principais objetos de estudo neste trabalho.

E por fim, o **capítulo 5**, que trará as considerações finais de toda essa pesquisa.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

Este capítulo abordará algumas noções elementares a respeito de congruência e de semelhança de triângulos, em particular os casos de congruências e os critérios de semelhança, pois tais noções serão fundamentais para a compreensão do que será apresentado a seguir.

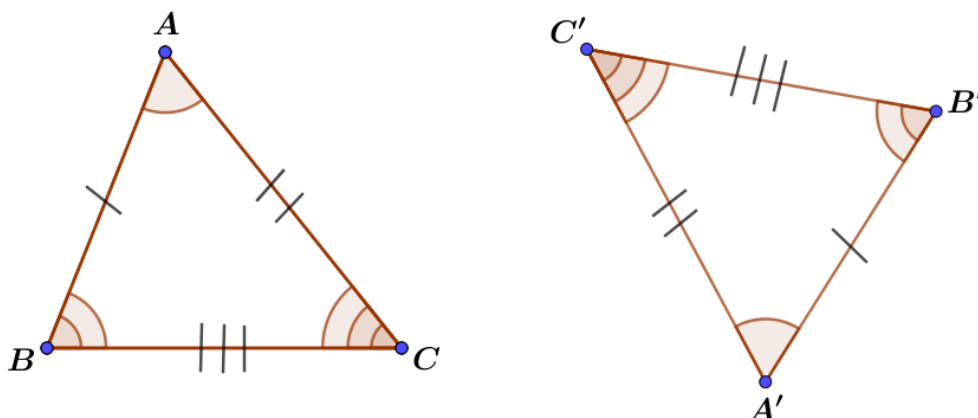
1.1. Conceito, Congruência de Triângulos

Diz-se, que dois triângulos são congruentes se é possível sobrepô-los através de movimentos rígidos no espaço, sem deformá-los. Então, quando dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são congruentes, é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, tal que:

- ✓ Os ângulos internos em vértices correspondentes tenham medidas iguais;
- ✓ Os lados opostos a vértices correspondentes tenham comprimentos iguais.

Para tais triângulos, têm-se:

Figura 1: Dois Triângulos Congruentes.



Fonte: Próprio Autor.

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', & \hat{B} = \hat{B}', & \hat{C} = \hat{C}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'}, & \overline{AC} = \overline{A'C'}, & \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases}$$

Logo, quando dois triângulos satisfazem as 6 (seis) relações de correspondência acima, diz-se que tais triângulos são congruentes, isto é, o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$, fato este que pode ser representado por $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, (símbolo de congruência $\rightarrow (\equiv)$).

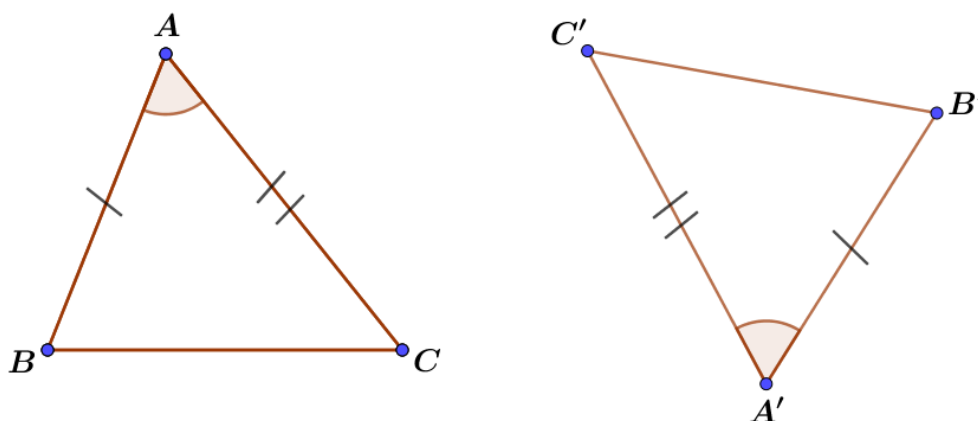
A seguir, enuncia-se (sem demonstração) alguns conjuntos de critérios mínimos que permitem estabelecer a congruência de dois triângulos dados. Tais critérios são conhecidos como casos de congruência de triângulos.

1.2. Casos de Congruência

1.2.1. Caso: LAL (lado, ângulo, lado)

Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e o ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 2: Caso de Congruência (LAL).



Fonte: Próprio Autor.

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se:

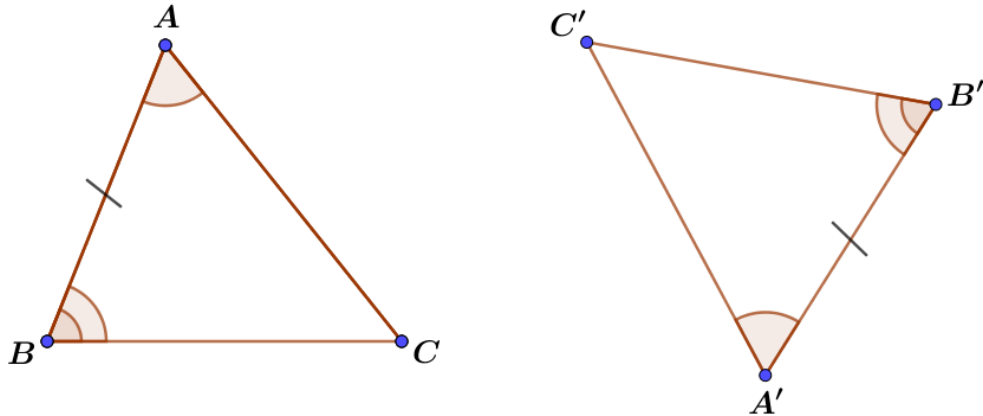
$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A'} \end{cases} \xRightarrow{LAL} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, o que fornece as igualdades adicionais $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$.

1.2.2. Caso: ALA (ângulo, lado, ângulo)

Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 3: Caso de Congruência (ALA)



Fonte: Próprio Autor.

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se:

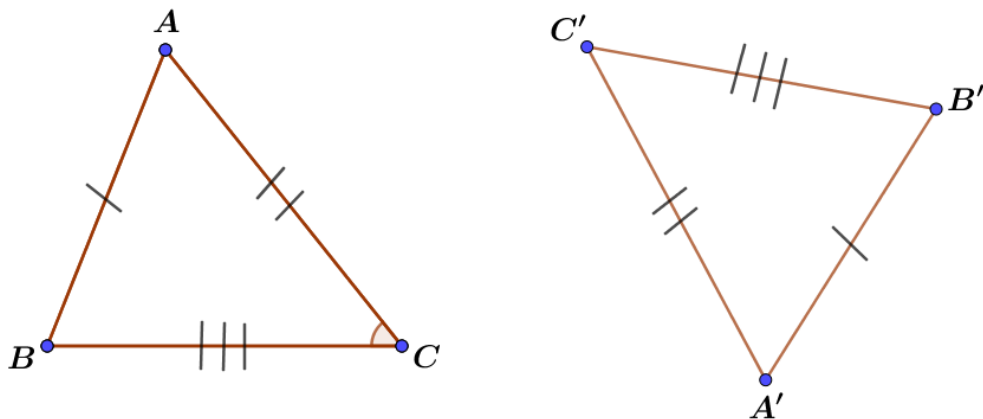
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \end{cases} \xrightarrow{ALA} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também devemos ter $\hat{C} = \hat{C}'$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

1.2.3. Caso: LLL (lado, lado, lado)

Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 4: Caso de Congruência (LLL).



Fonte: Próprio Autor.

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases} \stackrel{LLL}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

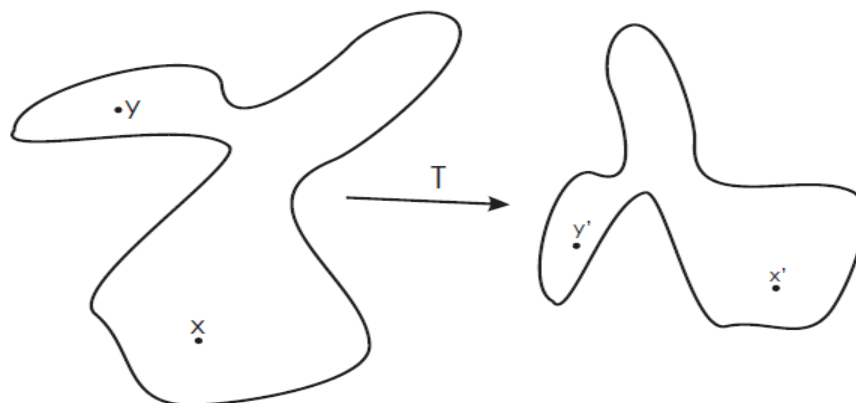
Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

1.3. Conceito de Semelhança

Genericamente, diz que duas figuras planas F e F' são semelhantes com razão de semelhança K , quando existir uma correspondência biunívoca T entre os pontos de F e os pontos de F' , chamada transformação de semelhança, que preserva a forma das figuras. Equivalentemente, se X, Y são pontos quaisquer de F e se $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ são seus correspondentes em $F' = T(F)$ (denomina-se **pontos homólogos**ⁱ). Então,

$$X'Y' = K(XY).$$

Figura 5: Semelhança de Figuras.

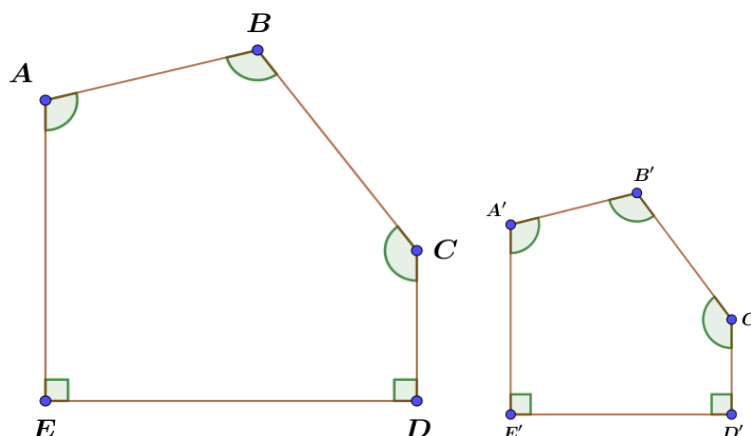


Fonte: Portal da Matemática, Semelhança entre triângulos.

Assim, a noção de semelhança corresponde à ideia natural de mudança de escala, isto é, ampliação (quando a razão K satisfaz $K > 1$) ou redução (quando a razão K satisfaz $0 < K < 1$) de uma figura, alterando o seu tamanho sem modificar a proporcionalidade entre as suas dimensões lineares, e mantem as mesmas medidas angulares, isto é, conservam a sua forma, estas são chamadas de figuras semelhantes, é o caso abaixo.

ⁱ **Homólogos:** Que mantem com outro elemento similar uma relação de correspondência que pode ser de localização, de forma, de função etc.

Figura 6: Semelhanças de figuras Poligonais



Fonte: Próprio Autor.

Sabendo da semelhança existente entre as duas figuras acima, podemos inferir-se as seguintes relações de equivalência:

$$\begin{cases} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = K \\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}', \hat{E} = \hat{E}' \end{cases}$$

Sendo assim, \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ são chamados de lados correspondentes, assim como \overline{BC} e $\overline{B'C'}$; \overline{CD} e $\overline{C'D'}$; \overline{DE} e $\overline{D'E'}$; \overline{EA} e $\overline{E'A'}$.

Já, \hat{A} e $\hat{A'}$ são chamados ângulos correspondentes, assim como \hat{B} e $\hat{B'}$; \hat{C} e $\hat{C'}$; \hat{D} e $\hat{D'}$; \hat{E} e $\hat{E'}$.

Com isso, se estabelece dois conceitos importantes relativo a figuras geométricas planas e semelhantes:

- Suas medidas lineares correspondentes são proporcionais.
- Suas medidas angulares correspondentes são congruentes.

Tais conceitos são condições necessárias e suficientes para existir o que se chama de semelhança de figuras planas poligonais.

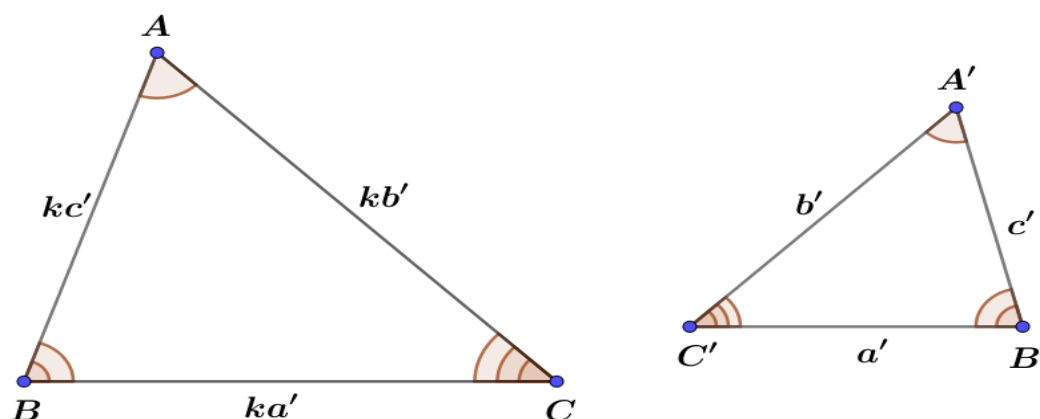
Vejamos a seguir esse conceito no que tange as figuras triangulares.

1.4. Conceito de Semelhança de Triângulos.

Nesta seção será apresentado o conceito de semelhança de figuras triangulares. Além disso, apresenta-se os conjuntos mínimos de condições sobre dois triângulos, de tal forma que garantem a semelhança dos mesmos. Esse conjunto de condições são os análogos e, por essa razão, são denominados casos (ou critérios) de semelhanças de triângulos.

Definição 01. Dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um de outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma, figura abaixo:

Figura 7: Dois Triângulos Semelhantes.



Fonte: Próprio Autor.

Fisicamente, dois triângulos são semelhantes se for possível dilatar e / ou girar e / ou refletir e / ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações.

Na figura 7 acima os dois triângulos são semelhantes, tal fato pode ser representado simbolicamente por $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (*Triângulo ABC semelhante ao triângulo A'B'C'*), com a correspondência de vértices, $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Assim, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e existe $k > 0$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{kc'}{c'} = \frac{ka'}{a'} = \frac{kb'}{b'} = \frac{k(c' + a' + b')}{c' + a' + b'} = k$$

Onde $k > 0$, é denominado de razão de semelhança entre os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$. É importante ressaltar também o caso em que $k = 1$, quando isso ocorre, tem-se a congruência entre triângulos que é um caso particular de semelhanças entre figuras triangulares.

Da definição de semelhança de triângulos, infere-se as seguintes propriedades:

Propriedade. Reflexiva, é quando todo triângulo é semelhante a si próprio, isto é,

$$\Delta ABC \sim \Delta ABC.$$

Propriedade. Simétrica, ocorre quando tem-se a seguinte situação,

$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Leftrightarrow MNP \sim ABC.$$

Propriedade. Transitiva, é a propriedade que estabelece a seguinte relação:

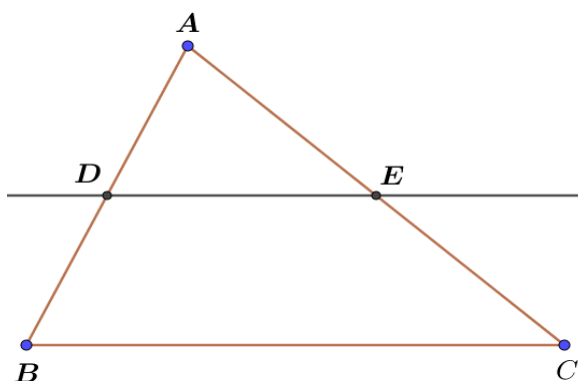
$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \text{ e } \Delta MNP \sim \Delta PRS \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PRS.$$

1.5. Teorema Fundamental

Teorema: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Representação geométrica abaixo:

Figura 8: Teorema Fundamental, Esquema 01.



Fonte: Próprio Autor.

