UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

ANDRÉ RENAN PEREIRA

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DE FUNÇÕES TRATADAS NO ENSINO MÉDIO:

UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

LAVRAS – MG

2022

ANDRÉ RENAN PEREIRA

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DE FUNÇÕES TRATADAS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Daiane Alice Henrique Ament
Orientadora

LAVRAS – MG
2022

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Pereira, André Renan.
Estudo das propriedades de funções tratadas no Ensino Médio: uma abordagem através do Cálculo Diferencial / André Renan Pereira. - 2022.
76 p. : il.

Orientador(a): Daiane Alice Henrique Ament.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Lavras, 2022.
Bibliografia.

1. Ensino Médio. 2. Funções. 3. Cálculo Diferencial. I. Ament, Daiane Alice Henrique. II. Título.

ANDRÉ RENAN PEREIRA

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DE FUNÇÕES TRATADAS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

STUDY OF PROPERTIES OF FUNCTIONS TREATED IN HIGH SCHOOL: AN APPROACH THROUGH DIFFERENTIAL CALCULUS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 23 de Fevereiro de 2022.

Profa. Dra. Daiane Alice Henrique Ament	UFLA
Prof. Dr. Helvecio Geovani Fargnoli Filho	UFLA
Profa. Dra. Thais Maria Dalbelo	UFSCAR

Profa. Dra. Daiane Alice Henrique Ament
Orientadora

LAVRAS – MG
2022

Aos meus pais, José Aguinaldo e Maria de Lourdes, que mesmo não tendo a oportunidade de estudar me incentivaram e apoiaram na realização do meu sonho. Aos meus irmãos Aguinaldo Fernando e Cynthia Raiane, pelo companheirismo e amizade. Com amor e carinho dedico este trabalho a vocês.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela proteção e por tudo que me proporcionou.

Aos meus pais, por tudo que me ensinaram, por acreditar em meus sonhos e me incentivar a alcançá-los. Agradeço todo amor, carinho, dedicação e apoio.

Aos meus irmãos pelo apoio e incentivo em todos os momentos.

À professora Daiane, pela orientação realizada com muita paciência, humildade e sabedoria.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica, pois sem a colaboração de cada um, nada disso teria acontecido.

Aos colegas de turma que foram companheiros durantes as sextas-feiras, em especial o Elton que além de viajarmos juntos durante as aulas presenciais, pude contar com sua colaboração durante o período de estudos remotos, compartilhando aprendizados, emoções e angustias.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pela bolsa, que foi essencial, viabilizando a conclusão do curso.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, muito obrigado.

"Tão correto e tão bonito
O infinito é realmente
Um dos deuses mais lindos
Sei que, às vezes, uso
Palavras repetidas
Mas quais são as palavras
Que nunca são ditas?".
(Renato Russo)

RESUMO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é conhecida pelos estudantes, como uma disciplina difícil, com alta taxa de não aprovação. E isso causa emoções negativas nesses estudantes proporcionando bloqueios e aumentando ainda mais a chance de insucesso dos mesmos. O que alguns não sabem, é que esta disciplina já compôs o currículo da educação básica, sendo definitivamente excluída do currículo na década de 1960 com o Movimento da Matemática Moderna. No entanto, a inexistência na grade curricular não implica em uma proibição em estudar Cálculo Diferencial durante o Ensino Médio. Nesse contexto, o presente trabalho propõe abordar algumas estratégias de como o Cálculo Diferencial pode ser inserido no Ensino Médio, no estudo das propriedades de funções. Visto que nos estudos das funções e suas propriedades é comum aos estudantes de Ensino Médio lidar com taxa de variação, pontos de máximos e mínimos e também o conceito de aproximação. Desta forma, a familiarização de algumas ideias do Cálculo Diferencial pode auxiliar a compreensão de conceitos vinculados às funções estudadas no Ensino Médio, dando mais significado aos estudos, evitando um simples acúmulo de fórmulas e a memorização de conceitos. Podendo também auxiliar estudantes que pretendem seguir na área das Ciências Exatas, pois a familiarização precoce de conceitos atrelados ao Cálculo Diferencial e Integral humaniza a disciplina evitando bloqueios na aprendizagem.

Palavras-chave: Ensino Médio. Funções. Cálculo Diferencial.

ABSTRACT

The Differential and Integral Calculus subject is known by students as a difficult subject, with a high failure rate. And this causes negative emotions in these students, providing blockages and further increasing their chance of failure. What some of them do not know is that this subject has already formed part of the basic education curriculum, being definitively excluded from the curriculum in the 1960s with the Modern Mathematics Movement. However, the absence of the curriculum does not imply a ban on studying Differential Calculus during High School. In this context, the present work proposes to approach some strategies of how the Differential Calculus can be inserted in the High School, in the study of the properties of functions. Since in the studies of functions and their properties, it is common for High School students to deal with rate of change, maximum and minimum points and also the concept of approximation. In this way, the familiarization of some ideas of Differential Calculus can help the understanding of concepts linked to the functions studied in High School, giving more meaning to the studies, avoiding a simple accumulation of formulas and the memorization of concepts. It can also help students who intend to continue in the area of Exact Sciences, as the early familiarization of concepts linked to Differential and Integral Calculus humanizes the discipline, avoiding blocks in learning.

Keywords: High school. Functions. Differential Calculus.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para muitos estudantes dos cursos da área de Ciências Exatas a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral causa, no mínimo um desconforto podendo atingir níveis superiores como até pavor. Isso porque trata-se de uma disciplina com baixa taxa de aprovação.

Mas essa disciplina já compôs o currículo do que hoje é considerado Ensino Básico. Em 1890, com a reforma de Benjamin Constant, introduziu-se o Cálculo Diferencial e Integral no terceiro ano do ensino secundário. Sendo extinta definitivamente do currículo, após vários movimentos de inserção e exclusão, no início da década de 1960 com o Movimento da Matemática Moderna.

Não sendo tratado como parte do componente curricular, não existe o momento de estudar Cálculo Diferencial durante o Ensino Médio. Mas isso não significa que conceitos atrelados ao Cálculo Diferencial devem ser extintos do currículo.

Nesse contexto, o presente trabalho propõe abordar como o Cálculo Diferencial pode ser inserido no Ensino Médio, no estudo das propriedades de funções. Pois, ao estudar as funções afins e polinomiais do segundo grau, nos deparamos com conceitos como taxa de variação e pontos de máximos ou mínimos. Nas funções exponenciais, logarítmicas e algumas trigonométricas é comum a presença de assíntotas horizontais ou verticais.

Desta forma, a familiarização de algumas ideias do Cálculo Diferencial pode auxiliar a compreensão de conceitos vinculados às funções estudadas no Ensino Médio. Evitando assim, o simples acúmulo de fórmulas e a memorização de conceitos. Além disso, essa familiarização precoce do Cálculo Diferencial e Integral pode ser benéfica para os estudantes que pretendem seguir na área das Ciências Exatas.

O presente trabalho busca auxiliar os professores de Ensino Médio e até discentes dos cursos de graduação que cursam a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, em especial do curso de Licenciatura em Matemática. Com esse propósito, foram abordados em três capítulos alguns dos conceitos de funções e do Cálculo Diferencial, além da apresentação de propostas de atividades aplicáveis ao Ensino Médio.

Assim, o segundo capítulo trará uma abordagem do conceito de função, para oferecer uma base aos estudos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Além de tratar os conceitos de limite e derivada, os quais podem ser aplicados aos estudos das funções abordadas no Ensino Médio.

No capítulo 3 serão abordadas algumas funções que são estudadas no Ensino Médio, de maneira próxima ao modo que são abordadas nos livros didáticos, mas buscando justificar muitos dos conceitos, apresentando algumas demonstrações e exemplificação por meio de gráficos ou diagrama de flechas.

Já no quarto e último capítulo serão abordadas propostas de exercícios envolvendo as propriedades de funções utilizando-se do Cálculo Diferencial. Sendo possível os professores da educação básica utilizar-se deste material para aplicar em suas aulas, além de ser um material motivador para o professor se inspirar e criar seus próprios exercícios adaptados à realidade de seus aprendizes.

2 CONCEITOS DE FUNÇÕES, LIMITE E DERIVADA

Neste capítulo abordaremos o conceito de função, tema estudado no Ensino Médio, fundamental para construção de uma base dos conhecimentos acerca deste assunto, pois os estudos das funções na educação básica não podem se limitar ao cálculo da raiz de uma função qualquer, não basta os estudantes identificarem a forma algébrica ou gráfica de cada função estudada. É necessário antes de mais nada saber o que é uma função.

Abordaremos também os conceitos de limite e derivada, conceitos essenciais para a abordagem que propomos, como o professor irá introduzir o conceito de Cálculo Diferencial em suas aulas, buscando sempre mostrar uma ideia mais intuitiva dos conceitos mas não deixando de apresentar as definições formais. Para isso utilizaremos o livro Fundamentos de Matemática Elementar volume 1 de Iezzi e Murakami (1995), o livro Fundamentos de Cálculo da coleção PROFMAT de Neto (2015) e o livro Cálculo de Munem e Foulis (1983).

2.1 Funções

Uma função é uma relação estabelecida entre dois conjuntos, em que cada elemento de um conjunto correlaciona com um único elemento de outro.

Definição 2.1 *Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação f de A em B, é uma* ***função*** *de A em B, se e só se:*

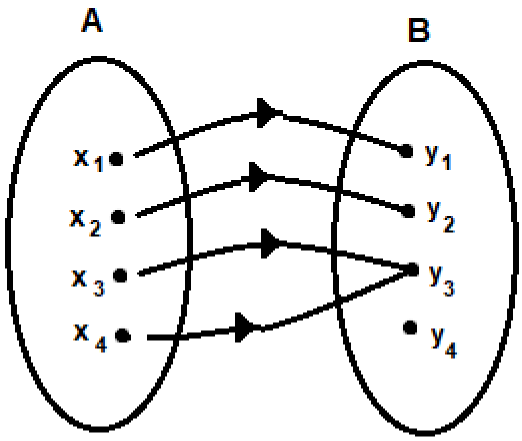
$$\forall\ x \in A,\ \exists!\ y \in B;\ xfy.$$

Onde xfy significa que x relaciona-se com y através de f.

Desta forma, toda função gera pares ordenados, sendo usual utilizar-se diagramas de flechas ou gráficos em um plano cartesiano para expressar uma função.

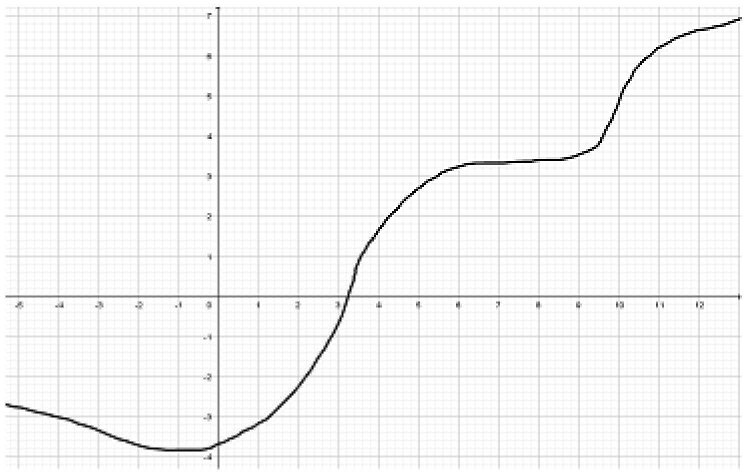
As Figuras 2.1 e 2.2 exemplificam funções representadas, respectivamente, por meio do diagrama de flechas e utilizando-se do plano cartesiano.

Figura 2.1 – Exemplo de função representada por diagrama de flechas.



Fonte: Do autor (2021).

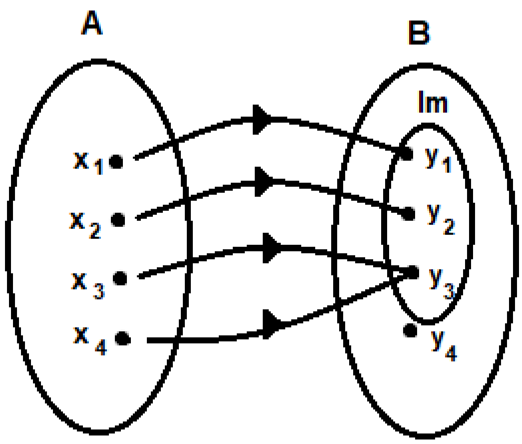
Figura 2.2 – Exemplo de gráfico de uma função.



Fonte: Do autor (2021).

Toda função possui uma lei de formação, que consiste "em um comando", indicando como o elemento x do conjunto A irá se relacionar com o elemento y do conjunto B. Sendo o conjunto de saída A, denominado Domínio da função e o conjunto B, Contradomínio. O conjunto formado por todos os elementos pertencentes a B que estão correlacionados com os elementos de A, é denominado Imagem da função (Im). A Figura 2.3, representa um diagrama de flechas evidenciando o Conjunto Imagem.

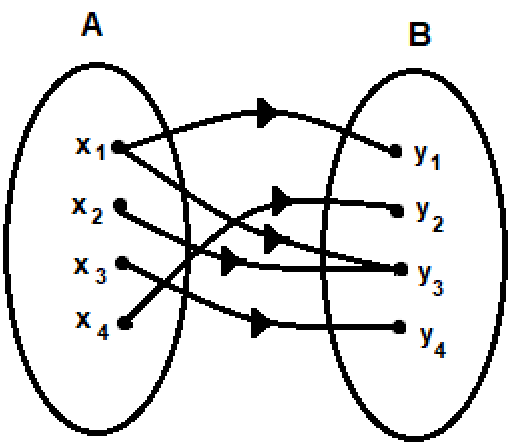
Figura 2.3 – Diagrama de flechas evidenciando o Conjunto Imagem.



Fonte: Do autor (2021).

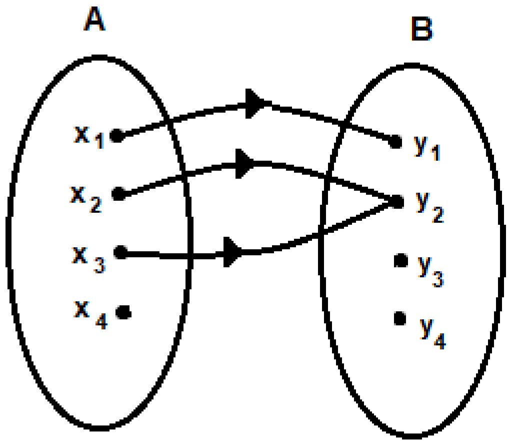
Pode-se observar nas Figuras 2.1 e 2.3 que o conjunto B contém elementos que não pertencem à Imagem de f. O mesmo não pode ocorrer com conjunto A, pois todos os elementos deste conjunto devem estar envolvidos na função, existindo um e apenas um correspondente no conjunto B. Outra observação relevante é com relação ao elemento y_3 que possui dois correspondentes em A, mantendo a condição de função, pois cada x pertencente a A possui somente um correspondente y pertencente a B. As Figuras 2.4 e 2.5 apresentam exemplos de diagramas que não representam funções.

Figura 2.4 – Diagrama de flechas que não representa uma função.



Fonte: Do autor (2021).

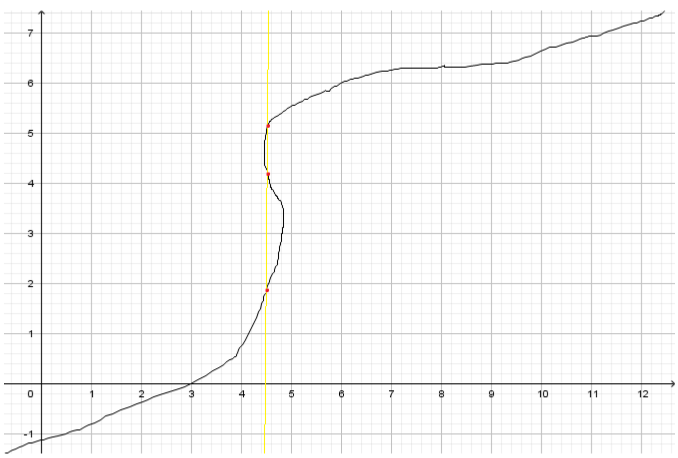
Figura 2.5 – Diagrama de flechas que não representa uma função.



Fonte: Do autor (2021).

Assim como é possível representar uma função em um plano cartesiano, podemos identificar se a representação é de uma função ou não. Desta forma a Figura 2.6 apresenta um exemplo de um esboço no plano cartesiano que não representa uma função.

Figura 2.6 – Gráfico que não representa uma função.



Fonte: Do autor (2021).

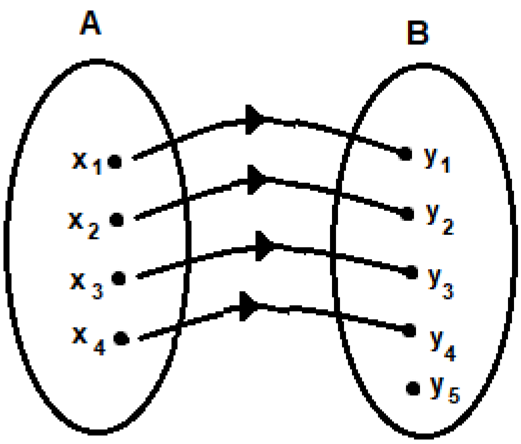
Como pôde ser observado nas Figuras 2.4 e 2.6 existe pelo menos um x pertencente a A que possui mais de um correspondente em B, e na Figura 2.5 nem todo x pertencente a A possui algum correspondente y em B.

