UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Luiz Antônio de Lima

Matemática financeira: finanças do cotidiano e financiamento imobiliário

Juiz de Fora
2022

Luiz Antônio de Lima

Matemática financeira: finanças do cotidiano e financiamento imobiliário

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Júnior

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lima, Luiz Antônio de
Matemática financeira : finanças do cotidiano e financiamento imobiliário / Luiz Antônio de Lima. – 2022.
127 f. : il.

Orientador: Nelson Dantas Louza Júnior
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2022.

1. Matemática Financeira. 2. Finanças do Cotidiano. 3. Financiamento Imobiliário. I. Louza Júnior, Nelson Dantas, orient. II.Título

Luiz Antônio de Lima

Matemática financeira: finanças do cotidiano e financiamento imobiliário

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 22 de fevereiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Willian Versolati França

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Sandra Imaculada Moreira Neto

Universidade Estadual do Maranhão

Juiz de Fora, 28/01/2022.

22/02/2022, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Willian Versolati Franca**, **Professor(a)**, em 22/02/2022, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0660798** e o código CRC **D426AB07**.

Dedico:

À Isabelle Dias de Lima, minha filha amada, inspiração da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua infinita proteção na minha caminhada.

Agradeço, imensamente, a toda minha família que confia e incentiva minha vida acadêmica.

Eternamente grato a Lílian C. Dias e Isabelle D. de Lima que sempre foram compreensivas nas minhas ausências, ainda que eu não pudesse atender os vários “vamos brincar” da Bebelle.

Agradeço a meu Orientador, Nelson Dantas Louza Júnior, pelas excelentes orientações, paciência e incentivo.

Gratidão aos professores do PROFMAT pela confiança e disposição de ensinar em alto nível, sempre, e à secretaria do Curso, pela atenção e cuidados.

O meu muito obrigado aos meus colegas de mestrado, exemplos de superação, persistência e alegria: Bianca, Caroline, Isabella, Felipe, Luciano Clarimundo, Miler, Rosilene, Thales, Roberth e Viviane.

Agradeço ao meu amigo Marco Aurélio Guilherme, pelo incentivo e apoio. Ao Flávio M. Galvão e Murilo Otávio da Silva Machado, pelos estímulos.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.” (Paulo Freire)

RESUMO

O presente trabalho inicia discorrendo sobre as diretrizes da educação referentes ao ensino de matemática financeira, nos diversos níveis escolares, de acordo com os parâmetros legais estatuídos, nacionalmente e regionalmente. Em prosseguimento, aborda os temas relacionados ao conhecimento de matemática financeira, contextualizando-a como instrumento de conhecimento afeto à cidadania e educação. Explana-se sobre educação financeira como estratégia nacional, apresentando temas, de forma crítica, sobre investimentos e poupança; educação e trabalho; inflação e financiamento imobiliário. Dando continuidade, são apresentados conceitos fundamentais de matemática financeira, tratando sobre capital, taxas de juros e regimes de capitalização. Para então, progredir para assuntos intimamente relacionados, porém mais complexos, tais como: taxas e suas particularidades; descontos e suas formas; os tipos de rendas e séries de pagamentos, quanto ao prazo da primeira prestação. O financiamento imobiliário é discutido, em destaque, abordando a legislação que rege o assunto. São apresentados os sistemas de amortização utilizados para quitação de financiamentos imobiliários no Brasil. A partir de definições básicas e dos conceitos expostos, são apresentados os seguinte sistemas: Sistema de Amortização Constante (SAC); Sistema Francês de Amortização (SFA) e Sistema de Amortização Crescente (SACRE). E, por fim, é feita uma proposta pedagógica com a finalidade de aplicação e consolidação de conceitos e fórmulas, através de apresentação de exercícios e sugestão de atividades relacionadas ao financiamento imobiliário.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Finanças do Cotidiano. Financiamento Imobiliário.

ABSTRACT

The present work begins by discussing the guidelines of education regarding teaching of financial mathematics, at different school levels, according to legal parameters established, nationally and regionally. Next, it addresses issues related to the knowledge of financial mathematics, contextualizing it as an instrument of knowledge affection to citizenship and education. It explains about financial education as a national strategy, critically presenting topics on investments and savings; education and work; inflate tion and real estate financing. Continuing, fundamental concepts are presented of financial mathematics, dealing with capital, interest rates and capitalization regimes. For then progress to closely related but more complex subjects such as: fees and their particularities; discounts and their forms; the types of annuities and series of payments, regarding the term of the first installment. Real estate financing is discussed, highlighted, addressing the legislation governing the matter. The amortization systems used are presented. for the settlement of real estate financing in Brazil. From the basic definitions and the exposed concepts, the following systems are presented: Constant Amortization System (SAC); French Amortization System (SFA) and Increasing Amortization System (SACRE). And, finally, a pedagogical proposal is made with the purpose of applying and consolidating concepts and formulas, through the presentation of exercises and suggestion of related activities to real estate financing.

Keywords: Financial Mathematics. Daily Finance. Real estate financing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
SAC	Sistema de Amortização Constante
SFA	Sistema Francês de Amortização
SACRE	Sistema de Amortização Crescente
SFI	Sistema de Financiamento Imobiliário
SFH	Sistema Financeiro de Habitação
CVM	Comissão de Valores Mobiliários
LDB	Lei de diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
CBC	Conteúdos Básicos Comuns
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
art.	Artigo
Vunesp-SP	Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora - Minas Gerais
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\cup$	União
$\Rightarrow$	Implica em
$\Leftrightarrow$	Se e somente se
$\cong$	Aproximadamente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, a matemática financeira é associada ao desenvolvimento dos povos, haja vista estar intrinsecamente ligada ao desenvolvimento do comércio, que foi o impulso para o intercâmbio e globalização de nações.

Na lição de Eves (2004), verifica-se a explicação de que o embasamento prático da matemática surgiu com o progresso da sociedade. Grandes obras de engenharia, relacionadas à construção de ligações entre localidades, agricultura e irrigação, demandavam desenvolvimento das técnicas de engenharia, financiamento e administração, e estas estavam atreladas ao desenvolvimento da matemática.

> Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. (...) a criação de métodos de agrimensura para construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis. (EVES, 2004, p. 57)

Importante destacar também a obra *Aritmética de Treviso*, escrita por Piero Borghi e voltada à aritmética comercial. Noticia-se a sua publicação em 1484, em Veneza, tendo sido uma obra mais influente na Itália.

Ao longo da história, com o progresso e evolução da civilização e das relações sociais e econômicas, houve um desenvolvimento nos conhecimentos abarcados pela matemática financeira.

Percebe-se que, atualmente, é bastante comum nos depararmos cotidianamente com situações de ordem financeira que demandam a utilização de conhecimentos específicos de matemática. Sendo assim, podemos constatar a importância de disponibilizar estes conhecimentos para os educandos. Entendemos que o domínio de conteúdos de Matemática Financeira proporciona maior tranquilidade e bem-estar às pessoas por permitir agirem de acordo com suas próprias convicções, refletindo sobre suas finanças e de seu grupo familiar. Diante disto, o presente trabalho foi desenvolvido visando contribuir na disponibilização, análise e desenvolvimento destes conhecimentos.

A contextualização deste estudo está detalhada no primeiro capítulo, onde são apresentadas as diretrizes do ensino de Matemática Financeira: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destacam a importância de relacionar o senso de realidade combinado com o conhecimento; a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Conteúdos Básicos Comuns (CBC), são normas de observância obrigatória, que apontam os conhecimentos indispensáveis a serem observados na elaboração do currículo de referência do ensino. Em seguida, dentro do mesmo capítulo, trataremos de cidadania que abrange a educação, com destaque ao ensino de Matemática Financeira, em estreita relação com o trabalho e dando condições de vida digna. O ensino da Matemática Financeira prepara para cidadania. Destaca-se ainda, a especial atenção que a educação financeira tem tido do Estado Brasileiro e de outros países. Em vista disto, abordamos os normativos que visam a promoção da cidadania através da educação financeira e explanamos sobre investimentos, poupança, entre outras formas de administrar a própria vida financeira. Educação para o trabalho foi relacionada à aquisição de conhecimentos para empreender e galgar postos de trabalhos melhor remunerados proporcionando melhor qualidade de vida. A abordagem sobre o assunto inflação tem como finalidade mostrar como este aspecto afeta negativamente a vida do cidadão.

Conceitos fundamentais da Matemática Financeira estão na sequência do trabalho, no capítulo 3. Importante destacar que são conceitos essenciais, sem os quais nenhum conhecimento de Matemática Financeira se desenvolve. Capital e juros são definidos. Regimes de capitalização são abordados para mostrar a forma de incorporação e cálculo dos juros que será de grande utilidade no cálculo de financiamentos. Juros simples e compostos são conceituados e comparados por de exemplos. As taxas de juros são especificadas e detalhadas com apresentação de suas principais características, sendo elas: proporcionais, equivalentes, nominais e efetivas. Os descontos são apresentados e diferenciados, entre simples e composto, com exemplos. O valor atual de capital, rendas ou prestações é de suma importância no entendimento da “viagem”do capital no tempo, apresentação de séries uniformes, atualização de capitais. A forma de calcular os efeitos da inflação, com análise do contexto, fecha este capítulo 3.

O capítulo 4, financiamento imobiliário, propriamente dito,apresenta os aspectos legais dos sistemas de financiamento e definições que permeiam os cálculos imobiliários. São mencionados outros sistemas constantes da literatura que trata do assunto, mas com o objetivo de ilustrar suas existências. São apresentados os sistemas de amortização maciçamente utilizados pelos agentes de financiamento imobiliário: amortização constante, Francês ou *Price* de amortização e o de amortização crescente. Ao longo deste capítulo, é feita a comparação entre os sistemas de amortização apresentados.

Por fim, no último capítulo, é apresentada a proposta pedagógica com sugestão de planejamento de aula, exercícios resolvidos e explicados, bem como a apresentação de atividade dirigida a respeito do tema financiamento imobiliário.

2 O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo, serão feitas explanações sobre as diretrizes oficiais referentes ao ensino de Matemática Financeira e sobre os principais conceitos daquilo que se pretende apresentar em um próximo capítulo: a conceituação matemática com estruturação através de exemplos e exercícios. Neste tópico, serão apresentadas também indicações de autores e sítios eletrônicos, que poderão servir de fonte para quem desejar aprofundar em determinados assuntos, sem perder de vista, no entanto, o ponto fulcral de produzir conhecimento para o ensino de Matemática Financeira para alunos do Ensino Médio.

2.1 DIRETRIZES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

As normas que regulam a educação tratam do ensino como forma de desenvolvimento humano. Para tanto, indicam itinerários a serem percorridos e objetivos a serem perseguidos, sendo apresentados como leis, parâmetros e resoluções. Serão apresentados nesta seção, apontando o que interessa a esta pesquisa no que se refere ao ensino de matemática financeira no Ensino Médio.

2.1.1 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional-LDB e Diretrizes Curriculares Nacionais

Nos termos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, o ensino de Matemática Financeira acontece em todas as etapas da educação básica. No artigo 27, citam-se as diretrizes da educação básica, em que é destacada a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática. Destacando abaixo o citado artigo da LDB:

> Os conteúdos curriculares da educação básica observarão, ainda, as seguintes diretrizes:
>
> I - a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática;
>
> II - consideração das condições de escolaridade dos alunos em cada estabelecimento;
>
> III - orientação para o trabalho;
>
> IV - promoção do desporto educacional e apoio às práticas desportivas não-formais. (BRASIL, 1996, art. 27)

Os incisos do artigo, acima transcrito, englobam situações que cercam a vida das pessoas, em especial educandos. Nesse contexto, a orientação para o trabalho é uma necessidade com a finalidade de propiciar uma vida digna para os cidadãos.

A formulação de Diretrizes Curriculares Nacionais constitui, portanto, atribuição federal, que é exercida pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), nos termos da LDB e da Lei nº 9.131/95. As Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais se materializam através de Resoluções da Câmara de Educação Básica (CEB) integrante do Conselho Nacional de Educação, vinculado ao Ministério da Educação. As Diretrizes visam sistematizar o que está previsto na Constituição Federal do Brasil e na LDB sobre educação básica, estimular um ambiente escolar de reflexão crítica e propositiva e orientar os cursos de formação de docentes. A Resolução CNE/CEB Nº 4, de 13 de julho de 2010, em seu artigo primeiro, define a Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica, com seus propósitos:

> A presente Resolução define as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para o conjunto orgânico, sequencial e articulado das etapas e modalidades da Educação Básica, baseando-se no direito de toda pessoa ao seu pleno desenvolvimento, à preparação para o exercício da cidadania e à qualificação para o trabalho, na vivência e convivência em ambiente educativo, e tendo como fundamento a responsabilidade que o Estado brasileiro, a família e a sociedade têm de garantir a democratização do acesso, a inclusão, a permanência e a conclusão com sucesso das crianças, dos jovens e adultos na instituição educacional, a aprendizagem para continuidade dos estudos e a extensão da obrigatoriedade e da gratuidade da Educação Básica. (BRASIL, 2010, art. 1º)

A interpretação sistemática do que se afirma nas normas sobre educação não deixa dúvidas da ênfase dada à preparação para cidadania e qualificação para o trabalho. É nesse ponto que a matemática, particularmente a financeira, se insere na preparação de jovens, capacitando-os a se desenvolverem e progredirem em suas respectivas realidades.

2.1.2 Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs são importantes documentos para a Educação do país. Desde sua elaboração, 1995/1996, têm por finalidade orientar o processo de ensino nas escolas. Os PCNs surgiram *pari passu* com a LDB carregando o objetivo de apoiar e facilitar a vida de professores e alunos. O ambiente educacional, até o surgimento da LDB, estava direcionado para uma perspectiva técnica voltada para o mercado de trabalho, conforme a Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, que previa o ensino de 2º grau voltado tão somente para habilitação profissional.

Os PCNs (1998) objetivam apoiar o exercício da cidadania atuando de forma positiva no meio da sociedade, incentivando o trabalho por projetos, bem como o trabalho interdisciplinar. Destacam que a informação deve visar a formação integral do aluno, propiciando sua autonomia, como se verifica no excerto transcrito:

> Propõe-se, no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização. (BRASIL, 1998, p. 05)

Com base neste referencial, extrai-se que a preparação do jovem no Ensino Médio está voltada para o desenvolvimento do espírito crítico e da capacidade de iniciativa diante da diversidade de possibilidades existentes no mundo circundante, buscando formar cidadãos capazes de observar a realidade e analisá-la criticamente.

Com clareza e concisão Rocha Júnior (2013) expõe a mesma ideia ao tratar da LDB e PCNs:

> A Matemática está envolvida na busca de tais finalidades de diversas maneiras. Ela é necessária na construção dos saberes que prepararão para o trabalho, o exercício da cidadania, a capacidade de adaptação a novas condições. Também é crucial para o aprimoramento do qual trata a lei e em tais questões de autonomia e criticidade. Especificamente, a Matemática Financeira é indispensável para que o indivíduo exerça sua cidadania no que diz respeito, até mesmo, a se proteger de eventuais ”armadilhas”do mercado, comuns exatamente devido ao fato de grande parte dos consumidores não terem conhecimentos mínimos a respeito, fato que se relaciona diretamente com a questão do desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. Ou seja, a realização de um trabalho sólido em Matemática Financeira no ensino médio não é só uma questão de necessidades e princípios, mas uma indicação legal que deve ser cumprida. (ROCHA JÚNIOR, 2013, p. 30)

Evidencia-se a finalidade de poder diferenciar os componentes ou situações, reflexivamente, orientando-se corretamente e de acordo com as circunstâncias, resultando na sensação de conquista e realização ao aprendiz.

Compulsando os PCNs (1998), específico do Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, no texto introdutório de conhecimentos de Matemática, apresenta-se claramente o papel atribuído à Matemática, sendo aquilo que a sociedade espera como resultado da escolarização de alunos do Ensino Médio:

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção

> de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (BRASIL, 1998, p. 40)

Deve-se dar sentido ao que se ensina na escola, buscando uma aproximação com a realidade e com as expectativas dos educandos como indivíduos.

Dessa forma, constatamos que a Matemática abarca uma gama de conhecimentos que servirão de alicerce para formação de pessoas e, especialmente no Ensino Médio, presta-se a conjugar, concomitantemente, a consolidação dos ensinamentos do Ensino Fundamental com o embasamento para o Ensino Superior.

Nesse quadrante, as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
>
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
>
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
>
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
>
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
>
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
>
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
>
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
>
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvol-

> vimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 1998, p. 42)

Não há como hierarquizar as finalidades, devem estar agregadas em um desígnio só, formando um conjunto, de forma a acentuar nos alunos o senso de realidade e preocupação com o conhecimento, em consonância com a cultura, suas estruturas lógicas e sua participação no processo de aquisição dos conhecimentos de matemática.

Por fim, não há dúvidas de que, seguindo as orientações dos PCNs, o ensino da Matemática Financeira está em completo alinhamento com os objetivos e finalidades do Ensino Médio, cumprindo-se, assim, a função social da educação.

2.1.3 Base Nacional Comum Curricular - BNCC e Conteúdos Básicos Comuns - CBC

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2018) é uma norma obrigatória para os entes da Federação: União, Estados, Municípios e Distrito Federal, como se verifica em sua introdução:

> É um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018a, p. 09)

A iniciativa tem por objetivo evitar que haja diferenças de organização do ensino entre as Regiões do Brasil. A diversidade cultural não poderia sobrepor ao mínimo necessário para a aprendizagem. A BNCC busca elevar o nível de aprendizagem nos termos do Plano Nacional de Educação.

A BNCC traz em seu bojo os conhecimentos mínimos indispensáveis que permitem a fixação da aprendizagem. Para tanto, define as competências gerais que o educando deverá possuir para estar apto a mobilizar os conhecimentos adquiridos, resolver demandas complexas da vida cotidiana, exercer plenamente a cidadania e saber se conduzir no universo do trabalho.

No Ensino Médio, a área de Matemática deverá garantir aos educandos o desenvolvimento de competências específicas relacionadas a habilidades a serem atingidas. “As aprendizagens previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente”(BRASIL, 2018, p. 530), considerando o nível de aprofundamento e ampliação do que se aprendeu no Ensino Fundamental, tudo isso cotejado com a realidade. Sobre essas competências tem-se:

> Cabe observar que essas competências consideram que, além da cognição, os estudantes devem desenvolver atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas, mantendo predisposição para realizar ações em grupo. (BRASIL, 2018a, p. 532)

De fato, a sociedade traz a dupla exigência de ações acertadas e que propiciem a integração social, atitudes que permeiam os conhecimentos de Matemática Comercial, pois esta permite a aquisição de uma bagagem de conhecimentos que atenda aos anseios e aspirações do estudante, refletindo na sua interação com o grupo.

A Matemática Financeira enquadra-se no campo das seguintes competências específicas, assim definidas:

> 1- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018a, p. 532)
>
> 2- Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.(BRASIL, 2018a, p. 534)

Tais competências se relacionam, respectivamente, com as habilidades assim definidas:

> 1- Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.(BRASIL, 2018a, p. 533)
>
> 2- Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.(BRASIL, 2018a, p. 534)

Como visto, a BNCC é uma norma que abarca a educação nacional, a amplitude é o Brasil como um todo, norteando currículos para proporcionar o direito à educação a todo cidadão sem diferenças de conteúdos básicos.

Os Conteúdos Básicos Comuns - CBC são documentos que têm por finalidade adequar a Educação às características regionais, abrangendo as especificidades de cada região, complementando a previsão da BNCC e, ainda, enriquecendo a parte comum. O CBC tem caráter indissociável da BNCC.

A Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais elabora o CBC no intuito de complementar a norma nacional. Pode ser claramente observada no documento mineiro, a referência aos PCNs e às Diretrizes Nacionais Educacionais, o que denota o caráter complementar do documento, haja vista que pode ser considerado como enriquecimento daquilo que está posto na BNCC. Observa-se, na apresentação do citado documento, a seguinte colocação:

> A definição dos conteúdos básicos comuns (CBC) para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio constitui um passo importante no sentido de **tornar a rede estadual de ensino de Minas num sistema de alto desempenho**.(MINAS GERAIS, 2006, p. 09, destaque do autor)

Um registro especial dever ser feito em relação ao que foi destacado na citação acima: “tornar a rede estadual de ensino de Minas num sistema de alto desempenho”. É uma tarefa auspiciosa e desafiadora, tendo em vista o lugar-comum que se encontra a educação, comparada ao desenvolvimento veloz da sociedade. Justamente por isto, mobiliza a vontade, pois se assim não for colocada, não se avança.

Portanto, na linha da BNCC, o CBC cumpre esse papel. Em que pese, o Estado de Minas Gerais, através da Secretaria de Estado de Educação, tenha elaborado o **Currículo Referência do Ensino Médio** que visa se adequar ao previsto na BNCC, não invalida o CBC vigente. Sobre o Currículo de Referência assim consta:

> Em um momento histórico de definição de uma Base Nacional Comum Curricular e elaboração de um Currículo Referência que atenda a todo o estado, o Regime de Colaboração passa a ser central no cenário educacional e um desafio para o estado de Minas Gerais, em razão da sua extensão e número de municípios e escolas. Mas em um esforço conjunto para reunir a imensa “Minas Gerais” e construir um documento coletivo, a seccional da União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação – UNDIME/MG, as escolas privadas de educação e a Secretaria de Estado de Educação – SEE/MG passam a colaborar lado a lado para redação deste documento, entendendo, fundamentalmente, que os estudantes transitam entre as redes ao longo da vida, ora em escolas municipais, ora em escolas estaduais, ora em escolas privadas, bem como, transitam entre os territórios, daí a importância de uma parte comum nos currículos. Se o documento curricular pretende garantir de fato os direitos de aprendizagem, torna-se impossível fragmentar a vida escolar de nossos estudantes, e, buscamos, em colaboração, garantir trajetórias de sucesso acadêmico, somadas ao desenvolvimento integral das crianças, adolescentes, jovens e adultos que estão e estarão na educação

> pública, buscando, através de instâncias decisórias estabelecidas, o diálogo permanente entre União, Estado e Municípios. (MINAS GERAIS, 2018, p. 3-4)

Currículo de Referência é um documento de muita importância, que vale a pena ser mencionado no presente trabalho, por ser uma fonte para o ensino de Matemática Financeira, e uma proposta que se formou a partir da interação da sociedade. o currículo de referência é indicado para professores no intuito de se inteirarem sobre os conteúdos de finanças.

Utilizando-se do CBC, constata-se claramente, de modo análogo aos documentos supramencionados, a importância da Matemática Financeira no que se refere à capacitação dos alunos em analisar e interpretar situações afetas ao seu cotidiano. Entendimento encontrado no apontamento do dinamismo científico da Matemática, beneficiando ao aluno, dada a importância de sua atuação e compreensão conscientes, na sociedade:

> - Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.
>
> - Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas (MINAS GERAIS, 2006, p. 14)

O conteúdo do CBC tem por finalidade induzir o aluno do Ensino Médio a tomar uma postura ativa de modo que harmonize o aprendizado, combinando os ensinamentos recebidos e expressando-se de forma adequada.

Dos três eixos temáticos[1] referenciados pelo CBC para o Ensino Médio, um deles trata de Números, Contagem e Análise de dados, Funções Elementares e Modelagem, Geometria e Medidas. Nesse ponto, é válido colacionar o que Rosseau e Saint-Aubin (2015) dizem sobre modelagem:

> [...] poupanças e empréstimos monetários estão sujeitos a várias regras amenas à **modelagem matemática**. Na verdade, este

[1] De acordo com os PCN+, um tema estruturador é “Um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos m atemáticos”. Com o objetivo de uniformizar a nomenclatura com as demais disciplinas, nesse trabalho, a terminologia eixo temático é usada como mesmo sentido de tema estruturador, preservando o significado original desta última. (MINAS GERAIS, 2006, p.34)

> é um dos mais antigos usos da matemática. (ROSSEAU; Saint-Aubin, 2015, p. 166, destaque nosso)

Em suma, o objetivo é desmistificar os conteúdos ligados às finanças. Através de manipulação (modelagem) de fórmulas e raciocínio lógico consegue-se elucidar a sistemática dos cálculos financeiros, dando segurança aos alunos para lidarem com matemática financeira.

Nesse sentido, Funções Elementares e Modelagem abarcam a Matemática Financeira. Especificamente, Modelagem é uma estratégia de ensino que trata assuntos práticos ligados ao dia a dia dos estudantes para se aplicar aquilo que se aprendeu abstratamente em etapas anteriores do ensino. A interligação entre os assuntos a serem tratados e a vida prática dos educandos deve ter uma abordagem diferenciada. Matemática Financeira tem temas bastante semelhantes ao dia a dia dos alunos do Ensino Médio, sendo promissores os resultados do processo de ensino-aprendizagem. Importante destacar que a Modelagem aborda os temas de maneira eminentemente prática, atraindo a atenção dos educandos, sem perder de vista os ensinamentos pré-adquiridos de Funções Elementares. Sobre isso, cite-se a importante colocação do CBC:

> O desdobramento aqui proposto justifica-se pelo fato de que as funções elementares associadas à modelagem possuem um papel importante na conexão com as outras disciplinas da área de Ciências da Natureza e mesmo com outras áreas, adquirindo um caráter estruturador e integrador. (MINAS GERAIS, 2006, p. 37)

O estudo da Matemática Financeira está inter-relacionado com conteúdos existentes, mas sem comprometer sua autonomia, pois mesmo isolada, faz parte de um contexto consistente frente à estrutura prevista no CBC.

De modo equivalente, no CBC, os eixos temáticos para o 1º ano são subdivididos em temas e estes em tópicos. Verifica-se que, o eixo temático II, Tema 6, Matemática Financeira, possui o tópico 13: “1. Resolver problemas que envolvam o conceito de porcentagem. 2. Resolver problemas que envolvam o conceito de juros simples ou compostos. 3. Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de prestações em financiamentos com um número pequeno de parcelas” (MINAS GERAIS, 2006, p. 47), conformando aos objetivos do ensino de Matemática Comercial. Referente ao 3º ano, assim está :

> Comparar questões que envolvam juros simples ou compostos e problemas simples de: relacionar o cálculo de prestações em financiamentos com a função exponencial e a progressão geométrica; fazer estimativas e cálculos dos juros cobrados em financiamentos; comparar formas de pagamento na compra de

> um bem e emitir juízo sobre a forma mais vantajosa de pagamento, ligado, claramente, às finanças. (MINAS GERAIS, 2006, p. 47)

O ensino de finanças não é apenas um amontoado de cálculos, é a experimentação da realidade, de planos de vida, de prevenção e de realização individual e coletiva. Desse modo, é prioritário ser trabalhado a partir dos anos iniciais da vida escolar, afinal, escola é o ambiente onde ocorrem os primeiros passos para a construção de projetos de vida.

Não resta dúvida quanto à pertinência do ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio, em face da relevância do tema, bem como da aplicabilidade do aprendizado pelos alunos, tendo em vista o leque de situações cotidianas que demandam tais conhecimentos.

2.2 CIDADANIA E EDUCAÇÃO

A abordagem do presente trabalho passa pelo estudo da Matemática Financeira, no 3º ano do Ensino Médio, com a finalidade de propiciar aos estudantes conhecimentos com os quais poderão responder satisfatoriamente às demandas do dia a dia, fortalecendo a cidadania e a dignidade.

"Cidadania que representa um *status* e apresenta-se simultaneamente como objeto e um direito fundamental das pessoas"(MORAES, 2012, p. 19). Sobretudo proporcionando dignidade à pessoa, que nos dizeres de Moraes (2012), *in verbis*:

> A dignidade é um valor espiritual e moral inerente à pessoa, que se manifesta singularmente na autodeterminação consciente e responsável da própria vida e que traz consigo a pretensão ao respeito por parte das demais pessoas. (MORAES, 2012, p. 19)

Significante lembrança que se coaduna com a proposta dos PCNs, no que se refere à formação de indivíduo autônomo e reflexivo em contraposição àquele indiferente e apático.

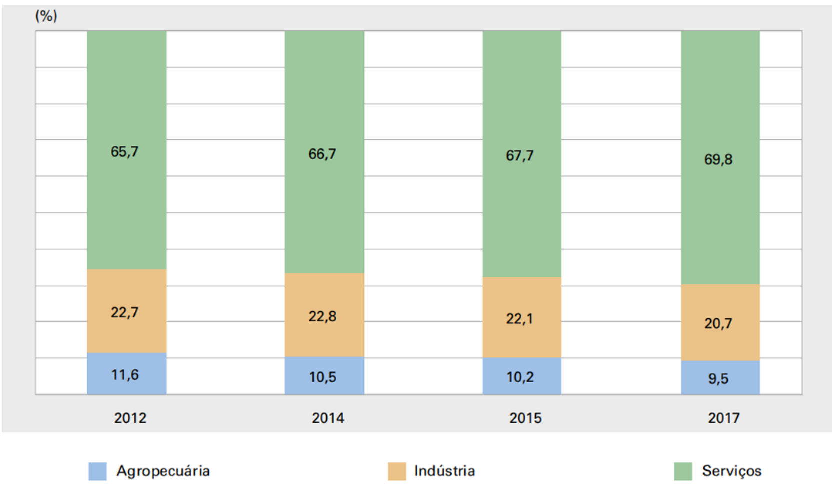
Os ensinamentos teóricos da Matemática Financeira têm por finalidade desenvolver aplicações práticas relevantes com enfoque nos conhecimentos básicos como: juros simples e compostos, descontos, inflação, estratégias comerciais, empréstimos e financiamentos. Quanto aos financiamentos, é importante mostrar as ferramentas disponíveis nas instituições bancárias, ou congêneres, gestoras de recursos para aquisição de imóveis (financiamento imobiliário).

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996:

> A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1996, art. 2°)

Com base neste referencial, entende-se que o dever da educação financeira é proporcionar conhecimentos ao educando, capacitando-o para o uso consciente de recursos financeiros e interagindo de tal forma que utilize o dinheiro em benefício próprio e da sociedade. É possível verificar que a Matemática Financeira também pode ser de fundamental importância na qualificação de estudantes para o trabalho, haja vista que o setor terciário da economia (serviços) oferece uma maior possibilidade para se conseguir uma ocupação, como está demonstrado na pesquisa realizada pelo IBGE, de 2012 a 2017:

Figura 1 – Proporção de pessoas de 14 anos ou mais de idade ocupadas na semana de referência por grupo de atividade econômica - Brasil -2012-2017



Fonte: IBGE, 2018.

Trabalho este que demanda, frequentemente, o uso de porcentagens, juros, cálculos de financiamentos e empréstimos. Não raro, serão os mais capacitados que farão jus a uma ocupação e a melhores remunerações, criando a possibilidade de uma vida digna para si e seus familiares próximos, em uma sequência virtuosa de benefícios, por conta de conhecimentos adquiridos no âmbito escolar.

Considerando que o trabalho é um elemento essencial na vida humana, que demanda esforço e produtividade, e através do qual obtemos recursos financeiros para atenderem às nossas necessidades, nada mais relevante que saibamos como melhor utilizar e administrar o dinheiro.

A educação cumpre, assim, os objetivos da educação no viés da formação para o trabalho e promoção humanística, científica e tecnologia, conforme preconiza o art.

214 da Constituição Federal Brasileira de 1988.

Após essas considerações, convém trazer à luz os ensinamentos de Libâneo (1994), sobre a importância dos objetivos educacionais, que modulam a prática de ensino por meio de ações propositais e ordenadas. Os objetivos educacionais, segundo Libâneo (1994), possuem no mínimo três referências:

> - os valores e ideais proclamados na legislação educacional e que expressam os propósitos das forças políticas dominantes no sistema social;
>
> - os conteúdos básicos das ciências, produzidas e elaboradas no decurso da prática social da humanidade;
>
> - as necessidades e expectativas de formação cultural exigidas pela população majoritária da sociedade, decorrentes das condições concretas de vida e de trabalho e das lutas pela democratização. (LIBâNEO, 1994, p. 120-121)

Importante destacar que vários aspectos de vida e trabalho, referenciados no contexto dos objetivos educacionais, têm elevado valor na finalidade do presente estudo, estando interligados ao papel fundamental da matemática financeira por sua correspondência com o dia a dia do aluno.

2.3 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Encontra-se em curso a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF[2]. A ENEF consiste na mobilização em torno de ações de educação financeira no Brasil. Trata-se de ações do Estado para garantir a isenção do que ali se oferece à população, sem se vincular a governos específicos.

Registre-se que a sua criação se deu por meio do Decreto Federal n. 7.397/2010, recentemente revogado pelo Decreto n. 10.393, de 9 de junho de 2020, sendo que a norma revogadora manteve em linhas gerais o que foi criado pelo decreto anterior, qual seja: mantendo os objetivos de contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes.

