UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

WALLACE MONTEIRO DE AMARAL

ARITMÉTICA: DIVISIBILIDADE, CONGRUÊNCIA E SOMATÓRIOS

Bragança-PA
2022

WALLACE MONTEIRO DE AMARAL

ARITMÉTICA: DIVISIBILIDADE, CONGRUÊNCIA E SOMATÓRIOS

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.

Sob. Orientador: Profª. Drª. Marly dos Anjos Nunes

Coorientador: Profº. Me. Oséas Guimarães Ferreira Neto

Bragança-PA
2022

WALLACE MONTEIRO DE AMARAL

ARITMÉTICA: DIVISIBILIDADE, CONGRUÊNCIA E SOMATÓRIOS

Dissertação submetida ao corpo docente da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em matemática.

Orientador: Profª. Drª. Marly dos Anjos Nunes
Coorientador: Profº. Me. Oséas Guimarães Ferreira Neto

DATA DA AVALIAÇÃO: 26 / 03 / 2022.

CONCEITO: ____________________

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Marly dos Anjos Nunes
Membro interno – UFPA

____
Prof. Dr. Edson Jorge de Matos
Membro interno– UFPA

____
Prof. Drª. Edilene Farias Rozal
Membro interno – UFPA

____
Prof. Drª. Andréia Gomes Pinheiro
Membro externo– IFPA

____
Profº. Me. Oséas Guimarães Ferreira Neto
Membro externo – PROFMAT

Bragança-PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A485a Amaral, Wallace Monteiro.
ARITMÉTICA: DIVISIBILIDADE, CONGRUÊNCIA E SOMATÓRIOS / Wallace Monteiro Amaral. — 2022.
68 f.: il.
Orientador(a): Profª. Dra. Marly dos Anjos Nunes
Coorientador(a): Prof. Me. Oséas Guimarães Ferreira Neto
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, Bragança, 2022.
1. biblioteca universitárias. 2. Congruência. 3. Divisibilidade. 4. Somatório. I. Título.

CDD 513

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e apoiaram, principalmente a minha família, em especial minha mãe Odélia e esposa amor Milena, companheiros de trabalho, professores do Profmat e aos amigos do Mestrado (UFPA-Bragaça) que tive como referencial para este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramenta a Deus, onde tirei forças para conclusão deste trabalho.

A minha família, pelo amor, por todas as orações que fizeram, pelo os ensinamentos, pelas inumeras vezes que deixei de vê-los devido minhas obrigações com o mestrado.

A UFPA Campus Bragança - Pa pela oportunidade de crescer profissionalmente.

Aos professores do Mestrado em nome da orientadora Dra. Marly Anjos pelos momentos de orientações, conversas e inspiração.

Ao professor Coorientador: Profº. Me. Oséas Guimarães Ferreira Neto, pela disponibilidade e atenão.

Ao Raí Fernando Siqueira do Nascimento aluno da graduação pelas contribuições e revisões dos cálculos.

Aos amigos do Mestrado PROMAT sem eles não seria possível este trabalho.

Ao programa Profmat, pela capacitação de crescimento profissional.

Aos meus colegas de trabalho, pelo carinho e incentivo nos momentos que precisei.

Enfim, agradeço a todos que incentivaram e também mostraram que não temos que desistir.

“Se ainda vale a matemática
que me ensinaram,
dois números negativos
multiplicados
resultam num número positivo.
Espero que
uma perda de tempo
ao quadrado
seja um ganho... de tempo”.

(Engenheiros do Hawaii)

RESUMO

Esta dissertação surge com a inquietação de propor uma abordagem relacionando o estudo da Aritmética, em especial a indução matemática, a divisibilidade, a congruência modular em somatórios e aplicando aos números poligonais através da análise da progressão aritmética. Neste contexto, nosso objetivo é contribuir para que estudantes e professores possam compreender o estudo da Aritmética e suas propriedades com familiaridade através de demonstraçoes de teoremas, proposições, corolários e aplicações vinculando os conteúdos entre eles. Por outro lado, oferecemos uma fonte de pesquisa a ser utilizado pelos professores como recurso didático para as áreas da aritmética, de evolução da matemática e da geometria. O método qualitativo se deu através de investigação bibliográfica, fundamentando a teoria a cerca da indução, divisibilidade e dos números poligonais. No decorrer da pesquisa, identificamos os padrões que regem a aplicação refentes aos números poligonais em somatórios em sua abordagem geral, obtendo sua veracidade da sentença provadas por indução matemática bem com sua interpretação geométrica.

Palavras-Chave: Congruência, Divisibilidade, Somatório, Progressão Arimtética, Números Poligonais.

ABSTRACT

This dissertation arises with the concern of proposing an approach relating the study of Arithmetic, especially mathematical induction, divisibility, modular congruence in summations and applying it to polygonal numbers through the analysis of arithmetic progression. In this context, our objective is to contribute so that students and teachers can understand the study of Arithmetic and its properties with familiarity through proofs of theorems, propositions, corollaries and applications linking the contents between them. On the other hand, we offer a source of research to be used by teachers as a teaching resource for the areas of arithmetic, the evolution of mathematics and geometry. The qualitative method took place through bibliographic research, basing the theory about induction, divisibility and polygonal numbers. In the course of the research, we identified the patterns that govern the application referring to polygonal numbers in summations in their general approach, obtaining their veracity of the sentence proved by mathematical induction as well as their geometric interpretation.

Words-key: Congruence, Divisibility, Summation, Arithmetic Progression, Polygonal Numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMARIO

1 Introdução

A Matemática trata-se de uma ciência viva e está sempre em constante construção, não apenas no dia a dia das pessoas, mas também nas universidades, nos laboratórios, nos centros de pesquisa. Todos sabemos que cabe à escola, e em particular ao professor, a condução do processo de ensino e o acompanhamento da aprendizagem dos alunos. Nessa tarefa complexa, a grande maioria dos educadores atribui a um bom livro de Aritmética o papel de destaque entre os recursos didáticos que podem ser utilizados em sala de aula, para que possamos alcançar melhorias na relação de ensino e aprendizagem de Matemática.

A aprendizagem da Aritmética é um dos principais objetivos do ensino da Matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental II. Essa aprendizagem evolui de forma progressiva e vertical ao longo da vida estudantil dos alunos, até que se chegue ao conceito de números. Segundo a BNCC na Matemática do Ensino Básico, em relação aos Números, os estudantes devem ter a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações. Em relação a geometria, desenvolver habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura, desta forma a aprendizagem continuada de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, assim contextualização do conhecimento e o uso de materiais de manipulação são essenciais para a construção do conceito de números, nesse momento.

Dessa forma, é papel fundamental do professor favorecer a aquisição, pelo aluno, dos conteúdos que compõem a matemática escolar. É desta matemática que o aluno deve se apropriar, não como um repertorio de fórmulas e algoritmos, mas como saber-fazer matemático que o habilite a resolver problemas do seu dia a dia ou de sua prática profissional futura.

Durante o Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT na disciplina Aritmética, ramo da Matemática Pura que estuda os números inteiros, percebemos a necessidade em revisar e fazer uma análise em literaturas sobre a aplicação e importância da Aritmética, principalmente nos tópicos de Números Inteiros, Indução Matemática, Divisibilidade, Congruência Modular aplicados as sequências numéricas e somatórios como ferramenta didática nas aulas da Disciplina de Matemática.

Assim, a pesquisa terá como objetivo contribuir para que estudantes e professores da educação básica possam compreender o estudo de Aritmética e suas propriedades com familiaridade através de demonstrações de teoremas, proposições, corolários e a utilização de exemplos. Na parte final deste trabalho apresentamos algumas aplicações, abordando os conteúdos citados acima, porém não de forma isolada e sim permitindo uma relação desde a Educação Básica até o Nível Superior.

A Aritmética começa seu desenvolvimento a partir da contagem, sem definições formais dos números, este estando relacionado com a álgebra e teoria dos números. Assim, sua necessidade e praticidade com o tempo para soluções simples de medidas e cálculos foram avançando.

Tratamos inicialmente dos elementos teóricos referentes aos números na sua base decimal, em especial a divisibilidade dando sequência teremos aplicações do tema dos conceitos expostos, desta forma a pesquisa será uma fonte de pesquisa e caminhos para novas inspirações para quem pretender buscar teorias e sanar dúvidas a partir dos conteúdos apresentados.

Nosso trabalho está apresentado em capítulos com suas definições, teoremas e proposições, seguidas de exemplos para melhor entendimento de aplicações, então incialmente apresentamos os números inteiros com suas denominações com seus subconjuntos, propriedades de soma, subtração, multiplicação e proposições com suas respectivas demonstrações para as relações de ordem dos inteiros. Em seguida falamos na indução matemática que é uma importante ferramenta para provar se as sentenças matemáticas são verdadeiras e que será primordial em nosso trabalho, desta forma apresentamos dois teoremas da Indução Matemática e da Prova por Indução Matemática com suas demonstrações, seguidas de exemplos.

Definimos divisibilidade e enunciamos o teorema da Divisão Euclidiana com sua demonstração, seguida de exemplos. Prontamente definimos Congruência Modular com algumas propriedades e exemplos. Definimos sequência numérica, sendo as Progressões Aritméticas o foco, com seu termo geral e soma dos termos para aplicação, por diante utilizamos da definição de Somatórios, proposições, demonstrações e exemplos, sequentemente mostramos todos os conteúdos do trabalho com teoremas, corolários e exemplos como fundamentação teórica, e por fim abordaremos algumas aplicações voltadas para os números poligonais, em especial aos números triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais e suas formas generalizada e provadas por Indução Matemática.

2 Números Inteiros

Os números inteiros tem origem a partir dos números naturais, para resolver problemas de contagem. A introdução dos números negativos tem sido exploradas desde a antiguidade sempre com muita desconfiança pelos matemáticos e pela atividades mercantis que ocorriam. Assim a nessecidade de efetuar operações de adição e multiplicação por parte dos inteiros. Sendo assim, neste capítulo iremos admitir alguns subconjuntos dos inteiros, considerando seis axiomas munidos das operações de adição e multiplicação e além disso apresentamos a ordenação neste conjunto ($\mathbb{Z}$).

2.1 Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é denotado pela letra $\mathbb{Z}$ e representado por

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Em $\mathbb{Z}$, temos os seguintes subconjuntos

(i) $\mathbb{Z}^*$ - conjunto dos números inteiros não nulos
$\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z}\ , \neq 0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$

(ii) $\mathbb{Z}_+$ - conjunto dos inteiro não negativos
$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

(iii) $\mathbb{Z}_-$ - conjunto dos inteiros não positivos
$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z};\ x \leq 0\} = \{\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

(iv) $\mathbb{Z}^*_+$ - conjunto dos inteiros positivos
$\mathbb{Z}^*_+ = \{x \in \mathbb{Z};\ x > 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

(v) $\mathbb{Z}^*_-$ - conjunto dos inteiros negativos
$\mathbb{Z}^*_+ = \{x \in \mathbb{Z};\ x < 0\} = \{\cdots, -5, -4, -3, -2, -1\}$

Obs.: No conjunto dos números inteiros existe um subconjunto que destacamos: o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{Z}^*_+ = \mathbb{N}$$

No decorrer desta secção enunciaremos as propriedades dos números inteiros em relação a adição (+) e multiplicação ($\cdot$), onde a, b e $c \in \mathbb{Z}$**.** Mas, antes consideremos seis axiomas.

(1) Se $a = a'$ e $b = b'$, então $a + b = a' + b'$ e $a \cdot b = a' \cdot b'$, $\forall\ a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$. (Bem definidas)
(2) $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$. (Comutativas)
(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (Associativas)

(4) Existe 0 e 1 $\in \mathbb{Z}$, tal que $0 + a = a + 0 = a$ e $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\ a \in \mathbb{Z}$. (Elementos Neutros)

(5) Existe $b = (-a)$, tal que $a + b = 0$, $\forall\ a \in \mathbb{Z}$. (Elemento Simétrico)

(6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$ (Distributiva com relação a adição)

Os conjuntos onde as operações de adição e multiplicação que possuem as propriedades $(1) - (6)$ são chamados de **anel.**

Podemos particionar o conjunto dos números inteiros usando o conjunto dos números naturais, o conjunto unitário zero e o $-\mathbb{N}$, assim

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

onde $-\mathbb{N}$ é o conjunto dos simétricos dos elementos de $\mathbb{N}$.