Agora que sabemos diferenciar função de uma relação qualquer, iremos dividi-las em classes. As funções podem ter uma das três classificações: injetiva, sobrejetiva ou bijetiva. Porém, existem funções que não pertencem a essas classificações, pois não são nem injetivas nem sobrejetivas.

Definição 2.2 *Dada uma função $f : A \to B$, dizemos que esta é injetiva se: para cada $x_1, x_2 \in A$ com $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Podendo também expressar a condição como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Ou seja, cada elemento distinto de A terá um correspondente também distinto em B. Não podendo, dois ou mais elementos x de A possuírem o mesmo correspondente y em B. Podendo ser exemplificado pelo diagrama de flechas, de acordo com a Figura 2.7.

Figura 2.7 – Exemplo de função injetiva.



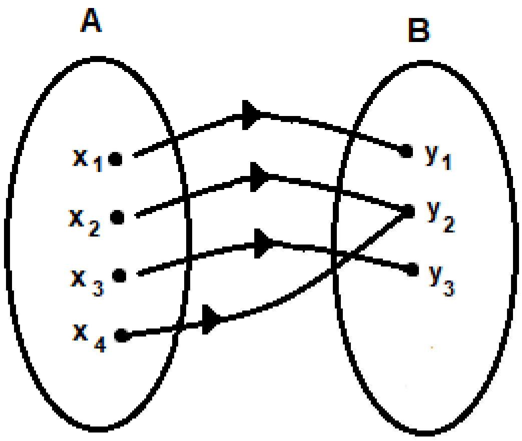
Fonte: Do autor (2021).

Vemos que na Figura 2.7 o elemento y_5 não é correspondente de nenhum elemento x pertencente a A. Isso pode ocorrer em funções injetivas, desde que a relação 1 para 1 (um y distinto para cada x) seja satisfeita. Não pode ocorrer esse fato nas funções ditas sobrejetivas, pois nesse caso todos elementos y pertencentes a B, devem ser o correspondente de pelo menos um x pertencente a A.

Definição 2.3 *Dada uma função $f : A \to B$, dizemos que esta é sobrejetiva se: para qualquer $y \in B$ existir um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Em uma função sobrejetiva o conjunto Imagem é igual ao Contradomínio.

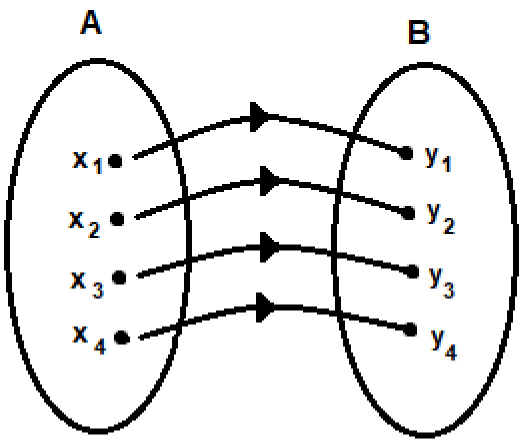
Figura 2.8 – Exemplo de função sobrejetiva.



Fonte: Do autor (2021).

É possível observar que o exemplo ilustrado na Figura 2.7 não é uma função sobrejetiva e o ilustrado na Figura 2.8 não é uma função injetiva, mas é sobrejetiva. Será que toda função injetiva é não sobrejetiva e vise-versa? A resposta para essa pergunta é não, uma vez que as definições de injetividade e sobrejetividade não afetam uma a outra, podendo uma função apresentar as duas características simultaneamente. E quando isto ocorre denominamo-as de função bijetiva.

Figura 2.9 – Exemplo de função bijetiva.



Fonte: Do autor (2021).

Em uma função bijetiva temos o conjunto Imagem igual ao Contradomínio, e como ocorre a relação de um único y distinto para cada x, temos que o Domínio possui quantidade de elementos igual ao Contradomínio. Característica fundamental para verificar se dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, pois se existe uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, é possível estabelecer uma função bijetiva entre os dois, logo possuem a mesma cardinalidade.

Outro fato relevante das funções bijetivas, é a existência da função inversa de $f : A \to B$. Ou seja, dada uma função $f : A \to B$ bijetiva, existe uma função $f^{-1} : B \to A$.

Apenas as funções bijetivas possuem inversa? Analisando as características das funções injetivas, notamos que o Contradomínio pode possuir elementos que não pertencem ao conjunto Imagem. Desta forma, ao estabelecer a função inversa, pelo menos um y pertencente a B não terá um correspondente x pertencente a A, não caracterizando uma função. Agora com relação às funções sobrejetivas, temos que o conjunto Imagem é igual ao Contradomínio, mas sabemos também que mais de um x pertencente a A pode estar relacionado a um mesmo y pertencente a B, sendo assim, ao estabelecer uma inversa um elemento do Domínio B terá mais de um correspondente no Contradomínio A, não caracterizando uma função. Concluindo assim, que apenas funções bijetivas possuem inversa.

Outro fator a ser observado nas funções, é o seu comportamento, podendo uma função ser: crescente, decrescente, não crescente ou não decrescente.

Definição 2.4 *Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$, a função é denominada:*

a) ***Estritamente crescente****, se tivermos $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$;*

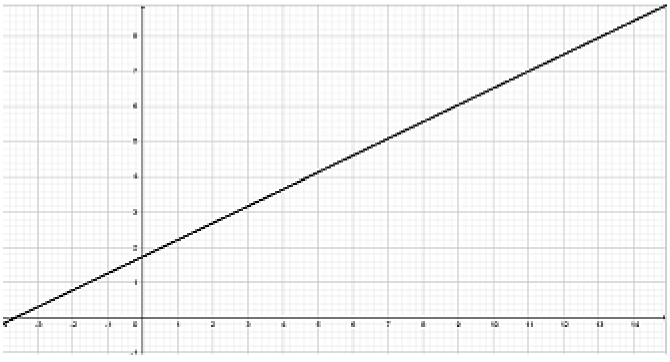
b) ***Estritamente decrescente****, se tivermos $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$;*

c) ***Não crescente****, se tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$;*

d) ***Não decrescente****, se tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$.*

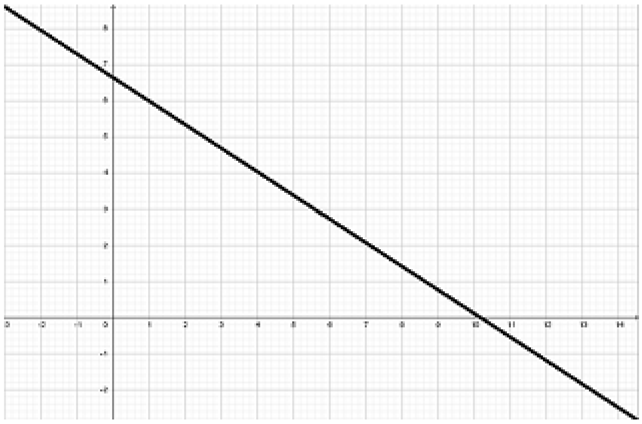
Vejamos nas Figura 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 alguns exemplos de gráficos que representam as situações supracitadas.

Figura 2.10 – Exemplo de função estritamente crescente.



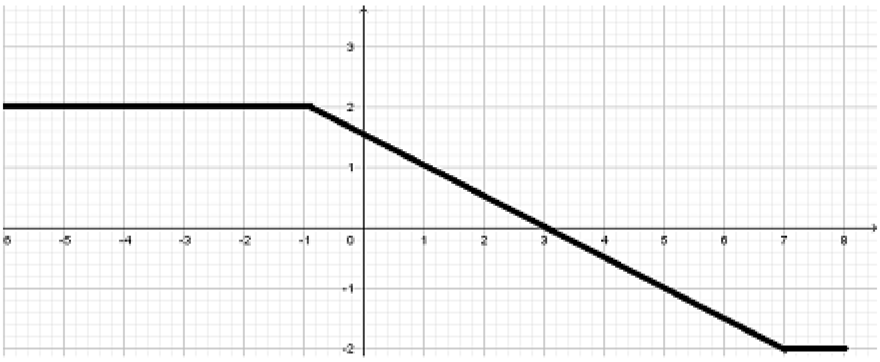
Fonte: Do autor (2021).

Figura 2.11 – Exemplo de função estritamente decrescente.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 2.12 – Exemplo de função não crescente.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 2.13 – Exemplo de função não decrescente.

Fonte: Do autor (2021).

2.2 Limite

A ideia de limite está atrelada a proximidade ou vizinhança de um ponto. Desta forma, quando dizemos que o limite de $f(x)$ é igual a L quando x tende a x_0, estamos dizendo que o valor de $f(x)$ está próximo de L, mas não necessariamente $f(x_0) = L$. Vejamos abaixo um exemplo intuitivo da ideia de limite.

Exemplo 2.5 *Dada a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, com lei de formação definida por $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x-2}$, como se comporta a função em x igual a 2?*

$$f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x-2}$$
$$f(2) = \frac{3\times 2^2-4\times 2-4}{2-2}$$
$$f(2) = \frac{0}{0}.$$

O que indica uma indeterminação no ponto $x = 2$.

Mas qual o limite de f quando x tende a 2? Verificaremos de qual valor a função se aproxima à medida que o valor de x se aproxima de 2.

Para analisar o comportamento da função na vizinhança de $x = 2$ utilizaremos a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores de f na vizinhança de $x = 2$.

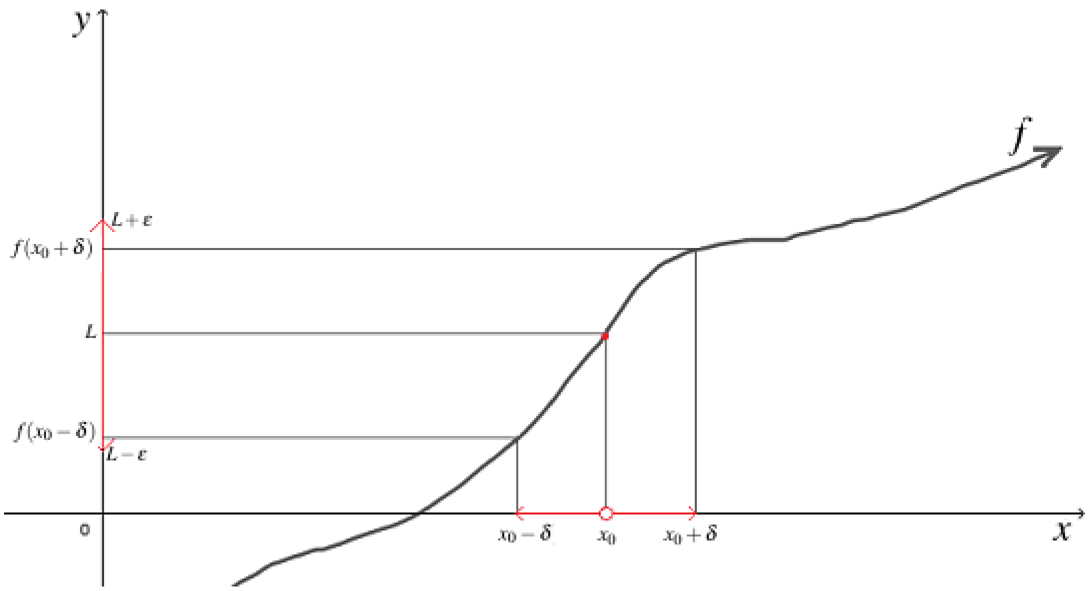
Valores de x	**Valores de $f(x)$**
1	5
1,50	6,50
1,75	7,25
1,90	7,70
1,95	7,85
1,98	7,94
1,99	7,97
1,995	7,985
1,999	7,997
1,9999	**7,9997**
2,0001	**8,0003**
2,001	8,003
2,005	8,015
2,01	8,03
2,02	8,06
2,05	8,15
2,10	8,30
2,25	8,75
2,50	9,50
3	11

Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na Tabela 3.1, de maneira intuitiva, dizemos que o limite de f é igual a 8 quando x tende a 2.

Visto a ideia de limite de maneira intuitiva, temos que considerar alguns parâmetros para definirmos o conceito de limite. Isto é, o quão próximo $f(x)$ está de L e qual a proximidade de x e x_0. Desta forma pode-se considerar que quanto menor a distância entre $f(x)$ e L menor será $|f(x) - L|$ o mesmo ocorrendo para x e x_0 como sendo $|x - x_0|$. Assim, consideremos os números reais ε e δ para indicar que as distâncias supracitadas serão menores que um valor prefixado. Portanto, dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende a x_0, se para qualquer ε positivo existir um δ também positivo, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ dado que $0 < |x - x_0| < \delta$. O que pode ser visualizado de forma ilustrativa na Figura 2.14.

Figura 2.14 – Limite de uma função f.



Fonte: Do autor (2021).

Formalmente, temos a definição a seguir.

Definição 2.6 *Dado o intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tomamos $x_0 \in I$ e f uma função real qualquer definida em I, exceto, possivelmente, em x_0. Dizemos que L é o limite de f quando x tende a x_0, sendo denotado por:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se existir um $\delta > 0$, para cada $\varepsilon > 0$ dado, tal que:

$$x \in I \; e \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Utilizando a definição de limite, verificaremos no Exemplo 2.7, que $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-4x-4}{x-2} = 8$, como concluído anteriormente.

Exemplo 2.7 *Dado* $\varepsilon = 0,0003$*, encontre um* δ*, tal que* $\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x-2| < \delta$.

$$\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < 0,0003$$
$$\left|\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2} - 8\right| < 0,0003$$
$$|3x+2-8| < 0,0003$$
$$|3x-6| < 0,0003$$
$$3|x-2| < 0,0003$$
$$|x-2| < \frac{0,0003}{3}$$
$$|x-2| < 0,0001.$$

Portanto qualquer $0 < \delta < 0,0001$ *é válido, confirmando que* $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$.

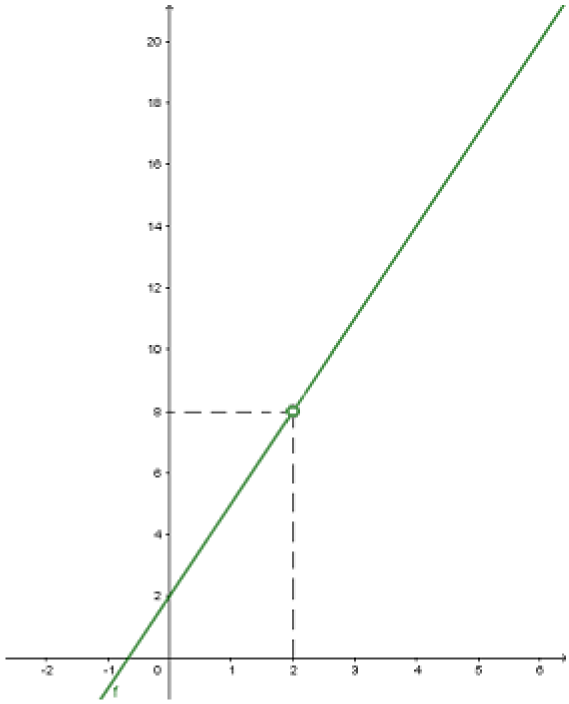
Visto que o limite existe para um ε dado, vejamos o exemplo 2.8 se a condição será válida para qualquer ε.

Exemplo 2.8 *Dado um* ε *qualquer, encontre um* δ*, tal que* $\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x-2| < \delta$.

$$\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2} - 8\right| < \varepsilon$$
$$|3x+2-8| < \varepsilon$$
$$|3x-6| < \varepsilon$$
$$3|x-2| < \varepsilon$$
$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto a expressão $\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2}-8\right| < \varepsilon$ *é equivalente a* $0 < |x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$*, provando que* $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$*. Sendo a representação gráfica da função* $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x-2}$ *apresentada na Figura 2.15.*

Figura 2.15 – Limite de uma função f.



Fonte: Do autor (2021).

Proposição 2.9 *Seja um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*,* $a \in I$ *e* f, g *funções reais definidas em I, exceto, possivelmente, em a. Considerando que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, temos:*

a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$*;*

b) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$*;*

c) $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = L \times M$*;*

d) $\lim_{x\to a}[f(x) \div g(x)] = L \div M$*, para* $M \neq 0$.

2.2.1 Limites laterais

O conceito de limite lateral está atrelado a proximidade unilateral de um ponto. Assim, ao dizer que o limite de $f(x)$ é igual a L quando x tende a x_0 pela direita (ou esquerda), estamos dizendo que o valor de $f(x)$ está se aproximando de L, à medida que x se aproxima de x_0, com

x estritamente maior (ou menor) que x_0, sendo representando por $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ quando x tende a x_0 pela direita, ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ para x tendendo a x_0 pela esquerda.

Explorando o exemplo utilizado anteriormente nos estudos iniciais de limite, temos:

Exemplo 2.10 *Dada a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, com lei de formação definida por $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x-2}$, qual o limite de f quando x tende a 2^+? E quando x tende a 2^-?*

Primeiramente analisaremos de qual valor a função se aproxima à medida que o valor de x se aproxima de 2 pela direita. Para analisar o comportamento da função na vizinhança de 2^+ utilizaremos a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Valores de f na vizinhança de $x = 2^+$.

Valores de x	**Valores de $f(x)$**
3	11
2,50	9,50
2,25	8,75
2,10	8,30
2,05	8,15
2,02	8,06
2,01	8,03
2,005	8,015
2,001	8,003
2,0001	**8,0003**

Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na tabela 2.2, de maneira intuitiva, dizemos que o limite de f é igual a 8 quando x tende a 2^+.