- ✓ O seguinte teorema, tem como hipótese: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$
- ✓ Precisa ser provado (tese): $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

Prova: Para provar a semelhança entre ΔADE e ΔABC , precisa-se provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:

1º) **Ângulos congruentes:** Note que por hipótese $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes) então, tem-se:

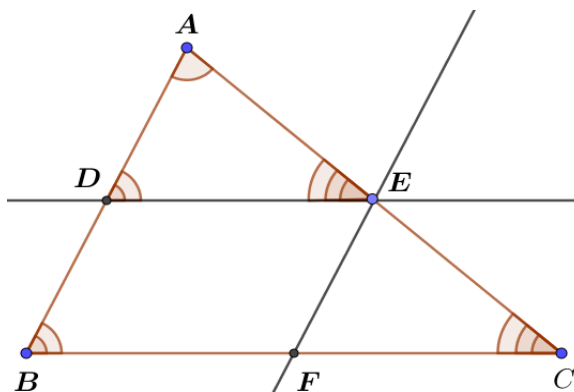
$$\hat{D} \equiv \hat{B}, \hat{E} \equiv \hat{C} \text{ e } \hat{A} \text{ (comum)} \quad (1.1)$$

2º) **Lados proporcionais:** Pelo teorema de Tales que será apresentado posteriormente, tem-se:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Por E constrói-se \overrightarrow{EF} paralela a \overline{AB} , com F em \overline{BC} . Representação abaixo:

Figura 9: Teorema Fundamental, Esquema 02.



Fonte: Próprio Autor.

$$\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \text{Paralelogramo } BDEF \Rightarrow \overline{DE} \equiv \overline{BF} \\ \text{Teorema de Tales } \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

Logo, tem-se

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (1.2).$$

Portanto, de (1.1) e (1.2) conclui-se que:

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \quad \blacksquare$$

1.6. Casos ou Critérios de Semelhança de Triângulos

Nesta seção, faz-se uma breve explanação dos critérios de semelhança de triângulos, pois serão ferramentas importantes para a compreensão de alguns temas abordados posteriormente.

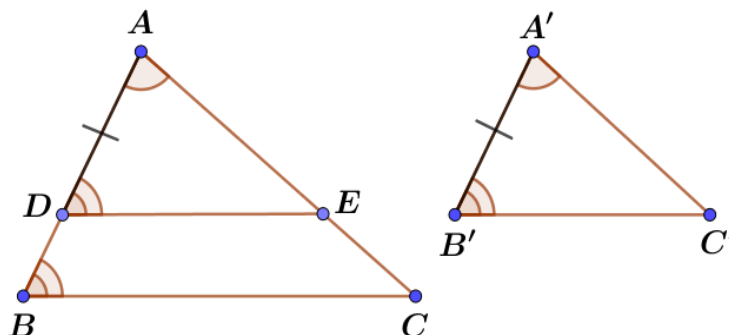
1.6.1. Critério (AA)

Teorema: (Critério AA de Semelhança). Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois pares de ângulos correspondentes sejam congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

- ✓ **Hipótese:** ΔABC , $\Delta A'B'C'$ com $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ e $\hat{B} \equiv \hat{B}'$
- ✓ **Tese:** $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Prova: Supondo que os triângulos não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ e seja D um ponto de \overline{AB} tal que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e o triângulo ADE com $\hat{D} \equiv \hat{B}'$ e E no lado \overline{AC} . Figura abaixo:

Figura 10: Critério de Semelhança (AA).



Fonte: Próprio Autor.

Com isso, obtêm-se as seguintes relações:

$$\left(\begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \text{ (por hipótese)} \\ \overline{AD} \equiv \overline{A'B'} \text{ (por construção)} \\ \hat{D} \equiv \hat{B}' \text{ (por construção)} \end{array} \right) \xrightarrow{ALA} \Delta ADE \equiv \Delta A'B'C' \quad (1.3).$$

Mas, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ (por hipótese) e $\hat{B}' \equiv \hat{D}$ logo,

$$\hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE \quad (1.4)$$

Portanto, de (1.3) e (1.4) conclui-se que:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad \blacksquare$$

A prova dos outros dois critérios apresentados a seguir, isto é, dos outros dois teoremas são análogo ao caso anterior, teorema (AA). No segundo critério, basta usar o caso de congruência (LAL) e no terceiro o caso (LLL). Sendo assim, os teoremas não serão provados apenas enunciado e construído os seus respectivos esquemas.

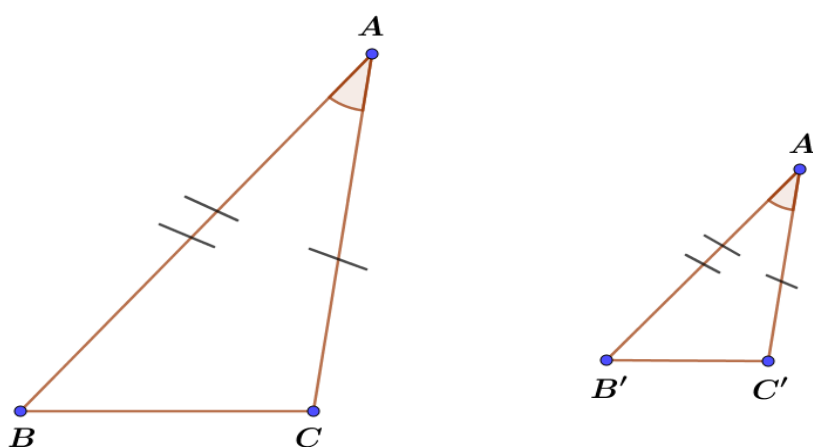
1.6.2. Critério (LAL)

Teorema: (Critério LAL de Semelhança). Se existir uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

- ✓ **Hipótese:** $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ com $\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{CA}/\overline{C'A'}$ e $\hat{A} \equiv \hat{A}'$
- ✓ **Tese:** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Representação geométrica:

Figura 11: Critério de Semelhança (LAL).



Fonte: Próprio Autor.

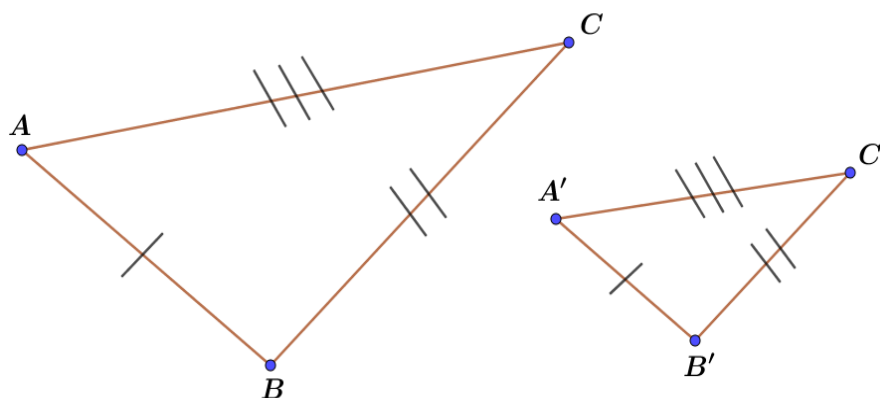
1.6.3. Critério (LLL)

Teorema: (Critério LLL de Semelhança). Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os pares de lados correspondentes são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

- ✓ **Hipótese:** $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ com $\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{BC}/\overline{B'C'} = \overline{CA}/\overline{C'A'} = K$
- ✓ **Tese:** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Representação geométrica:

Figura 12: Critério de Semelhança (LLL).



Fonte: Próprio Autor.

Deste último caso, encerra-se a breve explanação a respeito da semelhança de triângulos. O capítulo a seguir abordará certas propriedades que norteará um boa parte desse trabalho.

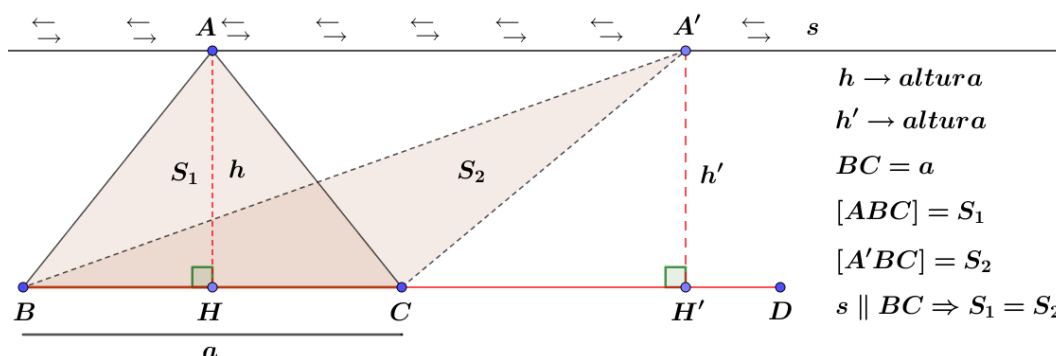
2. PROPRIEDADES ABORDADAS E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo, dá-se ênfase as propriedades que junto com os teoremas serão os principais objeto de estudo neste importante trabalho. A maior atenção será dada aos triângulos, pois sabe-se que todos os polígonos podem ser subdivididos ou partilhados em figuras triangulares. Com isso, as propriedades de áreas inerentes dos triângulos apresentadas a seguir servirão para solucionar vários problemas que envolvam áreas de figuras planas.

2.1. Propriedade - 01

“Dado um triângulo ABC , qualquer outro triângulo tendo lado BC e o terceiro vértice pertencente à reta (s), paralela BC e passando por A , terá área igual à área de ABC ”.

Figura 13: Relação de Área 01.



Fonte: Próprio Autor.

Em outras palavras, a área de um triângulo não se altera quando a sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base. E antes de se provar tal propriedade, vale ressaltar que $[ABC]^{ii} = S_1$ e $[A'BC] = S_2$.

Prova: Note que as alturas dos dois triângulos são iguais, isto é, $h = h'$ pois, \overline{CD} é um prolongamento de \overline{BC} paralelo a (s). Sendo assim, altura do $\Delta ABC = h$ e altura $\Delta A'BC = h'$. Note também, que a base $\overline{BC} = a$ (comum aos dois triângulos). Portanto, ambos têm a mesma altura e a mesma base. Daí, tem-se que:

$$S_1 = \frac{ah}{2} \quad (2.1).$$

ⁱⁱ $[ABC]$: Essa simbologia representa a área do triângulo ABC . No decorrer deste trabalho usaremos muitas das vezes colchetes inserido por letras maiúsculas para representar a área de uma figura plana ou simplesmente S .

Mas, tem-se também

$$S_2 = \frac{ah'}{2} \quad (2.2)$$

Logo, de (2.1), (2.2) e do fato $h = h'$ conclui-se que:

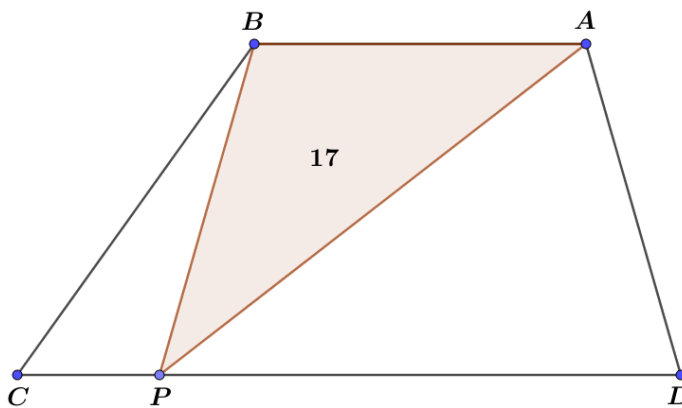
$$S_1 = S_2 \quad \blacksquare$$

Definição 02: Duas figuras planas que possuem a mesma área são chamadas figuras equivalentes. Em outras palavras, dois polígonos são equivalentes quando suas regiões poligonais correspondentes possuírem a mesma área.

2.1.1. Aplicação da Propriedade - 01

Exemplo 01 (OBMEP). No trapézio $ABCD$ da figura, os lados AB e CD são paralelos e o comprimento de CD é o dobro do comprimento de AB . O ponto P está sobre o lado CD e determina um triângulo APB com área igual a 17. Qual é a área do trapézio $ABCD$?

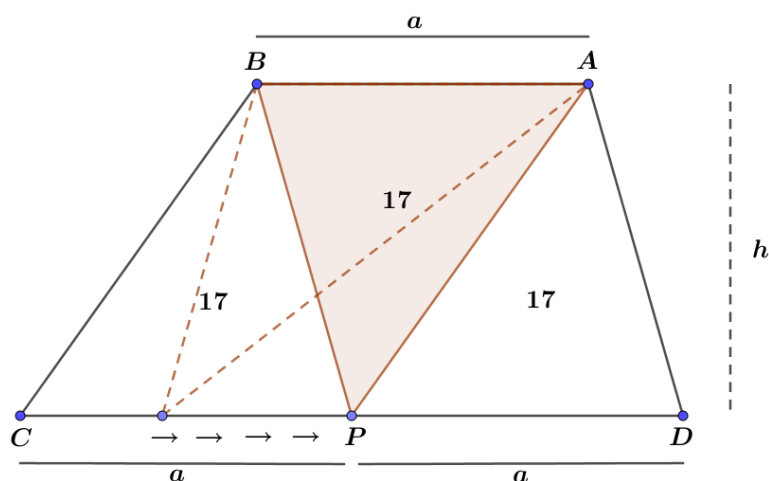
Figura 14: Aplicação 01 da Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Note, que pelo enunciado os lados \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos e além disso $\overline{CD} = 2\overline{AB}$. Sendo assim, pela propriedade vista é permitido fazer P percorrer \overline{CD} até o seu ponto médio, obtendo assim três triângulos de mesma base, isto é, $\overline{AB} = \overline{CP} = \overline{DP} = a$ (figura abaixo).

Figura 15: Passo 01 da Aplicação 01, Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

Como a altura h é a mesma para os três triângulos, então ambos têm a mesma área, pois possuem a mesma base e a mesma altura e como a $[\Delta APB] = 17$, então $[\Delta APD] = 17$ e $[\Delta BPC] = 17$. Portanto, como a área do trapézio $ABCD$ é igual a soma das áreas dos três triângulos, então tem-se:

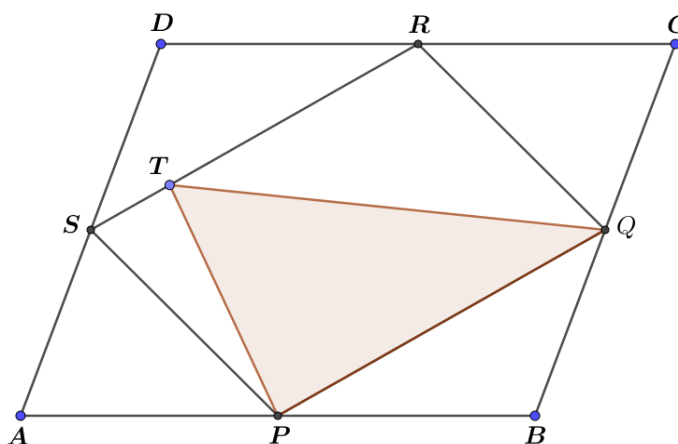
$$[ABCD] = [\Delta APB] + [\Delta APD] + [\Delta BPC]$$

$$[ABCD] = 17 + 17 + 17$$

$$[ABCD] = 51$$

Exemplo 02 (OBMEP). Na figura, o paralelogramo $ABCD$ tem área 40 cm^2 . Os pontos P , Q , R , S são pontos médios dos lados do paralelogramo e T está no segmento RS . Qual é a área do triângulo PQT ?

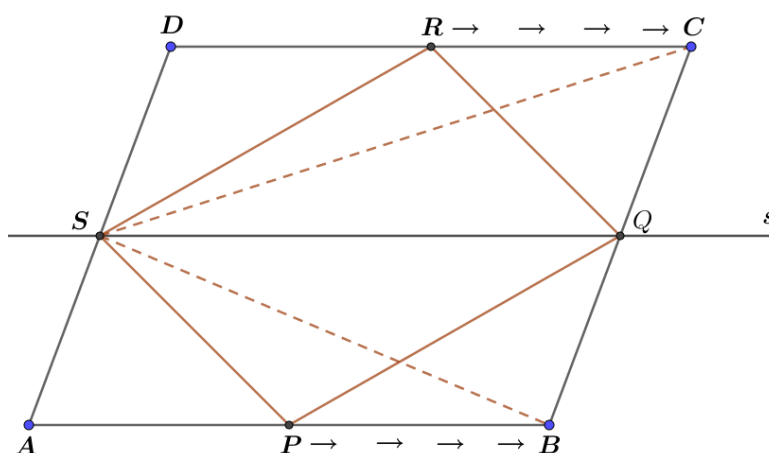
Figura 16: Aplicação 02 da Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: (Passo 01) Primeiramente, analisa-se o paralelogramo $ABCD$ e o quadrilátero formado a partir de seus pontos médios. Traçando uma reta (s) passando pelos pontos S e Q , obtemos dois triângulos de base \overline{SQ} o ΔQRS e ΔQPS e aplicando novamente a propriedade descrita acima, isto é, fazendo R e P deslocar sobre os respectivos lados CD e AB até sobrepor C e B , obtendo dois novos triângulos ΔCSQ e ΔBSQ que preservam a área dos triângulos anteriores, pois como S e Q são pontos médios de lados opostos de um paralelogramo, então (s) é paralelas aos lados CD e AB (figura abaixo).