A partir dos seis axiomas, iremos destacar algumas proposições.

Proposição 1. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{N}$

Demonstração. Temos que $0 \cdot a = 0$, pois $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, o que implica que $0 \cdot a - 0 \cdot a = (0 \cdot a + 0 \cdot a) - 0 \cdot a = 0 \cdot a + (0 \cdot a - 0 \cdot a) = 0 \cdot a$.
Assim, $0 = 0 \cdot a$.

Proposição 2. A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z},\ a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Demonstração. A implicação $a + c = b + c$ é consequência do fato da adição ser bem defnida. Suponha agora que $a + c = b + c$. Temos três possibilidades:
(i) $a < b$. Temos que $a + c < b + c$, o que é um absurdo.

(ii) $b < a$. Pelo mesmo argumento acima, $b + c < a + c$, o que também é um absurdo.

(iii) $a = b$. Esta é a única alternativa válida.

Diante das propriedades relacionadas a adição, podemos definir uma outra operação básica, a subtração, bem como enunciar algumas propriedades dessa operação.

Definição 2. 1. (Subtração) define-se b menos a, denotado por $b - a$, como sendo

$$b - a = b + (-c).$$

diz-se que $b - a$ é o da **subtração** de a e b.

Algumas propriedades da subtração

- $a - a = 0$
- $a - 0 = a$
- $0 - a = -a$
- $-(b - a) = a - b$
- $c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a$

2.2 Ordenação dos Inteiros

Precisamos de características únicas que somente os inteiros possuem. E, para isto admitiremos que em $\mathbb{Z}$ também valem as seguintes propriedades:

(7) $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$. (Fechamento de $\mathbb{N}$.)

(8) Tricotomia: Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

(i) $a = b$; (ii) $b - a \in \mathbb{N}$; (iii) $-(b - a) = a - b \in \mathbb{N}$.

Dizemos que a é menor do que b, simbolizado por $a < b$, toda vez que a propriedade (ii) for verificada.

Assim, segue da propriedade (iii) que $b < a$

Podemos reescrever a propriedade (8) usando a notação $(<)$.
Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, uma e somente uma, das seguintes condições é verificada:

(i) $a = b$; (ii) $a < b$; (iii) $a < b$.

Utilizando a notação $b > a$, que se lê b é maior do que a, para representar $a < b$.

Desde que $a - 0 = a$, decorre das definições que $a > 0$ se, e somente se, $a \in \mathbb{N}$.

Portanto,

$$\{ x \in \mathbb{Z};\ x > 0\} = \mathbb{N}\ e \{ x \in \mathbb{Z};\ x < 0 \} = -\mathbb{N}.$$

Daí decorre que $a > 0$ se, e somente se, $-a < 0$.

Proposição 3. A relação menor do que é transitiva:

$$\forall\ a, b, c \in\ \mathbb{Z}; a < b \quad \text{e} \quad b < c \Rightarrow a < c.$$

Demonstração. Supondo $a < b$ e $b < c$, temos que existem $d, f\ \in \mathbb{N}^*$, tais que

$$b = a + d \text{ e}$$

$c = b + f$. Logo, usando a associatividade da adição, temos que

$$c = b + f = (a + d) + f = a + (d + f),$$

com $d + f\ \in \mathbb{N}^*$, o que implica que $a < c$.

Proposição 4. A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que":

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z};\ a < b \Leftrightarrow a + c < b + c.$$

Demonstração. Suponha que $a < b$. Logo, existe $d \in \mathbb{N}^*$, tal que $b = a + d$. Somando c a ambos os lados desta última igualdade, pela comutatividade e associatividade da adição, temos

$$b + c = c + b + (a + d) = (c + a) + d = (a + c) + d,$$

o que mostra que $a + c < b + c$.

Reciprocamente, suponha que $a + c < b + c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades:

(i) $a = b$. Isto acarretaria $a + c = b + c$, portanto falso.

(ii) $b < a$. Isso acarretaria, pela primeira parte da demonstração, que

$b + c < a + c.$ também é falso.

(iii) $a < b$. Esta é a única possibilidade que resta.

Proposição 5. A multiplicação por elementos de $\mathbb{N}$ é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que":

$$\forall\ a, b \in \mathbb{Z};\ \forall\ c \in \mathbb{N}^*, \mathrm{a} < \mathrm{b}\ \Leftrightarrow \mathrm{a} \cdot \mathrm{c} < \mathrm{b} \cdot \mathrm{c}.$$

Demonstração. Suponha que $a < b$. Logo, existe $d \in \mathbb{N}^*$, tal que $b = a + d$. Multiplicando por c a ambos os lados dessa última igualdade, pelas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação, decorre

$$b \cdot c = c \cdot b = c \cdot (a + d) = c \cdot a + c \cdot d = a \cdot c + c \cdot d,$$

o que mostra que $a \cdot c < b \cdot c$, pois, pelo fechamento, $c \cdot d \in \mathbb{N}^*$.

Reciprocamente, suponha que $a \cdot c < b \cdot c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades:

(i) $a = b$. Isso acarretaria $a \cdot c = b \cdot c$, portanto falso.

(ii) $b < a$. Isso acarretaria, pela primeira parte da demonstração, que $b{:}\,c < a{:}\,c$, também é falso.

(iii) $a < b$. Esta é a única possibilidade que resta.

Proposição 6. A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{Z};\ \forall\ c \in \mathbb{Z} - \{0\},\ a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c.$$

Demonstração. A implicação $a = b \Longrightarrow a \cdot c = b \cdot c$ é consequência imediata do fato da multiplicação ser bem definida.

Suponha agora que $a \cdot c = b \cdot c$. Temos três possibilidades:

(i) $a < b$. Temos que $a \cdot c < b \cdot c$, o que é um absurdo.

(ii) $b < a$. Pelo mesmo argumento acima, $b \cdot c < a \cdot c$, o que também é um absurdo.

(iii) $a = b$. Esta é a única alternativa válida.

2.3 Domínio de Integridade

Definição: Domínio de integridade. Um domínio de integridade é um anel comutativo unitário tal que $a, b \in A$ e $a \cdot b = 0$,então $a = 0$ ou $b = 0$.

A propriedade acima admite uma contrapositiva:

Para todos $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, tem-se que $a \cdot b \neq 0$.

Observação: A relação (<) não é uma relação de ordem, pois não admite a propriedade reflexiva.

Dizemos que a é *menor* ou *igual* do que b, ou que b é *maior* ou *igual* do que a, escrevendo $a \leq b$ ou $b \geq a$, se $a < b$ ou $a = b$.
Observe que $a \leq b$ se, e somente se, $b - a \in N \cup \{0\}$.

A relação (≤) é efetivamente uma relação de equivalência, pois possui as seguintes propriedades:

(1) Reflexiva: $\forall\ a \in \mathbb{Z}$, $a \leq a$;

(2) Antissimétrica: $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$;

(3) Transitiva: $\forall\ a, b, e \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Por conta do rigor matemático, temos neste capítulo uma construção rigorosa com as demonstrações precisas deste conjunto numérico, através das noções básicas e de relações de equivalência de como colocamos os números inteiros para resolver problemas de contagem.

3 Indução Matemática

A Indução Matemática é utilizada para provar grandes quantidades de problemas matemáticos, pois verifica se determinada proposição é válida para o menor elemento do conjunto a ser considerado, admite-se uma hipótese de indução e mostra-se que a proposição é verdadeira para o sucessor $(n+1)$.

Simbolicamente provar por indução matemática que uma sentença aberta $p(n)$ é verdadeira para todo inteiro positivo n utilizamos de dois passos:

Passo base. Seja $p(n)$ uma sentença aberta tal que

i) $p(1)$ é válida;

Passo indutivo

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $p(n)$ implica na validez de $p(n+1)$, onde $n+1$ é o sucessor de n.

Então $p(n)$ é válida para qualquer que seja o número inteiro positivo n.

Na prova por indução matemática não é necessariamente assumido que $p(n)$ é verdadeiro para todo n pertencente ao conjunto considerado, e sim é mostrado que se for assumido que $p(n)$ é verdade, então deve-se concluir que $p(n+1)$ também é verdadeira.

3.1 Teorema. (Princípio de Indução Matemática)

Sejam S um subconjunto de $\mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{N}$ tais que

i) $a \in S$.

ii) $\forall\, n \in S$ tem-se que $n+1 \in S$.

Então, $\{\, x \in\ \mathbb{Z};\ x \geq a \,\} \ \subset S.$

Demonstração: De fato, vamos supor por contradição que $S' \not\subset S$, onde $S' = \{x \in \mathbb{Z}; \mathrm{x} \geq \mathrm{a}\}$

Desde que S' é limitado inferiormente, pelo *Princípio da Boa Ordenação*, existe $c \in S - S'$ menor elemento.

E, $c \in S'$ e $c \notin S$, assim $c-1 \in S'$ e $c-1 \in S$

Por (ii),

$c = (c-1)+1 \in S$

Contradição, pois $c \notin S$. Logo, $S' \subset S.$

3.2 Teorema. (Prova por Indução Matemática).

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em $n \in \mathbb{Z}$. Suponha que
(i) $p(a)$ é verdadeira, e que
(ii) $n \geq \mathrm{a}$, $p(n)$ verdadeira $\Longrightarrow p(n+1)$ é verdadeira.

Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Demonstração: Seja
$S = \{n \in \mathbb{Z}$, $p(n)$ é verdadeira$\}$

Por (i), $p(a)$ é verdadeira, então $a \in S$.

Por (ii), $p(n)$ verdadeira, então $p(n+1)$ é verdadeira, isto é, se $n \in S$ então $n+1 \in S$.

Pelo Princípio de Indução Matemática o conjunto $\{\, x \in \mathbb{Z};\, x \geq a \,\} \subset S$, logo $p(n)$ é verdadeira, para todo $n \geq a$.

Exemplo 3.1. Vejamos como usar esse método para mostrar a validade, para todo natural n, da fórmula

$$p(n): 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Solução: Vamos provar por indução matemática em "n".
Passo Base. Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que $p(1)$ é verdadeira, ou seja,
(i) $p(1)$, para $n = 1$, tem-se $p(1): 1 = 1^2 = 1$

Passo Indutivo:
(ii) Admitindo a hipótese de indução para n, isto é, que $p(n)$ é verdadeira, ou seja

$$p(n): 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Mostraremos que $p(n+1)$ é verdadeira, isto é,

$$p(n+1): 1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$$

Assim somando $2n+1$, que é o próximo número ímpar após $2n-1$, em ambos os lados da igualdade na hipótese de indução, obtemos

$$p(n+1): 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1)$$

$$p(n+1): 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$$

Dessa forma mostramos que $p(n+1)$ verdadeira, toda vez que $p(n)$ é verdadeira. Pelo teorema, a sentença é válida para todo número natural n.

Exemplo 3.2. Prove que para todos os inteiros $n \geq 1$,

$$p(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solução: Vamos provar por indução matemática em "n".

Passo Base. Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, temos $p(1)$ será verdadeira:

(i) $p(1)$, para $n = 1$, tem-se $p(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

A sentença é verdadeira para $n = 1$.

Passo Indutivo

(ii) Assim se admitirmos hipótese de indução verdadeira para $n = 1$ então deve ser verdadeira para $n + 1$, ou seja, $p(n) \longrightarrow p(n+1)$.

$$p(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para algum inteiro $n \geq 1$.

Deve-se mostrar que

$$p(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Assim somando $n + 1$, em ambos os lados da igualdade na hipótese de indução, obtemos:

$$p(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$p(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$p(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$p(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$p(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dessa forma mostramos que $p(n+1)$ é verdadeira, logo a sentença é válida para todo n natural.

Exemplo 3.3. Prove que para todo natural n,

$$p(n): 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Solução: Vamos provar por indução matemática em "n".

Passo Base. Considerando o menor elemento de $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que $p(0)$ é verdadeira, ou seja,

(i) $p(0)$, para $n = 0$, tem-se $p(0): 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$

Passo Indutivo

(ii) Se a fórmula é verdadeira para a hipótese de indução em; $p(n)$, então deve ser verdadeira para $p(n+1)$, ou seja, $p(n) \longrightarrow p(n+1)$.

$$p(n)\colon 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

Deve-se mostrar que

$$p(n+1)\colon 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

Assim somando 2^{n+1} em ambos os membros da igualdade na hipótese de indução, obtemos

$$p(n+1)\colon 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$$
$$p(n+1)\colon 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2.2^{n+1} - 1$$
$$p(n+1)\colon 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

Dessa forma mostramos que $p(n+1)$ é verdadeira, logo a proposição é válida para todo número natural n.