Assim está no Decreto n. 10.393, de 9 de junho de 2020:

> Nova Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF e o Fórum Brasileiro de Educação Financeira - FBEF.
>
> O PRESIDENTE DA REPÚBLICA, no uso da atribuição que lhe confere o art. 84, caput, inciso VI, alínea “a”, da Constituição,
>
> DECRETA:

2 https://www.vidaedinheiro.gov.br/

> Art. 1º Ficam instituídos:
>
> I - a nova Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF, com a finalidade de promover a educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal no País; e
>
> II - o Fórum Brasileiro de Educação Financeira - FBEF.
>
> Art. 2º O FBEF é colegiado de articulação, ao qual compete:
>
> I - implementar e estabelecer os princípios da ENEF;
>
> II - divulgar as ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal propostas por seus membros, por outros órgãos e entidades públicas ou por instituições privadas;
>
> III - compartilhar as informações sobre as ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal produzidas pelos órgãos e entidades representados, para identificar as oportunidades de articulação; e
>
> IV - promover a interlocução entre os órgãos ou as entidades públicas e as instituições privadas para estimular e, sempre que possível, integrar as ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal. (BRASIL, 2020, arts. 1º e 2º)

A finalidade precípua é a promoção da cidadania para tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores. Aqui, cabe ressaltar a importância da educação financeira, em face da mobilização em andamento. Percebe-se que extrapola o ambiente escolar surgindo iniciativas de instituições ligadas à economia, como é o caso da Comissão de Valores Mobiliários (CVM) que encampa, no seu sítio eletrônico[3], em destaque: Vida & Dinheiro[4], e que se trata de uma ação além das fronteiras brasileiras. Comentários sobre educação financeira pelo mundo, no sítio eletrônico de Vida & Dinheiro:

> Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), um número crescente de governos nacionais está engajado em desenvolver estratégias de educação financeira. As implicações sociais e econômicas a longo prazo do baixo índice de educação financeira de grande parte da população mundial têm levado os governos a criar políticas específicas especialmente a partir de 2008.
>
> A existência de uma estratégia nacional de educação financeira favorece a promoção do tema no país e cria diretrizes para balizar iniciativas concretas, sejam do Estado, da iniciativa privada ou sociedade civil. A estratégia torna-se a principal referência para leis, políticas públicas e programas multi-setoriais, contribuindo para gerar ampla mobilização. Em 2017, 60 países de diferentes níveis de renda possuem uma estratégia nacional de educação financeira ou avançaram em projetos relacionados ao tema. (CVM, 2017a?)

[3] http://www.cvm.gov.br/
[4] https://www.vidaedinheiro.gov.br/

Registre-se, por necessário, que Vida & Dinheiro oferece muitos aparatos para a educação financeira, destacando-se o direcionado às escolas.

Com o crescimento da oferta de atividades extracurriculares, nada impede que o ensino de finanças se estenda além sala de aula, com trabalhos realizados pelos alunos junto a seus familiares. Professores devem se esforçar para disponibilizar o conteúdo da Matemática Financeira, proporcionando a todos educandos, sem nenhuma distinção, a possibilidade de aprendizado.

É papel da escola disponibilizar aos jovens o conhecimento que os acompanhará pelo resto de suas vidas. O currículo escolar deve estar alinhado ao processo de ensino e aprendizagem com objetivo de capacitar os educandos em várias áreas de conhecimento. Por isso, deve-se ter a percepção de que noções básicas sobre a área de finanças são de grande valia, pois esta área perpassará continuamente o cotidiano de toda pessoa, possibilitando ações mais seguras e com autoconfiança nos diversos eventos financeiros que se apresentem ao longo da vida.

A independência financeira é o sonho de todo ser humano em idade adulta que dependa de um trabalho remunerado para sobreviver. Para alguns, significa receber renda sem trabalhar. Para outros, viver sem as aflições das dívidas e preocupações que estas trazem. Libertar-se do dinheiro seria o termo mais apropriado, bem como realizar bons negócios com segurança e ética, calcado em conhecimentos eficazes.

2.4 INVESTIMENTO E POUPANÇA

O sonho da casa própria soa como um axioma. Em face da situação econômica do Brasil, ao longo do tempo, a aquisição de imóveis depende de financiamento bancário, ou financiamento imobiliário, o que leva aquele indivíduo que nunca se preocupou com juros simples ou compostos, taxa anual ou mensal ou diferença entre prestação e amortização, a interpelar os agentes financeiros sobre esses temas. Fatos que corroboram com o pensamento de que é necessário para as pessoas o conhecimento de finanças.

Quando se fala em finanças, a palavra poupança vem imediatamente à cabeça das pessoas. Muitas vezes citada como o legado que pais querem deixar para seus filhos, no intuito de garantir um futuro seguro e tranquilo. Esta ideia, quando levada a cabo, demonstra a realidade dos juros. Ao se tomar ciência das operações dos diferentes investimentos, dentre eles a poupança, e o objetivo traçado, constata-se que a poupança é investimento de baixa rentabilidade, que reduz o valor acumulado a longo prazo, causando frustração. Nesse ponto, é de se notar que saber comparar os diversos investimentos existentes no mercado influenciará nos resultados do legado para a prole. Cerbasi (2004) esclarece sobre decisões de investimentos:

> Decisões inteligentes são tomadas quando o investidor sabe em que está aplicando, que riscos o investimento oferece, que situações geram ganhos e quais geram perdas e, principalmente, quais são alternativas mais rentáveis do mercado para o tipo de investimento escolhido. Os cadernos de finanças dos grandes jornais trazem comparações dos diversos investimentos oferecidos por diferentes bancos do mercado. (CERBASI, 2004, p. 121)

Esse entendimento nos conduz à compreensão de que o aprendizado de finanças é a forma necessária para estabelecer pressupostos críticos que orientem o cidadão na tomada de decisões perante situações comerciais. A Matemática Financeira não é estranha aos educandos, posto que possui correlação com sua realidade, tendo significado, ainda que presente a abstração dos cálculos matemáticos.

O brasileiro, em geral, economiza pouco e não constitui uma poupança ou reserva financeira consistente, Carrilho (2012) apresenta o seu claro entendimento sobre como o brasileiro encara as finanças pessoais:

> A média dos brasileiros economiza pouco, especialmente se compararmos com a taxa de poupança de outros países emergentes. A baixa renda nacional, a influência do sistema de segurança social e o gosto pelas compras são algumas das razões que levam a população não aproveitar o crescimento econômico para poupar um pouco. Em 2006, segundo dados do IBGE, as famílias poupavam 7,6% de seus rendimentos. Atualmente, a poupança aumentou um pouco, mas ainda é extremamente baixa. Os chineses são o povo que mais poupa, sendo que, em média, economizam 40% do salário. O próprio governo chinês chega a poupar 30% de sua receita. (CARRILHO, 2012, p. 61)

Isto indica a necessidade de ação efetiva nas escolas para que as gerações futuras tenham consciência da importância de vida confortável financeiramente, através da poupança. Carrilho (2012, p. 62) aponta os perfis financeiros, denominando: “falido aquele que não poupa nada e gasta mais do que ganha; pobre é quem gasta o que ganha e não poupa nada; classe média quem poupa de 5% a 10% do salário, classe alta aquele que poupa de 10% a 20% do salário e rico quem poupa acima de 20% da renda”. Estamos diante do contexto no qual vive a sociedade brasileira. É com essa realidade que nos deparamos nas escolas: alunos que têm exemplos de formas de consumo nada salutares, resultando em uma vida atribulada pelas deficiências econômicas.

2.5 EDUCAÇÃO E TRABALHO

A educação consistente e de qualidade é a centelha para vida próspera. Vida próspera traz implícito boa renda, seja por meio de salário ou via empreendedorismo.

Assim sendo, ao se tratar de finanças, o trabalho tem grande importância. A explanação de Barbosa e Cerbasi (2009), traduzem de forma simples a necessidade de boa formação de jovens no que se refere ao trabalho:

> Sem educação, o trabalhador limita-se a trabalhos braçais. Falta mão de obra para a indústria de tecnologia - que produz, por exemplo, simples equipamentos para recortar asfalto. Sem equipamentos adequados, os serviços devem ser feitos por um número maior de pessoas, as quais recebem pouco em razão de sua má qualificação.
>
> Se a sociedade construísse prosperidade mais intensamente, começando pelo investimento em educação, os trabalhadores iniciariam suas carreiras com mais conhecimento. Faltaria mão de obra para o trabalho braçal, pois os jovens trabalhadores procurariam vagas, por exemplo, na indústria de tecnologia. Para executar serviços pesados, como tapar buracos no asfalto, faltaria mão de obra a preço acessível, o que obrigaria as empresas a automatizar seus processos, dando vazão ao trabalho da indústria de tecnologia. (BARBOSA; CERBASI, 2009, p. 257)

Frenquentemente, os cidadãos se deparam com situações financeiras que demandam informações de Matemática Financeira, tais como: quitar um financiamento imobiliário ou aplicar o capital, resgatar recursos de aplicações ou utilizar o limite do cheque especial? São questões que se baseiam em cálculos matemáticos e, sobretudo, bom senso. Porém, quanto mais confortável o indivíduo estiver em relação aos cálculos matemáticos, mais apto estará para tomar a decisão sensata para ele.

É preciso que os cidadãos tenham a consciência de que a educação age no desenvolvimento de capacidades das pessoas, dando a elas a possibilidade de tomarem decisões inteligentes na sociedade em que vivem. Não é demais lembrar que nossa sociedade capitalista tem como lema: produzir mais, vender mais e consumir mais. Por conseguinte, o aluno tem de estar preparado para interagir nesse meio social a que pertence.

A educação requer uma redefinição dos objetivos da escola, que faça uma articulação entre a formação do educando e suas necessidades científicas ou técnicas, mediante programas que atendam às demandas sociais, combinadas com as expectativas dos alunos e necessidade de mão de obra pelas empresas. Deve haver projetos que articulem inovação, necessidades das empresas de produção e emprego. Constituindo-se na chave para o aperfeiçoamento da sintonia entre ensino e trabalho (empresa). Numa simbiose oblíqua entre empresas e trabalhadores capacitados e dinâmicos, com a possibilidade de desenvolvimento pessoal dos trabalhadores e tecnológico das empresas.

Nessa lacuna de afinidade entre escola/produção surge a educação através da Matemática Financeira que tem ligação intrínseca com determinados tipos de capacitação para o trabalho e prosperidade pessoal.

2.6 INFLAÇÃO

Inflação faz parte do cotidiano das famílias brasileiras, com implicações nos investimentos, finanças e trabalho. Contudo, poucos têm a noção do que ocorre de fato numa economia inflacionária, ficando à mercê de especulações de toda ordem. Inflação pode ser definida como sendo uma alta persistente e generalizada dos preços da economia. Destaque-se que a alta de preços deve ser generalizada, ou seja, todos os produtos da economia apresentam altas de preços. Caso apenas determinados produtos, bens ou serviços apresentem aumento não estaremos diante de um cenário inflacionário. Os inconvenientes são sentidos diretamente pelos cidadãos com a perda do poder aquisitivo dos salários e outras rendas. Pessoas possuidoras de grandes somas de capital buscam meios de proteger seu patrimônio das perdas inflacionárias, causando especulação com efeitos deletérios na economia de um país, refletindo, inexoravelmente, na sociedade, aí incluída a escola, por óbvio.

Observa-se que são raros os trabalhadores que, ao receberem reajuste salarial em determinado patamar de percentual, se preocupam em descontar a inflação do período. A transcrição abaixo remete a um período vivenciado por muitos brasileiros, nas palavras de Pinto (2020), que mostra a causa da confusão até mesmo em quem conhece a matemática dos preços:

> O governo Sarney (1985-1990) ficou marcado na história da República brasileira como o governo da "década perdida", em decorrência do inexpressivo crescimento econômico do período. Herdando as consequências do esgotamento das políticas econômicas da ditadura militar e das crises mundiais da década de 1970, o objetivo principal de seu governo foi conciliar a reformulação das instituições políticas em um sentido democrático representativo e de encontrar soluções para manter uma estabilidade econômica. A expressão deste último ponto pode ser encontrada nas consequências de seus planos econômicos. O principal desafio do primeiro governo da "Nova República" era conter a inflação dos preços, que em 1985 chegou a 235% ao ano. A solução encontrada pela equipe econômica formada por Sarney encontra-se no "Plano Cruzado", anunciado em fevereiro de 1986, cujas principais medidas eram: congelamento de preços; substituição da moeda corrente do país, do cruzeiro para o cruzado (daí o nome do plano); gatilho salarial, uma medida de aumento dos salários toda vez que a inflação atingisse 20% ao mês. Inicialmente, o Plano Cruzado teve sucesso, garantindo à população uma melhoria nas condições de vida, e por outro lado trazendo popularidade ao presidente, que além de transformar a população em "fiscais"

> de preços, conseguiu uma expressiva vitória eleitoral em 1986. A melhora das condições foi efêmera, pois já nos últimos meses de 1986 havia falta de mercadorias nas prateleiras, empresários conseguiam burlar as tabelas de preços e vender por preço maior (ágio), falta de carne em face da recusa dos pecuaristas em vender pelos preços tabelados. Frente a esta situação, Sarney foi obrigado a buscar apoio político entre os grupos conservadores do país para a aprovação de novos planos econômicos (Plano Cruzado II em 1986, Plano Bresser em 1987, Plano Verão em 1989), com o objetivo de controlar os gastos públicos, conter a forte inflação e renegociar a dívida externa. Uma nova moeda surgiu, o Cruzado Novo, mas as medidas não foram suficientes para a estabilidade econômica, já que não houve mudanças estruturais na economia, e em março de 1990 a inflação alcançou o recorde 84,23% ao mês e um índice acumulado nos doze meses anteriores de 4.853,90%. Este foi o legado deixado pelo governo Sarney na área econômica e pelo qual todos os candidatos à presidência em 1990 se dedicaram a combater. (PINTO, 2020, p. 1)

Os valores exorbitantes, acima indicados, servem para demonstrar que a inflação é um importante componente na tomada de decisão, quando o assunto for finanças. Na ocasião, o então Presidente da República José Sarney concedeu reajustes salariais aos servidores públicos com taxa nominal elevada, mas que, se descontada a inflação, não passaria talvez de correção salarial, sem ganho nenhum. A par disso, tempos depois, ouviam-se servidores saudosos daquele “aumento”, enaltecendo a benevolência do então Presidente da República. Fica evidente que a falta de conhecimento de Matemática Financeira tem reflexos até mesmo na política.

O Plano Real[5] realizou drásticas mudanças na economia, tornando mais palpáveis a noção do valor do dinheiro, permitindo a estabilização da moeda. Com isso, aumentou o poder de compra, investimento e poupança dos brasileiros.

A título de ilustração e pertinente ao assunto, o Plano Real teve reflexos até mesmo nas edições de livros didáticos do ensino de Matemática, especificamente a Financeira. Anteriormente, havia frequentes mudanças de nome da moeda ou a divisão por mil, conhecida como “corte dos zeros”. Com isso, os livros que tratavam de moeda em seus textos ficavam obsoletos da noite para o dia, haja vista que para determinados alunos aquela situação fugia, e muito, da sua realidade. A moeda referenciada nos exercícios dos livros em nada correspondia àquela que o aluno estava habituado no seu cotidiano.

---

[5] Plano Real foi um programa brasileiro com o objetivo de estabilização e reformas econômicas, iniciado em 27 de fevereiro de 1994 com a publicação da medida provisória número 434, implantado no governo Itamar Franco. Tal medida provisória instituiu a Unidade Real de Valor (URV), estabeleceu regras de conversão e uso de valores monetários, iniciou a desindexação da economia, e determinou o lançamento de uma nova moeda, o real.(https://pt.wikipedia.org/wiki/Plano Real)

Isto posto, é premente entender mecanismos de desconto inflacionário através da Matemática.

2.7 FINANCIAMENTO IMOBILIÁRIO

Não obstante haver menção sobre o “sonho da casa própria”no presente trabalho, tratando, especificamente, do financiamento imobiliário, mostra-se inevitável agir com cautela quando se trata de assumir dívida de longo prazo como ocorre no caso de compra de imóveis. Em que pese se tratar de uma decisão, eminentemente, pessoal, os conhecimentos de Matemática ajudam sobremaneira a ponderar a viabilidade do negócio (financiamento). Daí, a partir da observação de como são disponibilizadas as informações a respeito de parcelamentos na aquisição de imóveis, faz-se necessário e oportuno entender como são feitos os cálculos dos valores a serem pagos, taxas de juros e demais taxas.

Além da situação de aquisição de imóveis há, ainda, a ocorrência da quitação de financiamento adquirido. Situações econômicas de nuances diferentes e que requerem raciocínio embasado em estruturas matemáticas desconhecidas pela maioria das pessoas.

Decisões do tipo: se é melhor pagar aluguel ou adquirir um imóvel são frequentes e possuem mecanismos matemáticos que possibilitam tomadas de decisão compensadoras. Carrilho (2012) apresenta interessante modo de fazer essa opção sem maiores complicações:

> Há ainda alguns cuidados ao investir num imóvel. Vale a pena ponderar o aluguel em vez da compra. Tradicionalmente, nos povos latinos, habitação tem grande peso nas despesas mensais, ao mesmo tempo em que os ativos são muito expostos à variação do mercado imobiliário. Uma regra que ajuda a escolher entre a compra e o aluguel é a regra dos 300, primeiramente apresentada por Arnold Kling [6]. Se o preço de compra for maior que o aluguel mensal multiplicado por 300, vale a pena pena alugar. (CARRILHO, 2012, p. 42-43)

[6] Arnold Kling é um estudioso independente que escreve sobre uma ampla variedade de questões econômicas. Ele foi economista na equipe do Conselho de Governadores do Federal Reserve System de 1980 a 1986 e atuou como economista sênior em Freddie Mac de 1986 a 1994. Em 1994, ele fundou a Home fair .com, um dos primeiros sites comerciais da World Wide Web. (A Homefair foi vendida em 1999 à Home store .com.) Kling é autor de vários livros, mais recentemente De pobreza à prosperidade: ativos intangíveis, passivos ocultos e o triunfo duradouro sobre a escassez e a crise de abundância: repensando como pagamos para cuidados de saúde, publicado pelo Instituto Cato. Ele também co-edita o EconLog, um blog dedicado a questões econômicas. Kling recebeu seu Ph.D. em economia pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts em 1980.(https://www.cato.org/people/arnold-kling, em 03 de junho de 2019)

A título de exemplo, entre um aluguel mensal no valor de R$ 700,00 e uma aquisição imobiliária no valor de R$ 250.000,00, o aluguel se apresenta mais vantajoso, pois R$ $700,00 \times 300$ = R$ 210.000,00, quantia menor que a aquisição no valor de R$ 250.000,00.

A ação consciente e sensata não se dá ao léu, mas sim a partir de pressupostos estabelecidos. O conhecimento, através de reflexão, é que pauta a construção de pressupostos. Nesse ponto, entra a Matemática Financeira com elementos próprios que auxiliam a reflexão por meio de cálculos e conceitos.

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA: CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O estudo de Matemática Financeira foca nos procedimentos que têm por finalidade calcular pagamentos de empréstimos, juros decorrentes de aplicações ou demora na quitação, descontos, regimes de capitalização e inflação. Nesta seção, o objetivo é combinar o conhecimento teórico com situações práticas. Através de exemplos relacionados aos conceitos relatados, buscando massificar detalhes que por si só não são de fácil assimilação. Assim, nessa perspectiva, é possível por meio de exemplificação, sem esgotar as diversas situações que se encontram na realidade, apresentar soluções similares que resolvam casos práticos. Assaf Neto (2003) conceitua de forma sucinta:

> A matemática financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações do vários fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa verificados em diferentes momentos. (ASSAF NETO, 2003, p. 15)

Nessa linha, o que se propõe na presente pesquisa é que as comparações das diversas possibilidades financeiras serão voltadas para o ponto de vista de quem paga e/ou recebe pagamentos, ou é tomador de empréstimos, que quer ver suas finanças da melhor forma possível.

3.1 CAPITAL, JUROS, TAXA DE JUROS E MONTANTE

A análise de investimentos, métodos para pagamentos de empréstimos e comparações em geral relacionadas às finanças constitui objeto de estudo da Matemática Financeira.

No momento que uma pessoa empresta a outra uma determinada quantia, com a promessa de que receberá o valor depois de determinado tempo, mediante cobrança de um valor pré-fixado pelo uso dessa quantia emprestada, são elementos de fato financeiro que deve ser visto sob a ótica da matemática financeira. No âmbito da matemática financeira, existem termos que identificam cada um dos elementos citados com empréstimo e juros.

Assim sendo, o valor emprestado é denominado:

- ***Capital***[1] ou ***Principal*** indicado nos cálculos e fórmulas matemáticas por ***C***; o
- Valor cobrado pela utilização do ***Capital*** é denominado ***Juro*** e indicado nas fórmulas pela letra ***j***.

---

[1] Em sentido econômico, na síntese de FONTENAY, *capital* é toda quantia econômica aplicada com fito de lucro. (SILVA, 2009, p.249)

- A ***taxa de juros*** indicada, em cálculos, pela letra ***i***, originária da expressão inglesa *interest*, que significa juro, representa a porcentagem do ***Capital***.
- A taxa de juros possui unidade de tempo (período: n), geralmente: diária(a.d.), mensal (a.m.), anual (a.a.), semestral (a.s.) e trimestral (a.t.).
- Registrado que C e j são Reais e positivos, bem como $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dessa maneira, se um capital de R$10.000,00 for emprestado e a taxa de juros for 2,5% ao mês, os juros pagos no período de um mês serão iguais a 2,5% de R$10.000,00, que equivale a $0,025 \cdot (10.000,00)$, resultando em R$250,00 de juros. Sendo $\boxed{j = C \cdot \boldsymbol{i}}$.

No caso de pagamento do empréstimo ao final do período, inicialmente combinado, numa única parcela, será devida a soma do capital emprestado com o juro. A esse valor denominamos ***Montante*** representado pelo letra ***M***. Implicando que, no exemplo dado acima, o empréstimo no valor de R$10.000,00, durante 1 mês, à taxa de 2,5% ao mês, resulta em um montante no valor de R$10.250,00. Sendo $\boxed{M = C + j}$.

Empréstimos[2] são realizados, na grande maioria das vezes, por meio de instituições bancárias e financeiras. As instituições captam recursos, oferecendo aos investidores rendimentos de acordo com prazos e outros fatores envolvidos. Por outro lado, essas mesmas instituições oferecem empréstimos, sob determinadas condições, prazos e custos. As taxas variam de acordo com risco de inadimplência avaliados por meio de estudos de mercado.

Podemos definir a Taxa juros Global como sendo aquela que aplicada sobre a soma de capitais distintos resulta num rendimento igual à soma dos rendimentos desses capitais diferentes aplicados às respectivas taxas também distintas, por igual período. É dizer que é possível obter o mesmo rendimento, igual à soma dos rendimentos de capitais de valores diversos perante taxas diferentes, aplicando uma taxa somente (global), pelo mesmo prazo.

Os exemplos a seguir servem para visualizar concretamente o que foi dito acima.

Exemplo 3.1 (IEZZI, 2004, p. 41). Um investidor aplicou R$30.000,00 numa caderneta de poupança e R$20.000,00 num fundo de investimento, pelo prazo de 1 ano. A caderneta de poupança rendeu no período 9% e o fundo, 12%. Vamos calcular a taxa global de juros recebidos pelo investidor.

Chamamos de $\mathbf{j}_1$ os juros da caderneta de poupança, e de $\mathbf{j}_2$, os do fundo de investimento. Assim, temos, em reais:

[2] Ceder coisa ou bem , para que outrem a use ou dela se utilize, com obrigação de restituí-la, na forma indicada, quando a pedir seu dono ou quando terminado o prazo de concessão. (SILVA, 2009, p. 528)

Para encontrarmos o valor dos juros obtidos na aplicação na poupança (j_1) ou no fundo de investimento (J_2), multiplicaremos os capitais(C) aplicado pela taxa de juros (forma decimal), como está abaixo:

- a fórmula para calcular o juros é: $j = C \times i \times n$;
- no primeiro caso, j_1 é o valor procurado, $C = R\$30.000$, o capital, $i = 9\% = 0,09$, a taxa e $n = 1$ ano, o período;
- **j**$_1 = 30.000 \cdot (0,09) \cdot 1 = 2.700$;
- no segundo caso, j_2 é o valor procurado, $C = R\$20.000$, o capital, $i = 12\% = 0,12$, a taxa e $n = 1$ ano, o período;
- **j**$_2 = 20.000 \cdot (0,12) \cdot 1 = 2.400.$

Calculando os juros totais (j) recebidos, temos:

- $j = 2700 + 2400 = 5100.$

Sendo assim, a taxa global de juros recebidos é:

- $j = C \times i \times n$, com $n = 1$, então: $i = \dfrac{j}{C} = \dfrac{5100}{50000} = 0,1020$, ou seja, $10,20\% a.a.$

Donde i é a taxa global; j é o total de juros ($j = j_1 + j_2$) e C é a soma dos capitais aplicados ($C = 20.000 + 20.000$).

A taxa global se mostra como aquela taxa que aplicada sobre a soma dos capitais rende o mesmo valor que a soma dos resultados das aplicações dos capitais, respectivamente, a taxas diferentes.

Com isso, o próximo exemplo serve para ilustrar o que foi explanado acima.

Exemplo 3.2 (IEZZI, 2004, p.42). Um investidor aplicou 80% de seu capital num fundo A e o restante num fundo B, pelo prazo de 1 ano. Nesse período, o fundo A rendeu 16% enquanto o fundo B rendeu 10%. Vamos calcular a taxa global[3] de juros ao ano recebida pelo investidor.

Para calcular os juros utiliza-se a fórmula: $j = C \cdot i \cdot n$, nos casos específicos dos fundos de aplicação, A e B, do exemplo, j_A e j_B representam os juros dessas aplicações. o Capital C será representado por C_A e C_B, respectivamente, para aplicação no fundo A e B. a taxa i de cada fundo foi dada, $i_A = 16\% = 0,16$ e $i_B = 10\% = 0,10$. O período n é de 1 ano ($n = 1$).

[3] Taxa Global de Juros é a taxa única que expressa o efeito conjunto de inflação (ou correção monetária) e de juros.

Seja C o capital total aplicado, a parte aplicada no fundo A é C_A=$0,80 \cdot C$ (representando: 80% de C) e a parte aplicada no fundo B é C_B=$0,20 \cdot C$ (representando: 20% de C).

Os juros recebidos por meio do fundo A foram $j_A = 0,16 \cdot C_A = 0,16 \cdot (0,80) \cdot 1 = = 0,128C.$

Os juros recebidos por meio do fundo B foram $j_B = 0,10 \cdot C_B = 0,10 \cdot (0,20) \cdot 1 = = 0,02C.$

Assim, os juros totais recebidos foram, $j_A + j_B = 0,128C + 0,02C = 0,148C.$

Finalmente, a taxa global de juros, a.a., recebida na aplicação

$$j = C \cdot i \cdot n \Rightarrow i = \frac{j}{C \cdot n} = \frac{0,148C}{C \cdot 1} = 0,148, \text{ ou seja, } 14,8\% \text{ a.a.}$$

3.2 JUROS

A demanda por recursos financeiros é constante, ao longo da vida econômica da sociedade, independentemente da época, sempre presente. É verdade que também, há escassez de disponibilidade, de produtos e de recursos (dinheiro). Com a existência do desequilíbrio entre recursos necessários e disponíveis, surge o conceito de juro, pois de posse de determinadas quantias, a pessoa disposta a emprestar o capital (dinheiro) cobra o pagamento ao abrir mão, por determinado tempo, dessa disponibilidade. Mathias e Gomes (2016) apontam a noção de juros:

> A noção de juro decorre do fato de que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens no presente e não no futuro. Em outras palavras, havendo uma preferência temporal para consumir, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio para que não haja consumo é o juro. (MATHIAS; GOMES, 2016, p. 03)

Com o fim de reforçar e consolidar o conceito de juros, cumpre transcrever o que está em Silva (2009), quando assenta o conceito de juro:

> Aplicado notadamente no plural, *juros* quer exprimir propriamente os *interesses* ou *lucros*, que a pessoa tira da inversão de seus capitais ou dinheiros, ou que recebe do devedor, como paga ou compensação, pela demora no pagamento do que lhe é devido. Nesse sentido, pois, possui significado equivalente a *ganhos, usuras, interesses, lucros*. Tecnicamente, dizem-se os *frutos do capital*, representado pelos *proventos* ou *resultados*, que ele *rende* ou *produz*. (SILVA, 2009, p. 807).

Nessa toada, verificamos que os juros possuem determinados índices que devem ser aplicados ao capital, de maneira que se determine em quanto este será remunerado. Dependendo do critério aplicado, é que se determina o regime de capitalização destes. Na capitalização simples (juros simples), os juros incidem sobre o capital inicial não se incorporando a esse para fins de cálculo, ao passo que na capitalização composta (juros compostos), os juros se incorporam ao capital para fins de cálculo, acumulando a cada período.

3.2.1 Regimes de Capitalização

Caso um capital seja aplicado a uma certa taxa, por determinado tempo, a forma como os juros são incorporados ao capital indicam o regime de capitalização a que está submetido a aplicação, podendo ser: ***regime de capitalização simples*** ou ***regime de capitalização composto***.

3.2.1.1 Regime de Capitalização Simples

Por esse critério de capitalização, os juros decorrentes de cada período são iguais e resultado do produto do capital pela taxa, pagos ao final da aplicação.

Por exemplo, uma aplicação no valor de \$1.000,00 durante 4 anos, a juros simples à taxa (razão) de 20% a.a (ao ano). Calculando-se os juros em cada período e o montante ao final

- Os juros produzidos no ***1º*** ano são $R\$1.000,00 \cdot (0,20) = R\$200,00.$
- Os juros produzidos no ***2º*** ano são $R\$1.000,00 \cdot (0,20) = R\$200,00.$
- Os juros produzidos no ***3º*** ano são $R\$1.000,00 \cdot (0,20) = R\$200,00.$
- Os juros produzidos no ***4º*** ano são $R\$1.000,00 \cdot (0,20) = R\$200,00.$

Dessa maneira, constata-se que os juros foram no valor de \$800,00 e o montante após 4 anos foi no valor de \$1.800,00.

A partir desse exemplo, algumas verificações são denotadas:

a. No cálculo dos juros de cada ano, a taxa incide exclusivamente sobre o capital inicial;

b. Em consequência a expansão dos juros no tempo é linear, no exemplo \$200,00;

c. A remuneração no valor de \$200,00 é obtida com base no capital aplicado há 4 anos, ignorando-se os \$ 600,00 de juros que foram se acumulando no período de 3 anos anteriores;

d. Haja vista que os juros variam linearmente no tempo, o resultado da aplicação no período do investido é calculado simplesmente multiplicando-se o número de anos pela taxa anual: 4 anos $\times$ 20% ao ano = 80% para 4 anos;

e. Com a mesma motivação, é permitido converter a taxa anual para mensal, sendo suficiente dividir a taxa por 12, ficando assim: 20% ao ano/12 meses = 1,6666...% ao mês.

3.2.1.2 Regime de Capitalização Composta

Por esse critério de capitalização, os juros são adicionados ao capital em cada período, acumulando-se ao capital até o período anterior. Resultado é que a partir do segundo período juros incidem sobre juros de períodos anteriores. Recorrendo ao exemplo anterior com adaptação ao regime de capitalização composta, temos:

Por exemplo, uma aplicação no valor de \$1.000,00 durante 4 anos, a juros compostos à taxa de 20% a.a (ao ano).

- Os juros produzidos no ***1º*** ano são $\$1.000,00 \cdot (0,20) = \$200,00$, e o montante após 1 ano é M_1= \$1.200,00;
- Os juros produzidos no ***2º*** ano são $\$1.200,00 \cdot (0,20) = \$240,00$, e o montante após 2 anos é M_2= \$1.440,00;
- Os juros produzidos no ***3º*** ano são $\$1.440,00 \cdot (0,20) = \$288,00$, e o montante após 3 anos é M_3= \$1.728,00;
- Os juros produzidos no ***4º*** ano são $\$1.728,00 \cdot (0,20) = \$345,60$, e o montante após 4 anos é M_4= \$2.073,60.

