



Universidade Estadual de Santa Cruz
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

João Matheus Santos Assis

**Caminhos reais no plano ensino e aprendizagem
dentro do encantado mundo dos números
complexos**

Ilhéus - BA

2022

João Matheus Santos Assis

Caminhos reais no plano ensino e aprendizagem dentro do encantado mundo dos números complexos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Santa Cruz.

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Universidade Estadual de Santa Cruz

Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

Ilhéus - BA

2022

A848 Assis, João Matheus Santos.
Caminhos reais no plano ensino e aprendizagem
dentro do encantado mundo dos números complexos
/ João Matheus Santos Assis. – Ilhéus, BA: UESC,
2022.
86 f. : il.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual
de Santa Cruz. Programa de Pós-graduação Mestra-
do Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências e apêndice.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números com-
plexos. 3. Aprendizagem. 4. Pesquisa educacional. I.
Título.

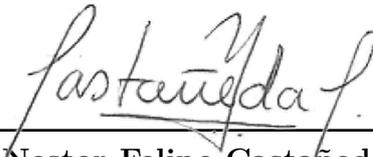
CDD 510.7

João Matheus Santos Assis

Caminhos reais no plano ensino e aprendizagem dentro do encantado mundo dos números complexos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Santa Cruz.

Trabalho aprovado. Ilhéus - BA, 10 de fevereiro de 2022:



Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

Orientador

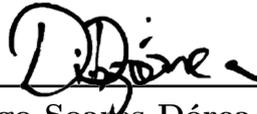
Universidade Estadual de Santa Cruz



Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer

Examinador Interno

Universidade Estadual de Santa Cruz



Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva

Examinador Externo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Ilhéus - BA

2022

Agradecimentos

Esta dissertação representa o final de um percurso iniciado em 2019, quando decidi cursar o Profmat na UESC. Olhando para trás, vejo que a caminhada foi proveitosa e que tenho muito a agradecer. Coleciono aprendizados e momentos que certamente se refletiram positivamente na minha prática docente. Agradeço a Deus por todas as bênçãos e livramentos na minha vida e deixo registrado minha gratidão:

A minha mãe, Dalmares de Jesus Santos Assis, exemplo de mãe amorosa e professora dedicada.

A meu pai, José Carlos Luz de Assis, e meu irmão, Mathias Santos Assis.

Aos meus avós maternos (*in memoriam*), Dionisio dos Santos e Maria José de Jesus Aguiar, que muito contribuíram na minha educação.

Ao IFBA, campus Valença, onde cursei meu Ensino Integrado e Ensino Superior.

Aos amigos que fiz ao longo do curso, em especial Jairo Almeida, Jônatas Lobo e Altamiro Bispo.

A todos os professores do Profmat/UESC que contribuíram no aperfeiçoamento da minha formação acadêmica. Agradeço a atenção e o compromisso demonstrado nas aulas.

Aos professores Germán Ignacio Gomero Ferrer e Diogo Soares Dórea da Silva, por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora.

A meu orientador, Nestor Felipe Castañeda Centurión, pelo exemplo de matemático e professor competente.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação”.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

Resumo

Os números complexos estão gradativamente perdendo espaço dentro da matriz do Ensino Médio, em virtude de não constarem no rol de habilidades da Base Nacional Comum Curricular. Esta dissertação objetiva discutir o lugar dos números complexos no Ensino Médio e Superior e propor atividades sobre este ente matemático para alunos da Licenciatura em Matemática. No caminho entre estes dois objetivos foi realizada uma revisão matemática dos números complexos e, de forma a ampliar a pesquisa, das transformações de Möbius, sendo produzidas diversas ferramentas autorais no *software GeoGebra*. Foi defendido abertamente o posicionamento do autor sobre os números complexos serem vistos somente na graduação, convergindo assim com os documentos normativos. No entanto, quando analisado os Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática de algumas instituições públicas de ensino baianas notou-se que, na maioria dos casos, a disciplina envolvendo a temática não foi pensada especificamente para seu público alvo, e sim para o bacharelado. Foram propostas quatro atividades, fundamentadas nas tendências de ensino Investigação Matemática e na Informática na educação, explorando a origem dos números complexos e as transformações elementares no plano complexo.

Palavras-chave: Números complexos, Transformação de Möbius, Investigação Matemática.

Abstract

Complex numbers are gradually losing space within the High School curriculum, as they are not included in the list of skills of the National Common Curricular Base. This dissertation aims to discuss the place of complex numbers in High School and Higher Education and to propose activities about this mathematical entity for students of the Degree in Mathematics. On the way between these two objectives, a mathematical review of complex numbers was carried out and, in order to expand the research, of the Möbius transformations, several authorial tools were produced in the GeoGebra software. The author's position on complex numbers being seen only at graduation was openly defended, thus converging with the normative documents. However, when analyzing the Pedagogical Projects of the Mathematics Degree Courses of some public teaching institutions in Bahia, it was noticed that, in most cases, the subject involving the theme was not designed specifically for its target audience, but for the bachelor's degree. Four activities were proposed, based on teaching trends in Mathematics Research and Computer Science in education, exploring the origin of complex numbers and the elementary transformations in the complex plane.

Keywords: Complex numbers, Möbius Transformation, Mathematical Research.

Lista de ilustrações

Figura 3.1 – Plano complexo.	26
Figura 3.2 – Interpretação geométrica do conjugado de um número complexo.	28
Figura 3.3 – Forma polar do número complexo z	30
Figura 3.4 – Rotação dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 em torno da origem.	31
Figura 3.5 – Polígono regular formado pelas raízes cúbicas de $z = 1$	34
Figura 3.6 – Reta que passa pelo ponto P_0 e é perpendicular ao vetor não nulo \vec{v}	35
Figura 3.7 – Círculo de centro C e raio r	36
Figura 3.8 – Colinearidade de três pontos.	38
Figura 3.9 – Reta que passa pelos pontos $w_1 = -2 - i$ e $w_2 = 4 + i$	38
Figura 4.1 – Translação de z por β	40
Figura 4.2 – Translação do círculo C por β	41
Figura 4.3 – Homotetia do círculo C pelo fator r	42
Figura 4.4 – Rotação de um círculo centrado na origem.	43
Figura 4.5 – Composição da rotação e homotetia.	43
Figura 4.6 – Inversão do vetor z em relação ao círculo unitário.	44
Figura 4.7 – Alguns exemplos de alinhamento.	50
Figura 4.8 – Transformação de $ z = 1$ em $ z - 1 = 1$	53
Figura 4.9 – Pontos simétricos $w = f(z)$ e $w^* = f(\bar{z})$ em relação ao círculo C	55
Figura 4.10 – Pontos simétricos $w = f(z)$ e $w^* = f(\bar{z})$ em relação à reta C	55
Figura 4.11 – Pontos simétricos em relação ao círculo C	56
Figura 4.12 – Representação gráfica do Exemplo 4.26.	57
Figura 4.13 – Transformação com dois pontos fixos.	59
Figura 4.14 – Transformação com um ponto fixo.	62
Figura 4.15 – Projeção estereográfica.	63
Figura 4.16 – Projeção estereográfica de círculos em S^2	66
Figura 5.1 – Investigação das soluções das equações de 3º grau.	72
Figura 5.2 – Barra de menu do <i>software GeoGebra</i>	74
Figura 5.3 – Quadrilátero determinado pelos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4	75
Figura 5.4 – Inversão do ponto z	77
Figura 5.5 – Inversão de reta e círculo.	77
Figura A.1 – Investigação das soluções das equações de 3º grau.	85
Figura A.2 – Quadrilátero determinado pelos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4	86
Figura A.3 – Inversão do ponto z	87
Figura A.4 – Inversão de reta e círculo.	87

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Barreiras.	17
Tabela 2.2 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Barreiras.	18
Tabela 2.3 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Camaçari.	18
Tabela 2.4 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Eunápolis.	18
Tabela 2.5 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Salvador.	19
Tabela 2.6 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Salvador.	19
Tabela 2.7 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Valença.	19
Tabela 2.8 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UEFS.	19
Tabela 2.9 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UEFS.	20
Tabela 2.10–Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UESB.	20
Tabela 2.11–Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UESC.	20
Tabela 2.12–Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFBA.	21
Tabela 2.13–Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFOB.	21
Tabela 2.14–Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFOB.	21
Tabela 2.15–Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFRB.	22
Tabela 5.1 – Momentos na realização de uma investigação	69

Sumário

Motivação: uma breve retrospectiva pessoal	12
1 Introdução	13
1.1 Organização do Trabalho	14
2 O lugar dos números complexos no Ensino Básico e no Ensino Superior . .	16
2.1 Ensino Básico	16
2.2 Os números complexos nos cursos de Licenciatura em Matemática em Instituições de Ensino Superior públicas na Bahia	16
2.2.1 Instituto Federal da Bahia	17
2.2.2 Universidade Estadual de Feira de Santana	19
2.2.3 Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia	20
2.2.4 Universidade Estadual de Santa Cruz	20
2.2.5 Universidade Federal da Bahia	21
2.2.6 Universidade Federal do Oeste da Bahia	21
2.2.7 Universidade Federal do Recôncavo da Bahia	22
2.2.8 Universidade do Estado da Bahia	22
3 O corpo dos números complexos e sua geometria	23
3.1 O corpo dos números complexos	26
3.1.1 Forma algébrica	27
3.1.2 Forma polar	30
3.2 Geometria da reta e do círculo no plano complexo	35
4 Transformações no plano complexo	40
4.1 Transformações elementares no plano complexo	40
4.2 Transformações de Möbius	45
4.2.1 Razão cruzada e determinação de uma transformação de Möbius . .	49
4.2.2 Forma matricial	53
4.2.3 Simetrias	54
4.2.4 Classificação e visualização das transformações de Möbius	58
4.2.5 Projeção estereográfica	62
5 Proposta de uma oficina para a Licenciatura em Matemática	67
5.1 Atividade 1: As equações cúbicas e os números complexos	70
5.2 Atividade 2: Viajando no plano por meio de translações, rotações e homotetias	73
5.3 Atividade 3: A fascinante geometria das inversões	76
5.4 Atividade 4: A amizade entre os polígonos e os números complexos	78
6 Considerações finais	80

Referências	82
APÊNDICE A Material para a aplicação da oficina	85

Motivação: uma breve retrospectiva pessoal

Meu primeiro contato com os números complexos foi no Ensino Médio, estudando por conta própria durante meu período de férias. Anos depois, já como aluno do curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Valença, ao estagiar em um colégio estadual do município de Valença-BA, em uma turma de 3º ano vespertina, um dos assuntos que tive que lecionar, por escolha do professor regente, foi números complexos. Este foi um grande desafio pessoal, pois senti que os alunos não estavam receptivos a aceitarem uma álgebra envolvendo a raiz quadrada do inverso aditivo da unidade.

Esta experiência me motivou a escrever meu Trabalho de Conclusão de Curso de graduação envolvendo o tema, intitulado “Um estudo dos números complexos e quaterniônicos utilizando o *software GeoGebra*”. No trabalho, apresentei a riquíssima história envolvendo os números complexos, o desenvolvimento teórico com ênfase nas interpretações geométricas e a álgebra dos quatérnions. A monografia se desdobrou, até o momento, em dois trabalhos, são eles: [Assis, Dias e Ohl \(2019\)](#), em que são reveladas algumas propriedades interessantes da potenciação de um número complexo, e [Assis, Dias e Vilas Bôas \(2019\)](#), em que é apresentada a história desses números e sua relação com as equações cúbicas.

Envolvido com a temática dos números complexos, manifestei ao colegiado do Profmat/UESC o interesse em cursar a disciplina eletiva Polinômios e Equações Algébricas, que tinha na sua ementa a abordagem dos complexos. Logo no início do curso, o professor, que se tornou meu orientador desta dissertação, chamou-me a atenção das interessantes propriedades das transformações de Möbius, das quais, até aquele momento, eu não tinha nenhum conhecimento.

Por outro lado, desde a graduação, possuo grande interesse no uso de *softwares* no Ensino de Matemática, em especial o *GeoGebra*. Com este recurso é possível explorar de forma dinâmica as propriedades geométricas do objeto matemático estudado. Vislumbrando as potencialidades deste para melhor visualizar os números complexos e as transformações de Möbius, surgiu a temática desta dissertação.

1 Introdução

Os números complexos surgiram na História da Matemática de forma bastante conturbada, por meio dos estudos de métodos resolutivos de equações cúbicas. Este novo objeto matemático levou muito tempo até se consolidar com algo indispensável ao desenvolvimento da Matemática, dando impulso para a criação e/ou expansão de novas teorias, como a dos números hipercomplexos. No Ensino de Matemática, este conjunto numérico ainda costuma ser visto no final do Ensino Médio, mas com cada vez menos frequência.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), principais documentos educacionais, bem como no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), principal porta de entrada aos cursos universitários brasileiros, os números complexos não ocupam nenhum prestígio. Tentando recuperar o espaço desses números no ensino, no repositório do Profmat, constam, em uma busca simples, mais de 90 dissertações sobre o tema. A ampla maioria dos autores defendem a reinserção dos mesmos nos currículos educacionais, sugerindo para isso as mais variadas propostas de sequências didáticas.

Considerando que existem conteúdos mais relevantes para os alunos do Ensino Médio aprenderem, como funções, progressões, matemática financeira, geometria plana e espacial, combinatória, estatística e probabilidade, além de novas tendências como o pensamento computacional, dirijo, respeitosamente, dos colegas sobre a relevância dos números complexos na matriz da Educação Básica. Defendo que eles devem, de fato, ser eliminados do Ensino Médio e para os que prosseguirem os estudos em Matemática ou áreas afins, no Ensino Superior, que os vejam de forma cuidadosa e com ênfase nos aspectos geométricos.

Uma das aplicações dos números complexos é nas transformações no plano: translação, homotetia, rotação e inversão. As transformações de Möbius, composição dessas transformações elementares, possuem grande apelo geométrico, porém não costumam ser abordadas nos cursos de variáveis complexas, em que é tradição uma revisão dos números complexos e em seguida a associação desses com o Cálculo Diferencial e Integral. Observando Soares (2016) e Ávila (2015), principais referências utilizadas na graduação, as referidas transformações localizam-se no último capítulo dos livros como exemplos de transformações conformes, que são aquelas que preservam ângulos localmente.

No banco de dissertações do Profmat constam dez dissertações sobre transformações de Möbius. Nelas, encontram-se principalmente uma abordagem da teoria dos números complexos, das transformações elementares no plano complexo e das transformações de Möbius. Alguns autores propõem sequências didáticas voltadas ao Ensino Médio, como

Costa (2021), que apresenta uma série de atividades lúdicas, por meio de jogos, sobre números complexos e transformações de Möbius. Ele justifica sua dissertação no fato de muitos alunos terem dificuldades com as manipulações algébricas dos números complexos.

Analisando as produções desenvolvidas até então, consideramos que ainda tem espaço para mais um trabalho inserido nestas temáticas. Apresentamos como diferenciais: uma discussão do lugar dos números complexos no Ensino Médio e Superior, a abordagem de simetrias e classificação das transformações de Möbius e uma proposta de atividades fundamentadas nas tendências de Investigação Matemática e Informática no ensino voltada a licenciandos em Matemática.

O principal objetivo das dissertações do Profmat é a produção de materiais que sejam úteis para a Educação Básica, desta forma cabe-nos responder onde o presente trabalho se insere. De acordo com a Teoria do Currículo, este é fruto de uma construção histórica e cultural. Assim, ele é temporal. Nada impede que, em uma nova próxima reformulação curricular, os números complexos sejam reintegrados à matriz do Ensino Médio. Além disso, concordo com Elon Lages Lima quando afirmava que o bom professor deve saber muito mais do que ensina. Diante disso, espera-se que, com este trabalho, professores da Educação Básica e estudantes da Licenciatura em Matemática tenham uma melhor compreensão do tema.

1.1 Organização do Trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- No Capítulo 2, é discutido o lugar dos números complexos tanto no Ensino Médio quanto nos cursos de Licenciatura em Matemática em instituições públicas de ensino baianas.
- No Capítulo 3, são abordados os fatos históricos das equações do terceiro grau que desencadearam a criação dos números complexos, bem como é apresentado o desenvolvimento algébrico e geométrico desse ente matemático pertinentes aos objetivos desse trabalho.
- No Capítulo 4, são definidas as transformações elementares no plano complexo, a saber, translação, rotação, homotetia e inversão, a fim de adentrar em uma classe especial de funções complexas racionais de uma variável complexa denominada transformações de Möbius. Estas funções gozam de interessantes propriedades algébricas e geométricas, que são descortinadas ao longo do texto.
- No Capítulo 5, é apresentada a fundamentação teórica da Investigação Matemática e da Informática na Educação. Alicerçado nessas tendências de ensino, são propostas

quatro atividades que visam ampliar o entendimento dos licenciandos em Matemática a respeito dos números complexos, bem como inseri-los em metodologias alternativas ao ensino tradicional.

- No Capítulo 6, são sintetizados os principais argumentos e resultados da presente dissertação e são listados os possíveis trabalhos futuros a serem desenvolvidos pelo autor.
- No Apêndice A, são disponibilizadas as quatro atividades propostas no Capítulo 5 para utilização em sala de aula.

2 O lugar dos números complexos no Ensino Básico e no Ensino Superior

Os números complexos desempenham um papel controverso no processo de ensino e aprendizagem tanto na Educação Básica como na Educação Superior. Conforme sintetiza [Carneiro \(2004\)](#), eles “não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como “assunto elementar” de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis”.

2.1 Ensino Básico

Os números complexos são tradicionalmente ensinados no último ano do Ensino Médio, antes dos Polinômios, com uma abordagem predominantemente algébrica. Os alunos que até então foram ensinados que o cálculo da raiz quadrada de um número negativo era algo ilegal, agora são convencidos (ou não), que sob determinado contexto é uma operação legítima. Uma abordagem abrupta sobre este tema, mais atrapalha do que contribui na formação do estudante. [Mathias \(2013\)](#) apresentava uma história fictícia que contextualiza bem como este assunto costuma ser introduzido nas aulas:

Bom dia, hoje eu apresentarei a vocês os números complexos! Vocês se lembram do que acontecia quando o delta de uma equação do segundo grau era negativo? Ela não possuía solução, certo? Pois então, hoje mostraremos que, na realidade e durante todo o tempo, ela tinha solução! Permitam-me apresentar o novo conjunto numérico, que chamaremos de \mathbb{C} .

Com base na alegoria acima, os aspectos históricos e geométricos ficam em segundo plano. Não é à toa que os PCNs apontam que “isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área” ([BRASIL, 2007](#), p. 122).

2.2 Os números complexos nos cursos de Licenciatura em Matemática em Instituições de Ensino Superior públicas na Bahia

Diante da grande quantidade de estabelecimentos de ensino no Brasil, limitaremos nossa análise documental dos Projetos Pedagógicos dos Cursos (PPCs) às instituições públicas de ensino baianas. Segundo [Iglesias e Costa \(2018, p. 368\)](#), “o PPC, como um documento legal, normativo, programático e norteador das ações a serem desenvolvidas num

curso de formação é obrigatório e deve conter os fundamentos, as concepções, orientações curriculares e organizacionais de uma instituição ou curso”.

As Instituições de Ensino Superior (IES) públicas baianas são Instituto Federal da Bahia (IFBA), Instituto Federal Baiano (IF Baiano), Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Universidade Federal da Bahia (UFBA), Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Universidade Federal do Sul da Bahia (UFSB) e Universidade Estadual da Bahia (UNEB).

A Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB) e a Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF) são também instituições de Ensino Superior públicas em solo baiano. A UNILAB também tem campus no Ceará, enquanto que a UNIVASF tem campi em Pernambuco e Piauí. A saber, nenhuma delas possui o curso de Licenciatura em Matemática.

Das dez instituições exclusivamente baianas citadas, apenas o IF Baiano não oferta o curso de Licenciatura em Matemática. A UFSB oferece o curso de Licenciatura em Matemática e Computação, o que a desclassifica para nossos objetivos. Buscando os PPCs disponibilizados nas páginas virtuais de cada IES, foram analisados: o lugar dos números complexos na formação inicial docente proporcionado por cada instituição, o nome atribuído ao componente curricular, a carga horária, a ementa e se era uma disciplina obrigatória ou eletiva. Os dados coletados são apresentados logo abaixo.

2.2.1 Instituto Federal da Bahia

O IFBA oferta o curso de Licenciatura em Matemática nos campi Barreiras, Camaçari, Eunápolis, Salvador e Valença.

Tabela 2.1 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Barreiras.

Campus Barreiras	
Nome do componente curricular: Fundamentos de Matemática Elementar II	Carga horária: 60 h
	Período: 2º semestre
	Obrigatória
Ementa: Funções e Equações Trigonométricas; Conjunto dos Números Complexos.	

Fonte: (PPC-IFBA-BARREIRAS, 2019).

Tabela 2.2 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Barreiras.

Campus Barreiras	
Nome do componente curricular: Funções de uma Variável Complexa	Carga horária: 60 h
	Período: 8º semestre
	Obrigatória
Ementa: Funções de uma Variável Complexa; Limite, Continuidade e Derivada de Funções Complexas; Equações de Cauchy-Riemann; Funções Analíticas Elementares.	

Fonte: (PPC-IFBA-BARREIRAS, 2019).

Tabela 2.3 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Camaçari.

Campus Camaçari	
Nome do componente curricular: Variáveis complexas	Carga horária: 60 h
	Período: 6º semestre
	Obrigatória
Ementa: Álgebra e Geometria dos números complexos. Limite, continuidade e derivada das funções de uma variável complexa. Equações de Cauchy-Riemann: funções analíticas. Analiticidade das funções elementares. Teorema de Cauchy. Séries de potências. Resíduos e pólos: aplicação ao cálculo de integrais reais.	

Fonte: (PPC-IFBA-CAMAÇARI, 2019).

Tabela 2.4 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Eunápolis.

Campus Eunápolis	
Nome do componente curricular: Variáveis complexas	Carga horária: 60 h
	Período: 9º semestre
	Obrigatória
Ementa: Álgebra e Geometria dos números complexos. Limite, continuidade e derivada das funções de uma variável complexa. Equações de Cauchy-Riemann: funções analíticas. Analiticidade das funções elementares. Teorema de Cauchy. Séries de potências. Resíduos e pólos: aplicação ao cálculo de integrais reais.	

Fonte: (PPC-IFBA-EUNÁPOLIS, 2017).

Tabela 2.5 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Salvador.

Campus Salvador	
Nome do componente curricular: Fundamentos de Matemática I	Carga horária: 60 h
	Período: 2º semestre
	Obrigatória
Ementa: Construção dos conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros, Racionais e Reais. Números Complexos	

Fonte: (PPC-IFBA-SALVADOR, 2015).