Exemplo 3.4. Vamos validar a fórmula para $n \in \mathbb{N}$

$$p(n)\colon 1^1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Provar por indução matemática em "n"
Solução: Passo Base. Note que para $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que $p(1)$ é verdadeira, ou seja,
(i) $p(1)\colon 1^1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

Passo Indutivo:
(ii) Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $p(n)$ é a hipótese de indução verdadeira, somando $(n+1)^2$ a ambos os lados da igualdade, temos que

$$p(n+1)\colon 1^1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$p(n+1)\colon 1^1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$
$$p(n+1)\colon 1^1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$
$$p(n+1)\colon 1^1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

Sendo assim verdadeiro para $p(n+1)$ é verdadeira.
Portanto, a sentença é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.5. (Diagonais de um Polígono) Prove que um polígono convexo de "n" lados possui

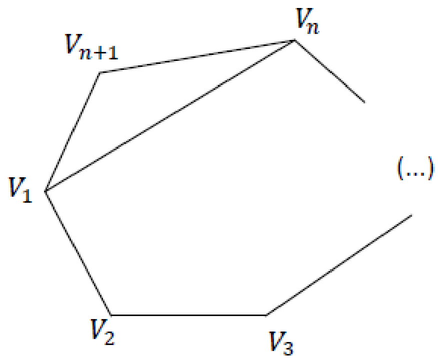
$$p(n): \frac{n(n-3)}{2},$$

diagonais.

Solução: Prova por indução matemática em "n".
Passo base. Considerando que $n \geq 3$, mostraremos que $p(3)$ é verdadeira, ou seja,
i) Se $n = 3$, o polígono é um triângulo e possui $p(3): \frac{3(3-3)}{2} = 0$ diagonais, ou seja, não possui diagonais;

ii) Suponhamos que, para algum $n > 3$, seja verdade que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados seja $p(n): \frac{n(n-3)}{2}$ e consideremos um polígono de $n+1$ lados, com vértices. $V_1, V_2, ..., V_n$ e V_{n+1}. Se unirmos V_1 a V_n teremos um polígono de n lados que, por hipótese, possui $p(n): \frac{n(n-3)}{2}$ diagonais. Veja o gráfico

Figura1. Polígono Convexo



Fonte: O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA – uma abordagem no ensino médio, 2013, página 24

Assim, o número de diagonais do polígono de $n+1$ lados será dado por

$$p(n+1): \frac{n(n-3)}{2} + 1 + (n+1-3),$$

onde:

$\frac{n(n-3)}{2}$ é o número de diagonais do polígono de n lados (hipótese de indução).

1 é o lado V_1V_n do polígono de n lados é uma diagonal na ótica do polígono de $n+1$ lados.

$(n+1-3)$ é o vértice V_{n+1} se une a todos os vértices para formar diagonais, excetuando-se V_1, V_n e ele mesmo.
Efetuando-se as devidas contas vemos que

$$p(n+1): \frac{n(n-3)}{2} + 1 + (n+1-3)$$

$$p(n+1): \frac{n(n-3)+2+2(n+1-3)}{2}$$
$$p(n+1): \frac{n^2-3n+2+2n+2-6}{2}$$
$$p(n+1): \frac{n^2-n-2}{2}$$
$$p(n+1): \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$
$$p(n+1): \frac{(n+1)(n+1-3)}{2}$$

O que prova, via indução que $p(n+1)$ é verdadeira.

4 Divisibilidade

Nesta seção definimos a divisibilidade, enunciamos e demonstramos o teorema da Divisão Euclidiana. A divisibilidade nos permite saber quando um número é divisível por outro, possibilitando a verificação de restos ou não, para isto usaremos a divisão euclidiana.

4.1. Relação de Divisibilidade

Nos números inteiros, relacionamos dois elementos através da relação de divisibilidade. Assim, como a divisão de um número inteiro por outro nem sempre será possível, podemos expressar esta possibilidade através da definição abaixo.

Definição 4.1. (Divisibilidade) Sejam dois números inteiros a e b, diz-se que a divide b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Assim neste caso, a é um divisor de b, ou um a é um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a.

Observe que a notação $a|b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{Z}$, nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade a existência de um inteiro c, tal que $b = c \cdot a$.

A negação dessa sentença é representamos por $a \nmid b$, significando que inexiste número inteiro c tal que $b = c \cdot a$.

Exemplo 4.1. $9 \mid 27$, pois $27 = 9 \cdot 3$. Por outro lado 9 não divide 11, pois considerando o conjunto $M = 9m$, com $m \in \mathbb{Z}$; $M = \{\cdots , -18, -9, 0, 9, 18, \cdots\}$, dos múltiplos de 9, temos que 11 não pertence ao mesmo.

Proposições: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$**,** tem-se que

i) $1|a, \forall a \in \mathbb{Z}$;

Demonstração: De fato, $1|a$ pois $a = 1 \cdot a$ para todo inteiro a, pois 1 é elemento neutro da multiplicação.

ii) $a|a$;

Demonstração: De fato, se a é um número inteiro qualquer, $a|a$, uma vez que $a = 1 \cdot a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}$.

iii) $a|0$;

Demonstração: De fato, $a|0$ pois $0 = a \cdot 0$.

iv) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;

Demonstração: Se $a|b$, então existe um inteiro q, tal que $b = a \cdot q$. e que se $b|c$, então existe um inteiro q', tal que $c = b \cdot q'$.

Portanto, $c = b \cdot q' \Longrightarrow c = a \cdot q \cdot q'' \Longrightarrow c = a \cdot (q \cdot q')$. Ou seja, a é divisor de c.
v) Sejam a, b, c e d, inteiros, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, então, se $a|b$ e $c|d$, então $(a \cdot b)|(b \cdot d)$;

Demonstração: Se $a|b$, então temos um inteiro q, tal que $b = a \cdot q$.
Do mesmo fato, se $c|d$, então temos um inteiro q', tal que $d = c \cdot q'$.

Assim temos que:

$$b \cdot d = (a \cdot q) \cdot (c \cdot q') = (a \cdot c) \cdot (q \cdot q').$$

Ou seja, $(a \cdot c)$ é um fator de $(b \cdot d)$, demonstrando a proposição.

vi) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b \pm c$;

Demonstração: Se $a|b$ e $a|c$, então existem q_1 e q_2 inteiros tais que:

$$b = a \cdot q_1 \text{ e } c = a \cdot q_2.$$

Somando as duas equações temos:

$$b + c = a \cdot (q_1 + q_2).$$

Portanto, $a|b + c$.

Analogamente, demonstra-se a subtração.

vii) Se $a|b$, então $a|b \cdot c$;

Demonstração: Se $a|b$ então temos um número inteiro a, tal que, $b = a \cdot q$. Multiplicando ambos os membros da equação por um inteiro c, temos que, $b \cdot c = a \cdot (q \cdot c)$. Portanto, $a|b \cdot c$.

viii) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|m \cdot b + n \cdot c$, quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Se $a|b$ e $a|c$ temos pelo item anterior que $a|b \cdot m$ e $a|c \cdot n$ para quaisquer inteiros m e n. Logo, pelo item (vi), segue que $a|b \cdot m + c \cdot n$.

ix) Sejam a e b inteiros, diferentes de zero, tem-se que se $a|b$, então $|a| \leq |b|$.

Demonstração: Se $a|b$ com $b \neq 0$, então existe um inteiro $q \neq 0$ tal que $b = a \cdot q$.
Logo: $|b| = |a| \cdot |q|$, como $b \neq 0$, temos $q \neq 0$, logo $1 \leq |q|$ e, consequentemente, $|a| \leq |a| \cdot |q| = |b|$.

x) Se $b|a$ e $a|b$, então $a = \pm b$;
Demonstração: Suponhamos que $a|b$ e que $b|a$. Se $a = 0$ ou $b = 0$, temos que

$$a = b = 0.$$

No caso $a, b \neq 0$ temos pelo item (ix) que $|a| \leq |b|$ e $|b| \leq |a|$.
Logo, $|a| = |b| \Longrightarrow a = \pm b$.

xi) Se $a|1$, então $a = \pm 1$;

Demonstração: Suponhamos que $a|1$. Do item (i) temos que $1|a$ para todo inteiro a.
Logo pelo item anterior segue que $a = \pm 1$.

xii) $a|b \Leftrightarrow -\mathrm{a}|\mathrm{b} \Leftrightarrow \mathrm{a}|-\mathrm{b} \Leftrightarrow -\mathrm{a}|-\mathrm{b}$.
Demonstração:

$$\begin{aligned} a|b &\Leftrightarrow b = a \cdot q; q \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow b = (-a) \cdot (-q),\ -q \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -b = a \cdot (-q); -q \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -\mathrm{b} = (-\mathrm{a}) \cdot q; q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.2. $1|31$, pois $31 = 1 \cdot 31$.

Exemplo 4.1.3. $5|5$, pois $5 = 1 \cdot 5$.

Exemplo 4.1.4. $6|0$, pois $0 = 6 \cdot 0$.

Exemplo 4.1.5. $3|12$ e $12|48$, segue que, $12 = 3 \cdot 4$ e $48 = 12 \cdot 4$, daí
$48 = (3 \cdot 4) \cdot 4 = 3 \cdot (4 \cdot 4)$.
Logo $3|48$.

Exemplo 4.1.6. $5|25$ e $3|12$,temos que $25 = 5 \cdot 5$ e $12 = 4 \cdot 3$. Portanto,
$25 \cdot 12 = (5 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 3)$=$(5 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 4)$.
Logo, $5 \cdot 3|25 \cdot 12$.

Exemplo 4.1.7. $6|18$ e $6|24$, com isso temos que $18 = 6 \cdot 3$ e $24 = 6 \cdot 4$. Somando as duas equações resulta que $18 + 24 = 6 \cdot (3 + 4)$.
Logo, $6|18 + 24$.

Exemplo 4.1.8. $3|12$, com isso temos que $12 = 3 \cdot 4$. Multiplicando a equação por um inteiro k, temos que, $12 \cdot k = (3 \cdot 4) \cdot k = 3 \cdot (4 \cdot k)$.
Portanto, $3|12 \cdot k$.

Exemplo 4.1.9. $6|18$ e $6|24$, pelo item (v) da proposição, sabemos que $6|18 \cdot m$ e $6|24 \cdot n$. Daí, pelo item (vi), temos $6|(18 \cdot m) + (24 \cdot n)$, $\forall\ m$ e n inteiros.

4.2 Divisão Euclidiana

Nesta seção apresentaremos o teorema mais importante deste capítulo, o Teorema da Divisão Euclidiana que é um instrumento muito importante na obra de Euclides.

Teorema 4.2.1: (Divisão Euclidiana) Se a e b são dois números inteiros, com $b > 0$, então existe e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às condições:

$$a = b \cdot q + r \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r < b.$$

Demonstração: Considere *S* o conjunto de todos os inteiros não negativos que são da forma

$$a - bx,$$

$x \in \mathbb{Z}$**,** isto é,

$$S = \{a - bx;\ x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}$$

Mostraremos que $S \neq \phi$. De fato, sendo $b > 0$, então $b \geq 1$ e tomando $x = -|a|$, resulta que

$$a - b \cdot x = a - b\,(-|a|) = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0$$

Assim, pelo "Princípio da boa ordenação", existe o elemento mínimo *r* de *S*, tal que

$r \geq 0$ e $r = a - b \cdot a$ (em particular)
ou $r = a - b\,q$
$a = bq + r$, $q \in \mathbb{Z}$**.**

Portanto, por hipótese $0 < b$, então

$$r_1 - r = 0$$
$$r_1 = r$$

e desde que $b \neq 0$, temos

$$r_1 - r = (q - q_1)b$$
$$0 = (q - q_1)b,$$

Logo

$$q - q_1 = 0$$
$$q = q_1$$

Exemplo 4.2.1. Efetue a divisão euclidiana no seguinte caso 16 por 4.
Solução: Temos que, $16 = 4 \cdot 4 + 0$. Assim, 16 é múltiplo de 4.