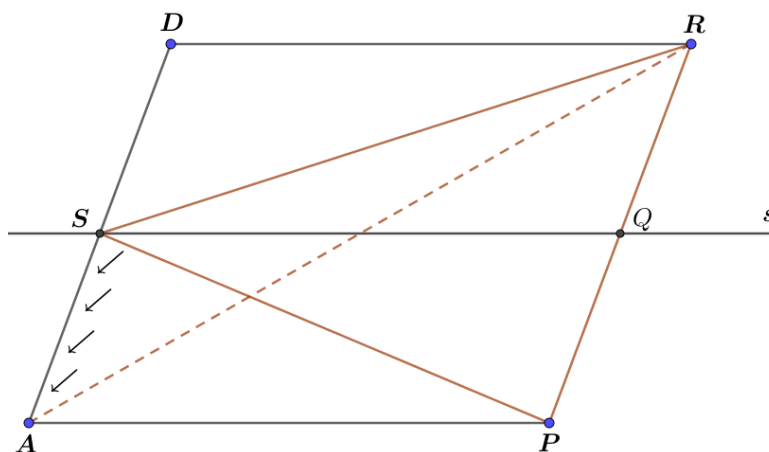
Figura 17: Passo 01 da Aplicação 02, Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

(Passo 02) A partir do processo construído, obtém-se uma figura triangular PRS com a mesma área do quadrilátero $PQRS$ da figura acima. Então, de maneira análoga, deslocamos o vértice S do ΔPRS sobre o lado AD até sobrepor o ponto A do paralelogramo. Figura abaixo:

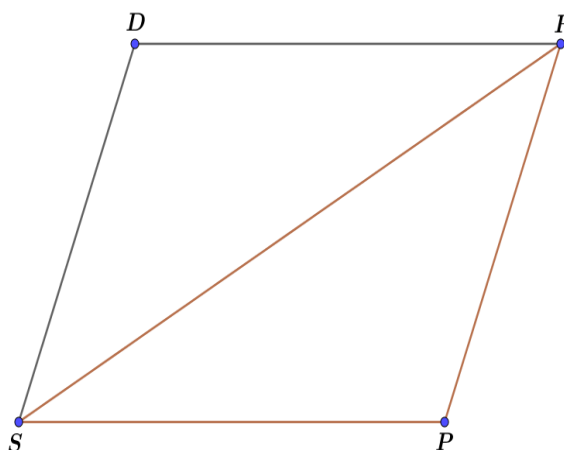
Figura 18: Passo 02 da Aplicação 02, Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

Obtendo novamente um triângulo com a mesma área do anterior, pois o vértice S percorreu um segmento paralelo a base \overline{PR} , lado oposto do paralelogramo (figura abaixo).

Figura 19: Passo 03 da Aplicação 02, Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

Logo, pela sequência de passos chega-se ao paralelogramo acima, cuja \overline{RS} é diagonal. Então, como a área de $[SPRD] = [ABCD] = 40\text{cm}^2$ tem-se o seguinte resultado:

$$[PQRS] = [PRS] = \frac{[SPRD]}{2}$$

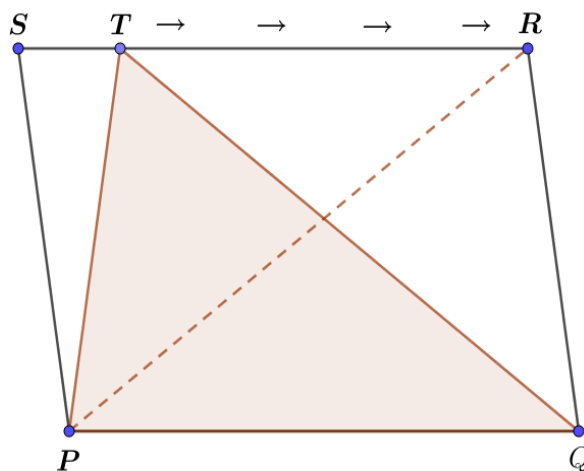
$$\Rightarrow [PQRS] = \frac{[SPRD]}{2}$$

$$[PQRS] = \frac{40}{2}$$

$$[PQRS] = 20$$

(Passo 03) Por outro lado, analisando somente o quadrilátero $[PQRS]$ cuja também é um paralelogramo, formado a partir dos pontos médios de $[ABCD]$. Aplicando novamente tal propriedade, isto é, deslocar T sobre \overline{SR} até sobrepor R que a área do triângulo ΔTPQ não se altera. Figura abaixo:

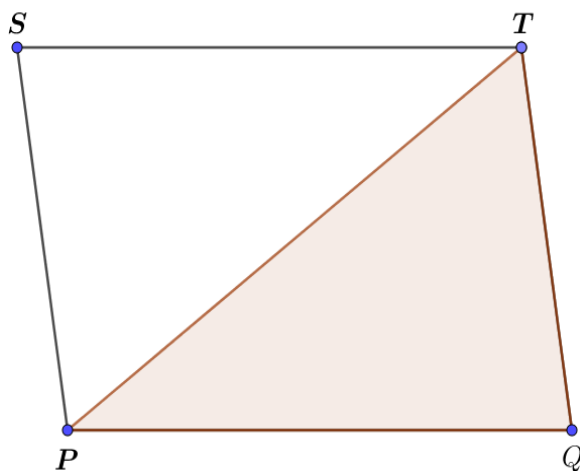
Figura 20: Passo 04 da Aplicação 02, Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

Portanto, chega-se a um resultado similar ao anterior, um paralelogramo em que \overline{PT} é diagonal. Veja:

Figura 21: Passo 05 da Aplicação 02, Propriedade 01.



Fonte: Próprio Autor.

Como \overline{PT} é diagonal e sabendo que $[PQTS] = [PQRS] = 20\text{cm}^2$ valor este calculado anteriormente. Logo, se chega ao resultado desejado a área do ΔPTQ

$$[PTQ] = \frac{[PQTS]}{2}$$

$$[PTQ] = \frac{20}{2}$$

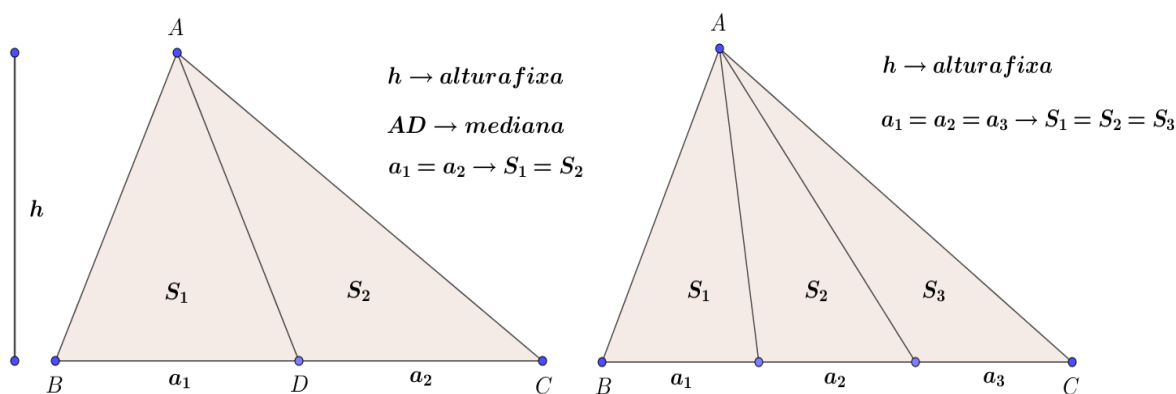
$$[PTQ] = 10\text{cm}^2$$

2.2. Propriedade - 02

“Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais”.

Obs. A figura à esquerda abaixo é o que descreve a propriedade, já a figura à direita é um caso particular da mesma.

Figura 22: Relação de Área 02.



Fonte: Próprio Autor.

A sua prova é relativamente simples. Veja:

Prova: É fácil vê, que a altura é a mesma aos dois triângulos, ou seja, altura de $\triangle ABD = h$ e $\triangle ADC = h$ também. Além disso \overline{AD} é mediana, logo $\overline{BD} = \overline{DC}$ e como $\overline{BD} = a_1$, $\overline{DC} = a_2$, assim $a_1 = a_2$. Com isso tem-se;

$$S_1 = \frac{a_1 h}{2} \quad (2.3)$$

$$S_2 = \frac{a_2 h}{2} \quad (2.4).$$

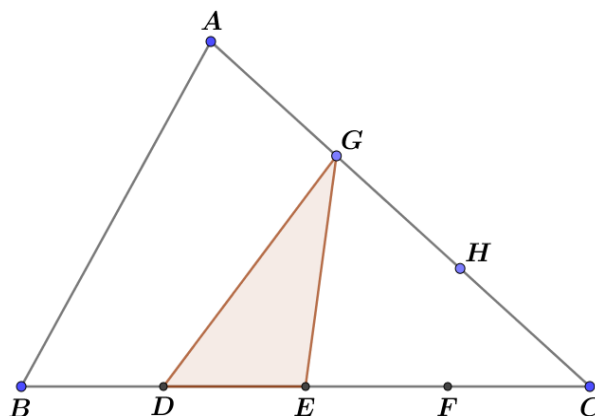
Assim de (2.3) e (2.4) conclui-se,

$$S_1 = S_2 \quad \blacksquare$$

2.2.1. Aplicações da propriedade - 02

Exemplo 03 (Eduardo Vagner). O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais, pelos pontos D , E e F , e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H . Qual é a área do triângulo GDE ?

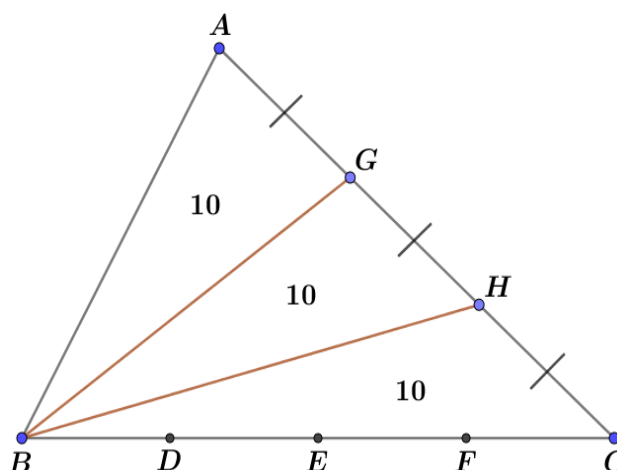
Figura 23: Aplicação 01 da Propriedade 02.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Observe o triângulo ABC com as cevianasⁱⁱⁱ \overline{BG} e \overline{BH} .

Figura 24: Passo 01 da Aplicação 01, Propriedade 02.

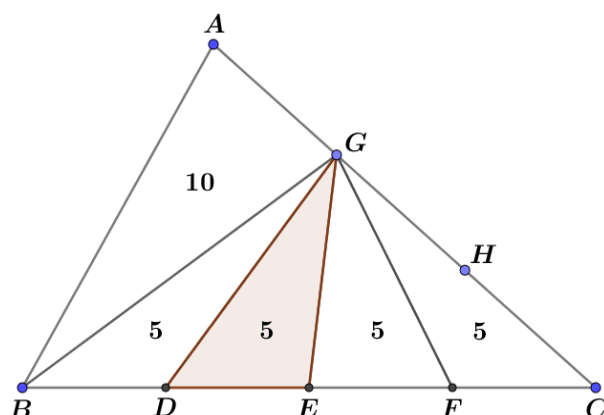


Fonte: Próprio Autor.

Pela propriedade dada os triângulos BAG , BGH e BHC tem a mesma área. Cada um tem, portanto, área igual 10 e o triângulo BGC tem área igual a 20. Observe agora o triângulo BGC com as cevianas \overline{GD} , \overline{GE} e \overline{GF} .

ⁱⁱⁱ **Ceviana:** É um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a um ponto qualquer do lado oposto.

Figura 25: Passo 02 da Aplicação 01, Propriedade 02.



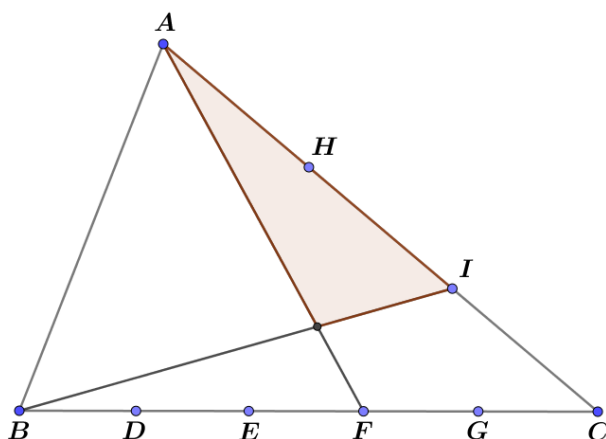
Fonte: Próprio Autor.

Pela propriedade abordada, os triângulos GBD , GDE , GEF e GFC têm a mesma área. Logo, cada um tem área 5. Então,

$$[\Delta GDE] = 5.$$

Exemplo 04: Se a área do triângulo ABC é K e os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais, determine a área do triângulo sombreado em função de K .

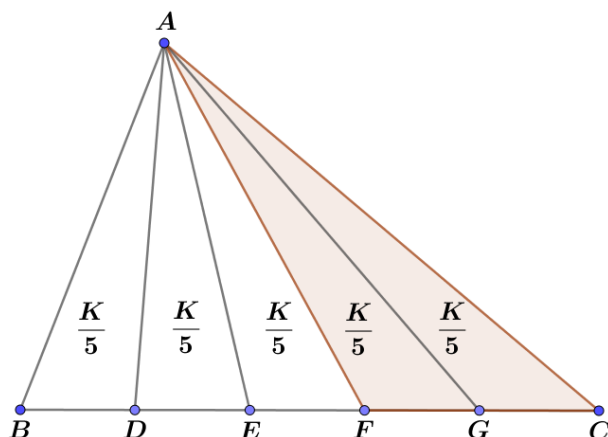
Figura 26: Aplicação 02 da Propriedade 02.



Fonte: Próprio Autor.

Novamente, observando o triângulo ABC , com as cevianas \overline{AD} , \overline{AE} , \overline{AF} e \overline{AG} .

Figura 27: Passo 01 da Aplicação 02, Propriedade 02.



Fonte: Próprio Autor.

Note, que pela propriedade que antecede, tem-se que os triângulos ABD , ADE , AEF , AFG e AGC possuem a mesma área, isto é,

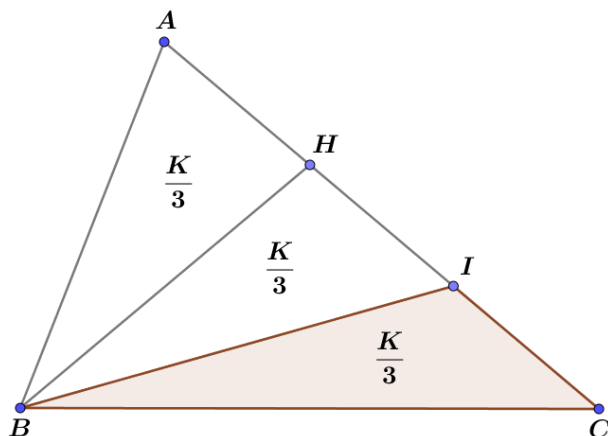
$$[ABD] = [ADE] = [AEF] = [AFG] = [AGC] = \frac{K}{5}.$$

Portanto, como $[AFC] = [AFG] + [AGC]$. Então,

$$[AFC] = \frac{2K}{5} \tag{2.5}.$$

De maneira análoga, constrói-se um outro caso para analisar a área do triângulo BCI . figura abaixo:

Figura 28: Passo 02 da Aplicação 02, Propriedade 02.