Do mesmo modo, a partir desse exemplo, algumas constatações são colocadas:

a. No cálculo dos juros compostos, a taxa **não** incide somente sobre o capital inicial, mas sobre o saldo existente no início de cada ano (período). Saldo este que representa o capital inicial mais os juros incididos nos períodos anteriores;

b. O crescimento dos juros se dá de forma exponencial, observe que ao final de cada período a taxa de juros, elevada à potência corresponde ao número de períodos decorridos, é multiplicada pelo montante até o final período anterior:

$C = R\$1.000,00$

$M_1 = 1.000,00 + j_1 = 1.000,00 + 1.000,00 \times (0,20) \Rightarrow$
$M_1 = 1.000,00 \times (1 + 0,20)$, sendo igual a R\$1.200,00,

$M_2 = M_1 + J_2 = 1.000,00 \times (1 + 0,20) + [1.000,00 \times (1 + 0,20)] \times 0,20 = 1.000,00 \times (1 + 0,20) \times (1 + 0,20) \Rightarrow$
$M_2 = 1.000,00 \times (1 + 0,20)^2$, que é igual a R$1.440,00,

$M_3 = M_2 + J_3 = 1.000,00 \times (1 + 0,20)^2 + [1.000,00 \times (1 + 0,20)^2] \times 0,20 = 1.000,00 \times (1 + 0,20)^2 \times (1 + 0,20) \Rightarrow$
$M_3 = 1.000,00 \times (1 + 0,20)^3$, igual a R$1.728,00,

$M_4 = M_3 + J_3 = 1.000,00 \times (1 + 0,20)^3 + [1.000,00 \times (1 + 0,20)^3] \times 0,20 = 1.000,00 \times (1 + 0,20)^3 \times (1 + 0,20) \Rightarrow$
$M_4 = 1.000,000 \times (1 + 0,20)^4$, que é igual a R$2.073,60.

Como afirma Iezzi (2004) em seu livro, quanto ao regime de capitalização mais utilizado no Brasil:

> No Brasil, o regime de juros compostos é o mais utilizado em operações tradicionais, embora haja também a utilização de juros simples. Entretanto, quando a operação não tiver uma prática tradicional (ou seja, operações consagradas, tais como cheque especial, crédito direto ao consumidor, desconto de títulos, etc.), o que prevalece é o regime acordado entre tomador e o emprestador. (IEZZI, 2004, p. 46)

Mostra-se de suma importância o conhecimento dos critérios de capitalização para tomada de decisões acertadas em face de algumas possibilidades que se apresentam no dia a dia das pessoas. Este estudo atende ao cidadão para habilitá-lo a saber qual o melhor produto para se aplicar o capital ou quais os cálculos estão por trás de um contrato de empréstimo.

3.2.2 Juros Simples

O valor dos **juros simples** remunera o capital inicial aplicado diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo em que é aplicado. Desse modo, os juros no 1º período são $C \times i$, de acordo com o regime de capitalização simples, em cada período, os juros são iguais a $C \times i$, assim temos $\underbrace{C \times i + C \times i + \cdots + C \times i}_{n}$.

Assim, juros simples da aplicação serão iguais à soma de *n* parcelas iguais a $C \times i$, ou seja, $j = C \times i + C \times i + C \times i + \cdots + C \times i$, podemos escrever $\boxed{j = C \times i \times n}$.

Onde: j = valor dos juro; C = capital (na moeda que se queira calcular) em determinado momento; i = taxa de juros; n = prazo ou período.

Observemos que a taxa (i) é o coeficiente que determina o juro, num determinado intervalo de tempo. Cada unidade de capital será remunerada pelo coeficiente, no prazo igual ao da taxa. É dizer: quando mencionamos uma taxa de 6% ao ano, significa que um capital (C) empregado por no período (n) de um ano, renderá 6% do capital.

Ressalte-se que que o período (n) deve estar expresso na mesma unidade de tempo da taxa (i). Assim se a taxa está em meses, o prazo deverá estar em meses também. Destaque-se, também, que nada impede que o período (n) seja fracionário, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ano ou $\frac{7}{12}$ de ano.

Conveniente, também, agregarmos a fórmula de juros à fórmula de montante, vista no item 3.1, $M = C + j = C + C \cdot i \cdot n,$ temos, $\boxed{M = C \cdot (1 + i \cdot n)}$.

Exemplo 3.3 (IEZZI, 2004, 47). Um capital de R$8.000,00 é aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m., durante 5 meses. Vamos calcular os juros e o montante da aplicação.

Capital $C = 8,000$;

Taxa $i = 2\%$ a.m.$= 0,02$;

Período $n = 5$ meses.

Como a taxa (i) se refere ao mesmo período, meses, aplica-se a fórmula: $j = C \times i \times n$, daí: Os juros da aplicação, em reais, são:$J = 8.000 \times (0,02) \times 5 = 800.$ O montante (M) da aplicação, haja vista que o Capital (C), no valor de R$8,000,00, rendeu os Juros (j), no valor de R$800,00, em reais, é: $M = C + j.$ Sendo $C = 8.000$ e $j = 800,$ podemos escrever $M = 8.000 + 800 = 8.800.$

Sendo assim, os juros foram de R$800,00 e o montante de R$8.800,00.

Exemplo 3.4 (IEZZI, 2004, p. 48). Uma geladeira é vendida à vista por R$1.200,00 ou a prazo com 20% de entrada mais uma parcela de R$1.100,00, após 3 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento? Para calcularmos a taxa de juros simples, precisamos determinar:

- a entrada: 20% de 1.200 que é R$240,00;
- o capital financiado: 1.200-240 que é R$960,00;
- o montante do capital financiado: R$1.100,00;
- o juro (j) do financiamento: 1.100-960 que é R$140,00.

Assim, chamando de *i* a taxa mensal de juros, sendo $j = 140$, $C = 960$ e $n = 3$ meses, podemos escrever $j = C \times i \times 3$ então $140 = 960 \times i \times 3$ tem-se $140 =$ $= 2.880 \times i$ obtém-se $i = \dfrac{140}{2.880} = 0,0486 = 4,86\%$ a.m.

3.2.2.1 Taxa Proporcional e Taxa Equivalente

As operações com juros simples envolvem dois prazos: um referente à taxa de juros e o outro de incidência ou capitalização dos juros.

O exemplo clássico, como está anotado por (ASSAF NETO, 2003, p. 27), é a Caderneta de Poupança, antes das mudanças da legislação que trata do assunto, que paga aos seus depositantes uma taxa de juros de 6% ao ano, a qual é agregada (capitalizada) ao principal todo mês através de um percentual proporcional de 0,5%. Demarca, nitidamente, dois prazos: sendo o da taxa, anual; e da capitalização, mensal.

Registre-se que, para utilização das fórmulas matemáticas com a finalidade de realizar os cálculos financeiros é preciso que os prazos se encontrem na mesma unidade de tempo. Mudando o prazo da taxa para o mesmo da capitalização ou, noutro sentido, o período de capitalização nos tempos da unidade de tempo da taxa de juros.

Quando se trata do regime de capitalização simples obtém-se a ***taxa proporcional*** pelo resultado da divisão entre a taxa de juros considerada e o número de vezes que haverá incidência dos juros (capitalização).

A título de exemplo, tomando-se uma taxa de juros de 24% ao ano, para uma capitalização determinada mensalmente, posto que ocorrerão 12 vezes no período de um ano, o percentual de juros sobre o capital a cada mês será:

Taxa Proporcional $= \dfrac{24\%}{12} = 2\%$ ao mês.

Usualmente, as taxas proporcionais são utilizadas em operações de curto prazo, tais como os juros que nos deparamos escritos em boletos bancários para o caso de atraso no pagamento.

Taxas Equivalentes, no regime de capitalização simples, são aquelas que aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo valor de juros. Assim sendo, se aplicarmos um capital de R$ 250.000,00 ao juros de 2% ao mês ou 6% ao trimestre pelo período de um ano, produz o mesmo montante de juros. Temos, então:

- j(2% a.m.)$= 250.000,00 \times 0,02 \times 12 = 60.000,00.$
- j(6% a.t.)$= 250.000,00 \times 0,06 \times 4 = 60.000,00.$

Constata-se que o juros produzidos pelas duas taxas é o mesmo, tratando-se, portanto, de taxas equivalentes.

Destaque-se, por oportuno, que no regime de capitalização simples, tanto a taxa de juros proporcionais quanto a taxa de juros equivalentes são a mesma coisa, não fazendo diferença classificá-las de um ou de outro modo.

Exemplo 3.5 (ASSAF NETO, 2003, p.29). Calcular o montante de um capital de $600.000,00 aplicado à taxa de 2,3% ao mês pelo prazo de um ano e 5 meses.

Solução:

$M = ?$

$C = \$600.000,00.$

$n = 1$ ano e 5 meses (17 meses).

i $= 2,3\%$ ao mês $(0,023)$.

$M = C(1 + \boldsymbol{i} \times n),$ escrevemos $M = 600.000,00(1 + 0,023 \times 17) = \$834.600,00.$

Observe-se, que o prazo da aplicação foi transformado na mesma unidade de tempo da taxa de juros.

3.2.3 Juros Compostos

Juros compostos podem ser definidos como a remuneração que o capital ($C \in \mathbb{R}_+$) recebe após aplicação por mais de um período ($n \in \mathbb{N}$), sendo que a cada período, a partir do segundo, os juros são calculados sobre o montante do capital no período anterior.

Assim sendo, o montante M de um capital C aplicado à taxa unitária[4] i ($i \in \mathbb{R}_+$) de juros compostos, a cada período de tempo, por n períodos, é dado por:
$M_{(n)} = C \times (1 + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}$.

Pelo *Princípio da Indução Finita* (P.I.F.), para provarmos que a relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}_*$, temos que o Montante M_n é aplicável para os n períodos é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, quando:

1º) $M_{(n_0)}$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, basicamente, no caso de períodos, para $n_0 = 1$, temos $M_{(1)},\ M_{(1)} = C \times (1 + i)^1$.

2º) Admitindo que $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e $M_{(k)}$ é verdadeiro (hipótese de indução) e $M_{(k)} = = C \times (1 + i)^k,$ então é válido para se, e somente se, $M_{(k+1)} = C \times (1 + i)^{\boldsymbol{k+1}}$ se, e somente se, $M_{(k+1)} = C \times (1 + i)^k \times (1 + i)$ e se, e somente se, $M_{(k+1)} = = M_{(k)} \times (1 + i)$.

Portanto, a fórmula $M_{(n)} = C \times (1 + i)^n$ é válida apra todo $n \in N$.

Convém destacar que o valor de n deve ser um valor real não negativo. Ademais, o valor de n deve estar expresso na mesma unidade de tempo da taxa. É dizer: para taxa mensal, n deve ser expresso em meses, para taxa anual, n deve ser expresso em anos.Normalmente a fórmula é indicada sem o índice, ficando assim $\boxed{M = C(1 + i)^n}$.

Registre-se, por oportuno, que para encontrarmos o valor dos juros, na capitalização composta, basta subtrairmos o capital do montante, assim temos $\boxed{j = M - C}$.

[4] **Forma unitária**: a taxa refere-se à unidade de capital, ou seja, estamos calculando o que rende a aplicação de *uma unidade de capital* no intervalo de tempo referido pela taxa. **Forma percentual**: é a taxa aplicada a *centos* do capital, ou seja, ao que se obtém após dividir-se o capital por 100. Exemplo: 12% a.a. é taxa percentual, ao passo que 0,12 ($= 12 \div 100$) é forma unitária da taxa. (MATHIAS; GOMES, 2016, p.5-6)

Com intuito de ilustrar as possibilidades de utilização da fórmula, seguem alguns exemplos. Na realidade podem ser demandas diferentes tipos de questionamentos. Em determinadas situações se quer encontrar o montante, em outras a taxa de juros ou o período.

Exemplo 3.6 (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 55). Cristina toma um empréstimo de R$ 150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

Temos que R$ 150,00 representa o Capital (C) tomado por empréstimo, a taxa (i) é de 12% a.m.(a taxa deve constar na forma unitária igual a 0,12) e para calcular a dívida, nada mais é que: obter o Montante (M) para o período (n) de 3 meses. Temos

$M_n = C(1+i)^n$ que podemos escrever $M_3 = C_0(1+i)^3 = 150(1+0,12)^3 \cong 210,74.$

É dizer: um empréstimo no valor de R$150,00 tomado a juros compostos na taxa de 12% a.m., após um período de 3 meses se traduz em uma dívida no valor de R$ 210,74.

Exemplo 3.7 (IEZZI, 2004, p. 57-58). Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 4 meses, produzindo um montante de R$ 2.200,00, Qual a taxa mensal de juros da aplicação?

Designando por i a taxa mensal procurada, no período n, 4 meses, devemos ter

$M_n = C(1+i)^n$ que podemos escrever $2.200 = 2.000(1+i)^4$.

Inicialmente, atribuiu-se os valores às incógnitas da fórmula, $M = 2.200$; $C = 2.000$ e $n = 4$ meses.

Portanto: realizada a divisão de ambos fatores por 2.000, temos $(1+i)^4 = = 1.1,$ resulta que elevando-se os fatores à mesma potência ($\frac{1}{4}$) para obtermos a forma mais simples de cálculo, $[(1+i)^4]^{\frac{1}{4}} = [1,1]^{\frac{1}{4}}$ que implica em $(1+i)^1 = = (1,1)^{0,25}$ resulta que $1+i = \sqrt[4]{1,1}$ assim $1+i = 1,0241,\ i = 0,0241$ que corresponde à taxa de 2,41% a.m.

Registrado que como o período n foi dado como sendo 4 meses, a taxa i incide sobre o capital mensalmente (a.m.).

No exemplo a seguir, o objetivo é mostrar aplicação para períodos fracionários.

Exemplo 3.8 (IEZZI, 2004, p. 58). Um capital de R$ 7.000,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 18% a.a. Calcule o montante se os prazos[5] forem:

a) 180 dias; b) 72 dias

[5] O ano comercial considerado é de 360 dias.

a) Temos $C = 7.000$, $i = 18\%$ a.a. e $n = \dfrac{180}{360} = 0,5$ ano.

Logo $M_n = C(1+i)^n,$ sendo que $M_{0,5} = 7.000(1,18)^{0,5},$ encontramos $M_{0,5} =$ $= 7.603,95.$

O montante em 180 dias é R$7.603,95. Importante observar neste exemplo que o período é fracionário.

b) Temos $C = 7.000$, $i = 18\%$ a.a. e $n = \dfrac{72}{360} = 0,2$ ano.

Assim $M_n = C(1+i)^n$ escrevemos $M_{0,2} = 7.000(1,18)^{0,2}$ temos $M_{0,2} = 7.235,60.$

O montante em 72 dias é R$7.235,60. assim como no item a, deste exemplo, o período é fracionário.

Exemplo 3.9 (IEZZI, 2004, p. 58). Durante quanto tempo um capital de R$ 2.000,00 deve ser aplicado a juros compostos e à taxa de 1,5% a.m. para gerar um montante de R$ 2.236,28?

- Seja n o prazo procurado, sabendo-se que: a taxa (i) é $1,5\%$ a.m.; o capital (C) é 2.000 e o montante (M) gerado é 2.236,28, então $M_n = C(1+i)^n$ que podemos escrever $2.236,28 = 2.000(1,015)^n$ daí temos $(1,015)^n = 1,118140.$ Nesse ponto da resolução do exercício, para se obter o valor do período é necessário o calculo do logaritmo.

- Calculando o logaritmo decimal de ambos os membros, teremos $\log(1,015)^n =$ $= \log 1,118140$ que aplicando-se a propriedade de logaritmo que é demonstrado que $\log a^b = b \times \log a$, segue dessa forma, $n \times \log(1,015) = \log 1,118140,$ dividindo ambos os membros da equação por $\log 1,015$, temos, $n = \dfrac{\log 1,118140}{\log 1,015}.$ Como auxílio de calculadora, obtemos os valores dos logaritmos do numerador e denominador da fração acima e assim $n = \dfrac{0,048496}{0,006466} = 7,5.$

- Como resultado verifica-se que o capital deve ser aplicado por 7,5 meses.

É de se notar, nos exemplos, que a taxa utilizada na aplicação é na forma unitária. O exercícios contribuem, ainda, para aplicação das fórmulas e visualização das diferentes formas que se apresentam os cálculos de juros compostos.

3.2.4 Variação do Capital

A matemática financeira tem por objetivo importante o estudo da variação do dinheiro ao londo do tempo. Podendo ser usada em atividades de alta e baixa complexidade.

Como anotado sobre juros compostos, item 3.2.3, aquele que em cada período, a partir do segundo, é calculada sobre o montante do período anterior, para o estudo da variação do capital será de elevada importância essa definição.

Observando a figura 2 abaixo, de acordo com o dito acima, onde j é juros compostos, C é o capital e M é o montante, temos:

Figura 2 – Capitalização dos juros

Período	Juros	Montante
0	-	$M_0 = C$
1	$j_1 = C \times i \times 1.$	$M_1 = C + j_1 = C + C \times i \Rightarrow M_1 = C \times (1+i).$
2	$j_2 = M_1 \times i.$	$M_2 = M_1 + j_2 = M_1 + M_1 \times i = M_1(1+i) =$
		$= C \times (1+i) \times (1+i) \Rightarrow M_2 = C \times (1+i)^2.$
3	$j_3 = M_2 \times i.$	$M_3 = M_2 + j_3 = M_2 + M_2 \times i = M_2(1+i) =$
		$= C \times (1+i) \times (1+i)^2 \Rightarrow M_3 = C \times (1+i)^3.$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O fator $(1+i)^n$, para um número n (real positivo) de períodos, é o fator de acumulação de capital ou de capitalização.

Convém, nesse momento, fazer uma leitura por outro giro da fórmula do juro composto. Uma determinada quantia atual A, será equivalente no futuro, passados n períodos de tempo, a uma quantia F igual a A multiplicado pelo fator de capitalização, ou seja, $F = A \times (1+i)^n.$

Como averbado por Morgado; Wagner e Zani (2015), é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:

> *Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por* $(1+i)^n$*.*
>
> *Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por* $(1+i)^n$*.* (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 55)

Podendo observar-se que a comparação de valores só podem ser realizadas na mesma data, bem como operações de valores diferentes. E os deslocamentos dos valores no tempo se dão pela divisão pelo fator $(1+i)^n$ (descapitalização) e pela multiplicação pelo fator $(1+i)^n$ (capitalização), como está no esquema abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} :(1+i)^n & \longleftarrow & Capital & \longrightarrow & \times(1+i)^n \\ \hline atualidade & & & & futuro \end{array}$$

Dessa maneira, situações cotidianas relacionadas a finanças encontram soluções a partir do que foi até aqui posto. Nessa empreitada, alguns exemplos característicos são apresentados com a finalidade de consolidar a ligação entre teoria e prática. Na lição de Morgado; Wagner; Zani (2015) são apresentados exemplos bastante abrangentes e fiéis ao que ocorre no dia a dia. Passa-se à apresentação dos mais significativos.

Antes, porém, é oportuno apresentar a importante definição de **Diagramas de capital no tempo**.

Os problemas financeiros utilizam frequentemente do fluxo (entradas e saídas) de dinheiro. Definido como **fluxo de caixa**, com a seguinte representação:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 82 & 82 & & 400 & \\
0 & \uparrow & \uparrow & 3 & \uparrow & \cdots(+) \\
\hline
\downarrow & 1 & 2 & \downarrow & 4 & \cdots(-) \\
100 & & & 32 & &
\end{array}$$

O gráfico representando o fluxo de caixa auxilia e facilita naquelas situações em que é preciso visualizar as ocorrência, entradas ou saídas de capital, ao longo do tempo.

Sobre o fluxo de caixa, acima, as seguintes convenções devem ser destacadas:

- A reta horizontal representa a escala de tempo, sendo a contagem da esquerda para a direita. Com intervalos sucessivos, cada número representado os períodos acumulados;
- As setas representam a entrada ou saída de dinheiro. Dessa maneira, seta para cima e acima da reta indica entrada de dinheiro. De modo reverso, a seta apontada para baixo e abaixo da reta indica saída de dinheiro.

O diagrama apresentado possui algumas variações e pode ser representado também do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccccc}
100 & 82 & 82 & 32 & 400 & \\
\downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \text{(períodos)}
\end{array}$$

Da mesma maneira pode ser assim:

$$\begin{array}{cccccc}
(100) & 82 & 82 & (32) & 400 & \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \text{(períodos)}
\end{array}$$

Os valores negativos estão entre parênteses.

Fica claro que o diagrama de capital no tempo depende do ponto de vista de quem o faz. A pessoa que empresta determinada quantia a outra pessoa irá desenhá-lo de uma maneira, ao passo que quem toma o empréstimo fará uma representação diversa.

Para a pessoa que empresta o capital o fluxo de caixa será o seguinte:

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Capital + Juros} \\
0 & \uparrow \\
\hline
\downarrow & 1 \\
\text{Capital} &
\end{array}$$

Por outro lado, quem toma o empréstimo, o diagrama é assim:

$$\begin{array}{cc}
\text{Capital} & \\
\uparrow & 1 \\
\hline
0 & \downarrow \\
 & \text{Capital + Juros}
\end{array}$$

Isto posto, analisemos o exemplo abaixo.

Exemplo 3.10 (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 55). Geraldo tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros mensais de 5%. Dois meses após, Geraldo pagou R$ 150,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Os esquemas de pagamento a seguir são equivalentes. Logo R$ 300,00 na data 0, têm o mesmo valor de R$ 150,00 dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3, na perspectiva do comprador.

$$\begin{array}{cc}
300 & \\
\downarrow & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Ou

$$\begin{array}{cccc}
 & & 150 & P \\
 & & \downarrow & \downarrow \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

Como está posto nos primeiros parágrafos do presente item: a comparação de valores pode ser feita somente na mesma data. Logo, há de ser escolhida determinada data e ajustar os valores dados a esta data escolhida.

- na data 0, a quantia monetária (qualquer que seja) de 300 não está sujeita a nenhum ajuste;

- a quantia de 150 deverá ser ajustada, deslocando-se da data 2 até à data 0, para tanto, divide-se pelo fator $(1+i) = (1+0,05)$ (descapitalização), atentando-se para o fato de que para cada recuo da data, a quantia deve ser dividida pelo fator assim: da data 2 para data 1 vem: $\dfrac{150}{(1+0,05)}$;

- da data 1 para a data 0 tem-se: $\dfrac{\dfrac{150}{(1+0,05)}}{(1+0,05)} = \dfrac{150}{(1+0,05} \times \dfrac{1}{(1+0,05)} = \dfrac{150}{(1+0,05)^2}$;

- de maneira análoga, a quantia P pode ser levada da data 3 para data 0, com a finalidade de se comparar os valores: $\dfrac{P}{(1+0,05)^3}$.

Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos $300 = \dfrac{150}{(1+0,05)^2} + \dfrac{P}{(1+0,05)^3}$, daí, $P \cong 189,79$ reais.

Enfatizando que para que haja a correta comparação entre quantias, elas devem estar na mesma data, como verifica no exemplo acima, deslocou as quantias 150 e P para data 0(zero), atualidade.

Exemplo 3.11 (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 56). Telma tem duas opções de pagamento na compra de um telefone celular: três prestações mensais de R$ 100,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 51,00 cada. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Telma - isto é, Telma considera indiferente pagar (ou receber) 100 reais agora ou 102 reais daqui a um mês -, o que ela deve preferir?

$$\begin{array}{ccc} 100 & 100 & 100 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Ou

$$\begin{array}{cccccc} 51 & 51 & 51 & 51 & 51 & 51 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Para comparar, determinaremos o valor dos conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2.

- o que está se pedindo é a comparação de dois planos de pagamentos, para não haver distorções, os valores devem se referir à mesma data, no caso foi escolhida a data 2;

- desse modo: V_1 é o valor referente à primeira forma de pagamento (3 pagamentos de 100), sendo necessário deslocar dois pagamentos que estão em datas diferentes para a data 2 (escolhida como referência) e o relativo à data 2 permanece como está.

$$\begin{array}{ccc} 100(a) & 100(b) & 100 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

- a prestação 100(a) deslocando-se para a data 2, deve ser multiplicada pelo fato de capitalização, qual seja $(1+0,02)^2$, a potência 2 é pelo fato do deslocamento de 2 períodos, então, 100 na data 0 equivale a $100 \times (1+0,02)^2$ na data 2;
- de forma similar, o deslocamento de 100(b) da data 1 até a data 2 é obtida multiplicando-se pelo fato de capitalização $(1+0,02)$: $100 \times (1+0,02)$. Temos $V_1 = 100 \times (1+0,02)^2 + 100 \times (1+0,02) + 100 = 306,04$
- para V_2, valor relativo à segunda forma possível de pagamento, haverá avanços e recuos de prestações, pois a data escolhida como referência é a 2;
- então observando-se o esquema de prestações, tem-se,

$$\begin{array}{cccccc} 51 & 51 & 51 & 51 & 51 & 51 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

  haverá o deslocamento para o futuro de duas prestações das datas 0 e 1, a prestação da data 2 permanece inalterada e as prestações das datas 3, 4 e 5 recuarão até a data 2;
- Assim:
  a) da data 0 até a data 2 da primeira prestação que se encontra na data 0 (capitalização): $51 \times (1+0,02)$ (da data 0 até data 1) e em seguida: $51 \times (1+0,02) \times (1+0,02)$ (data 1 até data 2);
  b) a segunda prestação que se encontra na data 1: $51 \times (1+0,02)$ (capitalização);
  c) a terceira prestação é 51, pois não houve movimentação no período;
  d) a quarta prestação que se encontra na data 3 deverá ser dividida pelo fator $(1+0,02)$ (descapitalização) correspondente ao recuo de período (de 3 para 2): $\dfrac{51}{(1+0,02)}$;
  e) a quinta prestação que se encontra na data 4 deverá ser dividida pelo fator de capitalização correspondente ao recuo de 2 períodos (de 4 para 2): $\dfrac{51}{(1+0,02)^2}$ (descapitalização);

f) a sexta prestação que se encontra na data 5 deverá ser dividida pelo fator de capitalização correspondente ao recuo de 3 períodos (de 5 para 2): $\dfrac{51}{(1+0,02)^3}$ (descapitalização).

Assim a segunda forma de pagamento comparada é equivalente na data 2 a $V_2 = 51\times(1+0,02)^2+51\times(1+0,02)+51+\dfrac{51}{(1+0,02)}+\dfrac{51}{(1+0,02)^2}+\dfrac{51}{(1+0,02)^3} \cong 303,16.$

Telma deve preferir o pagamento em seis prestações. Haja vista que as duas forma de pagamentos compradas na data 2 mostram que a segunda é menor.

Exemplo 3.12 (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 58). Uma loja oferece duas opções de pagamento:

a) À vista, com 10% de desconto.

b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Considerando-se, genericamente, o capital C, temos as seguintes formas de pagamento:

0,9C
↑
———————
0

Ou

C/2 C/2
↑ ↑
——————————————
0 1

Igualando os valores na data 0, temos que: na primeira forma de pagamento, desconto de 10% a vista, o valor permanece inalterado: $0,9C$; na segunda forma de pagamento, por sua vez, a primeira prestação $\dfrac{C}{2}$ (metade do valor C) mantém-se o mesmo valor, mas a segunda prestação deve recuar da data 1 para data 0, para possibilitar a comparação de capitais: $\dfrac{C/2}{(1+i)}$. Daí que $0,9C = \dfrac{C}{2} + \dfrac{C/2}{(1+i)}$ então $0,9C(1+i) =$ $= \dfrac{C}{2}(1+i) + \dfrac{C}{2}$ desse modo $0,9(1+i) = 0,5(1+i) + 0,5$ que é igual a $0,9i - 0,5i =$ $= 1 - 0,9$ e encontramos a taxa, $i = \dfrac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$

Morgado, Vagner e Zani (2015, p. 58), na solução do exemplo, fixou o preço em 100, mostrando os esquemas de pagamentos abaixo:

90
↑

0

Ou

50 50
↑ ↑
---
0 1

Igualando os valores na época 0, obtemos $90 = 50 + \frac{50}{1+i}$. daí $i = 0,25 = 25\%$.

Em síntese, a loja cobra 25% ao mês nas vendas a prazo. Constatando-se que os juros são aplicados sobre 90 e não sobre 100. Assim sendo, 90 menos a entrada de 50 resta 40, aplicando-se 25% a.m. sobre 40 tem-se 10 de juros, resultando na prestação de 50 [= 40(segunda parcela) + 10 (juros)], após um mês.

Comentar os exemplos acima se faz pertinente, haja vista, que se amoldam às diversas situações de comércio com as quais se deparam as pessoas no seu cotidiano. Pagamentos antecipados de dívidas, opções de pagamentos à vista ou a prazo, bem como ofertas que escondem o quanto se está desembolsando de juros. Estes exemplos foram extraídos da lição de Morgado; Wagner; Zani (2015) pelo fato de diferirem de outras publicações ou da realidade apenas no que diz respeito a valores numéricos, servindo plenamente de subsídio para o entendimento da Matemática Financeira e seus critérios.

As vantagens da capitalização composta, visto que possibilita a comparação de valores por meio do deslocamento destes nos períodos até uma mesma data. Com precisão vocabular Assaf neto (2003) que pontua a utilidade dos juros compostos:

> Tecnicamente, o regime de juros compostos é superior ao de juros simples, principalmente pela possibilidade de fracionamento dos prazos. No critério composto, a equivalência entre capitais pode ser apurada em qualquer data, retratando melhor a realidade das operações que o regime linear. (ASSAF NETO, 2003, p. 44)

É o reforço, mais uma vez, da afirmação que dois capitais devem ser comparados numa mesma data. Critério que deve ser respeitado na capitalização composta, haja vista, como demonstrado no item 3.2.3, utilizando-se do fator $(1+i)^n$ para capitalizar (valor futuro) ou descapitalizar (valor atual).

3.2.4.1 Taxa Equivalente

Duas taxas de juros compostos são equivalentes quando, considerados o mesmo período de aplicação e o mesmo capital, for indiferente aplicar uma ou outra. Podendo se afirmar que resultam em montantes iguais para um mesmo capital aplicado, ao final do mesmo período.

A taxa equivalente em períodos quaisquer, assim pode ser demonstrada:

- $i =$ referente ao período de tempo p
- $i_q =$ referente à fração própria de período de tempo $\frac{p}{q}$, com (q maior que p)

Conforme ensina (MATHIAS; GOMES, 2016, p. 88-89), admitindo-se $p = 1$, então $p/q = 1/q$. Em que a fração $1/q$ representa que a unidade de tempo unitário foi dividido em q partes iguais.

Considerando a aplicação de um capital C_0 aplicado nessa duas taxas, o montante, após 1 período, aplicada à taxa i será $C_1 = C_0(1 + i)^1$.

Da mesma forma, aplicando-se C_0 por q períodos, à taxa i_q, para que resulte o mesmo intervalo de tempo de aplicação da taxa anterior, tem-se $C_q = C_0(1 + i_q)^q$.

Tendo sido o mesmo capital C_0 aplicado por tempo igual, caso as taxas sejam equivalentes os montantes serão iguais, isto é, $C_1 = C_q$, o que equivale a escrever $C_0(1 + i) = C_0(1 + i_q)^q$, vem que $(1 + i) = (1 + i_q)^n$. Prosseguindo, elevando-se os dois membros a $1/q$, temos $[(1 + i)]^{1/q} = [(1 + i_q)^q]^{1/q}$, sendo que $(1 + i)^{1/q} =$ $= (1 + i_q)^{q/q}$, encontramos $(1 + i)^{1/q} = (1 + i_q)$, que pode ser escrito assim, $1 + i_q =$ $= \sqrt[q]{1 + i}$.

Portanto, $\boxed{i_q = \sqrt[q]{(1 + i)} - 1}$ é a fórmula para calcular taxas equivalentes.

Exemplo 3.13 (MATHIAS; GOMES, 2016, p.127). Verificar se a taxa de juros compostos de 2,01% em dois meses é equivalente à taxa de 3,0301% em três meses.

Resolução:

a) Direta:

$i_n = 2,01\%$ para $n = 2$ meses (período de capitalização).

$i_m = 3,0301\%$ para $m = 3$ meses (período de capitalização).

Calculamos diretamente a taxa equivalente:

- $(1 + i_n)^m = (1 + i_2)^3 = (1,0201)^3 = 1,06152$, essa taxa capitalizada no período da outra taxa, 3 meses, resulta no mesmo fator de capitalização obtido pela outra taxa capitalizada pelo período da presente taxa.
- $(1 + i_m)^n = (1 + i_3)^2 = (1,030301)^2 = 1,06152$, 2 meses corresponde ao período de capitalização da primeira taxa dada.