Exemplo 4.2.2. Efetue a divisão euclidiana no seguinte caso 21 por 5.
Solução: Desse modo, temos que, $21 = 5 \cdot 4 + 1$ e $0 < 1 < 5$.
Assim, temos que o resto e o quociente da divisão 21 por 5, são 1 e 4 respectivamente.

Exemplo 4.2.3. Efetue a divisão euclidiana no seguinte caso -35 por 3.
Solução: Desse modo, temos que, $-35 = 3 \cdot (-12) + 1$ e $0 < 1 < 3$.
Assim, temos que o resto e o quociente da divisão -35 por 3, são 1 e -12 respectivamente.

4.3 Aritmética da Paridade

Temos várias situações em que é possível determinarmos a paridade de expressões envolvendo números naturais, usando das propriedades da paridade da soma e da paridade do produto, reapresentaremos cada uma delas acompanhada de sua respectiva demonstração.

Por definição, todo número inteiro é *par* quando dentre de seus fatores de composição aparecer o número *dois*.

Número par: $a = 2k,$ para todo k pertencente ao conjunto dos inteiros.

Assim, podemos escrever um número ímpar da forma: $a = 2k + 1$, para todo k pertencente ao conjunto dos inteiros

Propriedade 4.3.1 (Paridade da soma):

1- A soma de dois números naturais de mesma paridade é par.

2- A soma de dois números naturais de paridade oposta é ímpar.

Demonstração:

1- Sejam a e b números naturais de mesma paridade.

Suponhamos, inicialmente, que a e b sejam pares.

Assim, existem números naturais k e t tais que $a = 2k$ e $b = 2t$. Assim temos que:

$$a + b = 2k + 2t = 2(k + t). \text{ (i)}$$

Se $m = k + t$, temos que m é um número natural; logo, segue de (i) que

$a + b = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$. Então, $a + b$ é par.

Agora supondo, agora, que a e b sejam ímpares.

Logo, existem números naturais k e t tais que

$a = 2k + 1$ e $b = 2t + 1$. Assim:

$$a + b = (2k + 1) + (2t + 1) = 2k + 2t + 2 = 2\ (k + t + 1). \text{ (ii)}$$

Se $m = k + t + 1$, temos que m é um número natural; portanto, de (ii), vem que $a + b = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$. Portanto, $a + b$ é, igualmente, par.

Logo, a soma de dois números de mesma paridade é par.

2- Agora fazendo que a e b números naturais de paridade oposta. Assim, um desses números é par e o outro é ímpar.

Assim, sem perda de generalidade, que a seja par e b seja ímpar.

Dessa forma, existem números naturais k e t tais que

$a = 2k$ e $b = 2t + 1$ e, com isso,

$$a + b = 2k + (2t + 1) = 2(k + t) + 1. \text{ (iii)}$$

Se $m = k + t$, como t é um número natural, de (iii), temos que

$a + b = 2m + 1$, com $m \in \mathbb{N}$. Portanto, $a + b$ é ímpar.

Logo, a soma de dois números de paridades diferentes é ímpar.

Propriedade 4.3 2 (Paridade do produto):

O produto de dois números naturais só será ímpar se os dois números forem ímpares.

Demonstração:

1- Sejam a e b números naturais ímpares.

Assim, existem números naturais k e t tais que

$a = 2k + 1$ e $b = 2t + 1$. Então:

$$a \cdot b = (2k + 1) \cdot (2t + 1) = 4(k \cdot t) + 2k + 2t + 1 = 2(2(k \cdot t) + k + t) + 1. \text{ (i)}$$

Se $m = 2(k \cdot t) + k + t$, temos que m é um número natural; logo, segue de (i) que

$a \cdot b = 2m + 1$, com $m \in \mathbb{N}$.

Portanto, $a \cdot b$ é ímpar.

Logo, o produto entre dois números ímpares será ímpar.

2- Fazendo agora, que a e b sejam números naturais, com a par. Não importando se b é par ou ímpar: só precisamos garantir que os dois não são ímpares.

Como a é par, existe um número natural k tal que $a = 2k$. Assim,

$$a \cdot b = (2k) \cdot b = 2(k \cdot b). \text{ (ii)}$$

Se $m = k \cdot b$, temos que m é um número natural; portanto, de (ii), concluímos que $a \cdot b = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.

Logo, $a \cdot b$ é par, independente de b ser par ou ímpar.

Exemplo 4.3.1. Prove que todo número natural e seu quadrado têm a mesma paridade.

Demonstração: Este resultado é uma consequência da propriedade 4.3.2.

1- Seja a um número natural ímpar.

Então existe um k natural tal que $a = 2k + 1$. Assim

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1. \text{ (i)}$$

Se $m = 2k^2 + 2k$, temos que m é um número natural; logo, segue de (i) que

$a^2 = 2m + 1$, com $m \in \mathbb{N}$.

Portanto, assim como a, a^2é ímpar.

2- Suponhamos, agora, que a seja um número natural par.

Logo existe um número natural k tal que $a = 2k$ e, então,

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2). \text{ (ii)}$$

Se $m = 2k^2$, temos que m é um número natural e, portanto, de (ii), concluímos que $a^2 = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.

Logo, assim como a, a^2 é par.

Exemplo 4.3.2. Prove que um número natural e seu cubo têm a mesma paridade.

Demonstração:

1- Seja a um número natural par.

Pelo exemplo 4.3.1. a^2 é par, logo, como o produto de dois pares é um par, então a^3 é par.

$$a^3 = a^2 \cdot a$$

2- Seja a um número natural ímpar.

Pelo exemplo 4.3.1. a^2 é ímpar, logo, como o produto de dois ímpares é um ímpar, então a^3 é ímpar.

$$a^3 = a^2 \cdot a$$

Exemplo 4.3.3. Prove que, para quaisquer números naturais a e b, se a for ímpar então b e $a \cdot b$ têm a mesma paridade.

Demonstração: Tome dois números naturais a e b, com a ímpar; assim $a = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

1- Suponha, inicialmente, b par. Assim, pela propriedade 4.3.2, $a \cdot b$ é par, que é a paridade de b.

$$a \cdot b$$

2- Suponha, agora, b ímpar. Assim, pela propriedade .4.3.2, $a \cdot b$ é ímpar, que é a paridade de b.

$$a \cdot b$$

Exemplo 4.3.4. Mostre que se um número natural é par, seu sucessor é ímpar, e vice-versa, ou seja, números naturais consecutivos têm paridade oposta.

Demonstração: Seja a um número natural e considere o seu sucessor, $a + 1$.

1- Suponha, inicialmente, a par. Assim, existe um número natural k de modo que $a = 2k$.

Assim, temos que $a + 1 = 2k + 1$, ou seja, $a + 1$ é ímpar.

2- Supondo, agora, a ímpar. Então, existe um número natural k de modo que

$$a = 2k + 1.$$

Dessa forma, $a + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$. Se fizermos $m = k + 1$, então teremos que $a + 1 = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$, ou seja, $a + 1$ é par.

Exemplo 4.3.5. Mostrar que a soma de dois inteiros ímpares consecutivos é divisível por 4. E a de dois pares consecutivos?

Solução: Assumindo que um número ímpar é da forma $2k + 1$ para todo k pertencente aos números inteiros.

Se $2k + 1$ é um número ímpar, o próximo número ímpar é dado por $2k + 3$ e para representar a soma de dois números ímpares consecutivos, fazemos:

$$(2k + 1) + (2k + 3) = 4k + 4$$

Fatorando, temos:

$$(2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$$

Temos então que 4 é um fator de $4k + 4$ e, portanto, $4k + 4$ é divisível por 4, assim a soma de dois números ímpares consecutivos é divisível por 4.

5 Congruência Modular

Neste capítulo, apresentaremos a definição e algumas propriedades de congruência modular com suas demonstrações, mostraremos que dois inteiros possuem o mesmo resto, quando divididos por inteiro positivo, estes serão congruentes.

5.1 Definição. Seja $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$, com $\boldsymbol{m} > \mathbf{1}$. Diremos que dois números inteiros $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são congruentes módulo $\boldsymbol{m}$ se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ possuírem mesmo resto quando divididos por $\boldsymbol{m}$. Neste caso, simbolizaremos esta situação como segue

$$a \equiv b \; mod \; m \; ,$$

Assim quando *a* e *b* não são congruentes módulo *m*, escreve-se

$$a \not\equiv b \; mod \; m.$$

Proposição 5.1. Considere $a, b \in \mathbb{Z}$. Temos $a \equiv b \; mod \; m$ se, e somente se, $m \mid a - b$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponha que $a \equiv b \; mod \; m$
Temos que $a = qm + r$ e $b = q_1 m + r$, sendo $0 < r < m$ e com $q, q_1 \in \mathbb{Z}$.
Então que: $a - b = (q_1 - q)m \Longrightarrow \mathrm{m} \mid a - b$.
($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\mathrm{m} \mid a - b$.
Logo, existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $a - b = mq$.

Daí,

$$b = a + mq.$$

Sejam r e q_1 o resto e o quociente da divisão euclidiana de b por m, isto é m

$$b = q_1 m + r, \text{ com } 0 < r < m$$

Sendo assim, temos que: $a + mq = mq_1 + r$.
Logo, $a = m(q_1 - q) + r$, com $0 < r < m$.
Portanto r também é o resto da divisão euclidiana de a por m.

Exemplo 5.1.1. $22 \equiv 4 \; mod \; 3$, pois os restos da divisão de 22 e de 4 por 3 são iguais a 1.

Propriedade 5.1.1. Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que
i) $a \equiv a \; mod \; m$.

ii) $a \equiv b \, mod \, m$, então $b \equiv a \, mod \, m$.
iii) se $a \equiv b \, mod \, m$ e $b \equiv c \, mod \, m$, então $a \equiv c \, mod \, m$.

Demonstração:
i) Como $m|0$, então $m|a - a$, o que nos diz que $a \equiv a \, mod \, m$.

ii) Se $a \equiv b \, mod \, m$, assim temos que $m|a - b$, logo $a - b = mq$. Multiplicando essa última igualdade toda por (-1), temos que $(-a + b) = m(-q)$, o que implica em $b \equiv a \, mod \, m$.

iii) Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $b \equiv c \, mod \, m$, então existe inteiros q e q_1 tais que

$$a - b = mq \text{ e } b - c = mq_1$$

Somando membro a membro as duas igualdades anteriores, temos que

$$(a - b) + (b - c) = mq + mq_1 \Longrightarrow a - c = m(q + q_1).$$

Logo,

$$m|a - b \Longrightarrow a \equiv c \, mod \, m.$$

Exemplo 5.1.2. $5 \equiv 5 \text{ mod } 3 \Leftrightarrow 3|(5 - 5) \Leftrightarrow 3|0$.

Exemplo 5.1.3. $7 \equiv 5 \text{ mod } 2$ e $5 \equiv 7 \text{ mod } 2 \Leftrightarrow 2|(7 - 5)$ e $2|(5 - 7) \Leftrightarrow 2|2 \, e \, 2|-2$.

Exemplo 5.1.4. $22 \equiv 7 \text{ mod } 5$ e $7 \equiv 12 \text{ mod } 5 \Leftrightarrow 5|(22 - 7)$ e $5|(7 - 12) \Leftrightarrow 5|15$ e $5| - 5$.
Logo, segue que $22 \equiv 12 \text{ mod } 5$.

5.2 Propriedades Operacionais

Existe na congruência modular, propriedades operacionais utilizadas na resolução de problemas, na elaboração de algoritmos e na fundamentação de novos teoremas.

Propriedades

i) Se $a \equiv b \; mod \; m$ e $c \equiv d \; mod \; m$, então $a + c \equiv b + d \; mod \; m$.

ii) Se $a \equiv b \; mod \; m$ e $c \equiv d \; mod \; m$, então $ac \equiv bd \; mod \; m$.

iii) Se $a \equiv b \; mod \; m$, então $a + c \equiv b + c \; mod \; m$.

iv) Se $a \equiv b \; mod \; m$, então $a^n \equiv b^n \; mod \; m$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

v) Se $a \equiv b \; mod \; m$ e $n|m$, então $a \equiv b \; mod \; n$.