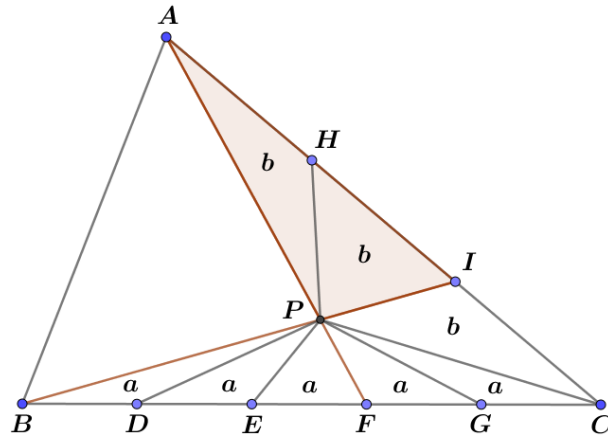
Fonte: Próprio Autor.

Logo, é fácil ver pela propriedade das cevianas que:

$$[ABH] = [BIH] = [BCI] = \frac{K}{3} \quad (2.6)$$

Mas, por outro lado pode-se construir a seguinte relação. Figura abaixo:

Figura 29: Passo 03 da Aplicação 02, Propriedade 02.



Fonte: Próprio Autor.

Então, de (2.5), (2.6) e da figura acima, tem-se:

$$\begin{aligned} [AFC] &= b + b + b + a + a = \frac{2K}{5} \\ \Rightarrow 3b + 2a &= \frac{2K}{5} \end{aligned} \quad (2.7).$$

De outra forma,

$$\begin{aligned} [BCI] &= b + a + a + a + a + a = \frac{K}{3} \\ \Rightarrow b + 5a &= \frac{K}{3} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Logo, da equação (2.7) e (2.8) temos que:

$$b = \frac{4K}{39}.$$

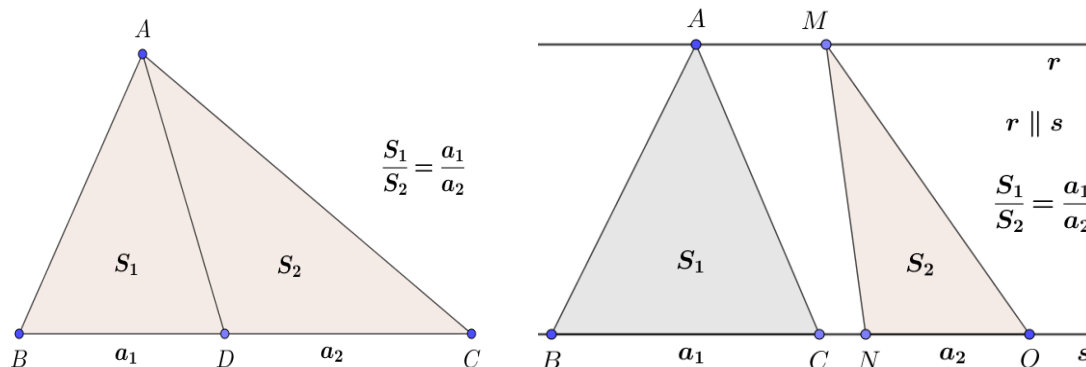
Como a área desejada do triângulo AIP vista na figura acima é expressa por,

$$[AIP] = b + b = 2b \Rightarrow [AIP] = 2 \left(\frac{4K}{39} \right) \Rightarrow [AIP] = \frac{8K}{39}.$$

2.3. Propriedade - 03

“Se dois triângulos têm a mesma altura, então a razão entre as suas áreas é igual a razão entre as suas bases. Figuras abaixo”.

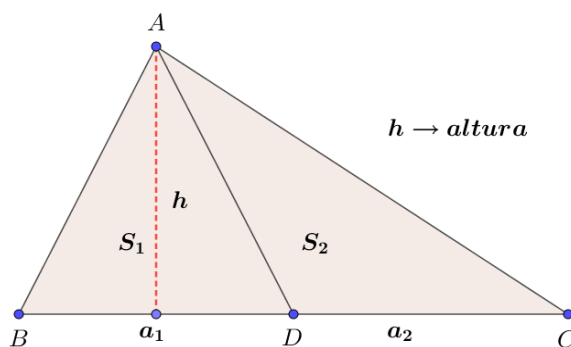
Figura 30: Relação de Área 03.



Fonte: Próprio Autor.

Prova: Para esta demonstração, considera-se a figura abaixo:

Figura 31: Figura para Auxiliar a Demonstração.



Fonte: Próprio Autor.

Do $\triangle ABD$, obtêm-se que a base $\overline{BD} = a_1$ e altura h , com isso a sua área é devidamente expressa pela relação:

$$S_1 = \frac{a_1 \cdot h}{2} \quad (2.9)$$

Da mesma forma, quando se analisa o $\triangle ACD$, tem-se que sua base $\overline{CD} = a_2$ e altura h com isso, a sua área também pode ser calculada,

$$S_2 = \frac{a_2 \cdot h}{2} \quad (2.10).$$

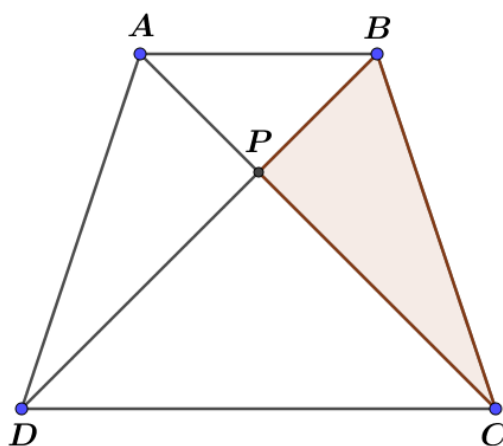
Portanto, dividindo (2.9) por (2.10) respectivamente, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{a_1 \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{a_2 \cdot h} \\ \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} &= \frac{a_1}{a_2} \end{aligned}$$

2.3.1. Aplicações da Propriedade - 03

Exemplo 05. A figura dada representa um trapézio $ABCD$ em que AB é paralelo a CD e as diagonais AC e BD cortam-se no ponto P . Se as áreas dos triângulos ΔABP e ΔCPD medem 4 e 9cm^2 , respectivamente, qual a área do triângulo ΔPCB ?

Figura 32: Aplicação 01 da Propriedade 03.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Os triângulos ΔAPB e ΔCPD são semelhantes, pois o ângulo \widehat{APB} é igual ao ângulo \widehat{CPD} (opostos pelo vértice) e o ângulo \widehat{ABD} é igual ao ângulo \widehat{BDC} (alternos e internos).

Como a razão entre suas áreas é $4/9$, temos que a razão de semelhança entre esses triângulos é $\sqrt{4/9} = 2/3$. Logo,

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{2}{3}$$

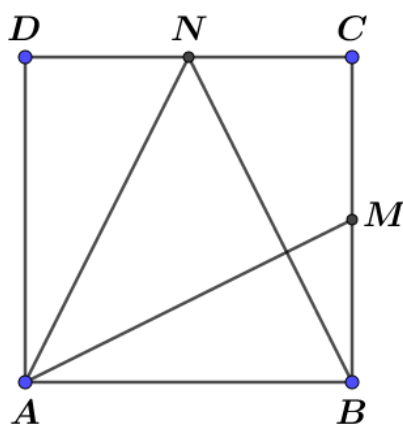
Por outro lado, os triângulos ΔCPD e ΔPCB têm a mesma altura em relação às bases \overline{DP} e \overline{PB} , respectivamente. Portanto, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases,

$$\frac{[\Delta PCB]}{[\Delta CPD]} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} \Rightarrow \frac{[\Delta PCB]}{[\Delta CPD]} = \frac{2}{3}$$

Como $[\Delta CPD] = 9$, segue que a área do triângulo ΔPCB mede 6cm^2 .

Exemplo 06. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1 e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e CD , respectivamente. Traçando os segmentos AM , AN e NB , calcule as áreas das cinco partes em que o quadrado ficou dividido.

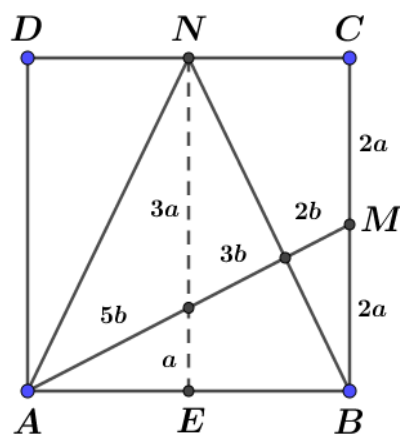
Figura 33: Aplicação 02 da Propriedade 03.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Vamos considerar a figura abaixo:

Figura 34: Passo 01 da Aplicação 2, Propriedade 03.



Fonte: Próprio Autor.

O ponto Q é a interseção de AM com NB e traçamos por N a perpendicular NE a AB que cortou AM em P . Fazendo $BM = MC = 2a$ temos $PE = a$ e $NP = 3a$. Como os triângulos QPN e QMB são semelhantes, se fizermos $QM = 2b$, teremos $PQ = 3b$ e $AP = 5b$.

Como o quadrado $ABCD$ tem lado 1, a área do triângulo ABM é igual a $1/4$. Vamos agora calcular a razão entre as áreas dos triângulos ABQ e ABM .

$$\frac{[ABQ]}{[ABM]} = \frac{8b}{10b} \Rightarrow \frac{[ABQ]}{[ABM]} = \frac{4}{5}$$

Logo,

$$[ABQ] = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow [ABQ] = \frac{1}{5}$$

Assim, calculamos a área de uma das partes. A área de BMQ é a diferença:

$$[BMQ] = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \Rightarrow [BMQ] = \frac{1}{20}$$

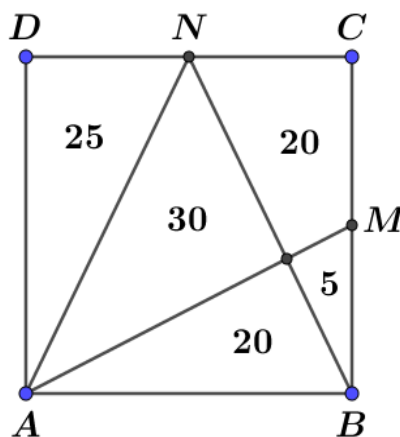
Os triângulos ABM e BCN são congruentes e, portanto, têm mesma área. Logo a área do quadrilátero $MCNQ$ é a mesma área do triângulo ABQ . Portanto, $[MCNQ] = 1/5$. Como a área do triângulo $ADN = 1/4$. Então, a área do triângulo AQN é:

$$[AQN] = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow [AQN] = \frac{3}{10}$$

Considerando a área do quadrado igual a 100, as áreas das partes podem ser vistas na figura abaixo:

Figura 35: Passo 02 da Aplicação 2, Propriedade 03.



Fonte: Próprio Autor.

2.4. Propriedade – 04

“A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança K ”.

Em outras palavras, se os ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes tais que:

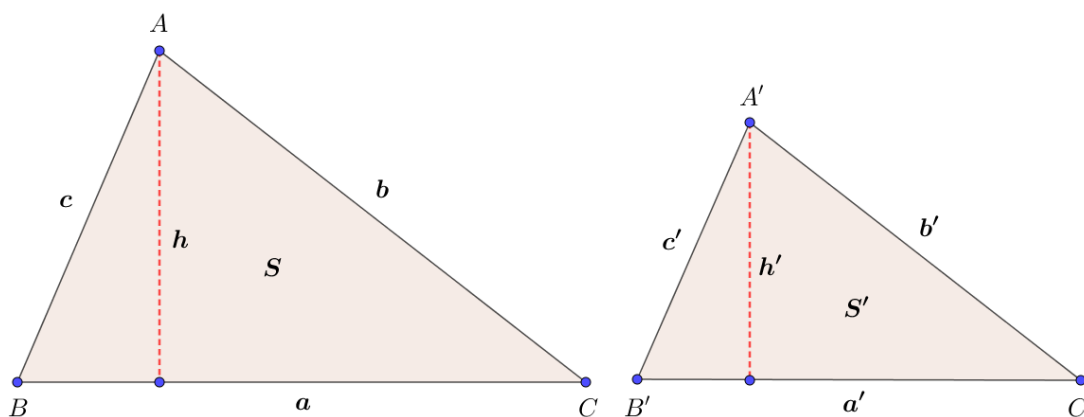
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k.$$

Então,

$$\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta A'B'C']} = \frac{S}{S'} = K^2.$$

A figura abaixo ilustra exatamente o enunciado da propriedade,

Figura 36: Relação de Área 04.



Fonte: Próprio Autor.

Prova: Como os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = K$$

Portanto, sendo $[\Delta ABC] = S$ e $[\Delta A'B'C'] = S'$. Infere-se as seguintes relações:

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{a \cdot h}{2} \quad (2.11)$$

$$S' = \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}}{2} = \frac{a' \cdot h'}{2} \quad (2.12).$$

Sendo assim, dividindo equação (2.11) por (2.12), segue:

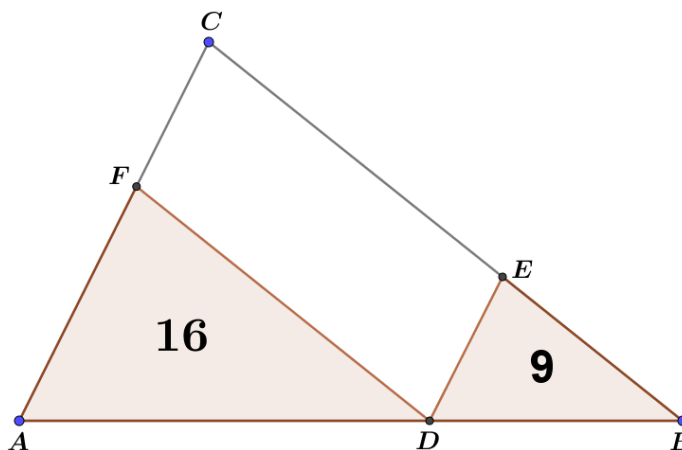
$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = K \cdot K = K^2$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 \quad \blacksquare$$

2.4.1. Aplicações da propriedade - 04

Exemplo 07 (OBMEP). Na figura, as retas DE e DF são paralelas, respectivamente, aos lados AC e BC do triângulo ABC . Os triângulos ADF e DBE tem áreas 16 e 9, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $CFDE$?

Figura 37: Aplicação 01 da Propriedade 04.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Pela referida propriedade podemos relacionar a $[DBE]$ com $[ADF]$ e os respectivos lados \overline{BD} com \overline{AD} , então:

$$\frac{[DBE]}{[ADF]} = \left(\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\right)^2$$

$$\frac{9}{16} = \left(\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BD} + \overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{3 + 4}{4}$$

$$\frac{\overline{BD} + \overline{AD} = \overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{7}{4} \quad (2.13).$$

Note, que se tem as razões entre os lados e as áreas dos triângulos ABD e ADF , sendo assim, elevando ambos os lados de (2.13) ao quadrado, tem-se:

$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\right)^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow [ABC] = 49.$$

Sabendo que $[DBE] = 9$, $[ADF] = 16$ e $[ABC] = 49$. Então, é possível calcular a área desejada utilizando a seguinte relação:

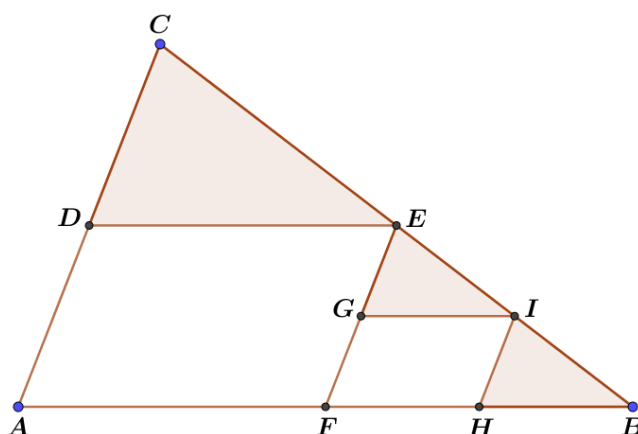
$$[CFDE] = [ABC] - ([ADF] + [DBE])$$

$$[CFDE] = 49 - (16 + 9)$$

$$\Rightarrow [CFDE] = 24$$

Exemplo 08 (OBMEP). Na figura abaixo, D , E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC , e G , H e I são pontos médios dos lados do triângulo FBE . A área do triângulo ABC é 48cm^2 . Qual é a área da região destacada em amarelo?