Tabela 2.6 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Salvador.

Campus Salvador	
Nome do componente curricular: Variáveis complexas	Carga horária: 60 h
	Período: 8º semestre
	Obrigatória
Ementa: Limite, continuidade e derivada das funções de uma variável complexa. Equações de Cauchy-Riemann: funções analíticas. Analiticidade das funções elementares. Teorema de Cauchy. Séries de potências. Resíduos e pólos: aplicação ao cálculo de integrais reais.	

Fonte: (PPC-IFBA-SALVADOR, 2015).

Tabela 2.7 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, campus Valença.

Campus Valença	
Nome do componente curricular: Fundamentos da Matemática V	Carga horária: 60 h
	Período: 6º semestre
	Obrigatória
Ementa: Conjunto dos números complexos. Representação polar e raízes de um número complexo. Exponencial de um número complexo. Polinômios. Divisão de polinômios. Teorema Fundamental da Álgebra. Resolução algébrica de equações. Funções analíticas: limite, continuidade e derivação.	

Fonte: (PPC-IFBA-VALENÇA, 2019).

2.2.2 Universidade Estadual de Feira de Santana

Tabela 2.8 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UEFS.

Campus Feira de Santana	
Nome do componente curricular: Funções de uma Variável Complexa	Carga horária: 60 h
	Período: 7º semestre
	Obrigatória
Ementa: Corpo dos Complexos. Funções de Uma Variável Complexa. Funções Holomorfas.	

Fonte: (PPC-UEFS, 2018).

Tabela 2.9 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UEFS.

Campus Feira de Santana	
Nome do componente curricular: Instrumentalização para o Ensino da Matemática VII-M	Carga horária: 45 h
	Período: 7º semestre
	Obrigatória
Ementa: Articulação da teoria e da prática em torno do tema Trigonometria e Números Complexos numa postura reflexiva buscando construir uma atitude crítica do professor em formação, por meio da análise de atividades desenvolvidas para a Educação Básica. Uso de tendências metodológicas em Educação Matemática. Análise e produção de material didático para o ensino e a aprendizagem de Trigonometria e Números Complexos na Educação Básica.	

Fonte: (PPC-UEFS, 2018).

2.2.3 Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

A UESB possui três campi: Itapetinga, Jequié e Vitória da Conquista. O campus Jequié oferta o curso de Licenciatura em Matemática com Enfoque em Informática, portanto não iremos apresentar a referida ementa neste compilado.

Tabela 2.10 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UESB.

Campus de Vitória da Conquista	
Nome do componente curricular: Introdução as variáveis complexas	Carga horária: 60 h
	Período: 8º semestre
	Obrigatória
Ementa: Tópicos matemática elementar. Números Complexos, Funções de uma variável complexa, Integrais, Séries de Taylor.	

Fonte: (PPC-UESB, 2009).

2.2.4 Universidade Estadual de Santa Cruz

Tabela 2.11 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UESC.

Campus Soane Nazaré de Andrade	
Nome do componente curricular: Funções de uma Variável Complexa	Carga horária: 60 h
	Período: 6º semestre
	Obrigatória
Ementa: Estudo das características e propriedades dos números complexos, de funções, séries, derivação e integração no campo complexo. Discussão sobre a relevância e aplicabilidade da teoria elementar das funções analíticas de uma variável complexa à investigação de fenômenos e à solução de problemas na Matemática e em outras ciências.	

Fonte: (PPC-UESC, 2006).

2.2.5 Universidade Federal da Bahia

Tabela 2.12 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFBA.

Salvador - Campus Ondina	
Nome do componente curricular: Funções Holomorfas	Carga horária: 68 h
	Período: 7º semestre
	Obrigatória
Ementa: O corpo dos números complexos. Limite, continuidade e funções complexas. Derivada complexa e as funções holomorfas. Séries de potência e funções analíticas. Teoria de Cauchy. Singularidades e séries de Laurent. Resíduos e pólos: aplicação ao cálculo de integrais reais. Transformações conformes e aplicações.	

Fonte: (PPC-UFBA, 2008).

2.2.6 Universidade Federal do Oeste da Bahia

Tabela 2.13 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFOB.

Campus Reitor Edgard Santos	
Nome do componente curricular: Ensino de Matemática: Números Complexos e Trigonometria	Carga horária: 90 h
	Período: 7º semestre
	Obrigatória
Ementa: Trigonometria no Ensino Fundamental e Médio. Números Complexos no Ensino Médio. Articulação entre os conteúdos que permeiam os currículos do Ensino Básico e a própria matemática. Identificação dos pontos de dificuldade tanto para o ensino como para a aprendizagem destes conteúdos. Utilização e análise de jogos matemáticos, calculadora, softwares, recursos tecnológicos digitais e vídeos disponibilizados na internet. Confecção de material didático para o ensino do conteúdo abordado. Sequências de Ensino de Matemática - Números Complexos e Trigonometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Planos de Ensino de Matemática: estrutura, análise e elaboração. Aspectos do processo avaliativo.	

Fonte: (PPC-UFOB, 2008).

Tabela 2.14 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFOB.

Campus Reitor Edgard Santos	
Nome do componente curricular: Ensino de Matemática: Números Complexos e Trigonometria	Carga horária: 60 h
	Período: Indefinido
	Optativa
Ementa: O corpo dos números complexos, conjugado e valor absoluto, a forma polar, extração de raízes, a exponencial, logaritmos e potências complexas. Funções de uma variável complexa, funções racionais, função exponencial e trigonométricas. Funções Analíticas. Integração Complexa. Fórmula Integral de Cauchy.	

Fonte: (PPC-UFOB, 2008).

2.2.7 Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Tabela 2.15 – Os números complexos no curso de Licenciatura em Matemática da UFRB.

Campus Amargosa	
Nome do componente curricular: Funções de uma variável complexa	Carga horária: 68 h
	Período: 8º semestre
	Obrigatória
Ementa: O Plano Complexo: O corpo dos Complexos e sua Topologia; Justificativas Geométricas do Teorema Fundamental da Álgebra; Funções Holomorfas; Integração de Funções Complexas; Demonstração Formal do Teorema Fundamental da Álgebra; Séries, Resíduos e Polos.	

Fonte: (PPC-UFRB, 2018).

2.2.8 Universidade do Estado da Bahia

A UNEB possui 24 campus espalhados pelo Estado da Bahia. Deste total, apenas seis oferecem o curso de Licenciatura em Matemática, são eles: campus II – Alagoinhas, Campus VI – Caetité, Campus VII - Senhor do Bonfim, Campus VIII - Paulo Afonso, Campus IX – Barreiras e Campus X - Teixeira de Freitas. Consultando os PPCs, observa-se que todos comportam a disciplina, de caráter obrigatório, intitulado Matemática II, no 2º semestre, com carga horária de 75 horas, que objetiva o estudo das funções trigonométricas e dos números complexos.

3 O corpo dos números complexos e sua geometria

Segundo Lima (2012), os babilônios já sabiam resolver equações quadráticas 1700 anos antes de Cristo. No entanto, em virtude do grande prestígio da Geometria, só as soluções positivas eram consideradas válidas. De fato, os números negativos não tinham um significado geométrico, nem social, tendo que esperar bastante tempo até ter sua importância reconhecida na História da Matemática.

Por milhares de séculos, não houve nenhum avanço notável na busca de um método resolutivo de equações de grau superior a 2. Isso levou Luca Pacioli (1445-1514) a escrever no seu famoso livro, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494), que objetivava apresentar uma síntese do conhecimento matemático na Europa até então (GARBI, 2010), que a resolução da equação cúbica “era tão impossível quanto a quadratura do círculo”.

Mas, um professor de Matemática em Bolonha, de quem pouco se sabe a respeito, provou o contrário. O herói desta história secular se chamava Scipione del Ferro (1465-1526), que encontrou um método para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$, com p e q não negativos, que em notação atual é dada por

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ com } D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Por mais surpreendente que possa parecer atualmente, del Ferro não publicou sua descoberta, que certamente o colocaria em grande evidência. Ele apenas revelou a poucas pessoas, como seu aluno Antonio Maria Fior, apontado na literatura como ambicioso e um matemático medíocre.

Nesta época, eram comuns duelos entre intelectuais, em que alguns contratos de professores universitários eram celebrados. Estas disputas eram assistidas, muitas vezes, por uma numerosa audiência (LIMA, 2012). Assim, Fior, em busca de fama, e certo de ser o único conhecedor do método resolutivo das equações cúbicas, decidiu desafiar Niccolo Fontana (1500-1557) para um duelo. De acordo com Nahin (1998), Fontana chamou a atenção de Fior após anunciar ser capaz de resolver a equação cúbica da forma $x^3 + px^2 = q$, o que o deixou incrédulo.

Fontana era uma pessoa de origem bastante humilde, que à custa de muita superação se tornou habilidoso em diversas áreas do conhecimento, inclusive Matemática. Ele não só aceitou o desafio, como terminou vencendo de forma excepcional, acertando todas as

30 questões levantadas por Fior, o qual não obteve êxito em nenhum problema lançado por seu adversário. Tal feito deveu-se ao fato de Fontana, poucos dias antes da disputa, também deduzir o tipo particular da cúbica obtida por Fior. Para compreender melhor o contexto histórico:

Hoje, pensamos em equações cúbicas como sendo essencialmente todas de um mesmo tipo e como podendo ser tratadas por um único método unificado de solução. Na época, porém, quando coeficientes negativos praticamente não eram usados, havia tantos tipos de cúbicas quantas são as possibilidades de coeficientes positivos e negativos. (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 200).

De acordo com Lima (2012), o fato de Fontana desvendar a fórmula não diminui em nada o protagonismo de Del Ferro, pois o primeiro desconfiava, pelas questões que lhe foram endereçadas, que deveria existir uma fórmula, enquanto o segundo não tinha esta certeza. A notícia sobre a vitória de Fontana se alastrou pela comunidade intelectual, chegando até o conhecimento de Girolamo Cardano (1501-1576).

Este novo personagem, de caráter controverso, pediu, em súplica, a Fontana que revelasse a fórmula resolutiva da equação cúbica, objetivando publicá-la no seu livro. Após muito relutar, Fontana revelou a fórmula a Cardano, exigindo, entretanto, segredo.

Cardano quebrou sua promessa, publicando o algoritmo em 1545, no livro intitulado: *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis* (A Grande Arte ou Sobre as regras algébricas), amplamente conhecido por *Ars Magna*. Este livro também continha a resolução das equações quárticas, realizada por Ludovico Ferrari (1522 - 1565). Segundo Lima (2012), Cardano ao consultar os arquivos de Del Ferro sentiu-se desobrigado à promessa realizada.

Boyer e Merzbach (2012, p. 203) destaca que “a resolução das equações cúbicas e quárticas não foi em nenhum sentido motivada por considerações práticas, nem tinham valor para os engenheiros ou praticantes de matemática”. De fato, como corrobora Lima (2012), estas fórmulas tem somente utilidade do ponto de vista lógico.

É importante refletir que, apesar do ato desleal, Cardano, ao compartilhar a fórmula, contribuiu decisivamente para o desenvolvimento do estudo das equações algébricas e dos números complexos. Conforme corrobora Boyer e Merzbach (2012, p. 203), “a mais importante consequência das descobertas publicadas na *Ars Magna* foi o enorme impulso que deram à pesquisa em álgebra em várias direções”.

Em *Ars Magna*, o conceito de números negativos foi introduzido, com a clareza moderna, em analogia a créditos e débitos (GARBI, 2010). Outra contribuição dada por Cardano foi como uma equação cúbica, com o termo quadrático não nulo, pode ser transformada na forma apresentada por del Ferro.

Como sugere Boyer e Merzbach (2012), a equação $x^3 = 15x + 4$ intrigou profundamente Cardano. Ao utilizar a fórmula, ele obteve

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

como uma das soluções. Ele sabia que 4 era solução dessa equação cúbica, porém não conseguiu explicar o discriminante negativo da raiz quadrada, nem como x seria igual a 4. Esse fato o incomodou ao ponto de concluir que raízes quadradas de números negativos eram tão sutis quanto inúteis (BOYER; MERZBACH, 2012).

Cardano operou com as raízes negativas em outras oportunidades, como no problema que pode ser enunciado por: divida um segmento com comprimento de 10 unidades em duas partes cujo produto seja 40 (BOYER; MERZBACH, 2012). Esse problema pode ser modelado por meio da equação $x^2 + 40 = 10x$. Ao colocar de lado, em suas palavras, as torturas mentais envolvidas (NAHIN, 1998), Cardano obteve as soluções:

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{e} \quad 5 - \sqrt{-15}.$$

Mesmo sabendo que $\sqrt{-15}$ nada significa em \mathbb{R} , é possível perceber, com facilidade, que, de fato: $x_1 + x_2 = 10$ e $x_1x_2 = 40$.

Rafael Bombelli (1526-1572), outro italiano que deixou seu nome eternizado neste enredo, enfrentou o mistério envolto da equação $x^3 = 15x + 4$, no livro *L'algebra, parte maggiore dell'aritmetica* (1572). Bombelli mostrou, ao fazer algumas manipulações algébricas, que:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2 + \sqrt{-11}} &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-11}} &= \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 2 - \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4.$$

A descoberta de Bombelli contribuiu na legitimação das raízes negativas, ao justificar como uma solução real pode ser obtida por caminhos complexos. Todavia, no lado prático, a abordagem de Bombelli não ajuda a resolver equações cúbicas, e sim apenas a validar as “soluções” obtidas (BOYER; MERZBACH, 2012).

3.1 O corpo dos números complexos

Os números complexos, denotado por \mathbb{C} , é o conjunto de todos pares ordenados (x, y) , em que x e y são reais, com as operações de adição e multiplicação definidas, respectivamente, por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ e}$$

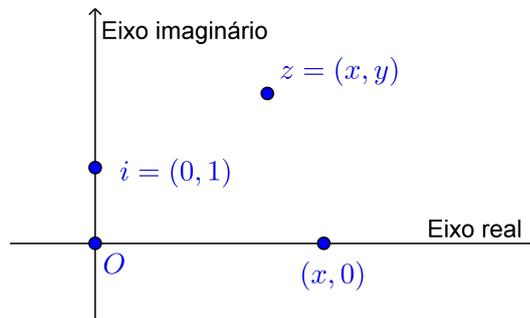
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Nesta representação, o eixo das abcissas $(x, 0)$ e eixo das ordenadas $(0, y)$ passam a ser denominados, respectivamente, eixo real e eixo imaginário, sendo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ chamado de plano complexo. Pela definição das operações, fica claro que o conjunto dos números complexos inclui os números reais como subconjunto, já que

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \text{ e}$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Figura 3.1 – Plano complexo.



Fonte: O autor (2022).

Identificando um número real x por $(x, 0)$ e i , denotado unidade imaginária, por $(0, 1)$, um número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito como

$$z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot i.$$

O produto $i \cdot i = i^2$ é particularmente interessante, visto que resulta

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Assim, $i^2 = -1$, ou ainda, $i = \sqrt{-1}$.

Por causa da identificação $(x, y) = x + y \cdot i$, ou apenas $x + yi$, as operações de adição e multiplicação, bem como a condição de igualdade, podem ser reescritas, tomando os elementos do conjunto dos números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ como segue:

- Igualdade: $z = w$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$;
- Adição: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
- Multiplicação: $zw = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Com relação à adição e à multiplicação, são válidas as propriedades:

1. Associatividade.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ e } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

2. Comutatividade.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ e } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3. Existência do elemento neutro.

$$\exists e_a \in \mathbb{C} \text{ tal que } z + e_a = z, \forall z \in \mathbb{C}. \text{ De fato, } e_a = 0 + 0i.$$

$$\exists e_m \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \cdot e_m = z, \forall z \in \mathbb{C}. \text{ Com efeito, } e_m = 1 + 0i.$$

4. Existência do inverso.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C} \text{ tal que } z + z' = e_a. \text{ Ou seja, } z' = -a - bi.$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exists z'' \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \cdot z'' = e_m. \text{ Isto é, } z'' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

5. Distributividade do produto em relação à soma.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Pelo fato do conjunto \mathbb{C} ser uma estrutura algébrica que goza das propriedades acima, ele é um *corpo*.

3.1.1 Forma algébrica

Um número complexo qualquer está na forma algébrica quando é escrito na forma $a + bi$ com a e b reais. Seja $z = a + bi$. O número a é chamado de parte real de z , indicado por $Re(z) = a$. O número b é chamado de parte imaginária, denotado por $Im(z) = b$. Assim, $z = Re(z) + i \cdot Im(z)$.

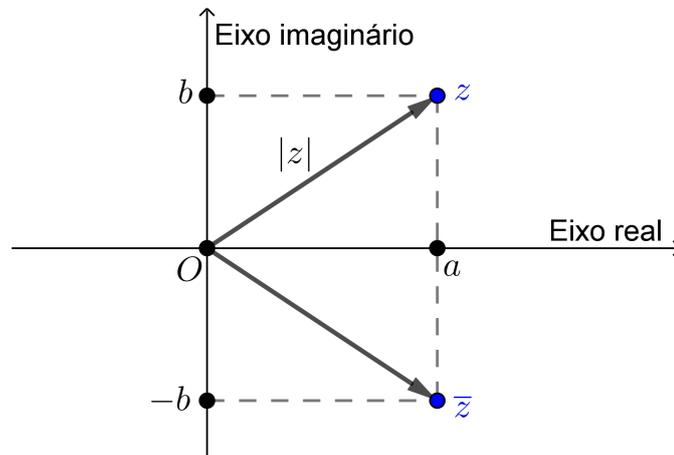
Vale destacar que se a parte imaginária for nula, o complexo é dito real ($z = a$). Se a parte real for nula e a imaginária não, o complexo é chamado imaginário puro ($z = bi$).

Definição 3.1. O conjugado do número complexo $z = a + bi$, denotado por \bar{z} , é definido como sendo $\bar{z} = Re(z) - i \cdot Im(z)$, isto é, $\bar{z} = a - bi$.

Definição 3.2. O módulo, ou valor absoluto, de $z = a + bi$ é determinado pelo número não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Considere a Figura 3.2, em que é representado z e seu conjugado. É notório que, geometricamente, \bar{z} é simétrico a z em relação ao eixo real e $|z|$, obtido pelo Teorema de Pitágoras, é a distância entre os pontos $z = (a, b)$ e $O = (0, 0)$.

Figura 3.2 – Interpretação geométrica do conjugado de um número complexo.



Fonte: O autor (2022).

Uma das aplicações do conjugado é no algoritmo da divisão de dois números complexos. Para dividir números complexos, basta multiplicar o divisor (não nulo) e o dividendo pelo conjugado do divisor. A forma genérica dessa operação é descrita abaixo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i.$$

Em relação ao conjugado, considerando z e w números complexos, são válidas as seguintes propriedades:

P1) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

P2) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$;

P3) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$;

P4) $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z).i$;

P5) z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$;

P6) O conjugado do conjugado de um número complexo é o próprio número complexo:
 $\overline{\bar{z}} = z$;

P7) O conjugado da soma é a soma dos conjugados: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

P8) O conjugado da diferença é a diferença dos conjugados: $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$;

P9) O conjugado do produto é o produto dos conjugados: $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;

P10) O conjugado de um quociente é o quociente entre os conjugados: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$.

Demonstração. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$.

1.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

2.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}.$$

3.

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\text{Re}(z).$$

4.

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2b \cdot i = 2\text{Im}(z) \cdot i.$$

5.

$$z = a + 0i = a - 0i = \bar{z}.$$

6.

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z.$$

7.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \overline{z - w} &= \overline{(a + bi) - (c + di)} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i \\ &= (a - bi) - (c - di) = \bar{z} - \bar{w}. \end{aligned}$$

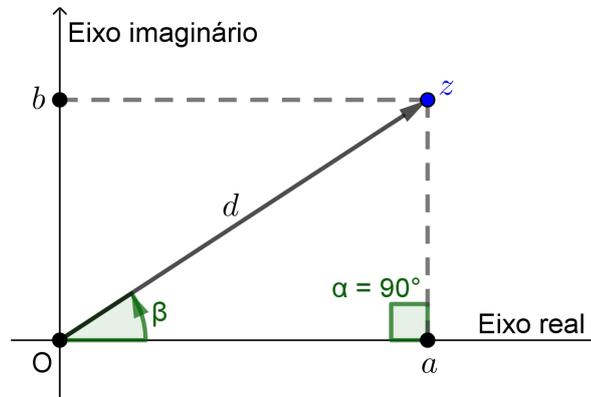
9.

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= ac - bd - adi - bci = (a - bi)(c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}. \end{aligned}$$

10. Seja $u = z/w$, ou ainda, $u \cdot w = z$. Pela propriedade 9, $\bar{u} \cdot \bar{w} = \bar{z}$. Logo, $\bar{u} = \bar{z}/\bar{w}$.

□

3.1.2 Forma polar

Figura 3.3 – Forma polar do número complexo z .

Fonte: O autor (2022).

Um argumento de um número complexo z não nulo é qualquer dos ângulos θ que o vetor \vec{Oz} forma com o eixo real positivo. Assim, dado um argumento de z , digamos θ , todos os ângulos congruentes a ele módulo 2π radianos também serão argumentos de z . Logo, os argumentos de z são todos os ângulos β tais que $\beta \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

Para o argumento de z , será usado a notação $\arg z$. O argumento que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$ é chamado de argumento principal e é representado por $\text{Arg } z$. Na Figura 3.3, $\beta = \text{Arg } z$ e d , pela Definição 3.2, é o módulo de z .

Analisando o plano dos complexos, nota-se que:

$$\cos \beta = \frac{a}{d} \iff a = d \cos \beta, \quad (3.1)$$

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{d} \iff b = d \text{sen } \beta. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) e (3.2) na forma algébrica do número complexo, tem-se:

$$z = d \cos \beta + i \cdot d \text{sen } \beta, \quad \text{ou ainda,} \quad z = d(\cos \beta + i \text{sen } \beta).$$

A forma polar, ou forma trigonométrica, de um número complexo z , não nulo, permite a realização das operações de multiplicação, potenciação, divisão e extração de raízes com mais praticidade, conforme será enunciado nas proposições a seguir.