Demonstração:
i) Se $a \equiv b \; mod \; m$ e $c \equiv d \; mod \; m$, então existem inteiros q e q_1 tais que:

$$a - b = mq \quad \text{e} \quad c - q = mq_1.$$

Somando membro a membro as duas igualdades anteriores, temos:

$$(a - b) + (c - d) = mq + mq_1 \Longrightarrow (a + c) - (b + d) = m(q + q_1).$$

Logo, resulta que:

$$m|(a + c) - (b + d) \Longrightarrow a + c \equiv b + d \; mod \; m.$$

ii) A demonstração é análoga ao item (i).

iii) Se $a \equiv b \; mod \; m$, temos que $a - b = mq$, somando e subtraindo c no primeiro membro da igualdade, temos:

$$a - b + c - c = mq \Longrightarrow (a + c) - (b + c) = mq.$$

Assim temos que:

$$a + c \equiv b + c \; mod \; m.$$

iv) Se $a \equiv b \; mod \; m$, então $m|a - b$. Sabemos que:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Como $m|a-b$, então $m|a^n-b^n$. Assim, $a^n \equiv b^n \ mod \ m$.

v) Se $a \equiv b \ mod \ m$, então $m|a-b$. Como $n|m \Longrightarrow n|a-b$. Logo, $a \equiv b \ mod \ n$.

Exemplo 5.2.1. Se somarmos todos os números de 1 a 2019 qual o resto da divisão por 10?
Resolução: A soma dos algarismos de 1 a 9

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0)=45$$

Notemos que,

$1+2+\cdots+10=55$ resto 5 na divisão por 10
$11+12+\cdots+20=155$ resto 5 na divisão por 10
$21+22+\cdots+30=255$ resto 5 na divisão por 10
$\vdots$
$2001+2002+\cdots+2010=20055$ resto 5 na divisão por 10

Como $2010=201\cdot 10$, que conforme acima são 201 blocos de 10 números, cuja soma deixa resto 5 na divisão por 10. Logo, só precisamos nos preocupar com este 5 e com o último algarismo dos nove últimos números:

$$5+1+2+3+4+5+6+7+8+9=50.$$

O último algarismo é 0, temos que esse número é divisível por 10, logo, o resto da soma é 0.

6 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Nesta Seção faremos o estudo das sequências denominadas de progressões aritméticas que é uma sucessão de números que geralmente possui uma lei de formação, com especificidades, como a sequência de números pares, ou de números primos, dentre outros.

6.1 Progressão Aritmética: é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente com uma constante $\boldsymbol{r}$. O número $\boldsymbol{r}$ é chamado "razão da progressão aritmética"

Exemplo 6.1 A sequência $(4, 7, 10, 13, 16, 19, 22)$ é uma progressão aritmética finita de razão $r = 3$.

Exemplo 6.2. A sequência $(10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4)$ é uma progressão aritmética finita de razão $r = -2$.

6.2. Termo Geral da P.A.

Numa progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (r) e do primeiro termo (a_1) através da fórmula matemática.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Assim para avançar um termo basta somar a razão ao primeiro termo, para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim sucessivamente.

Exemplo 6.2.1. O protocolo de determinado tribunal associa, a cada dia, a ordem de chegada dos processos aos termos de uma progressão aritmética de razão 2: a cada dia, o primeiro processo que chega recebe o número 3, o segundo, o número 5, e assim sucessivamente. Se, em determinado dia, o último processo que chegou ao protocolo recebeu o número 69, então, nesse dia, foram protocolados quantos processos?

Solução: Primeiro destacaremos as informações importantes do enunciado:

- r = razão 2
- a_1 = o primeiro processo que chega recebe o número 3
- a_n = o último processo que chegou ao protocolo recebeu o número 69

Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$69 = 3 + (n-1) \cdot 2$$
$$69 = 3 + 2n - 2$$

$$69 - 3 + 2 = 2n$$
$$n = \frac{68}{2}$$
$$n = 34$$

Logo, foram protocolados 34 processos.

Exemplo 6.2.2. Um ciclista percorre $15\,km$ na primeira hora de uma corrida. Na segunda hora de corrida, seu rendimento cai e ele só consegue percorrer $13\,km$, e na hora seguinte $11\,km$. Continuando nesta sequência, quantos quilômetros ele conseguirá percorrer nas 6 horas de prova?

Solução: Para calcular o total de quilômetros percorridos em 6 horas, precisamos somar os quilômetros percorridos em cada hora.
A partir dos valores informados, é possível notar que a sequência indicada é uma PA, pois a cada hora ocorre uma redução de 2 quilômetros $(13 - 15 = -2)$.

Portanto, podemos escrever a PA para encontrar o valor pedido, ou seja:

PA $(15, 13, 11, 9, 7, 5)$

Assim, sabemos que o primeiro termo da PA é 15, que sua razão é igual a -2 e que o número de termos é igual a 6.

Agora que conhecemos o valor de $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, basta somar todos os valores para encontrar o seu valor:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 = 60km$$

Logo, ao final de 6 horas, o ciclista percorreu $60km$.

Exemplo 6.2.3. Ao financiar uma casa no total de 20 anos, Carlos fechou o seguinte contrato com a financeira: para cada ano, o valor das 12 prestações deve ser igual e o valor da prestação mensal em um determinado ano é $R\$\ 50{,}00$ a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. Considerando que o valor da prestação no primeiro ano é de $R\$\ 150{,}00$, determine o valor da prestação no último ano.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_{20} = 150 + (20 - 1) \cdot 50$$
$$a_{20} = 150 + 19 \cdot 50$$
$$a_{20} = 150 + 950$$
$$a_{20} = 1100$$

O valor da prestação no último ano será de $R\$\ 1100{,}00$.

Exemplo 6.2.4. O preço de uma máquina nova é $R\$\ 150\ 000{,}00$. Com o uso, seu valor sofre uma redução de $R\$\ 2\ 500{,}00$ por ano. Sendo assim, por qual valor o proprietário da máquina poderá vendê-la daqui a 10 anos?

Solução: O problema indica que a cada ano o valor da máquina sofre uma redução de $R\$\ 2500{,}00$. Logo, no primeiro ano de uso, seu valor cairá para $R\$\ 147\ 500{,}00$. No ano seguinte será $R\$\ 145\ 000{,}00$, e assim por diante.
Percebemos então, que essa sequência forma uma PA de razão igual a $2\ 500$. Usando a fórmula do termo geral da PA, podemos encontrar o valor pedido.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

Substituindo os valores, temos:

$$a_{10} = 150\ 000 + (10-1)\cdot(-2\ 500)$$
$$a_{10} = 150\ 000 - 22500$$
$$a_{10} = 12750\ 0$$

Portanto, ao final de 10 anos o valor da máquina será de $R\$\ 127\ 500{,}00$.

6.3. Soma Dos Termos De Uma P.A.

Dada a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, que possui n termos, onde o primeiro termo é a_1, o segundo é a_2, $\cdots$, o penúltimo é a_{n-1} e o último é a_n.

Representando a soma desses termos por S_n, teremos a seguinte expressão

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

daí, teremos

$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots$$

logo, pela Soma de Gauss

$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots$$

Como sempre somamos dois termos da P.A. de n termos, teremos $\frac{n}{2}$ parcela iguais a $(a_1 + a_n)$, o que nos leva à fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Vejamos uma outra maneira para a soma dos termos de uma P.A.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Reescrevendo a soma dos termos da P.A. de outra forma e somando as formas membro a membro, como segue

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$+$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Assim teremos,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Daí, vem que

Podemos trocar a soma onde teremos n termos inicial iguais a $(a_1 + a_n)$ e resolvendo a equação temos a fórmula

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Exemplo 6.3.1. Dado o conjunto dos números naturais, não nulos, qual é a soma dos seus 200 primeiros números pares?

Solução: Para calcular essa soma, é necessário saber que os números pares são $2, 4, 6$ ... e que eles formam uma PA de razão 2. Além disso, o primeiro termo é 2 e o último deve ser descoberto por meio da fórmula do termo geral da PA. Observe:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_{200} = 2 + (200 - 1) \cdot 2$$
$$a_{200} = 2 + 199 \cdot 2$$
$$a_{200} = 2 + 398$$
$$a_{200} = 400$$

Tendo o termo de número 200 em mãos, substitua todos os valores na fórmula da soma dos termos da PA finita.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_{200} = \frac{(2 + 400) \cdot 200}{2}$$
$$S_{200} = \frac{402 \cdot 200}{2}$$
$$S_{200} = \frac{80400}{2}$$
$$S_{200} = 40200$$

Logo, a soma dos 200 primeiro números pares é 40200.

Exemplo 6.3.2. Com o intuito de construir um jogo novo, foram colocados sobre um tabuleiro de xadrez grãos de arroz da seguinte maneira: na primeira casa, foram colocados 5 grãos; na segunda, 10; na terceira, 15; e assim por diante. Quantos grãos de arroz foram usados nesse tabuleiro?

Solução: Seguindo esse padrão, teremos uma PA de razão 5, com primeiro termo também igual a 5. O número de termos dessa PA é 64, pois é exatamente o número de casas do tabuleiro. Falta apenas o número de grãos da última casa para calcular a soma. Esse número pode ser obtido da seguinte maneira.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_{64} = 5 + (64 - 1) \cdot 5$$
$$a_{64} = 5 + (63) \cdot 5$$
$$a_{64} = 5 + 315$$
$$a_{64} = 320$$

Agora basta substituir esses valores na fórmula da soma dos termos de uma PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_n = \frac{(5 + 320) \cdot 64}{2}$$
$$S_n = \frac{(325) \cdot 64}{2}$$
$$S_n = \frac{20800}{2}$$
$$S_n = 10400$$

Portanto o número de grãos colocados no tabuleiro é 10400 grãos de arroz.

Exemplo 6.3.3. Cris decidiu ser uma influenciadora digital, e, para isso, ela criou uma conta nas redes sociais. Realizando a divulgação para os seus amigos mais próximos, logo no primeiro dia, ela conseguiu o marco de 40 seguidores. Após esse marco, no segundo dia, ela conseguiu mais 14 seguidores, no terceiro dia também, e assim sucessivamente durante toda a primeira semana. Se esse comportamento for mantido, ou seja, se ela conseguir 14 seguidores por dia, qual será a quantidade de seguidores ao final de 30 dias?

Solução: A sequência formada pela quantidade de seguidores é uma P.A., cujo primeiro termo é 40 e cuja razão é 14. Queremos encontrar o termo a_{30}.
De modo geral, sabemos que

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Substituindo pelos valores conhecidos, temos que

$$a_{30} = 40 + (30 - 1) \cdot 14$$
$$a_{30} = 40 + (29) \cdot 14$$
$$a_{30} = 40 + 406$$
$$a_{30} = 446$$

Agora basta substituir esses valores na fórmula da soma dos termos de uma PA.

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_{30} = \frac{(40 + 446) \cdot 30}{2}$$
$$S_{30} = \frac{(486) \cdot 30}{2}$$
$$S_{30} = \frac{14580}{2}$$
$$S_{30} = 7290$$

Portanto o número de seguidores é 7290 no trigésimo dia.

7 Somatórios

Neste Capítulo estudaremos Somatórios e suas definições, proposições, demonstrações e exemplos de Somatórios.

7.1 Definição e Proposições

Definição 7.1.1. Seja (a_n) uma sequência de elementos de um conjunto A dotado de operações de adição, definimos o somatório dos seus n primeiros termos como sendo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Proposição 7.1 Sejam (a_i), (b_i) duas sequências de elementos do conjunto A e seja $c \in A$. Então,

i) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

ii) $\sum_{i=1}^{n} c.a_i = c.\sum_{i=1}^{n} a_i$;

iii) $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_i$;

iv) $\sum_{i=1}^{n} c = n.c.$

Demonstração

i) A soma

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$$

Assim ao somar os n primeiros termos da nova sequência (c_n), onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se $c_n = a_n + b_n$. Provaremos o resultado por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{1}(a_i + b_i) = a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i + \sum_{i=1}^{1} b_i,$$

verifica-se que para $n = 1$ a fórmula é válida.

Por hipótese de indução, admita que a fórmula é válida para algum número natural n. Então temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + (a_{n+1} + b_{n+1})$$
$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + (a_{n+1} + b_{n+1})$$
$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} b_i + +b_{n+1}$$
$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i$$

Mostrando assim, que a fórmula é válida para $n + 1$, para todo n, e pelo Princípio da Indução, temos que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Usando a definição de somatórios, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} c.a_i = c.a_1 + c.a_2 + \cdots + c.a_n$$
$$\sum_{i=1}^{n} c.a_i = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$
$$\sum_{i=1}^{n} c.a_i = c.\sum_{i=1}^{n} a_i$$

iii) Provaremos esta fórmula por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_2 - a_1$$

o que mostra a validade da fórmula para $n = 1$.

