



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



# INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

REINAN DA SILVA MOURA

Cruz das Almas-Bahia  
Fevereiro de 2022

# INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

REINAN DA SILVA MOURA

ORIENTADOR : PROF. DR. DANILO DE JESUS FERREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Cruz das Almas-Bahia**

Fevereiro de 2022

## FICHA CATALOGRÁFICA

M929i	<p>Moura, Reinan da Silva. Introdução à geometria esférica e algumas aplicações / Reinan da Silva Moura._ Cruz das Almas, Bahia, 2022. 57f.; il.</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira.</p> <p>1.Matemática – Geometria – Esfera. 2.Matemática – Problemas, exercícios, etc – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.</p> <p>CDD: 516.3</p>
-------	--

Ficha elaborada pela Biblioteca Central de Cruz das Almas - UFRB.  
Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).  
(os dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico).

# INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESFÉRICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

REINAN DA SILVA MOURA

ORIENTADOR : PROF. DR. DANILO DE JESUS FERREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

## BANCA EXAMINADORA:

Daniilo de Jesus Ferreira

Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira (Orientador)

UFRB

Lutz Alberto de Oliveira Silva

Prof. Dr. Lutz Alberto de Oliveira Silva

UFRB

Amanda A. F. Nunes

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

Unilab

Cruz das Almas-Bahia

Fevereiro de 2022

# Agradecimentos

À Deus por me dar força e me oportunizar alcançar, entre outras, também esta conquista. Possibilitando, por meio da minha capacitação, concluir este estudo e aprimorar os meus conhecimentos e minha carreira profissional.

À minha esposa pelo companheirismo, compreensão, e sobretudo, os incentivos nos momentos mais críticos.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio, pelas orações e incentivo.

Aos meus colegas de trabalho, pela torcida e pelo apoio.

Aos meus colegas de estudo, tanto da minha turma quanto da turma anterior, que no decorrer do curso incentivaram, apoiaram, contribuíram e fortaleceram o laço de amizade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Danilo Ferreira de Jesus, pela paciência, compreensão e didática, pelas contribuições durante o processo de formação e ainda pela dedicação durante a elaboração deste trabalho compartilhando, sempre da melhor maneira, os seus conhecimentos.

E por fim, a todo corpo docente da UFRB, de maneira especial aos que lecionaram disciplinas neste curso, e à SBM pelo programa PROFMAT.

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar alguns dos principais resultados da Geometria Esférica, relacionando-os com a Geometria Euclidiana e apontando a importância para o conhecimento de Geometrias Não-Euclidianas, para isto, são apresentados alguns conceitos e definições como o de Esfera, Reta, Ponto, Triângulos esféricos, Polígonos e Poliedros que servem como pré-requisitos para melhor compreensão do estudo realizado. Além disso, são apresentadas algumas aplicações do tema abordado, como o Teorema de Euler para Poliedros Convexos e Congruências de Triângulos Esféricos.

**Palavras-chave:** Geometria Esférica. Geometria Não-Euclidiana. Teorema de Euler. Poliedros Convexos. Congruências de Triângulos Esféricos.

# Abstract

This work aims to present some of the main results of Spherical Geometry, relating them to Euclidean Geometry and pointing out the importance for the knowledge of Non-Euclidean Geometries, for this, some concepts and definitions are presented such as Sphere, Line, Point, Spherical Triangles, Polygons and Polyhedra that serve as prerequisites for a better understanding of the study carried out. Moreover, some applications of the topic are presented, such as Euler's Theorem for Convex Polyhedra and Congruence of Spherical Triangles.

**Keywords:** Spherical Geometry. Non-Euclidean Geometry. Euler's Theorem. Convex Polyhedra. Congruences of Spherical Triangles.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Pré-requisitos</b>	<b>3</b>
1.1 A Esfera . . . . .	3
1.2 Poliedros . . . . .	11
<b>2 Geometria Esférica</b>	<b>14</b>
2.1 Alguns Resultados da Geometria Esférica . . . . .	14
2.2 Trigonometria Esférica . . . . .	26
<b>3 Aplicações</b>	<b>36</b>
3.1 O Teorema de Euler para Poliedros Convexos . . . . .	36
3.2 Congruência de Triângulos Esféricos . . . . .	43
<b>4 Considerações Finais</b>	<b>47</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>

# Introdução

O interesse em desenvolver um trabalho com a temática Geometria Esférica se deu durante minha trajetória acadêmica que pouco explorou estudos nesta temática, mas que com alguns estudos pude perceber a relevância da Geometria Esférica no processo de formação. Vale destacar, que desde a graduação em Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), a Geometria sempre foi o ramo da Matemática que tive maior afinidade e aproximação, porém esse contato se deu em maior escala com a Geometria Euclidiana, que inclusive me possibilitou desenvolver um trabalho voltado a Geometria Espacial.

Nesses estudos pude perceber que a Geometria é de fundamental importância para formação do educando, sobretudo pelas contribuições nessa formação, seja por meio do estudo do espaço, formas existentes nele e as relações entre elas, ou ainda pelo estudo de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas reais, como aponta Brasil (2018, p.269) ao afirmar que "A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.". Oliveira (2004) ainda afirma que o desconhecimento da Geometria pode interferir na compreensão da relação homem e espaço físico, limitando o pensar geométrico e dificultando o entendimento da matemática e sua relação com outras áreas do conhecimento.

Do exposto, podemos inferir que o estudo da Geometria é indispensável para a formação do indivíduo, tendo em vista o quanto contribui para o desenvolvimento de habilidades necessárias na resolução de problemas do cotidiano. Considerando ainda que há diferentes campos de atuação, se faz necessário o estudo das diferentes geometrias existentes, para que assim, possam ampliar as possibilidades dentro dos diferentes contextos possíveis. Todavia, o estudo de Geometrias Não-Euclidianas não tem sido muito explorado nos cursos de licenciaturas e bacharelados em Matemática e nem faz parte da grade curricular do ensino básico, tampouco tem sido relacionado com o estudo da Geometria Euclidiana aplicada nas salas de aulas. No entanto, o estímulo por estudos de Geometrias Não-Euclidianas pode ampliar as perspectivas nas diversas áreas do conhecimento. A História da Matemática nos mostra um pouco dessa necessidade de ampliar os estudos para outras geometrias assim como aconteceu no passado.

De maneira geral, segundo Eves (1992) a Geometria foi se constituindo a partir de situações reais por meio de observações, comparações de formas e tamanhos e identificação de padrões. Esses conhecimentos geométricos foram se ampliando gradativamente de acordo com as descobertas a partir das necessidades humanas, até que deixassem de ser uma ciência empírica e se tornassem uma ciência matemática.

Euclides escreveu sua famosa obra "Elementos" por volta de 300 a.C., sendo por muito tempo o segundo livro com maior número de edições, perdendo apenas para bíblia. O livro foi organizado de forma simples e rigorosa, partindo de 5 postulados, 5 axiomas e algumas definições para que assim, demonstrasse os teoremas presentes em sua obra. Essa Geometria foi considerada a única por aproxi-

---

madamente dois mil anos, até os matemáticos Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann desenvolverem outras geometrias tão consistentes quanto a Euclidiana. Essas geometrias partem da substituição do quinto postulado de Euclides, conhecido também como postulado das paralelas, que afirma que por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.

O primeiro trabalho publicado sobre Geometria Não-Euclidiana foi o do russo Nicolai Lobachevsky em 1826, apresentada à Sociedade de Física-Matemática, ao qual, não teve muita aceitação. Quase simultaneamente, o matemático húngaro Janos Bolyai contribuiu no desenvolvimento desta geometria de maneira independente, Félix Klein (1849 - 1925) deu o nome de "Geometria Hiperbólica". Essa geometria admite todos os postulados da Geometria Euclidiana, com exceção do quinto postulado.

Posteriormente, com o desenvolvimento de uma Geometria Não-Euclidiana, naturalmente surgiu questionamentos a respeito da possibilidade de outras geometrias. Com isso, em 1851, o matemático alemão Georg Bernhard Riemann apresentou em uma aula inaugural para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Gottingen, a Geometria de Riemann, que viria a ser batizada por Félix Klein (1849 - 1925) como "Geometria Elíptica", dando assim, origem a Geometria Esférica, que se trata de uma geometria da superfície bidimensional de uma esfera. Esta Geometria também contraria o quinto postulado de Euclides, pois para a Geometria de Riemann, quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro. Além disso, outros postulados sofrem alterações nessa geometria.

Neste sentido, o objetivo desta pesquisa é apresentar alguns resultados importantes da Geometria Esférica, suas propriedades, relações com a Geometria Euclidiana e algumas aplicações. O desenvolvimento deste trabalho foi feito por meio de uma pesquisa de caráter bibliográfico que possibilitou o embasamento teórico. O trabalho está estruturado para além da introdução, em mais quatro capítulos. O primeiro capítulo apresenta os pré-requisitos, em que são apresentados a *Esfera* como plano da Geometria Esférica, seus principais elementos, *Poliedros*, os elementos que os compõem e *Triângulos Esféricos*, com o intuito de auxiliar na compreensão das aplicações. No segundo capítulo apresentamos alguns dos principais resultados da Geometria Esférica e da Trigonometria Esférica. No terceiro capítulo, abordamos algumas aplicações decorrentes da Geometria Esférica, como o Teorema de Euler para Poliedros Conve-xos e Congruências de Triângulo Esféricos. E por fim, no quarto capítulo apresentamos as considerações finais sobre o estudo realizado.

# Capítulo 1

## Pré-requisitos

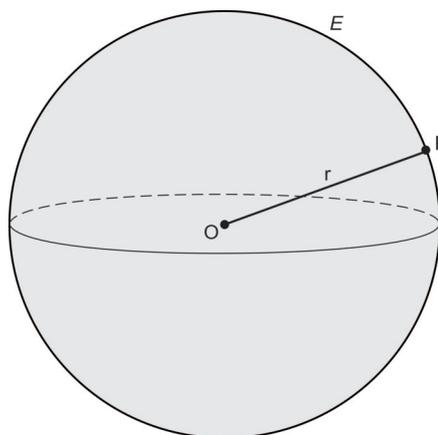
Este capítulo será dedicado a apresentar alguns conceitos, definições e propriedades que ajudarão na compreensão do estudo pretendido acerca da Geometria Esférica. Vale destacar que alguns desses conceitos são os mesmos adotados na Geometria Euclidiana, porém há conceitos que são peculiares da Geometria Esférica. Veremos isso com melhor clareza nas seções seguintes.

### 1.1 A Esfera

Inicialmente iremos conhecer a definição da esfera, tendo em vista que a Geometria Esférica é uma geometria bidimensional sobre a superfície esférica.

**Definição 1.1.** (*Esfera*) - Sejam dados um ponto  $O$  do espaço e  $r$  um número real positivo. A *esfera*  $E$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  que estão a uma distância de  $O$ , menor ou igual a  $r$ . Dizemos que  $r$  é o raio da esfera  $E$  e  $O$  é o centro da esfera  $E$ .

Figura 1.1: Esfera  $E$ .



Fonte: Acervo do autor.

Na figura acima, o segmento  $OP$  é o raio da esfera  $E$  de centro  $O$ .

Vale salientar que alguns livros apresentam a definição da esfera, apenas como o lugar geométrico dos pontos  $P$  que distam  $r$  de  $O$ . Porém, aqui neste trabalho, devido a outras definições que encontramos, usaremos esta definição apenas para nos referir à superfície esférica, como mostraremos abaixo.

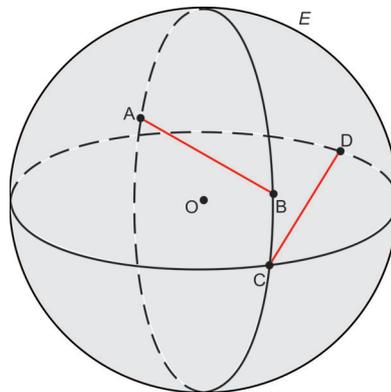
**Definição 1.2. (Superfície Esférica)** Uma *superfície esférica* é o lugar geométrico dos pontos  $P$  que distam exatamente  $r$  do centro  $O$  da esfera.

Sendo assim, neste trabalho estudaremos apenas a superfície esférica. Na Geometria Esférica a superfície esférica faz o mesmo papel que o plano na Geometria Euclidiana, desta maneira, os pontos, retas, polígonos, dentre outros elementos, são elementos da superfície esférica. A partir disto, podemos conhecer outros conceitos importantes que nos apoiarão na compreensão do estudo, e é o que faremos a seguir:

**Definição 1.3. (Corda)** - Uma *corda* de uma superfície esférica é o segmento plano de reta definido por dois pontos distintos da superfície esférica.

Na figura a seguir, os segmentos planos de retas  $AB$  e  $CD$  são exemplos de corda da esfera  $E$ , e qualquer outro segmento que atenda a definição também o será.

Figura 1.2: Corda da Superfície Esférica.

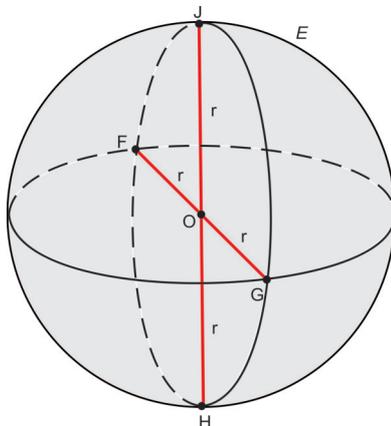


Fonte: Acervo do autor.

**Definição 1.4. (Diâmetro)** - Um *Diâmetro* de uma superfície esférica é uma corda que contém o centro  $O$  da esfera.

Na Figura 1.3, os segmentos planos  $FG$  e  $JH$  são duas cordas que passam pelo centro  $O$  da esfera  $E$ , portanto são diâmetros da superfície esférica  $E$ . Como se pode observar, a medida de um diâmetro é sempre igual a duas vezes a medida de um raio da esfera.

Figura 1.3: Diâmetro da Superfície Esférica.

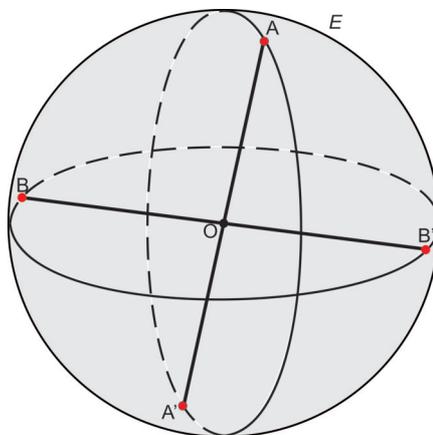


Fonte: Acervo do autor.

**Definição 1.5. (Pontos Antípodos)** - Pontos antípodos são pontos diametralmente opostos, ou seja, dado um ponto  $A$ , seu antípoda,  $A'$ , é o único ponto da superfície esférica tal que  $AA'$  é um diâmetro da superfície esférica.

A Figura 1.4 ilustra exemplos de pontos antípodos, a saber, os pontos  $A$  e  $A'$  e  $B$  e  $B'$ .