Como as taxas resultaram iguais quando capitalizadas para um mesmo intervalo de tempo, concluímos que são equivalentes.

b) Pela fórmula $1 + i_n = (1 + i_m)^{n/m}$ implica que $1 + i_2 = (1 + i_3)^{2/3}$ sendo que i_2 a taxa estamos calculando e i_3 conhecida, $3,0301$ escrita na forma unitária como $0,030301$. Usando logaritmos, $\log(1 + i_2) = \log(1 + i_3)^{2/3}$ encontramos $\log(1 + + i_2) = \frac{2}{3}\log(1,030301)$. Logo, na tabela de logaritmos, achamos: $\log(1,030301) = = 0,01296$.

Portanto, $\log(1 + i_2) = \frac{2}{3} \times 0,01296$ acarreta que $\log(1 + i_2) = 0,008643$. Extraindo-se o antilogaritmo, temos $1 + i_2 = 1,0201$ obtemos $i_2 = 0,0201$ que é igual à taxa $2,01\%$.

Cabe observar que partindo da segunda taxa (i_3) obtivemos um valor igual ao da primeira taxa (i_2). Portanto, as duas taxas são equivalentes.

Exemplo 3.14 (ASSAF NETO, 2003, p. 50-51) . Quais as taxas de juros compostos mensal e trimestral equivalentes a 25% ao ano?
Solução

a) Taxa de juros equivalente mensal

$i = 25\%$ a.a.

$q = 12$ (1 ano equivale a 12 meses),

Como se trata de taxa anual, a taxa mensal equivalente é uma fração do ano ($1/12$), $i_q = \sqrt[q]{1 + i} - 1$, então $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0,25} - 1$, obtemos $i_{12} = \sqrt[12]{1,25} - 1 = = 1,877\%$ a.m..

É possível verificar que a taxa encontrada é aquela que capitalizada mensalmente produz o mesmo montante que a capitalização da taxa anual, para um mesmo capital.

O que equivale a dizer, em conclusão, que um determinado capital C aplicado à taxa mensal de 1,877%, por 12 meses, produzirá o mesmo montante que se for aplicado á taxa anual de 25%, por um ano.

b) Taxa de juros equivalente trimestral

$q = 4$ (1 ano = 4 trimestres meses).

Ressaltando que 1 ano é composto de 4 trimestres. Então $i_4 = \sqrt[4]{1 + 0,25} - - 1$, dessa forma $i_4 = \sqrt[4]{1,25} - 1 = 5,737\%$ a.t.

Analogamente ao item a) temos que $C(1 + 0,05737)^4 = C(1 + 0,25)^1$.

Frisando que aplicando-se um capital C por 4 trimestres à taxa trimestral de 5,737% obtém o mesmo montante se esse capital C for aplicado por um ano à taxa anual de 25%.

Resta claro que não se deve confundir que juros de 6% ao mês equivalem a juros de 72% ao ano, pelo fato de 12 meses $\times\ 6\% = 72\%$. As taxas de 6% ao mês e 72% ao ano são proporcionais, sendo a razão entre elas a mesma razão dos períodos aos quais se referem. Na situação aqui proposta, a taxa de juros anual equivalente a 6% ao mês é, aproximadamente, 101% ao ano. Taxas proporcionais não são equivalentes.

Oportuno trazer a significante lembrança de Morgado; Wagner e Zani (2015) ao se referir a taxa equivalente no âmbito de juros compostos:

> Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma expressão como “12% ao ano com capitalização mensal” é “1% ao mês”. (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 59)

Dessa maneira, “1% ao mês com capitalização semestral” significa “6% ao semestre”.

3.2.4.2 Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Quando o prazo em que ocorre a capitalização dos juros, incorporação dos juros ao capital, coincide o período referido na taxa, estamos diante da ***Taxa Nominal*** de juros. Por sua vez, a ***Taxa Efetiva*** de juros é a taxa de juros apurada durante o prazo, sendo formada ao longo dos períodos de capitalização.

A taxa efetiva é dada por $\boxed{i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1}$, sendo:

$i =$ taxa nominal;

$i_f =$ taxa efetiva;

$k =$ número de capitalizações para 1 período da taxa nominal;

i_k a taxa por período de capitalização $\left(i_k = \frac{i}{k}\right)$.

Como temos que i_f é equivalente a i_k, vem que $1 + i_f = (1 + i_k)^k,$ mas $i_k = \frac{i}{k},$ logo, $1 + i_f = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Esta é a fórmula da taxa efetiva.

A título de ilustração, tomando-se uma taxa nominal de 12% ao ano. A seguir, na tabela 2, serão calculadas a taxa efetiva anual, nos diferentes períodos de capitalização.

Tabela 1 – Comparativo de Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Período de Capitalização	Número de Períodos	Taxa Efetiva Anual
Anual	1	12%
Semestral	2	12,36%
Quadrimestral	3	12,48%
Trimestral	4	12,55%
Mensal	12	12,68%
Diário	360	12,74%

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Observa-se que, para uma mesma taxa nominal, quanto mais períodos de capitalização, mais interessante para quem aplica, ao passo que, para quem necessita de capitar recursos, o custo eleva-se.

Tratando-se de taxa nominal é comum admitir-se que a capitalização ocorre por juros proporcionais simples. Assim, uma taxa nominal de 24% ao ano, com capitalização mensal, é de $24\%/12 = 2\%$ ao mês, que é taxa proporcional.

Assim sendo, a Caderneta de Poupança paga juros anuais de 6% ao ano com capitalização mensal à base de 0,5%. A rentabilidade efetiva deste investimento é:

- Taxa nominal da operação para o período é 6% ao ano;
- Taxa proporcional simples (de acordo com o período de capitalização) é 0,5% ao mês;
- Taxa efetiva de juros: $i_f = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = 6,17\%$ ao ano.

Denota-se a importância de se conhecer a diferença entre Taxa Nominal e Taxa Efetiva pela importância e sensível acréscimos de valores nos cálculos que se utilizam de uma ou de outra taxa.

3.3 DESCONTOS

Usualmente os títulos de crédito possuem valores nominais registrados expressamente. Representa a soma da obrigação correspondente ao valor devido com vencimento em determinada data.

Interessante assentarmos as definições de título de crédito, valor nominal e valor atualizado, pela relevância de que faz presente quando se trata de descontos. Sendo assim, verifiquemos qual a definição exposta por Silva (2009) a respeito de título de crédito:

> Designação, de natureza genérica, dada a todo *documento*, ou *escrito*, em que se firma um *direito creditório*, ou uma *obriga-*

> *ção de receber certo valor*, ou *certa prestação*, que se estima pecuniariamente, ou que *tenha por objeto coisa de valor certo*.
>
> Para Otávio Mendes, o *título de crédito* é aquele “que é entregue pelo devedor ao credor, representativo da relação de direito estabelecida entre eles.”(SILVA, 2009, p. 1.393)

Não raro, em transações financeiras surge a menção ao título de crédito, por isso é importante ter em mente sua definição, no intuito de que se tenha noção das operações a que estão sujeitos esses documentos.

Ainda na lição de Silva (2009), encontramos a clara definição de valor nominal:

> É aquele que registra , ou se anota, expressamente, em um título, por uma *determinação certa*.
>
> Em regra, todos títulos de crédito trazem um *valor nominal*, que serve de base aos respectivos resgates.
>
> O valor nominal representa a soma da obrigação inscrita no título, em que se menciona. Corresponde ao *valor intrínseco*[6]. (SILVA, 2009, p. 1.449)

É dizer que a validade está naquilo que está escrito, pois a partir desse elemento essencial a um título de crédito decorrem as possibilidades de cálculos financeiros.

Valor atualizado é, privilegiando a clareza e coerência demonstrada por Silva (2009),que averba:

> Na técnica cambiária[7], porém, o *o valor atual* é o valor de um título de crédito na ocasião em que é descontado, representado pela diferença entre o seu *valor nominal* e o *valor do desconto*. (SILVA, 2009, p. 1.448)

Feitas as operações de matemática financeira é possível determinar o valor do desconto, com isso o valor nominal, base de cálculos, perde seu significado. A partir da subtração do desconto do valor nominal, a importância do título de crédito está em seu valor atual.

O desconto, por sua vez, é o abatimento ou bonificação pelo pagamento antecipado de um título de crédito. Essa redução deve ser compreendida como a diferença entre o valor nominal de um título e o seu valor atualizado apurado nos períodos antes do vencimento.

As operações de desconto podem ser realizadas no regime de juros simples ou de juros compostos.

---

[6] Que faz parte de ou que constitui a essência, a natureza de algo; que é próprio de algo; inerente.

[7] Cambiária, operações de câmbio. Câmbio quer significar toda convenção, que se firma na troca ou permuta de certa coisa por outra. (SILVA, 2009, p. 242)

3.3.1 Desconto Simples

O desconto simples, regime de juros simples, pode ser subdividido em dois tipos: desconto “por fora”(ou comercial) e descontos “por dentro”(ou racional, ou matemático).

Desconto comercial ou “por fora” é obtido pela aplicação de juros simples sobre o valor nominal do título que está sendo saldado antecipadamente, em n períodos. Destaque-se que há diferença a ser observada entre valor do desconto e valor descontado. Sendo aquele o quanto deve ser abatido do valor nominal e este é a diferença entre o valor nominal e o desconto, consubstanciando-se no próprio valor atual do título.

Calcula-se o valor do desconto (D_c) aplicando a taxa(i) sobre o valor nominal (N) da dívida, pelo período(n) antes do vencimento. Feito isto, encontra-se o valor descontado (V_c, sendo o índice c: comercial) subtraindo do valor nominal (N) do desconto (D_c) obtido.

Assim:

N: valor nominal (ou montante),

n: número de períodos antes do vencimento,

i: taxa de desconto,

D_c: desconto comercial,

V_c: valor atual (ou valor descontado comercial).

Em decorrência, o valor do desconto comercial pela definição é $\boxed{D_c = Nin}$.

E o valor descontado comercial será $V_c = N - D_c$ que implica em $V_c = N - Nin$, logo $\boxed{V_c = N(1 - in)}$.

Caracterizando a fórmula de cálculo de desconto comercial.

Exemplo 3.15 (MATHIAS; GOMES, 2016, pp. 47-48). Uma pessoa pretende saldar um título de R$5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., qual o desconto e quanto vai obter?

Resolução: Temos:

a) O desconto comercial é dado pela fórmula,

   $D_c = Nin,$ logo $D_c = 5.500 \times \dfrac{0,40}{12} \times 3 =$ 550,00 (lembrando que se trata de regime simples, a taxa é proporcional).

b) O valor descontado comercial é dado por: $V_c = N(1-in)$ (sendo V_c o valor do título descontado), assim, $V_c = 5.500 \times \left(1 - \dfrac{0,40}{12} \times 3\right) = 5.500,00 \times 0,9 = \$4.950,00.$

Portanto a pessoa vai receber R$ 4.950,00 pelo desconto comercial.

Desconto racional ou “por dentro” é aquele que se refere ao desconto obtido pelo resultado entre a diferença do valor nominal pelo valor atual do título que está sendo pago antes do tempo avençado (combinado) para ao vencimento.

Calcula-se o valor do desconto (D_r) pelos mesmos critérios do cálculo de juros. Diferindo apenas por ser uma operação de descapitalização, retrocedendo a capitalização do prazo de antecipação. Daí temos que valor do desconto (D_r) é a diferença entre o valor nominal (N) e o valor descontado (V_r, sendo o índice r: racional). Observe que o valor nominal é projeção da dívida perante taxa (i) pelo período (n). Assim, $N = C + C \cdot i \cdot n \Rightarrow N = C \cdot (1 + in)$ o que leva a compreender que se o pagamento é antecipado, o valor de C é obtido dividindo-se o valor nominal (N) pelo termo: $(1 + i \cdot n)$, ou seja, $\dfrac{N}{1+in}$, destacando-se que n, nesse caso, é o período de antecipação.

Temos $V_r = \dfrac{N}{1+in}$, o fator $1 + in$ é a atualização (descapitalização) do valor nominal. Daí, temos que $D_r = N - V_r = N - \dfrac{N}{1+in}$, logo $D_r = \dfrac{N(1+in) - N}{1+in}$.

Em decorrência, o valor do desconto racional pela definição é

$$\boxed{D_r = \frac{Nin}{1+in}}.$$

Sendo anotada a fórmula do desconto racional. Podemos destacar, ainda, que: $V_r = N - D_r$.

Exemplo 3.16 (MATHIAS; GOMES, 2016, p. 44-46). Uma pessoa pretende saldar um título de R$5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., qual o desconto e quanto vai obter?

Resolução:

Temos:

$N = 5.500,00,$

$n = 3$ meses.

Calculando-se a taxa proporcional a 1 mês, $i_{12} = \dfrac{0,40}{12}$. Assim, podemos calcular:

a) O desconto $D_r = \dfrac{Nin}{1+in} = \dfrac{5.500,00 \times \frac{0,40}{12} \times 3}{1 + \frac{0,40}{12} \times 3} = \dfrac{5.500,00 \times 0,10}{1 + 0,10} = \dfrac{550,00}{1,10}$.

Concluindo que o D_r é de R$500,00.

b) O valor descontado $V_r = 5.500,00 - 500,00 =$ R$5.000,00.

Então, R$ 5.000,00 é o valor do título atual. É fato que nos 3 meses e à taxa de 40% a.a., o título renderá R$500,00 de juros.

3.3.2 Desconto Composto

É também subdividido em dois tipos: “por fora”ou comercial e “por dentro”(racional).

Desconto comercial composto “por fora” incide sobre o valor nominal(N) período a período. Vale destacar que o desconto composto é, em síntese, a mesma sistemática do desconto simples: redução que se obtém pelo pagamento de uma dívida antes do seu vencimento. Caracterizado pela aplicação da taxa de desconto por períodos sucessivos sobre o valor do período antecedente.

O valor descontado (V_C) é igual ao resultado da diferença entre o valor nominal da dívida (N) e o valor do desconto (d). Assim: $V_c = N - D$. Ao passo, que o desconto (D) é aplicado por período: $D = N \cdot d$, sendo d a taxa de desconto por período. Daí, $V_c = N - D \Rightarrow V_c = N - N \cdot d = N(1 - d)$. Desse modo, sobre o valor $N(1 - d)$ é que se aplicará a taxa de desconto no período. No segundo período será: $D = N(1 - d) \cdot d$ e assim $V_c = N(1 - d) - N(1 - d) \cdot d = N - Nd - Nd + Nd^2 = N - 2Nd + Nd^2 =$ $= N(1 - 2d + d^2) = N(1 - d)^2$, assim sucessivamente até o enésimo período.

Sendo: Assim temos $\boxed{V_c = N(1 - d)^n}$, Esse é o valor descontado.

Como o desconto (D_c) é a diferença entre o valor nominal e o valor descontado, temos $D_c = N - V_c$ que implica em $D_c = N - N(1 - d),$ concluímos que $\boxed{D_c = N[1 - (1 - d)^n]}$.

Exemplo 3.17 (ASSAF NETO, 2003, p. 109). Um título foi descontado à taxa de 3% a.m. 5 meses antes de seu vencimento. Sabe-se que esta operação produziu um desconto de $39.000,00. Admitindo o conceito de desconto composto ”por fora”, calcular o valor nominal do título.

Solução:

$D_c = N[1 - (1 - d)^n]$. Assim, $39.000,00 = N[1 - (1 - d)^n],$ ou seja, $39.000,00 =$ $= N \times 0,141266.$

Logo, $N = \dfrac{39.000,00}{0,141266} = \$276.074,92.$

Desconto racional composto “por dentro” por sua vez, descontar racionalmente, à taxa i, um título de valor nominal N é encontrar um valor presente ou atual V_r, assim temos que $\boxed{V_r = \dfrac{N}{(1 + i)^n}}$.

Havendo o entendimento de que é o valor nominal do título dividido pelo fator de capitalização elevado ao número de períodos antecipados, como visto no item 3.2.4 do presente trabalho.

O desconto obtido é possível verificar por: $D_r = N - V_r$ então$D_r = N - \dfrac{N}{(1+i)^n}$, realizando operações algébricas, temos $\boxed{D_r = N\left(1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}\right)}$.

Sendo certo, também, que o valor atual será igual à diferença entre o valor nominal e o desconto racional $\boxed{V_r = N - D_r}$.

Exemplo 3.18 (ASSAF NETO, 2003, p. 111). Calcular o valor do desconto racional composto de um título de valor nominal de $ 12.000,00 descontado 4 meses antes de seu vencimento à taxa de 2,5% ao mês.
Solução:

Queremos encontra D_r, sabendo que

$N = 12.000,00,$

$n = 4$ meses,

$i = 2,5\%$ a.m.

Como $D_r = N\left(1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}\right)$, logo $D_r = 12.000,00\left(1 - \dfrac{1}{(1+0,025)^4}\right) =$
$= 12.000,00 \times 0,094049 = \$1.128,59.$

Portanto R$1.128,59 é o desconto racional D_r que nos propusemos a encontrar.

3.4 VALOR ATUAL, SÉRIES UNIFORMES E MONTANTE DE SÉRIES UNIFORMES DE DEPÓSITO

Em determinadas situações é necessário saber qual a proporção de dívidas que possuímos para uma análise correta e tomada de decisão de acordo com as nossas possibilidades financeiras. O mesmo pode ser dito para quem empresta.

Para tanto, existem mecanismos da matemática financeira que possibilitam a obtenção de valores atuais de um conjunto de capitais ou mesmo a projeção de empréstimos ou aplicações.

Importante destacar, dada a oportunidade, que aqui se concretiza a afirmação de que a matemática financeira estuda a variação do dinheiro ao longo do tempo. A seguir isto pode ser visualizado com clareza, em que pese complexidade intermediária.

3.4.1 Valor Atual de Capital

Com a finalidade de resolver dúvidas relativas à vantagem, ou não, com objetivo de quitar uma dívida. Surge a pergunta: é mais vantajoso quitar ou postergar o pagamento?

O exemplo a seguir, retirado do livro de (IEZZI, 2004, p. 65), é elucidativo e está de acordo com o que ensinam os demais autores de textos pertinentes ao assunto, matemática financeira. Intuitivo, parte da suposição de que uma pessoa tenha uma dívida de R$ 15.000,00 com vencimento em 1 mês. Prosseguindo, devemos supor que essa pessoa consiga aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 2% a.m. E pergunta: quanto essa pessoa deverá aplicar hoje, na taxa dada, para ter dinheiro suficiente para quitar a dívida?

Destarte, com os conteúdos vistos até essa altura do presente trabalho, conclui-se que se deve obter o capital que aplicado por 1 mês a juros de 2% a.m., produza um montante no valor de R$ 15.000,00, que é o valor da dívida após um mês. Assim

$M = C(1+i)^n$, daí, $15.000,00 = C(1+0,02)^1$, então teremos: $15.000,00 =$ $= C(1,02)^1$ e, finalmente, $C = \dfrac{15.000,00}{(1,02)^1} = 14.705,88.$

O capital a ser aplicado, no valor de R$ 14.705,88 é o ***Valor Atual*** de R$ 15.000,00, calculado para a taxa de 2% a.m.

Partindo dessa situação hipotética descrita, podemos projetar outras variações, tais como: conjecturemos que além dessa dívida, a mesma pessoa tenha uma dívida no valor de R$ 17.000,00 com vencimento em 2 meses. O valor que essa pessoa precisaria seria R$ 14.705,88 [$= 15.000,00/(1,02)^1$] mais o resultado de

$$C = \frac{17.000,00}{(1,02)^2} = 16.339,87.$$

Desse modo, para quitar as dívidas, na data atual, a pessoa precisaria de

$$\frac{15.000,00}{(1,02)^1} + \frac{17.000,00}{(1,02)^2} = 31.045,75.$$

O **Valor Atual** dos valores R$ 15.000,00 e R$17.000,00 à taxa de 2% a.m. é R$ 31.045,75.

A partir do exemplo, podemos generalizar nos seguintes termos: dada uma série de valores chamados de P em datas distintas e futuras, de forma que tenhamos P_1 na data 1, P_2 na data 2, e assim por diante até o valor P_n na data n, denominamos **Valor Atual** desses valores, a uma taxa *i*, ao valor indicado por VA, que aplicado à taxa i, produz as rendas $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$:

$$\boxed{VA = \frac{P_1}{(1+i)^1} + \frac{P_2}{(1+i)^2} + \frac{P_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P_n}{(1+i)^n}}.$$

Com isso, podemos verificar exemplos de aplicação da fórmula, sem perda de generalidade.

Exemplo 3.19 (IEZZI, 2004, p. 66). Um conjunto de sofás é vendido a prazo em 5 prestações mensais de R$400,00 cada uma, sendo a primeira um mês após a compra. Se o pagamento for à vista, o preço cobrado é R$ 1.750,00. Qual a melhor alternativa de pagamento de um comprador que consegue aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de juros compostos igual a 2% a.m.?
Para podermos comparar as duas alternativas, temos de obter o valor atual das duas alternativas e escolher a de menor valor atual. Evidentemente o valor atual do pagamento à vista é R$1.750,00.

O Valor atual (V) do pagamento a prazo é dado por:

$$V = \frac{400}{(1,02)} + \frac{400}{(1,02)^2} + \frac{400}{(1,02)^3} + \frac{400}{(1,02)^4} + \frac{400}{(1,02)^5}.$$

Então $V = 392,16 + 384,47 + 376,93 + 369,54 + 362,29 = 1.885,39.$

Como o valor atual do pagamento à vista é menor do que o valor atual do pagamento a prazo, a melhor alternativa é o pagamento à vista.

3.4.2 Séries Uniformes

“Pagamentos periódicos, em ocasiões diversas é chamado de série, ou anuidade (apesar do nome, nada tem a ver com ano) ou renda”, Morgado e Carvalho (2015, p. 92). Caso os pagamentos se deem em intervalos de tempo iguais, a série é denominada uniforme.

Considerando um valor financiado A que deve ser pago em prestações iguais de valor P nas datas 1, 2, 3, ..., n a uma taxa de juros compostos i cobrada por período de tempo. O valor da série na data zero, conforme esquematizado, é:

$$\begin{array}{cccccc} & P & P & P & \cdots & P \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array}$$

Indicando o valor atual das prestações, A, à taxa i, temos $A = \dfrac{P}{(1+i)^1} + \dfrac{P}{(1+i)^2} + $
$+ \dfrac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \dfrac{P}{(1+i)^n}.$

A expressão deve ser vista como os termos de uma Progressão Geométrica finita, de razão $q = \dfrac{1}{1+i}$ e primeiro termo $\dfrac{P}{1+i}$, aplicando a fórmula da soma de *n* termos da P.G. finita, temos $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)}$, assim,

$$A = \frac{\dfrac{P}{(1+i)}\left[\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\dfrac{1}{1+i} - 1} = P \cdot \frac{\dfrac{1}{(1+i)}\left[\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\dfrac{1-(1+i)}{1+i}}, \text{ logo,}$$

$$A = P \cdot \frac{\left[\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{-i} = P \cdot \frac{\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]}{i}.$$

Assim, podemos escrever $\boxed{A = P \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}}$.

Fórmula essa que possibilita calcular valor atual, prestação, taxa de juros e número de prestações.

A seguir apresentaremos três exemplos de séries uniformes que são bastante úteis na fixação do conceito, bem como servem de modelo para utilização da fórmula.

Exemplo 3.20 (IEZZI, 2004, p. 69-70). Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R$ 1.400,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor do empréstimo sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% a.m.?
Solução: O empréstimo deve ser pago em 12 prestações mensais uniformes, sem entrada, conforme esquema abaixo:

	R$1.400,00	R$1.400,00	R$1.400,00	$\cdots$	R$1.400,00
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdots$	$\uparrow$
0	1	2	3	$\cdots$	12

Assim, temos $R = 1.400$, $n = 12$ e $i = 3\%\ a.m.$

O valor do empréstimo corresponde ao valor atual desse pagamentos, que, conforme a fórmula dada, dessa maneira vale $V = 1.400 \cdot \dfrac{(1,03)^{12} - 1}{(1,03)^{12} \cdot 0,03} = 13.935,61.$

Portanto, o valor emprestado pelo banco foi de R$ 13.935,61.

Exemplo 3.21 (IEZZI, 2004, p. 70). Uma loja vende uma televisão por R$ 1.200,00 à vista ou financia essa quantia em 5 prestações mensais iguais sem entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos cobrada for 2,5% a.m.?
Solução: Chamando de R o valor de cada prestação, os pagamentos podem ser representados pela figura abaixo:

	R	R	R	R	R
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
0	1	2	3	4	5

Temos $V = 1.200$, $n = 5$ e $i = 2,5\%a.m.$
Portanto temos $1.200 = R \cdot \dfrac{(1,025)^5 - 1}{(1,025)^5 \cdot 0,025}$ podemos escrever $1.200 = R \cdot 4,645828$, ou seja, $R = \dfrac{1.200}{4,645828} = 258,30.$

Assim, cada prestação mensal deve valer R\$258,30.

Exemplo 3.22 (IEZZI, 2004, p. 70). Qual será o valor de cada prestação do exemplo anterior (Exemplo 3.21) se a loja cobrar uma entrada de R\$300,00?
Solução:
Nesse caso o valor financiado passa a ser R\$ 900,00 ($1.200 - 300$), assim, $V = 900$, $n = 5$ e $i = 2,5\%$, portanto $900 = R \cdot \dfrac{(1,025)^5 - 1}{(1,025)^5 \cdot 0,025}$, então $900 = R \cdot (4,645828)$, ou seja, $R =$

$= \dfrac{900}{4,645828} = 193,72.$

Logo o valor de cada prestação será R\$193,72.

3.4.3 Montante de uma Série Uniforme de Depósitos

O tema cuida de depósitos em série, em intervalos de tempos iguais, em fundos de investimento ou aplicações existentes no mercado. Tratando-se de n depósitos mensais iguais R, nas datas 1, 2, 3, ..., n, rendendo juros compostos, à taxa i mensal, conforme esquematizado abaixo. Para encontrarmos o montante M dos depósitos na data n, imediatamente após o depósito.

	R	R	R	$\cdots$	R
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdots$	$\uparrow$
0	1	2	3	$\cdots$	n

Dessa maneira, temos que:

- o montante do 1º depósito na data n: $R \cdot (1+i)^{n-1}$;
- o montante do 2º depósito na data n: $R \cdot (1+i)^{n-2}$;
- o montante do 3º depósito na data n: $R \cdot (1+i)^{n-3}$;
- e assim por diante quantos aos demais depósitos.

Em consequência, temos $M = R \cdot (1+i)^{n-1} + R \cdot (1+i)^{n-2} + R \cdot (1+i)^{n-3} + \cdots + R.$

Verifica-se que se trata de uma Progressão Geométrica de razão $q = \dfrac{1}{1+i}$ e o primeiro termo é $a_1 = R \cdot (1+i)^{n-1}$.

Aplicando-se a soma dos termos de uma P.G. finita, temos

$$M = \frac{R\cdot(1+i)^{n-1}\left(\dfrac{1}{(1+i)^n}-1\right)}{\dfrac{1}{1+i}-1} = R\cdot\frac{\dfrac{1}{1+i}-(1+i)^{n-1}}{\dfrac{-i}{1+i}} = R\cdot\frac{\dfrac{1-(1+i)^n}{1+i}}{\dfrac{-i}{1+i}} =$$
$$= R\cdot\frac{1-(1+i)^n}{-i}.$$

Sendo assim, podemos escrever a fórmula $\boxed{M = R\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i}}$.

A aplicação da fórmula, acima, pode ser vista no exemplo a seguir.

Exemplo 3.23 (IEZZI, 2004, p. 74). Uma pessoa deposita mensalmente R$ 600,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual será seu montante no instante imediatamente após o 30º depósito? Solução:

Temos, $R = 600$, $n = 30$ e $i = 1,5\%$, portanto $M = 600\cdot\dfrac{(1,015)^{30}-1}{0,015} =$ $= 22.523,21.$

Sendo assim, é possível, a partir do exemplo, conhecendo-se a taxa de juros da aplicação e a quantia que se deseja depositar por determinado tempo, calcular o montante que será obtido ao final do período.

Proveitosos são esses cálculos, principalmente, para quem busca projetar formas de acumular capital.

3.4.4 Renda Postecipada

A série uniforme de pagamentos periódicos[8] é chamada de **renda postecipada** em que o primeiro pagamento ocorre um período após o início do negócio. Postecipadas podem ser ditas vencidas, pois os termos ocorrem ao final de cada período.

	R	R	R	$\cdots$	R	R
0	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdots$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\downarrow$	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
A						

Sendo A o valor da renda; R o termo do pagamento, n o número de termos e i é a taxa de juros.

Tomando a data focal[9] 0(zero), temos

$$A = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n}.$$

[8] Periódico vem a ser: se os intervalos entre dois termos sucessivos for constante.

[9] **Data focal** é para qual os termos são transportados.

Como visto em item anterior, essa soma é de termos de uma PG, sendo assim, $\boxed{A = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}}$.

3.4.5 Renda Antecipada

É chamada de renda antecipada a série uniforme de pagamentos periódicos cujo primeiro pagamento acontece no ato da realização do negócio:

$$
\begin{array}{ccccccc}
R & R & R & R & \cdots & R & R \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow \\
\hline
\downarrow & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
\text{A} & & & & & &
\end{array}
$$

As séries uniformes de pagamentos antecipadas são as que o primeiro pagamento ocorre na data focal 0 (zero). Também conhecido como pagamento com entrada $(1+n)$. Sendo assim,
temos $\boxed{A = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \cdot i}}$.

3.4.6 Renda Diferida

É uma série uniforme de pagamentos com prazo de carência. Pagamentos periódicos em primeiro pagamento ocorre em $n+1$ períodos após o início do negócio, com carência de n períodos. O diagrama de fluxo de caixa pode ser assim representado:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & R & R & R & R \\
0 & | & | & | & | & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\hline
\downarrow & 1 & 2 & 3 & \cdots\ n & n+1 & n+2 & n+3 & n+n \\
A & & & & & & & &
\end{array}
$$

Donde se conclui que para o cálculo da renda (A), temos
$\boxed{A = \dfrac{R \cdot \left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}{(1+i)^{c-1}}}$.
Sendo c a carência.

3.5 INFLAÇÃO

Inflação é o crescimento dos preços dos bens e serviços. Os brasileiros sabem bem essa definição pelo fato da maioria adulta da população ter vivenciado, de uma forma ou de outra, os efeitos deletérios que causa nas finanças do País e das famílias em geral.

De sorte que, ao longo do tempo a moeda perde o poder de compra, necessitando de cálculos que indiquem a realidade dos negócios.

A título de ilustração, suponhamos a aquisição de um bem no valor de R$ 100.000,00, em data qualquer, posteriormente vendido, 2 anos depois, por R$120.000,00. Considerando um cenário de inflação no patamar de 30%.

Em princípio, poder-se-ia afirmar que o ganho de capital (ou lucro) obtido na operação de venda do bem foi no valor de R$ 20.000,00 ($= 120.000,00 - 100.000,00$). Quando na verdade, esse ganho é aparente ou nominal (com a previsão de inflação embutida), nos ensinamentos de (ASSAF NETO, 2003, p. 120-121; MATHIAS; GOMES, 2016, p. 347-348), em decorrência do aumento dos preços de mercado do bem, sem se constituir em valorização real deste.

Destarte, tão somente atualizando-se o valor original do bem pela taxa inflacionária do período, sem obtenção de lucro, temos: $R\$100.000,00 \times (1+0,30) = R\$130.000,00$. É dizer: esse é valor do bem se considerada apenas a inflação do período. Para se auferir um ganho, lucro, o preço de venda tem de ser acima de R$130.000,00. A ocorrência denota que houve um prejuízo real no valor de R$10.000,00 ($= 120.000,00 - 130.000,00$). Dito isto, o ganho nominal foi de 20%, ou seja: $\frac{R\$120.000{,}00}{R\$100.000{,}00} - 1$.

Ao se considerar a inflação do período de 30%, temos: $\frac{R\$120.000{,}00}{R\$130.000{,}00} - 1$, sendo a taxa real de $-7,69\%$.

A diferenciação entre taxas é importante para regimes inflacionários. A taxa de inflação corresponde ao aumento generalizado de preços.

Taxa nominal ou aparente, na dicção de Assaf Neto (2003), é:

> A taxa *nominal* de juros é aquela adotada normalmente nas operações correntes de mercado, incluindo os efeitos inflacionários previstos para o prazo da operação. constitui-se, em outras palavras, numa taxa prefixada de juros, que incorpora as expectativas da inflação. (ASSAF NETO, 2003, p. 131)

De maneira que o cenário da economia tem influência direta na determinação da taxa nominal. As projeções dos preços são determinantes, nesse caso, pelo fato não poder haver perdas para investidores ou demasiado prejuízo para devedores.