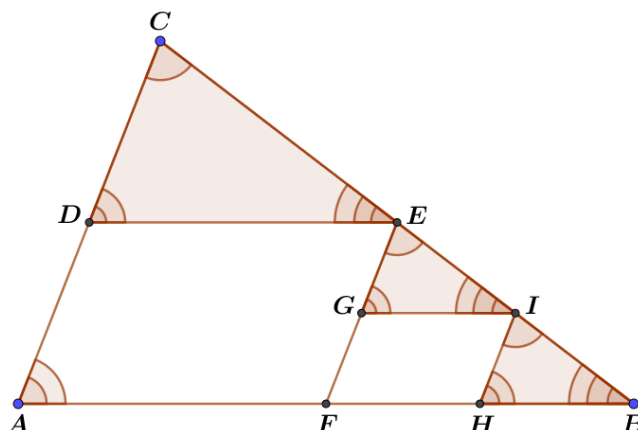
Figura 38: Aplicação 02 da Propriedade 04.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Para critério de entendimento e de uma melhor visualização do que descreve o enunciado, constrói-se a figura abaixo:

Figura 39: Passo 01 da Aplicação 02, Propriedade 04.



Fonte: Próprio Autor.

Como os triângulos CDE e ABC são semelhantes pelo caso (AA), então podemos aplicar a devida propriedade:

$$\frac{[CDE]}{[ABC]} = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}\right)^2$$

Por outro lado, D é ponto médio de \overline{AC} e $[ABC] = 48\text{cm}^2$. Então, temos:

$$\frac{[CDE]}{48} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{[CDE]}{48} = \frac{1}{4} \Rightarrow [CDE] = 12.$$

Novamente, relacionando os triângulos CDE e EGI pela propriedade, pois também são semelhantes pelo caso (AA). Além disso, $\overline{CE} = \overline{EB}$ pelo fato de E ser ponto médio, mas também I é ponto médio de \overline{EB} então,

$$\frac{[EGI]}{[CDE]} = \left(\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}}\right)^2$$

$$\frac{[EGI]}{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{[EGI]}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow [EGI] = 3.$$

É fácil perceber que $[IHB] = [EGI] = 3$. Portanto, a área da região destacada é expressa pela seguinte relação:

$$[CDE] + [EGI] + [IHB] = 12 + 3 + 3 = 18$$

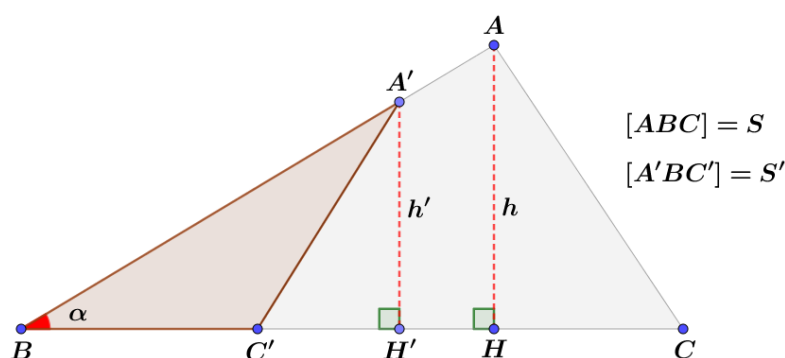
2.5. Propriedade - 05

“A razão entre as áreas de dois triângulos que possuem um ângulo comum é razão entre os produtos dos lados que em cada triângulo formam esse ângulo”.

$$\frac{S}{S'} = \frac{BC \times BA}{BC' \times BA'}$$

Abaixo, está uma representação geometria para esta propriedade e consequentemente a sua demonstração:

Figura 40: Relação de Área 05.



Fonte: Próprio Autor.

Prova: Considera-se os triângulos ΔABC e $\Delta A'BC'$ da figura que possuem um ângulo em comum. Sejam S e S' suas áreas e h e h' suas alturas traçadas de A e A' , respectivamente. Então, tem-se:

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2} \quad (2.14).$$

Por outro lado,

$$S' = \frac{\overline{BC'} \cdot h'}{2} \quad (2.15).$$

Assim, de (2.14) e (2.15), tem-se:

$$\frac{S}{S'} = \frac{BC}{BC'} \times \frac{h}{h'} \quad (2.16).$$

Mas, pela semelhança existente entre os triângulos ΔBAH e $\Delta BA'H'$ pelo caso (AA), obtêm-se a seguinte relação:

$$\frac{h}{h'} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} \quad (2.17).$$

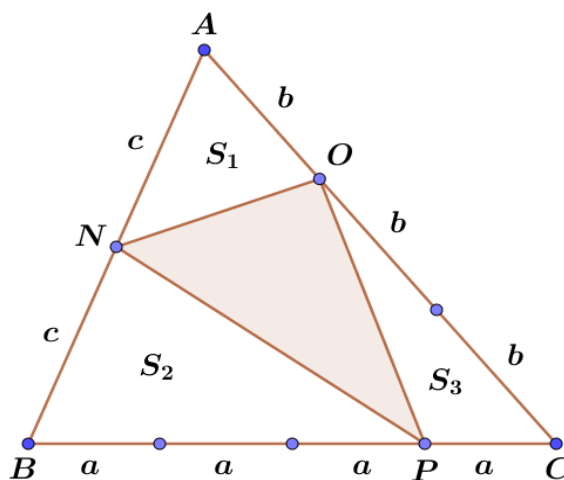
Portanto, substituindo (2.17) em (2.16), tem-se:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{\overline{BC'} \cdot \overline{BA'}} \quad \blacksquare$$

2.5.1. Aplicações da propriedade – 05

Exemplo 09. Seja S a área do triângulo ABC e os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais, sendo assim, determine a área do triângulo sombreado em função de S .

Figura 41: Aplicação 01 da Propriedade 05.



Fonte: Próprio Autor.

Note, que pela referida propriedade é possível calcular a área de S_1 , S_2 e S_3 . Veja:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{b \cdot c}{3b \cdot 2c} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_1 = \frac{S}{6}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{3a \cdot c}{4a \cdot 2c} = \frac{3}{8} \Rightarrow S_2 = \frac{3S}{8}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{a \cdot 2b}{4a \cdot 3b} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_3 = \frac{S}{6}$$

Logo,

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S}{6} + \frac{3S}{8} + \frac{S}{6}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{17s}{4}.$$

Portanto, a área desejada do triângulo NOP é expressa pela seguinte relação:

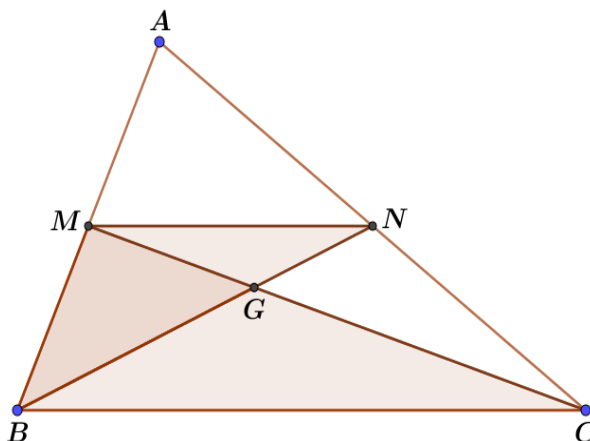
$$[NOP] = S - (S_1 + S_2 + S_3).$$

Como $S_1 + S_2 + S_3 = 17s/4$. Então,

$$[NOP] = S - \frac{17S}{4} \Rightarrow [NOP] = \frac{7S}{24}.$$

Exemplo 10. O triângulo ABC , desenhado na figura a seguir, tem área igual a 120cm^2 . Sendo M o ponto médio do lado AB , N o ponto médio do lado AC e G o baricentro de ABC , calcule a área dos triângulos BCG , BMN e BGM .

Figura 42: Aplicação 02 da Propriedade 05.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Note que $\overline{BM} = 1/2 \cdot \overline{BA}$. Assim, aplicando a relação de área aos referidos triângulos MBC e ABC (os quais tem o ângulo $M\hat{B}C$ em comum), obtêm-se:

$$\frac{[MBC]}{[ABC]} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \frac{1/2 \cdot \overline{BA}}{\overline{BA}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow [MBC] = \frac{[ABC]}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

$$\Rightarrow [MBC] = 60.$$

Agora, uma vez que G é baricentro de ABC , logo é de conhecimento que $\overline{CG} = 2/3 \cdot \overline{CM}$. Daí, observando que os triângulos BCG e MCB têm o ângulo $B\hat{C}G$ em comum, segue novamente que

$$\frac{[BCG]}{[MBC]} = \frac{\overline{CG} \cdot \overline{CB}}{\overline{CM} \cdot \overline{CB}} = \frac{2/3 \cdot \overline{CM}}{\overline{CM}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow [BCG] = \frac{2[MBC]}{3} = \frac{2 \cdot 60}{3} = 40$$

$$\Rightarrow [BBG] = 40.$$

Do mesmo modo que mostramos que $[MBC] = 60m^2$, podemos mostrar que $[NBC] = 60m^2$ e mais uma vez invocando a referida propriedade (desta vez aplicada aos triângulos AMN e ABC), obtem-se:

$$\frac{[AMN]}{[ABC]} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{1/2 \cdot \overline{BA} \cdot 1/2 \cdot \overline{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow [AMN] = \frac{[ABC]}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

$$\Rightarrow [AMN] = 30.$$

Dai, tem-se que:

$$[BMN] = [ABC] - [NBC] - [AMN]$$

$$\Rightarrow [BMN] = 120 - 60 - 30 = 30$$

$$\Rightarrow [BMN] = 30$$

3. TEOREMA DE TALES E PROPRIEDADES DE ÁREAS

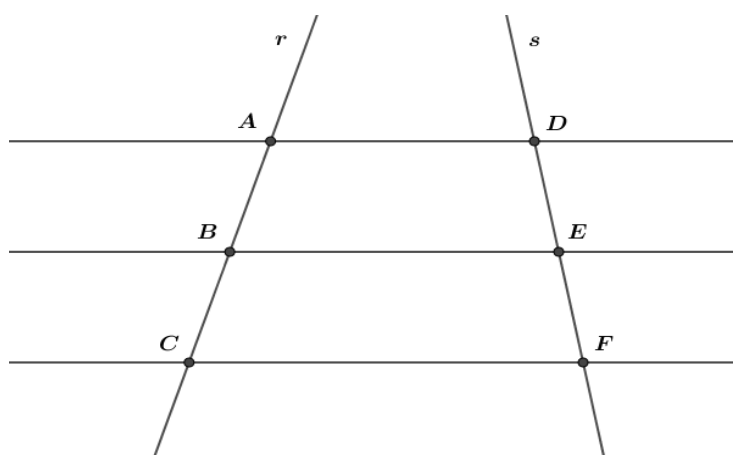
Neste capítulo se obtém o teorema de Tales a partir de propriedades já conhecidas sobre áreas de triângulos vistas anteriormente. Sem dúvida, é uma abordagem bastante interessante deste teorema.

3.1. Teorema de Tales

Teorema: (Teorema de Tales). Sejam a, b, c três retas paralelas, num mesmo plano, e sejam r, s duas transversais, tais que r intersecta respectivamente a, b, c em A, B, C , e s intersecta respectivamente a, b, c em D, E e F , então:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \sim \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Figura 43: Teorema de Tales.



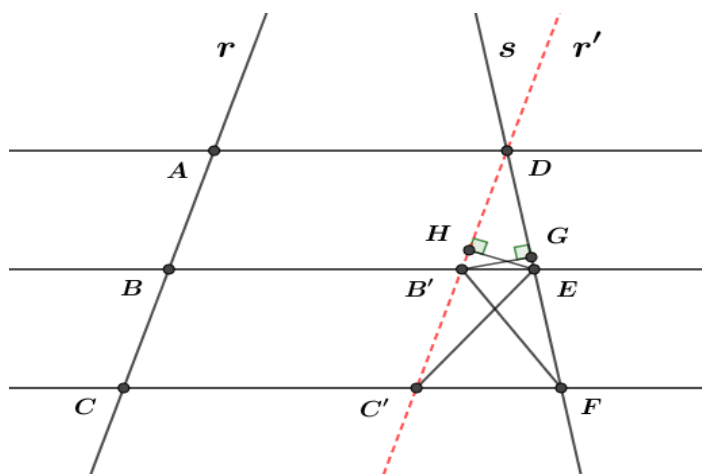
Fonte: Próprio Autor.

3.1.1. Primeira Prova do Teorema de Tales (Via Propriedades)

A seguir será apresentado a primeira prova para o Teorema de Tales de um total de 03 (três) que será explanada neste terceiro capítulo.

Prova 01: Para esta prova, vamos considerar a figura abaixo:

Figura 44: Teorema de Tales, Esquema 01 da Prova 01.



Fonte: Próprio Autor.

Inicialmente traça-se, uma reta r' paralela a r , como indicado na figura. Sejam B' e C' as interseções de r' com \overline{BE} e \overline{CF} , respectivamente, H o pé da altura baixada do vértice E e G o pé da altura baixada do vértice B' . A área do triângulo $DB'E$ pode ser calculada de duas maneiras;

$$[DB'E] = \frac{\overline{DB'} \cdot \overline{EH}}{2}$$

ou

$$[DB'E] = \frac{\overline{DE} \cdot \overline{B'G}}{2}$$

Das igualdades, conclui-se que $\overline{DB'} \cdot \overline{EH} = \overline{DE} \cdot \overline{B'G}$. Como $\overline{DB'} = \overline{AB}$, pois são correspondentes entre paralelas. Logo, tem-se;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{B'G}}{\overline{EH}} \quad (3.1).$$

Note também, que os triângulos $C'B'E$ e FEB' tem áreas iguais (mesma base $\overline{B'E}$ e mesma altura pelo fato de estarem compreendido por duas retas paralelas). Logo,

$$\begin{aligned} [C'B'E] &= \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{EH}}{2} = [FEB'] = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{B'G}}{2} \\ \Rightarrow \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{EH}}{2} &= \frac{\overline{EF} \cdot \overline{B'G}}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{B'C'} \cdot \overline{EH} = \overline{EF} \cdot \overline{B'G}.$$

Como $\overline{B'C'} = \overline{BC}$, tem-se:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{B'G}}{\overline{EH}} \quad (3.2).$$

Então, de (3.1) e (3.2) infere-se a seguinte relação:

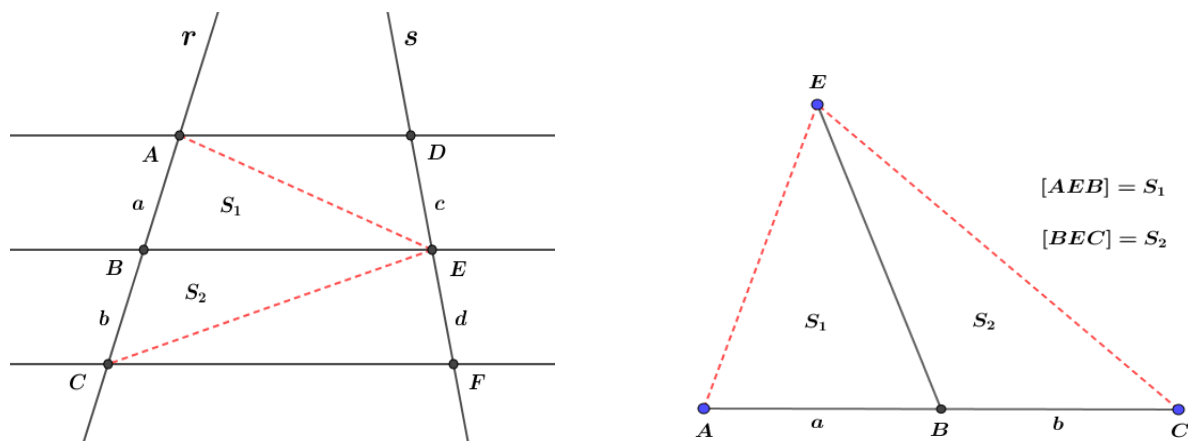
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \quad \blacksquare$$

3.1.2. Segunda Prova do Teorema de Tales (Via propriedades)

Essa segunda prova alternativa para o teorema de Tales, fará uso fortemente das propriedades **(P01)** e **(P03)** vista anteriormente.