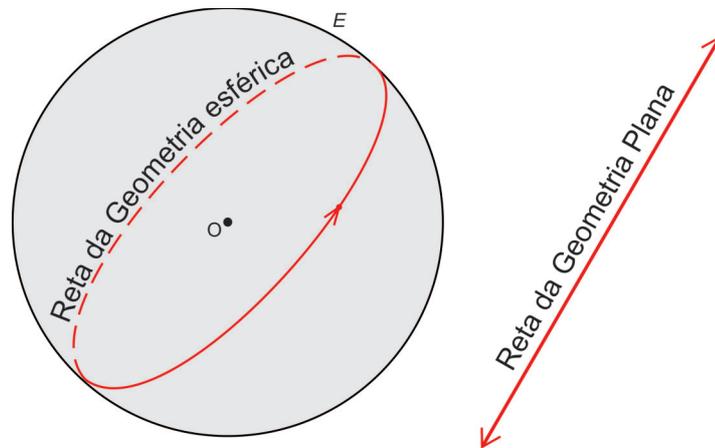
Figura 1.4: Pontos Antípodos.



Fonte: Acervo do autor.

O conceito de *ponto* na Geometria Esférica, é o mesmo adotado na Geometria Euclidiana, além disso, a menor distância entre dois pontos, assim como na Geometria Euclidiana, é o segmento de reta que os une. Todavia, como se trata de uma superfície esférica e não de um plano, o conceito de reta nas duas geometrias são diferentes, como mostra a Figura 1.5. Desse modo, temos que na Geometria Esférica a *reta* não é infinita e sim ilimitada, pelo simples fato de que percorrendo uma reta retorna-se sempre ao ponto de origem, porém é possível fazer isso indefinidamente.

Figura 1.5: Diferença entre Retas nas duas Geometrias.

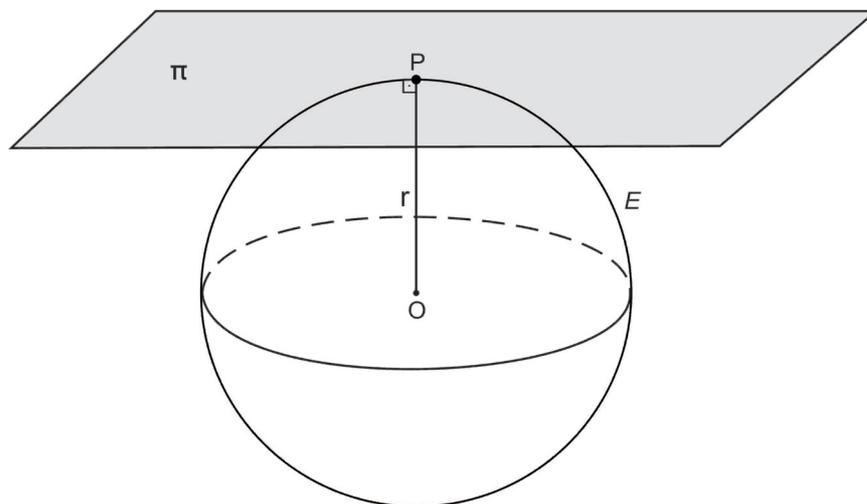


Fonte: Acervo do autor.

Estes elementos citados anteriormente podem ser obtidos a partir de intersecções entre uma esfera e um plano.

A intersecção de um plano  $\pi$  com a superfície esférica  $E$  pode gerar um ponto (quando o plano é tangente à superfície esférica) como mostra a Figura 1.6 ou uma circunferência (quando o plano é secante à superfície esférica).

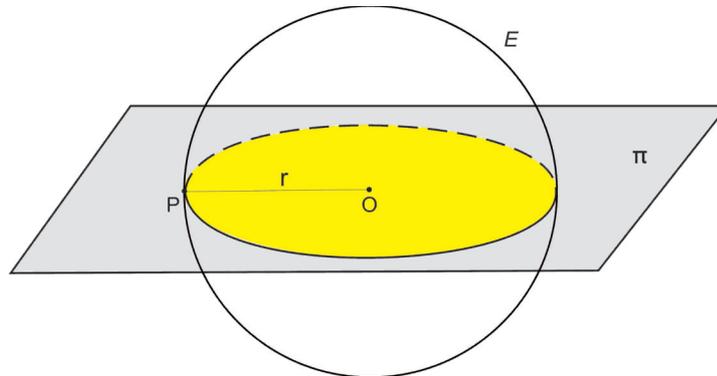
Figura 1.6: Plano Tangente à Superfície Esférica.



Fonte: Acervo do autor.

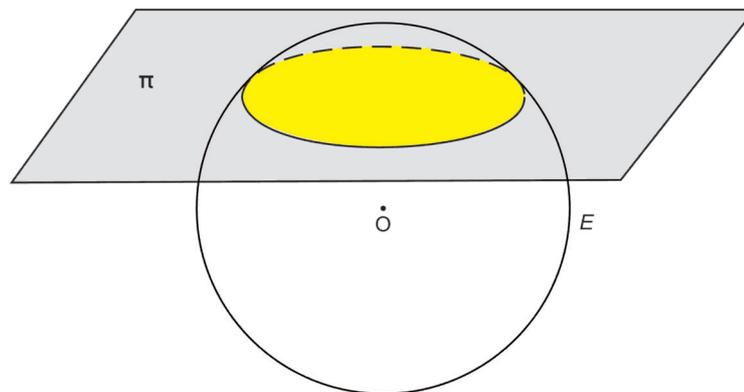
Nos casos em que o plano é secante à esfera, teremos uma circunferência máxima (quando o plano passar pelo centro da esfera, como mostra a Figura 1.7 ou uma circunferência menor (quando o plano não passar pelo centro da esfera) como mostra a Figura 1.8. Vale ressaltar que o centro da circunferência máxima coincide com o centro da esfera.

Figura 1.7: Plano Secante passando pela origem: Circunferência Máxima.



Fonte: Acervo do autor.

Figura 1.8: Plano Secante não passando pela origem: Circunferência Menor.

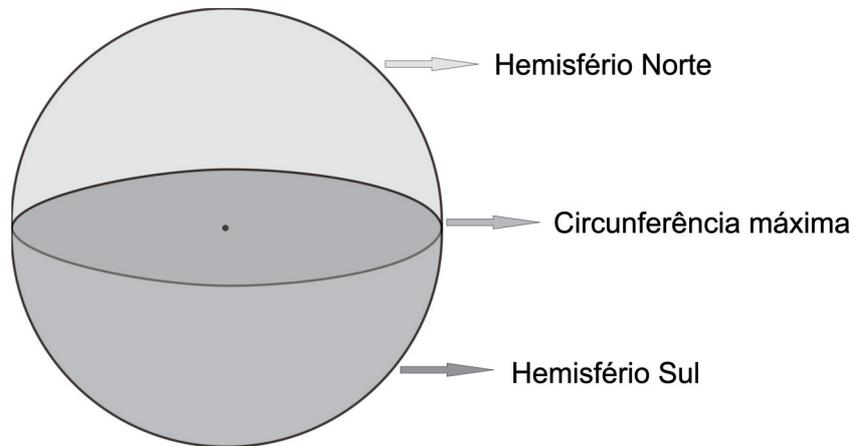


Fonte: Acervo do autor.

Dizemos que uma *Geodésica* é a circunferência máxima sobre uma superfície esférica em que os raios coincidem com o raio da esfera. Desse modo, as retas na Geometria esférica são geodésicas.

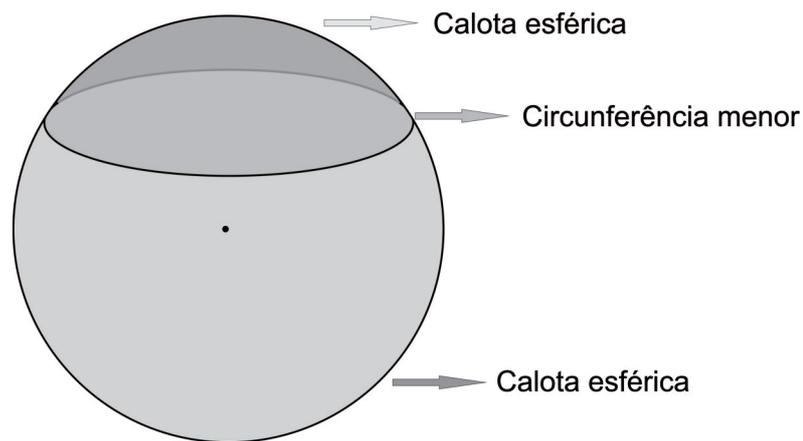
Uma circunferência máxima divide a superfície esférica em duas regiões, chamadas de *hemisférios* (Figura 1.9). Já uma circunferência menor divide a superfície esférica em duas regiões, chamadas de *calotas esféricas* (Figura 1.10).

Figura 1.9: Hemisférios.



Fonte: Acervo do autor.

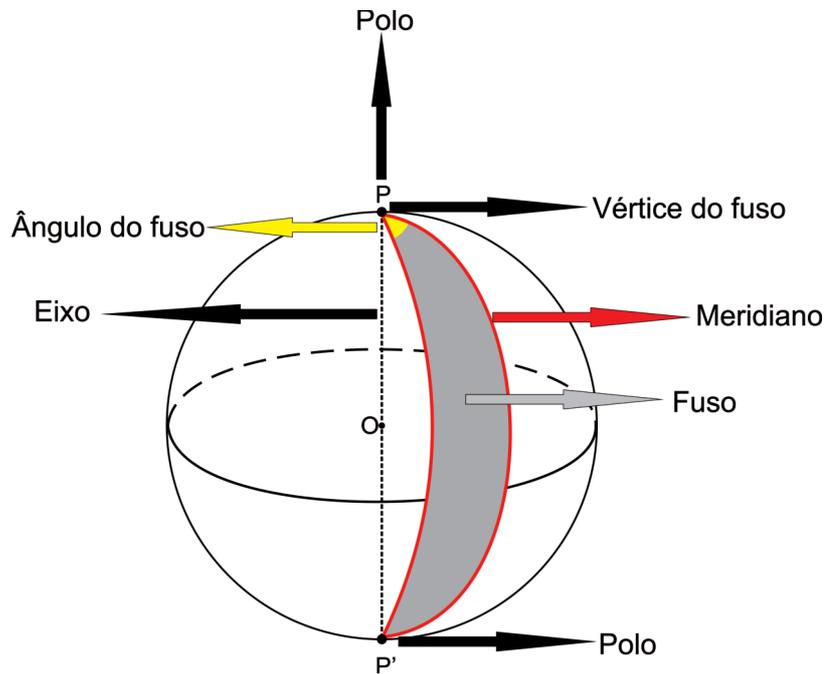
Figura 1.10: Calotas Esféricas.



Fonte: Acervo do autor.

Chamamos de *eixo* qualquer reta que contém o centro  $O$  e de *polos* os pontos de intersecção do eixo com a superfície esférica, por sua vez, chamamos de *meridiano* uma semicircunferência máxima que passa pelos polos. Dois meridianos determinam uma região que chamamos de *fuso esférico* e a intersecção entre esses dois meridianos são os *vértices* do fuso ao qual foi gerado, e por fim, o *ângulo do fuso* é o ângulo formado pelos meridianos.

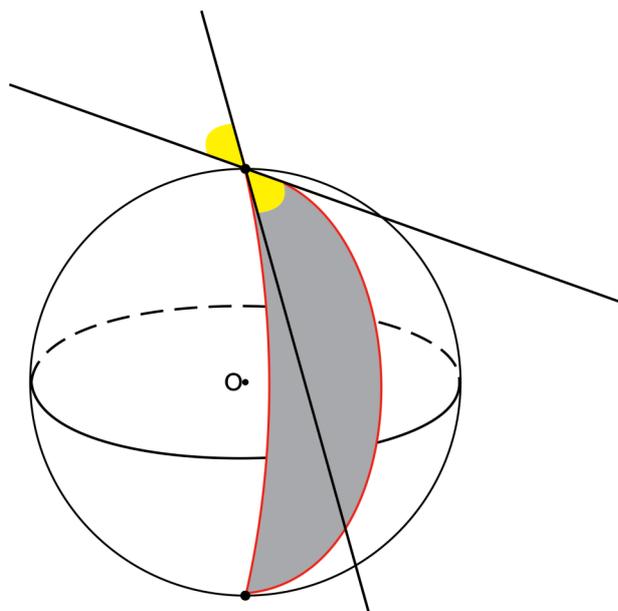
Figura 1.11: Elementos da Esfera.



Fonte: Acervo do autor.

Os *ângulos esféricos* são definidos como a intersecção entre duas circunferências máximas e tem como medida a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes às circunferências máximas no ponto de intersecção destas circunferências.

Figura 1.12: Ângulos Esféricos.

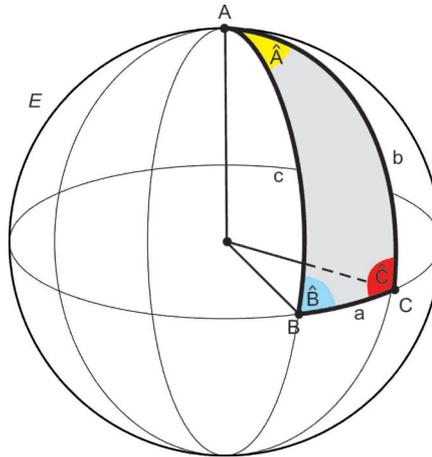


Fonte: Acervo do autor.

Outra definição importante que também nos auxiliará é a de triângulo esférico, que será apresentada a seguir:

**Definição 1.6. (Triângulos Esféricos)** - Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos distintos sobre um mesmo hemisfério da superfície esférica  $E$ , e não pertencentes a mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos de circunferências máximas, que unem esses pontos dois a dois, chama-se *triângulo esférico*.

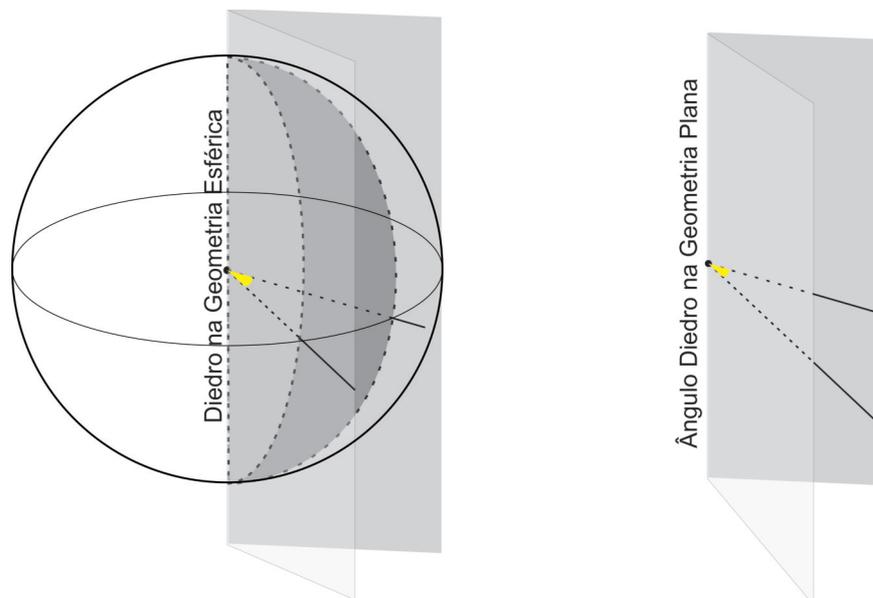
Figura 1.13: Triângulo Esférico.