Proposição 3.3. *Sejam $z_1 = d_1(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)$ e $z_2 = d_2(\cos \beta + i \text{sen } \beta)$. O produto $z_1 \cdot z_2$ é dado por: $d_1 d_2 [\cos(\alpha + \beta) + i \text{sen}(\alpha + \beta)]$.*

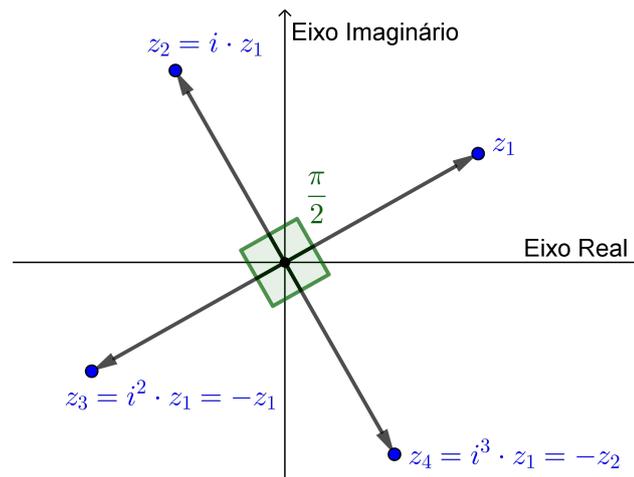
Demonstração.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= d_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot d_2(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \\ &= d_1 d_2 (\cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + i^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) \\ &= d_1 d_2 [(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta)] \\ &= d_1 d_2 [\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

□

Desta forma, o produto de dois números complexos resulta em outro, cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e o argumento é a soma dos argumentos dos fatores, isto é, $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \alpha + \beta$. Em particular, multiplicar um complexo z_1 por i (unidade imaginária) equivale a rotacioná-lo $\pi/2$ radianos no plano complexo, no sentido anti-horário, mantendo o módulo constante.

Figura 3.4 – Rotação dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 em torno da origem.



Fonte: O autor (2022).

Fazendo $z_1 = z_2$, obtém-se $z_1^2 = d_1^2 [\cos(2\beta_1) + i \operatorname{sen}(2\beta_1)]$. Daí, pode-se conjecturar a validade da proposição a seguir, sobre a potenciação de um número complexo.

Proposição 3.4. *Seja $z = d[\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta]$ um número complexo não nulo e n um número inteiro não negativo qualquer. Então, $z^n = d^n [\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)]$.*

Demonstração. Seja $P(n) : z^n = d^n [\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)]$.

Como $z^0 = d^0 [\cos(0\beta) + i \operatorname{sen}(0\beta)] = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$, $P(0)$ é verdadeira.

Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= d^n [\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)] \cdot d [\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)] \\ &= d^n \cdot d [\cos(n\beta + \beta) + i \operatorname{sen}(n\beta + \beta)] \\ &= d^{n+1} [\cos(n+1)\beta + i \operatorname{sen}(n+1)\beta], \end{aligned}$$

o que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. \square

Proposição 3.5. *Sejam $z_1 = d_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $z_2 = d_2(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$. A divisão de z_1 por z_2 , não nulo, é dada por: $d_1/d_2[\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{d_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{d_2(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)} \cdot \frac{d_2(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)}{d_2(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)} \\ &= \frac{d_1 d_2 (\cos \alpha \cos \beta - i \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - i^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)}{d_2^2 (\cos^2 \beta - i^2 \operatorname{sen}^2 \beta)} \\ &= \frac{d_1 [(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)]}{d_2 (\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta)} \\ &= \frac{d_1}{d_2} [\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

\square

Uma das aplicações da proposição acima é a determinação de ângulos formados por três números complexos. Dados dois vetores $\overrightarrow{z_0 z_1}$ e $\overrightarrow{z_0 z_2}$, o ângulo formado por eles, denotado por $\angle(\overrightarrow{z_0 z_1}, \overrightarrow{z_0 z_2})$ é calculado por:

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) = \arg(z_2 - z_0) - \arg(z_1 - z_0).$$

Como o sentido anti-horário foi estabelecido como positivo, então

$$\angle(\overrightarrow{z_0 z_1}, \overrightarrow{z_0 z_2}) = -\angle(\overrightarrow{z_0 z_2}, \overrightarrow{z_0 z_1}).$$

Ainda com a Proposição 3.5, complementemos a demonstração da potenciação para o caso $n < 0$. Como $-n > 0$, pela Proposição 3.4, segue que

$$z^{-n} = d^{-n} [\cos(-n\alpha) + i \operatorname{sen}(-n\alpha)].$$

Daí, resulta que

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{d^{-n} [\cos(-n\alpha) + i \operatorname{sen}(-n\alpha)]} = \frac{1}{d^{-n}} [\cos(0 - (-n\alpha)) + i \operatorname{sen}(0 - (-n\alpha))],$$

em que se conclui que $z^n = d^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$ também vale para todo n inteiro negativo.

Definição 3.6. Um número z_k é raiz n -ésima de um número complexo z se $(z_k)^n = z$.

Proposição 3.7. *Sejam $z = d(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ um número complexo não nulo e um número natural n tal que $n \geq 2$, a raiz enésima de z é dada por*

$$z_k = \sqrt[n]{d} \left[\cos \left(\frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right], \text{ em que } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Seja $z_k = r(\cos \varphi_k + i \operatorname{sen} \varphi_k)$. Pela fórmula da potenciação, $(z_k)^n = z$. Daí,

$$r^n (\cos n\varphi_k + i \operatorname{sen} n\varphi_k) = d(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta).$$

Pela igualdade de dois números complexos na forma polar, os módulos são iguais e os argumentos congruentes. Logo,

$$r^n = d \iff r = \sqrt[n]{d}; \tag{3.3}$$

$$n\varphi_k = \beta + 2k\pi \iff \varphi_k = \frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Portanto, substituindo (3.3) e (3.4) em z_k , segue o resultado da proposição. \square

Algumas considerações a respeito da fórmula da radiciação:

1. Todas as raízes têm o mesmo módulo, pois é $\sqrt[n]{d}$ é constante;
2. Para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, z_k são todos distintos, pois $\frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \equiv \frac{\beta}{n} + j \frac{2\pi}{n} \pmod{2\pi}$, em que j é o resto da divisão euclidiana de k por n ;
3. Por causa do item 2 e pelo fato de que, a partir de n , as raízes se repetem, existem n raízes enésimas de z ;
4. Os argumentos principais de $\sqrt[n]{z}$ formam uma progressão aritmética, em que o primeiro termo e a razão são, respectivamente, $\frac{\beta}{n}$ e $\frac{2\pi}{n}$;
5. As raízes enésimas de z , para $n \geq 3$, dividem a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{d}$ em partes congruentes, isto é, são vértices de um polígono regular de n lados;
6. Aplicando a fórmula para $n = 2$, obtém-se

$$z_0 = \sqrt{d} \left(\cos \frac{\beta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right) \text{ e } z_1 = \sqrt{d} \left[\cos \left(\frac{\beta}{2} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{2} + \pi \right) \right].$$

Da Proposição 3.3, decorre que $z_1 = -z_0$. Assim, a raiz quadrada de um número complexo z , denotado por \sqrt{z} , resulta em dois pontos diametralmente opostos.

Exemplo 3.8. Determine as raízes cúbicas da unidade.

As raízes complexas cúbicas de $z = 1$ têm módulo $\sqrt[3]{1} = 1$ e argumentos principais:

$$\varphi_k = \frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n} = \frac{0}{3} + k \frac{2\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

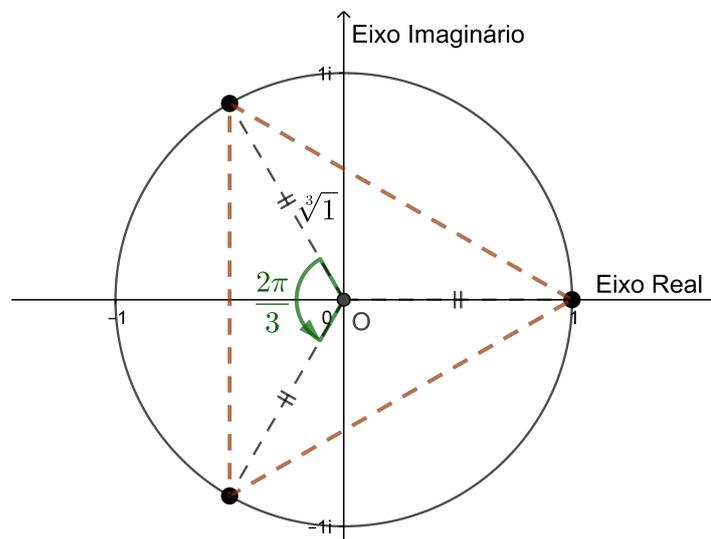
Logo, as raízes cúbicas são:

$$z_0 = \cos\left(0 \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(0 \frac{2\pi}{3}\right) = 1;$$

$$z_1 = \cos\left(1 \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(1 \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2};$$

$$z_2 = \cos\left(2 \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(2 \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Figura 3.5 – Polígono regular formado pelas raízes cúbicas de $z = 1$.



Fonte: O autor (2022).

Definição 3.9. O número complexo de módulo r e argumento θ será denotado também por $r \operatorname{cis} \theta$.

Proposição 3.10. A equação $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tem uma ou duas raízes geométricas em \mathbb{C} .

Demonstração. Temos que

$$x^2 + \alpha x + \beta = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}.$$

Seja $\Delta = \alpha^2 - 4\beta \in \mathbb{C}$. Pelo item (6) da Proposição 3.7, existem δ e $-\delta$ em \mathbb{C} tais que $\delta^2 = \Delta$. Escrevendo $\delta = \sqrt{\Delta}$, e conseqüentemente, $-\delta = -\sqrt{\Delta}$, a equação proposta

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2 - 4\beta}{4} = 0$$

é equivalente a

$$x + \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

As soluções podem ser escritas como

$$x_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2},$$

em que $\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$ é uma das raízes da equação $x^2 = \alpha^2 - 4\beta$. Assim, caso $\Delta = 0$, a equação dada tem duas raízes iguais. Caso o contrário, duas raízes diferentes. \square

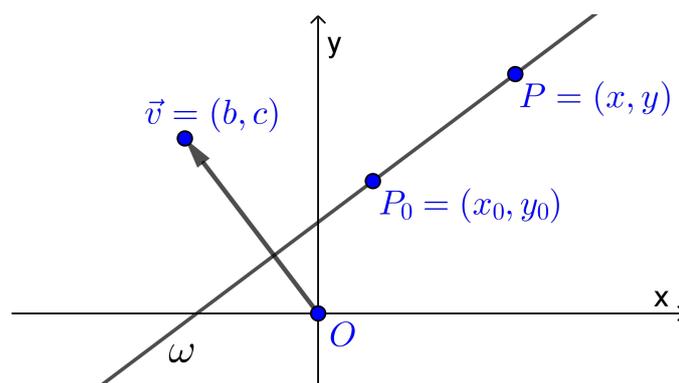
3.2 Geometria da reta e do círculo no plano complexo

Seja a reta ω que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor não nulo $\vec{v} = (b, c)$. Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer sobre ω , então tem-se o produto interno:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \overrightarrow{P_0P} \rangle &= 0 \\ \langle (b, c), (x - x_0, y - y_0) \rangle &= 0 \\ b(x - x_0) + c(y - y_0) &= 0 \\ bx + cy + (-bx_0 - cy_0) &= 0. \end{aligned}$$

Definindo $d = -bx_0 - cy_0$, resulta em $bx + cy + d = 0$. Como \vec{v} é não nulo, $b^2 + c^2 \neq 0$.

Figura 3.6 – Reta que passa pelo ponto P_0 e é perpendicular ao vetor não nulo \vec{v} .

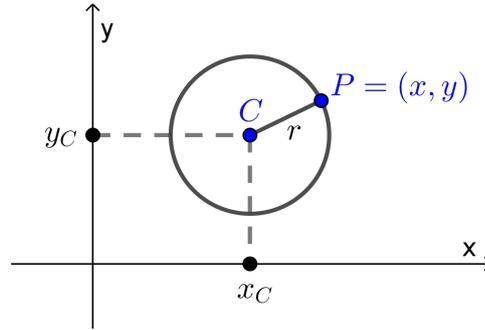


Fonte: O autor (2022).

O círculo de centro $C = (x_C, y_C)$ e raio $r > 0$ é o conjunto formado pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $\overline{CP} = r$, conforme ilustrado na Figura 3.7. Pelo Teorema de Pitágoras, a equação geral é dada por

$$\begin{aligned}
 (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= r^2 \\
 x^2 - 2x_Cx + x_C^2 + y^2 - 2y_Cy + y_C^2 &= r^2 \\
 x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Figura 3.7 – Círculo de centro C e raio r .



Fonte: O autor (2022).

A fim de estabelecer uma relação com a equação geral da reta, a equação geral do círculo será reescrita na forma, $ax^2 + a'y^2 + bx + cy + d = 0$, em que $a \neq 0$, ou ainda, $x^2 + \frac{a'}{a}y^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}y + \frac{d}{a} = 0$. Comparando esta última equação com (3.5), segue que:

$$\begin{aligned}
 \frac{a'}{a} = 1 &\Rightarrow a = a', & \frac{b}{a} = -2x_C &\Rightarrow x_C = \frac{-b}{2a}, & \frac{c}{a} = -2y_C &\Rightarrow y_C = \frac{-c}{2a}, \\
 \frac{d}{a} = x_C^2 + y_C^2 - r^2 &= \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-c}{2a}\right)^2 - r^2 &\Rightarrow r^2 &= \frac{-d}{a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2}.
 \end{aligned}$$

Assim, a equação do círculo também pode ser escrita como $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$. É imediata a restrição $b^2 + c^2 - 4ad > 0$ e que o círculo tem centro e raio, respectivamente:

$$C = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-c}{2a} \right) \quad \text{e} \quad r = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}}{2|a|}.$$

Da Geometria Analítica, segue que as equações das retas e dos círculos no plano \mathbb{R}^2 , em função das coordenadas x e y são, respectivamente:

$$bx + cy + d = 0, \quad \text{em que } b^2 + c^2 > 0 \quad \text{e} \tag{3.6}$$

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad \text{em que } a \neq 0 \text{ e } b^2 + c^2 - 4ad > 0. \tag{3.7}$$

Analisando as duas equações, (3.6) e (3.7), e suas restrições, conclui-se que elas podem ser unificadas, na forma abaixo, em que se $a = 0$ trata-se de uma reta, caso contrário, de um círculo:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \text{ em que } b^2 + c^2 - 4ad > 0. \quad (3.8)$$

A equação 3.8, em função das coordenadas reais x e y do plano \mathbb{R}^2 , pode ser “transportada” para coordenadas complexas z e \bar{z} , por meio da substituição:

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{i\bar{z} - iz}{2}, \quad (3.9)$$

em que resulta

$$\begin{aligned} a|z|^2 + b\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + c\left(\frac{i\bar{z} - iz}{2}\right) + d &= 0 \\ a|z|^2 + \frac{b - ci}{2}z + \frac{b + ci}{2}\bar{z} + d &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $A = a$, $B = \frac{b - ci}{2}$ e $D = d$, segue que $A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + D = 0$, doravante denominada equação do círculo generalizado, em que A e D são obviamente reais e B um número complexo. Como $|B|^2 = B \cdot \bar{B} = \frac{b^2 + c^2}{4}$, a restrição $b^2 + c^2 - 4ad > 0$ é equivalente a $|B|^2 - AD > 0$. Com as novas notações utilizadas, o centro e o raio do círculo, caso $A \neq 0$, são dados por:

$$C = \left(\frac{-B - \bar{B}}{2A}, \frac{B - \bar{B}}{2iA} \right) \quad \text{e} \quad r = \frac{\sqrt{|B|^2 - AD}}{|A|}. \quad (3.10)$$

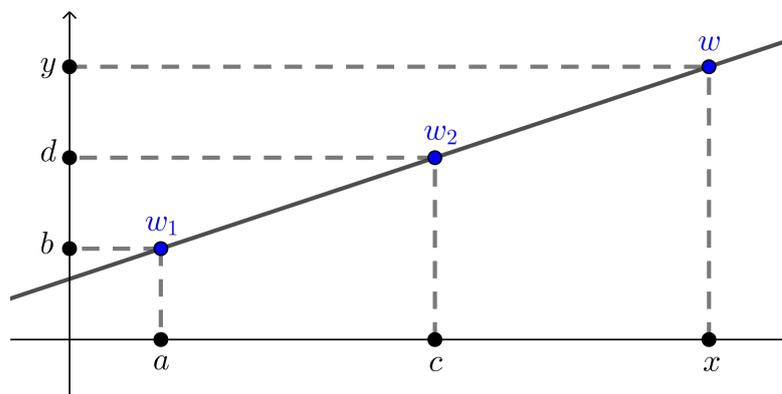
A restrição $|B|^2 - AD > 0$, com $A \neq 0$, garante que o círculo é *real*, ou seja, com $r > 0$. Se $|B|^2 - AD = 0$, então $r = 0$, caso denotado *círculo degenerado*. Como adentramos no “mundo” dos complexos, é interessante observar que se $|B|^2 - AD < 0$, então $r < 0$, em que será chamado *círculo imaginário*.

Exemplo 3.11. Determine a equação da reta no plano complexo que passa pelos pontos $w_1 = a + bi$ e $w_2 = c + di$, em que $w_1 \neq w_2$.

Conforme a Figura 3.8, a condição necessária e suficiente para que três pontos sejam colineares é dada por

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{d - b}{c - a}, \text{ ou ainda, } (y - b)(c - a) = (x - a)(d - b). \quad (3.11)$$

Figura 3.8 – Colinearidade de três pontos.



Fonte: O autor (2022).

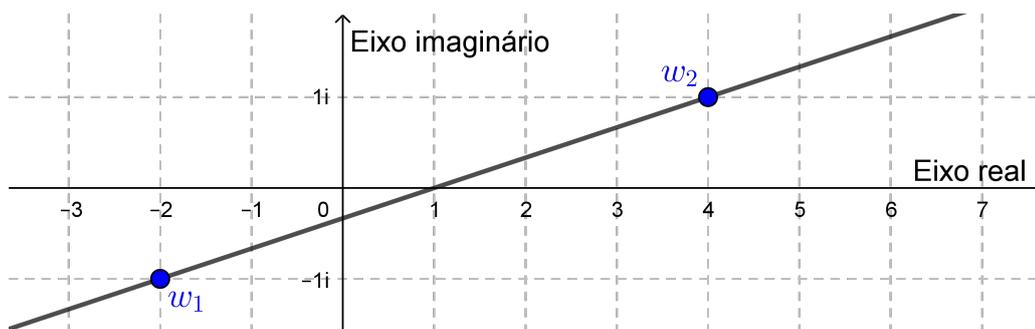
Substituindo x e y pela igualdade em (3.9), decorre que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\bar{z} - iz}{2} - b\right)(c - a) &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2} - a\right)(d - b) \\ (i\bar{z} - iz - 2b)(c - a) &= (z + \bar{z} - 2a)(d - b) \\ i(c - a)\bar{z} - i(c - a)z - 2b(c - a) &= (d - b)z + (d - b)\bar{z} - 2a(d - b) \\ (-d - ci + b + ai)z + (-d + ci + b - ai)\bar{z} + 2(-bc + ab + ad - ab) &= 0 \\ ((b + ai) - (d + ci))z + ((b - ai) - (d - ci))\bar{z} + 2(ad - bc) &= 0 \\ -i\overline{(w_1 - w_2)}z - i(w_1 - w_2)\bar{z} + 2(ad - bc) &= 0. \end{aligned}$$

Considere $w_1 = -2 - i$ e $w_2 = 4 + i$. Realizando os devidos cálculos, obtém-se a equação da reta em \mathbb{C} , ilustrada na Figura 3.9:

$$(-1 - 3i)z + (-1 + 3i)\bar{z} + 2 = 0.$$

Figura 3.9 – Reta que passa pelos pontos $w_1 = -2 - i$ e $w_2 = 4 + i$.



Fonte: O autor (2022).

Exemplo 3.12. Determine o centro e o raio do círculo cuja equação é dada por: $2|z|^2 + (2 + 3i)z + (2 - 3i)\bar{z} - 6 = 0$.

Nas notações da equação generalizada do círculo em \mathbb{C} , tem-se que $A = 2$, $B = 2 + 3i$ e $D = -6$. Pelas equações 3.10, segue que

$$C = \left(\frac{-B - \bar{B}}{2A}, \frac{B - \bar{B}}{2iA} \right) = \left(\frac{-(2 + 3i) - (2 - 3i)}{4}, \frac{(2 + 3i) - (2 - 3i)}{2i \cdot 2} \right) = \left(-1, \frac{3}{2} \right)$$
$$r = \frac{\sqrt{|B|^2 - AD}}{|A|} = \frac{\sqrt{13 - 2(-6)}}{|2|} = \frac{5}{2}.$$

Logo, o referido círculo tem centro $-1 + \frac{3}{2}i$ e raio $\frac{5}{2}$.

4 Transformações no plano complexo

Seja D um conjunto de números complexos e seja f uma lei que faz corresponder cada elemento z do conjunto D um único número complexo, denotado por $f(z)$. Nestas condições, diz-se que f é uma função com domínio D . O conjunto I dos valores $w = f(z)$, correspondentes a todos os valores de z em D , é chamado a imagem de D pela função f (ÁVILA, 2015). Neste trabalho, os domínios de interesse serão \mathbb{C} , $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sendo este último estabelecido na Seção 4.2. Estaremos particularmente interessados nas imagens dos círculos generalizados geradas por uma classe especial de funções.

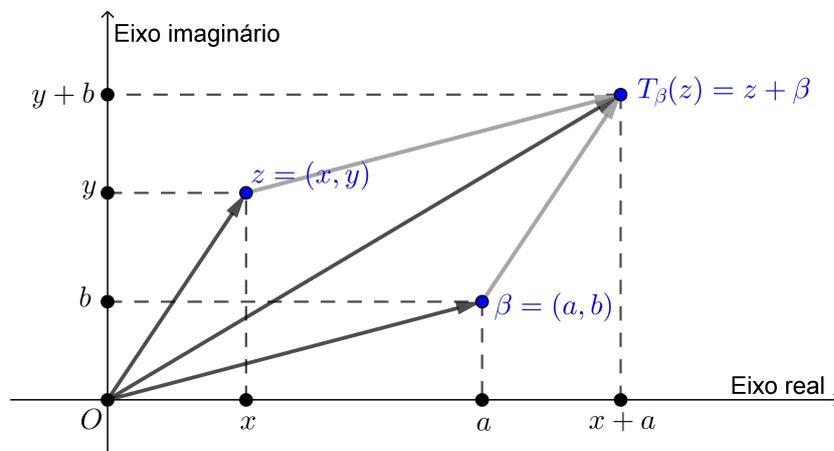
4.1 Transformações elementares no plano complexo

Baseado em Hefez e Villela (2018), serão abordadas nesta seção as transformações elementares.

Definição 4.1. Seja $\beta \in \mathbb{C}$ fixo. A transformação $T_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada translação por β , é definida por $T_\beta(z) = z + \beta$.