Agora analisaremos de qual valor a função se aproxima à medida que o valor de x se aproxima de 2 pela esquerda. Para analisar o comportamento da função na vizinhança de 2^- utilizaremos a Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Valores de f na vizinhança de $x = 2^-$.

Valores de x	**Valores de $f(x)$**
1	5
1,50	6,50
1,75	7,25
1,90	7,70
1,95	7,85
1,98	7,94
1,99	7,97
1,995	7,985
1,999	7,997
1,9999	**7,9997**

Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na Tabela 2.3, de maneira intuitiva, dizemos que o limite de f é igual a 8 quando x tende a 2^-. A definição formal de limite lateral é obtida a partir de ajustes da Definição 2.6.

Definição 2.11 *Dado o intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tomamos $x_0 \in I$ e f uma função real qualquer definida em I, exceto, possivelmente, em x_0. Dizemos que L é o limite de f quando x tende a x_0 pela direita, sendo denotado por:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se existir um $\delta > 0$, para cada $\varepsilon > 0$ dado, tal que:

$$x \in I \text{ e } x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 2.12 *Dado o intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tomamos $x_0 \in I$ e f uma função real qualquer definida em I, exceto, possivelmente, em x_0. Dizemos que L é o limite de f quando x tende a x_0 pela esquerda, sendo denotado por:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se existir um $\delta > 0$, para cada $\varepsilon > 0$ dado, tal que:

$$x \in I \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Utilizando as definições de limites laterais, mostraremos que $\lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2-4x-4}{x-2} = 8$ e $\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2-4x-4}{x-2} = 8$.

Exemplo 2.13 *Para calcular o limite pela direita, dado* $\varepsilon = 0,0003$*, encontre um* δ*, tal que* $\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < \varepsilon$ *sempre que* $2 < x < 2+\delta$*.*

$$\begin{gathered}
\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < 0,0003 \\
\left|\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2} - 8\right| < 0,0003 \\
|3x+2-8| < 0,0003 \\
|3x-6| < 0,0003 \\
3|x-2| < 0,0003 \\
|x-2| < \frac{0,0003}{3} \\
|x-2| < 0,0001 \\
1,9999 < x < 2,0001.
\end{gathered}$$

Como o intervalo $2 < x < 2,0001$ *está contido no intervalo* $1,9999 < x < 2,0001$*, então* $0 < \delta < 0,0001$ *é válido, confirmando que* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 8$.

Para calcular o limite pela esquerda, dado $\varepsilon = 0,0003$*, encontre um* δ*, tal que* $\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < \varepsilon$ *sempre que* $2-\delta < x < 2$*.*

$$\begin{gathered}
\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2} - 8\right| < 0,0003 \\
\left|\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2} - 8\right| < 0,0003 \\
|3x+2-8| < 0,0003 \\
|3x-6| < 0,0003 \\
3|x-2| < 0,0003 \\
|x-2| < \frac{0,0003}{3} \\
|x-2| < 0,0001 \\
1,9999 < x < 2,0001.
\end{gathered}$$

Dado que o intervalo $1,9999 < x < 2$ *está contido no intervalo* $1,9999 < x < 2,0001$*, então* $0 < \delta < 0,0001$ *é válido, confirmando que* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 8$.

Visto que os limites laterais existe para um ε dado, vejamos o exemplo 2.14 se a condição será válida para qualquer ε.

Exemplo 2.14 *Para calcular o limite pela direita, dado* ε *qualquer, encontre um* δ*, tal que* $\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2}-8\right|<\varepsilon$ *sempre que* $2<x<2+\delta$*.*

$$\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2}-8\right|<\varepsilon$$
$$\left|\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2}-8\right|<\varepsilon$$
$$|3x+2-8|<\varepsilon$$
$$|3x-6|<\varepsilon$$
$$3|x-2|<\varepsilon$$
$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$$
$$2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Como o intervalo $2<x<2+\frac{\varepsilon}{3}$ *está contido no intervalo* $2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2+\frac{\varepsilon}{3}$*, então* $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ *é válido, provando que* $\lim_{x\to 2^+} f(x)=8$.

Para calcular o limite pela esquerda, dado ε *qualquer, encontre um* δ*, tal que* $\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2}-8\right|<\varepsilon$ *sempre que* $2-\delta<x<2$*.*

$$\left|\frac{3x^2-4x-4}{x-2}-8\right|<\varepsilon$$
$$\left|\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2}-8\right|<\varepsilon$$
$$|3x+2-8|<\varepsilon$$
$$|3x-6|<\varepsilon$$
$$3|x-2|<\varepsilon$$
$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$$
$$2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Dado que o intervalo $2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2$ *está contido no intervalo* $2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2+\frac{\varepsilon}{3}$*, então* $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ *é válido, provando que* $\lim_{x\to 2^-} f(x)=8$.

Teorema 2.15 *O limite* $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ *existe se, e só se,* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ *e* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$*.*

O Teorema 2.15 foi evidenciado nos exemplos supracitados, pois inicialmente verificamos que $\lim_{x\to 2} f(x)=8$, e posteriormente para os limites laterais, encontramos $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=8$.

2.2.2 Limites envolvendo infinito

2.2.2.1 Limites infinitos

Em algumas situações temos que quanto mais próximo x está de x_0, maior será o valor de $f(x)$, vejamos o Exemplo 2.16 .

Exemplo 2.16 *Dada a função* $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$*, com lei de formação definida por* $f(x) = \frac{3}{2x^2}$*, qual o limite de* f *quando* x *tende a* 0*?*

Primeiramente analisaremos de qual valor a função se aproxima à medida que o valor de x *se aproxima de* 0 *pela direita. Para isso, utilizaremos a Tabela 2.4.*

Tabela 2.4 – Valores de $f(x)$ na vizinhança de $x = 1$.

Valores de x	**Valores de** $f(x)$
1,00000	1,5
0,50000	6
0,25000	24
0,12500	96
0,06250	384
0,03125	1.536
0,01000	15.000
0,00100	1.500.000
0,00010	150.000.000
0,00001	15.000.000.000

Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na Tabela 2.4, quanto mais próximo de zero, pela direita, o valor de x*, maior é o valor de* $f(x)$*. Intuitivamente podemos concluir que* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$*.*

Definição 2.17 *Dado o intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*, tomamos* $x_0 \in I$ *e* f *uma função real qualquer definida em* I*, exceto, possivelmente, em* x_0*. Dizemos que o limite de* f *quando* x *tende a* x_0^+ *é igual a* ∞ *(ou a* $-\infty$*), se existir um* $\delta > 0$*, para qualquer* $M > 0$ *(ou* $M < 0$*) dado, tal que:*

$$x \in I \text{ e } x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M (\text{ou } f(x) < M\ ).$$

Sendo denotado por: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ *(ou* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$*).*

Exemplo 2.18 *Dada a função* $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$*, com lei de formação definida por* $f(x) = \frac{3}{2x^2}$*, qual o limite de* f *quando* x *tende a* 0 *pela esquerda?*

Primeiramente analisaremos de qual valor a função se aproxima à medida que o valor de x *se aproxima de* 0 *pela esquerda. Para isso, utilizaremos a Tabela 2.5.*

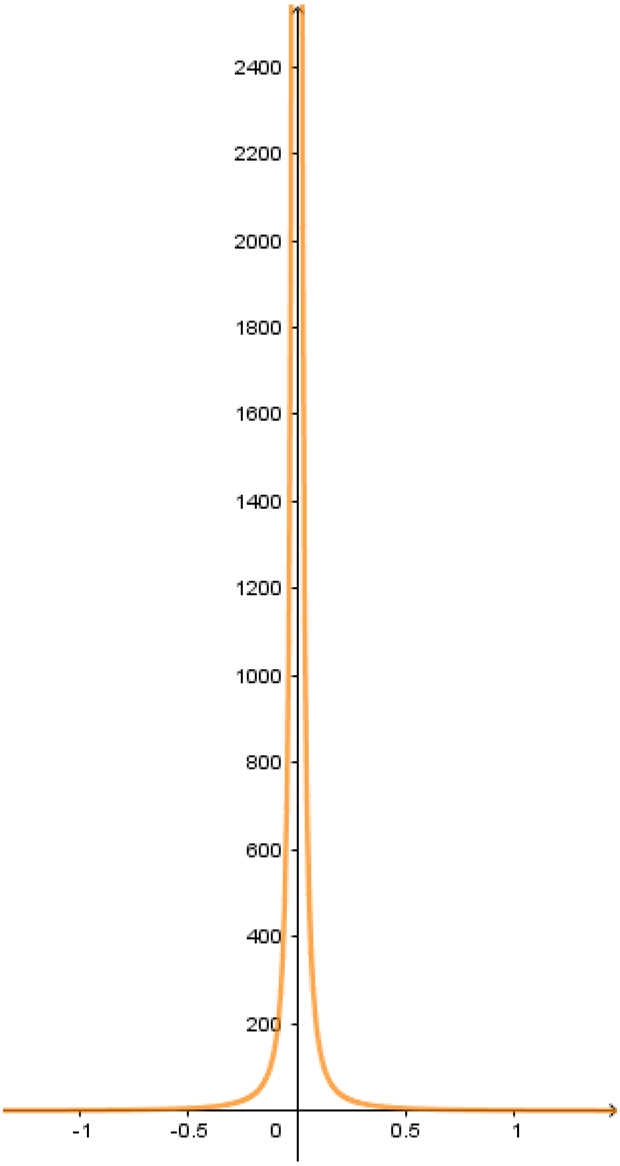
Tabela 2.5 – Valores de $f(x)$ na vizinhança de $x = 0$.

Valores de x	**Valores de $f(x)$**
-1,00000	1,5
-0,50000	6
-0,25000	24
-0,12500	96
-0,06250	384
-0,03125	1.536
-0,01000	15.000
-0,00100	1.500.000
-0,00010	150.000.000
-0,00001	15.000.000.000

Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na Tabela 2.5, quanto mais próximo de zero, pela esquerda o valor de x, maior é o valor de $f(x)$*. Intuitivamente podemos concluir que* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$*,e pode ser observado o comportamento da função na Figura 2.16.*

Figura 2.16 – Função definida por $f(x) = \frac{3}{2x^2}$.



Fonte: Do autor (2021).

Definição 2.19 *Dado o intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tomamos $x_0 \in I$ e f uma função real qualquer definida em I, exceto, possivelmente, em x_0. Dizemos que o limite de f quando x tende a x_0^- é igual a ∞ (ou a $-\infty$), se existir um $\delta > 0$, para qualquer $M > 0$ (ou $M < 0$) dado, tal que:*

$$x \in I \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M (\text{ou } f(x) < M\ ).$$

Sendo denotado por: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ *(ou* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$*).*

Definição 2.20 *Se* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$*, então* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ *(o mesmo é válido para* $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$*).*

2.2.2.2 Limite no infinito

Para algumas funções quanto maior (ou menor) o valor de x, mais próximo de um valor numérico está o $f(x)$.

Exemplo 2.21 *Dada a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, com lei de formação definida por $f(x) = \frac{3}{2x^2}$, qual o limite de f quando x tende a $+\infty$?*

Inicialmente utilizaremos a Tabela 2.6 para verificar de qual valor a função se aproxima à medida que x aumenta, tornando tão grande quanto quisermos.

Tabela 2.6 – Valores de $f(x)$ para x tão grande quanto quisermos.

Valores de x	**Valores de $f(x)$**
1	$1,5$
10	$1,5 \times 10^{-2}$
10^2	$1,5 \times 10^{-4}$
10^4	$1,5 \times 10^{-8}$
10^8	$1,5 \times 10^{-16}$
10^{16}	$1,5 \times 10^{-32}$
10^{32}	$1,5 \times 10^{-64}$
10^{64}	$1,5 \times 10^{-128}$
10^{128}	$1,5 \times 10^{-256}$
10^{256}	$1,5 \times 10^{-512}$

Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na Tabela 2.6, quanto maior o valor de x, mais próximo de zero é o valor de $f(x)$. Intuitivamente podemos concluir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Definição 2.22 *Dada a função $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, temos* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que:*

$$x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Utilizando a definição, verificaremos no Exemplo 2.23, que $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x^2} = 0$, como concluído anteriormente.

Exemplo 2.23 *Dado $\varepsilon = 0,0003$, encontre um $N > 0$, tal que $\left|\frac{3}{2x^2}\right| < \varepsilon$ sempre que $x > N$.*

$$\left|\frac{3}{2x^2}\right| < 0,0003$$
$$\frac{3}{2|x^2|} < 0,0003$$
$$|x^2| > \frac{3}{2\times 0,0003}$$
$$x^2 > 5000$$
$$x > \sqrt{5000} \;\; ou \;\; x < -\sqrt{5000}.$$

Portanto qualquer $N < \sqrt{5000}$ é válido, confirmando que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exemplo 2.24 *Dada a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, com lei de formação definida por $f(x) = \frac{3}{2x^2}$, qual o limite de f quando x tende a $-\infty$?*

Inicialmente utilizaremos a Tabela 2.7 para verificar de qual valor a função se aproxima à medida que x diminui, tornando tão pequeno quanto quisermos.

Tabela 2.7 – Valores de $f(x)$ para x tão pequeno quanto quisermos.

Valores de x	**Valores de $f(x)$**
-1	$1,5$
-10	$1,5\times 10^{-2}$
-10^2	$1,5\times 10^{-4}$
-10^4	$1,5\times 10^{-8}$
-10^8	$1,5\times 10^{-16}$
-10^{16}	$1,5\times 10^{-32}$
-10^{32}	$1,5\times 10^{-64}$
-10^{64}	$1,5\times 10^{-128}$
-10^{128}	$1,5\times 10^{-256}$
-10^{256}	$1,5\times 10^{-512}$

Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na Tabela 2.7, quanto menor o valor de x, mais próximo de zero é o valor de $f(x)$. Intuitivamente podemos concluir que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Definição 2.25 *Dada a função $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N < 0$, tal que:*

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Utilizando a definição, verificaremos, no Exemplo 2.26, que $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2x^2} = 0$, como concluído anteriormente.

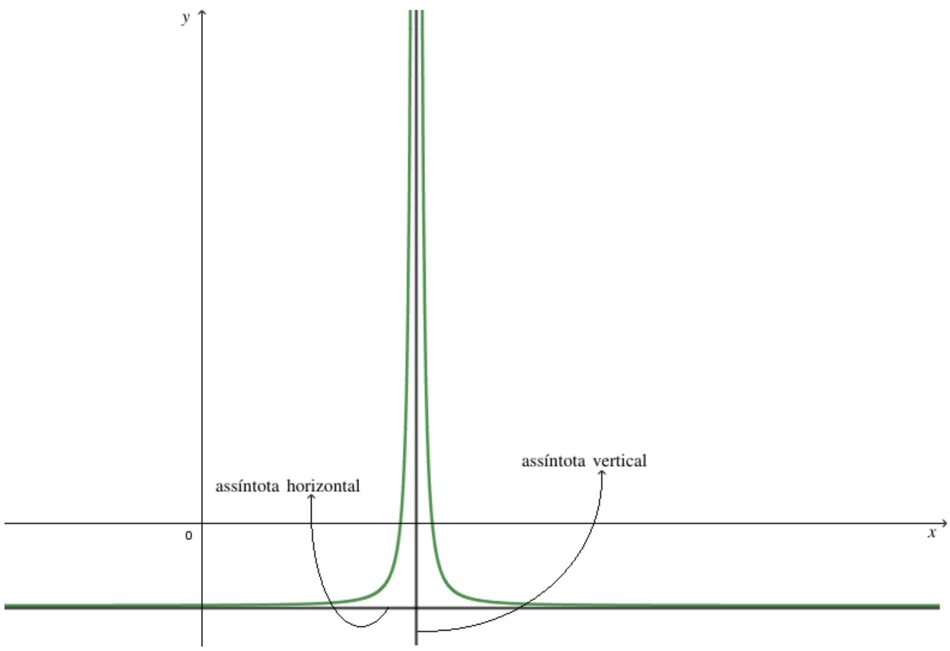
Exemplo 2.26 *Dado $\varepsilon = 0,0003$, encontre um $N < 0$, tal que $\left|\frac{3}{2x^2}\right| < \varepsilon$ sempre que $x < N$.*

$$\left|\frac{3}{2x^2}\right| < 0,0003$$
$$\frac{3}{2|x^2|} < 0,0003$$
$$|x^2| > \frac{3}{0,0003 \times 2}$$
$$x^2 > 5000$$
$$x > \sqrt{5000} \;\; ou \;\; x < -\sqrt{5000}.$$

Portanto qualquer $N > -\sqrt{5000}$ é válido, confirmando que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Os limites envolvendo o infinito nos mostra graficamente as assíntotas. Sendo a assíntota vertical, uma reta $x = x_0$, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. E a assíntota horizontal a reta $y = L$, se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ (ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$). Na Figura 2.17 temos uma representação de uma função e suas assíntotas horizontal e vertical.

Figura 2.17 – Assíntotas de uma função f.