Fonte: Acervo do autor.

Na Geometria Esférica, definimos *diedro*, como o ângulo formado por duas "semicircunferências" máximas de mesma origem. Já na Geometria Euclidiana ângulo diedro é a reunião entre dois semiplanos de mesma origem.

Figura 1.14: Diedros nas Geometrias Plana e Esférica.

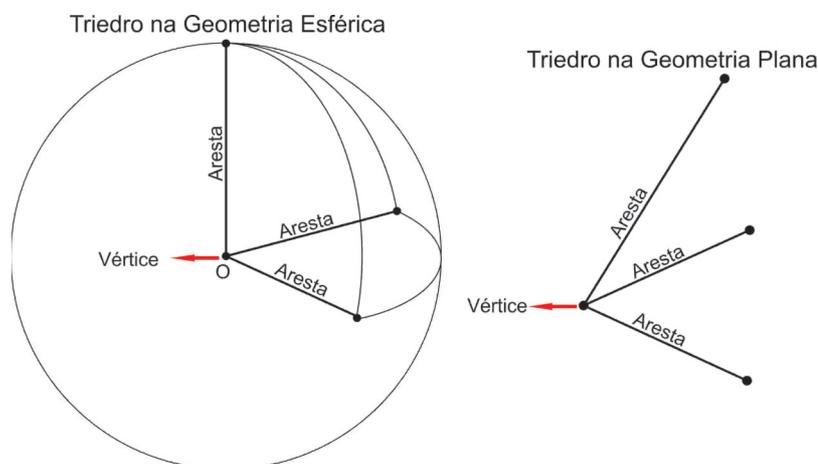


Fonte: Acervo do autor.

Na Geometria Euclidiana, *triedro* é a reunião de três setores angulares definidos por três semi-retas de mesma origem, não coplanares, o vértice é o ponto de origem das três semi-retas. Na Geometria Esférica esse conceito é semelhante, porém defini-se *vértice* do *triedro*, o ponto  $O$  no interior da esfera,

equidistante a todos os pontos de sua superfície, ou seja, o centro da esfera. As arestas correspondem aos raios da esfera e os setores angulares, são setores das suas circunferências máximas.

Figura 1.15: Triedros nas Geometrias Plana e Esférica.



Fonte: Acervo do autor.

Dois ou mais triângulos na Geometria Esférica, assim como na Geometria Euclidiana, são congruentes quando seus ângulos e seus lados correspondentes forem congruentes, como mostra a definição abaixo.

**Definição 1.7. (Triângulos Congruentes)** - Os triângulos esféricos correspondentes a triedros congruentes de uma mesma esfera (ou esferas iguais), são também chamados de *triângulos congruentes*.

De maneira análoga à Geometria Euclidiana, é possível classificar os triângulos esféricos enquanto à quantidade de lados de mesma medida, como sendo equiláteros (quando possuem os três lados iguais), isósceles (quando possuem pelo menos dois lados iguais) ou escalenos (quando possuem todos os lados diferentes). O fator que difere é que os lados do triângulo esférico são medidos em ângulos.

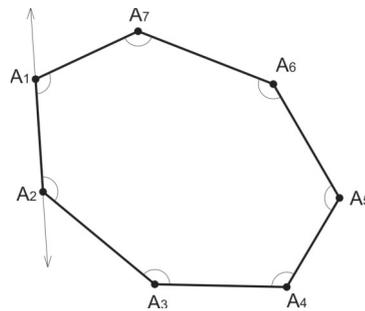
Outro objeto importante para nosso estudo, são os poliedros. Desse modo, veremos a seguir a definição e alguns elementos que o compõe.

## 1.2 Poliedros

No Capítulo 3 apresentaremos o famoso Teorema de Euler para poliedros convexos, o qual é uma aplicação clássica da Geometria Esférica. Reuniremos então, nesta seção, os fatos básicos sobre poliedros para podermos demonstrá-lo, iniciaremos pela definição de polígonos convexos.

**Definição 1.8. (Polígono Convexo)** - Seja  $n \geq 3$  um natural e  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontos distintos do plano, como mostra a figura 1.16. Dizemos que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é um *polígono convexo* se, para  $1 \leq i \leq n$ , a reta  $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$  não contém nenhum outro ponto  $A_j$ , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.

Figura 1.16: Polígono Convexo com sete lados e sete vértices.



Fonte: Acervo do autor.

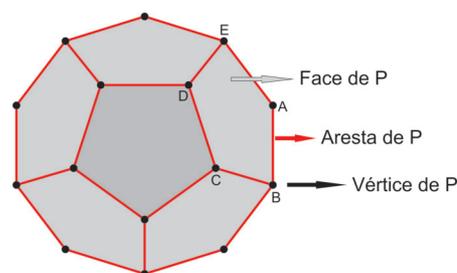
Na Figura 1.16, os pontos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$  e  $A_7$  são vértices deste polígono e os segmentos que os unem são os lados deste polígono. Agora de posse destas informações, será possível compreender a definição de *poliedros* que veremos logo abaixo.

**Definição 1.9. (Poliedro)** - "Um *poliedro*  $P$  é a reunião de um número finito de polígonos planos convexos, chamados faces de  $P$ . Os lados desses polígonos são chamados as arestas de  $P$ . Os vértices do poliedro são os vértices de suas faces."

Se faz necessário ainda, que a interseção  $F \cap G$  de duas faces distintas de  $P$  seja uma aresta em comum, um vértice comum a  $F$  e  $G$  ou que seja vazia.

Observe na Figura 1.17 que o segmento  $AB$  é uma das arestas, o ponto  $B$  é um dos vértices e o polígono  $ABCDE$  é uma das faces do poliedro  $P$ .

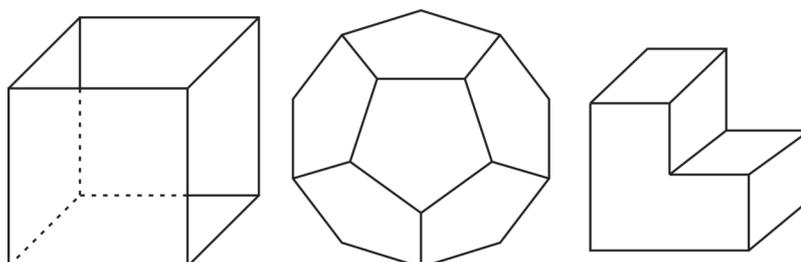
Figura 1.17: Elementos de um Poliedro.



Fonte: Acervo do autor.

A Figura 1.18 ilustra modelos de Poliedros, que atendem a esta definição.

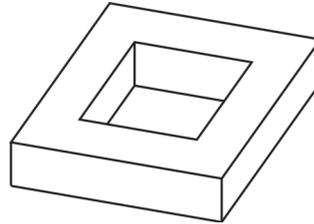
Figura 1.18: Poliedros.



Fonte: Acervo do autor.

O objeto da Figura 1.19 não atende a definição, pois as faces superior e inferior não são polígonos.

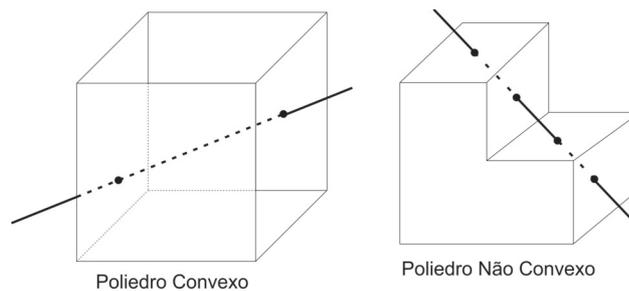
Figura 1.19: Objeto que não atende a definição de Poliedro.



Fonte: Acervo do autor.

Ainda com base na definição acima, Lima (2006) afirma que, "todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior do poliedro". E a partir disso define poliedro convexo quando o seu interior é convexo, ou seja, "um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em no máximo dois pontos". Veja a Figura 1.20.

Figura 1.20: Poliedros Convexo e Não Convexo.



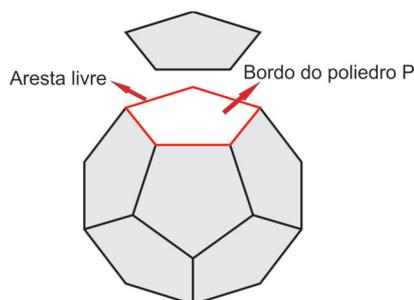
Fonte: Acervo do autor.

**Definição 1.10. (Subpoliedro)** - Um subconjunto  $Q$  de um poliedro  $P$  chama-se um *subpoliedro* de  $P$  quando é reunião de algumas das faces de  $P$ . Evidentemente,  $Q$  é também um poliedro.

**Definição 1.11. (Aresta Livre)** - Uma *aresta livre* é quando é lado de apenas uma face do poliedro.

**Definição 1.12. (Bordo de um Poliedro)** - Chama-se *bordo de um poliedro* à reunião de suas arestas livres.

Figura 1.21: Bordo de um Poliedro.



Fonte: Acervo do autor.

## Capítulo 2

# Geometria Esférica

No Capítulo 1 apresentamos algumas ferramentas importantes para a compreensão do estudo a respeito das aplicações propostas neste trabalho. Neste capítulo apresentaremos um pouco da teoria da Geometria Esférica, alguns de seus principais resultados, além de algumas relações com a Geometria Euclidiana.

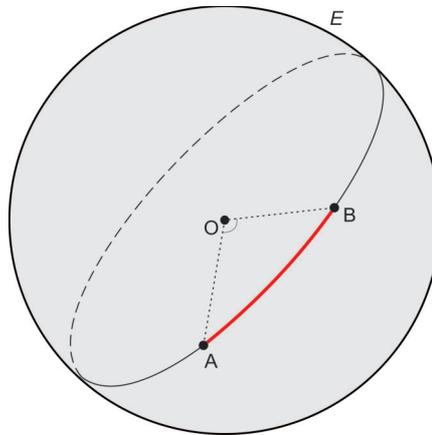
A partir do que vimos no capítulo anterior, é possível perceber que nem todas as propriedades e conceitos encontrados na Geometria Euclidiana podem ser aplicados na Geometria Esférica, no entanto, alguns deles permanecem, o que favorece fazer reflexões, análises e comparações, objetivando compreender a importância de cada uma delas dentro do contexto adequado. A seguir, veremos alguns desses resultados, propriedades e conceitos da Geometria Esférica.

### 2.1 Alguns Resultados da Geometria Esférica

Iniciaremos esta seção definindo distância na superfície esférica, levando em consideração que o plano na Geometria Esférica é a superfície esférica.

**Definição 2.1.** (*Distância entre dois pontos*) - Dados dois pontos distintos A e B sobre uma superfície esférica, a *distância* entre esses pontos é a menor porção do único círculo máximo que contém esses pontos. Utiliza-se as unidades de medida de comprimento em graus ou radianos, pois possibilita a generalização para qualquer esfera.

Figura 2.1: Distância entre dois Pontos.



Fonte: Acervo do autor.

Com isso, vale destacar a seguinte proposição:

**Proposição 2.1.** *Por dois pontos dados sobre uma superfície esférica sempre passa uma circunferência máxima. Se estes pontos não forem antípodas esta circunferência máxima é única.*

*Demonstração.* Considere dois pontos  $P$  e  $Q$  quaisquer e distintos sobre uma superfície esférica de centro  $O$ . Se  $P$  e  $Q$  não forem antípodas, então os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $O$  não são colineares e definem um único plano que, interseccionado com a superfície esférica, produz uma única circunferência máxima. No caso de  $P$  e  $Q$  serem antípodas, os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $O$  são colineares e podem pertencer simultaneamente a infinitos planos, produzindo infinitas possibilidades de circunferências máximas. Assim, podemos concluir que sempre passa pelo menos uma circunferência máxima por dois pontos distintos dados em uma superfície esférica.  $\square$

Outra proposição importante é a que veremos a seguir, a qual comprova o fato da interseção de um plano com uma superfície esférica, passando pelo seu centro, ser uma circunferência máxima.

**Proposição 2.2.** *A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e raio da superfície esférica.*

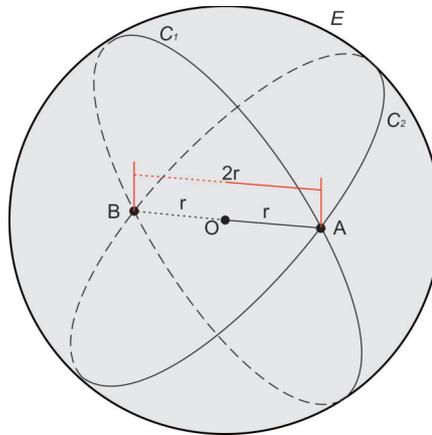
*Demonstração.* Seja  $E$  uma superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r > 0$  e  $\alpha$  um plano contendo  $O$ . A interseção entre o plano  $\alpha$  e a superfície esférica  $E$  é o conjunto de pontos de  $\alpha$  que distam  $r$  de  $O$ . Portanto tal interseção é uma circunferência, contida em  $\alpha$ , com centro em  $O$  e raio  $r$ .  $\square$

Outro fato interessante é a:

**Proposição 2.3.** *Duas circunferências máximas de uma esfera cortam-se mutuamente em duas partes iguais.*

*Demonstração.* Considere duas circunferências máximas  $C_1$  e  $C_2$  em uma superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$ .

Figura 2.2: Interseção entre duas Circunferências Máximas.



Fonte: Acervo do autor.

Sejam  $A$  e  $B$  os dois pontos de interseção entre  $C_1$  e  $C_2$ . Observe na Figura 2.2 que o segmento  $\overline{OA}$  é igual a  $r$ , da mesma forma que o segmento  $\overline{OB}$  também é igual a  $r$ .

Logo,  $\overline{OA} + \overline{OB} = 2r$  e percebemos que  $A$ ,  $O$  e  $B$  são colineares. Como  $2r$  é o diâmetro das circunferências máximas dessa superfície esférica, então o arco de circunferência máxima  $\widehat{AB}$  equivale a metade das circunferências máximas  $C_1$  e  $C_2$ .  $\square$

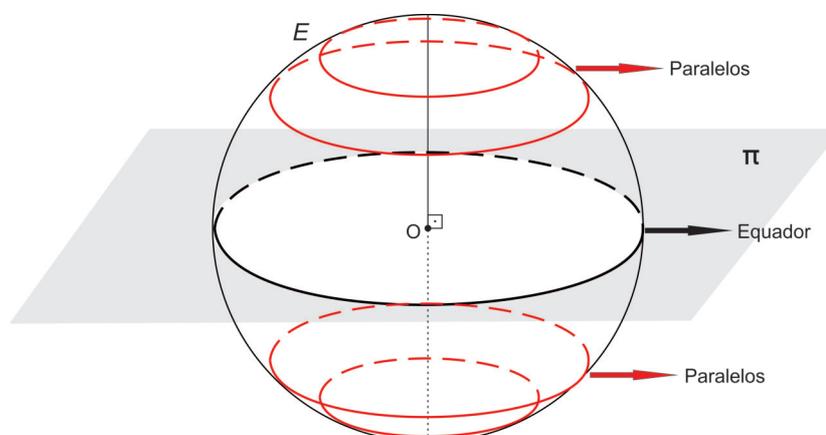
Outra definição importante é a de *equador*, apresentada a seguir:

**Definição 2.2. (Equador)** - *Equador* é a circunferência máxima, cujo plano é perpendicular ao eixo de rotação e que divide a "esfera" terrestre em duas partes iguais, denominadas Hemisfério Norte e Hemisfério Sul.