Sejam z_1 e z_2 números complexos. Como $T_\beta(z_1) = T_\beta(z_2)$ implica $z_1 = z_2$, T_β é injetora. Note também que para cada número complexo w , existe um único número complexo z tal que $w = T_\beta(z) = z + \beta$, a saber, $z = w - \beta$, o que garante a sobrejetividade de T_β . Portanto, T_β é uma bijeção. A figura abaixo ilustra a interpretação geométrica da translação de $z = x + yi$ por $\beta = a + bi$.

Figura 4.1 – Translação de z por β .



Fonte: O autor (2022).

Intuitivamente, é imediato que a translação leva círculos em círculos e retas em retas. Mostraremos este fato algebricamente, pela substituição $z = w - \beta$ na equação generalizada do círculo em \mathbb{C} .

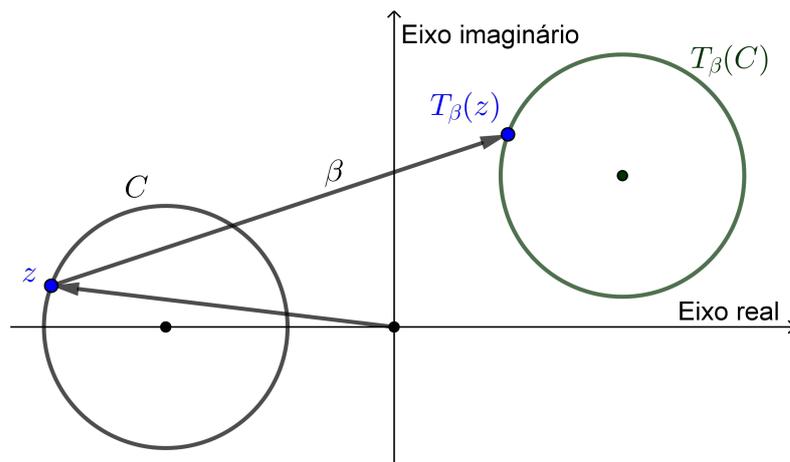
$$\begin{aligned} A|z|^2 + Bz + \overline{B}z + D &= 0 \\ A|w - \beta|^2 + B(w - \beta) + \overline{B}(\overline{w - \beta}) + D &= 0 \\ A(w - \beta)(\overline{w - \beta}) + B(w - \beta) + \overline{B}(\overline{w - \beta}) + D &= 0 \\ A|w|^2 + A(-w\overline{\beta} - \overline{w}\beta + |\beta|^2) + B(w - \beta) + \overline{B}(\overline{w - \beta}) + D &= 0 \\ A|w|^2 + (-A\overline{\beta} + B)w + (-A\beta + \overline{B})\overline{w} + (A|\beta|^2 - B\beta - \overline{B}\beta + D) &= 0. \end{aligned}$$

A equação encontrada é também de um círculo generalizado no plano complexo. Calculemos, agora, a expressão que aponta a *natureza do círculo*, caso $A \neq 0$, isto é, se o mesmo é real, degenerado ou imaginário.

$$\begin{aligned} &| -A\overline{\beta} + B|^2 - A(A|\beta|^2 - B\beta - \overline{B}\beta + D) \\ &= A^2|\beta|^2 - A\overline{B}\beta - AB\beta + |B|^2 - A^2|\beta|^2 + AB\beta + A\overline{B}\beta - AD \\ &= |B|^2 - AD. \end{aligned}$$

Como esperado, a expressão $|B|^2 - AD$ é invariante para a translação, visto que esta transformação apenas desloca os círculos no plano. A Figura 4.2 apresenta a translação do conjunto dos pontos que formam o círculo C pelo vetor β . As retas, por sua vez, caso $A = 0$, são transformadas em outras retas.

Figura 4.2 – Translação do círculo C por β .



Fonte: O autor (2022).

Definição 4.2. Seja r um número real positivo. A transformação $H_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada homotetia com fator r , é definida por $H_r(z) = rz$.

A função H_r é claramente injetora. Note que para cada $w \in \mathbb{C}$, existe um único $z \in \mathbb{C}$ tal que $w = rz$. Com efeito, $z = \frac{1}{r}w$. Portanto, H_r é uma bijeção de \mathbb{C} . Investiguemos o que ocorre quando um círculo é transformado por H_r , pela substituição $z = \frac{1}{r}w$:

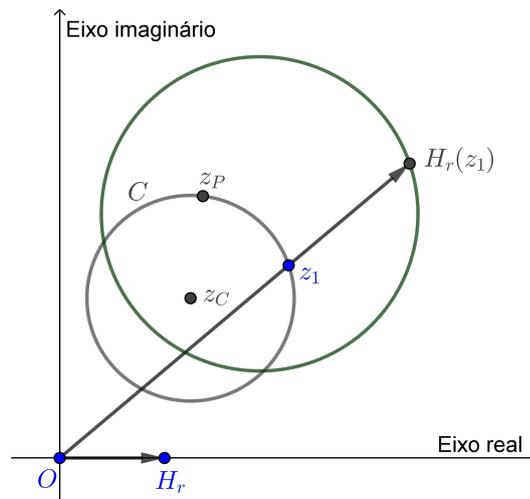
$$\begin{aligned} A|z|^2 + Bz + \overline{B}\overline{z} + D &= 0 \\ A\left|\frac{1}{r}w\right|^2 + B\left(\frac{1}{r}w\right) + \overline{B}\left(\overline{\frac{1}{r}w}\right) + D &= 0 \\ \frac{A}{r^2}|w|^2 + \frac{B}{r}w + \frac{\overline{B}}{r}\overline{w} + D &= 0. \end{aligned}$$

A imagem gerada, por H_r , é de outro círculo. Agora, segue que

$$\left|\frac{B}{r}\right|^2 - \frac{A}{r^2}D = \frac{1}{r^2}(|B|^2 - AD),$$

isso mostra que o novo círculo é deformado quando $r \neq 1$. De fato, caso $r > 1$, a transformação homotetia é uma dilatação de $|z|$. Quando $0 < r < 1$, $|z|$ sofre uma contração. Retas que passam pela origem são invariantes para a homotetia.

Figura 4.3 – Homotetia do círculo C pelo fator r .



Fonte: O autor (2022).

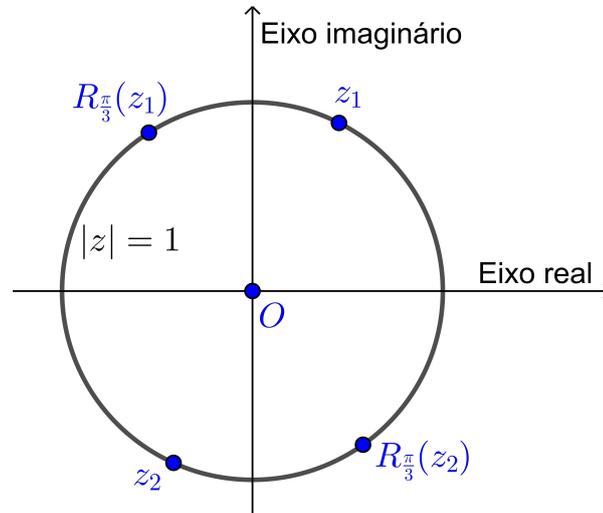
Definição 4.3. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. A transformação $R_\theta(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada rotação de θ radianos, é definida por $R_\theta(z) = (\text{cis } \theta)z$.

Como, para cada $w \in \mathbb{C}$, $z = (\text{cis } \theta)^{-1}w = (\overline{\text{cis } \theta})w$ é o único número complexo tal que $R_\theta(z) = w$, temos que R_θ é uma bijeção em \mathbb{C} . Analisemos, a seguir, o efeito da transformação do círculo por R_θ .

$$\begin{aligned} A|z|^2 + Bz + \overline{B}\overline{z} + D &= 0 \\ A|\overline{\text{cis } \theta} \cdot w|^2 + B(\overline{\text{cis } \theta} \cdot w) + \overline{B}(\overline{\overline{\text{cis } \theta} \cdot w}) + D &= 0 \\ A|w|^2 + (B\overline{\text{cis } \theta})w + (\overline{B} \text{cis } \theta)\overline{w} + D &= 0. \end{aligned}$$

Como $|\overline{B} \operatorname{cis} \theta|^2 - AD = |B|^2 - AD$, a rotação de um círculo não o deforma. A Figura 4.4 enfatiza que a rotação de um círculo centrado na origem resulta nele mesmo.

Figura 4.4 – Rotação de um círculo centrado na origem.



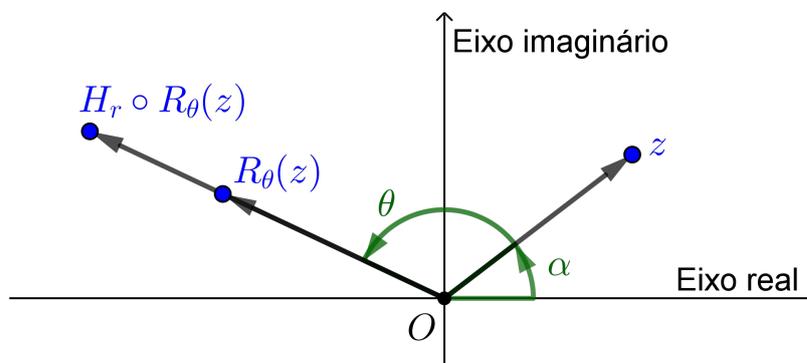
Fonte: O autor (2022).

Definição 4.4. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número complexo não nulo. Definamos a multiplicação por α como sendo a transformação $H_\alpha(z) = \alpha z$.

O domínio de H_α é \mathbb{C} . A transformação H_α é bijetiva e a sua inversa é $H_\alpha^{-1}(z) = \frac{1}{\alpha}z$. Como a multiplicação entre números complexos é comutativa, as funções homotetia e rotação podem ser unificadas:

$$H_\alpha = H_r \circ R_\theta = R_\theta \circ H_r.$$

Figura 4.5 – Composição da rotação e homotetia.



Fonte: O autor (2022).

Definição 4.5. A transformação $J(z) = \frac{1}{z}$ denomina-se inversão.

O domínio de J é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e a sua inversa é a própria transformação J . Esta foi a primeira transformação à qual tivemos de impor uma restrição no domínio. Observe que à medida que $|z|$ se aproxima de zero, $|J(z)|$ tende a infinito. Por outro lado, quando $|z|$ tende a infinito, $|J(z)|$ se aproxima de 0. Este fato motivará a ampliação do domínio na próxima seção.

Para melhor entendimento da inversão, vamos decompô-la como composta de duas transformações, isto é, a conjugação e a inversão em relação ao círculo unitário.

Definição 4.6. A transformação $conj : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, chamada conjugação, é definida por $conj(z) = \bar{z}$.

Definição 4.7. Seja $z = |z| \operatorname{cis} \theta$. A transformação inversão em relação ao círculo unitário $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é definida por

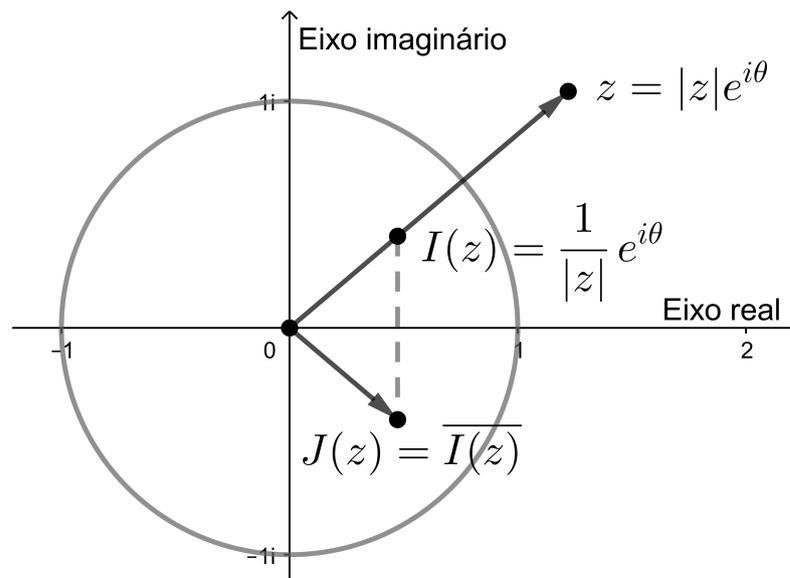
$$I(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} \operatorname{cis} \theta,$$

que leva z no número complexo com mesmo argumento e com módulo igual ao inverso multiplicativo de $|z|$.

Retornando à inversão J , segue que

$$J(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \overline{I(z)}.$$

Figura 4.6 – Inversão do vetor z em relação ao círculo unitário.



Fonte: O autor (2022).

Observando a Figura 4.6, um ponto exterior ao círculo unitário centrado na origem, $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, é levado, por J , em um ponto não nulo no interior de S^1 e vice-versa.

Cada ponto pertencente a S^1 é mapeado em S^1 . Em linguagem matemática, as funções $d : \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |z| < 1\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$ e $i : S^1 \longrightarrow S^1$, ambas definidas por $\frac{1}{z}$, são bijetivas.

Diferentemente do que acontece com as outras transformações, a inversão é capaz de mudar a natureza dos círculos significativamente. Denotaremos por z a coordenada complexa no domínio de J e por w a coordenada do seu contradomínio. Considere o círculo generalizado em \mathbb{C} ,

$$A|z|^2 + Bz + \overline{B}z + D = 0. \quad (4.1)$$

Dividindo a equação acima por $|z|^2 = z \cdot \overline{z} \neq 0$, resulta

$$A + B \frac{z}{z \cdot \overline{z}} + \overline{B} \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} + D \frac{1}{|z|^2} = 0.$$

Fazendo $\frac{1}{z} = w$, obtém-se, conseqüentemente, $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{w}$ e $\frac{1}{|z|^2} = |w|^2$, o que resulta em

$$A + B\overline{w} + \overline{B}w + D|w|^2 = 0, \text{ ou ainda, } A'|w|^2 + B'w + \overline{B'}\overline{w} + D' = 0,$$

em que $A' = D, B' = \overline{B}$ e $D' = A$. Esta é também a equação de um círculo, no sentido amplo, no plano de coordenada complexa w .

- Se a Equação (4.1) representa um círculo que não passa pela origem, isto é, $A \neq 0$ e $D \neq 0$ (ou, em outras palavras, $z = 0$ não pertence ao conjunto solução), então sua imagem J também é um círculo que não passa pela origem.
- Se a Equação (4.1) representa um círculo que passa pela origem, isto é, $A \neq 0, D = 0$ e $B \neq 0$, então sua imagem J é uma reta que não passa pela origem.
- Se a Equação (4.1) representa uma reta que não passa pela origem, ou seja, $A = 0, D \neq 0$ e $B \neq 0$, então sua imagem J é círculo que passa pela origem.
- Se a Equação (4.1) representa uma reta que passa pela origem, ou seja, $A = 0, D = 0$ e $B \neq 0$, então sua imagem J é uma reta que passa pela origem.

4.2 Transformações de Möbius

Uma transformação de Möbius é uma função racional da forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ em que } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

A condição $ad - bc \neq 0$ garante que o domínio de f , denotado por $D(f)$, não é vazio nem unitário. De fato, $D(f) = \emptyset$ se, e somente se, $cz + d = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, o

que equivale a $c = d = 0$, o que implica $ad - bc = 0$. Multiplicando os coeficientes a, b, c, d por $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tem-se:

$$\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = f(z), \text{ em que, } a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c \text{ e } d' = \lambda d.$$

Definição 4.8. Uma transformação de Möbius $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ está normalizada se $ad - bc = 1$.

Como $a'd' - b'c' = \lambda^2(ad - bc) \neq 0$, caso a transformação não esteja normalizada, basta multiplicá-la por $(\sqrt{ad - bc})^{-1}$. Por causa da raiz quadrada de um número não nulo em \mathbb{C} ter dois valores distintos, a normalização não é única. As transformações elementares são casos particulares das transformações de Möbius:

- A translação $T_\beta(z) = z + \beta, \beta \in \mathbb{C}$, corresponde a $a = 1, b = \beta, c = 0$ e $d = 1$;
- A multiplicação por $\alpha \neq 0$: $H_\alpha(z) = \alpha z, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, corresponde a $a = \alpha, b = 0, c = 0$ e $d = 1$;
- A inversão $J(z) = \frac{1}{z}$ corresponde a $a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$.

Proposição 4.9. *Toda transformação de Möbius é injetora.*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in D(f)$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Leftrightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\ &\Leftrightarrow (az_1 + b)(cz_2 + d) = (cz_1 + d)(az_2 + b) \\ &\Leftrightarrow \underline{acz_1z_2} + adz_1 + bcz_2 + bd = \underline{acz_1z_2} + bcz_1 + adz_2 + bd \\ &\Leftrightarrow (ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2, \end{aligned}$$

o que implica, quando $ad - bc \neq 0$, que f é injetora. □

Proposição 4.10. *Toda transformação de Möbius é sobrejetora.*

Demonstração. A prova será dividida em dois casos:

- Caso $c = 0$: Pela restrição $ad - bc \neq 0$, segue que $a \neq 0$ e $d \neq 0$. Dado $w \in \mathbb{C}$, provemos que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = w$:

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{d} = w &\Rightarrow az + b = dw \\ &\Rightarrow az = dw - b \\ &\Rightarrow z = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

É imediato que $D(f) = \mathbb{C}$ e f é sobrejetora.

- Caso $c \neq 0$: Como $cz + d \neq 0$, $D(f) = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$.

Dado $w \in \mathbb{C}$, provemos que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = w$:

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} = w &\Rightarrow az + b = w(cz + d) \\ &\Rightarrow (a - cw)z = dw - b \\ &\Rightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a} \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $f : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ é sobrejetora.

□

Para realizar composições de transformações de Möbius, no caso $c \neq 0$, existem, como visto acima, pontos do plano complexo que, por não estarem no domínio ou na imagem, são problemáticos. Desta forma, para evitar uma série de restrições, será definido o plano complexo completado, denotado por $\hat{\mathbb{C}}$, e definido por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Assim, a transformação de Möbius $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, para cada $z \in \mathbb{C}$, com $ad - bc \neq 0$ é uma bijeção em que:

$$\begin{cases} f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ e } f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, & \text{se } c \neq 0; \\ f(\infty) = \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No caso $c = 0$, podemos escrever, fazendo $\alpha = \frac{a}{d}$ e $\beta = \frac{b}{d}$, $f(z) = \alpha z + \beta$. Logo, é imediato que $f = T_\beta \circ H_\alpha$. No caso $c \neq 0$, tem-se que

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\left[\frac{a}{c} \left(z + \frac{d}{c} \right) - \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{c} \right] + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c} \left(z + \frac{d}{c} \right) + \frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Fazendo agora $\alpha = \frac{bc - ad}{c^2}$, $\beta = \frac{a}{c}$ e $\gamma = \frac{d}{c}$, segue que

$$f = T_\beta \circ H_\alpha \circ J \circ T_\gamma.$$

Portanto, toda transformação de Möbius é obtida por composição de translações, multiplicação por um número complexo e inversão.

Proposição 4.11. *A composição de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius.*

Demonstração. Sejam $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ e $g(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$ transformações de Möbius. Daí, $ad - bc \neq 0$ e $a'd' - b'c' \neq 0$. Calculemos $f \circ g$:

$$f(g(z)) = \frac{a \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + b}{c \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + d} = \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}.$$

Cabe, agora, analisar a validade da restrição.

$$\begin{aligned} & (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\ &= aea'b' + ada'd' + bcb'c' + bdc'd' - aca'b' - adb'c' - bca'd' - bdc'd' \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. \square

Proposição 4.12. *Toda transformação de Möbius é invertível.*

Demonstração. Como toda função bijetora é invertível, segue das Proposições 4.9 e 4.10, bem como da ampliação do domínio de \mathbb{C} que

No caso $c = 0$,

$$f^{-1}(z) = \frac{d}{a}z - \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad f^{-1}(\infty) = \infty.$$

No caso $c \neq 0$,

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}, \quad f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \quad \text{e} \quad f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

\square

Definição 4.13. Um elemento $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ é chamado de um *ponto fixo* da transformação de Möbius se, e somente se, $f(z_0) = z_0$.

Proposição 4.14. *Uma transformação de Möbius, distinta da identidade, tem um ou dois pontos fixos em $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$. Os pontos fixos de f em \mathbb{C} , conforme a Definição 4.13, são as soluções da equação

$$\frac{az + b}{cz + d} = z.$$

Novamente a demonstração será dividida em dois casos.

- Caso $c = 0$: Como $f(\infty) = \infty$, qualquer outro ponto fixo deve satisfazer

$$f(z) = \frac{az + b}{d} = z, \quad \text{ou ainda, } (a - d)z = -b, \quad \text{que em } \mathbb{C} :$$

- a) tem infinitas soluções quando $a = d$ e $b = 0$;
 - b) não tem solução, quando $a = d$ e $b \neq 0$;
 - c) tem solução única $z = \frac{b}{d-a}$, quando $a \neq d$.
- Caso $c \neq 0$: Como $f(\infty) = \frac{a}{c}$, segue que ∞ não é ponto fixo f . Portanto, pontos fixos de f são as raízes da equação quadrática

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0, \quad (4.2)$$

que tem, pela Proposição 3.10, uma ou duas raízes em \mathbb{C} .

Assim fica provada a proposição para os dois casos. Se a transformação tiver mais de dois pontos fixos, trata-se então de $f(z) = z$. \square

Exemplo 4.15. ∞ é o único ponto fixo da transformação de Möbius f se, e somente se, $f(z) = z + \beta$, em que $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Para se convencer disso, basta retornar a Proposição 4.14, caso $c = 0$, item b, em que f não tem solução em \mathbb{C} se, e somente se $a = d$ e $b \neq 0$, o que equivale ao enunciado acima.