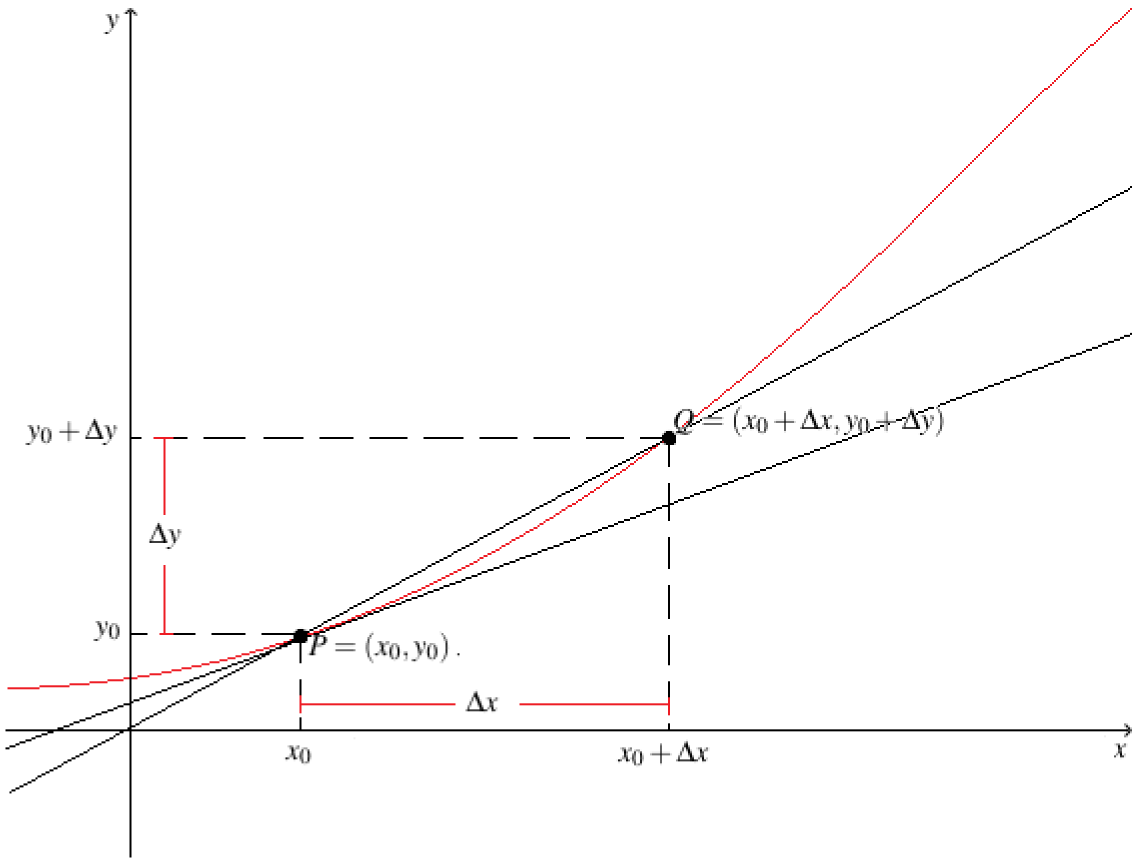


Fonte: Do autor (2021).

2.3 Derivada

Calcular a derivada de uma função $y = f(x)$ é buscar a taxa de variação instantânea da variável dependente em função da independente. Sendo denotada por $\frac{dy}{dx}$ ou $f'(x)$ e definida por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Para calcular a derivada de uma função f na variável x, faremos $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Figura 2.18 – Derivada da função f.



Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado na Figura 2.18, ao calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, estamos calculando o coeficiente angular da reta que contém os pontos P e Q. Fazendo $\Delta x \to 0$, então o ponto Q tende ao ponto P. Ou seja, o coeficiente angular da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$, com Δx tendendo a zero, é a derivada da função f, que é o coeficiente angular da reta tangente a f no ponto x_0.

2.3.1 Derivada de uma função

Definição 2.27 *Uma função f é diferenciável em x se* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ *existe e é finito.*

Lembrando, para que exista limite, necessariamente os limites laterais existem e são iguais. Conhecendo as funções a serem estudadas, determinaremos a partir da definição de derivada, uma estratégia básica para o cálculo da derivada das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

1. Função afim dada por $f(x) = ax + b$.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{ax+a\Delta x+b-ax-b}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{a\Delta x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} a = \\
&= a.
\end{aligned}
$$

   Portanto, a derivada da função afim será dada por $f'(x) = a$.

2. Função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{a(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta x(2ax+a\Delta x+b)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}(2ax + a\Delta x + b) = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}(2ax + a\Delta x + b) = \\
&= 2ax + b.
\end{aligned}
$$

   Logo, a derivada da função quadrática é dada por $f'(x) = 2ax + b$.

3. Função exponencial dada por $f(x) = a^x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \times a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} =$$
$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Fazendo uma mudança de variável, temos:

$a^{\Delta x} - 1 = r$

$a^{\Delta x} = r + 1$

$\ln(a^{\Delta x}) = \ln(r+1)$

$\Delta x \ln a = \ln(r+1)$

$\Delta x = \frac{\ln(r+1)}{\ln a}$.

Se, $\Delta x \to 0$ então $\frac{\ln(r+1)}{\ln a} \to 0$, portanto $r \to 0$. Continuando a resolução do limite, tem-se:

$$a^x \lim_{r \to 0} \frac{r}{\frac{\ln(r+1)}{\ln a}} =$$
$$= a^x \lim_{r \to 0} \frac{r \ln a}{\ln(r+1)} =$$
$$= a^x \ln a \lim_{r \to 0} \frac{r}{\ln(r+1)} =$$
$$= a^x \ln a \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^{-1}\ln(r+1)} =$$
$$= a^x \ln a \lim_{r \to 0} \frac{1}{\ln(r+1)^{\frac{1}{r}}}.$$

Sabendo que $\lim_{r \to 0}(r+1)^{\frac{1}{r}} = e$, temos:

$$a^x \ln a \times \frac{1}{\ln e} =$$
$$= a^x \ln a \times \frac{1}{1} =$$
$$= a^x \ln a \times 1 =$$
$$= a^x \ln a.$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Portanto, a derivada da função exponencial será dada por $f'(x) = a^x \ln a$.

4. Função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a(\frac{x+\Delta x}{x}) = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \times \frac{x}{\Delta x} \log_a(\frac{x+\Delta x}{x}) = \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{\Delta x} \log_a(\frac{x+\Delta x}{x}) = \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{\Delta x} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) \qquad .
\end{aligned}$$

Fazendo $\frac{x}{\Delta x} = r$, como $\Delta x \to 0$, então $r \to \infty$, assim:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} \lim_{r \to \infty} r \log_a(1 + \frac{1}{r}) = \\
&= \frac{1}{x} \lim_{r \to \infty} \log_a(1 + \frac{1}{r})^r.
\end{aligned}$$

Sabendo que $\lim_{r \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e$, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} \times \log_a e = \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{\ln e}{\ln a} = \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a} = \\
&= \frac{1}{x \ln a}. \\
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \\
&= \frac{1}{x \ln a}.
\end{aligned}$$

Então, a derivada da função logarítmica é dada por $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

Com as fórmulas definidas acima, não precisamos recorrer ao cálculo do limite toda vez que formos calcular as derivadas dessas funções. Para as funções afim e quadrática, ficou uma fórmula específica, diferente do que encontramos nos livros de cálculo. Normalmente encontramos uma fórmula geral para qualquer função polinomial de grau n, que é expressa da seguinte maneira: dada uma função $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Teorema 2.28 *Dadas as funções f e g diferenciáveis em x, e sendo $h = f + g$. Então, h é diferenciável em x e $h'(x) = f'(x) + g'(x)$, ou seja, a derivada da soma é igual a soma das derivadas.*

Demonstração:

$$
\begin{gathered}
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} \\
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x} \\
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]+g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x} \\
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x} + \frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x} \\
h'(x) = f'(x) + g'(x).
\end{gathered}
$$

Teorema 2.29 *Dada a função f diferenciável em x, e c uma constante. Sendo h, definida por $h(x) = cf(x)$. Então h é diferenciável em x e $h'(x) = cf'(x)$.*

Demonstração:

$$
\begin{gathered}
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} \\
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x} \\
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x} \\
h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} c\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
h'(x) = c\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
h'(x) = cf'(x).
\end{gathered}
$$

2.3.2 Derivadas de ordem superior

Se uma função f é diferenciável em um intervalo aberto definido, então a derivada f' é uma função definida neste mesmo intervalo. E, portanto se f' é diferenciável, e a derivada de f' será denotada por f'' e dita **segunda derivada** de f, que também pode ser diferenciável, possibilitando o cálculo da derivada de terceira ordem f''', e assim sucessivamente, tendo assim derivada de n-ésima ordem, e denotada por $f^{(n)}$, para $n > 1$.

2.3.3 Aplicações de Derivada

O conceito de derivada pode ser aplicado à resolução de problemas em diferentes ramos da matemática. A seguir veremos algumas das aplicações deste conceito.

2.3.3.1 Taxa de variação

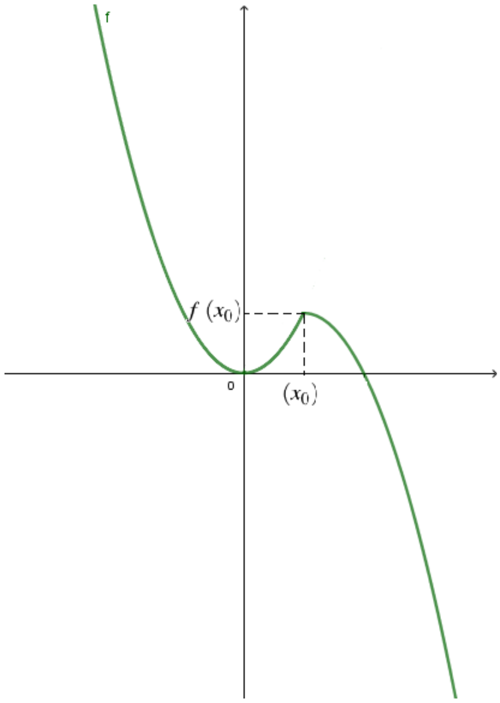
Ao estudar derivada uma das primeiras palavras que nos deparamos é "taxa de variação". Isso porque ao calcular a derivada de uma função em x, estamos determinando a taxa de variação instantânea da função neste ponto. Podendo ser empregada no cálculo de velocidade ou aceleração instantâneas de um corpo nos estudos de física, que são respectivamente a taxa de variação do deslocamento em função do tempo e a taxa de variação da velocidade em função do tempo.

2.3.3.2 Ponto crítico

É considerado ponto crítico de uma função contínua, os pontos em que a função é não diferenciável ou os pontos em que a derivada é nula.

Uma função contínua é não diferenciável em pontos angulosos, neste pontos os limites lateais $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ são diferentes.

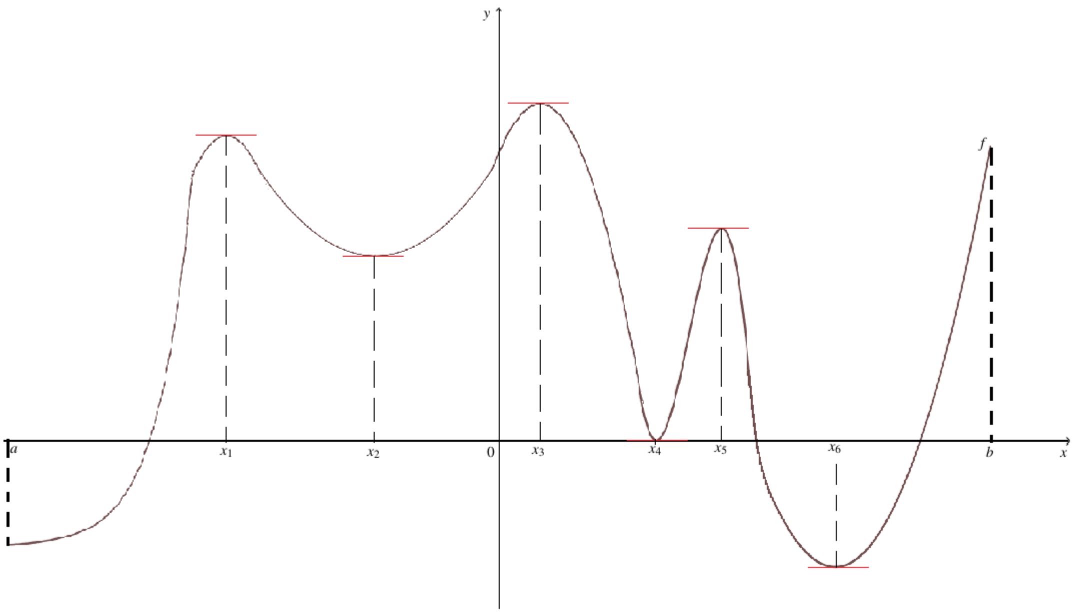
Figura 2.19 – Ponto anguloso da função f.



Fonte: Do autor (2021).

E o ponto em que a taxa de variação instantânea da função é nula, ocorre quando a reta tangente ao ponto é paralela ao eixo das abscissas. Como ilustrado na Figura 2.20, os pontos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$, $(x_4, f(x_4))$, $(x_5, f(x_5))$ e $(x_6, f(x_6))$, são pontos críticos, pois $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = f'(x_4) = f'(x_5) = f'(x_5) = 0$.

Figura 2.20 – Pontos críticos da função f.

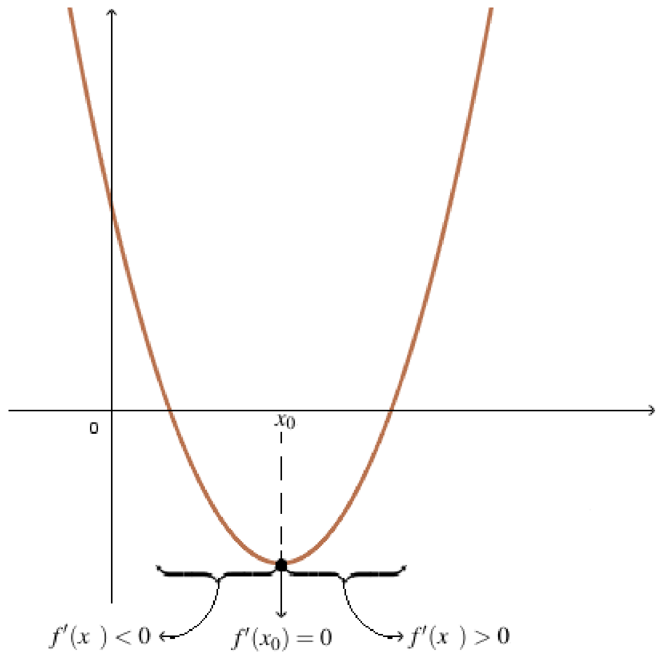


Fonte: Do autor (2021).

2.3.3.3 Intervalo de crescimento ou decrescimento

Ao calcular a derivada, taxa de variação instantânea da função, podemos inferir se a função é crescente ou decrescente no intervalo desejado. Para isso verificaremos se $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo, então f é crescente pertencente ao intervalo, e se $f'(x) < 0$, para todo x no intervalo, então f é decrescente no intervalo. A Figura 2.21, mostra o comportamento da função em cada intervalo/ponto e consequentemente o sinal da derivada.

Figura 2.21 – Comportamento da função f.

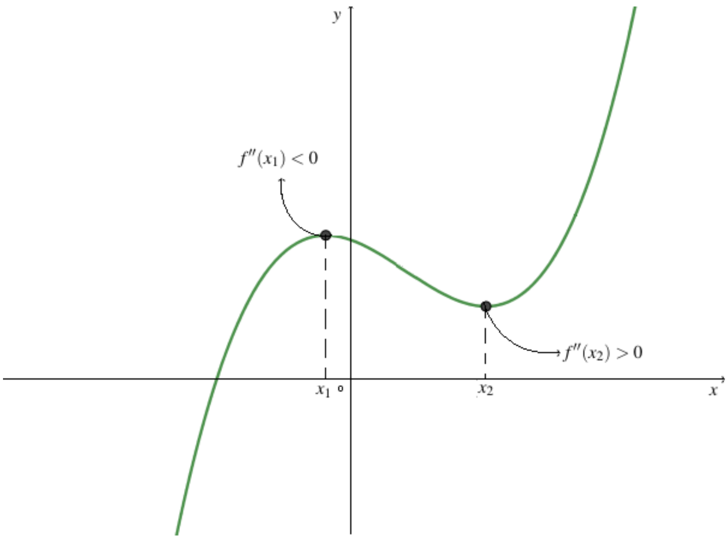


Fonte: Do autor (2021).

2.3.3.4 Máximos e mínimos relativos

Os pontos críticos de uma função podem ser um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de inflexão. E para verificar isso, calculamos a segunda derivada da função em estudo e fazemos o estudo de sinais. Portanto se $f''(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo relativo e se $f''(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo relativo.

Figura 2.22 – Máximo e mínimo relativo de uma função f.

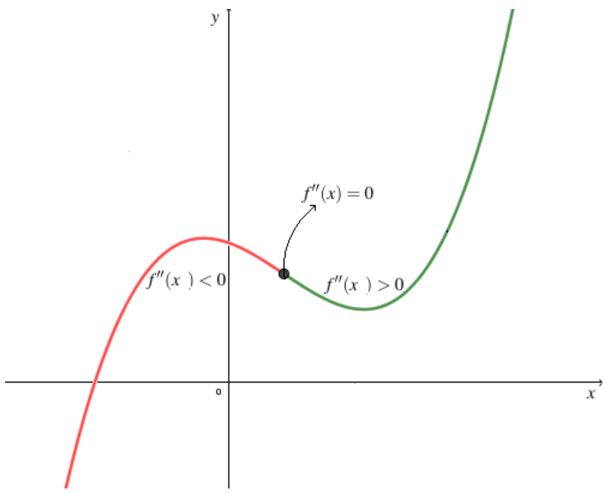


Fonte: Do autor (2021).