A partir disto, podemos definir a noção de *paralelos*.

**Definição 2.3. (Paralelo)** - Um *paralelo* é uma circunferência na superfície esférica, paralela ao equador.

Figura 2.3: Equador e Paralelos.

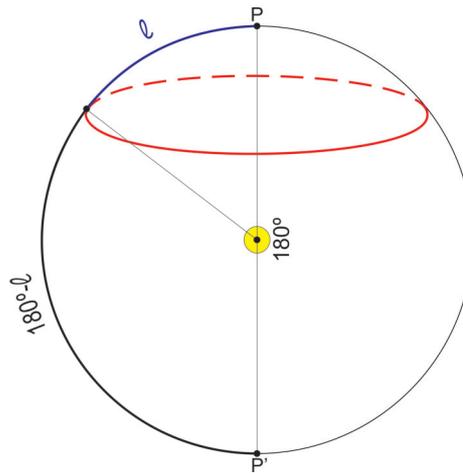


Fonte: Acervo do autor.

As relações matemáticas presentes na circunferência na Geometria Esférica difere das encontradas na Geometria Euclidiana, enquanto na Geometria Euclidiana a circunferência tem apenas um centro, na

Geometria Esférica a circunferência tem dois centros, sendo os pontos,  $P$  e seu antípoda  $P'$ . Enquanto na Geometria Euclidiana os raios são seguimento de retas, os raios na Geometria Esférica são arcos de circunferências máximas da superfície esférica. Observe que sendo  $l$  a medida do raio desta circunferência com centro em  $P$ , então o raio desta circunferência com centro em  $P'$  mede  $180^\circ - l$ . Com isso é possível observar que se o raio da circunferência tem medida igual a  $90^\circ$ , então se trata de uma circunferência máxima da superfície esférica, como mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4: Raio da Circunferência.



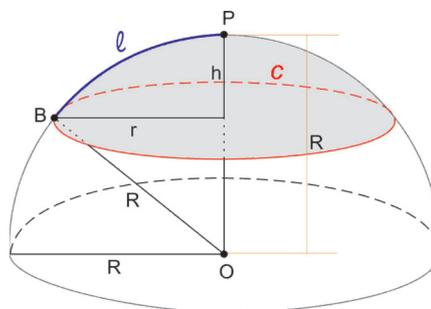
Fonte: Acervo do autor.

Note que, na Geometria Euclidiana, o comprimento  $C$  da circunferência é calculado pela fórmula dada por  $C = 2\pi r$ , sendo  $r$  a medida do raio. Todavia, na Geometria Esférica, a fórmula é dada da seguinte maneira:

**Proposição 2.4.** *O cálculo do comprimento  $C$  de uma circunferência numa superfície esférica é dada por  $C = 2\pi \operatorname{sen} l$ , em que  $l$  é a medida do raio desta circunferência.*

A demonstração deste resultado será apresentado a seguir com o auxílio da Figura 2.5.

Figura 2.5: Comprimento de uma Circunferência Esférica.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Seja  $C$  uma circunferência de centro  $P$  e raio  $l$  sobre uma superfície esférica. Considerando um ponto  $B$ , de modo que  $B \in C$ , temos que o segmento esférico  $\overline{PB} = l$ . Seja  $O$  o centro desta esfera, de modo que,  $O$  é equidistante a todos os pontos da esfera. Daí, temos que  $\overline{OP} = \overline{OB}$ , pois  $OP$  e  $OB$  são

raios da esfera em questão. Chamaremos de  $R$  o raio da esfera e de  $r$  o raio da circunferência formada pela interseção do plano euclidiano que contém  $C$  com esta esfera.

Então, considerando o ângulo  $\widehat{O}$  em  $P\widehat{O}B$ , segue-se que:

$$\text{sen } \widehat{O} = \frac{r}{R}$$

donde

$$r = R \text{ sen } \widehat{O}.$$

Sendo  $C = 2\pi r$  o comprimento da circunferência  $C$ , e substituindo  $r$  por  $R \text{ sen } \widehat{O}$ , temos

$$C = 2\pi R \text{ sen } \widehat{O}$$

Tomando  $R$  igual a uma unidade e, sabendo que  $l$  é o arco correspondente ao ângulo  $P\widehat{O}B$  e com mesma medida em graus, concluímos que

$$C = 2\pi \text{ sen } l. \quad \square$$

Outro resultado interessante na Geometria Esférica é a fórmula para o cálculo da área da região delimitada por uma circunferência, que pode ser encontrada a partir de propriedades da Geometria Espacial Euclidiana, pois a circunferência na Geometria Esférica corresponde a calota esférica na Geometria Espacial. A área  $A$  da calota esférica é obtida pela fórmula:

$$A = 2\pi R h \quad (2.1)$$

em que  $h$  é a distância entre a seção e o polo dessa esfera, e  $R$  é a medida do raio da esfera. Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado.

**Proposição 2.5.** *A área  $S$  da região delimitada por uma circunferência na Geometria Esférica, dada em função da medida  $l$  de seu raio, pode ser obtida pela expressão:  $S = 2\pi (1 - \cos l)$ .*

*Demonstração.* Sabendo que a área  $A$  da calota esférica na Geometria Euclidiana corresponde a área  $S$  da região delimitada pela circunferência na Geometria Esférica, então temos que  $A = S$ .

Note que

$$h = R - x \quad (2.2)$$

sendo  $x$  a distância entre a seção e o centro  $O$  da esfera como mostra a Figura 2.5.

Daí temos que

$$\cos \widehat{O} = \frac{x}{R}$$

logo,

$$x = R \cos \widehat{O} \quad (2.3)$$

Sabendo que  $A = S$  e das Equações (2.1), (2.2) e (2.3) temos

$$S = 2\pi R (R - R \cos \widehat{O})$$

Tomando  $R$  igual a uma unidade, temos que:

$$S = 2\pi (1 - \cos \widehat{O})$$

Sabendo que  $l$  é o arco correspondente ao ângulo  $\widehat{O}$  e com mesma medida em graus, então concluímos que:

$$S = 2\pi (1 - \cos l) \quad \square$$

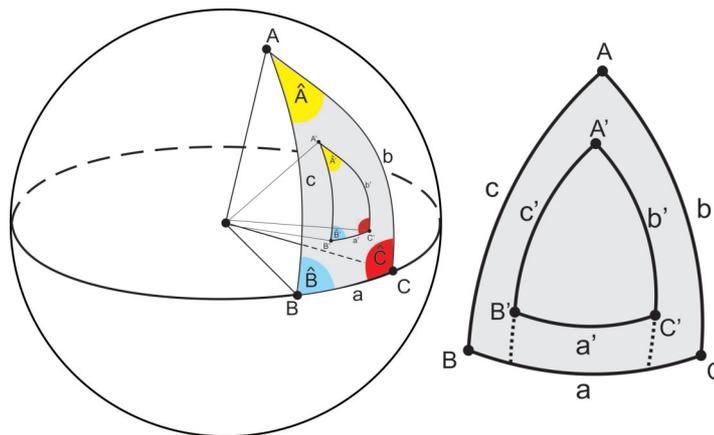
Vale salientar, que a unidade de medida de área na Geometria Esférica é dada em graus ou  $\pi$  radianos. Desse modo, é possível observar que  $360^\circ$  ou  $2\pi \text{ rad}$  corresponde a área de um hemisfério, pois  $4\pi \text{ rad}$  corresponde a área total da superfície esférica.

Outro elemento importante da Geometria Esférica, assim como na Geometria Euclidiana, são os triângulos. Algumas propriedades e conceitos são os mesmos em ambas as Geometrias, porém outros são diferentes. A definição de triângulo esférico já foi apresentada no Capítulo 1, desse modo, não apresentaremos novamente aqui, porém, abordaremos algumas propriedades e conceitos envolvidos nos triângulos esféricos.

Considere o triângulo formado pelos arcos  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{AC}$  e  $\widehat{AB}$  de circunferências máximas. Os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  do triângulo esférico são denotados, respectivamente, por  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e medidos em graus ou radianos pelos ângulos correspondentes a eles no centro da esfera.

**Definição 2.4. (Triângulos Polares)** - Um triângulo esférico  $ABC$  é um *triângulo polar* de outro triângulo esférico  $A'B'C'$  quando os vértices do primeiro são polos dos lados do segundo.

Figura 2.6: Triângulos Polares.



Fonte: Acervo do autor.

Com isso, vale a seguinte propriedade de simetria

**Proposição 2.6.** *Considere os triângulos esféricos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , como mostra a Figura 2.6. Se  $A'B'C'$  é polar de  $ABC$ , então  $ABC$  é polar de  $A'B'C'$ .*

*Demonstração.* Considere os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ . Provaremos que  $A'$  é polar ao arco  $\widehat{BC}$ ,  $B'$  é polar ao arco  $\widehat{AC}$  e  $C'$  é polar ao arco  $\widehat{AB}$ .

Para provar que  $A'$  é polar ao arco  $\widehat{BC}$ , basta provar que os arcos  $\widehat{A'B}$  e  $\widehat{A'C}$  medem ambos  $90^\circ$ . De fato, como  $B$  é polar ao arco  $\widehat{A'C'}$  tem-se que  $\widehat{A'B} = 90^\circ$ , conforme desejado. Analogamente, como  $C$  é polo de  $\widehat{A'B'}$  segue também que  $\widehat{A'C} = 90^\circ$ .

Dessa forma,  $A'$  é polar ao arco  $\widehat{BC}$ . De forma análoga se prova que  $B'$  é polar ao arco  $\widehat{AC}$  e  $C'$  é polar ao arco  $\widehat{AB}$ .  $\square$

Outro resultado importante é o Teorema de Lagrange para triângulos polares que veremos a abaixo.

**Teorema 2.1. (Teorema de Lagrange)** - *Em dois triângulos polares o lado de um e o ângulo do outro cujo vértice é polo deste lado são suplementares.*

*Demonstração.* Considere os triângulos polares  $ABC$  e  $A'B'C'$  de lados  $a, b, c$  e  $a', b', c'$ , respectivamente. Provaremos que:

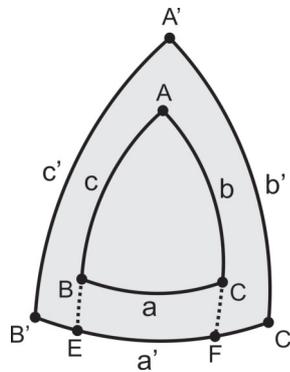
$$\widehat{A} + a' = 180^\circ \tag{2.4}$$

$$\widehat{B} + b' = 180^\circ \tag{2.5}$$

$$\widehat{C} + c' = 180^\circ \tag{2.6}$$

Primeiramente, prolonga-se os lados  $b$  e  $c$  até determinarem os pontos  $E$  e  $F$  sobre o  $\widehat{B'C'}$  no segundo triângulo, como mostra a Figura 2.7.

Figura 2.7: Triângulos Polares.



Fonte: Acervo do autor.

$$\widehat{B'F} = 90^\circ \tag{2.7}$$

$$\widehat{C'E} = 90^\circ \tag{2.8}$$

pois  $B'$  é polo de  $\widehat{AC}$  com  $F$  pertencendo a circunferência máxima contendo  $\widehat{AC}$  e  $C'$  é polo de  $\widehat{AB}$  com  $E$  pertencendo a circunferência máxima contendo  $\widehat{AB}$ , já que a distância de um polo a um ponto qualquer de sua circunferência máxima é sempre igual a  $90^\circ$ .

Somando as Equações (2.7) e (2.8) segue-se que

$$\widehat{B'F} + \widehat{C'E} = 180^\circ. \tag{2.9}$$

Como

$$\widehat{B'F} = \widehat{B'E} + \widehat{EF} \tag{2.10}$$

$$\widehat{C'E} = \widehat{EF} + \widehat{C'F} \tag{2.11}$$

Resulta de (2.10) e (2.11) em (2.9).

$$\widehat{B'E} + \widehat{EF} + \widehat{EF} + \widehat{C'F} = 180^\circ$$

assim,

$$\widehat{B'C'} + \widehat{EF} = 180^\circ$$

daí

$$a' + \widehat{EF} = 180^\circ.$$

Como  $A$  é polo de  $\widehat{EF}$ , tem-se  $\widehat{EF} = \widehat{A}$ , pois um ângulo esférico é medido pelo arco cujo polo é o próprio vértice desse ângulo. Logo,

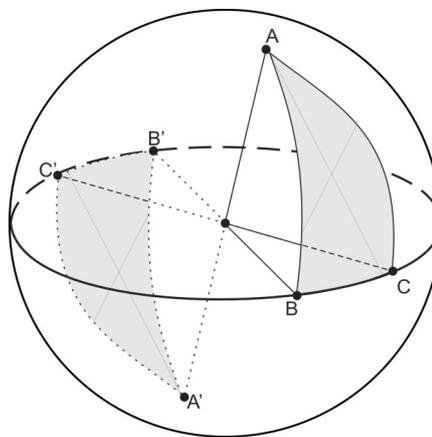
$$\widehat{A} + a' = 180^\circ,$$

estabelecendo (2.4)

Analogamente, se demonstra as Equações (2.5) e (2.6).  $\square$

**Definição 2.5.** (*Triângulos Simétricos*) - Dois triângulos esféricos cujos vértices são diametralmente opostos são chamados de *triângulos simétricos*, assim como os triedros correspondentes.

Figura 2.8: Triângulos Simétricos.



Fonte: Acervo do autor.

De maneira análoga aos triângulos da Geometria Euclidiana, os triângulos esféricos possuem três ângulos, três lados, três alturas, três bissetrizes e três medianas, definidos na Geometria Esférica de maneira análoga aos triângulos planos da Geometria Euclidiana.

Veremos a seguir algumas propriedades dos triângulos esféricos.

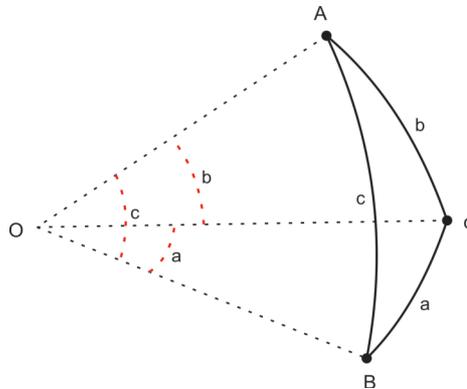
**Proposição 2.7.** *Cada lado de um triângulo esférico é menor que soma e maior que a diferença entre os outros dois lados.*

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|c - a| < b < c + a$$

$$|a - b| < c < a + b$$

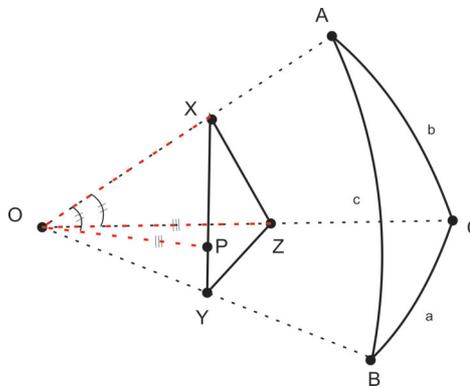
Figura 2.9: A soma de dois lados é maior que o terceiro lado e a diferença de dois lados é menor que o terceiro lado.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Considere o triângulo esférico  $ABC$ , com lados  $a, b$  e  $c$  em uma esfera de centro  $O$ . Caso os lados  $a, b$  e  $c$  sejam iguais, o teorema é verdadeiro, caso contrário, sobre  $OA$ , tome um ponto  $X$  qualquer; sobre  $OB$ , tome um ponto  $Y$  qualquer e sobre  $XY$ , tome um ponto  $P$  de modo que  $\widehat{XOP} = \widehat{AOC}$ . Sobre  $OC$  tome um ponto  $Z$  de modo que  $OZ = OP$ , como mostra a Figura 2.10.