Proposição 4.16. *Se duas transformações de Möbius possuem as mesmas imagens em três pontos distintos do plano complexo completado, então essas transformações são iguais.*

Demonstração. Sejam f e g duas transformações de Möbius tais que $f(z_1) = g(z_1)$, $f(z_2) = g(z_2)$ e $f(z_3) = g(z_3)$ em que z_1, z_2, z_3 são pontos distintos do conjunto $\hat{\mathbb{C}}$. Logo,

$$(g^{-1} \circ f)(z_1) = g^{-1}(f(z_1)) = g^{-1}(g(z_1)) = z_1.$$

Analogamente, $(g^{-1} \circ f)(z_2) = z_2$ e $(g^{-1} \circ f)(z_3) = z_3$, o que resulta que a transformação de Möbius $g^{-1} \circ f$ tem três pontos fixos. Mas, pela Proposição 4.14, uma transformação com mais de dois pontos fixos só pode ser a identidade, em que se conclui que $f = g$. \square

4.2.1 Razão cruzada e determinação de uma transformação de Möbius

Dados três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$, a razão cruzada entre esses pontos é definida por

$$[z_1, z_2, z_3, z] = g(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}.$$

Nota-se que g é claramente uma transformação de Möbius em que $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$ e $g(z_3) = \infty$. Se um dos pontos z_1, z_2, z_3 for igual a ∞ , a definição continua válida desde

que os fatores nos quais $z_i = \infty$ aparecem, com $i = 1, 2, 3$, sejam suprimidos. Em resumo:

$$g(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \text{ se } z_1 = \infty, z_2, z_3 \in \mathbb{C};$$

$$g(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \text{ se } z_2 = \infty, z_1, z_3 \in \mathbb{C};$$

$$g(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ se } z_3 = \infty, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

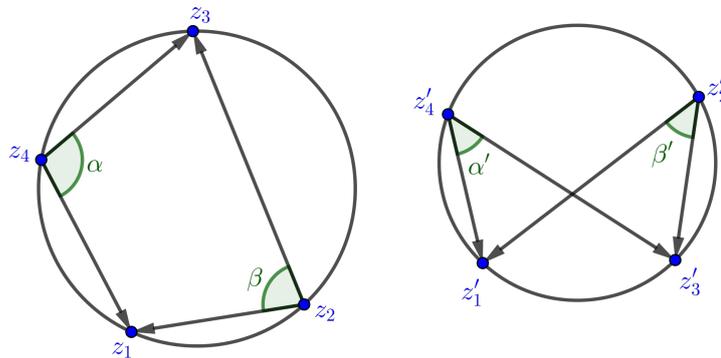
Exemplo 4.17. A razão cruzada $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é real se, e somente se, os quatro pontos pertencem a um círculo ou a uma linha reta.

A razão cruzada é real se, e somente se, a diferença dos argumentos

$$\arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} - \arg \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1} = \arg [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

for igual a 0 ou $\pm\pi$, dependendo da posição relativa dos pontos. Mas, estas são as condições necessárias e suficientes para z_1, z_2, z_3, z_4 pertencerem a uma reta ou a um círculo. De fato, da geometria euclidiana tem-se que um quadrilátero convexo é inscrito se, e somente se, nas notações da Figura 4.7, $z_1 \widehat{z_4 z_3} + z_1 \widehat{z_2 z_3} = \pi$ ou $z'_1 \widehat{z'_4 z'_3} = z'_1 \widehat{z'_2 z'_3}$.

Figura 4.7 – Alguns exemplos de alinhamento.



Fonte: O autor (2022).

Proposição 4.18. Dados três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, existe uma única transformação de Möbius f , tal que $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ e $f(z_3) = w_3$.

Demonstração. Pela Proposição 4.16, se f existe, ela é única. Desta forma, provemos a existência de f . Sejam as transformações de Möbius g e h tais que $g(z_1) = h(w_1) = 0$, $g(z_2) = h(w_2) = 1$ e $g(z_3) = h(w_3) = \infty$. Então, a transformação de Möbius $f = h^{-1} \circ g$ é tal que

$$f(z_1) = h^{-1} \circ g(z_1) = h^{-1}(0) = w_1,$$

$$f(z_2) = h^{-1} \circ g(z_2) = h^{-1}(1) = w_2,$$

$$f(z_3) = h^{-1} \circ g(z_3) = h^{-1}(\infty) = w_3.$$

□

Proposição 4.19. *Se f é uma transformação de Möbius, então, para quaisquer quatro pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$,*

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Demonstração. Seja g a transformação de Möbius tal que $g(z) = [z_1, z_2, z_3, z]$. Então, $g \circ f^{-1}$ leva $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ em $0, 1, \infty$. Pela definição da razão cruzada,

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = (g \circ f^{-1})(f(z_4)) = g(z_4) = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

□

Uma prova mais explícita da proposição acima pode ser realizada substituindo w_k , imagem da transformação de Möbius no ponto z_k , na razão cruzada $[w_1, w_2, w_3, w_4]$. Mas, inicialmente, observa-se que:

$$w_i - w_j = \frac{az_i + b}{cz_i + d} - \frac{az_j + b}{cz_j + d} = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.$$

Como $ad - bc \neq 0$ e $f(-d/c) = \infty$, segue que:

$$\frac{(w_2 - w_3)(w_4 - w_1)}{(w_2 - w_1)(w_4 - w_3)} = \frac{\frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)(ad - bc)(z_4 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)(cz_4 + d)(cz_1 + d)}}{\frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)(ad - bc)(z_4 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)(cz_4 + d)(cz_3 + d)}} = \frac{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}.$$

Exemplo 4.20. Determine a transformação de Möbius f que leva $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ em $w_1 = -1, w_2 = i, w_3 = 1$.

Da geometria euclidiana, sabe-se que dois pontos distintos determinam uma reta, enquanto três pontos não colineares, um círculo. Assim, a transformação leva o eixo real em $|z| = 1$. Aplicando a razão cruzada, omitindo os fatores nos quais z_3 ocorre, tem-se

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(w_2 - w_3)(w - w_1)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)}.$$

Substituindo pelos valores dados, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{z-0}{1-0} &= \frac{(i-1)(w+1)}{(i+1)(w-1)} \\ z(i+1)(w-1) &= (i-1)(w+1) \\ [z(i+1)]w - z(i+1) &= (i-1)w + (i-1) \\ [(i+1)z - (i-1)]w &= (i+1)z + (i-1) \\ w &= \frac{(i+1)z + (i-1)}{(i+1)z - (i-1)}.\end{aligned}$$

A transformação encontrada é equivalente, pela divisão dos coeficientes por $i+1$, a $w = f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. É fácil verificar que $f(0) = -1$, $f(1) = i$ e $f(\infty) = 1$.

Exemplo 4.21. Determine a transformação de Möbius que leva $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$ em $w_1 = 0$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1+i$.

Observa-se que transformação leva $|z| = 1$ em $|z-1| = 1$. Seja $w = f(z)$. Aplicando, novamente, a razão cruzada, tem-se

$$\frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} = \frac{(w_2 - w_3)(w - w_1)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)}.$$

Substituindo pelos valores dados, obtém-se:

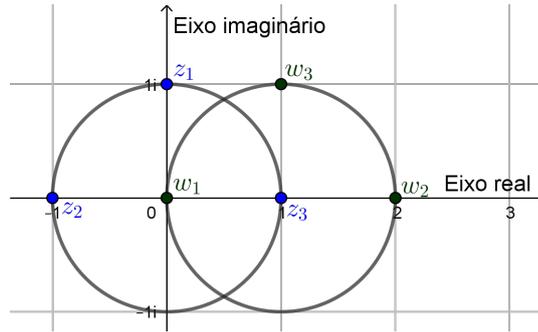
$$\begin{aligned}\frac{(-1-1)(z-i)}{(-1-i)(z-1)} &= \frac{(2-(1+i))(w-0)}{(2-0)(w-(1+i))} \\ -2 \cdot 2 \cdot (z-i)(w+(-1-i)) &= (-1-i)(z-1)(1-i)w \\ -2 \cdot 2 \cdot (z-i)(w+(-1-i)) &= -2(z-1)w \\ (2z-2i)w + (2z-2i)(-1-i) &= (z-1)w \\ [z+(1-2i)]w &= (2+2i)z + (2-2i) \\ w &= \frac{(2+2i)z + (2-2i)}{z+(1-2i)}.\end{aligned}$$

A Figura 4.8 ilustra a transformação encontrada que leva $f(i) = 0$, $f(-1) = 2$ e $f(1) = 1+i$.

Exemplo 4.22. Qual a imagem de $|z| = 1$ sob a transformação $g(z) = \frac{2iz}{z-i}$?

A imagem deve ser um círculo em $\hat{\mathbb{C}}$, o qual é definido por três pontos. Como $g(i) = \infty$, a imagem é uma reta, que passa pelos pontos, $g(-1) = 1+i$ e $g(1) = -1+i$. Ora, nas coordenadas do plano \mathbb{R}^2 , trata-se da reta $y = 1$. Nas coordenadas z e \bar{z} , utilizando as igualdades (3.9), $z - \bar{z} - 2i = 0$.

Figura 4.8 – Transformação de $|z| = 1$ em $|z - 1| = 1$.



Fonte: O autor (2022).

4.2.2 Forma matricial

Sejam $GL_2(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes invertíveis de ordem 2 com coeficientes complexos e M o conjunto das transformações de Möbius $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Associemos estes dois conjuntos pela função $\varphi : A \in GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow M$, definida por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \varphi(A) = f_A, \text{ em que } f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Uma matriz invertível requer $\det(A) = ad - bc \neq 0$, o que é exatamente a condição imposta à transformação de Möbius f .

$$\begin{aligned} [\varphi(A^{-1})](z) &= \left[\varphi \left(\frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) \right] (z) \\ &= \frac{\left(\frac{d}{\det(A)} \right) z + \left(\frac{-b}{\det(A)} \right)}{\left(\frac{-c}{\det(A)} \right) z + \left(\frac{a}{\det(A)} \right)} \\ &= \frac{dz - b}{-cz + a} = [\varphi(A)]^{-1}(z). \end{aligned}$$

A partir da forma matricial é possível realizar composição de matrizes de forma mais rápida, observando que $\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \circ \varphi(B)$. De fato, o resultado segue da comparação da Proposição 4.11 com o que segue:

$$\begin{aligned} \varphi(A \cdot B)(z) &= \varphi \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right) (z) \\ &= \varphi \left(\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix} \right) (z) \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} = [\varphi(A) \circ \varphi(B)](z). \end{aligned}$$

Além disso, destaca-se que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tem-se:

$$f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = f_{\lambda A}(z).$$

Definiremos agora o traço de uma matriz 2×2 . Isso será importante na Subseção 4.2.4, em que serão trabalhadas as transformações de Möbius correspondentes normalizadas.

$$tr : GL_2 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } tr \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a + d.$$

Para duas matrizes A e B , valem as propriedades:

$$tr(AB) = tr(BA), \quad tr(ABA^{-1}) = tr(B) \quad \text{e} \quad tr(-A) = -tr(A).$$

Podemos tentar representar transformações de Möbius por matrizes usando a aplicação φ dada no início desta seção, infelizmente ela não é injetora (mas é sobrejetora). Por exemplo, as matrizes A e $-A$, ambas com determinante 1, determinam a mesma transformação de Möbius normalizada, a saber, $\varphi(A) = \varphi(-A)$. Assim, não é possível definir o traço de uma transformação de Möbius normalizada como o traço da matriz que a representa. Em vez disso, segue a

Definição 4.23. Seja tr^2 a função que associa f_A normalizada a um número complexo, definida por $tr^2(f_A) = (a + d)^2$.

Com essa definição tem-se $tr^2(f_A) = tr^2(f_{-A})$, ou ainda, $tr^2(\varphi(A)) = tr^2(\varphi(-A))$.

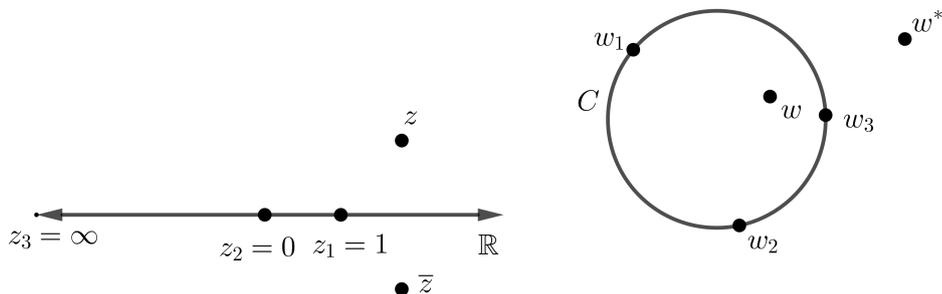
4.2.3 Simetrias

Esta seção está baseada em Ahlfors (1979) e Conway (1978). Os pontos z e \bar{z} são simétricos em relação ao eixo real. Se uma transformação de Möbius leva o eixo real em um círculo C , então os pontos $w = f(z)$ e $w^* = f(\bar{z})$ são ditos simétricos em relação a C , conforme ilustra a Figura 4.9. Esta relação entre w , w^* e C não depende de f . Se g é outra transformação de Möbius que leva o eixo real em C , então $g^{-1} \circ f$ é uma transformação que aplica o eixo real em si mesmo e, portanto, $g^{-1}(w) = g^{-1}(f(z))$ e $g^{-1}(w^*) = g^{-1}(f(\bar{z}))$ são também conjugados.

Seja agora a transformação de Möbius h que leva os pontos z_1 , z_2 e z_3 de um círculo no eixo real. O simétrico de z em relação ao círculo é dado por $z^* = (h^{-1} \circ conj \circ h)(z)$. Isso motiva a definição a seguir.

Definição 4.24. Os pontos z e z^* são simétricos em relação ao círculo C , que passa por z_1 , z_2 e z_3 se, e somente se, $[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}$.

Figura 4.9 – Pontos simétricos $w = f(z)$ e $w^* = f(\bar{z})$ em relação ao círculo C .



Fonte: O autor (2022).

Suponhamos que C é uma reta. Fazendo $z_3 = \infty$, a condição de simetria, dada na Definição 4.24, se torna:

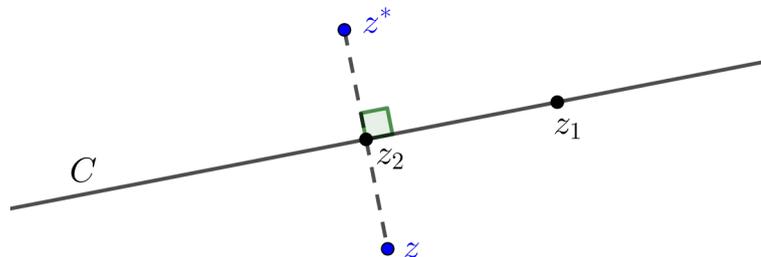
$$\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}. \tag{4.3}$$

Tomando módulos, obtém-se $|z^* - z_2| = |\bar{z} - \bar{z}_2| = |z - z_2|$. Como z_2 pode ser qualquer ponto finito pertencente a C , decorre que z e z^* são equidistantes de todos os pontos de C . Também pela Equação 4.3, segue que

$$\text{Im} \left(\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} \right) = \text{Im} \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \right) = -\text{Im} \left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \right).$$

Então, a menos que $z \in C$, z e z^* estão em diferentes semiplanos determinados por C e o segmento de reta zz^* é perpendicular a C , como mostra a Figura 4.10.

Figura 4.10 – Pontos simétricos $w = f(z)$ e $w^* = f(\bar{z})$ em relação à reta C .



Fonte: O autor (2022).

Consideremos agora que C é um círculo de centro a e raio r . Seja $f_1(z) = z - a$, $f_2(z) = r^2/z$ e $f_3(z) = z + a$. O uso sistemático da invariância da razão cruzada permite

concluir que:

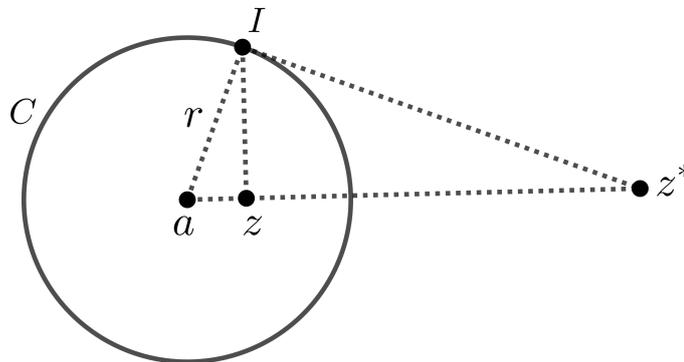
$$\begin{aligned}
 [z^*, z_1, z_2, z_3] &= \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} \\
 &= \overline{[f_1(z), f_1(z_1), f_1(z_2), f_1(z_3)]} \\
 &= \overline{[z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a]} && \text{(pela definição de } f_1) \\
 &= [\bar{z} - \bar{a}, \bar{z}_1 - \bar{a}, \bar{z}_2 - \bar{a}, \bar{z}_3 - \bar{a}] \\
 &= \left[\bar{z} - \bar{a}, \frac{r^2}{z_1 - a}, \frac{r^2}{z_2 - a}, \frac{r^2}{z_3 - a} \right] \\
 &= \left[f_2\left(\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}\right), f_2(z_1 - a), f_2(z_2 - a), f_2(z_3 - a) \right] && \text{(pela definição de } f_2) \\
 &= \left[\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a \right] \\
 &= \left[f_3\left(\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}\right), f_3(z_1 - a), f_3(z_2 - a), f_3(z_3 - a) \right] \\
 &= \left[\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3 \right] && \text{(pela definição de } f_3).
 \end{aligned}$$

Comparando os extremos da equação acima, segue que o ponto simétrico de z é $z^* = r^2/(\bar{z} - \bar{a}) + a$, ou ainda,

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2. \tag{4.4}$$

Tomando módulos na equação acima, tem-se $|z^* - a||z - a| = r^2$. Nas notações da Figura 4.11, o ponto I pertence ao círculo C e os triângulos aIz^* e aIz são semelhantes. Daí, resulta a interpretação geométrica da Equação 4.4. O ponto simétrico de a é ∞ .

Figura 4.11 – Pontos simétricos em relação ao círculo C .



Fonte: O autor (2022).

Proposição 4.25 (Princípio de Simetria). *Se uma transformação de Möbius f leva um círculo C_1 em um círculo C_2 , então f transforma qualquer par de pontos simétricos com relação a C_1 em um par de pontos simétricos em relação a C_2 .*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in C_1$. Se z e z^* são simétricos em relação a C_1 , então

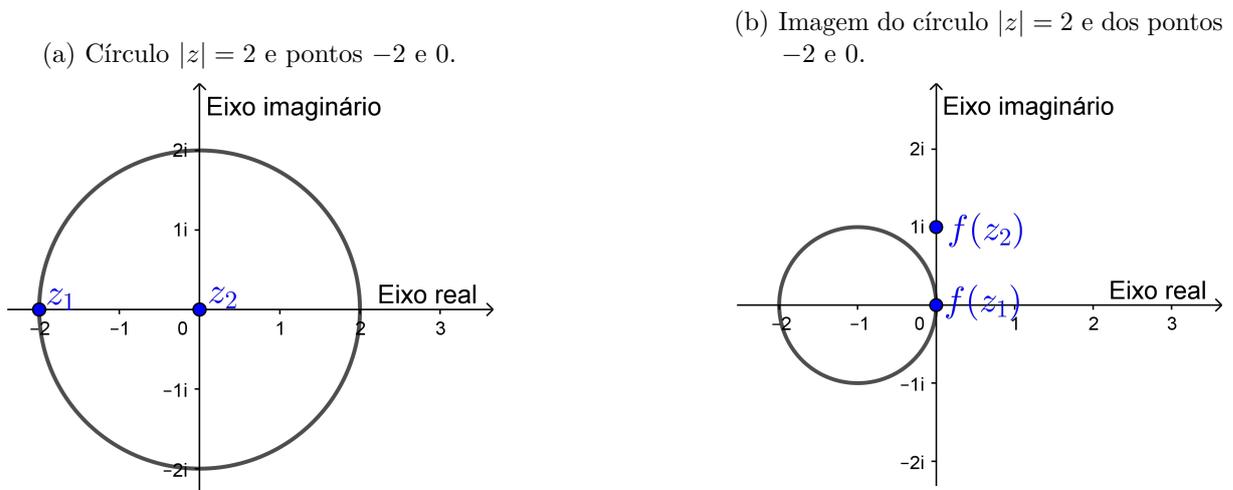
$$\begin{aligned} [f(z^*), f(z_1), f(z_2), f(z_3)] &= [z^*, z_1, z_2, z_3] \\ &= \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} \\ &= \overline{[f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)]}. \end{aligned}$$

□

Uma transformação de Möbius é também determinada sabendo o valor de $z_1 \in C$ que corresponde ao ponto $w_1 \in C'$ e de $z_2 \notin C$ que é levado ao ponto $w_2 \notin C'$. Como z_2^* (ponto simétrico de z_2 em relação a C) deve corresponder a w_2^* (ponto simétrico de w_2 em relação a C'), a transformação será obtida por meio da relação $[w, w_1, w_2, w_2^*] = [z, z_1, z_2, z_2^*]$.

Exemplo 4.26. Encontre a transformação de Möbius que leva o círculo $|z| = 2$ em $|z + 1| = 1$, o ponto -2 na origem e a origem em i .

Figura 4.12 – Representação gráfica do Exemplo 4.26.



Fonte: O autor (2022).

Usando a Equação 4.4, o simétrico do ponto $z = i$, em relação ao círculo de centro $a = -1$ e raio $r = 1$ é dado por:

$$\begin{aligned} (i^* - (-1))(\bar{i} - \overline{-1}) &= 1^2 \\ (i^* + 1)(-i + 1) &= 1 \\ (-i + 1)i^* + 1 - i &= 1 \\ (-i + 1)i^* &= i \\ i^* &= \frac{i}{1 - i}. \end{aligned}$$

O ponto simétrico do centro do círculo, $a = 0$, é ∞ . Em decorrência do Princípio de Simetria, calculando $[w, 0, i, i^*] = [z, -2, 0, \infty]$, resulta

$$f(z) = \frac{z + 2}{(-1 - i)z - 2i}.$$

4.2.4 Classificação e visualização das transformações de Möbius

Nesta subseção, baseada em Ahlfors (1979) e Needham (2000), sempre quando nos referirmos à transformação de Möbius $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, com $c \neq 0$, consideraremos que ela está normalizada, isto é, $ad - bc = 1$.

Os pontos fixos de f são obtidos resolvendo a equação $cz^2 + (d - a)z - b = 0$, como visto em (4.2). Calculemos o valor de delta:

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = d^2 - 2ad + 4ad + a^2 + 4bc - 4ad = (a + d)^2 - 4.$$

Assim, as raízes da equação são:

$$\epsilon_{\pm} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}. \quad (4.5)$$

Definição 4.27. Com base em (4.5) e da Definição 4.23, tem-se a seguinte classificação para o comportamento de uma transformação de Möbius:

- f é parabólica se, e somente se, $tr^2(f) = 4$;
- f é elíptica se, e somente se, $0 \leq tr^2(f) < 4$;
- f é hiperbólica se, e somente se, $tr^2(f) > 4$;
- f é loxodrômica se, e somente se, $tr^2(f) < 0$ ou $tr^2(f) \notin \mathbb{R}$.