2.3.3.5 Concavidade do gráfico

A concavidade do gráfico de uma função f definida num intervalo I, pode ser identificada pelo sinal da segunda derivada de f e se $f''(x) < 0$, para todo x no intervalo, então a concavidade do gráfico é voltada para baixo no intervalo e se $f''(x) > 0$ para todo x no intervalo, então a concavidade do gráfico é voltada para cima no intervalo. Vale citar que o ponto em que $f''(x) = 0$, é determinado ponto de inflexão, ponto este em que ocorre a mudança da concavidade do gráfico. A Figura 2.23, destaca a mudança de concavidade de uma função f.

Figura 2.23 – Concavidade de uma função f.



Fonte: Do autor (2021).

3 ALGUMAS FUNÇÕES ESTUDADAS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo faremos uma abordagem de algumas funções estudadas no Ensino Médio. Para isso utilizaremos os livros da coleção Fundamentos de Matemática Elementar volumes 1, 2 e 3 dos respectivos autores Iezzi e Murakami (1995), Iezzi, Dolce e Murakami (1995) e Iezzi (1977), e também o livro Números e Funções Reais da coleção Profmat de Lima (2017).

As funções também podem ser classificadas de acordo com as regras de sua lei de formação, originando assim gráficos característicos.

3.1 Função afim

Definição 3.1 *Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esta é denominada **afim**, se existem constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.*

As funções afins podem ser subdivididas de acordo com características de sua lei de formação. Desta forma qualquer função afim com:

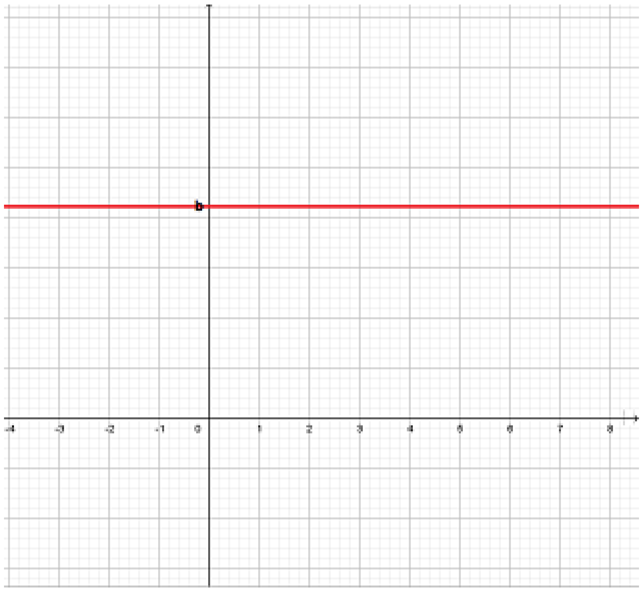
a) coeficiente a igual a zero, denomina-se uma função **constante**, $f(x) = b$;

b) coeficiente a igual a 1 e b igual a zero, denomina-se uma função **identidade**, $f(x) = x$;

c) coeficiente a diferente de zero e b igual a zero, denomina-se uma função **linear**, $f(x) = ax$.

Analisando uma função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esta é não injetiva, uma vez que para quaisquer $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = b$. Sendo a mesma não sobrejetiva, pois dado o contradomínio igual ao Conjunto dos Números Reais, a Imagem é o conjunto unitário $Im = \{b\}$. O gráfico desta função é uma reta paralela ao eixo x, intersectando o eixo y no ponto $y = b$, como podemos ver na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Exemplo de função constante



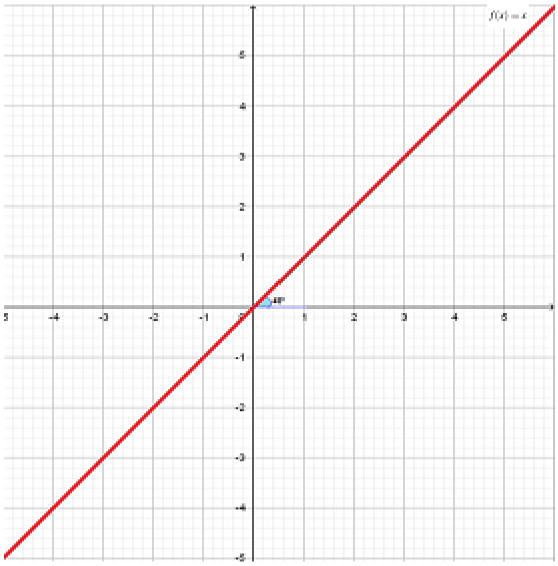
Fonte: Do autor (2021).

Proposição 3.2 *A função identidade é bijetiva.*

Demonstração: Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = x$, vamos provar que esta é injetiva. Temos que f é injetiva, quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Dados $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$, portanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pela lei de formação $f(x) = x$, vamos provar sua sobrejetividade. Assim $\forall\ y \in \mathbb{R}\ \exists!\ x \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$. Como $y = f(x) = x$, temos $x = y$, logo $y = f(x) = f(y) = y$. Portanto, dado um y encontramos um $x = y$, tal que $y = f(x)$, sendo f sobrejetiva.

O gráfico da função identidade é uma reta transversal, que passa pela origem com inclinação de 45°, pois sua taxa de variação é 1, ou seja, a variação no valor de x provoca uma variação de mesma intensidade e sentido no valor de y . Além disso, é observável que, dado $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, uma vez que $f(x) = x$, ou seja esta função é estritamente crescente. Sendo o esboço do gráfico representado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Gráfico da função identidade.



Fonte: Do autor (2021).

Proposição 3.3 *A função linear dada por $f(x) = ax$, é bijetiva.*

Demonstração: Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = ax$, vamos provar que esta é injetiva. Temos que f é injetiva, quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Dados $x_1 \neq x_2$, multiplicando ambos os lado por um número $a \neq 0$ temos $ax_1 \neq ax_2$ e a lei de formação da função nos diz que $f(x_1) = ax_1$ e $f(x_2) = ax_2$, portanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pela lei de formação $f(x) = ax$, vamos provar sua sobrejetividade. Assim $\forall\ y \in \mathbb{R}\ \exists!\ x \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$. Como $y = f(x) = ax$, tomamos $x = \frac{y}{a}$, logo $y = f(x) = f(\frac{y}{a}) = y$. Portanto dado um y encontramos um $x = \frac{y}{a}$, tal que $y = f(x)$, sendo f sobrejetiva.

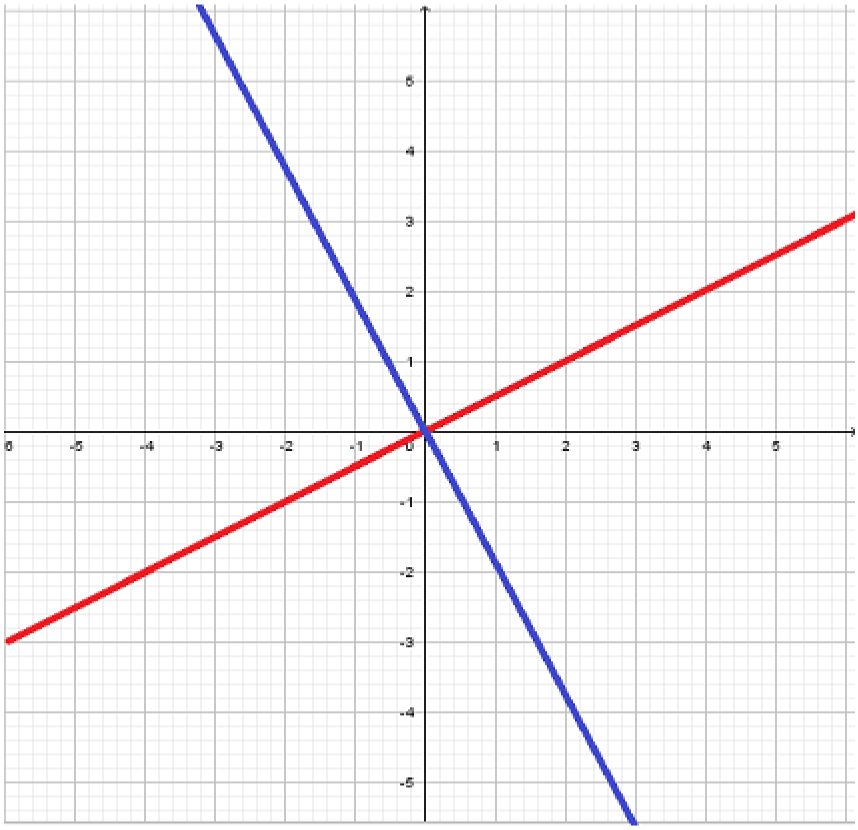
A função linear pode ser estritamente crescente ou estritamente decrescente, dependendo exclusivamente do valor do coeficiente angular (a), sendo estritamente crescente se $a > 0$ e estritamente decrescente se $a < 0$.

Proposição 3.4 *Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e lei de formação $f(x) = ax$, se $a > 0$, então f é estritamente crescente e se $a < 0$, então f é estritamente decrescente.*

Demonstração: Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e lei de formação $f(x) = ax$, se $x_1 < x_2$ e $a > 0$ então $ax_1 < ax_2$ logo, $f(x_1) < f(x_2)$, sendo f estritamente crescente. E se, $x_1 < x_2$ e $a < 0$ então $ax_1 > ax_2$ sendo $f(x_1) > f(x_2)$, portanto f é estritamente decrescente.

Independente do valor de a sempre teremos $f(0) = 0$, portanto o gráfico de f intersecta o ponto $P = (0,0)$ no plano cartesiano. A inclinação da reta dependerá do valor de a, que corresponde à tangente do ângulo de inclinação. Ela pode ser interpretada como taxa de variação, pois para cada unidade de variação de x ocorrerá uma variação de a unidades no valor de y. São infinitas as funções lineares, e para representar todas a funções lineares em um só plano cartesiano, teríamos apenas os eixos não preenchidos. Desta forma, na Figura 3.3 temos o exemplo de duas funções lineares, uma estritamente crescente (reta vermelha) e outra estritamente decrescente (reta azul).

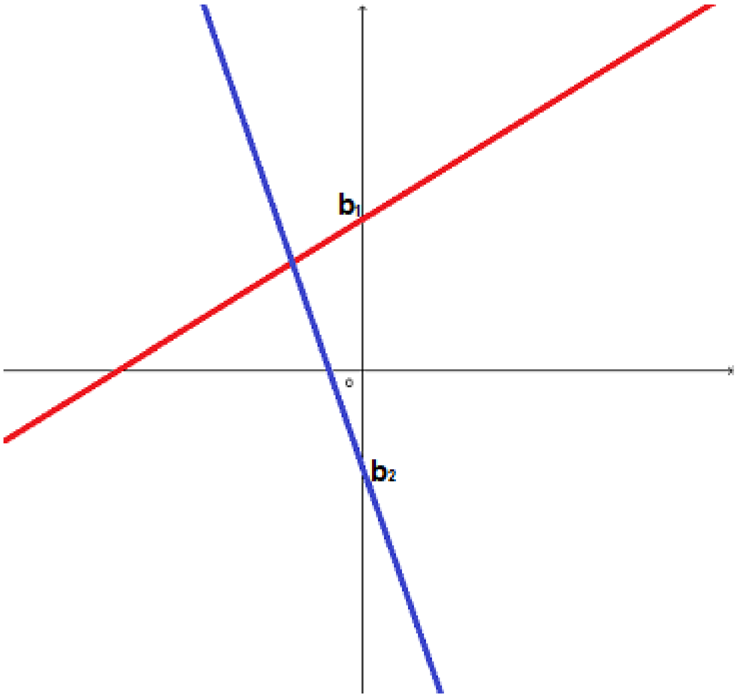
Figura 3.3 – Exemplo de funções lineares: estritamente crescente (reta vermelha) e estritamente decrescente (reta azul).



Fonte: Do autor (2021).

Os três casos descritos acima são casos específicos de função afim. Além desses, temos a variante em que o coeficiente angular é diferente de zero e o coeficiente linear (b) também é diferente de zero. Este caso pode ser considerado uma translação da função linear, pois a taxa de variação é variável e diferente de zero, no entanto o ponto $P = (0,0)$ não pertence à função, ocorrendo a intersecção do eixo y no ponto b e do eixo x no ponto $\frac{-b}{a}$, denominado raiz da função. Na Figura 3.4, temos o exemplo de duas translações de funções lineares, uma crescente (reta vermelha) e uma decrescente (reta azul).

Figura 3.4 – Exemplo de funções afins.



Fonte: Do autor (2021).

Um exemplo típico de aplicação da função afim é no estudo de mecânica. A velocidade em função do tempo nos estudos de movimentos retilíneos uniformemente variados é dada por uma função afim. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.5 *Dada a tabela a seguir determine a função velocidade do móvel.*

Tabela 3.1 – Velocidade do móvel.

Tempo (t) **em** s	**Velocidade** (v) **do móvel em** m/s^2
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15

Fonte: Do autor (2021).

Observando a tabela notamos que a taxa de variação da função é $\frac{2}{1}$ *e que o coeficiente linear da mesma é igual a* 5*. Assim concluímos que a função velocidade neste intervalo de tempo é*

$$v = 2t + 5.$$

3.2 Função quadrática

Definição 3.6 *Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esta é denominada* ***quadrática****, se existem constantes a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.*

As funções quadráticas são não sobrejetivas, pois o conjunto imagem não contempla todos os números reais. Isto pode ser evidenciado após algumas manipulações com a lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, como podemos observar a seguir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
f(x) &= a\frac{(2ax+b)^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
f(x) &= \frac{(2ax+b)^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

De acordo com a Equação 3.1 temos que o termo $(2ax + b)^2$ é não negativo, admitindo zero como sendo seu menor valor. Desta forma, o número real $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ será o valor limite para a imagem de $f(x)$. Sendo a função quadrática, limitada superiormente ou inferiormente, e esse limite superior ou inferior dependerá de algumas características da função.

Para verificar se a função é limitada superiormente (apresentando um valor máximo) ou inferiormente (apresentando um valor mínimo), analisaremos a expressão $f(x) = \frac{(2ax+b)^2}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}$. Notando que $\frac{(2ax+b)^2}{4a} = 0$ será o valor mínimo para $\frac{(2ax+b)^2}{4a}$ se $a > 0$ pois a fração apresentará valores não negativos, sendo assim $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ o mínimo da função para a positivo. De forma análoga se $a < 0$, $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ será o valor máximo admitido pela imagem da função quadrática.

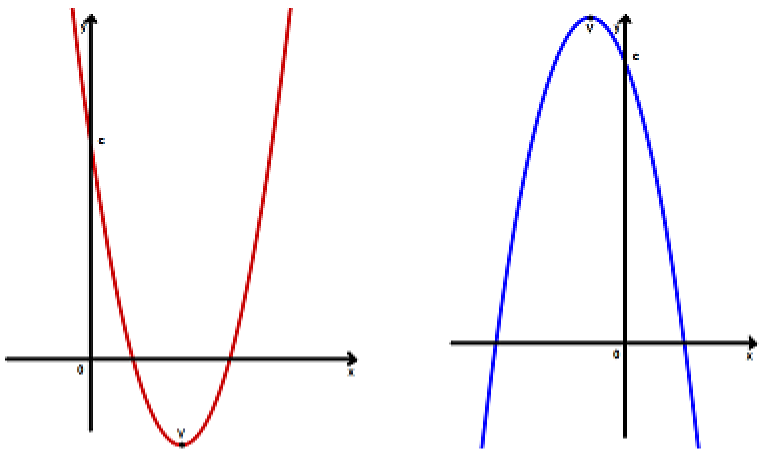
Visto que as funções quadráticas são não sobrejetivas, será que elas são injetivas? Não, as funções quadráticas são não injetivas, pois em geral, existe um mesmo correspondente y no contradomínio, para mais de um x do domínio.

Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, vamos provar que esta é não injetiva. Supomos que f seja injetiva, então $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Dado $f(x_1) = f(x_2)$ implica em $\frac{(2ax_1+b)^2}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{(2ax_2+b)^2}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}$, adicionando $\frac{b^2-4ac}{4a}$ a ambos os membros, tem-se $\frac{(2ax_1+b)^2}{4a} = \frac{(2ax_2+b)^2}{4a}$, multiplicando ambos os membros pelo número real $4a$, resultamos em $(2ax_1 + b)^2 = (2ax_2 + b)^2$ o que implica em $|2ax_1 + b| = |2ax_2 + b|$. Pela definição de valor absoluto, temos $2ax_1 + b = 2ax_2 + b$ ou $2ax_1 + b = -(2ax_2 + b)$. Assim, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$.Concluímos que $f(x_1) = f(x_2)$, não implica em $x_1 = x_2$, sendo então a função quadrática não injetiva.

Como as funções quadráticas são não sobrejetivas e não injetivas, sendo não bijetivas, não existe a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ de uma quadrática.

Temos que $f(x)$ pode ser máximo ou mínimo, mas qual valor de x corresponde a este extremo? Se $\frac{(2ax+b)^2}{4a} = 0$ implica em $f(x)$ extremo, resolvendo esta equação temos: $x = \frac{-b}{2a}$. Portanto $f(\frac{-b}{2a}) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ é o ponto de máximo ou mínimo de f. Sabendo que o gráfico da função quadrática é uma parábola, intersectando o eixo y em c, o ponto de extremo, nada mais é do que o vértice (v) da parábola. Temos na Figura 3.5, o exemplo do gráfico de duas funções quadráticas.