Figura 2.10: Figura auxiliar para demonstração da Proposição da soma e diferença dos lados de um Triângulo Esférico.



Fonte: Acervo do autor.

Considerando os pontos  $X, Y$  e  $Z$ , obtemos o triângulo  $XYZ$  no qual  $XP = XZ$ , pois os triângulos euclidianos  $XOZ$  e  $XOP$  são congruentes (pelo caso LAL). Note também que pela construção descrita, tem-se  $\widehat{XOZ} = \widehat{AOC} = \widehat{XOP}$ . Pela desigualdade triangular da geometria plana no triângulo  $XYZ$ , temos:

$$XZ + ZY > XY$$

donde,

$$XZ + ZY > XP + PY.$$

Como  $XP = XZ$  temos que,

$$ZY > PY$$

e portanto

$$\widehat{ZOY} > \widehat{POY}. \tag{2.12}$$

Somando  $\widehat{X\hat{O}Z}$  em ambos os membros da desigualdade (2.12)

$$\widehat{X\hat{O}Z} + \widehat{Z\hat{O}Y} > \widehat{X\hat{O}Z} + \widehat{P\hat{O}Y}$$

e daí

$$\widehat{X\hat{O}Z} + \widehat{Z\hat{O}Y} > \widehat{X\hat{O}P} + \widehat{P\hat{O}Y}.$$

Como  $\widehat{X\hat{O}P} + \widehat{P\hat{O}Y} = \widehat{X\hat{O}Y}$ , segue que,

$$\widehat{X\hat{O}Z} + \widehat{Z\hat{O}Y} > \widehat{X\hat{O}Y} \quad (2.13)$$

Observando que,

$$\widehat{X\hat{O}Z} = b, \widehat{Z\hat{O}Y} = a \text{ e } \widehat{X\hat{O}Y} = c.$$

resulta da equação (2.13) que

$$a + b > c$$

o que implica que

$$b > c - a$$

e

$$a > c - b$$

como queríamos demonstrar. De maneira análoga demonstram-se as demais desigualdades.  $\square$

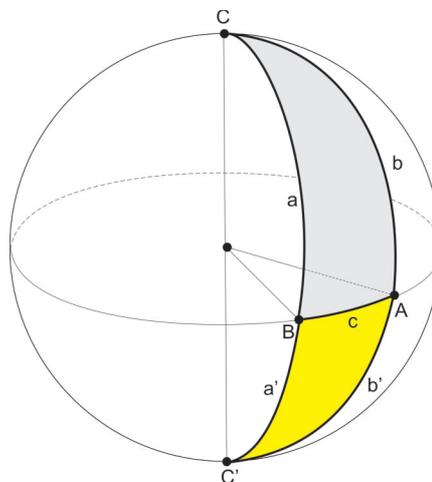
Quanto aos lados de um triângulo esférico, temos a seguinte

**Proposição 2.8.** *A soma  $a + b + c$  também há uma variação, dada da seguinte maneira*

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

*Demonstração.* Considere o triângulo esférico  $ABC$ , com lados  $a, b$  e  $c$ . Seja  $C'$  o antípoda do ponto  $C$ , formando o triângulo esférico  $ABC'$ , com lados  $a', b'$  e  $c$ .

Figura 2.11: Soma dos três lados de um Triângulo.



Fonte: Acervo do autor.

Note, que pela Proposição 2.7, segue que,

$$c < a' + b' \quad (2.14)$$

Observe também que  $a + a' = 180^\circ$  e  $b + b' = 180^\circ$ , donde

$$a + a' + b + b' = 360^\circ. \quad (2.15)$$

Logo, das equações (2.14) e (2.15), segue-se que

$$360^\circ = a + a' + b + b' = a + b + \langle a' + b' \rangle > a + b + c.$$

Assim, os lados  $a, b$  e  $c$  de um triângulo esférico satisfazem

$$a + b + c < 360^\circ.$$

Com a restrição de que nenhum de seus lados pode ser maior do que  $180^\circ$ .  $\square$

Quanto aos ângulos de um triângulo esférico, tem-se

**Proposição 2.9.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, diferente do triângulo plano, não é um valor constante, e este valor varia entre  $180^\circ$  e  $540^\circ$ , com a possibilidade de ter um valor fixo a depender do triângulo considerado. Assim, considerando os ângulos  $\widehat{A}, \widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  de um dado triângulo, temos que*

$$180^\circ < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ.$$

*Demonstração.* Considere o triângulo  $ABC$  e o seu triângulo polar  $A'B'C'$  cujos lados são  $a', b', c'$ . Pelo Teorema de Lagrange tem-se

$$\widehat{A} + a' = 180^\circ$$

$$\widehat{B} + b' = 180^\circ$$

$$\widehat{C} + c' = 180^\circ.$$

Somando as três equações acima membro a membro obtemos

$$\langle \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \rangle + \langle a' + b' + c' \rangle = 540^\circ.$$

Mas pela Proposição 2.8

$$a' + b' + c' < 360^\circ$$

o que implica em

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ.$$

Além disso, como  $a' + b' + c' > 0$ , tem-se que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ$$

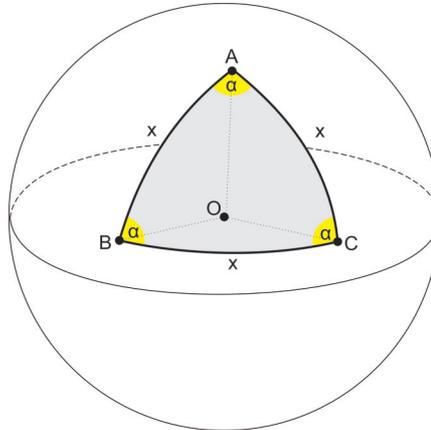
e portanto

$$180^\circ < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ$$

estabelecendo o resultado.  $\square$

**Proposição 2.10.** *Todo triângulo esférico equilátero é equiângulo e todo equiângulo é equilátero.*

Figura 2.12: Triângulo Equilátero/Equiângulo.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Considere o triângulo esférico  $ABC$ .

Suponha inicialmente que o triângulo  $ABC$  seja equilátero. Assim, o triedro definido pelas semirretas  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$  possui todos os ângulos planos iguais, pois os ângulos planos do triedro definem os lados do triângulo esférico  $ABC$ . Logo, se todos os ângulos planos do triedro são iguais, os ângulos diedros também são. Como os ângulos diedros definem os ângulos esféricos, segue que os ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são iguais. Portanto o triângulo  $ABC$  é equiângulo.

Considere o triângulo  $ABC$  tal que  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ . Assim, os ângulos diedros do triedro definido pelas semirretas  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$  são iguais. Isto implica que os ângulos planos do triedro também são iguais. Logo, os lados do triângulo  $ABC$  são iguais e portanto o triângulo  $ABC$  é equilátero.  $\square$

Nos triângulos planos, têm-se no máximo um ângulo reto, ou seja, com medida igual a  $90^\circ$ , enquanto nos triângulos esféricos pode-se ter até os três ângulos medindo  $90^\circ$  cada. Isso possibilita classificá-los quanto a seus ângulos e lados, das seguintes maneiras:

#### Quanto aos ângulos:

Retângulo - Quando possui um ângulo com medida igual a  $90^\circ$ ;

Birretângulo - Quando possui dois ângulos com medidas iguais a  $90^\circ$  cada;

Trirretângulo - Quando possui os três ângulos com medidas iguais a  $90^\circ$  cada.

#### Quanto aos lados:

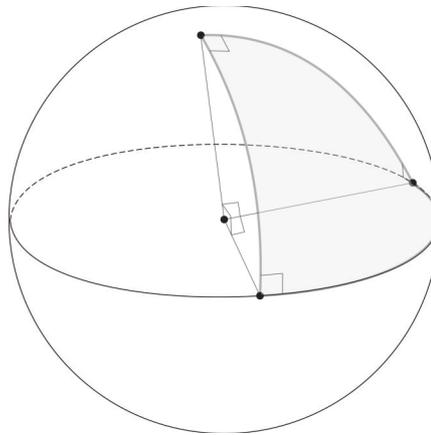
Retilátero - Quando possui um lado com medida igual a  $90^\circ$ ;

Birretilátero - Quando possui dois lados com medidas iguais a  $90^\circ$  cada;

Trirretilátero - Quando possui os três lados com medidas iguais a  $90^\circ$  cada.

Observe na Figura 2.13 que o triângulo esférico possui três ângulos e três lados com medidas iguais a  $90^\circ$ , logo ele representa um Triângulo Trirretângulo e Trirretilátero.

Figura 2.13: Triângulo Trirretângulo e Trirretilátero.



Fonte: Acervo do autor.

## 2.2 Trigonometria Esférica

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes da Trigonometria Esférica, que assim como na Trigonometria Plana, também trata do estudo das relações entre lados e ângulos dos triângulos. Vale destacar, que assim como no círculo trigonométrico adota-se uma unidade como sendo a medida do raio, o mesmo acontece na esfera trigonométrica.

Num triângulo esférico qualquer, existem seis ângulos distintos, sendo eles, os três ângulos internos do triângulo esférico e os três ângulos que determinam as medidas dos lados. Dessa maneira, a trigonometria possibilita relacionar esses seis elementos.

O primeiro resultado que apresentaremos é a fórmula fundamental, conhecida também como lei dos cossenos esféricos, considerada uma das mais importantes, pois uma série de outras relações são obtidas a partir dela.

**Teorema 2.2.** *Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com lados  $a, b$  e  $c$ , e ângulos internos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Então*

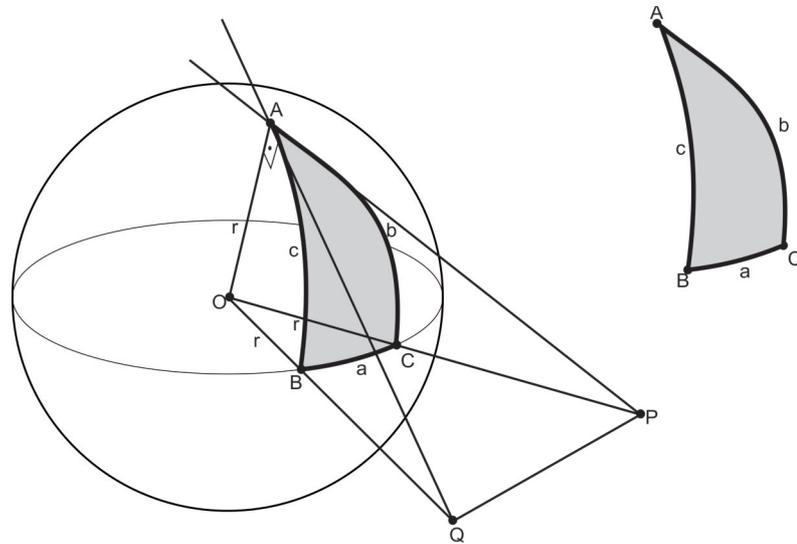
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A} \quad (2.16)$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \hat{B} \quad (2.17)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C} \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Considere o triângulo esférico  $ABC$  sobre uma esfera de centro  $O$  e raio  $r$ .

Figura 2.14: Triângulo Esférico e as Tangentes no Ponto A.



Fonte: Acervo do autor.

Como o raio da esfera mede uma unidade, temos que

$$OA = OB = OC = 1.$$

O lado  $a$  equivale ao ângulo central  $\widehat{COB}$ , o lado  $b$  equivale ao ângulo central  $\widehat{AOC}$  e o lado  $c$  equivale ao ângulo central  $\widehat{AOB}$ . O ângulo interno  $\widehat{A}$  é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  que passam por  $\widehat{A}$ . O ângulo  $\widehat{B}$  é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{BA}$  e  $\widehat{BC}$  passando por  $\widehat{B}$  e o ângulo  $\widehat{C}$  é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{CA}$  e  $\widehat{CB}$  passando por  $\widehat{C}$ .

Os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  são opostos, respectivamente, aos ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ .

Prolongando as tangentes que passam por  $A$  e as retas  $OB$  e  $OC$ , temos que estas se encontram nos pontos  $P$  e  $Q$ .

As semirretas  $AO$  e  $AP$  são perpendiculares, assim como as semirretas  $AO$  e  $AQ$ , pois as retas  $AP$  e  $AQ$  são tangentes à superfície da esfera e uma reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio. Logo os triângulos  $OAP$  e  $OAQ$  são retângulos em  $\widehat{A}$ .

Com isso, a partir da Geometria Plana, podemos estabelecer as seguintes relações trigonométricas

$$\cos b = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \quad (2.19)$$

$$\operatorname{sen} b = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}} \quad (2.20)$$

$$\cos c = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} \quad (2.21)$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}. \quad (2.22)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras para triângulos planos, temos

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2.$$

Somando estas duas equações, temos que

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = 2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$$

e portanto

$$2\overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2). \quad (2.23)$$

Aplicando a lei dos cossenos da Geometria Plana nos triângulos  $PQO$  e  $PQA$  que não são retângulos, temos

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a \quad (2.24)$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A}. \quad (2.25)$$

Das equações (2.24) e (2.25)

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A}.$$

Portanto,

$$2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a = 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A} + (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2). \quad (2.26)$$

A partir das equações (2.23) e (2.26), resulta que

$$2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a = 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A} + 2\overline{AO}^2$$

daí

$$\cos a = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos \hat{A}$$

donde

$$\cos a = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AO}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos \hat{A}. \quad (2.27)$$

Substituindo as equações (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22) na equação (2.27) chegamos na fórmula fundamental para triângulos esféricos.