Leciona Assaf Neto (2003) que Taxa real é:

> Em contexto inflacionário, ainda, devem ser identificadas na taxa *nominal*(prefixada) uma parte devida à inflação, e outra definida como legítima, *real*, que reflete “realmente”os juros que foram pagos ou recebidos. Em consequência, o termo *real* para as operações de Matemática Financeira denota um resultado apurado livre dos efeitos inflacionários. Ou seja, quanto se ganhou

> (ou perdeu) verdadeiramente, sem interferência das variações verificadas nos preços. (ASSAF NETO, 2003, p. 131-132)

A taxa real é resultado do ajuste feito em entre o que projetou na determinação da taxa nominal e o que de fato ocorreu. Quanto mais próxima da taxa nominal melhor para economia, pois quer dizer que a variação dos preços dos produtos não foi elevada.

Sendo parte em decorrência da inflação e parte dos juros realmente incididos. Adotando-se um capital inicial (C_0), sendo a taxa **aparente** (i), a taxa **real** (r) e a taxa de **inflação** (j), podemos verificar o comportamento da taxa **real** com e sem inflação. Assim:

a- Sem inflação, $i = r$, sem perda inflacionária:

$C_1 = C_0(1+i),$ sendo o mesmo valor, independente da ocasião, então:

$C_1 = C_0(1+i) = C_0(1+r),$ desse modo, temos que: $i = r.$

b- Com inflação, o montante nominal será:

$$C_1 = C_0\ (1+i). \tag{3.1}$$

Ocorre que há outra componente além da taxa real, que é a inflação com taxa (j). O montante (C_1') é o capital inicial (C_0) inflacionado:

$$C_1' = C_0\ (1+j). \tag{3.2}$$

A valorização real é obtida advém do montante (C_1') aplicado à taxa de juros (r) produzindo o montante ($C"_1$), igual ao montante(C_1) aplicado à taxa aparente (i):

$$C"_1 = C_1'\ (1+r). \tag{3.3}$$

Substituindo-se nesta expressão o valor de C_1', de (3.2), temos:

$$C"_1 = C_0\ (1+j)\ (1+r).$$

Como o valor de $C"_1$ é o mesmo de C_1, da equação (3.1), constituindo-se no valor efetivamente recebido, implica:

$$C_1 = C"_1.$$

Daí: $C_0\ (1+i) = C_0\ (1+j)\ (1+r)$, assim $(1+i) = (1+j)\ (1+r)$.

Finalmente, dividindo-se ambos membros da equação acima por $(1+j)$ obtemos $1 + r = \dfrac{(1+i)}{(1+j)}$.

Tal que a taxa de juros real (r) fica assim $\boxed{r = \dfrac{(1+i)}{(1+j)} - 1}$.

Instrumento valioso a ser utilizado quando se necessita saber a taxa real da operação, num ambiente econômico inflacionado.

Exemplo 3.24 (ASSAF NETO, 2003, p. 137). A taxa nominal de juros explicitada num empréstimo é de 42% ao ano. Tendo ocorrido uma variação de 18% nos índices de preços neste mesmo período, determinar a taxa real anual de juros do empréstimo.
Solução:

$$r = \frac{1+i}{1+j} - 1 = \frac{1+0,42}{1+0,18} - 1 = \frac{1,42}{1,18} - 1 = 20,3\%.$$

Concluindo-se que a taxa real é de 20,3%, bem inferior à taxa nominal.

Exemplo 3.25 (MATHIAS; GOMES, 2016, p. 361-362). Calcular a taxa aparente anual que deve cobrar uma financeira para que ganhe 8% a.a. de juros reais na seguinte hipótese de inflação: 5% a.a.
Solução:
Temos: $r = 8\%$ a.a.; $j = 5\%$ a.a.; e $i = ?$

Então $(1+i) = (1+j)\ (1+r) = (1+0,05)\ (1+0,08) = 1,134.$. Assim, $i = 0,134$, ou seja, $13,4\%$ a.a.

Portanto, se a inflação for de 5% a.a. e a financeira quiser ganhar 8% a.a. de juros reais, ela deverá cobrar a taxa aparente de $13,4\%$ a.a. de seus clientes.

Exemplo 3.26 (MATHIAS; GOMES, 2016, p. 362). A taxa de juros para aplicações de curto e médio prazos, em um banco, é de 40% a.a. Que remuneração real recebe um cliente, se a inflação for de: 30% a.a.
Solução:
Temos: $i = 40\%$ a.a.; $j = 30\%$ a.a. e $r = ?$

Então $(1+i) = (1+j)\ (1+r)$, atribuindo-se os valores dados, $(1+0,40) = (1+$ $+\,0,30)(1+r)$, implica que $(1+r) = \dfrac{1,40}{1,30} = 1,076923$, obtemos $r = 0,076923 \cong$ $\cong 7,69\%$ a.a.

Percebe-se que a taxa aparente a $7,69\%$ a.a. é muito inferior à taxa nominal de 40% a.a. paga pelo banco.

Com isso, encerramos uma importante etapa do trabalho. Foram abordados os principais e fundamentais temas que podem auxiliar cidadãos a lidar com situações que se deparam num cenário de operações financeiras costumeiras. Sem perder de vista outros temas que serão abordados a seguir.

4 FINANCIAMENTO IMOBILIÁRIO

A aquisição de moradia é um dos principais objetivos das famílias brasileiras. O financiamento de longo prazo para imóveis, é de aproximadamente 20 anos. Isso se deve a fatores que podem ser atribuídos à cultura que perpassa gerações, independente do cenário econômico. O comentário de Cerbasi (2004) expressa de maneira sucinta o que ocorre com os brasileiros economicamente ativos:

> Com exceção de poucos felizardos que ganham uma casa de presente dos pais, existem basicamente três opções para a definição da moradia: comprar, alugar ou construir a própria casa.
>
> O tradicional conselho de família diz que comprar um imóvel é melhor do que alugar. Cuidado: esse era um conselho muito bom na época em que as taxas de inflação eram elevadas e o mercado financeiro não oferecia alternativas de investimento que acompanhassem a inflação. Comprar pode ser o pior negócio, a não ser que a moradia esteja em local com grande potencial de valorização, esteja abaixo do valor de mercado ou quando o casal dispõe de recursos no Fundo de Garantia[1] suficientes para pagar significativa parte do valor do imóvel - pelo menos 30%. (CERBASI, 2004, p. 55-56)

Embora o objetivo precípuo da presente pesquisa seja capacitar estudantes para agirem racionalmente em face de situações de financiamento comuns a todas as pessoas que desejam adquirir bens, a apresentação de outras alternativas se faz necessárias. É, também, conveniente a apresentação de elementos críticos que, não se constituam em cálculos matemáticos apenas, possibilitem realçar a importância do domínio de fórmulas matemáticas que estão por trás do oferecimento de custeio por parte das instituições financeiras. Nessa esteira de raciocínio Cerbasi (2004) ensina:

> Muitos adultos que sabem usar os serviços bancários de maneira responsável aprenderam a fazê-lo depois de cometer erros graves e perder boa parte de seus recursos para os bancos. Um exemplo comum é a compra da casa própria através de um financiamento de 20 anos. A sensação de quitar o plano é maravilhosa, mas invariavelmente traz a constatação de que o mutuário pagou muito mais do que a casa valia.(CERBASI, 2011, p. 119)

“Perceba que uma pessoa ao optar pela compra de um imóvel financiado, enterra-se em um ciclo da sobrevivência cuja rotina é difícil de quebrar”, alertam Barbosa e

[1] Fundo de Garantia por Tempo de Serviço. Designa-se o depósito financeiro, a favor do empregado optante, à base da remuneração paga no mês anterior, e assim sucessivamente. O trabalhador fará jus ao levantamento da importância depositada quando do seu desligamento do emprego sem justa causa, nas condições estabelecidas em lei.(SILVA, 2009, p. 648)

Cerbasi (2009, p. 223). Aduzem ainda que, até certo ponto, as decisões em torno do orçamento familiar são matemáticas.

E o assunto não se esgota por aí, há em livros de finanças domésticas conselhos a respeito do tema: aquisição da casa própria. Carrilho (2012) fala sobre a decisão de adquirir imóvel financiado:

> No momento de investir num imóvel, é necessário ponderar a compra. No caso de um jovem, com apenas alguns anos de trabalho, não recomendo a compra de uma casa própria. Como existe muita precariedade no trabalho e grande necessidade de movimentação, prender-se a uma casa pode limitar o futuro profissional - ou financeiro. (CARRILHO, 2012, p. 41)

Com base neste raciocínio, é válido enfatizar que o financiamento a longo prazo é decisão a ser tomada com as maiores cautelas possíveis. Nesse trabalho busca-se proporcionar conhecimentos que atenderão o indivíduo numa das etapas do processo, talvez a penúltima (cálculos e orçamento). Decisões subjetivas permeiam a aquisição da casa própria, sem se olvidar que o âmago de tudo são questões de matemática financeira, com projeção direta no orçamento de famílias, permitindo conjecturar que se relaciona, também, ao bem-estar e felicidade de pessoas. Em complemento à advertência de Carrilho (2012), acima mencionado, Soares e Alvim (2007) fornecem preciosa dica:

> É um sonho de todos conseguir comprar a casa própria. E este sonho deve ser perseguido. Nesse caso, vale a dica: por que não tentar morar de aluguel durante algum tempo e poupar a diferença entre uma prestação de casa própria e o aluguel? Em menos tempo do que você espera poderá pagar à vista pelo imóvel desejado.
>
> [...]
>
> E, quando falamos de imóveis, comprar à vista é sempre melhor. Podemos negociar melhor preço e fugir das taxas de juros (e taxa de juros no longo prazo costuma causar estrago gigantesco!) (SOARES; ALVIM, 2007, p. 85)

São informações úteis para as pessoas com a finalidade de se tomar decisões inteligentes e mais vantajosas. Dito isto, passaremos a apresentar definições importantes sobre o financiamento imobiliário.

4.1 SISTEMAS DE FINANCIAMENTO

Para um bom entendimento sobre financiamento imobiliário é fundamental conhecer os sistemas de financiamento, onde estão disponíveis e suas sistemáticas de funcionamento. Existem dois sistemas de financiamento, com suas peculiaridades, o Sistema Financeiro de Habitação e Sistema de Financiamento Imobiliário.

O **SFH** é o Sistema de Financeiro de Habitação destinado a facilitar e promover a construção e a aquisição da casa própria ou moradia, especialmente pelas classes de menor renda da população (art. 8º da Lei nº 4.380, de 21 de agosto de 1964)[2]. No SFH há intervenção direta do Governo Federal nos aspectos do financiamento.

O **SFI** é o Sistema de Financiamento Imobiliário, cujas as condições são definidas pelos agentes financeiros que o disponibilizam. O SFI tem por finalidade promover o financiamento imobiliário em geral, segundo condições compatíveis com as da formação dos fundos respectivos (art. 1º da Lei nº 9.514, de 20 de novembro de 1997)[3]. Em comum com o SFH, possui a destinação de facilitar e promover a aquisição da casa própria, pela população de baixa renda, através de financiamento a longo prazo.

4.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

As definições dos termos relacionados a custeios imobiliários, usualmente utilizados no jargão financeiro, conforme Mathias e Gomes (2016), são de importância relevante para se ter maior clareza na interpretação das operações de financiamento.

- **Mutuário ou devedor**: aquele que recebe o empréstimo ou financiamento.
- **Mutuante ou credor**: é aquele que dá o empréstimo ou abre o financiamento.
- **Amortização**: refere-se unicamente ao pagamento do principal (capital emprestado), mediante parcelas periódicas de acordo com o prazo contratado.
- **Encargos**: representam os juros, tarifas de administração e prêmios de seguro.
- **Prestação**: é o valor que representa a soma da amortização mais encargos financeiros devidos. Desse modo: *Prestação= Amortização + Encargos financeiros*.
- **Saldo Devedor**: é o valor financiado, em determinado momento, após a subtração do valor amortizado.
- **Taxa de Juros**: refere-se ao valor que remunera o dinheiro emprestado. Usualmente na forma anual.
- **Prazo de Amortização**: é o intervalo de tempo, que no decorrer são pagas as amortizações.

(MATHIAS; GOMES, 2016, p. 284, destaques do autor.)

Das definições apresentadas, muitas delas serão usadas, no presente capítulo 4, sendo importantes para compreender determinados termos utilizados nos sistemas de amortização de financiamentos.

---

[2] Lei 4.380-21/08/1964 (e suas alterações) disponível no link: https://www.planalto.gov.br/

[3] Lei 9.514-20/11/1997 (e suas alterações) disponível no link: https://www.planalto.gov.br/

4.3 MODALIDADES DE AMORTIZAÇÃO

Os sistemas de amortizações foram criados com a finalidade de possibilitar operações de financiamento de longo prazo, voltados para desembolsos periódicos do principal e encargos financeiros.

A maneira de amortizar a dívida vai depender do que foi contratado entre credor e devedor, com cada um dos sistemas relacionando o fluxo de recursos dentro de critérios preestabelecidos.

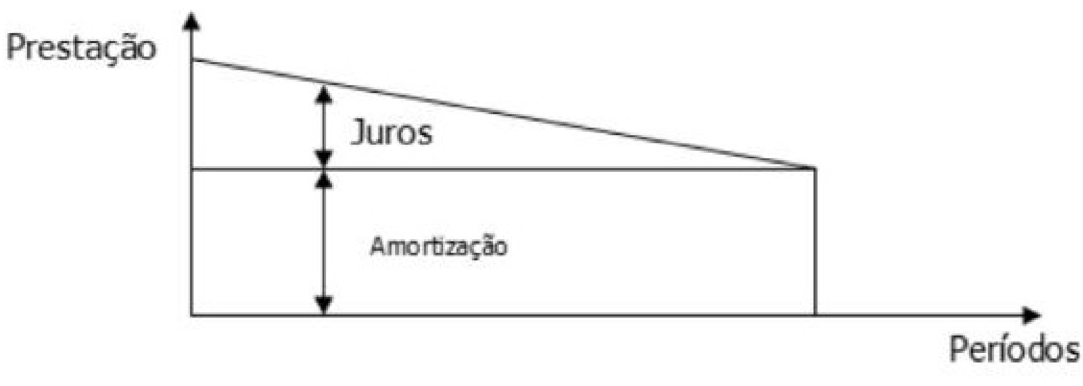
De início, serão apresentados os atuais sistemas de amortização existentes e utilizados pelas instituições financeiras.

Cabe destacar que, cada pagamento realizado tem duplo objetivo, quitando, proporcionalmente, o valor financiado e os juros. Os sistemas de amortização apresentam métodos diferentes justamente no que tange à quitação do débito, com foco na proporção entre a quantia abatida e juros pagos ao longo do período.

Característica que merece menção destacada a respeito de sistemas de amortização é a utilização exclusiva de juros compostos, incidindo sobre o saldo devedor apurado no período imediatamente anterior. Os gráficos, abaixo, têm por finalidade ilustrar a sistemática:

- **Sistema de Amortização Constante (SAC)**: é caracterizado por amortizações constantes. Os juros são calculados, a cada período, sobre o saldo devedor existente. Graficamente fica assim:

Figura 3 – Sistema de Amortização Constante - SAC

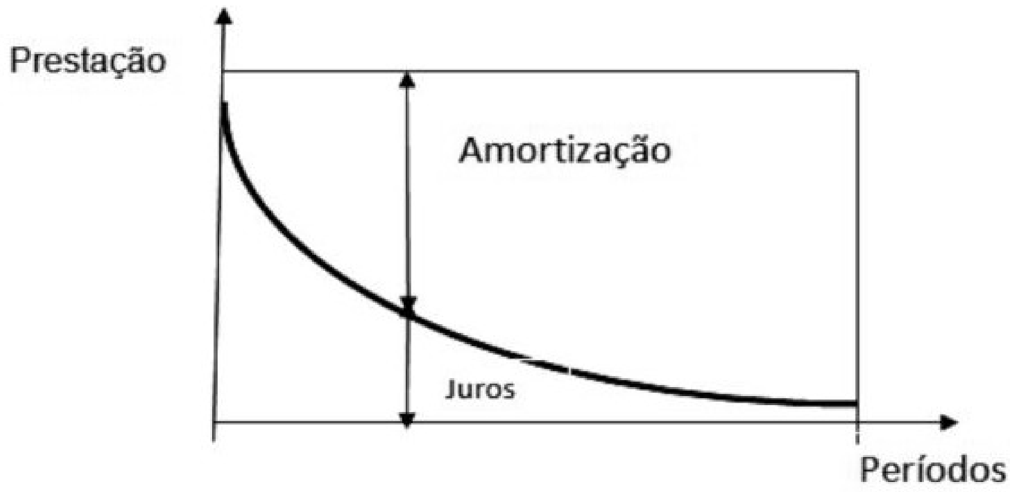


Fonte: Mathias; Gomes (2016).

As prestações diminuem com o passar dos períodos.

- **Sistema Francês**: As prestações são constantes, havendo rateio entre juros e amortização do principal. A dívida é quitada na última prestação. Graficamente temos:

Figura 4 – Sistema de Amortização Francês - SAF

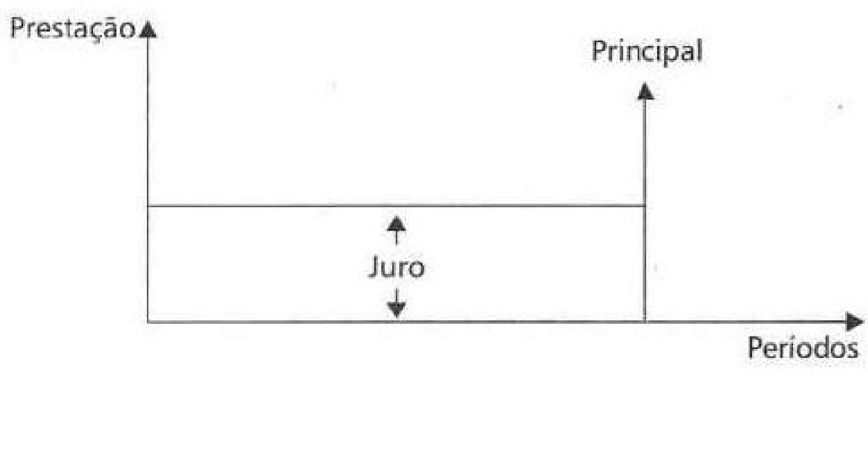


Fonte: Mathias; Gomes (2016).

É conhecido também como Sistema Price.

- **Sistema Americano**: Após o prazo contratado, o devedor paga, através de parcela única, valor tomado por empréstimo. Sendo comum que, ao longo do período contratado, o devedor pague juros.

Figura 5 – Sistema de Amortização Americano - SAA

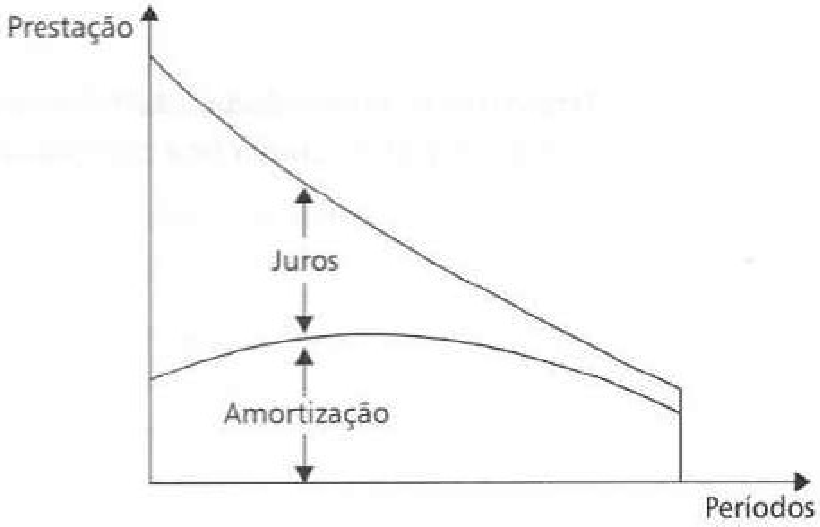


Fonte: Mathias; Gomes (2016).

O devedor pode constituir um fundo de recursos e gerar um montante equivalente ao financiamento para quitar a dívida. É chamado de fundo de amortização.

- **Sistema de Amortização Variável**: As parcelas de amortização são contratadas e os juros calculados sobre o saldo devedor.

Figura 6 – Sistema de Amortização Variável - SAV



Fonte: Mathias; Gomes (2016).

Resumidamente e de forma genérica, foram apresentados os sistemas de amortização mais comuns utilizados pelas instituições financeiras nas operações de financiamento em geral.

4.4 FINANCIAMENTO IMOBILIÁRIO - SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Não obstante a existência dos quatro sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos, apresentados resumidamente no item anterior, o fato é que no Brasil são adotados, comumente, para financiamento imobiliário o Sistema de Amortização Constante, o Sistema de Francês de Amortização e o Sistema de Amortização Crescente. Na literatura de Matemática Financeira, a respeito do assunto, predominam duas sistemáticas de pagamento do financiamento imobiliário: Sistema de Amortização Constante e o Sistema de Francês de Amortização.

O Banco Central do Brasil (2017), por meio do Relatório de Estabilidade Financeira, especifica a necessidade da adoção obrigatória do SAC:

> Conforme estabelece a Lei nº 8.177, de 1º de março de 1991, os financiamentos imobiliários concedidos com recursos de depósitos de poupança devem ter como índice de atualização do saldo devedor e das prestações dos contratos a mesma taxa aplicável à remuneração básica dos depósitos de poupança, definida nessa Lei como sendo a Taxa Referencial (TR), calculada e divulgada pelo BC, segundo metodologia definida pelo CMN. Nos

> termos da Lei nº 4.380, de 1964, esses financiamentos podem ter seus sistemas de amortização livremente pactuados entre as partes, sendo obrigatório o oferecimento ao mutuário do Sistema de Amortização Constante (SAC) e de, no mínimo, outro sistema de amortização que atenda aos requisitos da referida Lei, entre eles o Sistema de Amortização Crescente (Sacre) e o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price).
>
> Nos últimos anos, verificou-se uma disseminação do uso da Tabela Price, que, conjugada com o cenário de restrição monetária experimentado entre 2013 e 2015, período em que os índices de atualização usuais dos contratos apresentaram crescimento considerável, ocasionou aumentos nominais dos saldos devedores de parte dos financiamentos originados em período anterior ou no início do aperto monetário, bem como maior exposição dos mutuários ao risco de atrasos e de inadimplementos. Os aumentos nominais dos saldos devedores foram identificados e monitorados, com indicativo para proposição de medida de mitigação desse risco. (BRASIL, 2017, p. 51)

A previsão do Sistema de Amortização Constante (SAC) e mais um, no mínimo, podendo ser Sistema Francês de Amortização (SFA ou Tabela Price) ou Sistema de Amortização Crescente (SACRE), como está estabelecida no art. 15B, da Lei nº 4.380, de 21 de agosto de 1964, incluído em 2009 pela Lei nº 11.977/2009:

> Nas operações de empréstimo ou financiamento realizadas por instituições integrantes do Sistema Financeiro da Habitação que prevejam pagamentos por meio de prestações periódicas, os sistemas de amortização do saldo devedor poderão ser livremente pactuados entre as partes. (Incluído pela Lei nº 11.977, de 2009)
>
> § 1o O valor presente do fluxo futuro das prestações, compostas de amortização do principal e juros, geradas pelas operações de que trata o caput, deve ser calculado com a utilização da taxa de juros pactuada no contrato, não podendo resultar em valor diferente ao do empréstimo ou do financiamento concedido. (Incluído pela Lei nº 11.977, de 2009)
>
> § 2o No caso de empréstimos e financiamentos com previsão de atualização monetária do saldo devedor ou das prestações, para fins de apuração do valor presente de que trata o § 1o, não serão considerados os efeitos da referida atualização monetária . (Incluído pela Lei nº 11.977, de 2009)
>
> § 3o Nas operações de empréstimo ou financiamento de que dispõe o caput é obrigatório o oferecimento ao mutuário do Sistema de Amortização Constante - SAC e de, no mínimo, outro sistema de amortização que atenda o disposto nos §§ 1o e 2o, entre eles o Sistema de Amortização Crescente - SACRE e o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price). (Incluído pela Lei nº 11.977, de 2009). (BRASIL, 1964, art. 15B)

Ressalte-se que a opção pelo SAC ou SACRE pode render vantagens financeiras, como está previsto pelo Banco Central do Brasil através do § 1º do art. 6º da Resolução nº 4.676, de 31 de julho de 2018:

> A razão entre o valor nominal da operação de financiamento imobiliário, compreendendo principal e despesas acessórias, e o valor de avaliação do imóvel dado em garantia, na data da contratação, não pode ser superior a: I - 80% (oitenta por cento), nas operações de: a) financiamento para aquisição de imóvel residencial; b) financiamento a pessoa natural para construção de imóvel residencial; e II - 60% (sessenta por cento), nas operações de empréstimo a pessoa natural garantidas por imóveis residenciais (home equity). Parágrafo único. (Revogado pela Resolução nº 4.837, de 21/7/2020.) § 1º O valor nominal de que trata o inciso I do caput, compreendendo principal e despesas acessórias, poderá ser de até 90% (noventa por cento) do valor de avaliação do imóvel, no caso de utilização do Sistema de Amortização Constante (SAC) ou do Sistema de Amortização Crescente (Sacre). (BRASIL, 2018b, art. 6º)

Dessa maneira, fica assentado que financiamentos imobiliários estão cingidos aos: SAC, SAF e SACRE.

Na sequência, serão apresentados os sistemas de amortização voltados para o financiamento imobiliário de suma importância para a presente pesquisa, em concordância com o explanado nos capítulos precedentes.

4.4.1 Saldo Residual de Financiamento Imobiliário

A formação de saldo devedor ou residual ao final dos financiamentos imobiliários se deve ao fato de que a correção monetária desencontrada entre a prestação e o saldo devedor. É dizer a correção das amortizações e saldo devedor têm de estarem sujeitas ao mesmo índice de correção. Os financiamento de longo prazo ficam mais sujeitos à formação de saldos residuais.

Nas palavras de Prata (2017) a ocorrência restringe-se a casos específicos de correções monetárias diferentes para saldo devedor, prestação e amortização:

> Isso somente acontecerá se houver um descasamento entre a correção monetária que é aplicada ao seu saldo devedor e as prestações que paga mensalmente. Imagine uma situação onde o banco ofereça uma prestação fixa no financiamento, mas cujo saldo devedor seja corrigido por algum indexador. Ao final do financiamento, o que você pagou mensalmente não terá sido suficiente para quitar o saldo devedor e, portanto, haverá um saldo residual a ser pago. Isso aconteceu nas décadas de 80 e 90, onde as prestações dos financiamentos eram corrigidas por um índice e o saldo devedor por outro. Isso gerou um fato

> que ainda assombra muitos como seu amigo, que ao término do financiamento o saldo devedor era igual ou ás vezes até maior do que o valor inicial da dívida. Embora, desde então, não tenha sido mais uma prática do mercado financeiro adotar o modelo descasado de correção monetária, o Conselho Monetário Nacional, em novembro de 2016, promoveu ajustes na Resolução 4.537 que trata das condições do Sistema Financeiro da Habitação (SFH). A resolução diz que "as condições contratuais devem prever a utilização de sistemas de amortização das operações no âmbito do SFH que assegurem a liquidação integral, em cada pagamento das prestações devidas, dos valores relativos aos juros contratuais e à atualização incidentes sobre o saldo devedor no período. (PRATA, 2017, p. 1)

Desse modo, deve-se ter atenção nas cláusulas contratuais com a finalidade de se evitar que após longos anos de pagamento de um financiamento, ainda surja débito residual. Como dito acima, a correção monetária deve ser igual para o saldo devedor e prestações.

4.4.2 Sistema de Amortização Constante - SAC

O Sistema de Amortização Constante (SAC), também chamado Sistema Hamburguês, foi introduzido no Brasil, a partir de 1971, pelo Sistema Financeiro de Habitação (SFH). Tem como característica marcante o fato das amortizações do principal serem iguais (constantes) ao longo do período da operação financeira. O valor da amortização é obtido através da divisão do total do financiamento pelo número de prestações contratadas.

Os juros são cobrados sobre o saldo devedor e a amortização é constante, o montante decresce após cada pagamento. Por isso, as prestações periódicas e sucessivas são decrescente em progressão aritmética.

Com intuito de facilitar o entendimento, vamos ao exemplo, abaixo. No qual a planilha é representativa do SAC, temos que:

A_k (parcela de amortização), j_k (juros), P_k (prestação) e D_k (saldo devedor na ocasião k), sendo k um número natural.

Exemplo 4.27(MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 100). Uma dívida de R$100,00 é paga, com juros de 15% ao mês, em 5 meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização.

Solução: Como as amortizações são iguais, cada amortização será $\frac{1}{5}$ da dívida inicial.

- $D_0 = 100$ (Valor do financiamento); $n = 5$ meses (período); $i = 15\%$ a.m. $=$ $= 0,15$a.m (taxa de juros ao mês).

- Período 1: A primeira prestação é constituída do valor da amortização constante, como definido acima, somada à parcela corresponde ao juro de 15% sobre o valor do financiamento. Denominando o financiamento de D_0 e juros de j, temos juros referentes ao primeiro período, denominado j_1 segue que, $j_1 = i \times D_0$ então $j_1 = = 0,15 \times 100$ obtemos $j_1 = 15$.

  Sendo assim, a prestação P_1 será a soma do j_1, juros, ao final do primeiro período somado com a amortização constante, que no caso é igual a 20, ($\frac{D_0}{n}$ então $\frac{100}{5} = = 20$). Então $P_1 = A + J_1$ então $P_1 = 20 + 15$ tem-se $P_1 = 35$.

  O Saldo devedor do período 1 (D_1), imediatamente após o pagamento da primeira prestação (P_1), é o valor da dívida depois da primeira amortização, calculado assim $D_1 = D_0 - A$ então $D_1 = 100 - 20$ temos $D_1 = 80$.

- Período 2: No período 2, o procedimento é feito da mesma forma, alterando-se os valores, com o juros (j_2) são calculados sobre o saldo devedor que após o pagamento da primeira cota de amortização passou a ser 80 ($D_0 - A = 100 - 20$) ao final do primeiro período (D_1). Daí $j_2 = i \times D_1$ então $j_2 = 0,15 \times 80$ temos $j_2 = 12$.

  A prestação P_2 será a soma do juros (j_2) aplicado sobre o saldo devedor (D_1) com amortização (A) constante no valor de 20, temos $P_2 = A + j_2$ então $P_2 = = 20 + 12$ dessa forma $P_2 = 32$.

  O saldo devedor (D_2) ao final do segundo período, após pagamento da segunda prestação (P_2), será, evidentemente, a diferença entre o saldo devedor (D_1) do período anterior e a cota de amortização (A) do presente período efetuada, assim $D_2 = D_1 - A$ tem-se $D_2 = 80 - 20$ então $D_2 = 60$.

- Período 3: Os procedimentos serão os mesmos vistos nos períodos 1 e 2, mudando o que necessita ser mudado, obteremos:

  $j_3 = i \times D_2 \Rightarrow j_3 = 0,15 \times 60 \Rightarrow j_3 = 9.$

  $P_3 = A + j_3 \Rightarrow P_3 = 20 + 9 \Rightarrow P_3 = 29.$

  $D_3 = D_2 - A \Rightarrow D_3 = 60 - 20 \Rightarrow D_3 = 40.$

- Período 4: Temos:

  $j_4 = i \times D_3 \Rightarrow j_4 = 0,15 \times 40 \Rightarrow j_4 = 6.$

  $P_4 = A + j_4 \Rightarrow P_4 = 20 + 6 \Rightarrow P_4 = 26.$

  $D_4 = D_3 - A \Rightarrow D_4 = 40 - 20 \Rightarrow D_4 = 20.$

- Período 5: Observa-se que no quinto e último período, a prestação (P_5) exaure o saldo devedor, sendo constituída da cota de amortização A (igual ao D_4) mais o juros aplicado sobre o saldo devedor anterior (D_4), dessa maneira:

$j_5 = i \times D_4 \Rightarrow j_5 = 0,15 \times 20 \Rightarrow j_5 = 3.$

$P_5 = A + j_5 \Rightarrow P_5 = 20 + 3 \Rightarrow P_5 = 23.$

$D_5 = D_4 - A \Rightarrow D_5 = 20 - 20 \Rightarrow D_5 = 0.$

A tabela é, portanto:

Tabela 2 – Sistema de Amortização Constante - SAC

Período k	Prestação P_k	Amortização A_k	Juros J_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100
1	35	20	15	80
2	32	20	12	60
3	29	20	9	40
4	26	20	6	20
5	23	20	3	-

Fonte: Morgado, Wagner e Zani (2015).