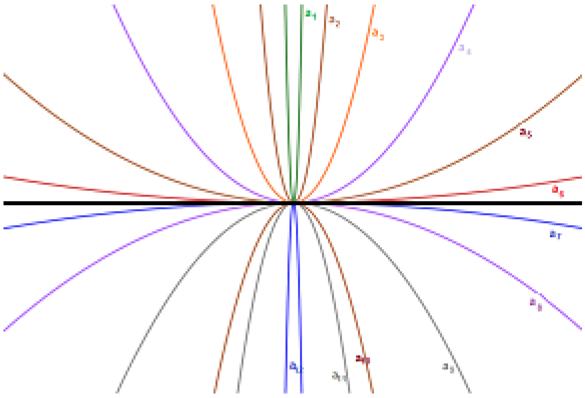
Figura 3.5 – Exemplo de funções quadráticas.



Fonte: Do autor (2021).

Além de indicar se o vértice da parábola é ponto de máximo ou de mínimo, o coeficiente a indica o quanto é a abertura da parábola, como podemos ver na Figura 3.6, em que $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > 0 > a_7 > a_8 > a_9 > a_{10} > a_{11} > a_{12}$.

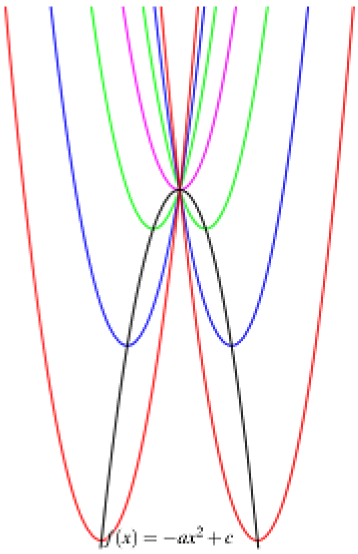
Figura 3.6 – Diferentes valores de a e suas interferências no gráfico.



Fonte: Do autor (2021).

De acordo com a Figura 3.6, é notável que quanto maior o $|a|$ mais fechada será a parábola. Tanto para o coeficiente b quanto para o coeficiente c, suas modificações geram translação da parábola. Sendo que a cada variação $(\triangle b)$ que ocorre no coeficiente b, o vértice da parábola se desloca a partir de uma função $f(x) = -ax^2 + c$, com $x = \frac{\triangle b}{2a}$. Podendo ser observado na Figura 3.7.

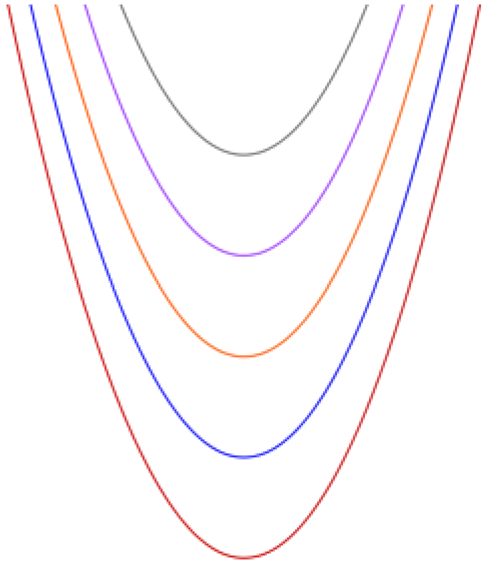
Figura 3.7 – Diferentes valores de b e suas interferências no gráfico.



Fonte: Do autor (2021).

Já o coeficiente c provoca translações verticais, deslocando quantas unidades forem modificadas em c. Como pode ser visualizada na Figura 3.8.

Figura 3.8 – Diferentes valores de c e suas interferências no gráfico.



Fonte: Do autor (2021).

3.3 Potências

Antes de estudarmos função exponencial, precisamos entender o conceito de potência, que será abordado nesta seção.

Dado um número real positivo a, para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência de base a e expoente n, a^n, é definida como o produto de n fatores iguais a a. Por definição $a^1 = a$, pois não existe um produto com apenas um fator.

De forma indutiva definimos a^n como: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \times a^n$.

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se, $a^m \times a^n = a^{m+n}$, valendo-se para quaisquer $m_1, m_2, ..., m_k$:

$$a^{m_1} \times a^{m_2} \times ... \times a^{m_k} = a^{m_1+m_2+...+m_k}.$$

No caso particular, em que $m_1 = m_2 = ... = m_k = m$, tem-se $(a^m)^k = a^{mk}$. Se $a > 1$, multiplicando ambos os membros da desigualdade por a^n, temos $a^{n+1} > a^n$, Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < ... < a^n < a^{n+1} < ....$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > ... > a^n > a^{n+1} > ....$$

Deste modo, a sequência cujo n-ésimo termo é a^n será crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Portanto, se $a > 1$, a sequência formada pelas potências de a^n, $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente. Ou seja, dado um $c \in \mathbb{R}$, existe sempre um $a^n > c$. Para provar isto, faremos $a = 1 + nd, c > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, tem-se $a^n > 1 + nd$. Tomando $n > \frac{c-1}{d}$, temos $1 + nd > c$, consequentemente $a^n > c$.

Partindo do conceito de que $a^1 = a$, quanto é a^0? Como a igualdade $a^0 \times a^1 = a^{0+1}$, deve ser verdadeira, temos $a^0 \times a = a$, portanto $a^0 = 1$ é a única definição possível. Consequentemente, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \text{ portanto } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Assim, considerando as definições $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para $n \in \mathbb{N}$, podemos admitir que potência de base $a > 0$ tenha expoentes inteiros. Desta forma, a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, cumpre a igualdade fundamental $f(m+n) = f(m) \times f(n)$, sendo crescente para $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. De $a^m \times a^n = a^{m+n}$ segue-se que $(a^m)^n = a^{mn}$, para $m, n \in \mathbb{Z}$.

Vejamos como pode-se interpretar a potência a^r para $r = \frac{m}{n}$ em que $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$, de modo que a igualdade $a^r \times a^s = a^{r+s}$ seja válida. Desta forma tem-se:

$$(a^r)^n = a^r \times a^r \times ... \times a^r = a^{r+r+...+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto, a^r é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição, o número $\sqrt[n]{a^m}$, é a raiz n-ésima de a^m. Definir a potência a^r, com $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, consiste em pôr

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Com base na definição supracitada, verificaremos alguns detalhes. Primeiramente, como $\frac{m}{n} = \frac{mp}{np}$ para todo $p \in \mathbb{N}$, temos que $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$ então $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. Em segundo lugar, dados

$r, s \in \mathbb{Q}$ temos que provar que $a^r \times a^s = a^{r+s}$, para isso, consideremos $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, e façamos:

$$a^r \times a^s = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$$
$$a^r \times a^s = a^{\frac{mq}{nq}} \times a^{\frac{pn}{qn}}$$
$$a^r \times a^s = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}}$$
$$a^r \times a^s = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{np}}$$
$$a^r \times a^s = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}.$$

E por fim precisamos provar que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(r) = a^r$, é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Dados $f(r_1) = a^{r_1}$ e $f(r_2) = a^{r_2}$ considerando $r_1 > r_2$ então $r_1 = r_2 + r_3$ para $r_3 > 0$, portanto $a^{r_1} = a^{r_2+r_3}$, consequentemente $a^{r_1} = a^{r_2} \times a^{r_3}$. Como $r_3 > 0$ e $a > 1$, então $a^{r_3} > 1$, provando que $a^{r_1} > a^{r_2}$.

A demonstração para $0 < a < 1$, segue de forma análoga.

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ não é sobrejetiva. Ilustraremos tal fato com o seguinte exemplo: Dado $a = 10$, existe algum número racional $r = \frac{m}{n}$, tal que $10^{\frac{m}{n}} = 11$? Para responder essa pergunta, verificaremos se dados quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $10^m = 11^n$, sabemos que 10^m é um número formado pelo algarismo 1 seguido de m zeros, ao passo que 11^n não pode ser um número representado deste modo. Sendo assim, o número 11 não pertence ao conjunto imagem da função dada. As potências a^r, com $r \in \mathbb{Q}$, não contém todos os números reais positivos, mas está espalhada por todo conjunto $\mathbb{R}_+^*$, assim temos o lema.

Lema 3.7 *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+^*$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

3.4 Função exponencial

Utilizada para modelar crescimentos populacionais de alguns seres vivos, modelando montantes provenientes de investimentos ou empréstimos financeiros, a função exponencial tem aplicabilidade em diferentes áreas do conhecimento e é definida como:

Definição 3.8 *Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, esta é denominada* ***exponencial****, se existir uma constante $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$ tais que $f(x) = a^x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.*

Proposição 3.9 *As funções exponenciais são contínuas, ou seja , para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, tomando x próximo de x_0, a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ será tão pequena quanto quisermos.*

Demonstração: Primeiramente provaremos que a^h se aproxima de 1, tanto quanto quisermos. Considerando $a > 1$ e $h > 0$, dado $\varepsilon > 0$, mostraremos que $a^h < 1 + \varepsilon$. Pela desigualdade de Bernoulli, $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$, escolhendo um $n \in \mathbb{N}$ de modo que $n > \frac{(a-1)}{\varepsilon}$, temos $n\varepsilon > a - 1$, sendo $a < n\varepsilon + 1$, portanto $a < 1 + n\varepsilon$ e daí $a < (1+\varepsilon)^n$ e por fim $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Assim, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Ou seja, $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Tomando $0 < h < \frac{1}{n}$, temos $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Desta forma faremos a^h tão próximo de 1 quanto desejarmos, fazendo $\lim_{h \to 0} a^h = 1$. Fixando $x_0 \in \mathbb{R}$, consideremos $h = x - x_0$ e tem-se $a^x - a^{x_0} = a^{x_0 + h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$. À medida que x se aproxima de x_0, h tende a 0, a^h tende a 1 e $a^h - 1$ tende a 0. Dado que a^{x_0} é constante, $\lim_{x \to x_0}(a^x - a^{x_0}) = 0$, portanto, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, caracterizando a continuidade da função exponencial.

Proposição 3.10 *As funções exponenciais são sobrejetivas, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$.*

Demonstração: Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, com lei de formação $f(x) = a^x$, utilizando o lema 3.7, considerando que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$, segue que $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = b$. Considerando $a > 1$, escolhemos as potências a^{r_n}, tais que:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < ... < a^{r_n} < ... < b.$$

Fixando $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$, a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < ... < r_n < ... < s$. Sendo a sequência (r_n) crescente e limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = x$. Sendo a função exponencial, $f(x) = a^x$ contínua, temos que $a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = b$, provando assim sua sobrejetividade.

Proposição 3.11 *As funções exponenciais são injetivas.*

Demonstração: Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, com lei de formação $f(x) = a^x$, vamos provar que esta é injetiva. Temos que f é injetiva, quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Dados $f(x_1) = a^{x_1}$ e $f(x_2) = a^{x_2}$ temos $x_1 \neq x_2$. Sem perda de generalidade consideremos $x_1 > x_2$ então $x_1 = x_2 + x_3$ para $x_3 > 0$, portanto $a^{x_1} = a^{x_2} \times a^{x_3}$. Como $x_3 \neq 0$ e $a \neq 1$,consequentemente $a^{x_2} \times a^{x_3} \neq a^{x_2}$, então $a^{x_3} \neq 1$, provando que $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

A função exponencial poder ser estritamente crescente ou estritamente decrescente, dependendo exclusivamente do valor de a, sendo estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$. Pois existe uma propriedade das potências, que para quaisquer $m, n \in \mathbb{R}$ temos:

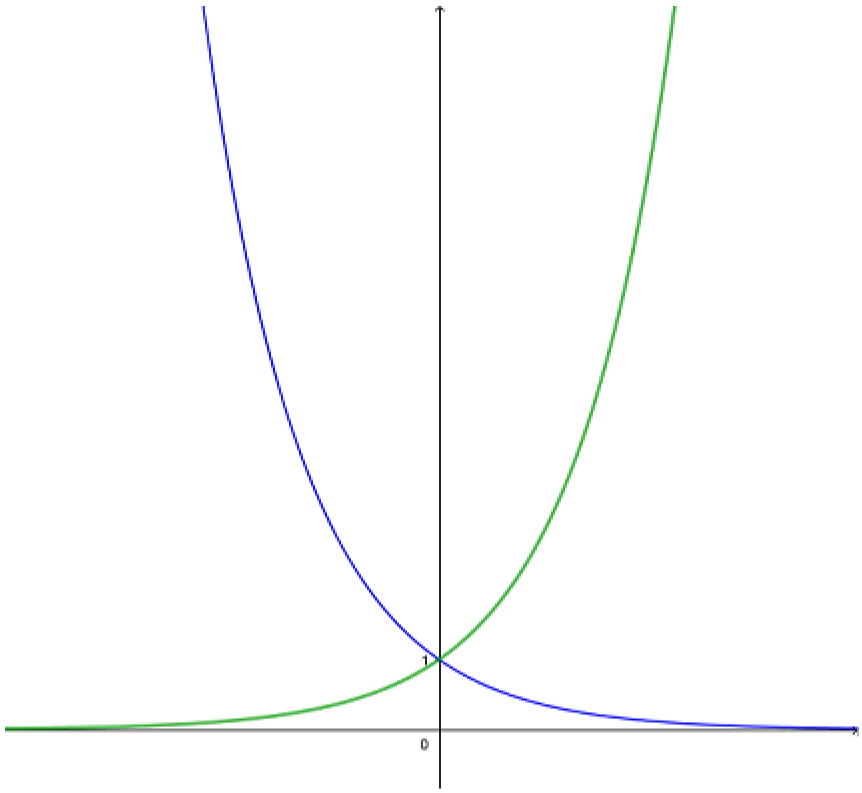
a) $m < n \Rightarrow a^m < a^n$ se $a > 1$;

b) $m < n \Rightarrow a^m > a^n$ se $0 < a < 1$.

Proposição 3.12 *Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, e lei de formação $f(x) = a^x$, se $a > 1$, então f é estritamente crescente e se $0 < a < 1$, então f é estritamente decrescente.*

A função exponencial é ilimitada superiormente, sendo os gráficos representados na Figura 3.9, curva em verde função crescente e curva em azul, função decrescente.

Figura 3.9 – Representação da função exponencial no plano cartesiano.



Fonte: Do autor (2021).

3.5 Função logarítmica

A função logarítmica, também é conhecida como a função inversa da exponencial, sendo definida como:

Definição 3.13 *Dada a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, esta é denominada **logarítmica**, se existir uma constante $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$ tal que $f(x) = \log_a x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}_+^*$.*

Proposição 3.14 *As funções logarítmicas são sobrejetivas.*

Demonstração: Dada a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = \log_a x$, vamos provar que esta é sobrejetiva. Tomando $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists!\ x \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$, portanto $y = \log_a x$ implica em $x = a^y$, assim $f(x) = f(a^y)$. Como $y = f(x) = f(a^y)$, então $x = a^y$, logo $y = f(x) = f(a^y) = \log_a a^y = y$. Portanto, dado um y encontramos um $x = a^y$, tal que $y = f(x)$, sendo f sobrejetiva.

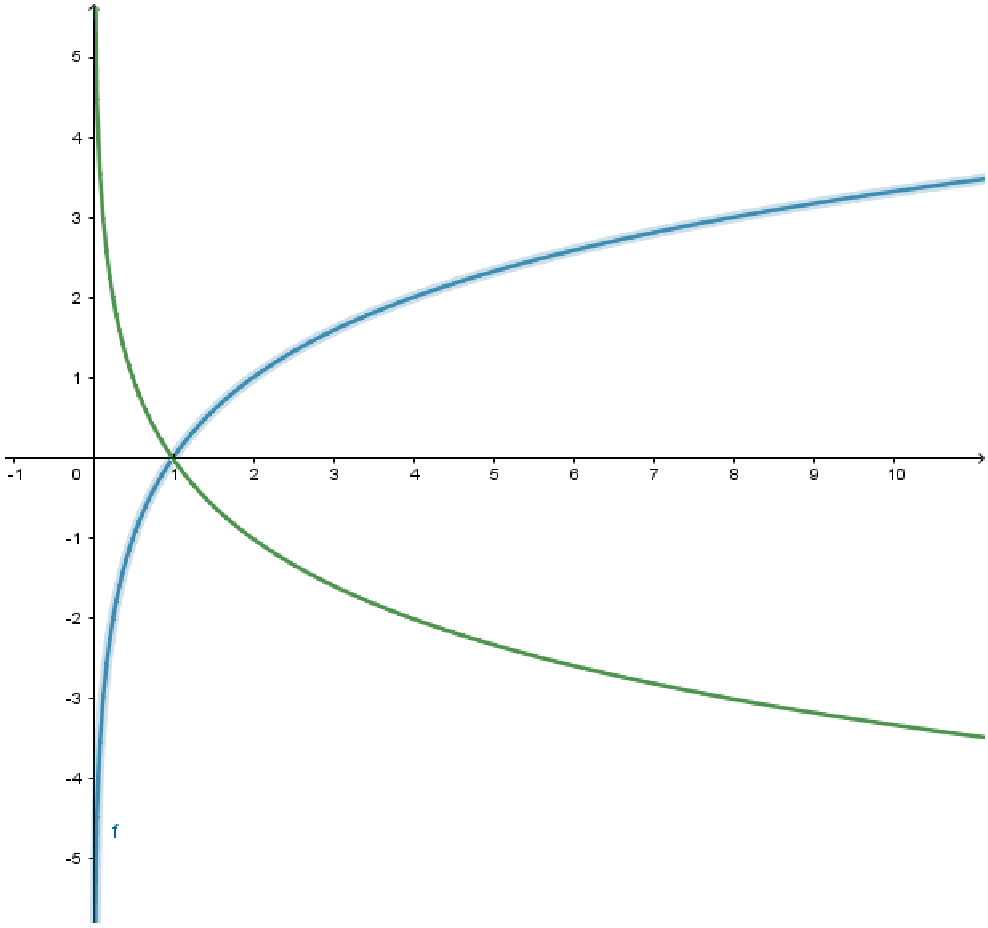
Proposição 3.15 *As funções logarítmicas são injetivas.*

Demonstração: Dada a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = \log_a x$, vamos provar que esta é injetiva. Temos que f é injetiva, quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Dados $f(x_1) = \log_a x_1$ e $f(x_2) = \log_a x_2$ como $x_1 \neq x_2$, sem perda de generalidade consideremos $x_1 > x_2$ então $x_1 = x_2 \times x_3$ para $x_3 > 1$, portanto $\log_a x_1 = \log_a x_2 + \log_a x_3$, consequentemente $\log_a x_2 + \log_a x_3 \neq \log_a x_2$. Como $x_3 \neq 1$ e $a \neq 0$, então $\log_a x_3 \neq 0$, provando que $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.