Por hipótese de indução, admita que a proposição seja válida para um natural n.

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) + (a_{n+2} - a_{n+1})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1 + a_{n+2} - a_{n+1})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+2} - a_1)$$

Mostrando que a sentença é válida para $n + 1$ e, portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) O somatório

$$\sum_{i=1}^{n} c$$

representa a soma de n parcelas iguais a c, e, portanto, é igual a $n \cdot c$.

Exemplo 7.1. Seja a sequência $\{a_k\}$ em que $a_k = k^2$
Então temos que:

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

Exemplo 7.2. Seja a sequência $S = \{S_k\}$ onde $s \in \{0,3,7\}$ em que $S_k = s^2$.
Então temos que:

$$\sum_{s \in \{0,3,7\}} s^2 = 0^2 + 3^2 + 7^2 = 0 + 9 + 49 = 58$$

Exemplo 7.3. Prove que para todos os inteiros $n \geq 1$,

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

O que iremos mostrar foi apresentado do como a soma dos termos de uma P.A. de razão 1 que é a soma dos inteiros $n \geq 1$ através de somatórios e indução matemática.

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Prova por indução matemática
Solução: Passo Base. Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, temos $S(1)$ será verdadeira:

(i) $S(1)$, para $n = 1$, tem-se

$$S(1) = \sum_{i=0}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

A fórmula é verdadeira para $n = 1$.

Passo Indutivo

(ii) Assim se admitirmos hipótese de indução verdadeira para $n = 1$ então deve ser verdadeira para $(n + 1)$, ou seja, $S(n) \longrightarrow S(n + 1)$.

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

para algum inteiro $n \geq 1$.

Deve-se mostrar que

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Assim somando $(n + 1)$, em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1)$$

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dessa forma mostramos que $S(n + 1)$ é verdadeira, logo é válida para todo n natural.

Exemplo 7.4. Provar que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a = na$$

Para todo $n \geq 1$.
Prova por indução matemática.
Solução: Passo base. Considerando o menor elemento para $n = 1$, mostraremos que S_1 é verdadeira, ou seja,

(i) S_1, para $n = 1$, tem-se

$$S_1 = \sum_{i=0}^{1} a = 1 \cdot a$$

$$S_1 = a$$

(ii) Admitindo a hipótese de indução S_n verdadeira, então deve ser verdadeira para S_{n+1}.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a = na$$

Deve-se mostrar que

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a = (n+1)a$$

Assim somando-se a em ambos os membros da hipótese de indução, obtemos:

$$S_{n+1} = S_n + \mathrm{a} = \sum_{i=0}^{n} a + a = na\ + a$$

$$S_{n+1} = S_n + \mathrm{a} = \sum_{i=0}^{n} a + a = (n+1)a$$

Dessa forma mostramos que S_{n+1} é verdadeira. Logo é válida para todo $n \geq 1$.

Exemplo 7.5. Vamos deduzir a expressão do termo geral da recorrência
da Pizza de Steiner:

$$p_{n+1} = p_n + n + 1, \qquad p_1 = 2.$$

Podemos escrever expressão do seguinte modo:

$$p_{i+1} - p_i = i + 1.$$

Tomando somatórios de ambos os membros, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (i + 1).$$

O primeiro membro da igualdade acima é uma soma telescópica e vale $p_n - p_1$, enquanto o segundo membro é por nós conhecido e vale

$$\frac{(n-1)n}{2} + n - 1.$$

Portanto temos que

$$p_n = \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 + 2 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

8 Divisibilidade e Congruência em Somatórios

Neste Capítulo destacaremos todos os conteúdos apresentados na pesquisa, números inteiros, indução matemática, divisibilidade, congruências e sequências em somatórios. Assim trataremos de alguns teoremas e corolários, finalizando com alguns exemplos e exercícios.

8.1 Teoremas e Corolários

As afirmações abaixo foram desenvolvidas a partir da observação de progressões aritméticas com razão e primeiro termo iguais a 1.

8.1 Teorema 8.1. Todo n ímpar ≥ 1, divide a soma dos seus antecessores naturais.

Antes da demonstração deste teorema, faremos um exemplo numérico, com $n = 7$.

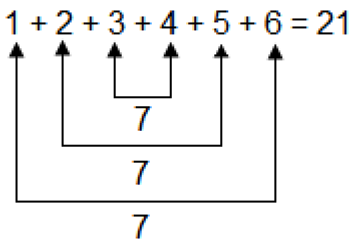
Sendo assim, temos que

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Daí, $7 \mid 21$, logo 7 é um caso particular válido.

Uma outra forma de analisar este exemplo, é somando o primeiro termo ao último, o segundo com o penúltimo e assim por diante, vejamos

Figura 2. Soma dos antecessores de 7.



Fonte: Os autores

Notamos que essa soma, também pode ser representado como $7 \cdot q$. Neste caso, em particular, $q = 3$.

Partindo para notação de somatórias, temos que

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{i=1}^{6} i = \sum_{i=1}^{7-1} i$$

Logo, $7 | \sum_{i=1}^{7-1} i$, concluímos que $\sum_{i=1}^{7-1} i \equiv 0 \; mod \; 7$.

Com base no que foi apresentado, segue a demonstração do Teorema 8.1.

Demonstração: Dado um número n, ímpar, temos que a soma dos seus antecessores naturais será dado por $1 + 2 + \cdots + (n - 1)$, temos

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n - 1)(n)}{2}$$

Logo $n \mid \frac{(n-1)(n)}{2}$, e como n é ímpar, $(n - 1)$ será divisível por 2.

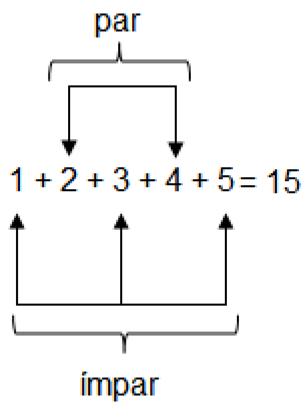
Corolário 8.1.1. $\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv 0 \; mod \; n$, para n ímpar ≥ 1.

Demonstração: Pelo Teorema 8.1, temos que $n \mid \frac{(n-1)(n)}{2}$ e pela Proposição 5.1, afirmamos que

$$n \mid \frac{(n-1)(n)}{2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i \equiv 0 \; mod \; n.$$

Observe o exemplo e consideremos n par, em particular $n = 6$.

Figura 3: Soma dos antecessores de 6.



Fonte: O autor

Logo, $6 \nmid \sum_{i=1}^{6-1} i$ e concluímos que $\sum_{i=1}^{6-1} i \not\equiv 0$ mod 6.

Agora faremos a demonstração para um par qualquer.

Seja n um natural par de forma $n = 2q$, vamos mostrar que n não divide a soma de seus antecessores.

Demonstração: Vamos definir S_{n-1} como sendo a soma dos antecessores naturais de n, isto é,

$$S_{n-1} = 1 + 2q + (2q - 1) + 2 \cdot 2q + (2q + 1) + \cdots + (2q - m) + k \cdot 2q + (2q + m),$$

onde m e $k \in \mathbb{Z}$.

Fazendo a soma dos termos pares e ímpares, temos:

$$S_{n-1} = \underbrace{2q + 2 \cdot 2q + \cdots + k}\cdot 2q + 1 + (2q - 1) + (2q + 1) + \cdots + (2q - m) + (2q + m)$$

Soma dos termos pares Soma dos termos ímpares

$$S_{n-1} = 2q \cdot (\underbrace{1 + 2 + \cdots + k}_{k'}) + 1 + \underbrace{2q + 2q + \cdots + 2q + 2q}_{k''}$$

Tomando $k' = 1 + 2 + \cdots + k$ e $k" =$ o némero de parcelas 2q, então

$$S_{n-1} = 2q \cdot k' + 1 + 2q \cdot k"\text{, onde } k' \text{ e } k'' \in \mathbb{Z}$$

$$S_{n-1} = 2q \cdot (k' + k") + 1\text{, com } k''' = k' + k"\text{, assim}$$

$$S_{n-1} = 2q \cdot k''' + 1$$

Fazendo $q \cdot k''' = n$, temos

$$S_{n-1} = 2n + 1$$

Assim, $n \nmid S_{n-1}$, pois sendo n um número natural par, ele não divide nenhum número ímpar.

Fazendo a própria análise do teorema 8.1, pois se n for um número par o seu antecessor será um número ímpar, logo haverá na soma uma quantidade ímpar de termos antecessores, e como sabemos a soma de uma quantidade ímpar de termos, sendo todos eles ímpares será ímpar, desta forma, verificamos que $n \nmid S_{n-1}$, pois um número par não divide um número ímpar.

Teorema 8.2. Todo n par ≥ 2, divide a diferença da soma dos seus antecessores naturais com sua própria metade.

De forma análoga ao que foi apresentado no Teorema 8.1, verificaremos com $n = 6$.

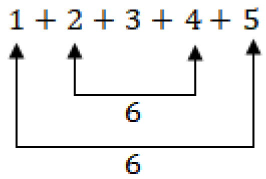
$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - \frac{6}{2} = 12$$

Como $6|12$, temos que 6 é um caso particular válido.

Analisando de outra forma, pelo mesmo raciocínio da soma de Gauss, ou seja, somando o primeiro termo ao último, o segundo com o penúltimo e assim por diante.

Temos

Figura 4: Soma dos antecessores de 6.



Fonte: O autor

Vemos que existe um termo central que não é divisível por 6, sendo justamente a metade de 6, daí podemos conjuctурar que sempre teremos um termo central sendo a metade de n, neste caso $\frac{6}{3} = 3$.

Demonstração: Como n é par ≥ 2, considere que $n = 2q$, com $q \in \mathbb{N}$.

Com base no que foi apresentado, segue que

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = 1 + 2 + \cdots + (2q - 1) - \frac{2q}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(2q-1).(2q)}{2} - \frac{2q}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (2q - 1).q - q$$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = q.(2q - 2)$$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = 2q.(q - 1)$$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(q - 1)$$

Logo $n|1 + 2 + \cdots + (n-1) - \frac{n}{2} = n(q-1)$, para todo n par ≥ 2, com $q \in \mathbb{N}$.

Corolário 8.1.2. $\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv \frac{n}{2}\ mod\ n$, para n par ≥ 2.

Demonstração: Pelo Teorema 8.2 e de forma análoga a demonstração do Corolário 8.1.1. Temos que,

$$n|1+2+\cdots+(n-1) = n\left|\sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{n}{2}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{n}{2} \equiv 0 \; mod \; n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i \equiv \frac{n}{2} \; mod \; n$$

Logo, $\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv \frac{n}{2} \; mod \; n$, para todo n par ≥ 2.

Exemplo 8.1. Prove por indução matemática

$$p(n): \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

para todos os inteiros $n \geq 0$ e para todos os números reais $r, r \neq 1$.

Prova por indução matemática

Passo base: Considerando o menor elemento de $n \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 0$, mostraremos que $p(0)$ é verdadeira, ou seja, $\mathrm{p}(0)$, par $n = 0$, tem-se

(i)

$$p(0): \sum_{i=0}^{0} r^0 = 1 = \frac{r^{0+1}-1}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$$

Passo indutivo:

(ii) Admitindo a hipótese de indução para n, isto é, que $p(n)$ é verdadeira, ou seja

$$p(n): \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

mostraremos que $p(n+1)$ é verdadeira, isto é, $p(n)$ implica em $p(n+1)$

$$p(n+1): \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{r^{n+2}-1}{r-1}$$

Assim somando r^{n+1}, em ambos os lados da igualdade da hipótese de indução, obtemos:

$$p(n+1): \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1}$$

$$p(n+1): \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} + r^{n+1}$$

$$p(n+1): \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} + \frac{(r^{n+1})(r-1)}{r-1}$$

$$p(n+1): \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{r^{n+1}-1+r^{n+2}-r^{n+1}}{r-1}$$

$$p(n+1): \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{r^{n+2}-1}{r-1}$$

9 Aplicações

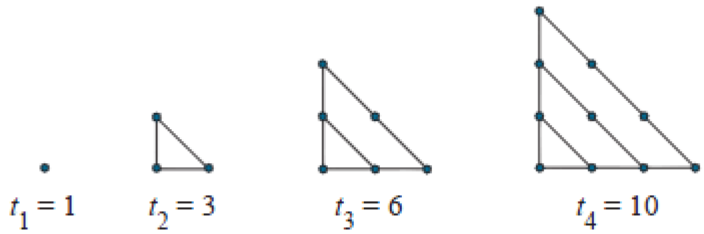
Neste Capítulo apresentaremos as aplicações voltadas para os números poligonais, incialmente abordaremos os números triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais e por fim uma abordagem geral provando a veracidade das sentenças por Indução Matemática.