Para facilitar a compreensão, olhe cada linha na ordem A_k, D_k, j_k e P_K.

Teorema: No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$$A_k = \frac{D_0}{n},\ D_k = \frac{n-k}{n} \cdot D_0,\ J_k = iD_{k-1},\ P_k = A_k + J_k$$

Sendo k indicativo do período com: $0 \leq k \leq n$ e $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.

Demonstração:

Se a dívida D_0 é amortizada em n cotas iguais, cada cota é igual a $A_k = \dfrac{D_0}{n}$.

O saldo devedor da dívida, após k pagamentos, é $D_k = D_0 - k\dfrac{D_0}{n} = \dfrac{n-k}{n}D_0$.

Segue que, $j_k = iD_{k-1}$.

Bem como, $P_k = A_k + j_k$.

Onde k informa o período da ocorrência de: juros, amortização ou prestação. Na última equação: P_k é a k-ésima prestação paga.

Recorrendo a um exemplo prático, com prazo reduzido para melhor compreensão. Uma pessoa obtém financiamento de imóvel no valor de R$ 100.000,00 para ser pago pelo Sistema de Amortização Constante em 4 prestações anuais, à taxa de 15% ao ano. Monte a planilha de amortização.

A resolução será a seguinte:

- $D_0 = 100.000$ (valor do financiamento); $n = 4$a (período); $i = 15\%$ a.a. $= 0,15$ a.a. (taxa de juros)

- Os valores da amortização são sempre iguais e obtidos por:

  $A = \dfrac{D_0}{n} \Rightarrow A = \dfrac{100.00}{4} \Rightarrow A = 25.000.$
  Onde: D_0 é o valor do financiamento; n é o número de prestações.
  Daí: $\dfrac{D_0}{n} = A_1 = A_2 = A_3 = A_4$, que chamaremos de A (amortização) apenas.

- Período 1:

  Os juros incidem sobre saldo devedor do final do período anterior. Na presente situação, sendo o primeiro período, incidirá sobre o valor total do financiamento $j_1 = i \times D_0$ então $j_1 = 0,15 \times 100.000$ dessa forma $j_1 = 15.000.$

  A prestação a ser quitada no primeiro período é o resultado da soma do valor da amortização constante com os juros encontrados acima, dessa maneira $P_1 = = A + j_1$ então $P_1 = 25.000 + 15.000$ assim $P_1 = 40.000.$

  Saldo devedor, ao final do primeiro período, será a diferença entre o saldo da dívida no início do período e a amortização paga (embutida na prestação), $D_1 = D_0 - A$ então $D_1 = 100.000 - 25.000$ temos $D_1 = 75.000.$

  A sistemática é repetida até o último período contratado, com os acertos referentes aos valores.

- Período 2:

  $j_2 = i \times D_1 \Rightarrow j_2 = 0,15 \times 75.000 \Rightarrow j_2 = 11.250.$

  $P_2 = A + j_2 \Rightarrow P_2 = 25.000 + 11.250 \Rightarrow P_2 = 36.250.$

  $D_2 = D_1 - A \Rightarrow D_2 = 75.000 - 25.000 \Rightarrow D_2 = 50.000.$

- Período 3:

  $j_3 = i \times D_2 \Rightarrow j_3 = 0,15 \times 50.000 \Rightarrow j_3 = 7.500.$

  $P_3 = A + j_3 \Rightarrow P_3 = 25.000 + 7.500 \Rightarrow P_3 = 32.500.$

  $D_3 = D_2 - A \Rightarrow D_3 = 50.000 - 25.000 \Rightarrow D_3 = 25.000.$

- Período 4:

  $j_4 = i \times D_3 \Rightarrow j_4 = 0,15 \times 25.000 \Rightarrow j_4 = 3.750.$

  $P_4 = A + j_4 \Rightarrow P_4 = 25.000 + 3.750 \Rightarrow P_4 = 28.750.$

  $D_4 = D_3 - A \Rightarrow D_4 = 25.000 - 25.000 \Rightarrow D_4 = 0.$

Importa observar que o Saldo devedor é decrescente em PA (progressão aritmética) tendo como razão o valor da amortização.

O valor dos juros reduz constantemente em decorrência da diminuição do saldo devedor, com comportamento de PA, também.

Logo, a tabela 3 discrimina os valores

Tabela 3 – Sistema de Amortização Constante - SAC

Período k	Prestação P_k	Juro j_k	Amortização A_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100.000
1	40.000	15.000	25.000	75.000
2	36.250	11.250	25.000	50.000
3	32.500	7.500	25.000	25.000
4	28.750	3.750	25.000	-
Total	137.500	37.500	100.000	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

4.4.2.1 Obtenção do Saldo Devedor

Com o que se viu no item anterior, pode-se determinar o saldo devedor.

$$D_k = D_{k-1} - A.$$

Logo, para

$k = 1 \Rightarrow D_1 = D_0 - A.$

$k = 2 \Rightarrow D_2 = D_1 - A = D_0 - A - A \Rightarrow D_2 = D_0 - 2A.$

$k = 3 \Rightarrow D_3 = D_2 - A = D_0 - 2A - A \Rightarrow D_3 = D_0 - 3A.$

Chegando à fórmula

$$\boxed{D_k = D_0 - k \times A}.$$

Para ilustrar, consideremos: um financiamento no valor de R$ 600.000,00 vai ser amortizado, através do SAC, em 12 prestações anuais, à taxa de 15% ao ano. Calcule o saldo devedor após ter sido paga a oitava prestação.

Assim temos $D_0 = 600.000$; $n = 12$ a; $i = 15\%$ a.a.$= 0,15$ a.a.; $k = 8$, como $D_k = D_0 - k \times A$.

Calculando a amortização (A) obtemos $A = \dfrac{D_0}{n} \Rightarrow A = \dfrac{600.000}{12} \Rightarrow A =$ $= 50.000,$ logo, $D_8 = D_0 - 8A = 600.000 - 8 \times 50.000 = 600.000 - 400.000 = 200.000$ então $D_8 = 200.000.$

Portanto, 200.000 é o saldo devedor.

4.4.2.2 Sistema de Amortização Constante com Prazo de Carência

Existe a possibilidade de se ofertar financiamento a ser pago pelo SAC, com previsão contratual, com prazo de carência. A carência é um período de tempo dentro do prazo total do financiamento que o devedor não precisa efetuar o pagamento de nenhuma parcela ou, em determinadas situações, pagar apenas os juros.

A carência pode ocorrer em duas possibilidades: pagamento de juros, como mencionado acima, durante o prazo de carência ou o não pagamento,sendo que os juros devidos nesse intervalo de carência incorporam-se ao capital. Trata-se na verdade de uma subcategoria do SAC, haja vista que após decorrido prazo de carência, os pagamentos ocorrem normalmente na sistemática de amortização apresentada.

A partir do exemplo, poder-se-á visualizar o funcionamento do SAC com carência. Um cidadão obtém um financiamento para aquisição de um apartamento no valor de R$ 100.000,00 a ser pago pelo SAC em 4 prestações anuais, à taxa de 15% ao ano e com um prazo de carência (m) de 3 anos. Tem por finalidade mostrar a sistemática de cálculos, nas duas modalidades, dos juros (j); prestações (P); amortizações (A) e saldo devedor (D), primeiramente, com pagamento de juros e, posteriormente, com incorporação dos juros ao saldo devedor (capitalização dos juros), com os mesmos elementos dados.

Assim temos:

- $D_0 = 100.000$ que é o valor do financiamento;

- $m = 3$ dado como prazo de carência (m);

- $n = 4$ a, número de prestações anuais;

- $i = 15\% = 0,15$ a.a como sendo a taxa de juros ao ano.

Carência com pagamento de juros:

Deve ser considerado que o valor do financiamento é disponibilizado no início do primeiro período ano, sendo as prestações e o juro pago no fim de cada ano. Para que não paire a dúvida de que o pagamento dos juros ocorra ao final da carência. Sendo assim, do início do primeiro ano ($k = 0$) até o fim do terceiro ano ($k = 2$) temos 3 períodos que correspondem à carência (m). Terminado o prazo de carência ocorre a primeira amortização. Ressaltando que a carência é de períodos e não de prestações.

E ainda, ao final do primeiro ano, o saldo devedor é D_0, o juro referente ao primeiro período (j_1) será aplicado sobre D_0 e pago em vez de prestação. Por sua vez, o juro referente ao segundo período (j_2) será calculado sobre o saldo devedor ao final do segundo ano, que também será D_0, pois não houve amortização do principal. Com isso, os juros (j_1 e j_2) serão $j_1 = j_2 = i \times D_0 = 0,15 \times 100.000$ temos $j_1 = j_2 = 15.000.$

Ressaltando que ao final do terceiro período de carência, o saldo devedor será D_0, pelo fato de não ter havido amortização, até então. Portanto os juro (j_3) será igual a j_1 e j_2. Ocorre que, nesse momento, haverá o pagamento da primeira amortização, tendo em vista que a prestação é paga no fim do ano.

- Período 3:

$j_3 = i \times D_2 \Rightarrow j_3 = 0,15 \times 50.000 \Rightarrow j_3 = 7.500.$

$P_3 = A + j_3 \Rightarrow P_3 = 25.000 + 7.500 \Rightarrow P_3 = 32.500.$

$D_3 = D_2 - A \Rightarrow D_3 = 50.000 - 25.000 \Rightarrow D_3 = 25.000.$

- Período 4:

$j_4 = i \times D_3 \Rightarrow j_4 = 0,15 \times 25.000 \Rightarrow j_4 = 3.750.$

$P_4 = A + j_4 \Rightarrow P_4 = 25.000 + 3.750 \Rightarrow P_4 = 28.750.$

$D_4 = D_3 - A \Rightarrow D_4 = 25.000 - 25.000 \Rightarrow D_4 = 0.$

A Tabela 4, abaixo, mostra os juros (j_k) são calculados e quitados ao final de cada período. A partir do 3º período o financiamento começa a ser amortizado, sendo SAC, a amortização é constante. Daí para frente a sistemática segue como num financiamento normal (tabela 2).

Tabela 4 – SAC (juros **não** incorporados ao Capital)

Período k	Prestação P_k	Juro j_k	Amortização A_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100.000
1	15.000	15.000	-	100.000
2	15.000	15.000	-	100.000
3	40.000	15.000	25.000	75.000
4	36.250	11.250	25.000	50.000
5	32.500	7.500	25.000	25.000
6	28.750	3.750	25.000	-
Total	167.500	67.500	100.000	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

A Tabela 3 demonstra, com detalhes, como ocorrem os pagamentos no caso de carência, sendo possível identificar que, nos primeiros períodos de carência houve o pagamento tão somente dos juros (R$ 15.000).

- **Carência com capitalização de juros**:

Nesse caso, não há nenhum pagamento durante o período de carência, quer seja de juros quer seja de amortização. Destaca-se que os juros decorrentes do período são incorporados ao saldo devedor (capitalização dos juros). Assim,

Período 1: O juro é calculado sobre o saldo devedor e somado a este (capitalizado), como se verifica nas expressões abaixo:

$j_1 = i \times D_0 = 0,15 \times 100.000 \Rightarrow j_1 = 15.000.$

$D_1 = D_0 + j_1 = 100.000 + 15.000 \Rightarrow D_1 = 115.000.$

Período 2: O mesmo procedimento do período anterior, assim $j_2 = i \times D_1 = 0,15 \times$ $\times\, 115.000$ desse modo, $j_2 = 17.250.$ e $D_2 = D_0 + j_2 = 115.000 + 17.250$ obtemos $D_2 = 132.250.$

Período 3:

As parcelas de amortização serão iguais:

O valor da amortização é calculado dividindo se o valor da financiamento pelo número de prestações. Na situação presente, o débito é o saldo devedor ao final do segundo período (D_2):
$A = \dfrac{D_2}{n} = \dfrac{132.250}{4} \Rightarrow A = 33.063$, sendo esse o valor de todas as amortizações.

Quanto ao juro, é calculado sobre o valor do saldo devedor do período anterior, no exemplo, sobre D_2. Então $j_3 = i \times D_2 = 0,15 \times 132.250 \Rightarrow j_3 =$ $= 19.838.$

A prestação será a soma do valor da amortização com o juro $P_3 = A + j_3 =$ $= 33.063 + 19.838 \Rightarrow P_3 = 52.901.$

Saldo devedor da dívida após o pagamento da prestação será o saldo devedor do período anterior subtraído da amortização (constante), dessa forma é $D_3 = D_2 - A = 132.250 - 33.063 \Rightarrow D_3 = 99.187.$

E assim por diante:

Período 4:

$j_4 = i \times D_3 = 0,15 \times 99.187 \Rightarrow j_4 = 14.878$ (juro).

$P_4 = A + j_4 = 33.063 + 14.878 \Rightarrow P_4 = 47.941$(prestação).

$D_4 = D_3 - A = 99.187 - 33.063 \Rightarrow D_4 = 66.124$ (saldo devedor).

Período 5:

$j_5 = i \times D_4 = 0,15 \times 66.124 \Rightarrow j_5 = 9.919.$ (juro).

$P_5 = A + j_5 = 33.063 + 9.919 \Rightarrow P_5 = 42.982$ (prestação).

$D_5 = D_4 - A = 66.124 - 33.063 \Rightarrow D_5 = 33.061$ (saldo devedor).

Período 6:

$j_6 = i \times D_5 = 0,15 \times 33.061 \Rightarrow j_6 = 4.959$ (juro).

$P_6 = A + j_6 = 33.063 + 4.959 \Rightarrow P_6 = 38.020.$ (prestação).

$D_6 = D_5 - A = 33.061 - 33.063 \Rightarrow D_6 = -2$ (saldo devedor).

Destacando-se que os juros (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 e j_6) são calculados sobre o saldo devedor no final do período anterior. A prestação é a soma do valor do juro aplicado sobre o saldo devedor do período anterior mais a amortização (constante). O saldo devedor é a diferença entre o valor da dívida no período anterior e a amortização (constante) do período.

A Tabela 5 mostra a sistemática de pagamentos, destacando-se que não houve pagamento de juros ou amortização até o fim da carência.

Tabela 5 – SAC (juros incorporados ao Capital)

Período k	Prestação P_k	Juro j_k	Amortização A_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100.000
1	-	-	-	115.000
2	-	-	-	132.250
3	52.901	19.838	33.063	99.187
4	47.941	14.878	33.063	66.124
5	42.982	9.919	33.063	33.061
6	38.020	4.959	33.061	-
Total	181.844	49.594	132.250	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Por fim, cumpre comentar que o SAC foi apresentado através de operações encurtadas, com prazos menores, valores que facilitaram os cálculos, de modo que a aprendizagem do método seja fixada. Tendo vista, ainda que, longo prazo e valores maiores demandam a repetição “k vezes”, em que k é um número natural, diga-se assim, que pode ser realizado utilizando-se de recursos informáticos, mas sempre tendo em mente quais operações a máquina está realizando com agilidade e rapidez.

4.4.3 Sistema Francês de Amortização - SFA

O Sistema Francês de Amortização (SFA) caracteriza-se pelo pagamento do financiamento por meio de prestações constantes, periódicas e sucessivas.

Pelo fato das prestações serem constantes, ao serem quitadas, a dívida é reduzida e os juros diminuem, ao passo que as amortizações aumentam de valor. É dizer, a prestação é constituída de amortização e juros, com o passar do tempo as proporções de amortização e juros se invertem. Podendo se afirmar que são inversamente proporcionais.

Desse modo, podemos ver que o financiamento obtido (D_0) é o mesmo que o valor atual de uma renda postecipada, apresentada no item 3.4.4, como uniforme de pagamentos periódicos, em que o primeiro pagamento ocorre um período após o início do negócio. Daí, podemos apresentar o esquema do financiamento do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccccccc} & P & P & P & \cdots & P & P \\ 0 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow \\ \hline \downarrow & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ D_0 = A_n & & & & & & \end{array}$$

Sendo $D_0 = A$ o valor do financiamento; P a prestação, n o número de termos e i é a taxa de juros.

Temos que:

$$D_0 = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Como visto anteriormente, essa soma é de termos de uma PG, sendo assim:

$$P = D_0 \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}.$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boxed{P = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}.$$

Teorema: No SFA, sendo n ($n \in \mathbb{N}$) o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$P_k = D_0 \cdot \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$, sendo ($0 \leq k \leq n$).

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

$$j_k = iD_{k-1}.$$

$A = P_k - J_k.$

- A primeira fórmula ficou demonstrada acima considerando que o financiamento obtido corresponde a uma renda postecipada.

- A segunda fórmula D_k é a dívida a ser liquidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos iguais a P_k. Assim: $D_k = P_k \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$, substituindo P_k, teremos a segunda fórmula. O saldo devedor no período k é igual ao valor atual da dívida nesse período, na respectiva taxa i, do valor formado pelas $n-k$ prestações que ainda não foram pagas. como se pode verificar no item 4.4.2.1 do presente trabalho.

- As últimas duas fórmulas são aplicação das definições de juros e amortização, respectivamente.

4.4.3.1 Obtenção do Saldo Devedor

É possível encontrarmos o saldo devedor em determinada época $k(0 \leq k \leq n$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, através da aplicação do que foi acima apresentado.

No caso da existência da planilha referente ao financiamento, esse valor é encontrado diretamente. Por outro lado, tendo em vista a extensão da planilha, por vezes é tarefa trabalhosa. Dessa maneira, através de fórmula podemos obter o saldo devedor na época pretendida.

O fluxo da dívida D_0, financiada em n prestações P, a uma taxa i:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & P & P & \cdots & P & P & P & \cdots & P & P & P \\
0 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\hline
\downarrow & 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\downarrow & k+1 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\
D_0 & & & & & D_k & & & & &
\end{array}
$$

O saldo devedor no período k será igual ao valor atual (A_{n-k}) nesse período, considerando a taxa i, anuidade formada por $n-k$ prestações a serem pagas. Temos $A_{n-k} = P \times \dfrac{(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^{n-k} \cdot i}$.

Assim, poderemos obter o saldo devedor por meio de $\boxed{D_k = P \times \dfrac{(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^{n-k} \cdot i}}$.

No intuito de reforçar o que consta da fórmula acima, apresenta-se pagamentos em série e obtenção dos valores.

Considerando um determinado valor financiado A que deve ser pago em prestações iguais de valor P nas datas 1, 2, 3, ..., n a uma taxa de juros compostos i cobrada por período de tempo. O valor da série na data zero, conforme esquematizado, é:

$$\begin{array}{cccccc} & P & P & P & \cdots & P \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array}$$

Indicando o valor atual das prestações, A, à taxa i, temos $A = \dfrac{P}{(1+i)^1} + \dfrac{P}{(1+i)^2} + \dfrac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \dfrac{P}{(1+i)^n}$.

A expressão deve ser vista como os termos de uma Progressão Geométrica finita, de razão $q = \dfrac{1}{1+i}$ e primeiro termo $\dfrac{P}{1+i}$, aplicando a fórmula da soma de *n* termos da P.G. finita, temos $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)}$.

Assim temos $A = \dfrac{\dfrac{P}{(1+i)}\left[\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\dfrac{1}{1+i} - 1} = P \cdot \dfrac{\dfrac{1}{(1+i)}\left[\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\dfrac{1-(1+i)}{1+i}}$ que acarreta $A = P \cdot \dfrac{\left[\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{-i} = P \cdot \dfrac{\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]}{i}$, resultando em: $\boxed{A = P \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}}$.

Fórmula que possibilita calcular valor atual (A), prestação (P), taxa de juros e número de prestações. No caso da obtenção do saldo devedor, a antecipação dar-se-á por $n - k$, ou seja, o número total de prestações(n) subtraindo-se aquelas que já foram quitadas (k).

Exemplo 4.28 (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 101). Uma dívida de 150 é paga, em 4 meses, pelo sistema francês, com juros de 8% ao mês. Faça a planilha (tabela 6, abaixo) de amortização.

No sistema francês, as prestações são constantes. Pelo teorema referente ao SFA, cada prestação vale $P = D_0 \cdot \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 150 \cdot \dfrac{0,08}{1-1,08^{-4}} = 45,29.$

Sendo este o valor de todas as prestações dos períodos do financiamento.

Tabela 6 – Sistema Francês de Amortização - SFA

Período k	Prestação P_k	Amortização A_k	Juros J_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	150
1	45,29	33,29	12,00	116,71
2	45,29	35,95	9,34	80,76
3	45,29	38,83	6,46	41,93
4	45,29	41,93	3,35	-

Fonte: Morgado; Wagner; Zani (2015).

Para mais fácil compreensão, olhe cada linha na ordem P_k, J_k, A_k e D_K.

No exemplo, acima, estão implícitos os seguintes cálculos:

Período 1:

O juro é calculado sobre o valor da dívida (D_0 é o valor do financiamento) no início período $j_1 = i \times D_0 = 0,08 \times 150$ então $j_1 = 12,00.$

A amortização é resultado da diferença entre a prestação e o valor do juro referente ao período $A_1 = P - j_1 = 45,29 - 12,00$ então $A_1 = 33,29.$

Valor da dívida após o pagamento da prestação, no caso, valor financiado (D_0) menos a amortização temos $D_1 = D_0 - A_1 = 150,00 - 33,29$ então $D_1 =$ $= 116,71$ e assim por diante:

Período 2:

Cálculo dos juros no período: $j_2 = i \times D_1 = 0,08 \times 116,71 \Rightarrow j_2 = 9,34.$

Obtenção do valor da amortização:$A_2 = P - j_2 = 45,29 - 9,34 \Rightarrow A_2 = 35,95.$

Calculando o valor do saldo devedor:$D_2 = D_1 - A_2 = 116,71 - 35,95 \Rightarrow D_2 =$ $= 80,76.$

Período 3:

Cálculo dos juros no período: $j_3 = i \times D_2 = 0,08 \times 80,76 \Rightarrow j_3 = 6,46.$

Obtenção do valor da amortização:$A_3 = P - j_3 = 45,29 - 6,46 \Rightarrow A_3 = 38,83.$

Calculando o valor do saldo devedor:$D_3 = D_2 - A_3 = 80,76 - 38,83 \Rightarrow D_3 =$ $= 41,93.$

Período 4:

Cálculo dos juros no período: $j_4 = i \times D_{=} 0,08 \times 41,93 \Rightarrow j_4 = 3,35.$

Obtenção do valor da amortização:$A_4 = P - j_4 = 45,29 - 3,35 \Rightarrow A_4 = 41,94.$

Calculando o valor do saldo devedor:$D_4 = D_3 - A_4 = 41,93 - 41,94 \Rightarrow D_4 =$ $= -0,01.$

A diferença de 0,01 no saldo devedor se deve às aproximações realizadas nas etapas anteriores. Para se obter o saldo nulo, nos moldes da tabela, deve ser feito o acerto.

Exemplo 4.29 (Elaborado pelo autor). Um financiamento de R$ 40.000,00 que será amortizado pelo Sistema Francês de Amortização, em 10 prestações anuais à taxa de juro composto de 15% ao ano. Qual será o saldo devedor depois de ter sido paga a quarta prestação. Resolução:

- Temos: $D_0 = 40.000$; $n = 10$ a; $i = 15\% = 0,15$ a.a; e $k = 4$.

- Primeiramente, devemos obter o valor de P. Lembrando que $P = D_0 \times \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ daí vem: $P = D_0 \times \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 40.000 \times \dfrac{0,15}{1-(1+0,15)^{-10}} \Rightarrow P = 7.970,08$, e assim $D_k = P \times \dfrac{(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^{n-k} \cdot i}$ então $D_4 = 7.970,08 \times \dfrac{(1+0,15)^{10-4}-1}{(1+0,15)^{10-4} \cdot 0,15}$, ou seja,

$$D_4 = 7.970,08 \times \frac{(1,15)^6 - 1}{(1,15)^6 \cdot 0,15} \text{ obtendo } D_4 = 30.162,63.$$

  É dizer: após o pagamento da quarta parcela o valor do saldo devedor é de R\$ $30.162,63$.

4.4.3.2 Sistema Francês de Amortização com Prazo de Carência

O financiamento pode ser oferecido ao mutuário com prazo de carência. Podendo ocorrer duas situações: durante o prazo de carência, o juro é pago, ou neste prazo o juro se incorpora à dívida, sendo amortizado nas prestações.

Para ilustrar a situação com as duas ocorrências, tomemos o seguinte exemplo: um financiamento imobiliário no valor de R\$ $100.000,00$ a ser pago pelo SFA em 4 prestações anuais, com 3 anos de carência, à taxa de 15% ao ano. Realizando cálculos e confeccionando a planilha de amortização da dívida.

Admitindo que o principal fora emprestado no início do primeiro ano e que as prestações e os juros sejam pagos no fim de cada ano. Decorre que, do início do primeiro ano (data zero) até o fim do terceiro ano, temos 3 períodos, que correspondem à carência.

- Temos: $D_0 = 100.000$ (valor do financiamento); $c = 3$ a (prazo de carência); $n = 4$ a (prestações); $i = 15\%$ a.a. $= 0,15$ a.a. (taxa de juro).

- **Ocorrência 1**: os juros são pagos durante o período de carência. Registre-se que não haverá amortização nesse período, sendo assim $j_1 = j_2 = 0,15 \times 100.000 \Rightarrow j_1 = j_2 = 15.000$.

  A tabela 7 é a parcial desse período e fica assim:

Tabela 7 – SFA com carência (juros **não** incorporados)

Período k	Prestação P_k	Juro j_k	Amortização A_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100.000
1	15.000	15.000	-	100.000
2	15.000	15.000	-	100.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Ressalte-se, por oportuno, que os juros j_k são pagos nesse período de carência, ou seja, o valor a ser para será de R$ 15.000,00, nos períodos 1 e 2.

Terminado o prazo de carência, o método é o mesmo para financiamento sem carência.

Cálculo da prestação $P = D_0 \cdot \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 100.000 \cdot \dfrac{0,15}{1-1,15^{-4}} = 35.026,54$ logo $P = 35.027.$

Logo após terminado o período de carência, temos a primeira amortização de \$20.027,00.[4] que resultado da diferença entre a prestação ($P = 35.027$) constante do SAF e os juros ($j = 15.000$) ao final do quarto período.

Assim, a Tabela 8 mostra que durante a carência há o efetivo pagamento dos juros, sem a amortização.

Tabela 8 – SFA com carência (juros **não** incorporados)

Período k	Prestação P_k	Juro j_k	Amortização A_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100.000
1	15.000	15.000	-	100.000
2	15.000	15.000	-	100.000
3	35.027	15.000	20.027	79.973
4	35.027	11.996	23.031	56.942
5	35.027	8.541	26.486	30.456
6	35.024^*	4.568	30.456	-
Total	170.105	70.105	100.000	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

*acerto para zerar o saldo devedor

- **Ocorrência 2**: no caso dos juros se incorporarem ao saldo devedor (capitalizar), à taxa de 15% ao ano, durante os dois primeiros anos de carência.

  Dado que $M = C(1+i)^n$, podemos escrever $D_k = D_0(1+i)^k$.

  Assim $D_2 = 100.000(1+0,15)^2 = 100.000 \times 1,3225$ então $D_2 = 132.250.$

  Calculando o valor da prestação sobre o saldo devedor $P = D_0 \cdot \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} =$ $= 132.250 \cdot \dfrac{0,15}{1-1,15^{-4}} = 46.322,59,$ em resumo $P = 46.322,59.$

É oportuno ressaltar que no SFA a prestação é constante. Dando ênfase: R\$46.322,59 será o valor das 4 prestações.

Determinamos, ato contínuo, os elementos que comporão a planilha:

[4] A forma de calcular e quando se dá a primeira amortização (MATHIAS; GOMES, 2016, p. 293-294)

- Período 3

Em primeiro plano, calcula-se os juros, no presente período (terceiro), que é obtido multiplicando-se a taxa de juros pelo saldo devedor do período anterior, $D_2(= 132.250,00)$, resultado do valor da capitalização do financiamento mais as parcelas de juros acumuladas até então $j_3 = i \times D_2$ tem-se $j_3 = 0,15 \times$ $\times\, 132.250$ obtemos $j_3 = 19.837,50$.

Encontrado o valor dos juros, subtrai-se esse valor do valor da prestação ($46.322,59$, acima calculada), obtendo o valor que será amortizado da dívida (saldo devedor) $A_3 = P - j_3$ tem-se $A_3 = 46.322,59 - 19.837,50$ obtemos $A_3 = 26.485,09$.

O procedimento abaixo é a subtração do valor da amortização, encontrado acima, do saldo devedor, no caso, é $D_2 = 132.250,00$ logo $D_3 = D_2 - A_3$ tem-se $D_3 =$ $= 132.250 - 26.485,09$ obtemos $D_3 = 105.764,91$.

E assim por diante:

- Período 4

$j_4 = i \times D_3 \Rightarrow j_4 = 0,15 \times 105.764,91 = 15.864,74 \Rightarrow j_4 = 15.864,74$ (cálculo dos juros, no período).

$A_4 = P - j_4 \Rightarrow A_4 = 46.322,59 - 15.864,74 \Rightarrow A_4 = 30.457,85$ (cálculo do valor da amortização).

$D_4 = D_3 - A_4 \Rightarrow D_4 = 105.764,91 - 30.457,85 \Rightarrow D_4 = 75.307,06$ (encontrando o valor do saldo devedor/dívida).

- Período 5

$j_5 = i \times D_4 \Rightarrow j_5 = 0,15 \times 75307,06 = 11.296,06 \Rightarrow j_5 = 11.296,06$ (cálculo dos juros, no período).

$A_5 = P - j_5 \Rightarrow A_5 = 46.322,59 - 11.296,06 \Rightarrow A_5 = 35.026,53$ (cálculo do valor da amortização).

$D_5 = D_4 - A_5 \Rightarrow D_5 = 75.307,06 - 35.026,53 \Rightarrow D_5 = 40.280,53$(encontrando o valor do saldo devedor/dívida).

- Período 6

$j_6 = i \times D_5 \Rightarrow j_6 = 0,15 \times 40.280,53 = 6.042,08 \Rightarrow j_6 = 6.042,08$ (cálculo dos juros, no período).

$A_6 = P - j_6 \Rightarrow A_6 = 46.322,59 - 6.042,08 \Rightarrow A_6 = 40.280,51$ (cálculo do valor da amortização).

$D_6 = D_5 - A_6 \Rightarrow D_6 = 40.280,53 - 40.280,51 \Rightarrow D_6 = 0,02$ (encontrando o valor do saldo devedor/dívida).

Com isso obtemos a tabela 9 de amortização:

Tabela 9 – SFA com carência (juros incorporados)

Período k	Prestação P_k	Juro j_k	Amortização A_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100.000
1	-	-	-	115.000
2	-	-	-	132.250
3	46.322,59	19.837,50	26.485,09	105.764,91
4	46.322,59	15.864,74	30.457,85	75.307,06
5	46.322,59	11.296,06	35.026,53	40.280,53
6	$46.322,61^*$	6.042,08	40.280,53	-
Total	185.290,38	53.040,38	132.250,00	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).
* arredondamento decorrente dos realizados na prestação e nos juros.

4.4.3.3 Tabela Price

É uma variação do Sistema Francês de Amortização, com características próprias quanto à taxa de juros, prestação mensal e cálculo utilizando-se a taxa proporcional simples. A lição de Assaf Neto (2003) traz informação esclarecedora:

> O sistema *Price* de Amortização (ou tabela *Price*) representa uma variante do sistema francês. Na realidade, o sistema francês, desenvolvido originalmente pelo inglês Richard Price, assumiu esta denominação pelo seu uso amplamente generalizado na França no século passado. (ASSAF NETO, 2003, p. 364)

De acordo com IEZZI (2004, p.77), Richard Price publicou em 1761, também, trabalhos na área de Estatística e Atuária, que serviram para cálculos de seguros e aposentadorias. É mais conhecido por sua obra, no ano 1776, da área financeira e atuária que apresentou tabelas, nas quais, mostrou financiamento por meio de pagamentos por meio de sequência uniforme, montante resultado de sequências uniformes, rendas vitalícias em aposentadorias e cálculo de prêmios de seguros de vida.

Destacando que a tabela Price é um sub caso do Sistema Francês de Amortização, com relevância para as seguintes propriedades:

- A taxa de juros é dada pelo valor nominal, usualmente, anual.
- O período das prestações é menor que o dado para taxa de juros. É dizer, se a taxa é anual, o período poderá ser: mensal, bimestral, trimestral ou semestral (os mais utilizados). Nos financiamentos as prestações são mensais, geralmente.

- Para cálculo é utilizada a taxa proporcional ao período da prestação, a partir da taxa nominal dada.