A função logarítmica pode ser estritamente crescente ou estritamente decrescente, dependendo exclusivamente do valor de a, sendo estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$. Pois, considerando $x_1 > x_2$ temos $x_1 = x_2 \times x_3$ dado um $x_3 > 1$, portanto $\log_a x_1 = \log_a x_2 + \log_a x_3$, consequentemente $\log_a x_2 + \log_a x_3 > \log_a x_2$, se $a > 1$ e $\log_a x_2 + \log_a x_3 < \log_a x_2$ se $0 < a < 1$.

Proposição 3.16 *Dada a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, e lei de formação $f(x) = \log_a x$, se $a > 1$, então f é estritamente crescente e se $0 < a < 1$, então f é estritamente decrescente.*

Figura 3.10 – Representação da função logarítmica no plano cartesiano.



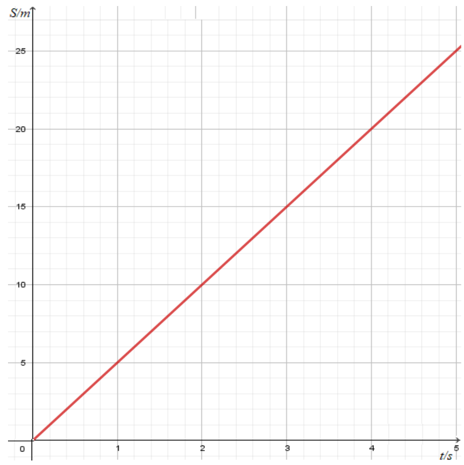
Fonte: Do autor (2021).

4 PROPOSTA DE EXERCÍCIOS

Neste capítulo, abordaremos alguns exercícios envolvendo funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, com o objetivo de mostrar a aplicação de alguns conceitos do Cálculo Diferencial. Os exercícios são de criação própria, baseado em todo o estudo já realizado. A primeira questão explorada, aborda o conceito de função afim num contexto do estudo da mecânica.

(1) A Figura 4.1 mostra um gráfico que correlaciona a distância percorrida por um corpo em função do tempo gasto. Tendo como referência o seguinte gráfico, determine a velocidade média do corpo no intervalo de tempo entre 1 e 4 segundos e compare com a velocidade média no intervalo de 0 a 0,2 segundos.

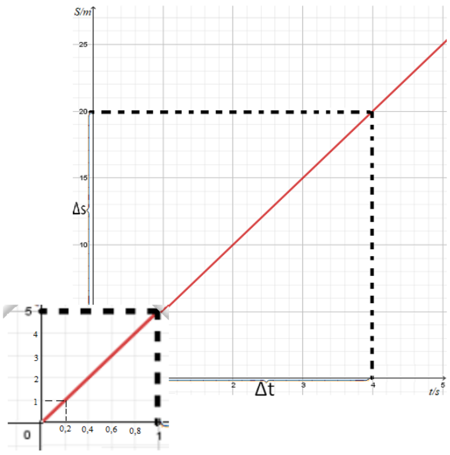
Figura 4.1 – Espaço percorrido em função do tempo gasto.



Fonte: Do autor (2021).

Sabendo-se que a velocidade média é dada pela razão entre o espaço percorrido pelo tempo gasto.

Figura 4.2 – Variação do espaço em função da variação do tempo.



Fonte: Do autor (2021).

Conforme observado na Figura 4.2, temos que a velocidade média no intervalo de 1 a 4 segundos é dada por:

$V_{media} = \frac{20-5}{4-1}$

$V_{media} = \frac{15}{3}$

$V_{media} = 5ms^{-1}$.

E a para o intervalo de 0 até 0,2 segundo temos:

$V_{media} = \frac{1-0}{0{,}2-0}$

$V_{media} = \frac{1}{0{,}2}$

$V_{media} = 5ms^{-1}$.

Observando o gráfico de deslocamento do móvel, nota-se que a taxa de variação é constante, pois a evolução do deslocamento está sendo linear, ou seja, este é um gráfico que representa um movimento retilíneo uniforme, sendo assim, sua velocidade é constante. Portanto, a velocidade média é igual à velocidade instantânea. Tornando possível determinar a função deslocamento, que é dada por:

$\Delta S = V_0 t$

$\Delta S = 5t$.

Sendo ΔS a variação do espaço, ou seja o deslocamento do móvel, e V_0 a velocidade inicial do móvel.

Desta forma, temos a taxa de variação no tempo do espaço percorrido igual à velocidade do corpo. Ou seja, a derivada da função deslocamento é a velocidade.

A segunda e terceira questões abordam função polinomial do segundo grau e determinaremos as soluções utilizando-se de dois métodos distintos para compararmos os resultados encontrados. Assim, temos a segunda questão.

(2) Um feirante vende 100 bandejas de morango ao preço de R$ 4,50 a unidade, o custo de cada bandeja é de R$ 2,50. Porém, para cada 10 centavos que o feirante abaixa no preço, a quantidade vendida aumenta em 10 unidades. Qual será o desconto que maximizará o lucro? E qual será o lucro máximo obtido pelo feirante?

O primeiro passo é determinar a função que expressa o lucro total. O lucro unitário, em reais pode ser expresso por $(2-0,1x)$ sendo x o número de vezes que o desconto foi aplicado. Da mesma forma, a quantidade de bandejas vendidas pelo feirante é $(100+10x)$, assim, a função lucro é dada por $L=(2-0,1x)(100+10x)$, fazendo distributiva teremos $L=-x^2+10x+200$.

Munidos da expressão que representa a função lucro, calcularemos o desconto que maximiza o lucro utilizando as fórmulas da abscissa do vértice, x_v, comumente ensinada no Ensino Médio.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$
$$x_v = \frac{-10}{-2}$$
$$x_v = 5.$$

Portanto, o feirante atingirá maior lucro se aplicar cinco vezes o desconto de dez centavos. Desta forma, o desconto que maximizará o lucro é R$0,50.

Agora, para encontrar o valor do lucro máximo será calculado o valor da ordenada do vértice, y_v, que é dado pela fórmula $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$. Portanto, antes de mais nada calcularemos o discriminante Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 10^2 - 4\times(-2)\times 200$$
$$\Delta = 100+800$$
$$\Delta = 900.$$

Assim, y_v é:

$$y_v = \frac{-900}{-4}$$
$$y_v = 225.$$

Concluímos que o lucro máximo alcançado pelo feirante será de R$ 225,00.

Faremos os cálculos utilizando a primeira derivada, e igualando a zero, para determinar o vértice da parábola. Dada $L = -x^2 + 10x + 200$, temos que $L' = -2x + 10$, e igualando a primeira derivada a zero, tem-se:

$$-2x + 10 = 0$$
$$-2x = -10$$
$$x = \frac{-10}{-2}$$
$$x = 5.$$

Para calcular o lucro máximo podemos substituir x por 5 na expressão do lucro.

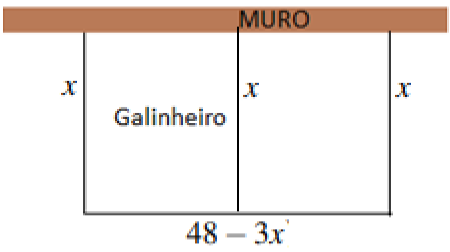
$$L_5 = -5^2 + 10 \times 5 + 200$$
$$L_5 = -25 + 50 + 200$$
$$L_5 = 225.$$

Portanto, utilizando métodos distintos atingimos o mesmo objetivo, obtendo como resultado R$225,00 como lucro máximo e desconto de R$0,50 para atingir essa meta. Finalizando assim a segunda questão proposta.

A terceira questão está abordando os mesmos conceitos matemáticos, em uma situação diferente, explorando assim o cálculo de área.

(3) O senhor André pretende construir um galinheiro em formato retangular e com uma divisória no meio, conforme a Figura 4.3. Para economizar material, ele irá aproveitar um muro já existente para ser um lado do galinheiro. Assim, ele comprou 48 m de tela para fechar os outros três lados e a divisória, incluindo os portões. Deste modo, qual será a área máxima do galinheiro construído por André?

Figura 4.3 – Croqui do galinheiro.



Fonte: Do autor (2021).

O primeiro passo é determinar a função que expresse a área do galinheiro. Para isso, consideremos que a largura do galinheiro será x metros, consequentemente o comprimento será $(48-3x)$ metros. Portanto a área total (A) do galinheiro, em metros quadrados, pode ser expressa pelo produto do comprimento $(48-3x)$, pela largura (x), sendo a função área, expressa por $A = -3x^2 + 48x$.

Munidos da expressão que representa a área, calcularemos as dimensões que maximiza a área utilizando a fórmula do x_v, comumente ensinada no Ensino Médio.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$
$$x_v = \frac{-48}{2(-3)}$$
$$x_v = 8.$$

Portanto, a largura do galinheiro que findar em maior área será 8 metros.

Assim, a área máxima será dada pelo valor do y_v, que é dado pela fórmula $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$. Logo, antes de mais nada calcularemos o discriminante Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 48^2 - 4 \times (-3) \times 0$$
$$\Delta = 2304.$$

Assim, y_v é:

$$y_v = \frac{-2304}{4(-3)}$$
$$y_v = 192.$$

Faremos os mesmos cálculos utilizando a primeira derivada para determinar o vértice da função. Dada $A = -3x^2 + 48x$, temos que $A' = -6x + 48$, e igualando a primeira derivada a zero, tem-se:

$$-6x + 48 = 0$$
$$-6x = -48$$
$$x = \frac{-48}{-6}$$
$$x = 8.$$

Para calcular a área máxima podemos substituir x por 8 na expressão da área.

$$A_8 = -3 \times 8^2 + 48 \times 8$$
$$A_8 = -3 \times 64 + 384$$
$$A_8 = -192 + 384$$
$$A_8 = 192.$$

Portanto, utilizando métodos distintos atingimos o mesmo objetivo, obtendo como resultado $192m^2$ como área máxima do galinheiro, podendo ser observado graficamente, a área do galinheiro em função de sua largura, em (PEREIRA...,).

É notável que nas duas situações envolvendo o vértice da função quadrática, ao aplicar a primeira derivada e igualá-la a zero, não surgiu nenhuma situação envolvendo cálculos complicados que um aluno de Ensino Médio, não seja capaz de solucionar. Visto uma possível aplicação de conceitos do Cálculo no ensino de funções quadráticas, vejamos a seguir uma situação envolvendo função exponencial e uma possível aplicação para o Ensino Médio.

(4) As últimas mudanças no sistema previdenciário fizeram alguns jovens repensarem a maneira de lidarem com o dinheiro. Um jovem preocupado com a sua situação financeira futura, decidiu pegar $R\$10.000,00$, que estava juntando para comprar um carro e fez um investimento de longo prazo. A proposta da corretora de investimentos é que ele receberá 10% de juros ao ano, creditados diariamente. No entanto o dinheiro deve ficar investido sem movimentação alguma por no mínimo 20 anos. Após este prazo, caso queira manter o contrato é permitido retirar apenas rendimentos diários, semanais, mensais ou anuais. Ou pode-se retirar a quantia que desejar e rever o contrato para taxas de juros atuais. Com base nesta proposta, o objetivo deste jovem é ter uma renda de $R\$50,00$ diários com este investimento. Deste modo, a partir de quanto tempo ele poderá retirar o rendimento diário para ter a renda desejada?

O primeiro passo para resolver essa situação é determinar a expressão do montante (M) em função do tempo (t) investido. Que será dada por:

$$M = 10000 \times 1,1^t,$$

sendo M em reais e t em anos. Munido da expressão, precisamos determinar a taxa de variação desta função, que é dado por $M' = 10000 \times (1,1)^t \times ln1,1$. Vale ressaltar que os cálculos usando esta expressão nos darão os valores para 1 ano, como queremos o rendimento diário faremos $\frac{M'}{365} = 50$, ou seja, $M' = 18250$. Isso será válido considerando que a partir do tempo determinado ele sacará o dinheiro diariamente, mantendo o capital fixo.

$$\begin{gathered}
18250 = 10000 \times (1,1)^t \times ln(1,1) \\
18250 \div 10000 = (1,1)^t \times ln(1,1) \\
1,825 \div ln(1,1) = (1,1)^t \\
(1,1)^t = 19,1480071 \\
t \times ln(1,1) = ln19,1480071 \\
t = \frac{ln19,1480071}{ln1,1} \\
t = 30,97464141 \qquad .
\end{gathered}$$

Desta forma, este jovem terá o rendimento desejado após 30 anos, 11 meses e 21 dias do início do investimento.

Uma outra estratégia, seria converter a taxa de 10% ao ano em taxa diária. Para isso, faremos:

$$\begin{gathered}
1,1 = (1+i)^{365} \\
(1+i) = \frac{log1,1}{365} \\
(1+i) = 1,00026115788 \\
i = 0,00026115788.
\end{gathered}$$

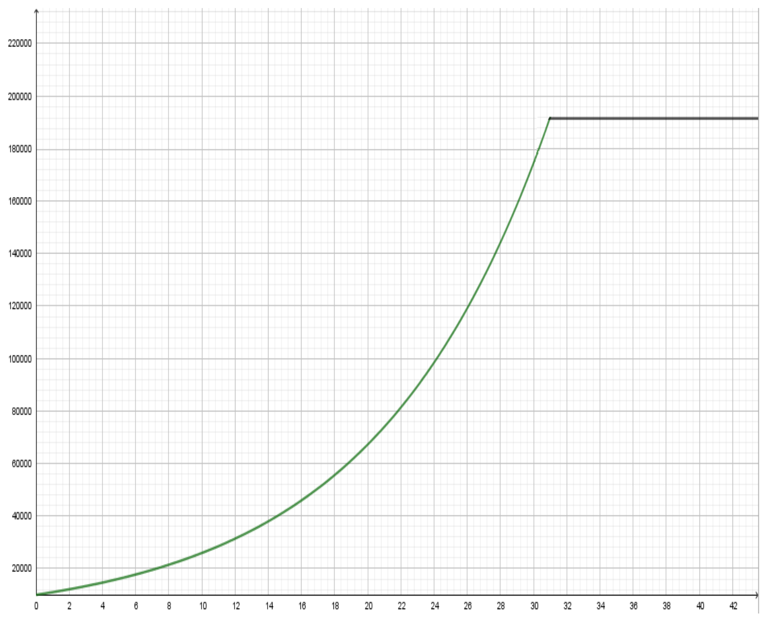
Portanto 10% ao ano equivale a 0,026115788% ao dia. Agora determinaremos para qual t, $M_{(t+1)} - M_t = 50$. Dada a função do montante com a taxa diária, igual a $M =$

$10000 \times 1,00026115788^t$, temos:

$$
\begin{gathered}
10000 \times 1,00026115788^{(t+1)} - 10000 \times 1,00026115788^t = 50 \\
1,00026115788^{(t+1)} - 1,00026115788^t = 0,005 \\
1,00026115788^t = 19,1455 \\
log 1,00026115788^t = log 19,1455 \\
t = \frac{log 19,1455}{log 1,00026115788} \\
t = 11.305,28 \qquad .
\end{gathered}
$$

Assim temos que após 11.306 dias (30 anos, 11 meses e 21 dias) do início do investimento, o jovem terá o rendimento desejado. Sendo que o montante investido seguirá o comportamento do gráfico representado na Figura 4.4, caso o jovem siga com seus planos de retirar o rendimento diariamente após a data estipulada.

Figura 4.4 – Montante acumulado em função do tempo investido.



Fonte: Do autor (2021).

Desta forma, independente da estratégia utilizada, obtemos os mesmos resultados para a situação desejada. Na próxima questão exploraremos uma função logarítmica, em um contexto de crescimento populacional.

(5) Estima-se que a população de uma pequena cidade mineira crescerá pelos próximos anos sob a função $P(x) = 1200ln(x+80)$, sendo P o número de habitantes e x o tempo em anos, a contar da data atual. Daqui a quantos anos a taxa de crescimento populacional deste município será menor que 12 habitantes ao ano?