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}.$$

De maneira análoga, obtemos as relações

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \hat{B}$$

e

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C}. \quad \square$$

**Observação 2.1.** Esta fórmula também é conhecida como *Fórmula dos Quatro Elementos*, pois relaciona três lados e um ângulo de um triângulo esférico

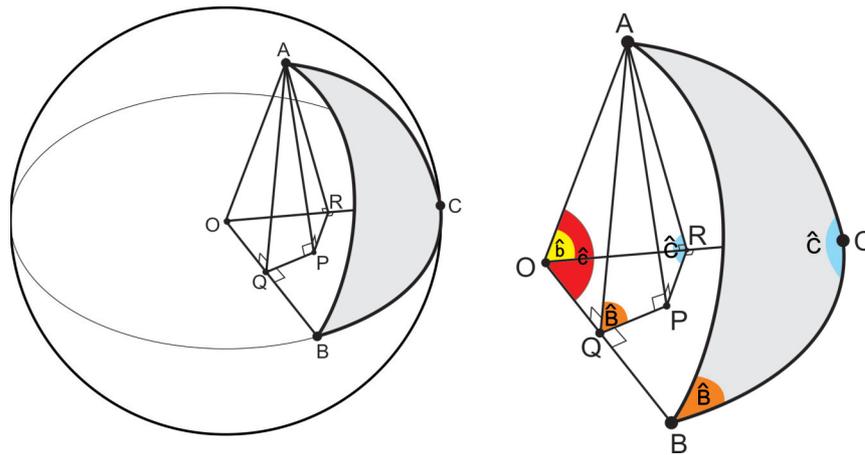
Outra fórmula importante é a conhecida como analogia dos senos ou lei dos senos para triângulos esféricos, que é dada da seguinte forma:

**Teorema 2.3.** *Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com lados  $a, b$  e  $c$ , e ângulos internos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Então*

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } c}.$$

Para compreender melhor este resultado considere o triângulo esférico  $ABC$  pertencente a superfície esférica de centro em  $O$ , como mostra a Figura 2.15 abaixo

Figura 2.15: Triângulo Esférico sobre a Superfície Esférica.

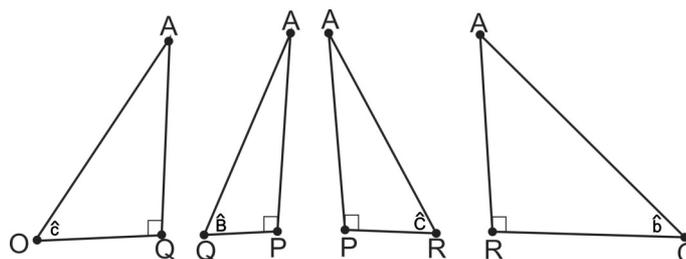


Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Baixe do ponto  $A$  a reta perpendicular ao plano  $BOC$  cuja interseção determina o ponto  $P$ . Por  $P$  traçamos as retas perpendiculares aos segmentos  $BO$  e  $CO$  que resulta nos pontos  $Q$  e  $R$  respectivamente. Agora pelo ponto  $A$ , também traçamos as perpendiculares aos segmentos  $BO$  e  $CO$  cujas interseções são os pontos  $Q$  e  $R$ , o que é possível pois o plano determinado pelos pontos  $P, Q$  e  $A$  é perpendicular ao plano determinado pelos pontos  $O, B$  e  $C$  e o plano determinado pelos pontos  $A, P$  e  $R$  é perpendicular ao plano determinado pelos pontos  $O, B$  e  $C$ .

Agora observe que o ângulo  $\hat{B}$  é formado pela interseção dos planos que passam por  $BOA$  e  $COB$ . Como as retas  $AQ$  e  $QP$  pertencem aos planos que passam por  $BOA$  e  $COB$  respectivamente, então o ângulo  $\hat{AQP}$  é congruente ao ângulo  $\hat{B}$ . O ângulo  $\hat{C}$  é formado pela interseção dos planos que passam por  $COA$  e  $BOC$ . Como as retas  $AR$  e  $RP$  pertencem aos planos que passam por  $COA$  e  $BOC$  respectivamente, então o ângulo  $\hat{ARP}$  é congruente ao ângulo  $\hat{C}$ . Deste modo, como acabamos de ver, os triângulos  $APQ$ ,  $APR$ ,  $AQP$  e  $ARP$  são triângulos retângulos, como mostra a Figura 2.16.

Figura 2.16: Triângulos Retângulos.



Fonte: Acervo do autor.

Assim, podemos extrair as seguintes relações

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \quad (2.28)$$

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AR}} \quad (2.29)$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AO}} \quad (2.30)$$

$$\operatorname{sen} b = \frac{\overline{AR}}{\overline{AO}}. \quad (2.31)$$

Das equações (2.28) e (2.29) obtém-se

$$\overline{AP} = \overline{AQ} \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} = \overline{AR} \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}. \quad (2.32)$$

Das equações (2.30) e (2.31), respectivamente, resulta

$$\overline{AQ} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen} c \quad (2.33)$$

e

$$\overline{AR} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen} b. \quad (2.34)$$

Substituindo as equações (2.33) e (2.34) na equação (2.32), obtemos as seguintes equações:

$$\overline{AP} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} \quad (2.35)$$

e ainda,

$$\overline{AP} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} \quad (2.36)$$

igualando as equações (2.35) e (2.36), obtemos

$$\overline{AO} \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}$$

e portanto

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}.$$

De maneira análoga, considerando o vértice  $B$  ou  $C$ , teremos que

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \widehat{A}}$$

o que nos permite concluir que

$$\frac{\operatorname{sen} \widehat{A}}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{B}}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} c}$$

finalizando a demonstração.  $\square$

A partir da lei dos cossenos esféricos, podemos deduzir outros resultados, como o que apresentaremos logo a seguir:

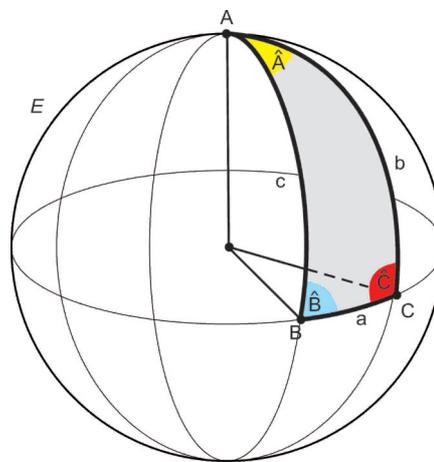
**Teorema 2.4.** Dado um triângulo esférico de vértices  $A, B$  e  $C$ , com ângulos internos medindo  $\widehat{A}, \widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  e cujos lados opostos medem  $a, b$  e  $c$ , respectivamente, como na Figura 2.17, tem-se

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{C} \cdot \cos a$$

$$\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{C} \cdot \cos b$$

$$\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} \cdot \cos c$$

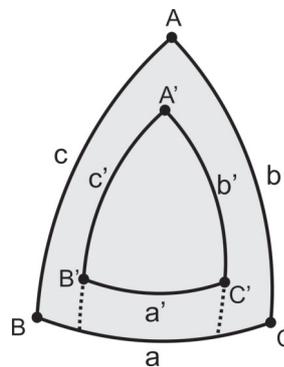
Figura 2.17: Triângulo Esférico.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Aplicando a lei dos cossenos esféricos (Teorema 2.2) no triângulo  $A'B'C'$  polar ao triângulo  $ABC$ , representado na Figura 2.18,

Figura 2.18: Triângulos Polares.



Fonte: Acervo do autor.

teremos o seguinte resultado:

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos \widehat{A'} \quad (2.37)$$

$$\cos b' = \cos a' \cdot \cos c' + \sin a' \cdot \sin c' \cdot \cos \widehat{B'} \quad (2.38)$$

$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \operatorname{sen} a' \cdot \operatorname{sen} b' \cdot \cos \widehat{C}'. \quad (2.39)$$

Pelo Teorema de Lagrange temos,

$$a' = 180^\circ - \widehat{A}$$

$$b' = 180^\circ - \widehat{B}$$

$$c' = 180^\circ - \widehat{C}$$

$$\widehat{A}' = 180^\circ - a$$

$$\widehat{B}' = 180^\circ - b$$

$$\widehat{C}' = 180^\circ - c.$$

Substituindo as equações anteriores nas Equações (2.37), (2.38) e (2.39) obtemos,

$$\cos (180^\circ - \widehat{A}) = \cos (180^\circ - \widehat{B}) \cdot \cos (180^\circ - \widehat{C}) + \operatorname{sen} (180^\circ - \widehat{B}) \cdot \operatorname{sen} (180^\circ - \widehat{C}) \cdot \cos (180^\circ - a)$$

$$\cos (180^\circ - \widehat{B}) = \cos (180^\circ - \widehat{A}) \cdot \cos (180^\circ - \widehat{C}) + \operatorname{sen} (180^\circ - \widehat{A}) \cdot \operatorname{sen} (180^\circ - \widehat{C}) \cdot \cos (180^\circ - b)$$

$$\cos (180^\circ - \widehat{C}) = \cos (180^\circ - \widehat{A}) \cdot \cos (180^\circ - \widehat{B}) + \operatorname{sen} (180^\circ - \widehat{A}) \cdot \operatorname{sen} (180^\circ - \widehat{B}) \cdot \cos (180^\circ - c).$$

Utilizando as relações trigonométricas planas

$$\cos (180^\circ - a) = -\cos a$$

e

$$\operatorname{sen} (180^\circ - a) = \operatorname{sen} a$$

e fazendo as devidas substituições, obtém-se

$$-\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} \cdot (-\cos \widehat{C}) + \operatorname{sen} \widehat{B} \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} \cdot (-\cos a) \quad (2.40)$$

$$-\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A} \cdot (-\cos \widehat{C}) + \operatorname{sen} \widehat{A} \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} \cdot (-\cos b) \quad (2.41)$$

$$-\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} \cdot (-\cos \widehat{B}) + \operatorname{sen} \widehat{A} \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} \cdot (-\cos c). \quad (2.42)$$

Multiplicando por (-1) em ambos os membros das equações (2.40), (2.41) e (2.42) chegaremos nas relações desejadas

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos a$$

$$\cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos b$$

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \cos c.$$

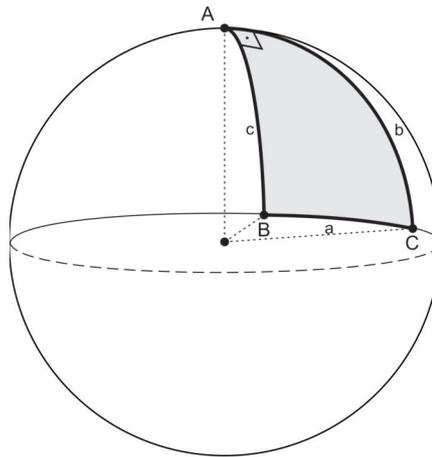
□

Veremos agora um resultado bastante importante, conhecido também como Teorema de Pitágoras para triângulos esféricos.

**Teorema 2.5.** Num triângulo esférico retângulo o cosseno da hipotenusa é igual ao produto dos cossenos dos catetos.

*Demonstração.* Considere inicialmente, um triângulo esférico  $ABC$ , retângulo em  $\hat{A}$ , como mostra a Figura 2.19.

Figura 2.19: Triângulo Retângulo.



Fonte: Acervo do autor.

Utilizando a lei dos cossenos esféricos, obtemos

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$$

e como  $\hat{A} = 90^\circ$  então

$$\cos \hat{A} = \cos 90^\circ = 0$$

e daí

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot 0.$$

Logo, concluímos que

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

□

Além disto, existem outros resultados importantes do triângulo retângulo esférico, como as que apresentaremos em seguida.

**Teorema 2.6.** O seno de um cateto é igual ao produto dos senos da hipotenusa e do ângulo oposto ao referido cateto.

*Demonstração.* Considere inicialmente, um triângulo esférico  $ABC$ , retângulo em  $\hat{A}$ , como mostra a Figura 2.19.

Pela lei dos senos esféricos, tem-se

$$\frac{\widehat{\text{sen}} \hat{A}}{\widehat{\text{sen}} a} = \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{B}}{\widehat{\text{sen}} b} = \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{C}}{\widehat{\text{sen}} c}$$

e como  $\hat{A} = 90^\circ$  obtemos

$$\widehat{\text{sen}} \hat{A} = 1.$$

Assim

$$\frac{1}{\widehat{\text{sen}} a} = \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{B}}{\widehat{\text{sen}} b}$$

$$\frac{1}{\widehat{\text{sen}} a} = \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{C}}{\widehat{\text{sen}} c}.$$

Disto resulta que

$$\widehat{\text{sen}} b = \widehat{\text{sen}} a \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{B}$$

e

$$\widehat{\text{sen}} c = \widehat{\text{sen}} a \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{C}.$$

Provamos então que o seno de um cateto é igual ao produto dos senos da hipotenusa e do ângulo oposto ao referido cateto.  $\square$

**Teorema 2.7.** O cosseno da hipotenusa é igual ao produto das cotangentes<sup>1</sup> dos ângulos adjacentes.

*Demonstração.* Considere inicialmente, um triângulo esférico  $ABC$ , retângulo de modo que  $\hat{A} = 90^\circ$  como o representado na Figura 2.19. Pelo Teorema 2.4, tem-se

$$\widehat{\text{cos}} \hat{A} = -\widehat{\text{cos}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{cos}} \hat{C} + \widehat{\text{sen}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{C} \cdot \widehat{\text{cos}} a$$

e como  $\hat{A} = 90^\circ$ , então

$$\widehat{\text{cos}} \hat{A} = \widehat{\text{cos}} 90^\circ = 0$$

daí

$$-\widehat{\text{cos}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{cos}} \hat{C} + \widehat{\text{sen}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{C} \cdot \widehat{\text{cos}} a = 0$$

o que implica que

$$\widehat{\text{cos}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{cos}} \hat{C} = \widehat{\text{sen}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{C} \cdot \widehat{\text{cos}} a$$

logo temos

$$\widehat{\text{cos}} a = \frac{\widehat{\text{cos}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{cos}} \hat{C}}{\widehat{\text{sen}} \hat{B} \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{C}}$$

<sup>1</sup>Cotangente de um ângulo é razão trigonométrica inversa da tangente, ou seja, a cotangente de um ângulo é a razão entre o Cateto adjacente e o Cateto Oposto a esse ângulo a cotangente está definida para ângulos cuja tangente é diferente de zero.

$$\cos a = \frac{\cos \widehat{B} \cdot \cos \widehat{C}}{\sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{C}}$$

assim concluímos que

$$\cos a = \cotg \widehat{B} \cdot \cotg \widehat{C}.$$

Como  $a$  é o lado oposto ao ângulo reto, temos que o cosseno da hipotenusa é igual ao produto das cotangentes dos ângulos adjacentes.  $\square$

**Teorema 2.8.** *O cosseno de um dos ângulos não retos é igual ao produto do cosseno do lado oposto pelo seno do outro ângulo não reto.*

*Demonstração.* Considere inicialmente, um triângulo esférico  $ABC$  retângulo de modo que  $\widehat{A} = 90^\circ$  como o representado na Figura 2.19. Pelo Teorema 2.4, tem-se

$$\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{C} + \sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{C} \cdot \cos b$$

$$\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} \cdot \cos c$$

e como  $\widehat{A} = 90^\circ$ , então

$$\cos \widehat{A} = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin \widehat{A} = \sin 90^\circ = 1$$

daí, concluímos que

$$\cos \widehat{B} = \sin \widehat{C} \cdot \cos b$$

$$\cos \widehat{C} = \sin \widehat{B} \cdot \cos c. \quad \square$$

## Capítulo 3

# Aplicações

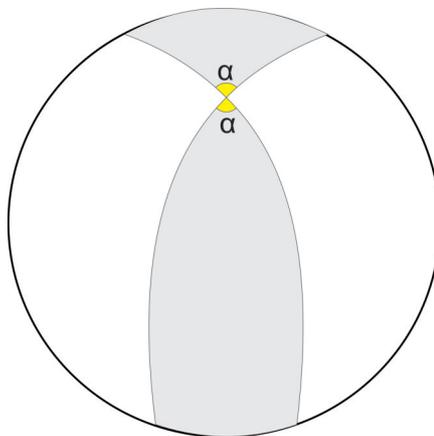
Este capítulo será dedicado a apresentar algumas aplicações da Geometria Esférica que têm relações com conteúdos programáticos da grade curricular do ensino básico. Isso favorecerá que o professor tenha a oportunidade de levar para sala de aula o ensino de Geometria Esférica, algo que como vimos, não está presente na educação básica, possibilitando esse contato com uma geometria não euclidiana, algo que é pouco explorado no ensino de Geometria.