Em síntese, o método da tabela Price é tão somente a tabela com os índices mais usados pelas instituições financeiras, considerando a taxa de juros proporcional. Residindo nessa última colocação a diferença entre a tabela Price e o SFA, pois neste sistema, a taxa de juros é dada no mesmo período das prestações.

Vejamos um exemplo da Tabela Price. Com valores que auxiliarão no entendimento do mecanismo de cálculo.

Exemplo 4.30 (Elaborado pelo autor). Um financiamento de R$ 100.000,00, disponibilizado de imediato, sem prazo de carência, que será amortizado pela tabela Price, em 6 prestações mensais à taxa de juro de 12% ao ano.

Resolução: Sendo a tabela Price o sistema de amortização a ser adotado, bem como sendo taxa de 12% a.a., devemos encontrar a taxa proporcional mensal.

Taxa proporcional simples, $i_{12} = \dfrac{0,12}{12} = 0,01$ a.m. ou $i_{12} = 1\%$ a.m. (característica marcante da Tabela *Price* e principal diferença para o SFA).

Cálculo da prestação (não há diferença para o cálculo da prestação no SFA):

$$P = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 100.000 \cdot \frac{0,01}{1-1,01^{-6}} = 17.254,84 \Rightarrow P = 17.255.$$

Os valores constantes da Tabela 9 são obtidos por meio dos cálculos abaixo:

- Período 1:

  O juro é calculado sobre o valor da dívida (D_0 é o valor do financiamento) no início período $j_1 = i \times D_0 = 0,01 \times 100.000$ então $j_1 = 1.000.$

  A amortização é resultado da diferença entre a prestação e o valor do juro referente ao período $A_1 = P - j_1 = 17.255 - 1000$ então $A_1 = 16.255.$

  Valor da dívida após o pagamento da prestação, no caso, valor financiado (D_0) menos a amortização. Então $D_1 = D_0 - A_1 = 100.000 - 16.255$ então $D_1 = 83.745.$

  E assim por diante.

- Período 2:

  Cálculo dos juros no período: $j_2 = i \times D_1 = 0,01 \times 83.745 \Rightarrow j_2 = 837.$

  Obtenção do valor da amortização:$A_2 = P - j_2 = 17.255 - 837 \Rightarrow A_2 = 16.418.$

  Calculando o valor do saldo devedor:$D_2 = D_1 - A_2 = 116,71 - 35,95 \Rightarrow D_2 =$ $= 67.327.$

- Período 3:

  Cálculo dos juros no período: $j_3 = i \times D_2 = 0,01 \times 67.327 \Rightarrow j_3 = 673.$

  Obtenção do valor da amortização:$A_3 = P - j_3 = 17.255 - 673 \Rightarrow A_3 = 16.581.$

  Calculando o valor do saldo devedor:$D_3 = D_2 - A_3 = 80,76 - 38,83 \Rightarrow D_3 = 50.746.$

- Período 4:

  Cálculo dos juros no período: $j_4 = i \times D_{=}0,01 \times 50.746 \Rightarrow j_4 = 507.$

  Obtenção do valor da amortização:$A_4 = P - j_4 = 17.255 - 507 \Rightarrow A_4 = 16.748.$

  Calculando o valor do saldo devedor:$D_4 = D_3 - A_4 = 41,93 - 41,94 \Rightarrow D_4 = 33.998.$

- Período 5:

  Cálculo dos juros no período: $j_5 = i \times D_4 = 0,01 \times 33.998 \Rightarrow j_5 = 339.$

  Obtenção do valor da amortização:$A_5 = P - j_5 = 17.255 - 339 \Rightarrow A_5 = 16.916.$

  Calculando o valor do saldo devedor:$D_5 = D_2 - A_4 = 33.998 - 16.916 \Rightarrow D_5 =$
  $= 17.082.$

- Período 6:

  Cálculo dos juros no período: $j_6 = i \times D_5 = 0,01 \times 17.082 \Rightarrow j_6 = 170.$

  Obtenção do valor da amortização:$A_6 = P - j_6 = 17.255 - 170 \Rightarrow A_6 = 17.085.$

  Calculando o valor do saldo devedor:$D_6 = D_5 - A_6 = 17.082 - 17.085 \Rightarrow D_6 = -3.$

Dessa maneira teremos a tabela 10:

Tabela 10 – Sistema *Price*

Período k	Prestação P_k	Juro j_k	Amortização A_K	Saldo devedor D_k
0	-	-	-	100.000
1	17.255	1.000	16.255	83.745
2	17.255	837	16.418	67.327
3	17.255	673	16.581	50.746
4	17.255	507	16.748	33.998
5	17.255	339	16.916	17.082
6	17.252^*	170	17.082	-
Total	103.527	3.526	100.000	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

*acerto para eliminar os efeitos dos arredondamentos.

Ressaltando que a taxa proporcional adotada foi a simples, sendo a taxa efetiva cobrada maior, haja vista que $i_f = (1 + 0,01)^{12} = (1,01)^{12} \cong 1,126825.$ A taxa efetiva encontrada é de $12,68\%$ a.a.

Caso o período de amortização coincida com a taxa, os valores do SFA e Tabela Price serão os mesmos. Dado que a diferença desses sistemas de amortização é o período a que refere a taxa.

Com isso foram apresentados importantes métodos de cálculo de prestações de financiamento que são amplamente dos mais divulgados pelas instituições financeiras e que de alguma maneira muitas pessoas ouvem falar.

4.4.4 Sistema de Amortização Crescente - SACRE

O SACRE combina os cálculos realizados pelo SFA e SAC, sendo utilizado pelo SFH no financiamento imobiliário. Nesse sistema o período total de quitação do financiamento é dividido em subperíodos iguais. Com prestações constantes durante cada subperíodo do prazo de quitação do financiamento. Sendo que as prestações decrescem linearmente de um subperíodo para outro. O usual é para prazos longos de quitação, a título de ilustração, 30 anos (360 meses) ser dividido em 30 subperíodos de 12 meses.

Desse modo, a cada subperíodo do prazo de quitação do financiamento deverá ser calculada a amortização para este, sendo essa importante para o cálculo da prestação (fixa) a ser utilizada até o fim do subperíodo a que se refere.

No prazo citado acima (30 anos = 360 meses) e 30 subperíodos de 12 meses. O que decorre que durante 12 (meses) a prestação será o valor fixado para aquele subperíodo, variando com isso a amortização, pois essa terá valor variável em ligação direta com o valor pago de juros.

Partindo do primeiro subperíodo do prazo de quitação do financiamento, a providência inicial será o cálculo da amortização (A) do primeiro período, então divide-se o valor do financiamento (D_0) pelo número de períodos do contratados (n, 360 meses, na ilustração acima). A primeira amortização será relevante para encontrarmos o valor das prestações (P) nesse subperíodo.

Denotemos por $A_{l.m}$, $D_{l.m}$, $j_{l.m}$, $P_{l.m}$, respectivamente, a amortização, o saldo devedor, o juros e a parcela do subperíodo l e a m-ésima prestação, com $l, m \in N$.

Considere $n \in N$ como sendo o número de prestações e $r \in N$ o número de subperíodos, então a quantidade de parcelas por subperíodo é dada por $\frac{n}{r} = k.$

Procedimento igual ao utilizado no SAC, para obtenção da primeira amortização

$$A_{1.1} = \frac{D_0}{n}.$$

Atentando para notação $A_{1.1}$ traz a seguinte informação: é o primeiro subperíodo e a primeira prestação do financiamento.

No cálculo dos juros ($j_{1.1}$) do primeiro período, multiplicamos a taxa de juros (i) pelo saldo devedor, neste caso, pelo valor do financiamento (D_0). Procedimento igual ao dos outros sistemas de amortização.

$$j_{1.1} = i \times D_0.$$

Para determinação da prestação (P) para o primeiro subperíodo (1), basta somar os juros ($j_{1.1}$) com a amortização ($A_{1.1}$), logo

$$P_{1.1} = j_{1.1} + A_{1.1}.$$

O saldo devedor ($D_{1.1}$) ao final do primeiro período do primeiro subperíodo, como realizado em operações de financiamento, será a diferença entre o valor inicial do financiamento (D_0) e o valor da amortização no período ($A_{1.1}$). É dizer: é recalculado para o 2º período (pagamento da segunda parcela)

$$D_{1.1} = D_0 - A_{1.1}.$$

No segundo período do primeiro subperíodo, será calculado o juros ($j_{1.2}$) multiplicando-se a taxa de juros (i) pelo saldo da dívida ao final do primeiro período ($D_{1.1}$),

$$j_{1.2} = i \times D_{1.1}.$$

A partir dos juros ($j_{1.2}$), determina-se o valor a da amortização ($A_{1.2}$) através da diferença entre a prestação ($P_{1.1} = P_{1.2}$) do subperíodo (encontrada no início do primeiro período) e os juros ($j_{1.2}$), então temos

$$A_{1.2} = P_{1.2} - j_{1.2}.$$

O saldo da dívida ao final do segundo período ($D_{1.2}$), fácil concluir, será a diferença entre o saldo devedor do primeiro período ($D_{1.1}$) e a amortização encontrada no segundo período ($A_{1.2}$), assim

$$D_{1.2} = D_{1.1} - A_{1.2}.$$

Os procedimentos do segundo período são repetidos até o último período (k) do último subperíodo, no qual estão inseridos. Com as devidas modificações dos respectivos valores.

No início do segundo subperíodo, haverá necessidade de determinarmos o valor da prestação $(P_{2.k})$, novamente, para o subperíodo. Sendo assim, divide-se o saldo devedor ao final do último subperíodo $(1.k)$ pelo número número de prestação restantes $n - k$. Com efeito

$$A_{2.(k+1)} = \frac{D_{1.k}}{n-k}.$$

A partir da obtenção do valor da amortização é determinado o valor da prestação, somandose os juros do período ao valor da amortização. Neste ato, está determinado o valor da prestação até o final do subperíodo em questão. Temos assim $j_{2.(k+1)} = i \times D_{1.k.}$ e $P_{2.(k+1)} = J_{2.(k+1)} + A_{2.(k+1).}$ Anotado que o índice "2.(k + 1)" na prestação P : o número 2 representa o subperíodo (segundo, no caso) e $(k+1)$ é o número da prestação subsequente à última prestação do período anterior, no segundo subperíodo e $J_{2.(k+1)}$ e $A_{2.(k+1)}$ representam, respectivamente, juros e amortização, do segundo (2) subperíodo e prestação $(k+1)$ que é a primeira prestação abrangida pelo segundo subperíodo.

Registre-se que ao iniciar um determinado subperíodo, necessariamente, deverá ser calculado o valor da amortização para que somada ao valor dos juros do primeiro período (desse subperíodo), obtenha-se o valor da prestação ao longo do subperíodo. Cabe uma informação importante: a cada subperíodo a prestação será a mesma, fixa, do primeiro período ao último desse subperíodo. Variando tão somente os valores de amortização e juros. É dizer, a prestação é constante no subperíodo, os juros serão inversamente proporcionais à amortização.

Dentro dos períodos, exceto o primeiro de cada subperíodo, os cálculos transcorrem de forma que obtido o valor dos juros, subtraia-o da prestação encontrada (no primeiro período) para o subperíodo, achando o valor da amortização da dívida. Operação que se repete a cada período entre o segundo e o último do subperíodo.

Na presente pesquisa, serão apresentados períodos reduzidos para mostrar o funcionamento do sistema.

Exemplo 4.31 (Elaborado pelo autor). Um financiamento de R$ 12.000,00, disponibilizado de imediato, sem prazo de carência, que será amortizado pela SACRE, em 12 prestações mensais à taxa de juro de 5% ao mês, sendo 4 subperíodos (3 meses cada um).

Resolução:

Determinamos, ato contínuo, os elementos que comporão a tabela 10:

- subperíodo do prazo de quitação do financiamento 1 (3 meses):

- Período 1.1 (o primeiro número corresponde ao subperíodo e o segundo, ao período).

  No início de cada subperíodo, calcula-se o valor da amortização levando-se me consideração o número de prestações que faltam. No caso concreto, serão 12 períodos. Logo

$$A_{1.1} = \frac{D_0}{n} = \frac{12.000}{12} = 1.000 \Rightarrow A_{1.1} = 1.000.$$

O cálculo dos juros que incidiram no período, do início ao fim do primeiro período $j_{1.1} = 0,05 \times 12.000 \Rightarrow j_{1.1} = 600.$

Com os valores da amortização e dos juros encontra-se o valor da prestação que será o mesmo até o final desse subperíodo, $P_{1.1} = j_{1.1} + A_{1.1} = 600 +$ $+ 1000$ obtemos $P_{1.1} = 1.600$, ressaltando que se manterá nesse valor até o final desse subperíodo.

O saldo devedor (valor da dívida) ao final do primeiro período será a diferença entre a dívida no início do período e valor da amortização, $D_{1.1} = D_0 - A_{1.1}$ então $D_{1.1} =$ $= 12.000 - 1000$ tem-se $D_{1.1} = 11.000.$

- Período 1.2

O segundo período (primeiro subperíodo) inicia-se com o cálculo dos juros $j_{1.2} =$ $= i \times D_{1.1}$ então $j_{1.2} = 0,05 \times 11.000$ logo $j_{1.2} = 550.$

Do valor de juros, obtido acima, determina-se o valor da amortização: subtraindo-se da prestação (encontrada no primeiro período) o valor dos juros, vem $A_{1.2} =$ $= P_{1.2} - j_{1.2} =$ então $A_{1.2} = 1.600 - 550$ logo $A_{1.2} = 1.050.$

O saldo devedor será a diferença entre o saldo do final do período anterior e a amortização do presente período é $D_{1.2} = D_{1.1} - A_{1.2}$ então $D_{1.2} = 11.000 -$ $- 1050$ logo $D_{1.2} = 9.950.$

- Período 1.3

$j_{1.3} = 0,05 \times 9.950 \Rightarrow j_{1.3} = 497,50.$

$A_{1.3} = P_{1.3} - j_{1.3} = 1.600 - 497,50 \Rightarrow A_{1.3} = 1.102,50.$

$D_{1.3} = 9.950 - 1.102,50 \Rightarrow D_{1.3} = 8.847,50.$

- subperíodo do prazo de quitação do financiamento 2 (3 meses):

- Período 2.4

Operação que deve ser destacada: no início (primeiro período) de cada um dos subperíodos deve ser feito o cálculo da amortização, observando que os períodos a serem considerados são os que faltam para amortização da dívida

$$A_{2.4} = \frac{D_{1.3}}{n-3} = \frac{8.847,50}{9} = 983,06 \Rightarrow A_{2.4} = 983,06.$$

Juros do período calculados de forma direta e de forma já realizada acima, com as mudanças de valores, por certo, $j_{2.4} = i \times D_{1.3}$ então $j_{2.4} = 0,05 \times$
$\times\, 8.847,50$ temos $j_{2.4} = 442,38.$

O cálculo da prestação reveste-se de importância, pelo fato de que será essa, a prestação fixa, no subperíodo em questão, $P_{2.4} = j_{2.4} + A_{2.4} =$ então $P_{2.4} =$
$= 1.425,44.$

Saldo devedor sem novidades em relação aos cálculos nos outros períodos, com as devidas mudanças quanto a valores de $D_{2.4} = D_{1.3} - A_{2.4}$ então $D_{2.4} =$
$= 8.847,50 - 983,06$ temos $D_{2.4} = 7.864,44.$ E assim por diante, nos próximos períodos do subperíodo:

- Período 2.5

$$j_{2.5} = i \times D_{2.4} \Rightarrow j_{2.5} = 0,05 \times 7.864,44 \Rightarrow j_{2.5} = 393,22.$$

$$A_{2.5} = P_{2.5} - j_{2.5} = 1.425,44 - 393,22 \Rightarrow A_{2.5} = 1.032,22.$$

$$D_{2.5} = D_{2.4} - A_{2.5} \Rightarrow D_{2.5} = 7.867,44 - 1.032,22 \Rightarrow D_{2.5} = 6.832,22.$$

• Período 2.6

$$j_{2.6} = i \times D_{2.5} \Rightarrow j_{2.6} = 0,05 \times 6.832,23 \Rightarrow j_{2.6} = 341,61.$$

$$A_{2.6} = P_{2.6} - j_{2.6} = 1.425,44 - 341,61 \Rightarrow A_{2.6} = 1.083,83.$$

$$D_{26} = D_{2.5} - A_{2.6} \Rightarrow D_{2.6} = 6.832,22 - 1.083,83 \Rightarrow D_{2.6} = 5.748,39.$$

• subperíodo do prazo de quitação do financiamento 3 (3 meses):

- Período 3.7

$$A_{3.7} = \frac{D_{2.6}}{n-6} = \frac{5.748,39}{6} = 958,07 \Rightarrow A_{3.7} = 958,07.$$

$$j_{3.7} = i \times D_{2.6} \Rightarrow j_{3.7} = 0,05 \times 5.748,39 \Rightarrow j_{3.7} = 287,42.$$

$$P_{3.7} = j_{3.7} + A_{3.7} \Longrightarrow P_{3.7} = 1.245,49.$$ [5]

$$D_{3.7} = D_{3.6} - A_{3.7} \Rightarrow D_{3.7} = 5.748,39 - 958,07 \Rightarrow D_{3.7} = 4.790,32.$$

- Período 3.8

$$j_{3.8} = i \times D_{3.7} \Rightarrow j_{3.8} = 0,05 \times 4.790,32 \Rightarrow j_{3.8} = 239,52.$$

$$A_{3.8} = P_{3.8} - j_{3.8} = 1.245,49 - 239,52 \Rightarrow A_{3.8} = 1.005,97.$$

$$D_{3.8} = D_{3.7} - A_{3.8} \Rightarrow D_{3.8} = 4790,32 - 1.005,97 \Rightarrow D_{3.8} = 3.784,35.$$

[5] valor da prestação dos 3 meses ($P_{3.7}$, $P_{3.8}$ e $P_{3.9}$).

- Período 3.9

$j_{3.9} = i \times D_{3.8} \Rightarrow j_{3.9} = 0,05 \times 3.784,35 \Rightarrow j_{3.9} = 189,22.$

$A_{3.9} = P_{3.9} - j_{3.9} = 1.245,49 - 189,22 \Rightarrow A_{3.9} = 1.056,27.$

$D_{3.9} = D_{3.8} - A_{3.9} \Rightarrow D_{3.9} = 3.784,35 - 1.056,27 \Rightarrow D_{3.9} = 2.728,08.$

• subperíodo do prazo de quitação do financiamento 4 (3 meses):

- Período 4.10

$A_{4.10} = \dfrac{D_{3.9}}{n-9} = \dfrac{2.728,08}{3} = 909,36 \Rightarrow A_{4.10} = 909,36.$

$j_{4.10} = i \times D_{3.9} \Rightarrow j_{4.10} = 0,05 \times 2.728,08 \Rightarrow j_{4.10} = 136,40.$

$P_{4.10} = j_{4.10} + A_{4.10} \Longrightarrow P_{4.10} = 1.045,76.$[6]

$D_{4.10} = D_{3.9} - A_{4.10} \Rightarrow D_{4.10} = 2.728,08 - 909,36 \Rightarrow D_{4.10} = 1.818,72.$

- Período 4.11

$j_{4.11} = i \times D_{4.10} \Rightarrow j_{4.11} = 0,05 \times 1.818,72 \Rightarrow j_{4.11} = 90,94.$

$A_{4.11} = P_{4.11} - j_{4.11} = 1.045,76 - 90,94 \Rightarrow A_{4.11} = 954,82.$

$D_{4.11} = D_{4.10} - A_{4.11} \Rightarrow D_{4.11} = 1.818,72 - 954,82 \Rightarrow D_{4.11} = 863,90.$

- Período 4.12

$j_{4.12} = i \times D_{4.11} \Rightarrow j_{4.11} = 0,05 \times 863,90 \Rightarrow j_{4.12} = 43,20.$

$A_{4.12} = P_{4.12} - j_{4.12} = 1.045,76 - 43,20 \Rightarrow A_{4.12} = 1.002,56.$

$D_{4.12} = D_{4.11 - A_{4.12}} \Rightarrow D_{4.12} = 863,90 - 1.002,56 \Rightarrow D_{4.12} = -138,66.$

Depois de obtidos os valores acima por meio dos cálculos, período a período, formamos a tabela 11. Assim, temos a tabela 11, abaixo:

6 valor da prestação dos 3 meses últimos ($P_{4.10}$, $P_{4.11}$ e $P_{4.12}$).

Tabela 11 – Sistema de Amortização Crescente - SACRE

Período $-$	Prestação P	Juro j	Amortização A	Saldo devedor D
0	-	-	-	12.000
1	1.600	600	1.000	11.000
2	1.600	550	1.050	9.950
3	1.600	497,50	1.102,50	8.847,50
4	1.425,44	442,38	983,06	7.864.44
5	1.425,44	393,22	1.032,22	6.832,22
6	1.425,44	341,61	1.083,83	5.748,39
7	1.245,49	287,42	958,07	4.790,32
8	1.245,49	239,52	1.005,97	3.784,35
9	1.245,49	189,22	1.056,27	2.728,08
10	1.045,76	136,40	909,36	1.818,72
11	1.045,76	90,94	954,82	863,90
12	907,10	43,20	863,90	0,00
Total	15.811,41	3.811,41	12.000,00	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

No período $k = 12$ adotou-se, na tabela 10, o valor da amortização igual ao saldo devedor no período $k = 11$, para fins de arredondamento. Registrado que, nos cálculos, chegou-se ao valor fiel às operações matemáticas realizadas.

Cumpre ressaltar, que as amortizações são crescentes dentro dos subperíodos.

4.4.5 Comparações entre o SAC, SFA e SACRE

Partindo de um exemplo com valores simbólicos, produziremos as respectivas planilhas: SAC, SFA e SACRE, possibilitando uma visão comparativa.

Observando a confrontação genérica entre os sistemas de amortização, conforme figura 7 abaixo:

Figura 7 – Confrontando os Sistemas de Amortização

	SAC	SFA	SACRE
JUROS	DECRESCENTE	DECRESCENTE	DECRESCENTE
AMORTIZAÇÃO	CONSTANTE	CRESCENTE	CRESCENTE
PRESTAÇÃO	DECRESCENTE	FIXA	DECRESCENTE

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

SACRE: Sistema de Amortização Crescente é conhecido como um sistema híbrido entre o SAC e SFA, isto porque nos subperíodos do prazo de quitação do financiamento se comporta como o SFA e no geral como o SAC. Ao longo dos subperíodos do prazo de quitação do financiamento a prestação (P) é fixa, como é caso do SFA, e a amortização variará de acordo com o valor dos juros. A cada início de subperíodo do prazo de quitação do financiamento, novo cálculo da prestação para aquele subperíodo do prazo de quitação do financiamento é feito, nos moldes do SAC (dividindo-se o saldo devedor pelo período). Ao passo que o valor da amortização dentro dos subperíodos do prazo de quitação do financiamento é calculada de forma semelhante ao SFA (prestação subtraída dos juros).

Vejamos um exemplo: uma dívida de 120 reais é paga, com juros de 5% ao mês, em 6 meses. Façamos as planilhas de amortização (SAC, SFA e SACRE):

A Tabela 12 comparativa dos três sistemas de amortização de financiamento, em reais, está posta abaixo, com respectivos valores da prestação (P), amortização (A), juros (j) e saldo devedor (D). Assim,

Tabela 12 – Comparação SAC, SFA e SACRE

	SAC				SFA				SACRE			
k	P_k	A_k	j_K	D_k	P_k	A_k	j_K	D_k	P_k	A_k	j_K	D_k
0	-	-	-	120	-	-	-	120	-	-	-	120
1	26	20	6	100	23,64	17,64	6	102,36	26	20	6	100
2	25	20	5	80	23,64	18,52	5,12	83,84	26	21	5	79
3	24	20	4	60	23,64	19,45	4,19	64,39	26	22,05	3,95	56,95
4	23	20	3	40	23,64	20,42	3,22	43,97	21,83	18,98	2,85	37,97
5	22	20	2	20	23,64	21,44	2,20	22,53	21,83	19,93	1,90	18,04
6	21	20	1	-	23,66	22,53	1,13	0,00	18,94	18,04	0,90	0,00
Total	141	120	21	-	141,86	120	21,86	-	140,60	120	20,60	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Comparativamente, o SACRE é o mais vantajoso dos sistemas de financiamento, constata-se que paga um valor total de juros menor que no SAC e no SFA. Além disso, mitiga as formas de cálculos do SAC e SFA, pois a obtenção da primeira amortização de cada subperíodo se faz da mesma forma que no SAC e, por outro lado, as prestações são fixas dentro dos subperíodos, o que pode ser considerado como vantagem, haja vista a previsibilidade das prestações dentro dos subperíodos.

Cumpre registrar, por necessário, que na Tabela 12 acima, nas colunas do SFA, a última amortização (A_6) que deveria ser no valor de $22,51$, resultando numa prestação (P_6) no valor de $23,64$, foi alterada com a finalidade de reduzir a 0,00(zero) o valor do saldo devedor (D_6), que havia sido, nos cálculos, de $0,02$. Como consequência os totais de P_k e A_k foram alterados, respectivamente, em reais, para: $141,86$ e 120 em vez de $141,84$ e $119,98$.

Merece a mesma observação os valores da coluna do SACRE: que foram encontrados: $A_6 = 20,93$; $P_6 = 21,83$ e $D_6 = -2,89$; feitos os ajustes, ficaram alterados os valores, em reais, totais de: P_k para 140,60; A_k para 120 e D_k para $0,00$.

Preferiu-se modificar adequadamente os valores conforme apresentados na Tabela 12 objetivando proporcionar maior clareza na visualização e na comparação de vantagens entre um e outro sistema de amortização. Destacando que o SACRE é utilizado para financiamento de longo prazo cujos subperíodos, normalmente, são de 12 (doze) meses, mostrando ser um dos mais vantajosos sistemas de amortização.

5 PROPOSTA PEDAGÓGICA

O propósito do trabalho é demonstrar os mecanismos de cálculos úteis nas finanças do cotidiano e amortizações de financiamento imobiliário (na maioria dos casos). Serão apresentadas aplicações com cálculos que subsidiarão outras propostas que atendam o objetivo da pesquisa.

5.1 Sugestões do planejamento de aula

O público-alvo da aula são os alunos do 3º ano do ensino médio da educação básica. Objetivos a serem atingidos:

Itinerário Formativo - BNCC: matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino.(BRASIL, 2018a, p. 475 e 477)

Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.(BRASIL, 2018a, p. 535)

Habilidades: (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. (BRASIL, 2018a, p. 536)

Conteúdo: Matemática financeira.

Objetivos específicos (MINAS GERAIS, 2006, p. 47 e 58) **e número de aulas:**

- Resolver problemas que envolvam o conceito de porcentagem. 1 hora/aula de 50 minutos.

- Resolver problemas que envolvam o conceito de juros simples ou compostos. 2 horas/aula de 50 minutos.

- Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de prestações em financiamentos com um número pequeno de parcelas. 3 horas/aula de 50 minutos.

- Comparar rendimentos em diversos tipos de aplicações financeiras. 3 horas/aula de 50 minutos.
- Comparar e emitir juízo sobre diversas opções de financiamento.3 horas/aula de 50 minutos.

Sugestão de atividades (subsídios):

- Comparar questões que envolvam juros simples ou compostos e problemas simples de matemática financeira. Exemplos: cobrança de juros de mora – juros simples - (devido ao atraso em uma prestação); cálculo do rendimento de poupança – juros compostos.
- Fazer estimativas e cálculos dos juros cobrados em financiamentos; comparar formas de pagamento na compra de um bem e emitir juízo sobre a forma mais vantajosa de pagamento.
- Fazer estimativas de dívidas e de rendimentos em diversas situações de juros.
- Buscar em revistas, jornais ou lojas com anúncios de venda de bens como computadores, televisores, etc; para que os alunos calculem a taxa mensal de juros cobrada, ou para que calculem os valores das prestações.
- Elaborar tabelas (planilhas) de amortização. (MINAS GERAIS, 2006, p. 70 e 76)

Metodologia:

Sugere-se método ativo de aprendizagem, estimulando a participação do aluno como protagonista na construção do conhecimento, através da Resolução de Problemas, propostos a seguir.

5.2 Propostas de exercícios resolvidos

Mesmo havendo exemplos de aplicações, de igual nível, apresentados no presente trabalho, outros serão sugeridos. A finalidade é familiarizar o educando com os termos utilizados nos cálculos financeiros.

Exercício proposto 5.1: (IEZZI, 2004, p. 38) Em julho, agosto e setembro as taxas de inflação foram, respectivamente, 1,2%, 0,8% e 1,3%.

a) Qual a taxa acumulada de inflação no período?

b) Qual deverá ser a taxa de inflação de outubro para que a taxa acumulada do quadrimestre seja 4%?

Resolução:

a) A taxa acumulada (j_{ac}) no período é: $j_{ac} = (1+j_1)\cdot(1+j_2)\cdot(1+J_3)\cdots(1+j_n)-1$ onde: $j_1, j_2, j_3, \cdots j_n$ são as taxas mensais de inflação. Sabendo-se que a inflação toma como referência de cálculo produtos em número específico da cesta básica. Comparando-se a variação de um mês para outro. Em meses sucessivos, as variações de percentual multiplicadas, encontra-se a taxa acumulada de inflação, $j_{ac} = (1,012)\cdot(1,008)\cdot(1,013) - 1 = 0,0334 = 3,34\%$.

b) Seja j a taxa de inflação de outubro. Devemos ter $(1,012)\cdot(1,008)\cdot(1,013)\cdot$ $\cdot(1+j) = 0,04$ acarreta $(1,0334)\cdot(1+j) = 1,04$ desse modo $1+j = \dfrac{1,04}{1,0334}$ obtemos $j = 0,064 = 0,64\%$.

Exercício proposto 5.2: (IEZZI, 2004, p.39) (Vunesp-SP) No início de um mês, João poderia comprar M kg de feijão, se gastasse todo o seu salário nessa compra. Durante o mês, o preço do feijão aumentou 30% e o salário de João aumentou 10%. No início do mês seguinte, se gastasse todo o seu salário nessa compra, João só poderia comprar $X\%$ dos M kg de feijão. Calcule X.

Resolução:

Seja S o salário de João e p o preço do quilo de feijão, antes do aumento. Depois do aumento, o salário passou a valer $1,10S$ (nesse caso: $S + 10\%\cdot S$ colocando-se S em evidência a adotando-se a taxa na forma unitária ($\frac{10}{100}$) temos: $= S(1+0,10) =$ $= S\cdot 1,10 = 1,10S$) e o preço do quilo de feijão passou a ser $1,30p$ (procede-se de igual forma: $p + p\cdot 30\% = p + p\cdot 0,30 = p(1+0,30) = 1,30p$).
Como $M = \dfrac{S}{p}$, queremos saber o valor de $\dfrac{1,10S}{1,30p}$.
Temos $\dfrac{1,10S}{1,30p} = 0,8462\cdot\dfrac{S}{p} = 0,8462M$.
Portanto, após os aumentos, João conseguirá comprar com seu salário $84,62\%$ dos M kg de feijão do mês anterior.

Exercício proposto 5.3: (IEZZI, 2004, p. 43) (Vunesp-SP) O preço de tabela de um determinado produto é $R\$1.000,00$. O produto tem um desconto de 10% para pagamento à vista e um desconto de 7,2% para pagamento em 30 dias. Admitindo que o valor desembolsado no pagamento à vista possa ser aplicado pelo comprador em uma aplicação de 30 dias, com um rendimento de 3%, determine:

a) quanto o comprador teria ao final da aplicação;

b) qual a opção mais vantajosa para o comprador: pagar à vista ou aplicar o dinheiro e pagar em 30 dias. Justifique matematicamente sua resposta.

Resolução:

O preço para pagamento à vista é $1000 - 0,10 \cdot (1000) = 900$ (preço á vista = preço do produto - taxa de desconto x preço do produto).

O preço para pagamento em 30 dias é $1000 - 0,072 \cdot (1000) = 928$ (preço á vista= = preço do produto - taxa de desconto x preço do produto).

a) O montante de $R\$900,00$ dentro de 30 dias à taxa de 3% a.m. vale: $M = = 900 + 0,03 \cdot (900) = 927$ (registrado que M é o montante obtido aplicando-se o preço para pagamento á vista).

b) É mais vantajoso pagar à vista, pois, se o comprador aplicar o valor do pagamento à vista por 30 dias, obterá um montante insuficiente para pagar o valor de $R\$928,00$ (faltará $R\$1,00$ para o pagamento).