Os pitagóricos (pensadores oriundos da Escola Pitagórica) tiveram uma grande contribuição no desenvolvimento da matemática, ao desejar compreender a natureza dos números e da geometria elaboraram os números figurados, que são números definidos pelo somatório de pontos em uma determinada figura geométrica, ou seja, a quantidade de pontos dentro das figuras geométricas representa um número poligonal.

9.1 Aplicação 1.

Os números triangulares são denotados por t_n e definido como a soma dos *n* primeiros termos da progressão aritmética $1,2,3,4,\cdots,n-1,n$. A figura abaixo justifica essa denominação.

Figura 5 – **Sequência dos números triangulares.**



Fonte: **RPM-68**

De fato, os números triangulares representam a soma dos n primeiros termos naturais podem ser representados pelo somatório

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Temos que

$$\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)\cdot\frac{n}{2}$$

Percebemos que podemos utilizar os somatórios nos Números Triangulares, desenvolvendo sua sentença e aplicaremos a Indução Matemática para provar sua validade.

Assim, a representação para a sequência dos números triangulares é

$$i = (1,2,3,4,\cdots,n-1,n)$$

Logo, para os números triangulares t_n, temos uma P.A. de razão 1 com n termos, logo a soma dos n primeiros termos dos números triangulares é a soma dos números naturais dado por

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = (n+1) \cdot \frac{n}{2}$$

Pela soma dos termos da P.A.

$$\begin{aligned} t_1 &= \quad 1 \\ t_2 &= t_1 + 2 \\ t_3 &= t_2 + 3 \\ t_4 &= t_3 + 4 \\ t_5 &= t_4 + 5 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ t_n &= t_{n-1} + n \end{aligned}$$

$$\overline{t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n}$$

Usando a sentença da soma dos termos, concluímos que o termo geral da sequência de números triangulares é

$$t_n = \frac{(1+n)n}{2}$$

Vamos agora provar por Indução Matemática que t_n para os números triangulares é verdadeira.

Vejamos como usar esse método para mostrar a validade, para todo natural n, da sentença

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = (n+1) \cdot \frac{n}{2}$$

Demonstração análoga ao exemplo 3.2. da página 19.

Prova por indução matemática em “n”.

Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que t_1 é verdadeira, ou seja,

(i) *P*ara $n = 1$, tem-se

$$t_1 = 1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(ii) Admitindo a hipótese de indução para n, isto é, que t_n é verdadeira, ou seja

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = (n+1) \cdot \frac{n}{2}$$

Mostraremos que t_{n+1} é verdadeira, isto é,

$$t_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} + (\mathrm{n} + 1) = (\mathrm{n} + 2) \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

Somando $n + 1$, em ambos os lados da igualdade na hipótese de indução, obtemos

$$t_{n+1} = t_n + (\mathrm{n} + 1) = 1 + 2 + \cdots + \mathrm{n} + (\mathrm{n} + 1) = (\mathrm{n} + 1) \cdot \frac{n}{2} + (n + 1)$$

Desenvolvendo o segundo membro, temos

$$t_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} + (\mathrm{n} + 1) = \frac{(n+1) \cdot n + 2(n+1)}{2}$$

$$t_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} + (\mathrm{n} + 1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

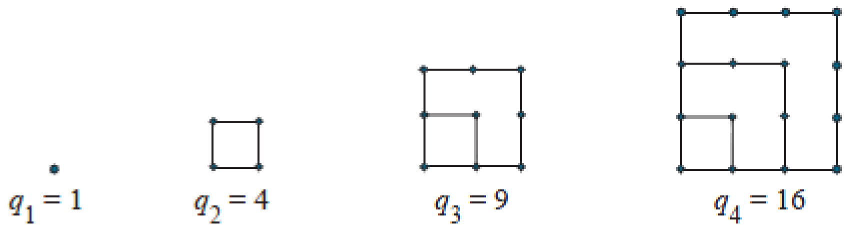
$$t_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} + (\mathrm{n} + 1) = (\mathrm{n} + 2) \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

Dessa forma mostramos que t_{n+1} é verdadeira, portanto, t_n é verdadeira para os números triangulares, com n natural.

9.1 Aplicação 2.

Os números quadrangulares q_n são definidos como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 3, 5, 7,\ (2n-3),\ (2n-1)$. A figura abaixo justifica essa denominação.

Figura 6: **Sequência dos números quadrangulares.**



Fonte: **RPM-68**

De fato, os números quadrangulares representam a soma dos n primeiros ímpares, podemos representar pelo somatório

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1.$$

Daí, pelas Proposições 5.1 temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} 2i + \sum_{i=0}^{n-1} 1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = 2\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = n^2$$

Logo, os números quadrangulares q_n sempre serão divisíveis por $n \in \mathbb{N}$.

Aplicaremos o somatório para os números quadrangulares e provaremos por Indução Matemática que q_n é verdadeira. Assim, temos para os números quadrangulares uma P.A. dos números ímpares com n termos, logo a soma dos números quadrangulares será

$$q_n = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

$$\begin{aligned}
q_n &= \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) \\
q_n &= \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
q_n &= 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
q_n &= 2\frac{(n+1)n}{2} - n \cdot 1 \\
q_n &= n^2 + n - n \\
q_n &= n^2
\end{aligned}$$

Pela soma dos termos da P.A.

$$\begin{aligned}
q_1 &= \quad 1 \\
q_2 &= q_1 + 3 \\
q_3 &= q_2 + 5 \\
q_4 &= q_3 + 7 \\
q_5 &= q_4 + 9 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\
q_n &= q_{n-1} + (2n - 1) \\
\hline
q_n &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1)
\end{aligned}$$

Usando a sentença da soma dos termos, obtemos o termo geral da sequência de números quadrangulares

$$q_n = \frac{[1 + (2n - 1)]n}{2}$$
$$q_n = \frac{(2n)n}{2}$$
$$q_n = n^2$$

Vamos provar agora por Indução Matemática que q_n para os números quadrangulares é verdadeira.

Dessa forma usaremos este método para mostrar a validade, para todo natural n, da sentença

$$q_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Prova por indução matemática em "n".

Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que q_1 é verdadeira, ou seja,
(i) Para $n = 1$, tem-se $q_1 = 1 = 1^2 = 1$.

(ii) Admitindo a hipótese de indução para n, isto é, que q_n é verdadeira, ou seja

$$q_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Mostraremos que q_{n+1} é verdadeira, isto é,

$$q_{n+1} = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Assim somando $2n + 1$, que é o próximo número ímpar após $2n - 1$, em ambos os lados da igualdade na hipótese de indução, obtemos

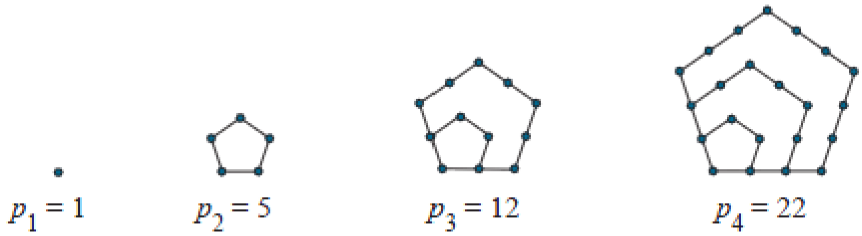
$$q_{n+1} = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

$$q_{n+1} = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Dessa forma mostramos que q_{n+1} é verdadeira, logo q_n é verdadeira para os números quadrangulares.

9.1 Aplicação 3. Os números pentagonais p_n são definidos como a soma dos *n* primeiros termos da progressão aritmética $1,4,7,10,\cdots,3n-2$. A figura abaixo justifica essa denominação.

Figura 7: **Sequência dos números pentagonais.**



Fonte: **RPM-68**

Para os números pentagonais p_n, temos uma P.A. $(1,4,7,10,\cdots,3n-2,\cdots)$, cuja razão é 3, assim soma de seus termos será

$$p_n = \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = 1+4+7+10+\cdots+(3n-2)$$

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} 3i - \sum_{i=1}^{n} 2$$

$$p_n = 3\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 2$$

$$p_n = 3\frac{(n+1)n}{2} - 2n$$

$$p_n = \frac{3n^2+3n-4n}{2}$$

$$p_n = \frac{3n^2-n}{2}$$

Pela soma dos termos da P.A.

$$\begin{aligned}
p_1 &= \quad 1 \\
p_2 &= p_1 + 4 \\
p_3 &= p_2 + 7 \\
p_4 &= p_3 + 10 \\
p_5 &= p_4 + 13 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
p_n &= p_{n-1} + (3n-2) \\
\hline
p_n &= 1+4+7+10+13+\cdots+(3n-2)
\end{aligned}$$

Usando a sentença da soma dos termos, obtemos o termo geral da sequência pentagonais

$$p_n = \frac{[1 + (3n - 2)]n}{2}$$
$$p_n = \frac{[3n - 1]n}{2}$$
$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Vamos provar por Indução Matemática para os números pentagonais que p_n é verdadeira.

Assim usando este método para mostrar a validade, para todo natural n, da sentença

$$p_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Prova por indução matemática em "n".
Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que p_1 é verdadeira, ou seja,
(i) Para $n = 1$, tem-se

$$p_1 = 1 = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(ii) Admitindo a hipótese de indução para n, isto é, que p_n é verdadeira, ou seja

$$p_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Mostraremos que p_{n+1} é verdadeira, isto é,

$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3(n + 1)^2 - (n + 1)}{2}$$

Assim somando $3n + 1$, em ambos os membros da igualdade na hipótese de indução, obtemos

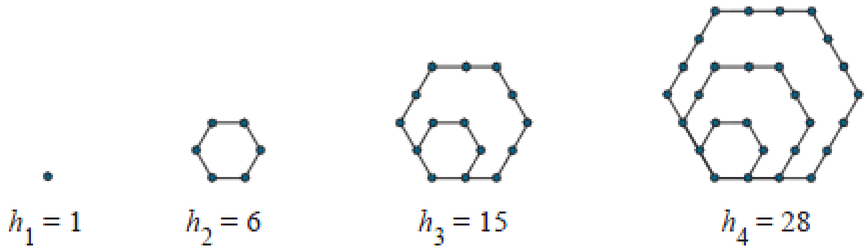
$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3n^2 - n}{2} + (3n + 1)$$
$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3n^2 - n + 2(3n + 1)}{2}$$
$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2}$$
$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3n^2 + 6n + 2 + 1 - n - 1}{2}$$
$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3n^2 + 6n + 3 - n - 1}{2}$$
$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3(n^2 + 2n + 1) - (n + 1)}{2}$$
$$p_{n+1} = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3n + 1) = \frac{3(n + 1)^2 - (n + 1)}{2}.$$

Dessa forma mostramos que p_{n+1} é verdadeira, logo p_n é verdadeira para os números pentagonais.

9.1 Aplicação 4.

Os números hexagonais h_n são definidos como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 5, 9, 13, 17, \cdots, (4n - 3)$. A figura abaixo justifica essa denominação.

Figura 8: **Sequência dos números hexagonais.**



Fonte: **RPM-68**

Para os números hexagonais h_n, temos uma P.A.$(1,5,9,13,17, \cdots, (4n - 3))$, assim apresenta a razão 4, logo sua soma será

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} (4i - 3) = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + (4n - 3)$$

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{i=1}^{n} 4i - \sum_{i=1}^{n} 3 \\ h_n &= 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 3 \\ h_n &= 4\frac{(n+1)n}{2} - 3n \\ h_n &= 2n^2 + 2n - 3n \\ h_n &= 2n^2 - n \end{aligned}$$

Pela soma dos termos da P.A.

$$\begin{aligned} h_1 &= \quad 1 \\ h_2 &= h_1 + 5 \\ h_3 &= h_2 + 9 \\ h_4 &= h_3 + 13 \\ h_5 &= h_4 + 17 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

$$h_n = h_{n-1} + (4n - 3)$$

$$\overline{h_n = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + (4n - 3)}$$

Usando a sentença da soma dos termos, obtemos a sequência de números hexagonais

$$h_n = \frac{[1 + (4n - 3]n}{2}$$
$$h_n = \frac{[4n - 2]n}{2}$$
$$h_n = \frac{4n^2 - 2n}{2}$$
$$h_n = 2n^2 - n$$

Vamos provar por Indução Matemática que h_n para os números hexagonais é verdadeira.