### 3.1 O Teorema de Euler para Poliedros Convexos

Usaremos a demonstração dada por Adrien Marie Legendre, considerada mais elementar, e por esse motivo é mais acessível e mais didática. Para isso, será necessário conhecer o Teorema de Girard referente a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico que será apresentado e demonstrado nesta seção. Para a demonstração deste resultado, faremos uso do seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\phi$  um fuso completo, cujo ângulo mede  $\alpha$  radianos, como mostra a Figura 3.1. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios  $H$  e  $H'$ . As partes  $R, R'$  do fuso completo  $\phi$  contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área  $2\alpha r^2$ .*

Figura 3.1: Fuso Completo.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Seja  $E$  uma esfera de centro  $O$  e raio  $r$ .

Um fuso de ângulo  $\alpha = \pi$  é um hemisfério, note que a área de um hemisfério é igual a metade da área total da esfera, logo um fuso de ângulo  $\alpha = \pi$  tem área medindo  $2\pi r^2$ . Um fuso de ângulo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  tem área igual a  $\frac{1}{4}$  da área da esfera, logo sua área mede  $\pi r^2$ . Desse modo, é possível perceber que a área do fuso é proporcional ao seu ângulo.

Assim sendo, temos que um giro completo  $2\pi$  está para a área total da esfera na mesma proporção que o ângulo  $\alpha$  está para a área do fuso de ângulo  $\alpha$ , logo

$$\frac{2\pi}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{\text{área do fuso}}$$

e portanto,

$$\frac{1}{2r^2} = \frac{\alpha}{(\text{área do fuso})}.$$

Assim, temos que

$$\text{área do fuso} = 2\alpha r^2.$$

Dado um fuso  $\varphi$  na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de  $\varphi$  é ainda um fuso  $\varphi'$ , chamado o fuso antípoda de  $\varphi$ . A reunião  $\phi = \varphi \cup \varphi'$  chama-se um fuso completo. Agora basta-nos provar que  $R$  e  $R'$  têm a mesma área, donde

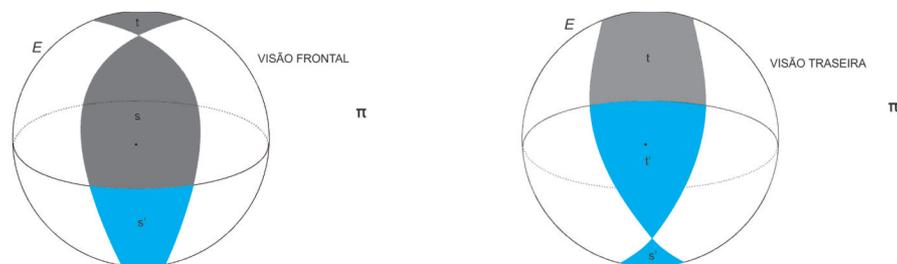
$$\text{área de } \phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2(\text{área de } R)$$

e conseqüentemente,

$$\text{área de } R = \text{metade da área de } \phi = 2\alpha r^2.$$

De fato, note que  $R$  e  $R'$  são figuras antípodas, ou seja, cada ponto de  $R$  é antípoda de um ponto de  $R'$  e vice-versa. Pois  $R = s \cup t$  é a reunião de dois triângulos esféricos que têm um vértice em comum e ainda,  $R' = s' \cup t'$  é a reunião de dois triângulos antípodas a  $s$  e  $t$ , como mostra a Figura 3.2. Logo será suficiente provar que um triângulo esférico  $t$  e seu antípoda têm a mesma área. Note, que  $t$  e  $t'$  têm ângulos iguais e lados congruentes, dois a dois, mas  $t$  e  $t'$  não são triângulos congruentes, pois não é possível mover um deles no espaço até sobrepô-lo exatamente sobre o outro, a menos que  $t$  e conseqüentemente  $t'$  sejam isósceles.

Figura 3.2: A região  $R$  em cinza e a região  $R'$  em azul.



Fonte: Acervo do autor.

Agora observe que se  $t$  e conseqüentemente  $t'$  forem isósceles, então  $t$  é congruente a seu antípoda  $t'$ , logo esses dois triângulos têm a mesma área. Em geral, procede-se da seguinte maneira. Os pontos  $A, B, C$ , vértices de  $t$ , determinam uma circunferência  $e$ , portanto, uma calota esférica que contém o triângulo esférico. Seja  $P$  o ponto de intersecção da calota com a perpendicular ao plano  $ABC$  que passa

pelo centro da circunferência, chamaremos  $P$  de polo da calota. Os arcos de circunferência máxima  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  têm o mesmo comprimento, pois a perpendicular que contém  $P$  passa pelo centro da circunferência que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , logo a distância de  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  são as mesmas e conseqüentemente as medidas dos seus arcos de circunferência máxima serão as mesmas. Daí os triângulos esféricos  $PAB$ ,  $PBC$  e  $PAC$  são isósceles.

Se o polo  $P$  estiver no interior do triângulo  $t = ABC$ , teremos,

$$\text{área de } t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PBC) + (\text{área de } PAC).$$

Procedendo analogamente com o triângulo antípoda  $t' = A'B'C'$ , decompondo-o como reunião justaposta de triângulos isósceles  $P'A'B'$ ,  $P'B'C'$  e  $P'A'C'$ , cada um deles antípoda do seu correspondente em  $t$ , assim teremos que  $PAB$ ,  $PBC$  e  $PAC$  são respectivamente congruentes a  $P'A'B'$ ,  $P'B'C'$  e  $P'A'C'$ .

Assim

$$\text{área de } t' = (\text{área de } P'A'B') + (\text{área de } P'B'C') + (\text{área de } P'A'C')$$

donde

$$\text{área de } t' = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PBC) + (\text{área de } PAC) = \text{área de } t$$

e portanto,

$$\text{área de } t' = \text{área de } t.$$

Desse modo, concluímos que  $\text{área de } t = \text{área de } t'$ .

Se o polo  $P$  estiver situado fora do triângulo  $t = ABC$ , então,

$$\text{área de } t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PAC) - (\text{área de } PBC).$$

E analogamente, considerando o triângulo  $t' = A'B'C'$ , obtemos

$$\text{área de } t' = (\text{área de } P'A'B') + (\text{área de } P'A'C') - (\text{área de } P'B'C')$$

o que nos permite concluir que

$$\text{área de } t = \text{área de } t'.$$

De maneira análoga se procede com  $s$  e o seu triângulo antípoda  $s'$ , e como  $R = s \cup t$  e  $R' = s' \cup t'$  obtemos

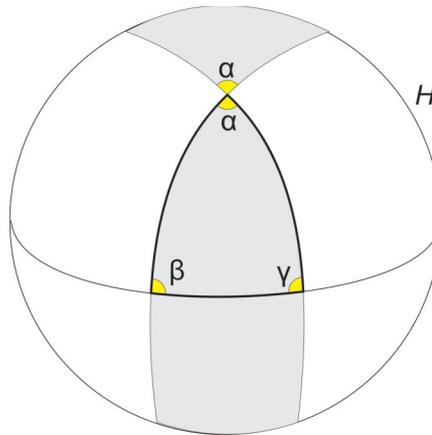
$$\text{área de } R = \text{área de } R' = 2\alpha r^2,$$

como queríamos demonstrar. □

De posse do resultado acima, será possível demonstrar o importante Teorema de Girard sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

**Teorema 3.2.** *Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$ , onde  $a$  é área desse triângulo e  $r$  é o raio da esfera.*

*Demonstração.* Consideremos um hemisfério  $H$  que contenha o triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo  $\alpha$ , até encontrarem o bordo do hemisfério  $H$ , obtemos uma região  $R_\alpha \subset H$ , cuja área mede  $2\alpha r^2$ , de acordo com o teorema anterior.

Figura 3.3: A parte pintada é a região  $R_\alpha$ .

Fonte: Acervo do autor.

Fazendo o mesmo processo com os lados que formam os ângulos  $\beta$  e analogamente para os lados que formam os ângulos  $\gamma$ , obtemos as regiões  $R_\beta$  e  $R_\gamma$ , cujas áreas medem respectivamente  $2\beta r^2$  e  $2\gamma r^2$ . A reunião dessas três regiões é o hemisfério  $H$ , com o triângulo dado contando duas vezes a mais do que deveria. Desse modo, temos que a soma das áreas das regiões  $R_\alpha$ ,  $R_\beta$  e  $R_\gamma$  é igual a área do hemisfério  $H$  mais duas vezes a área  $a$  do triângulo dado, ou seja,

$$(\text{área de } R_\alpha) + (\text{área de } R_\beta) + (\text{área de } R_\gamma) = (\text{área de } H) + 2(\text{área do triângulo}).$$

Como a área do hemisfério  $H$  mede  $2\pi r^2$  segue-se que

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2a \quad (3.1)$$

dividindo ambos os membros da equação 3.1 por  $2r^2$ , temos

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}.$$

estabelecendo o resultado. □

Agora, de posse desses dois teoremas, poderemos apresentar o famoso Teorema de Euler para Poliedros Convexos e demonstrá-lo usando a Geometria Esférica.

**Teorema 3.3.** *Em um poliedro convexo onde  $F$  é o número de faces,  $A$  o número de arestas e  $V$  o número de vértices, vale a relação  $V - A + F = 2$ .*

*Demonstração.* Seja  $P$  um poliedro convexo, com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Por conveniência, suporemos que as faces  $P$  são triângulos, mas se não forem, basta decompor cada face em triângulos por meio de diagonais. Observe que isso não mudará o número  $V - A + F$ , pois cada vez que traçamos uma diagonal em uma face, o número  $V$  não se altera, enquanto os números  $F$  e  $A$  aumentam em uma unidade, já que a cada diagonal traçada, teremos essa diagonal como uma nova aresta, que por sua vez divide a face em duas faces, o que implica em uma face a mais, esses aumentos se cancelam na expressão da seguinte maneira,

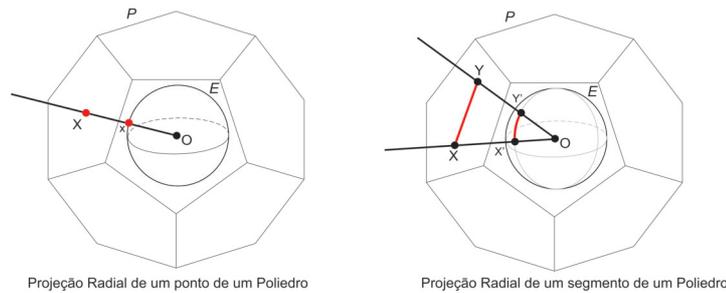
$$V - (A + 1) + (F + 1) = V - A - 1 + F + 1 = V - A + F.$$

Consideremos uma esfera  $E$ , de raio  $r$ , cujo centro  $O$  é um ponto situado no interior do poliedro  $P$ . Projetando radialmente o poliedro  $P$  sobre a esfera  $E$ , obtemos uma decomposição de  $E$  em triângulos

esféricos, dispostos de modo semelhante à situação das faces de  $P$ . Em particular, a esfera  $E$  fica recoberta por  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices.

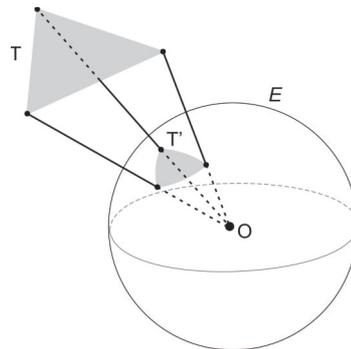
A projeção radial de um segmento de reta  $AB$  é um arco de circunferência máxima  $ab$  sobre a esfera  $E$  (salvo no caso em que  $A, B$  e o centro  $O$  da esfera estão na mesma reta). Com efeito,  $A, B$  e  $O$  determinam um plano, que corta a esfera segundo uma circunferência máxima do qual  $ab$  é um arco.

Figura 3.4: Projeção Radial.



Fonte: Acervo do autor.

Figura 3.5: O Triângulo  $T'$  é a Projeção Radial do Triângulo  $T$  sobre a esfera  $E$ .



Fonte: Acervo do autor.

Quando dois arcos de circunferência máxima têm uma extremidade comum, o ângulo  $\alpha$  formado por esses arcos é, por definição, o ângulo entre as semi-retas tangentes a esses arcos. Como vimos anteriormente, pelo Teorema de Girard, se  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são ângulos de um triângulo esférico medidos em radianos, então a soma  $\alpha + \beta + \gamma$  é dada pela fórmula,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2},$$

em que  $a$  é a área do triângulo e  $r$  é o raio da esfera.

Decompondo a esfera  $E$  em  $F$  triângulos esféricos, teremos um total de  $A$  lados, pois cada lado dos triângulos esféricos será uma aresta do poliedro projetado sobre a esfera e teremos ainda  $V$  vértices, para cada um desses triângulos  $t$ , vale a Fórmula de Girard

$$s_t = \pi + \frac{a_t}{r^2},$$

em que  $s_t$  é a soma dos ângulos e  $a_t$  é a área do triângulo esférico  $t$  e  $r$  é o raio da esfera.

Temos ao todo  $F$  igualdades como esta acima, pois há  $F$  triângulos esféricos. Somando-as todas, temos,

$$\begin{aligned}\sum s_t &= F \left( \pi + \frac{a_t}{r^2} \right) \\ &= F\pi + F \frac{a_t}{r^2} \\ &= F\pi + \frac{\sum a_t}{r^2}.\end{aligned}$$

Agora note que,  $\sum s_t = 2\pi V$ , pois a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a  $2\pi$  e há  $V$  vértices. Além disso,  $\sum a_t = 4\pi r^2$ , pois a soma das áreas de todos os triângulos esféricos é igual a área da superfície esférica  $E$ , de modo que

$$\sum s_t = 2\pi V = F\pi + \frac{4\pi r^2}{r^2}.$$

Simplificando, esta igualdade obtemos que

$$2\pi V = F\pi + 4\pi$$

e dividindo por  $\pi$  em ambos os membros, temos,

$$2V = F + 4$$

donde

$$2V - F = 4. \tag{3.2}$$

Para obter uma relação entre  $F$  (número de triângulos esféricos) e  $A$  (número total de lados desses triângulos), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulo, logo  $3F = 2A$ , ou seja,

$$F = 3F - 2F = 2A - 2F.$$

Substituindo  $F$  por este valor na equação (3.2), resulta que

$$2V - (2A - 2F) = 4$$

donde

$$2V - 2A + 2F = 4. \tag{3.3}$$

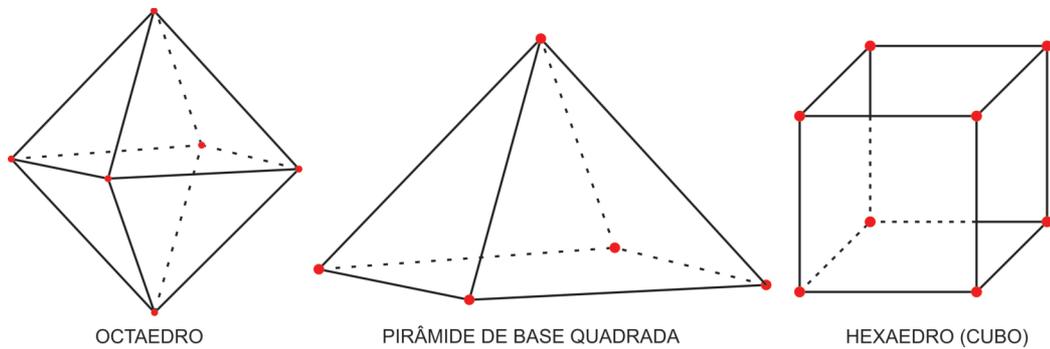
Finalmente dividindo por 2 em ambos os membros da equação (3.3), obtemos

$$V - A + F = 2$$

que é a relação de Euler enunciada. □

Veremos agora alguns exemplos de aplicação do Teorema de Euler para poliedros convexos.