É imediato que f tem somente um ponto fixo complexo se, e somente se, $a + d = \pm 2$, em que $\epsilon_- = \epsilon_+ = \frac{a - d}{2c}$. Nos demais casos f tem dois pontos fixos complexos e distintos ϵ_- e ϵ_+ . Esta classificação tem significado tanto algébrico quanto geométrico. Consideremos a transformação de Möbius

$$t(z) = \frac{z - \epsilon_-}{z - \epsilon_+}, \text{ com } \epsilon_- \neq \epsilon_+.$$

De t , tem-se que $z = \epsilon_-$ corresponde a $t(\epsilon_-) = 0$ e $t = \epsilon_+$ a $f(\epsilon_+) = \infty$. Disso, resulta que retas que passam pela origem são imagens de círculos que passam por ϵ_- e ϵ_+ . Por outro lado, círculos concêntricos, centrados na origem, $|t(z)| = \rho$, correspondem a círculos com equação:

$$\left| \frac{z - \epsilon_-}{z - \epsilon_+} \right| = \rho.$$

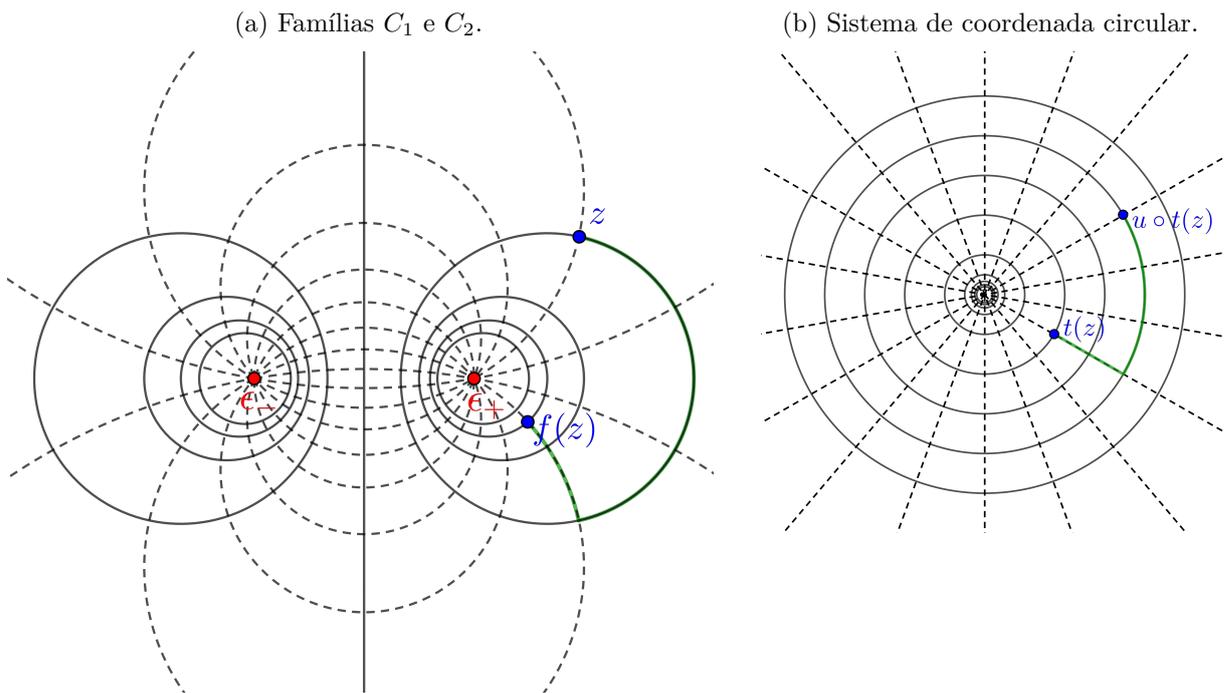
Para se convencer que a equação acima, de fato, é de um círculo, basta elevar ambos os membros ao quadrado, obtendo:

$$(1 - \rho^2)|z|^2 + (\overline{\epsilon_+}\rho^2 - \overline{\epsilon_-})z + (\epsilon_+\rho^2 - \epsilon_-)\bar{z} + |\epsilon_-|^2 - \rho^2|\epsilon_+|^2 = 0. \quad (4.6)$$

Observe que, se $\rho = 1$, (4.6) é a reta que passa por $(\epsilon_- + \epsilon_+)/2$ e é paralela a $i(\epsilon_- + \epsilon_+)$. Estes são os círculos de Apolônio, ou seja, o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias de ϵ_- e ϵ_+ têm razão constante. A Figura 4.13 apresenta no lado esquerdo a família de círculos que passam por ϵ_- e ϵ_+ , em linhas tracejadas, e a família de círculos de Apolônio, em linhas contínuas, denotadas respectivamente, de C_1 e C_2 . Note que a transformação leva as duas famílias de círculos em um sistema de coordenadas circular, ilustrado à direita.

Obviamente, pode-se obter as famílias C_1 e C_2 por meio da transformação inversa t^{-1} , aplicando-a nas retas que passam pela origem e nas circunferências concêntricas, respectivamente. Ahlfors (1979) destaca algumas propriedades interessantes dessas famílias, como: dado um ponto do plano, com exceção de ϵ_- e ϵ_+ , existe exatamente um elemento da família C_1 e um da família C_2 que passam por ele; e todo elemento da família C_1 se encontra com qualquer elemento da família C_2 formando ângulos retos.

Figura 4.13 – Transformação com dois pontos fixos.



Fonte: O autor (2022).

Sejam f uma transformação com os pontos fixos distintos ϵ_- e ϵ_+ e u a transformação determinada pela composição $t \circ f \circ t^{-1}$.

$$\begin{aligned} u(0) &= t \circ f \circ t^{-1}(0) = t \circ f(\epsilon_-) = t(\epsilon_-) = 0 \\ u(\infty) &= t \circ f \circ t^{-1}(\infty) = t \circ f(\epsilon_+) = t(\epsilon_+) = \infty. \end{aligned}$$

Logo, u é uma transformação de Möbius com os pontos fixos 0 e ∞ . Assim, u é definida por $u(z) = (r \operatorname{cis} \theta)z$, que representa uma rotação pelo ângulo θ ou uma homotetia de fator r ou uma combinação das duas. De $u = t \circ f \circ t^{-1}$, resulta que $t \circ f = u \circ t$. Com isso, obtém-se a chamada *forma normal de uma transformação de Möbius f , com dois pontos fixos distintos $\epsilon_-, \epsilon_+ \in \mathbb{C}$* , dada por

$$\frac{f(z) - \epsilon_-}{f(z) - \epsilon_+} = r \operatorname{cis} \theta \cdot \frac{z - \epsilon_-}{z - \epsilon_+}. \quad (4.7)$$

Enquanto na forma padrão uma transformação de Möbius é determinada pelos seus coeficientes a, b, c e d , nesta nova representação ela é descrita em função dos seus pontos fixos, um fator de homotetia e por um ângulo de rotação. Escrevamos, agora, f por meio da composição $t^{-1} \circ u \circ t$. Observando a Figura 4.13, um ponto do domínio de f , digamos z , é enviado por t para $t(z)$, que é a intersecção de uma linha com um círculo. Depois, por u , $t(z)$ sofre uma dilatação seguida de uma rotação, chegando ao ponto $u \circ t(z)$. Por fim, t^{-1} envia $u \circ t(z)$ para uma das intersecções das famílias C_1 e C_2 , representado por $f(z)$.

Destaquemos, em (4.7), $m = r \operatorname{cis} \theta$, o qual será denominado *multiplicador da transformação de Möbius*. Como f tem dois pontos fixos, ϵ_- e ϵ_+ , e $f(\infty) = \frac{a}{c}$, da Proposição 4.19 segue que, $[\epsilon_-, \infty, \epsilon_+, z] = [\epsilon_-, a/c, \epsilon_+, f(z)]$, ou equivalentemente,

$$\frac{z - \epsilon_-}{z - \epsilon_+} = \frac{(a/c - \epsilon_+)(f(z) - \epsilon_-)}{(a/c - \epsilon_-)(f(z) - \epsilon_+)} \iff \frac{f(z) - \epsilon_-}{f(z) - \epsilon_+} = \left(\frac{a - c\epsilon_-}{a - c\epsilon_+} \right) \cdot \frac{z - \epsilon_-}{z - \epsilon_+}. \quad (4.8)$$

Comparando as equações 4.7 e 4.8, conclui-se que $m = \frac{a - c\epsilon_-}{a - c\epsilon_+}$. Pode-se expressar m somente em função de $a + d$, substituindo ϵ_- e ϵ_+ pelas identidades em (4.5), obtendo:

$$m = \frac{a - c \left(\frac{a - d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \right)}{a - c \left(\frac{a - d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \right)} = \frac{a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}.$$

O multiplicador depende de qual ponto fixo é enviado para 0 e ∞ . A transformação t foi definida de modo a ter $\epsilon_- \mapsto 0$ e $\epsilon_+ \mapsto \infty$. Definindo t com $t(z) = (z - \epsilon_+)/(z - \epsilon_-)$,

então o valor do multiplicador obtido seria, de acordo com (4.8), o inverso multiplicativo de m .

A classificação feita para f , na Definição 4.27, é também válida para o multiplicador m . No caso em que $a+d$ é real e $|a+d| < 2$, tem-se que $\sqrt{(a+d)^2 - 4} = yi$ é um imaginário puro. Logo, m é da forma $((a+d) + yi)/((a+d) - yi)$, cujo o módulo é unitário, pois $|(a+d) + yi| = |(a+d) - yi|$. Assim, o multiplicador m pode ser escrito como $\text{cis } \theta$. Logo, uma transformação é elíptica se, e somente se, $u(z) = (\text{cis } \theta)z$. Geometricamente, cada círculo de Apolônio, família C_2 , (e, respectivamente, cada círculo centrado na origem) é aplicado, por f (e, respectivamente, por u), em si mesmo.

No caso em que $a+d$ é real e $|a+d| > 2$, m é um número real positivo, pois $(a+d)^2 > 4$ e $a+d > \sqrt{(a+d)^2 - 4}$. Assim, $u(z) = rz$ é uma homotetia se, e somente se, f é hiperbólica. Do ponto de vista geométrico, cada círculo que passa pelos pontos fixos, família C_1 , (e cada círculo reta que passa pela origem) é aplicado, por f (e por u), em si mesmo, sendo o ponto $f(z)$ afastado de ϵ_- e em direção a ϵ_+ ou vice-versa, dependendo do valor de r .

Por último, se $a+d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, m será da forma $(r \text{ cis } \theta)z$, caso em que f é loxodrômica. Nesta situação, nem as famílias C_1 , nem as famílias C_2 , são aplicadas em si mesmas. A Figura 4.13 ilustra uma transformação loxodrômica, os círculos estão divididos em 18 partes e o módulo foi reduzido pela metade. Logo, neste exemplo, $m = 2 \cdot \text{cis } \frac{\pi}{3}$.

Cabe agora analisar o caso parabólico em que f possui apenas um ponto fixo em \mathbb{C} . Seja $t(z) = \frac{1}{z - \epsilon_+}$, em que $z = \epsilon_+$ corresponde a $t(\epsilon_+) = \infty$. É evidente que as linhas retas são imagens de círculos que passam por ϵ_+ . Além disso, as linhas horizontais e verticais correspondem, por t^{-1} a círculos mutuamente tangentes no ponto ϵ_+ (ver Figura 4.14). Retornemos à representação de u , desta vez com apenas um ponto fixo, na forma $t \circ f \circ t^{-1}$, em que

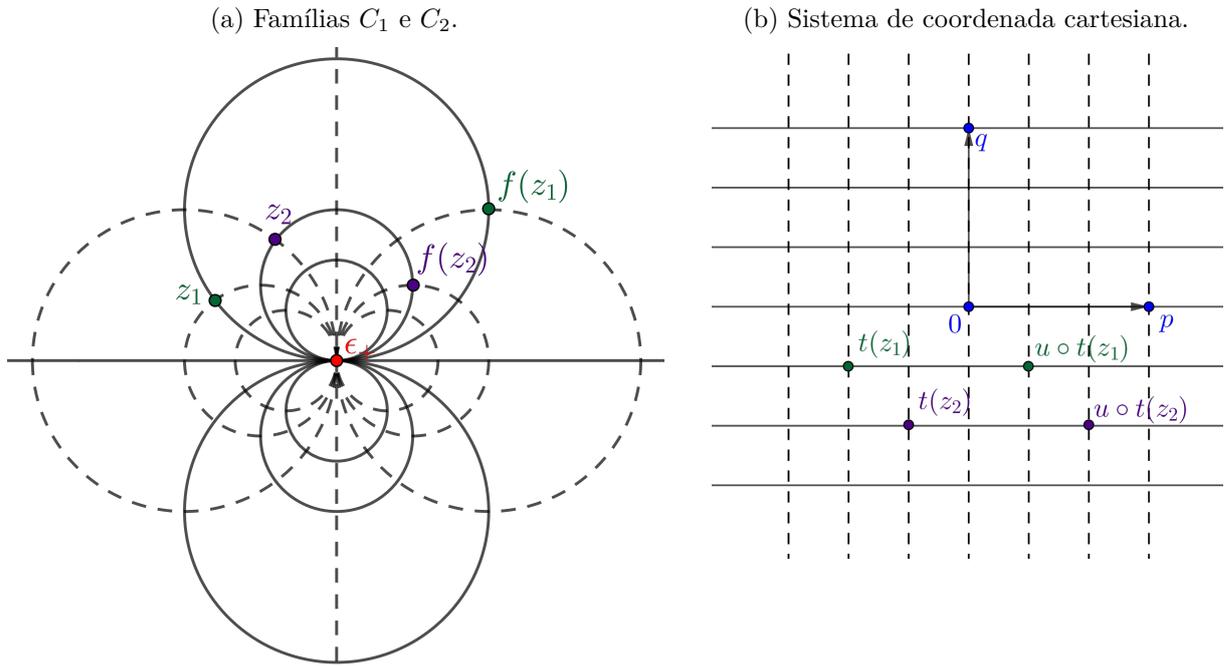
$$u(\infty) = t \circ f \circ t^{-1}(\infty) = t \circ f(\epsilon_+) = t(\epsilon_+) = \infty.$$

Pelo Exemplo 4.15, já se sabe que é $u(z) = z + \beta$ e, da equação composição $t \circ f = u \circ t$, obtém-se a chamada *forma normal de uma transformação de Möbius f , com apenas um ponto fixo $\epsilon_+ \in \mathbb{C}$* , dada por

$$\frac{1}{f(z) - \epsilon_+} = \frac{1}{z - \epsilon_+} + \beta. \quad (4.9)$$

Como $f(\infty) = a/c$ e $\epsilon_+ = (a-d)/(2c)$, $\beta = (2c)/(a+d)$, em que $a+d = \pm 2$. A Figura 4.14 apresenta no lado esquerdo duas famílias de círculos que passam por ϵ_+ : C_1 (em linhas tracejadas) e C_2 (em linhas contínuas). Cada círculo da família C_2 é aplicado, por f , em si mesmo. O ponto z_1 é transportado, por t , para uma reta, em linha contínua, à direita, sendo $t(z_1)$ em seguida transladado por u e, por fim, $u \circ t(z_1)$ é enviado, por

Figura 4.14 – Transformação com um ponto fixo.



Fonte: O autor (2022).

t^{-1} , para $f(z_1)$. Já os círculos C_1 são trocados, quando aplicado por f , entre si. A figura ilustra também o caminho percorrido por z_2 .

4.2.5 Projecção estereográfica

A fim de elucidar algumas definições realizadas ao longo da seção, será estabelecida uma bijeção entre a esfera unitária centrada na origem do \mathbb{R}^3 , com exceção do ponto $N = (0, 0, 1)$, denominado *polo norte*, e o plano complexo. A referida esfera, com o polo norte, é definida por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

O plano complexo coincide com o plano equatorial da esfera S^2 , dividindo-a no hemisfério norte, que contém o ponto N , e o hemisfério sul. Seja $V = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$. Logo, os pontos N e V determinam a reta ϕ em \mathbb{R}^3 , com vetor diretor $V - N$. Pela equação vetorial da reta, o ponto Q pertence a ϕ se, e somente se,

$$Q = N + t(V - N) = (tx, ty, 1 + t(z - 1)), \text{ em que } t \in \mathbb{R}.$$

Na intersecção de ϕ com o plano complexo, $1 + t(z - 1) = 0$. Logo, a função *projecção estereográfica* $PE : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$PE(x, y, z) = \frac{x}{1 - z} + \frac{y}{1 - z}i. \tag{4.10}$$

Seja $w \in \mathbb{C}$, identificado em \mathbb{R}^3 por $w = (x, y, 0)$. Consideremos, agora, a reta determinada por N e por w , com vetor diretor $w - N$. O ponto U pertence à referida reta se, e somente se,

$$U = N + q(w - N) = qw + N(1 - q) = (qx, qy, 1 - q), \text{ em que } q \in \mathbb{R}.$$

O ponto W pertence à esfera se, e somente se, $(qx)^2 + (qy)^2 + (1 - q)^2 = 1$. Eliminando a solução trivial $q = 0$, que corresponde ao polo norte, obtém-se,

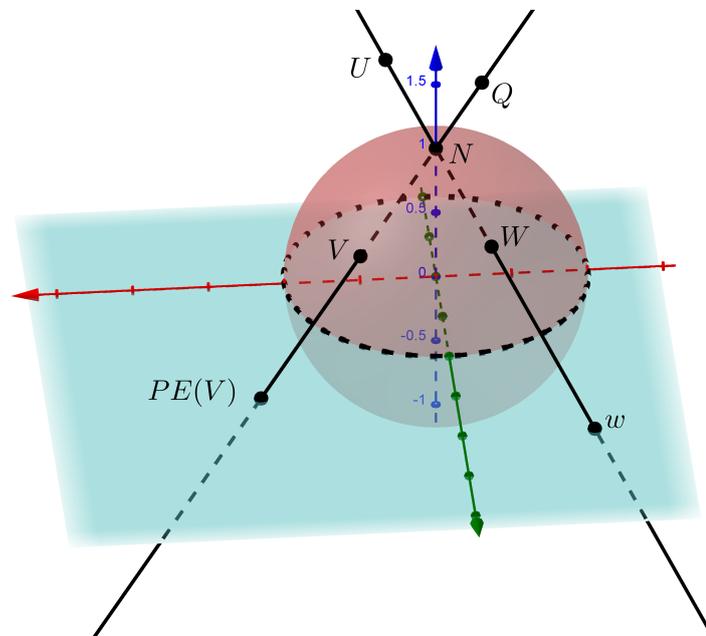
$$q = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{|w|^2 + 1}.$$

Substituindo a identidade acima em $(qx, qy, 1 - q)$, tem-se que a função $PE^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ é definida por

$$PE^{-1}(w) = \left(\frac{2x}{|w|^2 + 1}, \frac{2y}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right). \quad (4.11)$$

Logo, a função PE é bijetiva. Observando a Figura 4.15, nota-se que à medida que V se aproxima de polo norte, $|PE(V)| \rightarrow \infty$, o que conduz à definição $|PE(N)| = \infty$, ampliando o domínio e contradomínio de PE , que passa a ser respectivamente, $S^2 = S^2 \setminus \{N\} \cup N$ e $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Figura 4.15 – Projeção estereográfica.



Fonte: O autor (2022).

A projeção estereográfica goza de uma interessante propriedade: transforma um círculo em S^2 , que não passa por N , em um círculo em \mathbb{C} e transforma um círculo em S^2 , que não passa por N , em um círculo em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e, para os dois casos, reciprocamente.

Para comprovar estas afirmações, observa-se que um círculo em S^2 corresponde a interseção da própria esfera com um plano de \mathbb{R}^3 . Identificando tal plano por Π , de equação $ax + by + cz + d = 0$, em que $\vec{n} = (a, b, c) \neq 0$ é o vetor normal (ortogonal) ao plano, sua distância da origem $O = (0, 0, 0)$ é dada por:

$$d(O, \Pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (4.12)$$

Daí, é imediato que o plano Π corta a esfera S^2 se, e somente se, $d(O, \Pi) \leq 1$, sendo Π tangente a S^2 se, e somente se, $d(O, \Pi) = 1$. Retornando à função inversa da projeção estereográfica (4.11) e a colocando nas coordenadas w e \bar{w} , segue que os pontos $(x, y, z) \in \Pi$ devem satisfazer à equação

$$\begin{aligned} a \frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1} + b \frac{i\bar{w} - iw}{|w|^2 + 1} + c \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} + d &= 0 \\ a(w + \bar{w}) + b(i\bar{w} - iw) + c(|w|^2 - 1) + d(|w|^2 + 1) &= 0 \\ (c + d)|w|^2 + (a - bi)w + (a + bi)\bar{w} + (d - c) &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $A = c + d$, $B = a - bi$ e $D = d - c$, obtém-se a equação:

$$A|w|^2 + Bw + \bar{B}\bar{w} + D = 0. \quad (4.13)$$

A Equação 4.13 é claramente de um círculo generalizado no plano complexo completado. Classifiquemos a natureza do círculo em função de a, b, c e d .

- O círculo é uma reta se, e somente se, $A = c + d = 0$, o que equivale à condição do plano Π passar pelo polo norte;
- O círculo é um círculo real se, e somente se, $|B|^2 - AD = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$. Esta última condição equivale ao denominador de (4.12) ser maior do que numerador, ou seja, $d(O, \Pi) < 1$. Logo, o plano Π intersecta a esfera S^2 sem tangenciá-la;
- O círculo é um círculo degenerado se, e somente se, $|B|^2 - AD = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 0$, o que equivale à condição $d(O, \Pi) = 1$, significando que o plano Π tangencia a esfera S^2 ;
- O círculo é um círculo imaginário se, e somente se, $|B|^2 - AD = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 < 0$, significando que o plano Π não intersecta a esfera S^2 .