Exercício proposto 5.4: (IEZZI, 2004, p. 46) (UFMG/1998) Um televisor estava anunciado por $R\$500,00$ para pagamento à vista ou em três prestações mensais de $R\$185,00$ cada uma; a primeira delas a ser paga um mês após a compra. Paulo, em vez de pagar à vista, resolveu depositar, no dia da compra, os $R\$500,00$ numa caderneta de poupança, que lhe renderia 2% ao mês nos próximos três meses. Desse modo, ele esperava liquidar a dívida, fazendo retiradas de $R\$185,00$ daquela caderneta nas datas de vencimento de cada prestação. Mostre que a opção de Paulo não foi boa, calculando quanto a mais ele teve de desembolsar para pagar a última prestação.

Resolução: A fórmula a ser utilizada, montante numa capitalização de juros composta, é $\boxed{M = C(1 + i)^n}$.

A qual possibilitará o cálculo dos montantes (M) de acordo com os períodos indicados no comando da questão. Ressalte-se que a taxa a ser utilizada é na forma unitária: a taxa refere-se à unidade de capital, ou seja, estamos calculando o que rende a aplicação de uma unidade de capital no intervalo de tempo referido pela taxa. Forma percentual: é a taxa aplicada a centos do capital, ou seja, ao que se obtém após dividir-se o capital por 100. Exemplo: 12% a.a. é taxa percentual, ao passo que 0,12 (= 12 ÷ 100) é forma unitária da taxa. Então:

- montante após 1 mês: $500 + (0,02) \cdot 500 = 510$; saldo após a retirada de 185: $510 - 185 = 325$;
- montante após 2 meses: $325 + (0,02) \cdot 325 = 331,50$; saldo após a retirada de 185: $331,50 - 185 = 146,50$;
- montante após 3 meses: $146,50 + (0,02) \cdot 146,50 = 149,43$; portanto, para pagar a 3ª prestação, ele ainda terá que desembolsar $185 - 149,50 = 35,57$.

Assim, nota-se que essa opção não foi boa para Paulo, ao aplicar o que restou após o pagamento da segunda prestação não obteve valor que suportasse o pagamento da terceira e última prestação, tendo de completar o valor.

Exercício proposto 5.5: (IEZZI, 2004, p. 50) (UFJF, adaptado) O preço à vista de uma mercadoria é $R\$130,00$. O comprador pode pagar 20% no ato da compra e o restante em uma única parcela de $R\$128,96$, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, qual a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo?

Resolução:

Por se tratar, expressamente, no cabeçalho de juros simples, temos as seguintes fórmulas referentes a juros simples, $\boxed{J = C \times i \times n}$, e montante; $\boxed{M = C \cdot (1 + i \cdot n)}$.

Se o comprador paga 20% no ato da compra, ele desembolsa, em reais, 20% de 130 escrevemos assim: $(0,20) \cdot 130 = 26$, utilizado-se a taxa na forma unitária; portanto, o valor financiado é $130 - 26 = 104$. A parcela de $R\$128,96$ corresponde ao montante do valor financiado; logo, o juro do financiamento é $128,96 - 104 = 24,96$.

Assim, chamando de i a taxa anual de juros simples do financiamento, teremos: Aplicando-se a fórmula de juros simples: $J = C \times i \times,$ substituindo-se os valores, $24,96 = 104 \cdot i \cdot \dfrac{3}{12}$ que implica $24,96 = 26 \cdot i,$ assim, $i = \dfrac{24,96}{26} = 0,96 = 96\%.$

Noutro giro, poder-se-ia utilizar a fórmula de Montante: $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$, sendo assim $128,96 = 104 \cdot (1 + i \cdot \dfrac{3}{12}) = 104 + 26 \cdot i$ que acarreta em $24,96 = 26 \cdot i$ e obtemos $i = 0,96 = 96\%.$

Isso quer dizer que subtende-se uma taxa de 96% anual cobrada. Observe que o “anúncio”não possui essa taxa escrita.

Exercício proposto 5.6: (MATHIAS; GOMES, 2016, 44) Uma pessoa pretende saldar uma dívida de R$5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., qual o desconto?

Resolução:

Considerando desconto racional ou “por dentro”, haja vista que não foi solicitada a forma do desconto, optou-se pelo racional de juros simples, tem-se a seguinte fórmula $\boxed{D_r = \dfrac{Nin}{1 + in}}$.

Daí:

D_r é desconto racional.

$N = 5.500,00.$

$n = 3$ meses, calculando a taxa proporcional a 1 mês: $i_{12} = \dfrac{0,40}{12}.$

Podemos calcular o desconto assim $D_r = \dfrac{Nin}{1+in}$ então $D_r = \dfrac{5.500 \times \dfrac{0,40}{12} \times 3}{1 + \dfrac{0,40}{12} \times 3}$ encontramos $D_r = \dfrac{5.500,00 \times 0,10}{1+0,10}$ obtendo $D_r = \dfrac{550,00}{1,10} = R\$500,00.$

Esse resultado quer dizer que: ao pagar com 3 meses de antecedência uma dívida nos valores e taxas do enunciado, obterá um desconto (racional) no valor de R$500,00.

Fazendo um contraponto, caso o desconto fosse comercial ou “por fora”, em vez de racional ou “por dentro”, a fórmula do desconto a utilizar é $\boxed{D_c = Nin}$.

Temos D_c é desconto comercial; $N = 5.500,00.$ e $n = 3$ meses, calculando a taxa proporcional a 1 mês: $i_{12} = \dfrac{0,40}{12}$.

Daí $D_c = Nin$ então $D_c = 5.500,00 \times \dfrac{0,40}{12} \times 3 = R\$550,00.$

Constata-se que o desconto comercial supera (é melhor) que o desconto racional.

Exercício proposto 5.7: (IEZZI, 2004, p. 59) (UFPE, adaptado) Em um país irreal, o governante costuma fazer empréstimos para viabilizar sua administração. Existem dois empréstimos possíveis: pode-se tomar emprestado de países ricos, com juros de 4,2% ao ano (aqui incluída a taxa de risco) ou toma-se emprestado dos banqueiros do país irreal, que cobram juros compostos de 3% ao mês. Pressões políticas da oposição obrigam o governante a contrair empréstimos com os banqueiros do seu país. Quantas vezes maiores que os juros anuais cobrados pelos países ricos são os juros anuais cobrados pelos banqueiros do país irreal? (Use a aproximação $1,03^{12} \cong 1,42$.)

Resolução:

A finalidade é comparar a aplicação de taxas de períodos diferentes num mesmo espaço de tempo.

A fórmula aplicável é de juros compostos, como pressuposto da questão, $\boxed{M = C(1+i)^n}$.

- O montante após 1 ano, tomando-se empréstimo junto aos países ricos, vale $M = C(1+i)^n \Rightarrow M_1 = C(1,042)^1$. Portanto, os juros anuais do empréstimo valem $j_1 = 1,042C - C = 0,042C$ (pois o juro é a diferença entre o montante ao final do período de aplicação e o capital aplicado, inicialmente).

- O montante após 1 ano (ou seja: 12 meses), tomando-se empréstimo junto dos banqueiros do país irreal, vale $M = C(1+i)^n \Rightarrow M_2 = C(1,03)^{12} = 1,42C$. Portanto, os juros anuais do empréstimo valem $j_2 = 1,042C - C = 0,42C$.

Assim, j_2 é 10 vezes maior que j_1, pois $\dfrac{j_2}{j_1} = \dfrac{0,42}{0,042} = 10.$

Sendo assim, conclui-se que os juros do empréstimo tomado junto aos banqueiros do país irreal é dez vezes o valor dos juros tomado junto aos países ricos.

Exercício proposto 5.8: (IEZZI, 2004, p. 62)Um capital C é aplicado a uma taxa mensal de juros i durante n meses. Para que valores de n o montante a juros simples é maior que o montante a juros compostos?

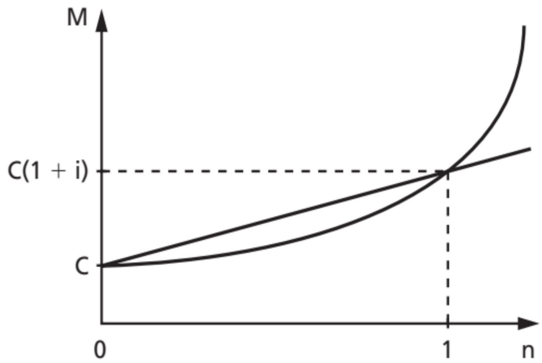
Resolução:

Temos os elementos abaixo:

- O montante a juros simples é $M = C + C \cdot i \cdot n$, e o gráfico de M em função de n é uma reta; para $n = 0$ temos $M = C$, e para $n = 1$ temos $M = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i)$.
- O montante a juros compostos é $M = C \cdot (1 + i)^n$, e o gráfico de M em função de n é uma curva exponencial crescente; para $n = 0$ temos $M = C$, e para $n = 1$ temos $M = C \cdot (1 + i)$.

Os gráficos das duas funções são apresentados, sendo a curva referente aos juros compostos e a semirreta refente aos juros simples, abaixo:

Figura 8 – Gráfico de comparação entre juros simples e composto



Fonte: Iezzi (2004).

Assim, verifica-se que, para $0 < n < 1$, o montante a juros simples é maior que o montante a juros compostos. Por esse motivo é que instituições bancárias aplicam juros simples para períodos curtos.

Exercício proposto 5.9: (IEZZI, 2004, p. 68) (UFRJ/1998, adaptado) A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Certa mercadoria, cujo preço à vista é VA, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$ 100,00 de entrada, uma prestação de R$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$ 220,00 a ser paga em 60 dias. Determine VA, o valor de venda à vista dessa mercadoria.

Resolução:

A estratégia para resolução é "trazer"as prestações programadas para o futuro a data atual, calculando-se o valor atual, que será o preço à vista.

Para tanto, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{VA = \frac{P_1}{(1+i)^1} + \frac{P_2}{(1+i)^2} + \frac{P_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P_n}{(1+i)^n}}.$$

Temos os seguintes dados:

VA a ser obtido;

$i = 10\%$ a.m.

P_1=100; P_2=240 e P_3=220.

O valor à vista VA (em reais) é o valor atual das prestações, na data da compra, isto é:

$$VA = 100 + \frac{240}{(1,10)^1} + \frac{220}{(1,10)^2} = 500.$$

Denota que o preço à vista é R$500,00, demonstrando o quão caro ficou a mercadoria comprada a prazo.

Exercício proposto 5.10: (IEZZI, 2004, p. 71)Um automóvel 0 km é vendido à vista por R$ 32.000,00 ou a prazo com 20% de entrada mais 24 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos do financiamento for de 1,8% a.m.?

Resolução:

Como existe uma entrada de 6.400,00 (= 20% de 32.000,00), o valor financiado é $32.000,00 - 6.400,00 = 25.600,00$. Portanto, chamando de P o valor de cada prestação, devemos ter:

Para tanto, a fórmula de séries uniformes que consiste em pagamentos periódicos, em intervalos de tempo iguais:

$$\boxed{A = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}}.$$

Daí $25.600 = P \cdot \dfrac{(1,018)^{24} - 1}{(1,018)^{24} \cdot 0,018}$ então $25.600 = R \cdot 19,3495$ e obtemos $R = 1.323,03.$

Frisando que os pagamentos ocorreram em intervalos de tempo iguais, sendo assim série uniforme.

Exercício proposto 5.11: (IEZZI, 2004, p. 75) A Sra. Marli pretende custear os estudos universitários de seu filho, estimados em R$1.800,00 por mês, durante 60 meses. Para isso, ela resolve depositar k reais por mês num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,2% a.m., num total de 48 depósitos. Sabendo-se que serão sacados R$ 1.800,00 por mês desse fundo, sendo o primeiro saque realizado 1 mês após o último depósito, obtenha o valor de k.

Resolução:

Temos:

- Trata-se de série uniforme de pagamentos (mensalidade dos estudos) **estimados**, haja vista que os pagamentos serão em períodos iguais. Sendo útil a fórmula do cálculo do valor atual (VA):

$$\boxed{VA = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}}.$$

Desse modo o valor atual dos saques de R$ 1800,00 (P) por mês, durante 60 meses (n), com a taxa de 1,2% a.m. (i) é:

$$VA = 1.800 \cdot \frac{(1,012)^{60} - 1}{(1,012)^{60} \cdot 0,012} = 76.673,58.$$

- O montante dos 48 (n) depósitos (aplicação) deve ser igual a R$ 76.673,58 (VA), sendo K o valor da prestação (depósitos) e a taxa de 1,2% a.m. (i).

Portanto $76.673,58 = k \cdot \dfrac{(1,012)^{48} - 1}{(1,012)^{48} \cdot 0,012}$ dessa forma $76.673,58 = k \cdot (64,4017)$ então $k = 1.190,55.$

Destarte, esse é o valor a ser depositado por 48 meses para obter um montante (R$ 76.673,58) que possibilite o desembolso de R$ 1.800,00 mensais, durante 60 meses.

5.3 Atividade dirigida ou extraclasse

Abaixo colacionamos uma atividade com números reduzidos para prática dos três sistemas de amortização de financiamento.

Uma dívida de 120 reais é paga, com juros de 5% ao mês, em 6 meses. Façamos as planilhas de amortização (SAC, SFA e SACRE):

I - SAC: para calcularmos o valor da amortização (constante), devemos dividir o valor do financiamento pelo número de meses do prazo para quitação, assim, no exemplo dado, temos $\frac{1}{6}$ da dívida inicial, logo $A = \frac{D_0}{k}$ então $A = \frac{120}{6} = 20$ reais.

Desse modo, o valor constante da amortização é 20.

- Período 1 (SAC):

  Os juros ($j_k,\quad$ com $k \in \mathrm{N}^*$) são calculados multiplicando-se a taxa de juros (i) contratada pelo saldo devedor (D_0) ao final do primeiro período $j_1 =$ $= i \times D_0$ então $j_1 = 0,05 \times 120$ temos $j_1 = 6$ reais.

  A prestação (P), por sua vez, é o resultado da soma da amortização constante (A) com os juros (j), assim $P_1 = A + j_1$ então $P_1 = 20 + 6$ dessa forma $P_1 =$ $= 26$ reais.

  O saldo devedor ao fim do período será a diferença entre o saldo devedor ao final do período anterior (D_0) e a amortização (constante: A), dessa maneira $D_1 = D_0 - A$ então $D_1 = 120 - 20$ implica $D_1 = 100$ reais

- Período 2 (SAC):

  Os Procedimentos do período 1 serão repetidos nos cinco períodos restantes, fazendo as modificações necessárias nos valores:

  $j_2 = i \times D_1 \Rightarrow j_2 = 0,05 \times 100 \Rightarrow j_2 = 5$ reais.

  $P_2 = A + j_2 \Rightarrow P_2 = 20 + 5 \Rightarrow P_2 = 25$ reais.

  $D_2 = D_1 - A \Rightarrow D_2 = 100 - 20 \Rightarrow D_2 = 80$ reais.

- Período 3 (SAC):

  $j_3 = i \times D_2 \Rightarrow j_3 = 0,05 \times 80 \Rightarrow j_3 = 4$ reais.

  $P_3 = A + j_3 \Rightarrow P_3 = 20 + 4 \Rightarrow P_3 = 24$ reais.

  $D_3 = D_2 - A \Rightarrow D_3 = 80 - 20 \Rightarrow D_3 = 60$ reais.

- Período 4 (SAC):

  $j_4 = i \times D_3 \Rightarrow j_4 = 0,05 \times 60 \Rightarrow j_4 = 3$ reais.

  $P_4 = A + j_4 \Rightarrow P_4 = 20 + 3 \Rightarrow P_4 = 23$ reais.

  $D_4 = D_3 - A \Rightarrow D_4 = 60 - 20 \Rightarrow D_4 = 40$ reais.

- Período 5 (SAC):

  $j_5 = i \times D_4 \Rightarrow j_5 = 0,05 \times 40 \Rightarrow j_5 = 2$ reais.

  $P_5 = A + j_5 \Rightarrow P_5 = 20 + 2 \Rightarrow P_5 = 22$ reais.

  $D_5 = D_4 - A \Rightarrow D_5 = 40 - 20 \Rightarrow D_5 = 20$ reais.

- Período 6 (SAC):

$j_6 = i \times D_5 \Rightarrow j_6 = 0,05 \times 20 \Rightarrow j_6 = 1$ reais.

$P_6 = A + j_6 \Rightarrow P_6 = 20 + 1 \Rightarrow P_6 = 21$ reais.

$D_6 = D_5 - A \Rightarrow D_6 = 20 - 20 \Rightarrow D_6 = 0.$

II - SFA: no sistema francês, primeira operação a ser realizada é o cálculo da prestação fixa (constante)

$$P = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 120 \cdot \frac{0,05}{1-1,05^{-6}} = 23,64 \text{ reais.}$$

- Período 1 (SFA):

Os juros do período 1 são calculados sobre a dívida inicial (valor do financiamento, D_0), assim $j_1 = i \times D_0$ então $j_1 = 0,05 \times 120$ dessa forma $j_1 = = 6$ reais.

Após a obtenção do valor dos juros para o período, pode-se determinar o valor da amortização que será o resto da subtração da prestação pelos juros, então $A_1 = P - j_1$ desse modo $A_1 = 23,64 - 6$ implica $A_1 = 17,64$ reais.

O valor da amortização é descontado do valor da dívida inicial (saldo devedor para obtermos o valor da dívida ao final do período 1, temos $D_1 = D_0 - - A_1$ então $D_1 = 120 - 17,64$ tem-se $D_1 = 102,36$ reais.

Acentuando que a amortização será o resultado da diferença entre o valor da prestação fixa, calculado inicialmente, e o valor dos juros no período.

Sendo assim nos demais períodos:

- Período 2 (SFA):

$j_2 = i \times D_1 \Rightarrow j_2 = 0,05 \times 102,36 \Rightarrow j_2 = 5,12$ reais.

$A_2 = P - j_2 \Rightarrow A_2 = 23,64 - 5,12 \Rightarrow A_2 = 18,52$ reais.

$D_2 = D_1 - A_2 \Rightarrow D_2 = 102,36 - 18,52 \Rightarrow D_2 = 83,84$ reais.

- Período 3 (SFA):

$j_3 = i \times D_2 \Rightarrow j_3 = 0,05 \times 83,84 \Rightarrow j_3 = 4,19$ reais.

$A_3 = P - j_3 \Rightarrow A_3 = 23,64 - 4,19 \Rightarrow A_3 = 19,45$ reais.

$D_3 = D_2 - A_3 \Rightarrow D_3 = 83,84 - 19,45 \Rightarrow D_3 = 64,39$ reais.

- Período 4 (SFA):

$j_4 = 0,05 \times 64,39 \Rightarrow j_4 = i \times D_3 \Rightarrow j_4 = 3,22$ reais.

$A_4 = P - j_4 \Rightarrow A_4 = 23,64 - 3,22 \Rightarrow A_4 = 20,42$ reais.

$D_4 = D_3 - A_4 \Rightarrow D_4 = 64,39 - 20,42 \Rightarrow D_4 = 43,97$ reais.

- Período 5 (SFA):

$j_5 = i \times D_4 \Rightarrow j_5 = 0,05 \times 43,97 \Rightarrow j_5 = 2,20$ reais.

$A_5 = P - j_5 \Rightarrow A_5 = 23,64 - 2,20 \Rightarrow A_5 = 21,44$ reais.

$D_5 = D_4 - A_5 \Rightarrow D_5 = 43,97 - 21,44 \Rightarrow D_5 = 22,53$ reais.

- Período 6 (SFA):

$j_6 = i \times D_5 \Rightarrow j_6 = 0,05 \times 22,53 \Rightarrow j_6 = 1,13$ reais.

$A_6 = P - j_6 \Rightarrow A_6 = 23,64 - 1,13 \Rightarrow A_6 = 22,51$ reais.

$D_6 = D_5 - A_6 \Rightarrow D_6 = 22,53 - 22,51 \Rightarrow D_6 = 0,02$ reais.

III - SACRE: no sistema de amortização crescente, divide-se o período de quitação do financiamento em subperíodos, no exemplo, dado, considerou-se 2(dois) subperíodos do prazo de quitação do financiamento, 6 meses dividido por 2 subperíodos iguais.

$\Rightarrow$ subperíodo do prazo de quitação do financiamento 1 (3 meses):

Período 1.1 (SACRE):

A amortização, no período 1 do subperíodo 1, é obtida dividindo-se o valor do financiamento (D_0) pelo período de quitação (como é feito no SAC), assim $A_1 = = \frac{D_0}{n} = \frac{120}{6} = 20$ que nos dá $A_1 = 20$ reais.

Quanto ao juros, nenhuma novidade em relação aos sistemas vistos até aqui, aplica-se a taxa de juros do contrato ao saldo devedor (dívida) ao final do período anterior, sendo o período 1, ao valor do financiamento, onde $j_1 = i \times D_0$ então $j_1 = 0,05 \times 120$ temos $j_1 = 6$ reais

A determinação do valor da prestação (fixa) do primeiro subperíodo do prazo de quitação da dívida é realizada no período 1. Consiste em somar o valor dos juros com a amortização calculada, acima. Temos $P_1 = j_1 + A_1$ então $P_1 = = 6 + 20$ tem-se $P_1 = 26$ reais (prestação fixa para o primeiro subperíodo).

O saldo da dívida ao final do primeiro período é calculado de forma simples: subtraindo a amortização do saldo devedor do início do período. Então $D_1 = = D_0 - A_1$ logo $D_1 = 120 - 20 = 100$ dessa forma $D_1 = 100$ reais.

Para os períodos seguintes, dentro do subperíodo do prazo de quitação, a sistemática é a mesma quanto ao cálculo dos juros, amortização e saldo devedor:

- Período 1.2 (SACRE):

$j_2 = i \times D_1 \Rightarrow j_2 = 0,05 \times 100 \Rightarrow j_2 = 5$ reais.

$A_2 = P_2 - j_2 = 26 - 5 \Rightarrow A_2 = 21$ reais.

$D_2 = 100 - 21 \Rightarrow D_2 = 79$ reais.

- Período 1.3 (SACRE):

$j_3 = i \times D_2 \Rightarrow j_3 = 0,05 \times 79 \Rightarrow j_3 = 3,95$ reais.

$A_3 = P_3 - j_3 = 26 - 3,95 \Rightarrow A_3 = 22,05$ reais.

$D_3 = D_2 - A_3 \Rightarrow D_3 = 79 - 22,05 \Rightarrow D_3 = 56,95$ reais.

$\Rightarrow$ subperíodo do prazo de quitação do financiamento 2 (3 meses):

- Período 2.4 (SACRE):

Atente-se para o fato de que a amortização no início do subperíodo (2, no caso) é calculada considerando o período restante, 3 meses, do financiamento, temos $A_4 = \dfrac{D_3}{n-3} = \dfrac{56,95}{3} = 18,98$ então $A_4 = 18,98$ reais. Logo

$j_4 = i \times D_3 \Rightarrow j_4 = 0,05 \times 56,95 \Rightarrow j_4 = 2,85$ reais.

$P_4 = j_4 + A_4 \Longrightarrow P_4 = 21,83$ reais (prestação fixa para o subperíodo do prazo de quitação).

$D_4 = D_3 - A_4 \Rightarrow D_4 = 56,95 - 18,98 \Rightarrow D_4 = 37,97$ reais.

- Período 2.5 (SACRE):

$j_5 = i \times D_4 \Rightarrow j_5 = 0,05 \times 37,97 \Rightarrow j_5 = 1,90$ reais.

$A_5 = P_5 - j_5 = 21,83 - 1,90 \Rightarrow A_5 = 19,93$ reais.

$D_5 = D_4 - A_5 \Rightarrow D_5 = 37,97 - 19,93 \Rightarrow D_5 = 18,04$ reais.

- Período 2.6 (SACRE):

$j_6 = i \times D_5 \Rightarrow j_6 = 0,05 \times 18,04 \Rightarrow j_6 = 0,90$ reais.

$A_6 = P_6 - j_6 = 21,83 - 0,90 \Rightarrow A_6 = 20,93$ reais.

$D_6 = D_5 - A_6 \Rightarrow D_6 = 18,04 - 20,93 \Rightarrow D_6 = -2,89.$

A Tabela é, portanto:

Tabela 13 – Comparação SAC, SFA e SACRE

	SAC				SFA				SACRE			
k	P_k	A_k	j_K	D_k	P_k	A_k	j_K	D_k	P_k	A_k	j_K	D_k
0	-	-	-	120	-	-	-	120	-	-	-	120
1	26	20	6	100	23,64	17,64	6	102,36	26	20	6	100
2	25	20	5	80	23,64	18,52	5,12	83,84	26	21	5	79
3	24	20	4	60	23,64	19,45	4,19	64,39	26	22,05	3,95	56,95
4	23	20	3	40	23,64	20,42	3,22	43,97	21,83	18,98	2,85	37,97
5	22	20	2	20	23,64	21,44	2,20	22,53	21,83	19,93	1,90	18,04
6	21	20	1	-	23,66	22,53	1,13	0,00	18,94	18,04	0,90	0,00
Total	141	120	21	-	141,86	120	21,86	-	140,60	120	20,60	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Cumpre registrar, por necessário, que na planilha acima, nas colunas do SFA, a última amortização (A_6) que deveria ser no valor de $22,51$, resultando numa prestação (P_6) no valor de $23,64$, foi alterada com a finalidade de reduzir a 0,00(zero) o valor do saldo devedor (D_6), que havia sido, nos cálculos, de $0,02$. Como consequência os totais de P_k e A_k foram alterados, respectivamente, para: $141,86$ e 120 em vez de $141,84$ e $119,98$, como se encontram nas operações anteriores à planilha.

Merece a mesma observação os valores da coluna do SACRE: que nos cálculos precedentes foram encontrados: $A_6 = 20,93$; $P_6 = 21,83$ e $D_6 = -2,89$; feitos os ajustes, ficaram alterados os valores totais de: P_k para 140,60; A_k para 120 e D_k para $0,00$.

Preferiu-se modificar adequadamente os valores conforme apresentados na planilha objetivando proporcionar maior clareza na visualização e na comparação de vantagens entre um e outro sistema de amortização. Destacando que o SACRE é utilizado para financiamento de longo prazo cujos subperíodos, normalmente, são de 12 (doze) meses, mostrando ser um dos mais vantajosos sistemas de amortização, tendo em vista a Tabela 13, podemos afirmar que o que se paga nos somatórios de prestações e juros é menor do que é pago no SAC e SFA.

6 CONCLUSÃO

A educação constitui-se em ferramenta para formação de pessoas que possam interagir em sociedade, buscando alcançar objetivos individuais que se refletem na vida da comunidade. Atento a isso, verifica-se a eficácia da matemática financeira para proporcionar segurança na atuação cotidiana dos cidadãos para agirem eficientemente diante de situações ligadas às finanças.

Pela grande quantidade de situações relacionadas às finanças, no dia a dia de nossas vidas, as técnicas de cálculos expostas no presente trabalho servem de base para educadores, bem como de referência para educandos. Nessa esteira, os exemplos foram escolhidos de maneira a possibilitar o entendimento através de mecanismos simples ou complexos, mas sem perder o fio condutor de incutir nos leitores conhecimentos fundamentais e necessários à aprendizagem.

Os sistemas de amortização são de indispensável entendimento. O presente trabalho buscou a simplicidade sem perder de vista as possíveis conjunturas mais complicadas que possam surgir.

O trabalho não ficou detido em cálculos e longas planilhas, teve o cuidado de mencionar a legislação, tanto da seara da educação voltada à necessidade do ensino de Matemática Financeira, quanto a normas que disciplinam o financiamento imobiliário. Sem exaurir o assunto, tornando-se referência, em especial sobre regulação do financiamento, para aqueles que queiram se aprofundar sobre outros tantos temas pertinentes.

Analisando os principais sistemas de amortizações é possível verificar que o SACRE apresenta vantagens em relação ao SAC e SFA, quais sejam o somatório de prestações é menor e somado valor pago de juros é também menor no SACRE. A evolução da amortização é crescente no SFA e fica estável no SAC e SACRE. Quanto à prestação, sua evolução é estável no SFA, ao passo que no SAC e SACRE é decrescente.

Ficou demonstrada a utilidade dos conhecimentos apresentados para a educação de jovens que interagem com a Matemática Financeira no seu cotidiano. Cidadãos esclarecidos que entendem o que se passa nas operações financeiras, com as quais se deparam no seu dia a dia, podem obter maior segurança e tranquilidade, afetando positivamente as pessoas e os meios em que vivem.

A proposta pedagógica tem por finalidade inicial familiarizar o educando com a linguagem da matemática financeira, bem como a realização de exercícios de fixação de conteúdos afetos às operações financeiras. São apresentadas sugestões de atividades que podem cativar o interesse dos alunos, motivando-os a estenderem a pesquisa a conteúdos correlatos com sua realidade de vida.

As ofertas de imóveis, ou mesmo produtos relacionados à moradia, são muitas e constantes, sendo necessário saber priorizar e comprar. A compra consciente de um imóvel, tema tão importante para realidade econômica que o país passa, tem forte relação com os ensinamentos tratados na pesquisa.

Dessa maneira, o presente trabalho cumpre a meta de levar o tema financiamento imobiliário aos estudantes, para contribuir com o desenvolvimento de planejamento e investimentos conscientes de uma geração que se encontra nas escolas. Ao investigar e analisar o financiamento imobiliário e outros mecanismos da matemática financeira, esta pesquisa contribui com a construção de competências necessárias para que estudantes enfrentem os desafios sociais e econômicos da sociedade e promovam o exercício da cidadania.

REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

BARBOSA, C.; CERBASI, G. P. **Mais tempo mais dinheiro**. Rio de Janeiro: Thomas Nelson Brasil, 2009.

BRASIL. **Lei nº 4.380, de 21 de agosto de 1964**. Brasília: Ministério da Economia, 1964.

____. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Brasília: Ministério da Educação, 1996.

____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: [s.n.], 1998.

____. **Resolução CNE/CEB Nº 04/2010, de 13 de julho de 2010.** Brasília: Conselho Nacional de Educação, 2010.

____. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

____. **Resolução BACEN nº 4.676, de 31 de julho de 2018**. Brasília: Banco Central do Brasil, 2018.

____. **Decreto nº 10.393, de 09 de junho de 2020**. Brasília: Ministério da Educação, 2020.

BRASIL, B. C. do. **Relatório de Estabilidade Financeira**. 2017. Acesso em outubro de 2020 Disponível em https://www.bcb.gov.br/publicacoes/ref/201710.

CARRILHO, P. Q. **O seu primeiro milhão: como fazer seu dinheiro crescer**. 1. ed. São Paulo: Planeta, 2012.

CERBASI, G. P. **Casais inteligentes enriquecem juntos**. São Paulo: Editora Gente, 2004.

____. **Pais inteligentes enriquecem seus filhos**. Rio de Janeiro: Sextante, 2011.

CVM, C. de V. M. **[S. l]**. 2017a? Disponível em: <https://www.vidaedinheiro.gov.br/educacao-financeira-no-mundo/> Acesso: 12 jun 2020.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Editora UNICAMP, Campinas/SP, 2004.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de matemática elementar**. 1. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 11.

LIBâNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

MINAS GERAIS. **Conteúdo Básico Comum: Matemática (Ensino Médio)**. Belo Horizonte: Secretaria de Estado de Educação, 2006.

____. **Currículo de Referência de Minas Gerais**. [S.I.]: Secretaria de Estado de Educação, 2018. Disponível em:<https://https://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/20181012%20-%20Curr%C3%ADculo%20Refer%C3%AAncia%20de%20Minas%20Gerais%20vFinal.pdf> Acesso em 24 de fev 2022.

MORAES, A. de. **Direito Constitucional**. 28. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e matemática financeira**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PINTO, T. dos S. **Governo Sarney - Economia**. [S.I.]: Brasil Escola, 2020. Acesso em 17 de junho de 2020. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiab/governo-sarney.htm.

PRATA, M. **Posso ter de pagar bem mais pelo financiamento no sistema price**. 2017. Acesso em 26 de fevereiro de 2022. Disponível em: https://exame.com/invest/minhas-financas/posso-ter-de-pagar-bem-mais-pelo-financiamento-no-sistema-price/.

ROCHA JÚNIOR, A. B. da. **Abordagens cronológicas no ensino de Matemática Financeira. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

ROSSEAU, C.; Saint-Aubin, Y. **Matemática e atualidades volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. Tradução: FRASSON Miguel V. S.

SILVA, D. P. e. **Vocabulário Jurídico/atualizadores Nagib Slaibi Filho e Gláucia Carvalho**. 28. ed. Rio de Janeiro: Forense, 2009.

SOARES, F. P.; ALVIM, M. A. **Lar S.A.: você e sua família na rota da prosperidade**. 2. ed. São Paulo: Saraiva: Letras & Lucros, 2007.