Prova 02: Novamente, vamos considerar as figuras abaixo:

Figura 45: Teorema de Tales, Esquema 01 da Prova 02.



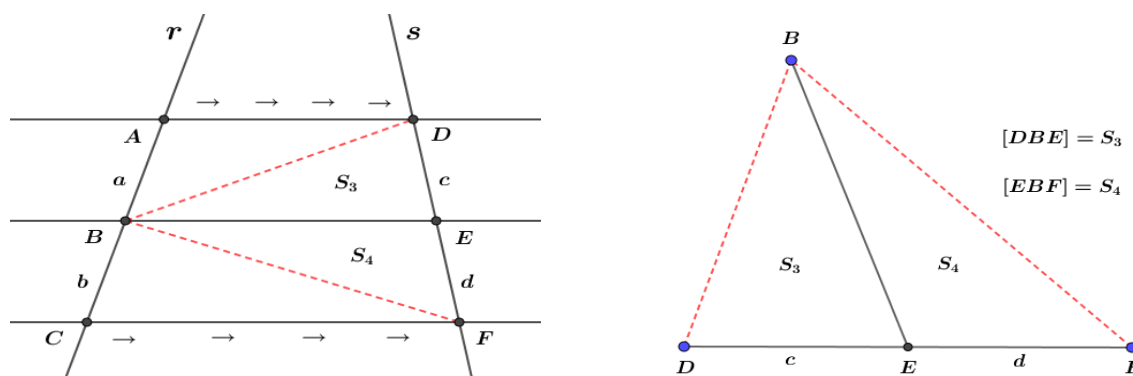
Fonte: Próprio Autor.

Note, que de acordo com a propriedade **(P03)** vista anteriormente, tem-se “ se dois triângulos tem as mesma altura, então a razão entre as suas áreas é igual a razão entre as medidas de suas bases”. Aplicando essa propriedade aos triângulos AEB e BEC (os quais tem alturas iguais a partir de E), obtém-se:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b} \quad (3.3).$$

Aplicando a propriedade (**P01**) na afigura a esquerda abaixo obtem-se a figura a direita e tal propriedade garante o seguinte, “a área de um triangulo não se altera quando a sua base prmanece fixa e o terceiro vertice percorre uma reta paralela a base”.

Figura 46: Teorema de Tales, Esquema 02 da Prova 02.



Fonte: Próprio Autor.

Aplicado novamente a propriedade (**P03**) na figura à direita acima, obtém-se a relação seguinte:

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{c}{d} \quad (3.4).$$

Sendo assim, pela propriedade (**P01**) pode-se concluir que $S_1 = S_3$ e $S_2 = S_4$. Logo,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} \quad (3.5).$$

Portanto, de (3.3), (3.4) e (3.5) têm-se:

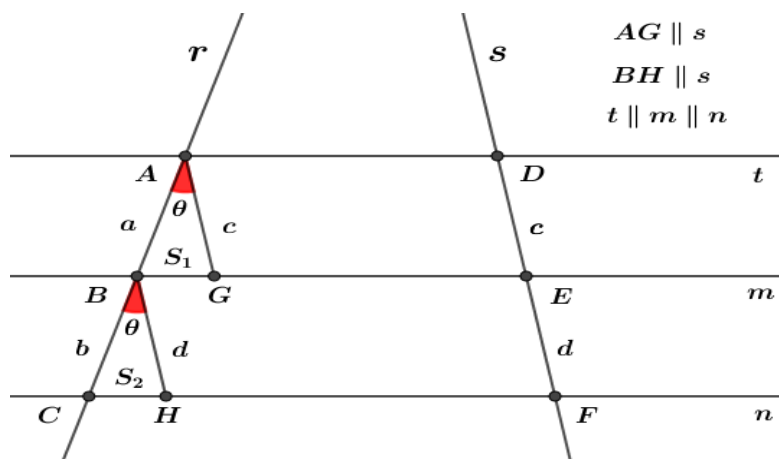
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \blacksquare$$

3.1.3. Terceira Prova do Teorema de Tales (Via Propriedades)

Essa terceira prova é uma demonstração alternativa para o teorema de Tales, elaborada pelo próprio autor desta dissertação. Vejamos:

Prova 03: Para esta demonstração vamos considerar a figura abaixo e admitir que os segmentos \overline{AG} e \overline{BH} , são ambos paralelos a s (figura abaixo).

Figura 47: Teorema de Teles, Esquema 01 da Prova 03.



Fonte: Proprio Autor.

Calculando as áreas dos triângulos BAG e CBH respectivamente em função de seus ângulos e de seus lados, tem-se:

$$S_1 = \frac{acsen\theta}{2} \quad (3.6)$$

e

$$S_2 = \frac{bdsen\theta}{2} \quad (3.7).$$

Dividindo membro a membro (3.6) por (3.7), infere-se:

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{acsen\theta}{2} \cdot \frac{2}{bdsen\theta} \\ \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} &= \frac{acsen\theta}{bdsen\theta}. \end{aligned}$$

Como o triângulo ABG è semelhante ao triângulo BCH , pelo caso (AA) , pois \overline{BH} e \overline{AG} são paralelos a s (por construção) e como $t \parallel m \parallel n$, tem-se que o ângulo \widehat{CHB} é congruente ao ângulo \widehat{BGA} , além do mais, o ângulo θ é comum, garantindo assim tal semelhança.

Agora, pela propriedade **(P04)**, no qual garante que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual a razão de semelhança ao quadrado, obtem-se o seguinte:

$$\frac{acsen\theta}{bdsen\theta} = \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{bd} = \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

■

4. TEOREMAS ABORDADOS E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo será abordado três teoremas com grande relevância no que tange a Geometria Plana, o teorema de Stewart que trata da relação entre os lados de um triângulo e uma ceviana dada, o teorema de Menelaus que explora a colinearidade de três pontos no triângulo e por fim o teorema de Ceva, que está estritamente ligado a concorrência entre cevianas em um triângulo qualquer. Sendo assim, veremos a seguir o enunciado de tais teoremas, as suas demonstrações e algumas de suas aplicações.

4.1. O Teorema de Stewart

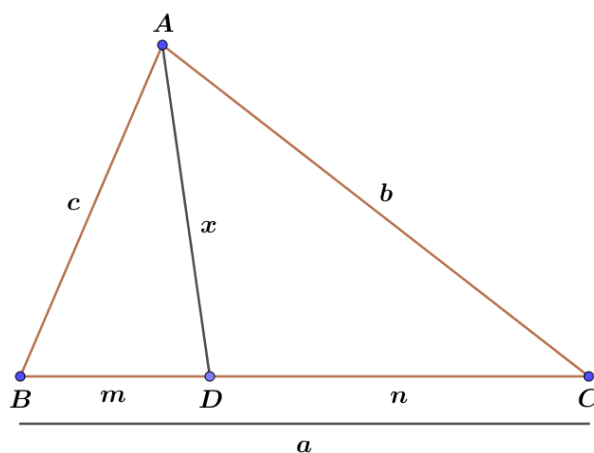
Matthew Stewart (1717-1785), matemático escocês, foi aluno de Colin Machaurin na Universidade de Edimburgo, assumindo a cadeira deste em 1747. Sua obra mais conhecida é “Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics”.

Nessa obra, ele apresenta na proposição 2, a relação entre as medidas dos lados de um triângulo e uma ceviana qualquer, conhecida hoje como teorema de Stewart. Então, vejamos tal teorema.

Teorema: (Relação de Stewart). Seja ABC um triângulo cujos lados AB , AC e BC medem, respectivamente, c , b e a . Se D é um ponto sobre o lado BC , tal que $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e $\overline{AD} = x$, então

$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn)$$

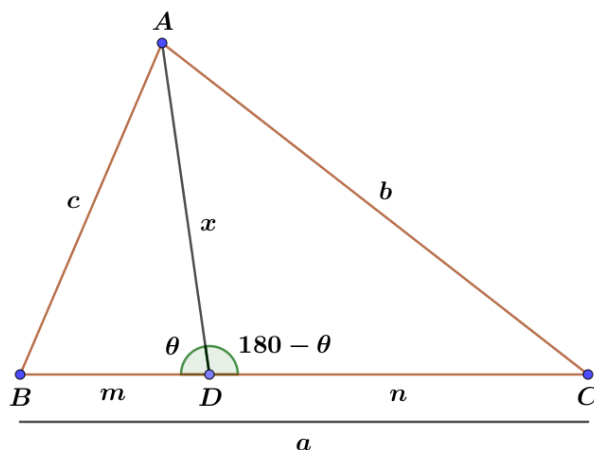
Figura 48: Relação de Stewart.



Fonte: Próprio Autor.

Prova: Denotando $\widehat{ADB} = \theta$, então temos $\widehat{ADC} = 180 - \theta$ (figura abaixo).

Figura 49: Relação de Stewart, Esquema 01.



Fonte: Próprio Autor.

Aplicando a lei dos cossenos no ΔABD , temos o seguinte:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2 \cdot x \cdot m \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x^2 + m^2 - c^2}{2 \cdot x \cdot m} \quad (4.1).$$

Agora, aplicando novamente a lei dos cossenos no ΔADC , tem-se:

$$b^2 = x^2 + n^2 - 2x \cdot n \cdot \cos(180 - \theta).$$

Por outro lado, usando que $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$ na referida equação, obtemos

$$b^2 = x^2 + n^2 + 2 \cdot x \cdot n \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{2 \cdot x \cdot n} \quad (4.2).$$

Agora, igualando as expressões (4.1) e (4.2) para $\cos\theta$, chegamos a igualdade

$$\frac{x^2 + m^2 - c^2}{2 \cdot x \cdot m} = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{2 \cdot x \cdot n}$$

ou seja

$$n(x^2 + m^2 - c^2) = m(b^2 - x^2 - n^2).$$

Então, aplicando a distributiva em ambos os membros da igualdade acima e usando o fato de que $m + n = a$, um pouco de álgebra elementar fornece, sucessivamente,

$$nx^2 + nm^2 - nc^2 = mb^2 - mx^2 - mn^2$$

$$nx^2 + mx^2 + nm^2 + mn^2 = mb^2 + nc^2$$

$$b^2m + c^2n = (m + n)x^2 + (m + n)mn$$

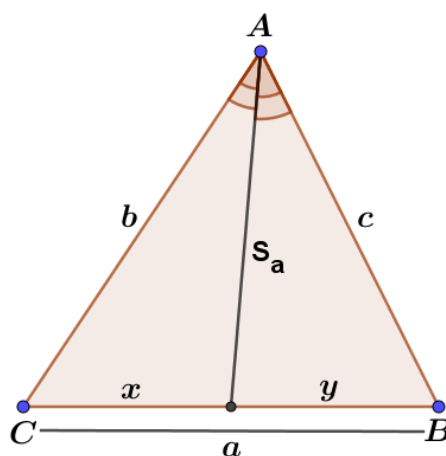
$$\xrightarrow{m+n=a} b^2m + c^2n = ax^2 + amn$$

$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn) \quad \blacksquare$$

4.1.1. Aplicações do Teorema de Stewart

Exemplo 11. No triângulo ABC conhecem-se as medidas dos lados a , b e c . Determine as medidas das três bissetrizes S_a , S_b e S_c na figura abaixo.

Figura 50: Relação de Stewart, Aplicação 01.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Temos que $x + y = a$ e S_a (bissetriz), então tem-se:

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow \frac{x+y}{b+c} = \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{ab}{b+c} \\ y = \frac{ac}{b+c} \end{cases}$$

Considerando a relação de Stewart no ΔABC

$$b^2y + c^2x - s_a^2 \cdot a = x \cdot y \cdot a.$$

Substituindo x e y pelos valores calculados acima, vem:

$$b^2 \cdot \frac{ac}{b+a} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} - s_a^2 \cdot a = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} \cdot a \text{ (simplificando } a)$$

$$\Rightarrow b^2c(b+c) + bc^2(b+c) - bca^2 = s_a^2(b+c)^2$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 s_a^2 = bc[b(b+c) + c(b+c) - a^2]$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 s_a^2 = bc[(b+c) - a^2]$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 s_a^2 = bc(b+a+c) \cdot (b+c-a).$$

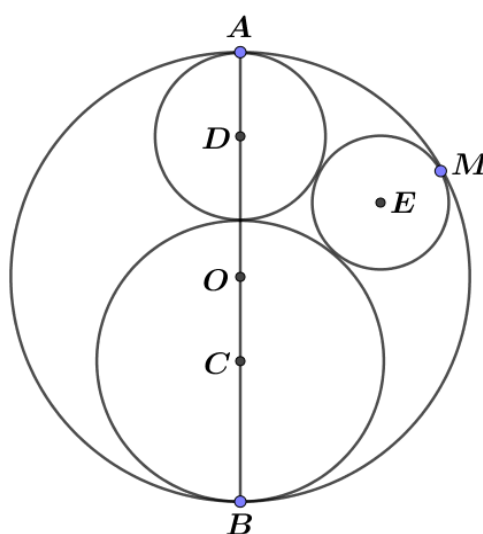
Como $(b+a+c) = 2p$ e $(b+c-a) = 2(p-c)$, logo tem-se:

$$s_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

Analogamente, são construídos os outros resultados para a bissetriz de s_b e s_c .

Exemplo 12. A figura mostra quatro circunferências tangentes entre si de centros C , D , E e O . Calcule o raio da circunferência de centro E , sabendo-se que o raio da circunferência de centro D é 1cm e o raio da circunferência de centro C é igual a 2cm . Além disso C , D e O pertencente ao diâmetro da circunferência maior.

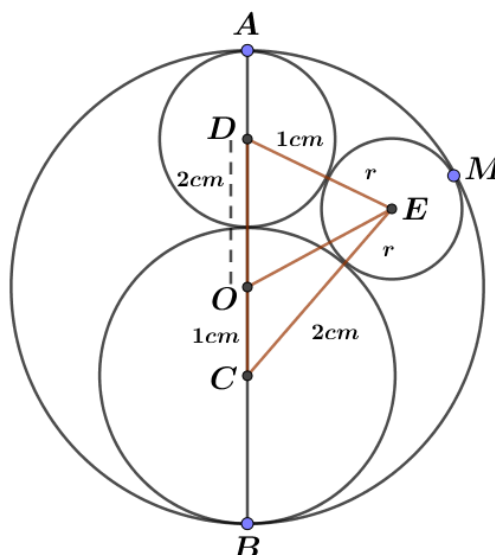
Figura 51: Relação de Stewart, Aplicação 02.



Fonte: Próprio Autor.

Solução: Considerando o raio da circunferência de centro E igual a r , temos que $CO = 1\text{cm}$, $OD = 2\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$, $DE = 1 + r$, $CE = 2 + r$ e $OE = 3 - r$. Veja:

Figura 52: Passo 01 da Relação de Stewart, Aplicação 02.



Fonte: Próprio Autor.

Aplicando o Teorema de Stewart no $\triangle CED$, obtém-se:

$$(r + 1)^2 \cdot 1 + (r + 2)^2 \cdot 2 - (3 - r)^2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$r^2 + 2r + 1 + 8 + 8r + 2r^2 - 27 + 18r - 3r^2 = 6$$

$$28r = 24$$

$$r = \frac{6}{7}$$

4.2. O Teorema de Menelaus

Menelaus de Alexandria foi um astrônomo e geômetro nascido em Alexandria, Egito, por volta do ano 80. Segundo historiadores gregos e árabes sabe-se que ele escreveu uma coleção de seis livros sobre cordas no círculo, um livro intitulado Elementos da Geometria e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos.

Menelaus deu continuidade nos trabalhos de Hiparco em trigonometria e demonstrou o importante teorema, que leva o seu nome. “Teorema de Menelaus” pois, o mesmo era um grande defensor de geometria clássica e sobre sua vida pouco se sabe ou se conhece.

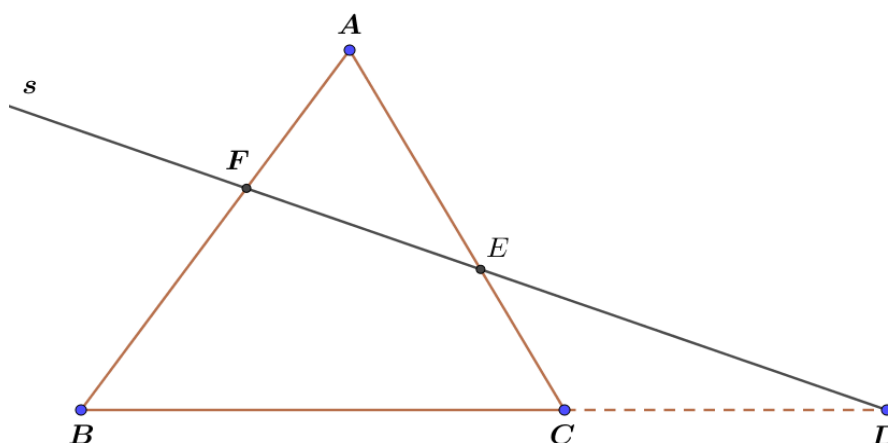
O teorema de Menelaus foi esquecido por mais de 15 séculos, sendo descoberto por Giovanni Ceva no ano de 1678.