Reciprocamente, retornando à função projeção estereográfica (4.10) e fazendo $B = a + bi$, os pontos $(x, y) \in \hat{\mathbb{C}}$ devem satisfazer à equação

$$\begin{aligned} A \left| \frac{x}{1-z} + \frac{y}{1-z} i \right|^2 + B \left(\frac{x}{1-z} + \frac{y}{1-z} i \right) + \bar{B} \left(\frac{x}{1-z} - \frac{y}{1-z} i \right) + D &= 0 \\ A \frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2} + \frac{2ax}{1-z} - \frac{2by}{1-z} + D &= 0. \end{aligned}$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, então $x^2 + y^2 = (z + 1)(1 - z)$. Daí,

$$\begin{aligned} A \frac{(z+1)\cancel{(1-z)}}{(1-z)\cancel{(1-z)}} + \frac{2ax}{1-z} - \frac{2by}{1-z} + D &= 0. \\ A(z+1) + 2ax - 2by + D(1-z) &= 0 \\ 2ax - 2by + (A-D)z + (A+D) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

A distância de O ao plano Π é dada por:

$$d(O, \Pi) = \frac{|A+D|}{\sqrt{(2a)^2 + (-2b)^2 + (A-D)^2}} = \sqrt{\frac{(A+D)^2}{4(a^2+b^2) + (A-D)^2}}.$$

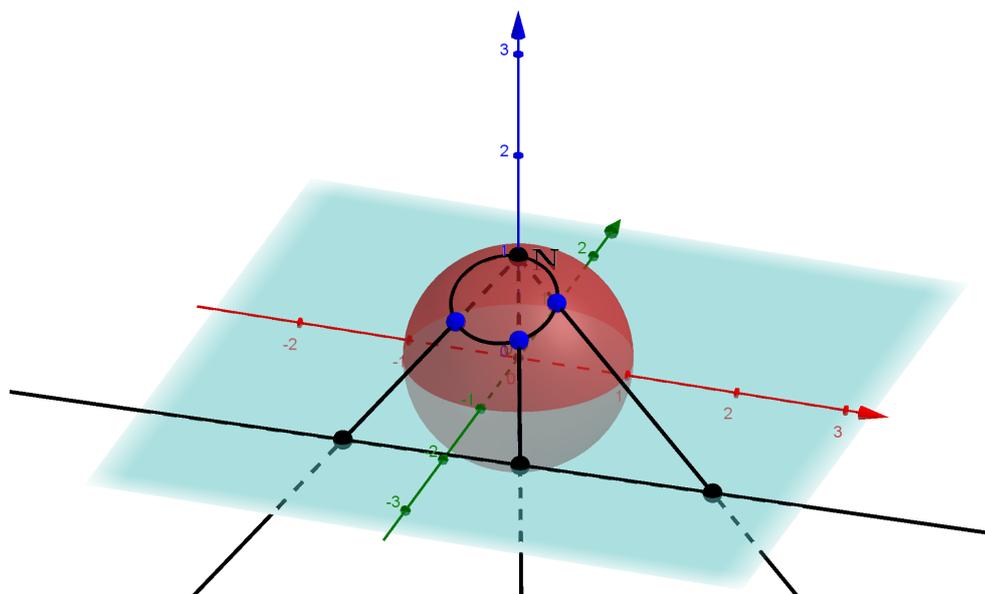
Analisemos, agora, o conjunto-solução de $\Pi \cap S^2$.

- Se $A = 0$, Π é uma reta se, e somente se, $D^2 < 4(a^2 + b^2) + (-D)^2$, o que equivale à condição $a^2 + b^2 > 0$. Logo, uma reta em \mathbb{C} unida com $\{\infty\}$ é transformada em um círculo em S^2 , pois $d(O, \Pi) < 1$. Substituindo $N = (0, 0, 1)$ em Π , verifica-se que $N \in \Pi$;
- $\Pi \cap S^2$ é um círculo se, e somente se, $(A+D)^2 < 4(a^2 + b^2) + (A-D)^2$, o que equivale a $|B|^2 - 4AD > 0$;
- $\Pi \cap S^2$ é um ponto se, e somente se, $(A+D)^2 = 4(a^2 + b^2) + (A-D)^2$, o que equivale a $|B|^2 - 4AD = 0$;
- $\Pi \cap S^2 = \emptyset$ se, e somente se, $(A+D)^2 > 4(a^2 + b^2) + (A-D)^2$, o que equivale a $|B|^2 - 4AD < 0$;

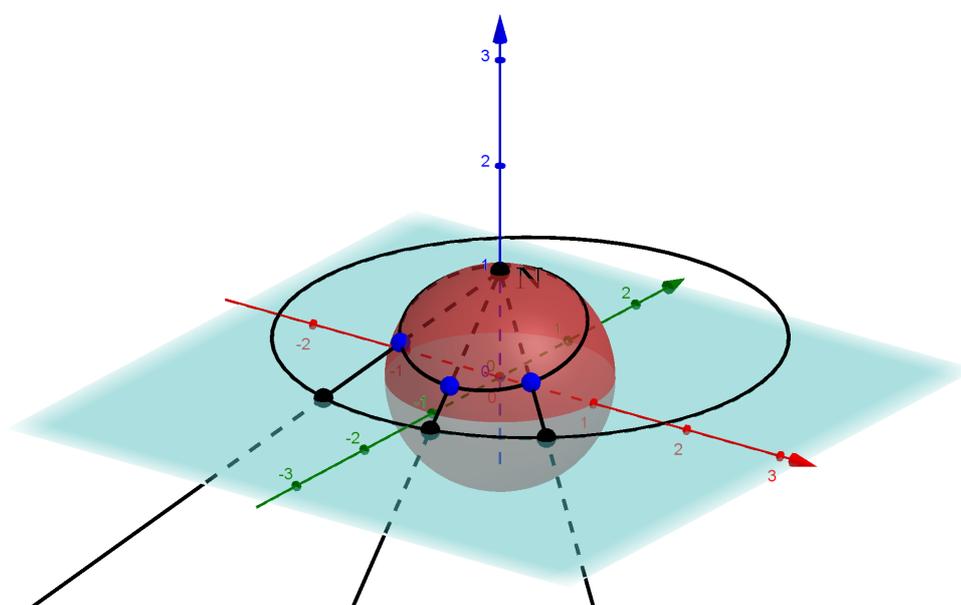
Portanto, de fato, $PE^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ transforma um círculo em \mathbb{C} em um círculo em S^2 , que não passa por N , e uma reta em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, em um círculo em S^2 , passando por N .

Figura 4.16 – Projção estereográfica de círculos em S^2 .

(a) Círculo em S^2 , que passa pelo ponto norte.



(b) Círculo em S^2 , que não passa pelo ponto norte.



Fonte: O autor (2022).

5 Proposta de uma oficina para a Licenciatura em Matemática

A Matemática apresentada aos alunos, no ensino tradicional, é uma ciência axiomática pronta e sem espaço para questionamentos. Os conteúdos são vistos muitas vezes desconectados da realidade, estimulando o desinteresse dos educandos. Em virtude disso, novas tendências vêm surgindo e se aprimorando na Educação Matemática, como a Resolução de Problemas, o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) e a Investigação Matemática.

Todas essas tendências têm em comum a busca em diminuir, ou até mesmo eliminar, a passividade dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Neste contexto, o professor deixa o protagonismo de lado em busca de um ambiente colaborativo de discussão e descoberta, em que algo inesperado pode acontecer, levando a caminhos diferentes do inicialmente planejado.

A Investigação Matemática, bem como a Resolução de Problemas, vai no sentido oposto ao exercício, que é conceituado por Skovsmose (2014, p. 17) como “um micromundo em que todas as medidas são exatas, e os dados fornecidos são necessários e suficientes para a obtenção da única e absoluta resposta certa”. Cabe, contudo, ponderar que os exercícios têm sua importância no ensino, sendo um empecilho quando utilizado excessivamente. Acrescenta-se ainda que as fronteiras entre ambos são, algumas vezes, tênues, dependendo dos conhecimentos prévios e do interesse dos alunos.

Com efeito, se o participante já tem algum conhecimento a respeito do que se quer investigar, a atividade proposta pode-se resumir meramente a um exercício, ou também pode abrir um leque de possibilidades inimagináveis. Para Skovsmose (2014, p. 53), “questões como “o que aconteceria se...” têm um papel especial em processos de investigação”. Estas perguntas podem surgir naturalmente tanto por parte do professor quanto dos alunos. Zaleski Filho (2013, p.25) ressalta que:

Pensar a sala de aula como um contexto no qual se desenvolve a atividade matemática requer também pensar em condições para que os alunos sejam levados a formar conjecturas, procurar formas de validá-las, produzir argumentos dedutivos, arriscar respostas para as questões que se formulam, criar formas de representação que contribuam para chegar às soluções que se buscam reformular e reorganizar os velhos conhecimentos à luz dos novos conhecimentos produzidos.

O ensino por meio da investigação não se restringe à aplicação de um modelo ou uma regra, ele requer a adoção de uma nova postura dos agentes envolvidos. Ponte,

Brocardo e Oliveira (2020, p. 16) ressalta que “quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original”. Um exemplo notável disso, é a expansão dos reais por meio da busca da solução de equações do 3º grau. Braumann (2002, p. 5) sintetiza bem a importância dessa tendência ao afirmar que

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Como afirmou Freire (1996, p. 22) “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para sua produção ou a sua construção”. Nesta perspectiva, D’Ambrosio (1993, p. 36) converge com Braumann ao argumentar que

Difícilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; conseqüentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2020) elencam quatro fases de uma Investigação Matemática, apresentadas na Tabela 5.1. A primeira etapa consiste basicamente em compreender o problema. Na segunda, as conjecturas são criadas a partir de uma série de observações. Na próxima etapa, as conjecturas são testadas e retroalimentadas. Este é um ponto decisivo da investigação, que pode remeter para a última etapa ou reconduzir à segunda.

Sobre como se desenvolver uma atividade de investigação, Ponte, Brocardo e Oliveira (2020) explicam que habitualmente divide-se em três fases, em uma aula ou mais: primeiro, a introdução da tarefa pelo professor, que pode ser oralmente ou por escrito; segundo, realização da investigação que pode ocorrer individualmente ou em grupos; por fim, os resultados obtidos são compartilhados e discutidos com a turma. Cada fase tem sua relevância e peculiaridades.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2020) alertam que a fase introdutória, também chamada por eles de “fase de arranque”, apesar de curta é “absolutamente crítica”, pois as demais

Tabela 5.1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura; Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2020, p. 20).

dependem dela. É nessa etapa que os alunos, não familiarizados com a investigação, devem entender o que se espera deles. Skovsmose (2014) defende que o aluno deve ser convidado a adentrar na investigação, sendo sempre incerto seu aceite, visto a multiplicidade de fatores envolvidos.

As tendências em Educação Matemática não necessitam ser vistas como uma série de conjuntos disjuntos, pelo contrário, a sobreposição delas é frequentemente usual. O uso de tecnologias no ensino, por exemplo, é algo que vem sendo bastante debatido entre educadores, além de ser citado com frequência na BNCC. No Ensino de Matemática o uso da informática pode contribuir positivamente no entendimento do objeto matemático estudado.

Kenski (2012, pp. 22–23) afirma que “o conceito de tecnologias engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações”. Partindo daí, o lápis e o papel, tão utilizados por séculos com fins educacionais consistem em um exemplo notável de tecnologia. Para os avessos a informática em sala de aula, Borba e Penteado (2017) provoca, para a perplexidade de muitos, a seguinte reflexão: será que o aluno deveria então evitar o uso intensivo de lápis e papel a fim de não ficarem dependentes deles?

Seja como for, é inegável o fato de a sociedade caminhar em direção à informatização, não devendo a escola ficar de fora deste movimento. Moran, Masetto e Behrens (2007, p. 12), contudo, ponderam ao afirmar que “[...] se ensinar dependesse só de tecnologias, já teríamos achado as melhores soluções há muito tempo. Elas são importantes, mas não resolvem as questões de fundo”. Borba e Penteado (2017) complementam, conscientizando que um *software* utilizado em sala de aula pode, depois de algum tempo, se tornar tão enfadonho quanto o uso intensivo de giz.

Quanto a atuação do professor, o uso da informática, assim como a Investigação Matemática, o conduz para o que Borba e Penteado (2017) chamam de “zona de risco”. Eles

argumentam que diversos desafios de ordem técnica e comportamentais podem acontecer ao utilizar um computador, podendo prejudicar ou favorecer a atividade. Por exemplo, uma configuração inesperada de um *software* pode atrapalhar o bom andamento da aula ou propiciar um ambiente novo de investigação.

Dentre os recursos computacionais que podem ser explorados em sala de aula, destacam-se os *softwares* de geometria dinâmica. De acordo com Borba, Silva e Gadanidis (2018, p. 27), “o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação”. A geometria dinâmica contrapõe as construções estáticas realizada na lousa ou no papel.

Ainda segundo Borba, Silva e Gadanidis (2018, p. 28), “as atividades que propõem a construção de objetos com o uso de softwares de GD [geometria dinâmica] buscam construir cenários que possibilitem a investigação matemática”. Dentre os *softwares* enquadrado neste novo conceito, destaca-se o *GeoGebra*, que goza de diversas vantagens como: gratuidade, disponibilidade em vários idiomas (inclusive português), facilidade de uso e grande popularidade.

Desta forma, pretende-se, neste trabalho, realizar uma proposta de Investigação Matemática utilizando o *software GeoGebra*. Todas as atividades têm tempo estimado de 1 hora e 40 minutos. O público alvo são estudantes da Licenciatura em Matemática, no entanto, as atividades podem ser adaptadas para os alunos do Ensino Médio. Para aplicação das atividades é necessário um laboratório de informática com o *software GeoGebra* instalado nos computadores. Na falta deste espaço, os alunos podem utilizar seus *smartphones* em sala de aula. É interessante que eles recebam a atividade impressa acompanhada de algumas folhas A4, a fim de registrarem suas observações e conclusões.

5.1 Atividade 1: As equações cúbicas e os números complexos

Na aplicação desta primeira intervenção é interessante a discussão sobre os métodos resolutivos de equações até então conhecidos. A depender da matriz curricular do curso e as experiências prévias dos alunos, é provável que eles só saibam resolver as equações de 1° e 2° grau, além de conhecer algumas técnicas de manipulações algébricas para equações especiais, como as biquadradas.

É interessante refletir que todas essas técnicas são aprendidas (ou deveriam ser) no Ensino Fundamental, a fim de embasar o estudo das funções afim e quadrática no Ensino Médio. O curioso é que muitas vezes não é nem sequer levantada a hipótese da existência, ou não, de um método resolutivo para as equações de grau superior a 2. Sobre as equações de 1° e 2° grau, a BNCC (2017) apresenta as seguintes habilidades:

- (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
- (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Desta forma, e considerando que a importância do estudo das equações algébricas no Ensino Médio foi diminuída pela BNCC, são relevantes propostas que contribuam no entendimento histórico e algébrico do método resolutivo da equação de 3º grau, objetivando uma formação mais sólida e crítica. Neste cenário, a primeira atividade tem como objetivos:

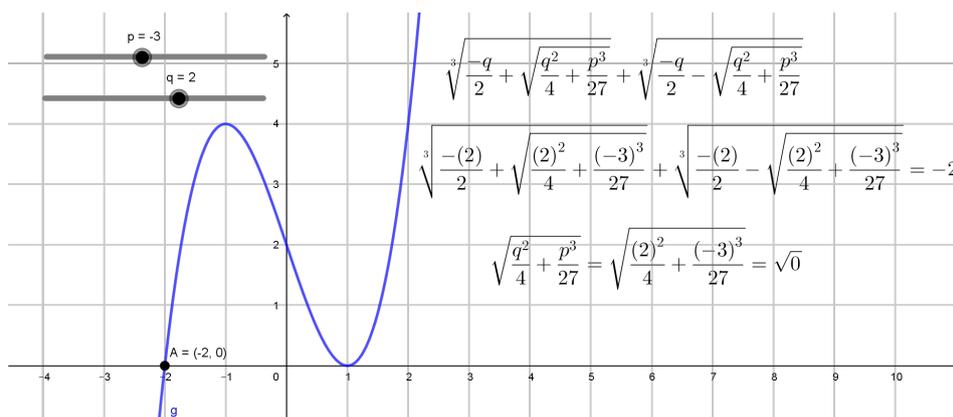
- Conhecer o método resolutivo das equações cúbicas;
- Determinar as condições que o método resolutivo das equações cúbicas retornam soluções fora do conjunto dos números reais;
- Compreender a origem dos números complexos;
- Reconhecer que o método é de pouca serventia prática.

Os babilônios já conheciam, por volta de 1700 anos antes de Cristo, o método resolutivo para as equações quadráticas, isto é, da forma $x^2 - sx + p = 0$, em que s e p representam, respectivamente, o semiperímetro e a área de um retângulo. Porém, o método resolutivo para as cúbicas permaneceu em aberto por vários séculos até um professor da universidade de Bolonha, chamado Scipione del Ferro, descobrir como determinar uma das três soluções da equação do tipo $x^3 + px + q = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ com } D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Por meio de um riquíssimo e interessante enredo histórico, este método chegou ao conhecimento de Girolamo Cardano, que descobriu uma maneira de transformar uma equação cúbica completa, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, na forma reduzida de Del Ferro.

Figura 5.1 – Investigação das soluções das equações de 3º grau.



Fonte: O autor (2022).

Na aplicação acima, é apresentado o gráfico de $f(x) = x^3 + px + q$ e o método que fornece uma das raízes da interseção de f com o eixo das abscissas. Faça uma investigação matemática do que acontece quando alteram-se os valores de p e q , nos controles deslizantes. Em que circunstância a fórmula retorna soluções reais? Qual é a relação de $\sqrt{-1}$ com as soluções reais? Na equação $x^3 = 15x + 4$, justifique a igualdade:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

Algumas implicações da atividade.

Espera-se com esta investigação que os alunos percebam que o método é funcional quando $D = 0$ (f tem três raízes reais, sendo uma repetida) ou $D > 0$ (f tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas). Quando $D < 0$, em que a equação possui três raízes reais distintas, recai-se no chamado “caso irreduzível”, que tanto assombrou os matemáticos

por séculos. É provável que alguns alunos, em primeiro momento, se surpreendam com o fato de existir tal método e se questionar porque este nunca lhe foi ensinado. A depender do interesse da turma, a demonstração da fórmula pode ser realizada posteriormente, bem como um tratamento formal da relação de D e as raízes de f .

Em relação à identidade $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$, a princípio é de se esperar que os alunos não cheguem a uma justificativa aceitável. De fato, Bombelli ao justificá-la teve o que chamou de uma “ideia louca”, tratando as parcelas como o que conhecemos atualmente de números complexos conjugados. É importante concluir que um novo conjunto de números da forma $a + b\sqrt{-1}$ teve que ser criado.

Transição entre as atividades

Em outro momento, o professor deve convidar os alunos, em uma aula expositiva e dialogada, a demonstrar que o novo conjunto, criado ou descoberto, é fechado para as operações de adição e multiplicação usuais. Em seguida, apresentar a definição formal do conjunto como pares ordenados do \mathbb{R}^2 com um produto diferenciado. Após esta etapa, será natural a realização de algumas definições, como a do conjugado e do módulo, bem como a apresentação para a forma polar. Ressalta-se aqui que os números complexos não fazem parte das habilidades elencadas na BNCC. Os objetivos principais que deverão ser alcançados nesta etapa são

- Demonstrar as propriedades de $a + b\sqrt{-1}$;
- Reconhecer um número complexo, sua parte real e imaginária;
- Operar com números complexos na forma algébrica;
- Converter um número complexo da forma algébrica para a polar e vice versa;
- Operar com números complexos na forma polar.

5.2 Atividade 2: Viajando no plano por meio de translações, rotações e homotetias

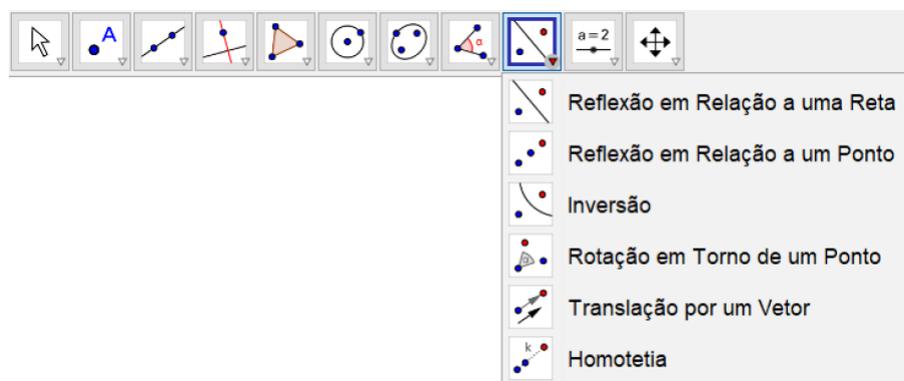
Para esta atividade é necessário o conhecimento prévio da forma algébrica e polar de um número complexo. Este assunto pode ser ensinado utilizando subsidiariamente o *software GeoGebra*, por meio de atividades como localização de determinados pontos no plano complexo. Contextualizando o tema com a [BNCC \(2017\)](#), temos

- (EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.

- (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
- (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.
- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Analisando as habilidades, chama a atenção a importância atribuída às transformações geométricas e o anseio de uso de *softwares* de geometria dinâmica. A translação e a homotetia independem dos números complexos, sendo perfeitamente definíveis no plano cartesiano. A grande importância que tem o conjunto \mathbb{C} , no nível básico, é a facilidade na realização de rotações. Contudo, *softwares* de geometria dinâmica oportunizam a realização destas operações no plano por meio de comandos pré-estabelecidos, o que ajuda a esvaziar a defesa dos complexos no Ensino Médio. Diante dos fatos apontados, objetiva-se nesta atividade, utilizando a álgebra dos números complexos:

Figura 5.2 – Barra de menu do *software GeoGebra*.



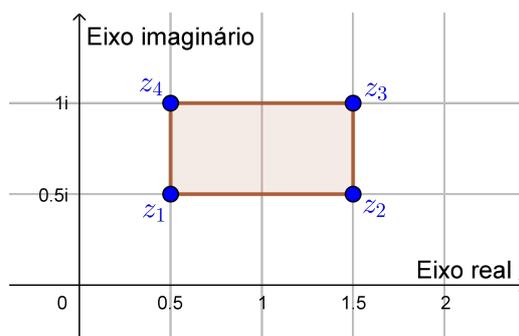
Fonte: O autor (2022).

- Realizar translações de pontos e polígonos no plano;
- Associar a translação à regra do paralelogramo;

- Realizar homotetias de pontos e polígonos no plano;
- Realizar rotações de pontos e polígonos por meio dos números complexos;
- Realizar sequências de transformações de polígonos no plano complexo.

Um número complexo pode ser representado na forma polar por $z = d(\cos \beta + i \cdot \sen \beta)$. Nesta representação, é imediato que z é a composição de uma homotetia de fator d e de uma rotação β . Assim, multiplicar um número complexo, não nulo, w por z , equivale a manipular seu módulo e aplicar uma rotação. Já para a translação, a forma algébrica é bastante eficiente.

Sabendo disto, desenhe um polígono, como ilustrado na figura abaixo, e aplique a sequência de transformações, a cada vértice da figura: translação pelo vetor $\vec{t} = 2 - i$, homotetia de fator $r = 3/2$ e rotação de $\beta = \pi/6$, no sentido anti-horário. Figura 5.3 – Quadrilátero determinado pelos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 .



Fonte: O autor (2022).