Figura 3.6: Relação de Euler em Poliedros Convexos.



Fonte: Acervo do autor.

Note que sendo  $V$  a quantidade de vértices,  $A$  a quantidade de arestas e  $F$  a quantidade de faces, temos no *Octaedro*

$$V = 6$$

$$F = 8$$

$$A = 12$$

logo, vale a relação de Euler

$$V + F = A + 2,$$

pois

$$6 + 8 = 12 + 2 = 14.$$

Na *Pirâmide* temos

$$V = 5$$

$$F = 5$$

$$A = 8$$

logo, vale a relação de Euler

$$V + F = A + 2,$$

pois

$$5 + 5 = 8 + 2 = 10.$$

E no *Hexaedro* temos

$$V = 8$$

$$F = 6$$

$$A = 12$$

logo, vale a relação de Euler

$$V + F = A + 2,$$

pois

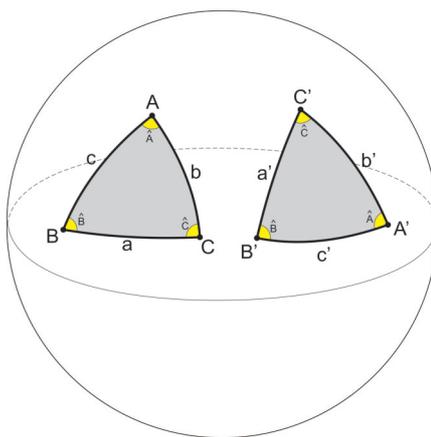
$$8 + 6 = 12 + 2 = 14.$$

## 3.2 Congruência de Triângulos Esféricos

Nesta seção iremos apresentar os casos de congruências de triângulos esféricos utilizando a teoria da Trigonometria Esférica abordada no capítulo anterior.

**Teorema 3.4.** (Caso - AAA) *Se dois triângulos esféricos têm os três ângulos esféricos congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Figura 3.7: Triângulos Esféricos com os três ângulos congruentes.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Considere os triângulos esféricos de lados  $a, b$  e  $c$  e  $a', b'$  e  $c'$ , com ângulos congruentes  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$  como mostra a Figura 3.7.

No triângulo  $ABC$ , pelo Teorema 2.4, segue que

$$\cos(a) = \frac{\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}$$

$$\cos(b) = \frac{\cos \hat{B} + \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}$$

$$\cos(c) = \frac{\cos \hat{C} + \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B}}{\operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}.$$

No triângulo  $A'B'C'$ , do Teorema 2.4, segue que

$$\cos(a') = \frac{\cos \hat{A} + \cos \hat{B}' \cdot \cos \hat{C}'}{\operatorname{sen} \hat{B}' \cdot \operatorname{sen} \hat{C}'}$$

$$\cos(b') = \frac{\cos \hat{B}' + \cos \hat{A}' \cdot \cos \hat{C}'}{\operatorname{sen} \hat{A}' \cdot \operatorname{sen} \hat{C}'}$$

$$\cos(c') = \frac{\cos \hat{C}' + \cos \hat{A}' \cdot \cos \hat{B}'}{\operatorname{sen} \hat{A}' \cdot \operatorname{sen} \hat{B}'}$$

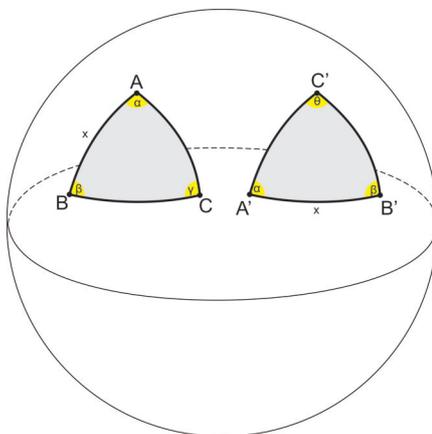
Assim tem-se

$$\cos(a) = \cos(a'), \cos(b) = \cos(b') \text{ e } \cos(c) = \cos(c').$$

Portanto  $a = a', b = b'$  e  $c = c'$ , pois o cosseno é determinado apenas entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Logo, os triângulos são congruentes.  $\square$

**Teorema 3.5.** (Caso - ALA) Se em dois triângulos esféricos dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então, esses triângulos são congruentes.

Figura 3.8: Triângulos Esféricos com dois ângulos congruentes e o lado entre eles congruente.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Considere os triângulos esféricos com ângulos congruentes  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  e lado compreendido entre esses ângulos com medida  $x$ , como mostra a Figura 3.8.

No triângulo  $ABC$ , pelo Teorema 2.4, segue que

$$\cos(x) = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}. \quad (3.4)$$

No triângulo  $A'B'C'$ , pelo Teorema 2.4, tem-se que

$$\cos(x) = \frac{\cos \theta + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}. \quad (3.5)$$

Logo, das equações (3.4) e (3.5), temos

$$\frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta} = \frac{\cos \theta + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

donde

$$\cos \gamma = \cos \theta$$

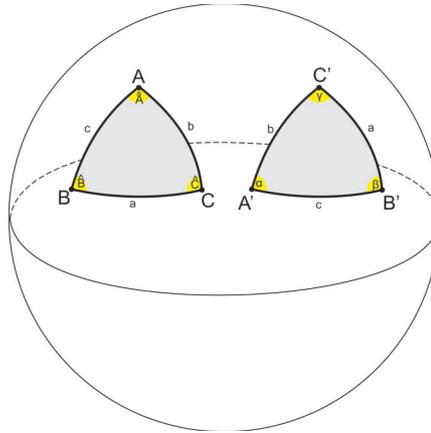
logo

$$\gamma = \theta,$$

pois o cosseno é determinado apenas entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Sendo assim, pelo caso AAA do Teorema 3.4 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes.  $\square$

**Teorema 3.6.** (Caso - LLL) Se dois triângulos esféricos têm os três lados congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 3.9: Triângulos Esféricos com os três lados congruentes.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Considere os triângulos esféricos  $ABC$  e  $A'B'C'$  com lados congruentes  $a, b$  e  $c$  como mostra a Figura 3.9.

No triângulo  $ABC$ , pela Lei dos cossenos esféricos (Teorema 2.2), segue que

$$\cos \widehat{A} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}.$$

No triângulo  $A'B'C'$ , pela Lei dos cossenos esféricos (Teorema 2.2), segue que

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

donde

$$\cos \widehat{A} = \cos \alpha$$

$$\cos \widehat{B} = \cos \beta$$

$$\cos \widehat{C} = \cos \gamma.$$

Logo, concluímos que

$$\widehat{A} = \alpha$$

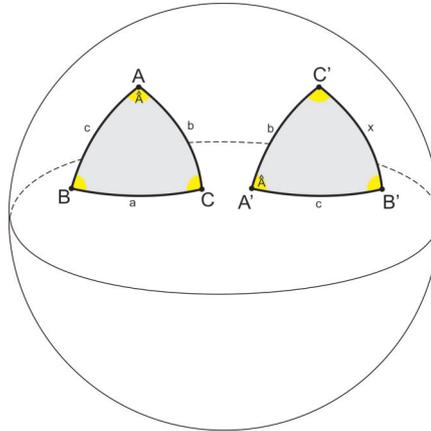
$$\widehat{B} = \beta$$

$$\widehat{C} = \gamma,$$

pois o cosseno é determinado apenas entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Sendo assim, pelo caso AAA do Teorema 3.4 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes.  $\square$

**Teorema 3.7.** (Caso - LAL) Se dois triângulos esféricos têm dois lados e o ângulo compreendido entre eles congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 3.10: Triângulos Esféricos com dois lados e o ângulo compreendido entre eles congruentes.



Fonte: Acervo do autor.

*Demonstração.* Considere os triângulos esféricos  $ABC$  e  $A'B'C'$  com dois lados congruentes  $b$  e  $c$  e com o ângulo  $\hat{A}$  entre eles também congruente, como mostra a Figura 3.10.

No triângulo  $ABC$ , pela Lei dos cossenos esféricos (Teorema 2.2), segue que

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}. \quad (3.6)$$

No triângulo  $A'B'C'$ , pela Lei dos cossenos esféricos (Teorema 2.2), segue que

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos x - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}. \quad (3.7)$$

Segue das equações (3.6) e (3.7)

$$\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos x - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

donde

$$\cos a = \cos x.$$

Logo, concluímos que

$$a = x,$$

pois o cosseno é determinado apenas entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Sendo assim, pelo caso LLL do Teorema 3.6 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes.  $\square$

## Capítulo 4

# Considerações Finais

Neste trabalho desenvolveu-se um estudo bibliográfico a respeito da Geometria Esférica, algumas de suas principais propriedades e duas importantes aplicações.

Durante todo processo do estudo houve uma preocupação em apresentar a importância da Geometria na formação do indivíduo, e ainda, a maneira como se deu o desenvolvimento da Geometria Euclidiana até que houvesse a necessidade de Geometrias Não-Euclidianas, em especial, a relevância da Geometria Esférica e o desenvolvimento da mesma. Durante este processo foi possível perceber que as Geometrias Não-Euclidianas ainda não ocupam um espaço satisfatório na formação de alunos da educação básica, tampouco de alunos de graduação. Desta maneira, este trabalho objetivou apresentar uma base consistente com apresentações de conceitos e definições que possibilitassem a compreensão do presente estudo. Assim, abordamos a definição de esfera, triângulos esféricos, poliedros e os elementos que os compõem. Posteriormente apresentamos, propriedades, proposições, teoremas e suas respectivas demonstrações da Geometria e Trigonometria Esféricas, relacionando-os sempre que possível à Geometria e Trigonometria Planas. Por fim, apresentamos as demonstrações do Teorema de Euler para poliedros convexos e Congruências de Triângulos Esféricos, como aplicações deste tema.

Este trabalho nos possibilitou compreender, como aponta Kaleff (2010, p.10) que "A importância de se trabalhar as Geometrias Não-Euclidianas, até mesmo na escola e, principalmente, no âmbito da licenciatura, reside no fato dessas teorias possibilitarem a quebra de paradigmas e padrões visuais[...]". O que possivelmente estimule um olhar mais preciso para problemas de diferentes naturezas do mundo em que vivemos, como mostram Carvalho et al., (2014) ao afirmarem que a Geometria Esférica permite associações com o Globo Terrestre e possibilita uma contextualização com a Geografia. Deste modo, podemos inferir que o estudo do tema desta pesquisa é de grande relevância na formação do indivíduo.

Desta maneira, esperamos contribuir de maneira satisfatória com todos que se interessarem pelo tema abordado, em especial, os professores e estudantes da Educação Básica e estudantes de licenciatura em Matemática, aos quais possivelmente o tema abordado seja pouco conhecido ou até mesmo desconhecido, porém o contato com o Teorema de Euler para poliedros convexos e sua demonstração pode acontecer de uma nova maneira, como a apresentada nesta pesquisa, tendo em vista que este teorema faz parte dos conteúdos aplicados nas aulas de Matemática, e ainda, pode-se relacionar com a Geometria Euclidiana, que por sua vez, é mais usual nas salas de aula, assim como relacionar os casos de congruências de triângulos planos com os casos de congruências de triângulos esféricos. Compreendemos a relevância de pesquisas futuras dentro deste tema e propomos o estudo de novas aplicações, bem como a aplicação de uma sequência didática que possibilite aos educandos compreender de maneira mais significativa os conceitos e propriedades da Geometria Esférica. Com isso, será possível levar a Geometria Esférica

como uma alternativa nas aulas de Matemática, que por meio de uma sequência didática promoverá uma aprendizagem mais significativa em que o educando será sujeito da sua própria aprendizagem. E assim professores e estudantes de licenciatura em Matemática poderão vivenciar na prática a aplicação deste tema no contexto da Educação Básica, contribuindo com sua formação profissional.

# Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, S.M.; OTTONI, J.E. *Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição*. Dissertação de Mestrado. São João del-Rei - MG: Universidade Federal de São João del-Rei, 2015.
- [2] BRASIL, Ministério da Educação.; *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.
- [3] CARMO, M.P.; *Geometrias Não-Euclidianas*. Rio de Janeiro - RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1987.
- [4] CARVALHO, M.A.S. et al.; *Geometria Esférica na Educação Básica - Uma Possibilidade*. Campo Mourão - PR: XII EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2014.
- [5] COUTINHO, L.; *Convite às Geometrias Não-euclidianas* 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: Interciência, 2001.
- [6] EVES, H.; *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*. 1.ed. São Paulo - SP: Atual, 1992.
- [7] KALEFF, A. M. M. R.; *Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica: Utopia ou Possibilidade?*. Salvador - BA: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010.
- [8] KUNTZ, B.O.; *Teorema de Euler pela Geometria Esférica*. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro - RJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2016.
- [9] LIMA, E.L.; *Meu Professor de Matemática*. 6. ed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [10] MUNIZ NETO, A. C.; *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*. 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [11] OLIVEIRA, S.S.; *Temas Regionais em Atividades de Geometria: Uma Proposta na Formação Continuada de Professores de Manaus (AM)*. Dissertação de Mestrado. Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista, 2004.
- [12] PATAKI, I.; *Geometria Esférica para Formação de Professores: Uma Proposta Interdisciplinar*. Dissertação de Mestrado. São Paulo - SP: Pontifícia Universidade Católica, 2003.
- [13] REIS, J. d. S.; *Geometria Esférica por meio de Materiais Manipuláveis*. Dissertação de Mestrado. Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista, 2006.
- [14] ROCHA, R.B.; *Geometrias Não-Euclidianas: Proposta de Abordagem Aplicável ao Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado. Salvador - BA: Universidade Federal da Bahia, 2013.
- [15] SANTOS, C.P.F.; *Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica*. Dissertação de Mestrado. Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista, 2020.

- [16] SILVA, W.D.; *Uma introdução à Geometria Esférica*. Dissertação de Mestrado. Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista, 2015.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB  
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional

---

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA

CEP: 44380-000

Telefone: (75) 3621-2350

<<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>>