Mostraremos assim este método para mostrar a validade, para todo natural n, da sentença

$$h_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

Prova por indução matemática em "n".
Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que h_1 é verdadeira, ou seja,
(i) Para $n = 1$, tem-se

$$h_1 = 1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

(ii) Admitindo a hipótese de indução para n, isto é, que h_n é verdadeira, ou seja

$$h_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

Mostraremos que h_{n+1} é verdadeira, isto é,

$$h_{n+1} = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) + (4\mathrm{n} + 1) = 2(n + 1)^2 - (n + 1)$$

Somando $4n + 1$, em ambos os membros da igualdade na hipótese de indução, obtemos

$$h_{n+1} = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) + (4n + 1) = 2n^2 - \mathrm{n} + (4n + 1)$$
$$h_{n+1} = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) + (4n + 1) = 2n^2 - \mathrm{n} + 4n + 1 + 1 - 1$$
$$h_{n+1} = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) + (4n + 1) = 2n^2 + 4\mathrm{n} + 2 - \mathrm{n} - 1$$
$$h_{n+1} = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) + (4n + 1) = 2(n^2 + 2\mathrm{n} + 1) - (\mathrm{n} + 1)$$
$$h_{n+1} = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) + (4n + 1) = 2(n + 1)^2 - (n + 1)$$

Dessa forma mostramos que h_{n+1} é verdadeira, logo h_n é verdadeira para os números hexagonais.

9.1 Aplicação 5. Para os números poligonais podemos fazer uma generalização denotado por P_n e observamos fundamentos em sua forma, pois apresentam algumas semelhanças. Assim temos,

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n}{2}$$
$$q_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$$
$$p_n = \sum_{i=1}^{n} (3i-2) = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}$$
$$h_n = \sum_{i=1}^{n} (4i-3) = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + (4n-3) = 2n^2 - n$$

Deste modo podemos chegar na sentença generalizada onde o tipo de poligonal é dado por m, o número de lados do polígono, como nos triângulos $m = 3$, nos quadrados $m = 4$, nos pentagonais $m = 5$, e assim sucessivamente e tomando n como sendo a ordem do polígono, observamos que cada número poligonal qualquer basta multiplicar $m - 2$ (duas unidades a menos) pelo triangular anterior t_{n-1} e somar com a ordem n, assim temos

$$\begin{aligned}
P_{3,n} &= t_n = t_{n-1} + n \\
P_{4,n} &= q_n = q_{n-1} + n = 2\, t_{n-1} + n \\
P_{5,n} &= p_n = p_{n-1} + n = 3\, t_{n-1} + n \\
P_{6,n} &= h_n = h_{n-1} + n = 4\, t_{n-1} + n \\
\vdots &= \vdots = \vdots \quad \vdots = \vdots \quad \vdots \\
P_{m,n} &= (m-2) \cdot t_{n-1} + n
\end{aligned}$$

Figura 9: **Tabela com Poligonais.**

		n = 1	**n = 2**	**n = 3**	**n = 4**	**n = 5**	**n = 6**	**n = 7**	**n = 8**
Triangulares	m = 3	1	3	6	10	15	21	28	36
Quadrangulares	m = 4	1	4	9	16	25	36	49	64
Pentagonais	m = 5	1	5	12	22	35	51	70	92
Hexagonais	m = 6	1	6	15	28	45	66	91	120
Heptagonais	m = 7	1	7	18	34	55	81	112	148
Octogonais	m = 8	1	8	21	40	65	96	133	176
Eneagonais	m = 9	1	9	24	46	75	111	154	204
Decagonais	m = 10	1	10	27	52	85	126	175	232

Fonte: O autor

Aplicando Indução Matemática que $P_{m,n}$ para os números poligonais em sua forma geral seja verdadeira.

Considere a proposição

$$P_{m,n} = (m-2) \cdot t_{n-1} + n.$$

Provaremos por indução matemática em "n", com m fixado.
Considerando o menor elemento em $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que $P_{m,1}$ é verdadeira, ou seja,

(i) $P_{m,1}$, para $\mathrm{n} = 1$, tem-se:

$$P_{m,1} = (m-2)t_0 + 1; \qquad t_0 = \frac{(0-1)0}{2} + 0 = 0$$

$$P_{m,1} = 1,$$

E isto é verdade, pelo fato de 1 ser o primeiro termo que qualquer sequência.

(ii) Admitindo a hipótese de indução para n, isto é, que $P_{m,n}$ é verdadeira, ou seja

$$P_{m,n} = (m-2) \cdot t_{n-1} + n.$$

Mostramos que $P_{m,n+1}$ é verdadeira, isto é,

$$P_{m,n+1} = (m-2) \cdot t_n + (n+1).$$

$$P_{m,n+1} = (m-2) \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1)$$

Somando $(m-2)n + 1$ na hipótese de indução $P_{m,n}$, para obter $P_{m,n+1}$, assim,

$$P_{m,n+1} = P_{m,n} + (m-2)n + 1$$

Desenvolvendo, temos

$$P_{m,n+1} = (m-2)t_{n-1} + n + (m-2)n + 1$$
$$P_{m,n+1} = (m-2)(t_{n-1} + n) + (n+1)$$
$$P_{m,n+1} = (m-2)t_n + (n+1)$$

Portanto, $P_{m,n} = (m-2) \cdot t_{n-1} + n$ é verdadeira, para todo n natural.

Generalizando, tem-se

$$P_{m,n+1} = P_{m,n} + (m-2)n + 1$$
$$P_{m,n} = P_{m,n-1} + (m-2)(n-1) + 1$$

Assim,

$$(m-2)(n-1) + 1 = P_{m,n} - P_{m,n-1}.$$

Observação: Analisando a igualdade acima, observe que atribuindo valores para "m", encontramos a sequência que corresponde as diferenças primeiras dos números poligonais.

$t_n - t_{n-1} = n;$

$q_n - q_{n-1} = 2n - 1;$

$p_n - p_{n-1} = 3n - 2.$

Ou mais,

Para $m = 3$;

$$(m - 2)(n - 1) + 1$$
$$(3 - 2)(n - 1) + 1$$
$$n \therefore (n)\ com\ n \in \mathbb{N}.$$

Para $m = 4$;

$$(4 - 2)(n - 1) + 1$$
$$2n - 2 + 1$$
$$2n - 1 \therefore (2n - 1)\ com\ n \in \mathbb{N}.$$

Para $m = 5$;

$$(5 - 2)(n - 1) + 1$$
$$3n - 3 + 1 \therefore (n)\ com\ n \in \mathbb{N}.$$
$$3n - 2 \therefore (3n - 2)\ com\ n \in \mathbb{N}.$$

Vamos analisar particularizando para $m = 3$ e $m = 4$.

Para $m = 3$, e escolhendo $n = 3$, temos.

$$P_{m,n} = P_{m,n-1} + (m - 2)(n - 1) + 1$$
$$P_{3,3} = P_{3,2} + (3 - 2)(2) + 1$$
$$P_{3,3} = 3 + 2 + 1$$
$$P_{3,3} = 6.$$

Agora para $m = 4$ e $n = 4$,

$$P_{m,n} = P_{m,n-1} + (m - 2)(n - 1) + 1$$
$$P_{4,4} = P_{4,3} + (4 - 2)(3) + 1$$
$$P_{4,4} = 9 + 6 + 1$$
$$P_{4,4} = 16.$$

Agora para o número hexagonal $m = 6$ e ordem $n = 3$, assim temos:

$$P_{m,n} = P_{m,n-1} + (m - 2)(n - 1) + 1$$
$$P_{6,3} = P_{6,2} + (6 - 2)(2) + 1$$
$$P_{6,3} = 6 + 8 + 1$$
$$P_{6,3} = 15.$$

Portanto o número hexagonal $m = 6$ de ordem $n = 3$ é igual a 15.

9 Considerações Finais

Diante da percepção das abordagens em geral dos conteúdos de Aritmética e das progressões aritméticas ensinadas aos alunos do ensino fundamental e superior, observamos que essa abordagem poderia ser conjunta, isto é, ser discutida em paralelo e não isolada, e além disso, elencar aplicações que viabilizem a ampliação dessas abordagens, criando e favorecendo um leque mais amplo para o ensino.

Com isso, este trabalho lançou uma proposta destinada ao ensino, em particular, referente ao ensino de Aritmética, debruçando seu objetivo em vincular os conteúdos, explorando e expandindo as vertentes de aprendizagem, pois é necessário uma conversação entre os temas de modo a garantir o real significado para as notações, regras e propriedades. Dessa forma, ocorreu uma investigação dos tópicos destacados e uma percepção dessa correlação.

Ciente da fundamentaçao teórica, conseguimos identificar padrões que regem as aplicações voltadas para os números poligonais, conseguindo provar por indução suas sentenças matemáticas, usando a notação de somatório e mais ainda interpretar os resultados com a figura de cada polígono. A utilização dessas aplicações de números poligonais em Matemática no ensino superior oferece um recurso didático a mais para o ensino na aprendizagem e criar estratégias que possibilitam o sentido e construir significados de idéias e criticas dos conceitos construidos. Além disso, no ensino fundamental e médio, a abordagem de sequências, em especial progressões também podem ser vínculadas a aplicação dos números poligonais e sua interpretação, mostramos os padrões que regem a aplicação na aritmética e geometria, fazendo com que se torne mais atraente o ensino abordado.

Estabelecendo estas relações conseguimos explorar e reconhecer indagações em torno da aritmética e os números poligonais, consciente que no curso deste projeto esbarramos em diversas situações e e dificuldades que, por conta da grande extensão, deixaram de ser discutidas. Isto exposto, colocamos a disposição trabalhos futuros que possam enriquecer ainda mais essa vertente: Um estudo relacionando as progressões geométricas e os somatórios e produtórios; as possibilidades de aplicações relacinando as progressões geométricas e a geometria; investigação de padrões relacionando as progressões e outros tipos de números.

Por fim, acreditamos na relevância desta pesquisa, atendemos as expectativas ao incluir demonstrações e interpretações relevantes ao que foi proposto, alcançando o maior interesse deste projeto, associar os conteúdos através de uma abordagem signficativa.

REFERÊNCIAS

[1] Boyer, Carl Benjamin; **História da Matemática**, 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974. Único.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.

[3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações / Vol.1**, São Paulo: Ática, 2010.

[4] DOMINGUES NETO, Huilton José. **Critérios de Divisibilidade.** 2016. Monografia (Graduação). Universidade Federal da Grande Dourados. 2016.

[5] FRANCO, Tânia Regina Rodrigues. **Divisibilidade e Congruências: Aplicações no Ensino Fundamental II.** 2016. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2016.

[6] Hefez, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2016
https://www.preparaenem.com/matematica/numeros-figurados.htm

[7] LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 2**. SBM, 2007.

[8] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reai**s, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[9] MASSAGO, Sadao. **Axioma dos inteiros.** 2018.

[10] MOUTTA, Welbert de Oliveira. **A introdução do Princípio da Indução Finita nos Ensinos Fundamental e Médio.** 2013. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 2013.

[11] PEREIRA, Alex Menezes. **Problemas, Sequências e Consequências.** 2013. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Santa Cruz. 2013.

[12] RPM – **Revista do Professor de Matemática.** SBM, 2009. Nº 68

[13] SANTANA, Gracielly da Silva. **Algoritmos utilizados para as Quatro Operações Elementares**. 2016. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Goiás. 2016.

[14] SANTOS SILVA, Clewerton. **Recorrência para ensino médio: um passeio entre matemática básica e a obmep.** 2019. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Alagoas, 2019.

[15]SANTOS, Raul Rodrigues dos. **Divisibilidade e Congruência em Somatórios.** 2019. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Goiás, 2018.
SILVA MATOS, Jair. **Aritmética e Aplicações.** 2017. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Amazonas, 2017.