Caso a ordem das transformações seja alterada, a figura final seria diferente? Existe um número complexo que representa todas as transformações? Se sim, qual? Investigue também o que ocorre quando as coordenadas dos vértices do polígono são modificadas. Experimente outras sequências de transformações e/ou figuras.

Algumas implicações da atividade.

Para realizar as transformações, deve-se somar cada vértice do quadrilátero da Figura 5.3 ao vetor $2 - i$, em seguida multiplicar o ponto encontrado por $3/2$ e, finalmente, girá-lo $\pi/6$, no sentido anti-horário, por meio da multiplicação por $\text{cis } \pi/6$. Assim, por exemplo, a imagem do vértice z_3 será

$$z'_3 = [(3/2 + i) + (2 - i)] \cdot 3/2 \cdot \text{cis } \pi/6 = 7/2(\sqrt{3} + i).$$

Sendo t , r e β respectivamente o vetor translação, o fator de homotetia e o ângulo de rotação, tem-se que, de modo geral, $(z + t) \cdot r \cdot \text{cis } \beta \neq z \cdot r \cdot \text{cis } \beta + t$. Logo, a ordem

das transformações, neste caso, importa. Caso $t = 0$, restariam apenas a homotetia e a rotação, que comutam na multiplicação. Alterando-se os valores das coordenadas dos vértices, obviamente, novas imagens são geradas.

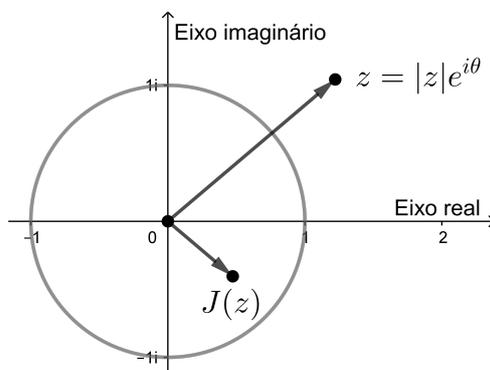
5.3 Atividade 3: A fascinante geometria das inversões

Entre as Atividades 2 e 3, não é necessária nenhuma abordagem prévia. A transformação inversão está fora da matriz do Ensino Médio, não sendo mencionada pela BNCC. Contudo, por gozar de importantes propriedades, é interessante seu estudo. Os objetivos a serem alcançados são:

- Entender a inversão como uma transformação elementar;
- Estabelecer a bijeção entre o interior e o exterior da circunferência unitária centrada na origem;
- Realizar a inversão de retas e círculos;
- Compor as transformações já conhecidas (translação, rotação e homotetia) com a inversão.

A inversão é uma transformação definida por $J(z) = 1/z$, em que $J : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Com esta função é possível obter belas e surpreendentes figuras. Inicialmente, considere a aplicação abaixo e analise o que ocorre quando z é deslocado no plano complexo.

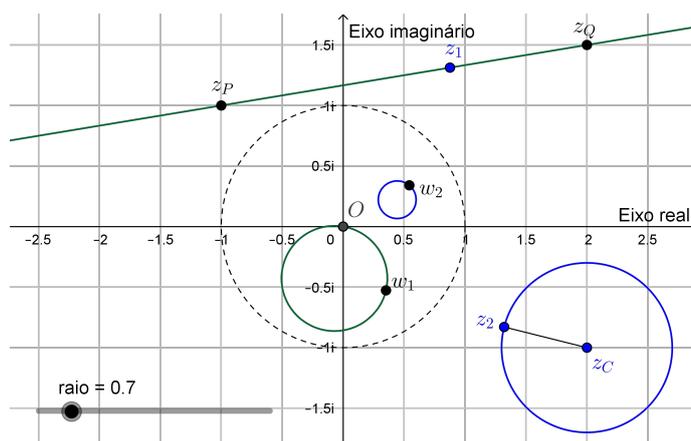
Figura 5.4 – Inversão do ponto z .



Fonte: O autor (2022).

Agora, com a aplicação a seguir, analise o que ocorre quando retas e círculos são submetidos a esta transformação. Para isso, manipule os valores dos pontos z_P e z_Q para mudar a equação da reta e os valores do ponto z_C e do raio (controle deslizante) da circunferência. Em que condições a natureza das figuras são alteradas? Faça, posteriormente, composições de J com as outras três transformações já conhecidas e explore a multiplicidade de resultados.

Figura 5.5 – Inversão de reta e círculo.



Fonte: O autor (2022).

Algumas implicações da atividade.

Os alunos devem perceber inicialmente que um número complexo não nulo situado no interior do círculo unitário é levado por J em um ponto exterior ao círculo e vice-versa. Além disso, um ponto do círculo unitário é aplicado nele próprio. Os integrantes devem concluir também que:

- Reta que não passa pela origem é levada em círculo que passa pela origem;
- Reta que passa pela origem é levada em reta que passa pela origem;
- Círculo que não passa pela origem é levado em círculo que não passa pela origem;
- Círculo que passa pela origem é levado em reta que não passa pela origem.

Esta atividade propicia a introdução das transformações de Möbius, bem como a exploração das suas propriedades algébrica e, sobretudo, geométricas.

5.4 Atividade 4: A amizade entre os polígonos e os números complexos

Esta atividade é baseada em Assis, Dias e Ohl (2019) e visa desvendar a geometria muitas vezes oculta da potenciação dos números complexos. É tradição no Ensino Médio e Superior apresentar somente a radiciação como um gerador de vértices de polígonos regulares, no entanto, isso também é possível com a operação de potenciação. Esta última operação também gera polígonos estrelados.

Definição: Sejam n e k números naturais tais que $n > 4$, $1 < k < n - 1$ e com $MDC(n, k) = 1$. Chamamos de polígono estrelado $\{n, k\}$ ao polígono, não simples, de n lados, obtido a partir da divisão de uma circunferência em n partes congruentes, ligando-se sucessivamente os pontos de divisão de k em k .

Desta forma, esta atividade tem por objetivos:

- Operar geometricamente com a potenciação de um número complexo;
- Associar a potenciação de um número complexo a polígonos regulares e estrelados, no caso em que o módulo é unitário;
- Investigar a natureza das imagens geradas, caso o módulo não seja unitário.

É muito mais prático e eficiente a elevar um número complexo z a uma potência n , quando este encontra-se na forma polar. Tem-se que $z^n = d^n[\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)]$. Eleve os números complexos $\operatorname{cis} 2\pi/3$, $\operatorname{cis} \pi/2$, $\operatorname{cis} 2\pi/5$, $\operatorname{cis} 4\pi/9$, $\operatorname{cis} 4\pi/15$ e $\operatorname{cis} 3\pi/5$ a $0, 1, 2, \dots, n$ e ligue cada potência consecutiva por um segmento de reta. Registre as conclusões obtidas. Analise também o caso $0 < d < 1$ e $d > 1$.

Algumas implicações da atividade.

Os alunos devem perceber que se o módulo for unitário e $2\pi/\beta$, com β não nulo, for inteiro, será obtido, na potenciação, vértices de um polígono regular, desde que β/π não seja inteiro. Por exemplo, para $\beta = 2\pi/3$, tem-se um triângulo regular. Fazendo n

variar entre zero e infinito, obtém-se ângulos cômgruos e pontos iguais periodicamente, como $z^0 = z^3 = z^6 = \dots = z^{3k}$, com k inteiro.

Caso $2\pi/\beta$ seja racional, mas não seja inteiro, os estudantes devem concluir que os pontos obtidos repetem-se somente após $MMC((180\beta/\pi)^\circ, 360^\circ)$. A ligação das potências consecutivas de z forma um polígono estrelado. É possível que os participantes desconheçam nestes tipos de polígonos, conduzindo a uma definição formal por parte do professor. Os alunos podem ser desafiados também a determinar a equação do círculo que tangencie todos os segmentos de retas.

6 Considerações finais

Minhas inquietações com os números complexos surgiram enquanto estagiava em um colégio estadual de Ensino Médio, em que tive que lecionar o referido conteúdo. Desde então, juntei convicção que este objeto matemático não deve fazer parte do Ensino Médio, como já encaminha a BNCC, porém deve ser ressignificado no Ensino Superior. Não se deve expor os futuros profissionais em educação a uma abordagem abrupta, objetivando avançar logo para as funções em uma variável complexa, sob o risco deles, além de serem expostos a uma formação conteudista, reproduzirem este imediatismo pedagógico em sua prática docente.

De fato, os números complexos levaram muitos anos até os matemáticos aceitarem sua validade, então por que esperar que os alunos o compreendam em alguns minutos? Consultando os PPCs dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições de ensino públicas baianas foi possível perceber que a ampla maioria tem a ementa da disciplina Variáveis Complexas similar ou igual à de um curso de bacharelado. Isso é reflexo de uma visão dicotômica entre formação pedagógica e formação específica a uma área de conhecimento.

Tentando me desconstruir desse modelo engessado, proponho neste trabalho uma série de atividades fundamentadas nas tendências de Investigação Matemática e Informática na Educação, vislumbrando abrir caminhos reais no plano ensino e aprendizagem. Ambas as abordagens mencionadas levam tanto o professor quanto os estudantes para uma zona de risco, ao romper com o tradicionalismo, em que a experimentação tem papel principal. As referidas atividades exploram a relação entre as equações do 3º grau e os números complexos e transformações elementares em \mathbb{C} .

Foi abordada também, no decorrer da dissertação, a álgebra dos números complexos e sua interpretação geométrica, a fim de definir as transformações de Möbius, uma classe especial de funções complexas com ricas propriedades. Ainda são escassos na literatura nacional trabalhos sobre estas funções, o que proporcionou uma fecunda investigação de sua geometria, muitas vezes oculta aos olhos dos praticantes da Matemática, em referências internacionais. Na seção sobre a classificação e visualização das transformações de Möbius, foi apresentado de forma inteligível, por meio de ferramentas autorais desenvolvidas no *software GeoGebra*, o efeito das transformações parabólicas, elípticas, hiperbólicas e loxodrômicas no plano complexo.

Ao prestigiar a geometria dos números complexos, mostramos um mundo encantado que merece ser explorado de forma cuidadosa. Assim, e como base em toda argumentação prévia, consideramos que os objetivos propostos foram atendidos. Do ponto de vista

pessoal, este trabalho contribuiu na minha formação matemática e docente, fazendo-me enxergar o objeto matemático em comento sob uma ótica muito mais ampla do que eu tinha anteriormente.

Deste modo, a fim de não esgotar este estudo aqui, pretendo realizar os seguintes trabalhos futuros: aperfeiçoar as propostas de atividades e aplicá-las em turmas de licenciandos em Matemática, compartilhando os resultados obtidos com a comunidade acadêmica por meio de artigos em eventos ou revistas; estudar com mais profundidade a teoria das funções de uma variável complexa, buscando significados geométricos; melhorar as ferramentas desenvolvidas no *software GeoGebra*, a fim de torná-las mais intuitivas e didáticas.

Referências

- AHLFORS, L. V. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 3. ed. [S.l.]: International series in pure and applied mathematics, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 54, 58 e 59.
- ASSIS, J. M. S.; DIAS, E. S.; OHL, W. J. Potenciação dos números complexos e o software geogebra. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 18., 2019, Ilhéus. *Anais...* Ilhéus: UESC, 2019. p. 16–29. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 78.
- ASSIS, J. M. S.; DIAS, E. S.; VILAS BÔAS, J. Um estudo das equações cúbicas e seu contexto histórico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. *Anais...* Ilhéus: UESC, 2019. p. 16–29. Citado na página 12.
- ÁVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 40.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2017. (Coleção tendências em Educação Matemática). Citado na página 69.
- BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018. (Coleção tendências em Educação Matemática). Citado na página 70.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília, 2007. 141 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Citado na página 16.
- BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. D. (Org.). *Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. p. 5–24. Citado na página 68.
- CARNEIRO, J. P. A geometria e o ensino dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 55, 2004. Citado na página 16.
- CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1978. Citado na página 54.
- COSTA, H. J. B. *Transformações de Möbius: uma proposta de ensino lúdico para os alunos do ensino médio*. 106 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2021. Citado na página 14.

D'AMBROSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1, p. 35–41, mar. 1993. Citado na página 68.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção leitura). Citado na página 68.

GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 5. ed. São Paulo: Editora livraria da Física, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018. Citado na página 40.

IGLESIAS, S. L. S.; COSTA, M. L. F. Análise dos PPC dos cursos de pedagogia ofertados pelo sistema UAB na região sul do Brasil: indicativos de oferta e adesão ao sistema UAB. *Educação em Perspectiva*, Viçosa, v. 9, n. 2, 2018. Citado na página 16.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA. *Projeto pedagógico do curso de licenciatura em matemática*. Salvador, 2015. 123 p. Disponível em: <<https://portal.ifba.edu.br/salvador/ensino/cursos/superior/graduacao/matematica/1>>. Citado na página 19.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA. *Projeto pedagógico do curso de licenciatura em matemática*. Eunápolis, 2017. 304 p. Disponível em: <https://portal.ifba.edu.br/eunapolis/cursos/superior/copy2_of_mat>. Citado na página 18.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA. *Projeto pedagógico do curso de licenciatura em matemática*. Barreiras, 2019. 138 p. Disponível em: <<https://portal.ifba.edu.br/barreiras/paginas-menu-cursos/cursos/superior/matematica/curso-superior-licenciatura-matematica>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA. *Projeto pedagógico do curso de licenciatura em matemática*. Valença, 2019. 138 p. Disponível em: <<https://portal.ifba.edu.br/valenca/cursos/superior/comat/curso-superior-matematica>>. Citado na página 19.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA. *Projeto pedagógico do curso Superior de licenciatura em Matemática*. Camaçari, 2019. 137 p. Disponível em: <https://portal.ifba.edu.br/camacari/ensino/cursos/copy_of_cursos/licenciatura-em-matematica/document>. Citado na página 18.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012. Citado na página 69.

LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção professor de Matemática). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

MATHIAS, C. Um olhar humanista sobre os números complexos. In: ROQUE, T.; GIRALDO, V. (Org.). *O saber do professor de matemática: ultrapassando a dicotomia entre a didática e conteúdo*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2013. p. 107–145. Citado na página 16.

- MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediações pedagógicas*. 13. ed. Campinas: Papirus, 2007. Citado na página 69.
- NAHIN, P. J. *An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$* . New Jersey: Princeton University Press, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- NEEDHAM, T. *Visual complex analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2000. Citado na página 58.
- PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020. (Coleção tendências em Educação Matemática). Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.
- SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base*. Brasília, 2017. 600 p. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 73.
- SKOVSMOSE, O. *Um convite à educação matemática crítica*. 1. ed. Campinas: Papirus, 2014. (Perspectivas em Educação Matemática). Citado 2 vezes nas páginas 67 e 69.
- SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016. (Coleção matemática universitária). Citado na página 13.
- UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA. *Projeto pedagógico do curso de licenciatura em matemática*. Feira de Santana, 2018. 106 p. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ. *Projeto acadêmico curricular: Curso de licenciatura em matemática*. Ilhéus, 2006. Citado na página 20.
- UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA. *Projeto pedagógico do curso de licenciatura em matemática*. Vitória da Conquista, 2009. Citado na página 20.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. *Projeto acadêmico curricular: curso de licenciatura em matemática*. Salvador, 2008. Citado na página 21.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA. *Projeto acadêmico curricular: curso de licenciatura em matemática*. Barreiras, 2008. Citado na página 21.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA. *Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática: reformulação curricular*. Cruz das Almas, 2018. Citado na página 22.
- ZALESKI FILHO, D. *Matemática e Arte*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. (Coleção tendências em Educação Matemática). Citado na página 67.

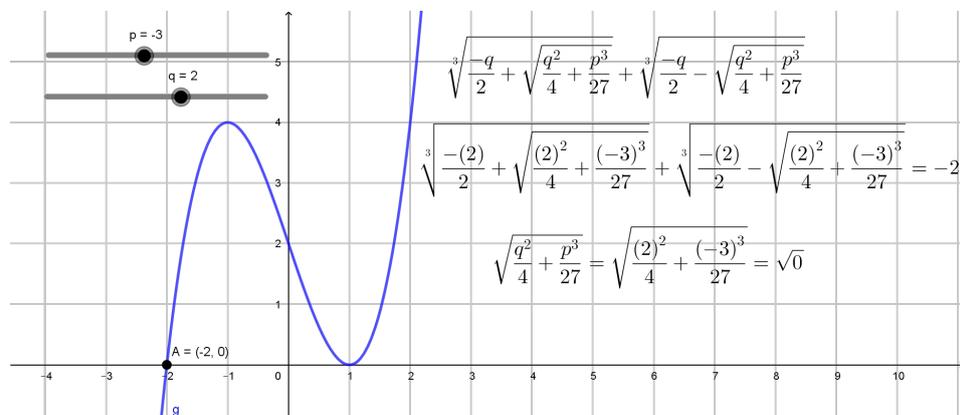
APÊNDICE A – Material para a aplicação da oficina

Os babilônios já conheciam, por volta de 1700 anos antes de Cristo, o método resolutivo para as equações quadráticas, isto é, da forma $x^2 - sx + p = 0$, em que s e p representam, respectivamente, o semiperímetro e a área de um retângulo. Porém, o método resolutivo para as cúbicas permaneceu em aberto por vários séculos até um professor da universidade de Bolonha, chamado Scipione del Ferro, descobrir como determinar uma das três soluções da equação do tipo $x^3 + px + q = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ com } D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Por meio de um riquíssimo e interessante enredo histórico, este método chegou ao conhecimento de Girolamo Cardano, que descobriu uma maneira de transformar uma equação cúbica completa, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, na forma reduzida de Del Ferro.

Figura A.1 – Investigação das soluções das equações de 3º grau.



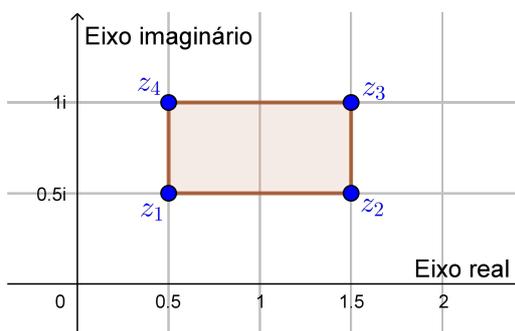
Fonte: O autor (2022).

Na aplicação acima, é apresentado o gráfico de $f(x) = x^3 + px + q$ e o método que fornece uma das raízes da interseção de f com o eixo das abscissas. Faça uma investigação matemática do que acontece quando alteram-se os valores de p e q , nos controles deslizantes. Em que circunstância a fórmula retorna soluções reais? Qual é a relação de $\sqrt{-1}$ com as soluções reais? Na equação $x^3 = 15x + 4$, justifique a igualdade:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

Um número complexo pode ser representado na forma polar por $z = d(\cos \beta + i \cdot \sin \beta)$. Nesta representação, é imediato que z é a composição de uma homotetia de fator d e de uma rotação β . Assim, multiplicar um número complexo, não nulo, w por z , equivale a manipular seu módulo e aplicar uma rotação. Já para a translação, a forma algébrica é bastante eficiente.

Sabendo disto, desenhe um polígono, como ilustrado na figura abaixo, e aplique a sequência de transformações, a cada vértice da figura: translação pelo vetor $\vec{t} = 2 - i$, homotetia de fator $r = 3/2$ e rotação de $\beta = \pi/6$, no sentido anti-horário. Figura A.2 – Quadrilátero determinado pelos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 .

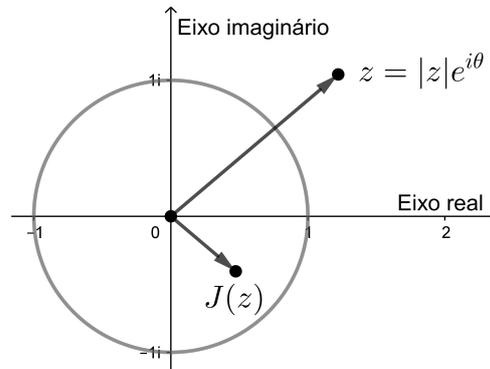


Fonte: O autor (2022).

Caso a ordem das transformações seja alterada, a figura final seria diferente? Existe um número complexo que representa todas as transformações? Se sim, qual? Investigue também o que ocorre quando as coordenadas dos vértices do polígono são modificadas. Experimente outras sequências de transformações e/ou figuras.

A inversão é uma transformação definida por $J(z) = 1/z$, em que $J : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Com esta função é possível obter belas e surpreendentes figuras. Inicialmente, considere a aplicação abaixo e analise o que ocorre quando z é deslocado no plano complexo.

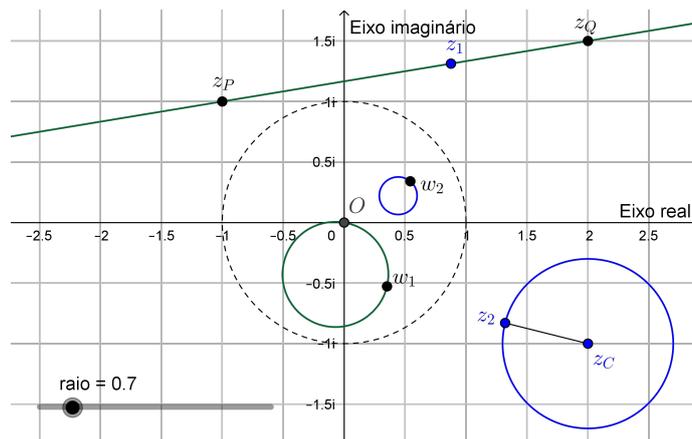
Figura A.3 – Inversão do ponto z .



Fonte: O autor (2022).

Agora, com a aplicação a seguir, analise o que ocorre quando retas e círculos são submetidos a esta transformação. Para isso, manipule os valores dos pontos z_P e z_Q para mudar a equação da reta e os valores do ponto z_C e do raio (controle deslizante) da circunferência. Em que condições a natureza das figuras são alteradas? Faça, posteriormente, composições de J com as outras três transformações já conhecidas e explore a multiplicidade de resultados.

Figura A.4 – Inversão de reta e círculo.



Fonte: O autor (2022).

É muito mais prático e eficiente a elevar um número complexo z a uma potência n , quando este encontra-se na forma polar. Tem-se que $z^n = d^n[\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)]$. Eleve os números complexos $\operatorname{cis} 2\pi/3$, $\operatorname{cis} \pi/2$, $\operatorname{cis} 2\pi/5$, $\operatorname{cis} 4\pi/9$, $\operatorname{cis} 4\pi/15$ e $\operatorname{cis} 3\pi/5$ a $0, 1, 2, \dots, n$ e ligue cada potência consecutiva por um segmento de reta. Registre as conclusões obtidas. Analise também o caso $0 < d < 1$ e $d > 1$.