Para resolver essa situação problema temos duas opções, calcular o período que $P(x_n) - P(x_n - 1) < 12$:

$$
\begin{gathered}
P(x_n) - P(x_n - 1) = 1200ln(x_n + 80) - 1200ln(x_n - 1 + 80) < 12 \\
1200ln(x_n + 80) - 1200ln(x_n + 79) < 12 \\
1200[ln(x_n + 80) - ln(x_n + 79)] < 12 \\
ln(x_n + 80) - ln(x_n + 79) < \tfrac{12}{1200} \\
ln(\tfrac{x_n+80}{x_n+79}) < 0,01 \\
e^{0,01} > \tfrac{x_n+80}{x_n+79} \\
e^{0,01} \times (x_n + 79) > x_n + 80 \\
x_n(e^{0,01} - 1) > 80 - 79e^{0,01} \\
x_n > \tfrac{80-79e^{0,01}}{e^{0,01}-1} \\
x_n > \tfrac{0,206}{0,010} \\
x_n > 20,501
\end{gathered}
$$

.

Encontrando que após 20,501 anos da data atual, a taxa de crescimento populacional será inferior a 12 habitantes por ano.

Outra estratégia é determinar a taxa de variação da função e verificar quando essa taxa é menor que 12.

$$P'(x) = \frac{1200}{x+80} < 12$$

$$\frac{1200}{x+80} < 12$$

$$1200 < 12(x+80)$$

$$12x + 960 > 1200$$

$$12x > 240$$

$$x > \frac{240}{12}$$

$$x > 20.$$

Desta forma, concluímos que a partir de 20 anos a taxa de crescimento populacional será inferior a 12 habitantes por ano.

É notável uma diferença nos resultados obtidos, qual o motivo desta divergência? Isso ocorre, pois ao utilizar o primeiro método, sem aplicação da derivada, estamos calculando a taxa de variação média e ao utilizar a derivada estamos determinando a taxa de variação instantânea. Isso quer dizer que se fizermos $P(20,501) - P(19,501)$, teremos um resultado estritamente menor que 12.

Além de auxiliar na resolução de situações, alguns conceitos do Cálculo Diferencial auxiliam a construção do gráfico de algumas funções, para isso, podemos seguir alguns passos, descritos no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Etapas básicas para construção do gráfico de uma função.

Etapas	Procedimento
1ª	Encontrar o domínio de f.
2ª	Calcular os pontos de intersecção com os eixos.
3ª	Encontrar os pontos críticos.
4ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$.
5ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos.
6ª	Determinar as concavidades e os pontos de inflexão de f.
7ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.
8ª	Esboçar o gráfico.

Fonte: Do autor (2021).

Dado que toda função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser representada por um gráfico no plano cartesiano, utilizando os passos supracitados no Quadro 4.1, iremos construir o gráfico das funções exploradas nas questões problemas estudadas acima.

(1) Seguindo as etapas descritas no Quadro 4.1 para esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por, $f(x) = 5x$, temos:

1ª etapa: domínio $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

2ª etapa: esta função intersecta a origem, contendo o ponto $(0,0)$.

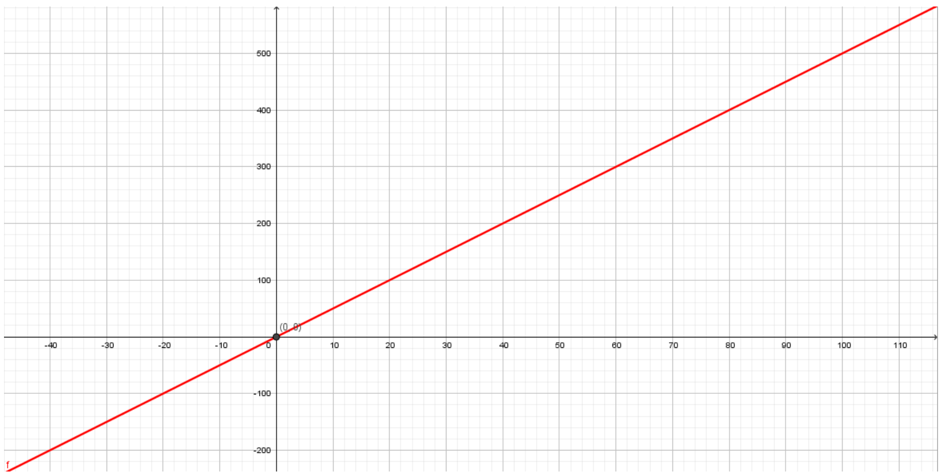
3ª etapa: a função dada não tem ponto crítico, pois $f'(x) = 5$, eliminando as etapas 5 e 6.

4ª etapa: como $f' > 0$ em todo intervalo real, a função é estritamente crescente.

7ª etapa: esta função não possui assíntotas.

8ª etapa: Figura 4.5.

Figura 4.5 – Gráfico de $f(x) = 5x$.



Fonte: Do autor (2021).

(2) Seguindo as etapas descritas no Quadro 4.1 para esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por, $f(x) = -x^2 + 10x + 200$, temos:

1ª etapa: domínio $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

2ª etapa: a intersecção com o eixo das ordenadas ocorre no ponto $(0,200)$, e com o eixo das abscissas nos pontos $(-10,0)$ e $(20,0)$.

3ª etapa: o ponto crítico é dado por $-2x + 10 = 0$, ou seja em $(5,225)$.

4ª etapa: função crescente para $x < 5$ e decrescente para $x > 5$.

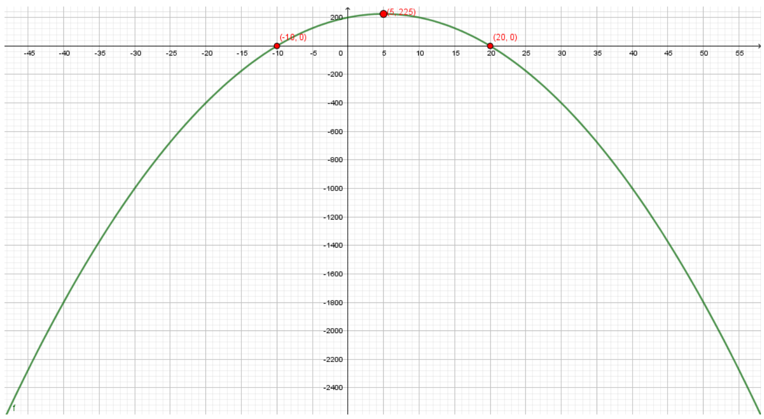
5ª etapa: dado $f''(x) = -2$, temos que o ponto crítico $(5,225)$ é um máximo relativo.

6ª etapa: como $f''(x) = -2$ a concavidade é voltada para baixo.

7ª etapa: esta função não possui assíntotas.

8ª etapa: Figura 4.6.

Figura 4.6 – Gráfico de $f(x) = -x^2 + 10x + 200$.



Fonte: Do autor (2021).

(3) Seguindo as etapas descritas no Quadro 4.1 para esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3x^2 + 48x$, temos:

1ª etapa: domínio $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

2ª etapa: o intersecto nos eixos ocorrem nos pontos $(0,0)$ e $(16,0)$.

3ª etapa: o ponto crítico é dado por $-6x + 48 = 0$, ou seja em $(8,192)$.

4ª etapa: função crescente para $x < 8$ e decrescente para $x > 8$.

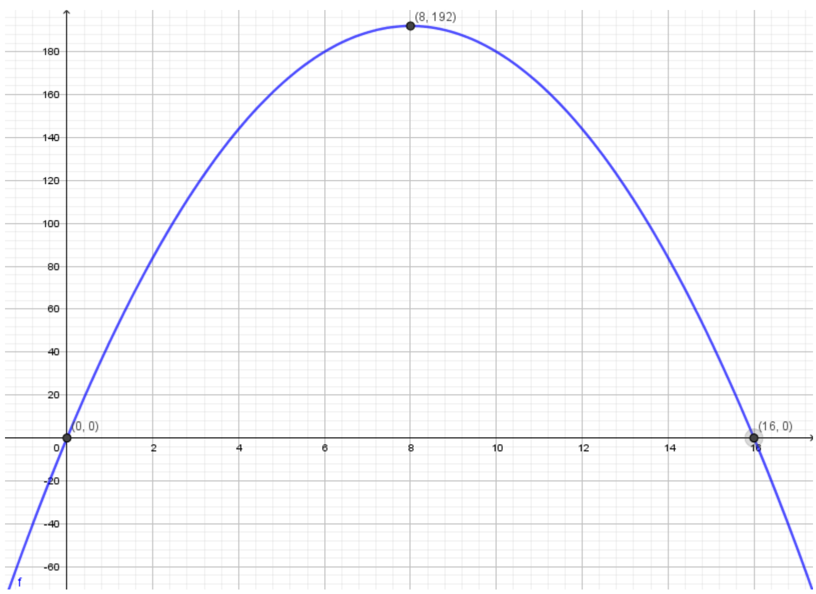
5ª etapa: dado $f''(x) = -6$, então, o ponto crítico $(8,192)$ é um máximo relativo.

6ª etapa: como $f''(x) = -6$ a concavidade é voltada para baixo.

7ª etapa: esta função não possui assíntotas.

8ª etapa: Figura 4.7.

Figura 4.7 – Gráfico de $f(x) = -3x^2 + 48x$.



Fonte: Do autor (2021).

(4) Seguindo as etapas descritas no Quadro 4.1 para esboçar o gráfico da função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 10000\times 1,1^x$, temos:

1ª etapa: domínio $D(f) = \{x\in\mathbb{R}\}$.

2ª etapa: a intersecção com o eixo das ordenadas ocorre no ponto $(0,10000)$.

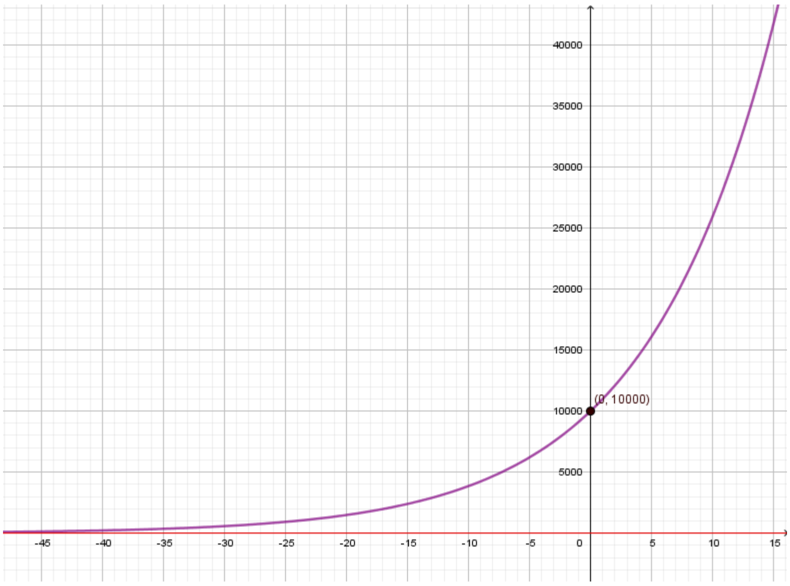
3ª etapa: a função dada não tem ponto crítico, eliminando as etapas 5 e 6.

4ª etapa: como $f' > 0$ em todo intervalo real, a função é estritamente crescente.

7ª etapa: esta função possui uma assíntota horizontal, $y = 0$, pois $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

8ª etapa: Figura 4.8.

Figura 4.8 – Gráfico de $f(x) = 10000\times 1,1^x$.



Fonte: Do autor (2021).

(4) Seguindo as etapas descritas no Quadro 4.1 para esboçar o gráfico a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1200ln(x+80)$, temos:

1ª etapa: domínio $D(f) = \{x\in\mathbb{R}|x > -80\}$.

2ª etapa: o intersecto no eixo das ordenadas ocorre no ponto $(0,1200ln(80))$ e no eixo das abscissas em $(-79,0)$.

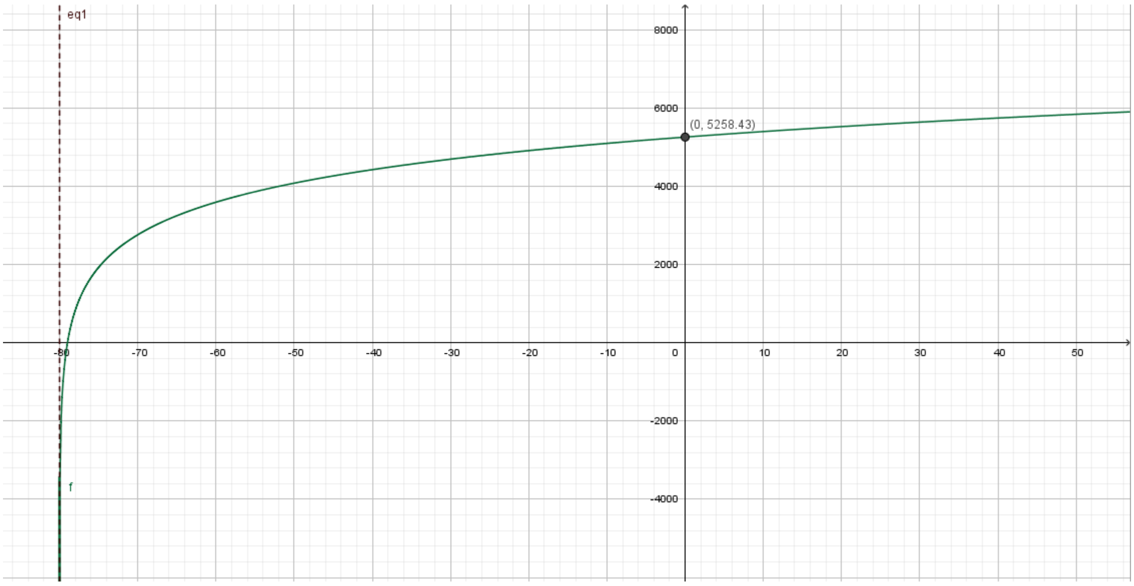
3ª etapa: a função dada não tem ponto crítico, eliminando as etapas 5 e 6.

4ª etapa: como $f' > 0$ em todo domínio, a função é estritamente crescente.

7ª etapa: esta função possui uma assíntota vertical, $x = -80$, pois $\lim_{x\to-80^+} f(x) = -\infty$.

8ª etapa: Figura 4.9.

Figura 4.9 – Gráfico de $f(x) = 1200ln(x+80)$.



Fonte: Do autor (2021).

(6) Seguindo as etapas descritas no Quadro 4.1 para esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$, temos:

1ª etapa: domínio $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

2ª etapa: o intersecto dos eixos ocorrem nos pontos $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(1,0)$.

3ª etapa: os pontos críticos são dados por $3x^2 - 1 = 0$, ou seja em $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

4ª etapa: função crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right[$ e decrescente no intervalo $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$.

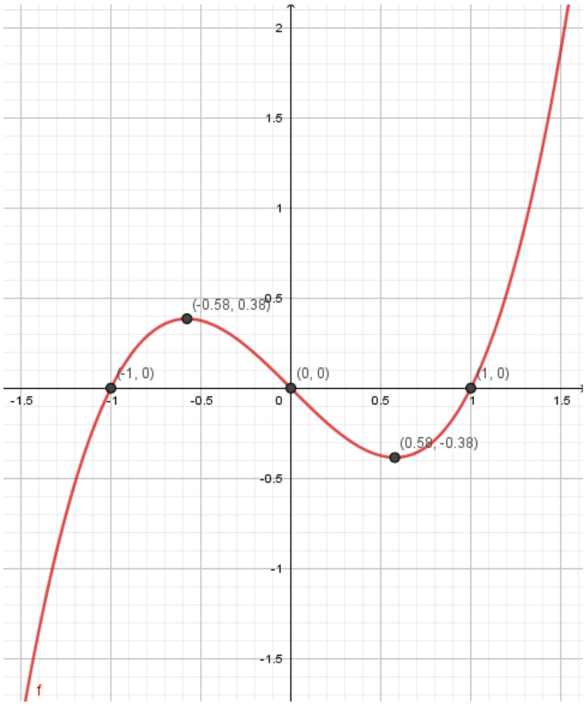
5ª etapa: como $f''(x) = 6x$, temos que o ponto crítico $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ é um máximo relativo e o ponto $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$é ponto de mínimo.

6ª etapa: concavidade é voltada para baixo para $x < 0$ onde $f''(x) < 0$ e voltada para cima para $x > 0$, poia $f''(x) > 0$. Em $x = 0$, a segunda derivada é zero, portanto caracteriza em um ponto de inflexão.

7ª etapa: esta função não possui assíntotas.

8ª etapa: Figura 4.10.

Figura 4.10 – Gráfico de $f(x) = x^3 - x$.



Fonte: Do autor (2021).

5 CONCLUSÃO

Este trabalho nos mostra algumas possibilidades viáveis de introdução de alguns conceitos do Cálculo Diferencial no Ensino Médio, de forma simples e mutas vezes intuitivas, não envolvendo conhecimentos avançados. Tornando assim, um facilitador para resoluções de questões problemas presentes nos estudos de funções.

E mais importante do que o aluno da educação básica saber resolver uma derivada de uma função, é ele compreender o que é a derivada e por quais motivos está efetuando tais cálculos.

Vale ressaltar que a ideia do trabalho não é propor um curso de Cálculo para educação básica, mas sim agregar material de forma a viabilizar a familiarização, por alunos do Ensino Médio, do Cálculo Diferencial durante os estudos de funções, não ocorrendo substituição de um estudo em detrimento de outro. Espera-se ainda que esse trabalho possa ser um aliado do professor de matemática, contribuindo para uma possível melhora no ensino e aprendizagem da educação básica e até da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 3**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 2**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1995.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1995.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PEREIRA, A. R. - GeoGebra. <https://www.geogebra.org/classic/vraupjcd>. Acesso em: 06/04/2022.