Teorema: (Menelaus). Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e r uma transversal que intersecta \overline{AC} no ponto E , \overline{AB} no ponto F e a reta suporte de \overline{BC} , no ponto D , então

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = 1.$$

Sua representação geométrica,

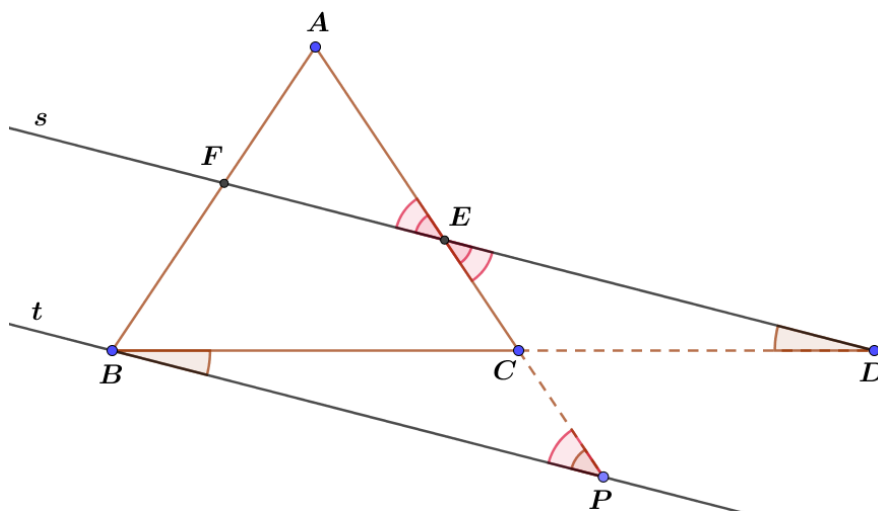
Figura 53: Relação de Menelaus.



Fonte: Próprio Autor.

Prova: Inicialmente, vamos supor que os pontos F , E e D são colineares, com F e E situados sobre os lados AB e AC , respectivamente, e D situado sobre o prolongamento do lado BC . Agora traçando uma reta $t \parallel s$ passando por B , marcamos o seu ponto P de intersecção com \overrightarrow{AC} e concluímos que $\triangle DEC \sim \triangle BPC$ e $\triangle AFE \sim \triangle ABP$ (veja a figura a seguir).

Figura 54: Relação de Menelaus, Esquema 01.



Fonte: Próprio Autor.

Pelo caso (AA) tem-se, que o $\triangle DEC \sim \triangle BPC \Rightarrow \overline{CP}/\overline{CE} = \overline{BC}/\overline{CD}$. Mas, como $\overline{CP} = \overline{PE} - \overline{CE}$ e $\overline{BC} = \overline{BD} - \overline{CD}$ tem-se:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CE}} - \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{\overline{PE} - \overline{CE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD} - \overline{CD}}{\overline{CD}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}} - \frac{\overline{CE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} - \frac{\overline{CD}}{\overline{CD}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}} - 1 = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

$$\Rightarrow \overline{PE} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \overline{CE} \quad (4.3)$$

Por outro lado, de $\triangle AFE \sim \triangle ABP$, obtém-se que $\overline{AB}/\overline{AF} = \overline{AP}/\overline{AE}$. Então, de forma análoga aos cálculos acima, tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{AF} + \overline{BF}}{\overline{AF}} + \frac{\overline{AE} + \overline{PE}}{\overline{AE}}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} = 1 + \frac{\overline{PE}}{\overline{AE}}$$

$$\Rightarrow \overline{PE} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} \cdot \overline{AE} \quad (4.4).$$

Agora, igualando as duas expressões encontradas para \overline{PE} nas equações (4.3) e (4.4), constrói-se:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \overline{CE} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} \cdot \overline{AE}$$

ou, o que é o mesmo,

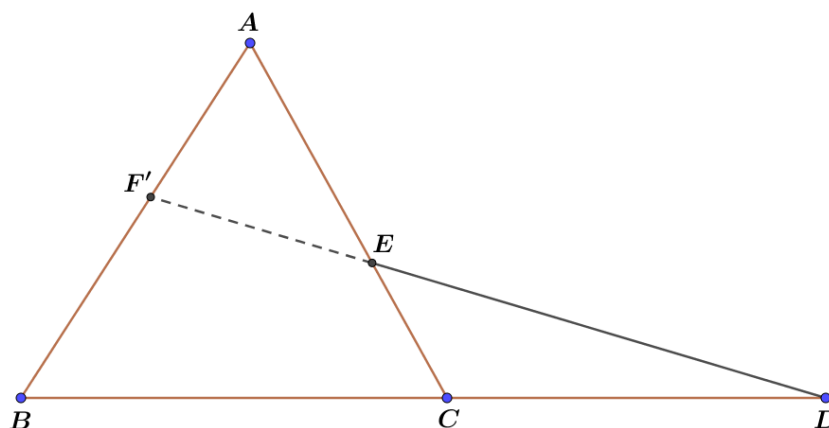
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1 \quad (4.5).$$

(\Leftarrow) Sejam F e E pontos situados sobre os lados AB e AC , respectivamente, e D um ponto situado sobre o prolongamento do lado BC , e suponha que:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1.$$

Seja F' o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{ED} e \overleftrightarrow{AB} (figura abaixo).

Figura 55: Relação de Menelaus, Esquema 02.



Fonte: Próprio Autor.

Pela parte que já foi provada (4.5), tem-se:

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{BF'}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1 \quad (4.6)$$

Comparando as duas relações (4.5) e (4.6), conclui-se que

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{BF'}}$$

Por sua vez, isso é o mesmo que

$$\frac{\overline{AB} - \overline{BF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AB} - \overline{BF'}}{\overline{BF'}}$$

ou, ainda,

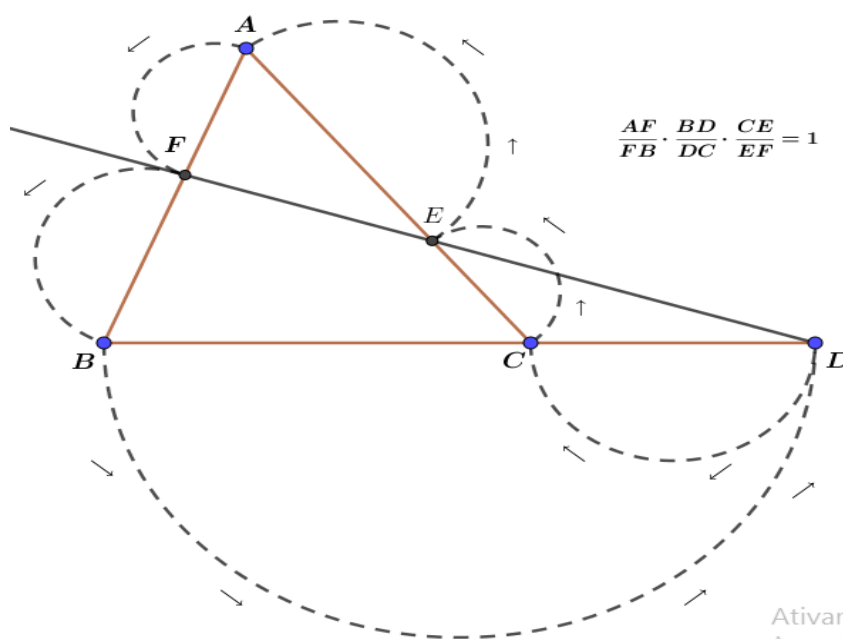
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - 1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF'}} - 1.$$

Então, $\overline{AB}/\overline{BF} = \overline{AB}/\overline{BF'}$, logo, $\overline{BF} = \overline{BF'}$. Mas, como F e F' estão situados sobre o lado AB , isso acarreta que $F = F'$. Portanto, F' , E e D são colineares.

4.2.1. Relação de Menelaus, Uma Possível Construção

Abaixo, tem-se uma representação da construção da relação do teorema de Menelaus, partindo do Ponto A no sentido ante-horário.

Figura 56: Relação de Menelaus, Possível Caminho.



Fonte: Próprio Autor.

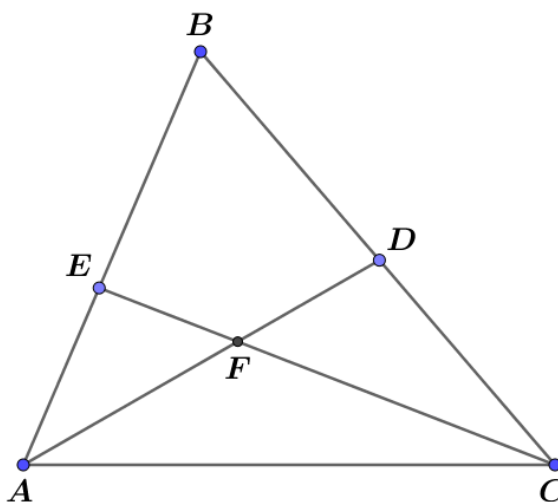
4.2.2. Aplicações do Teorema de Menelaus

Exemplo 13. Sejam ABC um triângulo e D e E pontos sobre os lados BC e AB , respectivamente, tais que $\overline{AE}/\overline{BE} = 1/3$ e $\overline{CD}/\overline{BD} = 1/2$. Denotemos por F o ponto de interseção de cevianas AD e CE . Calcule o valor da soma

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}}$$

Solução: Primeiramente, considera-se a figura abaixo:

Figura 57: Relação de Menelaus, aplicação 01.



Fonte: Próprio Autor.

Iniciemos observando que

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AE} + 3\overline{AE} = 4\overline{AE},$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = 4$$

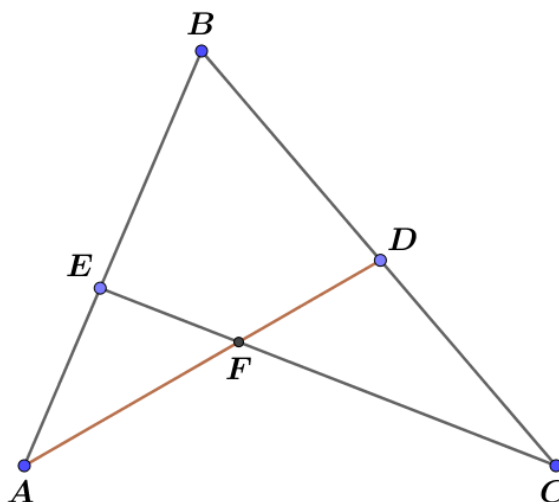
também,

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 2\overline{CD} + \overline{CD} = 3\overline{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = 3$$

Agora, aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo CBE (considerando a colinearidade dos pontos A, F e D), obtem-se,

Figura 58: Passo 01 da Relação de Menelaus, Aplicação 01.



Fonte: Próprio Autor.

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1$$

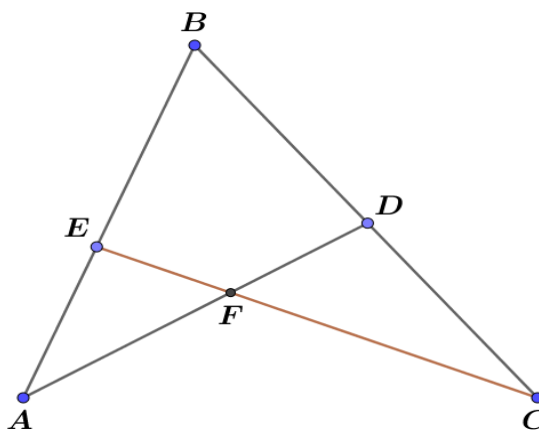
ou, o que é o mesmo,

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{2}$$

De modo inteiramente análogo, também é possível aplicar o teorema de Menelaus ao triângulo ABC (considerando os pontos colineares C, F e E).

Figura 59: Passo 02 da Relação de Menelaus, Aplicação 01.



Fonte: Próprio Autor.

Assim fazendo, obtem-se:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1,$$

o que acarreta

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1.$$

Portanto,

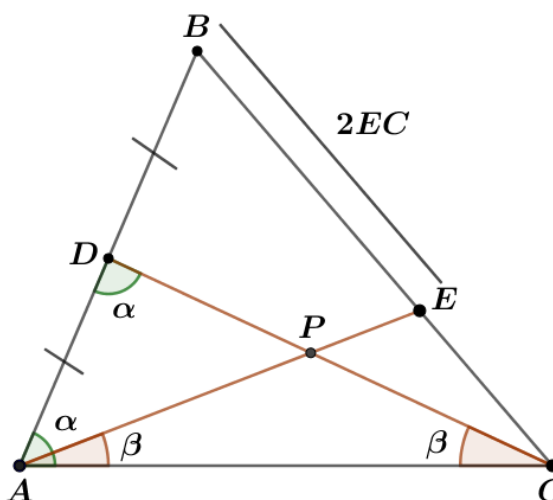
$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 14 (OBM). No triângulo ΔABC , D é ponto médio de \overline{AB} e E ponto sobre o lado \overline{BC} tal que $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{EC}$. Sabendo que $\widehat{ADB} = \widehat{BAE}$, calcule o valor de \widehat{BAC} .

Solução: Consideremos a figura abaixo:

Figura 60: Relação de Menelau Aplicação 02.



Fonte: Próprio Autor.

Por construção, traça-se as cevianas \overline{AE} e \overline{CD} e seja o ponto P de interseção desses segmentos. Seja α um ângulo tal que $\alpha = \widehat{ADC} = \widehat{BAE} \Leftrightarrow \alpha = \widehat{ADP} = \widehat{BAP}$, Como $\alpha =$

$\widehat{ADP} = \widehat{DAP}$, então o triângulo ΔADP é isosceles com $\overline{AP} \equiv \overline{DP}$. Aplicando o Teorema de Menelaus, ao triângulo ΔBCD , uma vez que os pontos A , P e E são colineares, constrói-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ \Rightarrow \overline{PC} &= \overline{PD}, \end{aligned}$$

e, consequentemente, $\overline{AP} = \overline{PC}$. Agora seja $\alpha = \widehat{DAP} = \widehat{ADP}$ e $\beta = \widehat{CAP} = \widehat{ACP}$. Observe que no triângulo ACD a soma dos ângulos internos será:

$$(\alpha + \beta) + \beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

Como $\widehat{BAC} = \alpha + \beta$ então, tem-se $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

4.3. O Teorema de Ceva

O matematico, fisico, geômetro e engenheiro Geovane Ceva, nascido em (1648) na cidade de Milão, se destacou quando trouxe à evidencia o Teorema de Menelaus esquecido por cerca de 1500 anos dando uma definição mais ampla e mostrando mais aplicações do teorema.

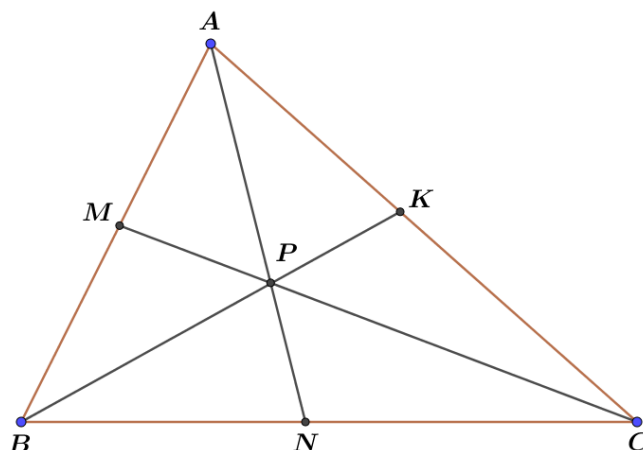
Em sua obra nomeado de “De Lineis Réctis” publicado em 1678, a qual apresentou o importante teorema que estabelece uma condição para para que três cevianas de um triângulo tenham um ponto em comum. Tal teorema é conhecido hoje como Teorema de Ceva, nome este que foi atribuído a sua homenagem.

Portanto, o Teorema de Ceva relaciona os 6 (seis) segmentos formados pelos pontos gerados pelas tais cevianas. Este teorema é muito poderoso, pois possui a elegancia de resolver vários exercicios que poderiam ter soluções bastantes complicadas sem o seu uso.

Teorema: (Ceva). Seja ΔABC um triângulo qualquer e sejam M , N e K respectivamente, pontos sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . As cevianas AN , BK e CM intersectam em um ponto P se, e somente se,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} = 1$$

Figura 61: Relação de Ceva.



Fonte: Próprio Autor.

Prova: (\Rightarrow) “Se AN , BK e CM são cevianas concorrentes, então $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$ ”

Considera-se a figura acima. Definindo $[ABC] = S$, $[PBC] = S_1$, $[PCA] = S_2$ e $[PAB] = S_3$. Pela propriedade **P(03)** temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} &= \frac{[ABN]}{[ACN]} = \frac{[BPN]}{[CNP]} = \frac{[ABN] - [BPN]}{[ACN] - [CNP]} = \frac{[PAB]}{[PCA]} = \frac{S_3}{S_2} \\ \Rightarrow \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} &= \frac{S_3}{S_2} \end{aligned} \quad (4.7).$$

De maneira análoga, se obtém:

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} = \frac{S_1}{S_3} \quad (4.8)$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{S_2}{S_1} \quad (4.9).$$

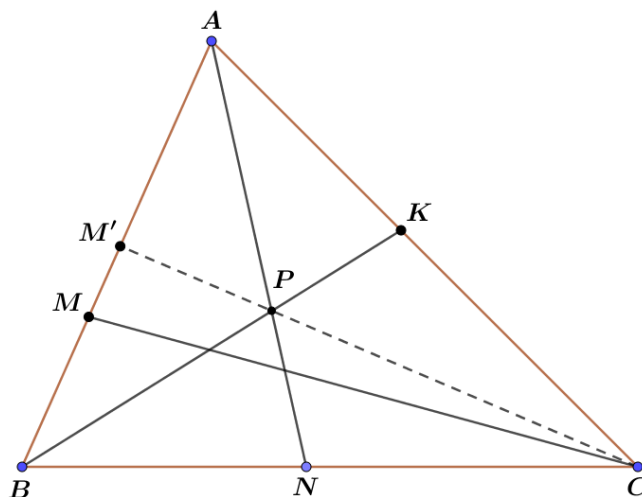
Sendo assim, multiplicando membro a membro (4.7), (4.8) e (4.9), temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= \frac{S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{S_2}{S_1} = 1 \\ \Rightarrow \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

(\Leftarrow) “Reciprocamente, se $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$ então AN, BK e CM são cevianas concorrentes”.

Sejam M, N e K pontos sobre os lados AB, BC e AC tais que $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$, mas AN, BK e CM não são concorrentes. Então, seja M' um ponto sobre AB tal que AN, BK e CM' sejam cevianas concorrentes em P (figura abaixo).

Figura 62: Relação de Ceva, Esquema 01.



Fonte: Próprio Autor.

Assim, pela parte que já foi provada anteriormente, tem-se:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} = 1 \quad (4.11).$$

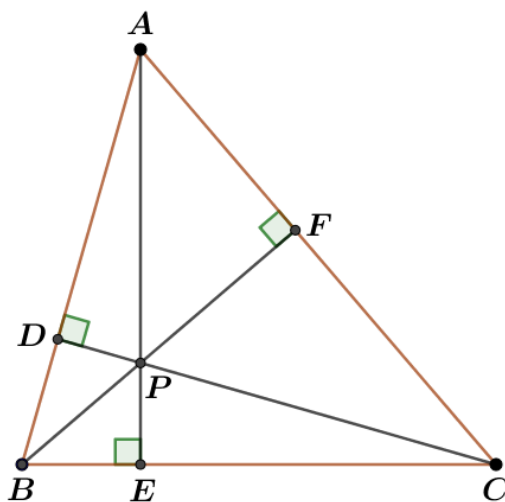
Portanto, de (4.10) e (4.11) infere-se o seguinte:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \Leftrightarrow M = M' \quad \blacksquare$$

4.3.1. Aplicações do Teorema de Ceva

Exemplo 15. Prove que as alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama ortocentro.

Figura 63: Relação de Ceva, Aplicação 01.



Fonte: Próprio Autor.

Prova: Sejam \overline{AE} , \overline{BF} e \overline{CD} AS as alturas do ΔABC . É fácil notar que $\Delta ABF \sim \Delta ACD$, $\Delta ABE \sim \Delta BCD$ e $\Delta ACF \sim \Delta ACE$. Logo:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \quad (4.12)$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \quad (4.13)$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \quad (4.14)$$

Dividindo a equação (4.12) pela equação (4.13), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BE}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Multiplicando as equações (4.13) e (4.14), infere-se também:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} \quad (4.16).$$

Agora, dividindo a equação (4.14) pela equação (4.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} &= \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para concluir a demonstração vamos multiplicar as equações (4.15), (4.16) e (4.17).

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}}$$

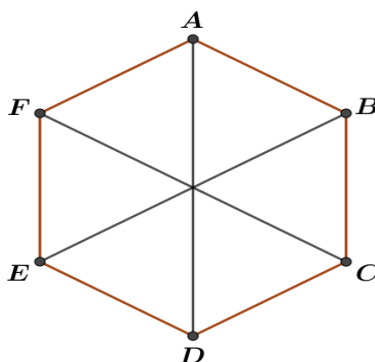
Fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \right)^2 &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} &= 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Portanto, tal resultado embasado pelo teorema de Ceva, garante que as alturas se encontram em um determinado ponto o qual é denominado de ortocentro.

Exemplo 16. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que cada uma das diagonais AD , BE e CF dividem o hexágono em duas regiões de mesma área. Prove que AD , BE , CF são concorrentes.

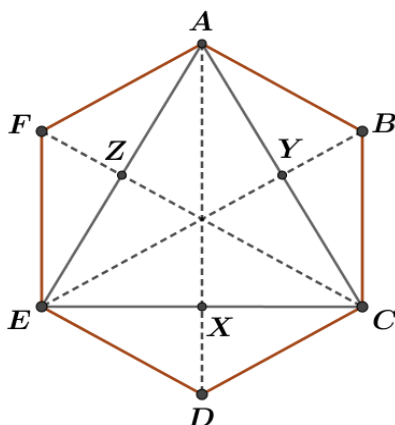
Figura 64: Relação de Ceva, Aplicação 02.



Fonte: Proprio Autor.

Solução: Como para aplicar o teorema de Ceva precisa-se de um triângulo, então é necessário nesse primeiro momento considerar a figura abaixo:

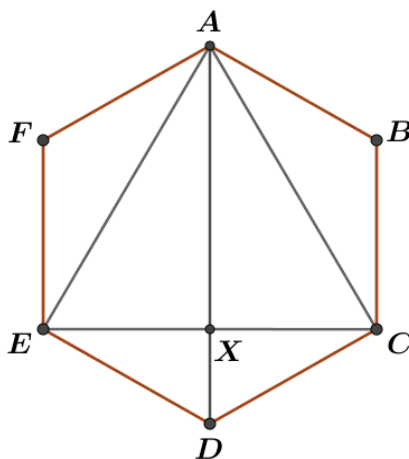
Figura 65: Passo 01 da Relação de Ceva, Aplicação 02.



Fonte: Próprio Autor.

Em particular a figura seguinte:

Figura 66: Passo 02 da Relação de Ceva, Aplicação 02.



Fonte: Próprio Autor.

Vamos considerar $[ABCDEF] = 2K$. Agora, note que pela propriedade 03 vista anteriormente “Se dois triângulos têm a mesma altura, então a razão entre as suas áreas é igual a razão entre as suas bases”. Temos que:

$$\frac{EX}{XC} = \frac{[EXD]}{[XDC]} = \frac{[AXE]}{[AXC]} = \frac{[EXD] + [AXE]}{[XDC] + [AXC]}$$

Como $[ADE] = [EXD] + [AXE]$ e $[ADC] = [XDC] + [AXC]$. Então, tem-se:

$$\frac{EX}{XC} = \frac{[ADE]}{[ADC]}.$$

Mas, $[ADE] = [ADEF] - [AEF]$ e como $[ADEF] = [ABCDEF]/2$ que por sua vez $[ABCDEF] = 2K$, logo $[ADE] = K - [AEF]$. Da mesma forma $[ADC] = K - [ABF]$. Então, têm-se:

$$\frac{EX}{XC} = \frac{K - [AEF]}{K - [ABF]} \quad (4.18).$$

De maneira análoga, se estabelece as outras relações,

$$\frac{CY}{YA} = \frac{K - [CDE]}{K - [AFE]} \quad (4.19)$$

$$\frac{AZ}{ZE} = \frac{K - [ABC]}{K - [EDC]} \quad (4.20).$$

Contudo, multiplicando membro a membro (4.18),(4.19) e (4.20), infere-se o seguinte:

$$\frac{EX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZE} = \frac{K - [AEF]}{K - [ABF]} \cdot \frac{K - [CDE]}{K - [AFE]} \cdot \frac{K - [ABC]}{K - [EDC]}$$

$$\Rightarrow \frac{EX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZE} = 1 \quad \blacksquare$$

Portanto, pelo teorema de Ceva tal relação acima garante que AD , BE e CF são concorrentes em um determinado ponto.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho, teve como objetivo principal apresentar certas propriedades básicas e alguns teoremas da geometria plana que no contexto olímpico são muito importante para solucionar determinados problemas que suas aplicações seriam a melhor saída. Mas, que também pudesse servir como um importante material de apoio a professores e alunos na disciplina de Geometria Plana.

Buscou-se apresentar também um material que pudesse manter um certo rigor matemático, mas que também fosse acessível a alunos de ensino médio e aos alunos do ensino fundamental maior em específico aos anos finais. Sendo assim, tal trabalho foi pensado de forma que sua estrutura obedecesse uma sequência didática, isto é, nas atividades propostas procurou-se mesclar questões mais simples com questões que exigem um pouco mais de raciocínio por parte de quem as interessar.

É de se destacar também neste trabalho a aplicação das propriedades abordadas, pois com conceitos bastantes simples e sem fazer muitos cálculos, em alguns casos nem os cálculos eram necessários para obter a solução de alguns problemas, fato estes apresentados no capítulo 2 desta dissertação, no qual foram resolvidos problemas da OBMEP apenas manipulando as figuras segundo a definição das mesmas.

Já o capítulo 3, trouxe um certo aprofundamento, isto é, fez uma exploração do teorema de Tales novamente por meio das propriedades, trazendo consigo também uma nova demonstração alternativa para o referido teorema que sem dúvida fornece ai mais uma ferramenta de apoio para os discentes e docentes quando estes precisarem provar a relação de Tales.

Contudo, espera-se que tal material possa ajudar muitos alunos e professores, sobretudo aqueles que possuem certas aptidões por competições olímpicas, sendo elas municipal, regional, estadual, nacionais e internacionais. Por fim, este trabalho pôde mostrar a força que tais propriedades e teoremas têm, e o quanto é importante conhecê-los e saber usá-los quando necessário.

REFERÊNCIAS.

- [1] AIRES, H. da C.; PEREIRA, I. C. **Técnicas de Problemas Olímpicos de Geometria Plana**. Belém: EditAedi/ UFPA, 2019. 130 p.
- [2] ASSIS, C. e MIRANDA, T. **Teorema de Menelaus**, Portal da Matemática – OBMEP, 2019. Disponível em: <<https://cdnportaldaoimp.br/portaldaoimp/uploads/material/cre1o14e0hwgo.pdf>>, último acesso 12/07/21.
- [3] ARAÚJO, Paulo Ferreira de, Duas propriedades de área, Vídeo da aula 55, 25/07/14, Programa de Iniciação Científica. Disponível no site: <<https://www.youtube.com/watch?v=RNWSncw5ptQ>>, último acesso 06/07/21.
- [4] ASSIS, C. e MIRANDA, T. **Relação de Stewart**, Portal da Matemática – OBMEP, 2019. Disponível em: <<https://cdnportaldaoimp.br/portaldaoimp/uploads/material/5fifrcv2ff8ck.pdf>>, último acesso 12/07/21.
- [5] ALVES, Diego Saochine. **Os teoremas esquecidos pelos professores de geometria plana do ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul. Disponível em: <<https://repositorio.ufms.br/bitstream/123456789/2404/1/DIEGO%20SAOCHINE%20ALVES.pdf>> último acesso 16/08/21.
- [6] DOLCE, O.; POMPEU, N. P. **Fundamentos de Matemática Elementar** (Geometria Plana). 9. Ed. São Paulo: Atual, 2013. 456 p.
- [7] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e Problemas Elementares**. 5. Ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2013. 325 p.
- [8] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M.; **Geometria II**, Vest seller, Rio de Janeiro, 2002.
- [9] MACEDO, Darilene Maria Ribeiro. **Resgatando alguns teoremas clássicos da Geometria Plana**. 2014. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8990/1/2014_dis_dmr Macedo.pdf>, último acesso 17/09/21.
- [10] DE SOUZA BRRITO, Gabriel Vitor. **Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 2020. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2020. Disponível em: <<http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/gabriel.pdf>>, último acesso 12/08/21.
- [11] NOGUEIRA, Leandro Teles et al. **Aplicação de alguns teoremas na resolução de problemas geométricos**. 2016. Disponível em: <<https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5443>>, último acesso 09/08/21.
- [12] PAPMEM, AREAS II. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. Youtube. Jul. 2015. 01h:06min. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=LdRuFVa0Z5c>>, último acesso 02/10/21.
- [13] PARENTE, U. L. e NETO, A. C. M. **Problemas Envolvendo Áreas – Parte 1**, Portal da Matemática – OBMEP. Disponível em: <https://cdnportaldaoimp.br/portaldaoimp/uploads/material_teorico/11fbyndw23480.pdf>, último acesso 25/02/2021.
- [14] PARENTE, U. L. e NETO, A. C. M. **Problemas Envolvendo Áreas – Parte 2**, Portal da Matemática – OBMEP. Disponível em: <https://cdnportaldaoimp.br/portaldaoimp/uploads/material_teorico/a1e1624kb8gk8.pdf>, último acesso 07/10/21.

- [15] PARENTE, U. L. e NETO, A. C. M. **Elementos Básicos de Geometria Plana – Parte 2**, Portal da Matemática – OBMEP. Disponível em: <<https://portaldaobmp.impa.br/uploads/material/649et3w287goc.pdf>>, último acesso 05/10/21.
- [16] PARENTE, U. L. e NETO, A. C. M. **A Relação de Stewart**, Portal da Matemática – OBMEP, 2020. Disponível em: <https://cdnportaldaobmp.impa.br/portaldaobmp/uploads/material_teorico/cj48xi7pqsggg.pdf>, último acesso 16/06/2021.
- [17] PARENTE, U. L. e NETO, A. C. M. **Teorema de Menelaus**, Portal da Matemática – OBMEP, 2019. Disponível em: <https://cdnportaldaobmp.impa.br/portaldaobmp/uploads/material_teorico/57txarnw6doo.pdf>, último acesso 10/07/2021.
- [18] PARENTE, U. L. e NETO, A. C. M. **Áreas de Figuras Planas: Mais Alguns Resultados**, Portal da Matemática – OBMEP, 2018. Disponível em: <https://cdnportaldaobmp.impa.br/portaldaobmp/uploads/material_teorico/t00djzr09hwso.pdf>, último acesso 08/07/21.
- [19] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. Geometria Euclidiana Plana e Construção Geométrica. 2. Ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008. 259 p.
- [20] SOARES DOS SANTOS, Jader. **A Geometria na Vila Olímpica: uma proposta de atividade de Geometria Plana no ensino Médio**. 2018. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande, 2018. Disponível em: <<http://www.repositorio.furg.br/handle/1/8964>>, último acesso 09/08/2021.
- [21] SILVA ROCHA, João. **Estudo de Congruência e Semelhança de Triângulos: Uma Proposta Para o Ensino Básico**. 2019. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, 2019. Disponível em: <<https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/7346>>, último acesso 15/09/21.
- [22] THIAGO, C. **Teorema de Ceva e Teorema de Menelaus**, Polos Olímpicos de Treinamento. (POTI), 2012. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/86bacem5rzoco.pdf>, último acesso 05/08/2021.
- [23] WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015, 86 páginas. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/apostilas.htm>>, último acesso 10/02/2021.