UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JONAS BARLETTA SILVA

Geometria Espacial de Posição: uma abordagem axiomática utilizando material concreto para o Ensino Médio

Campinas

2022

Jonas Barletta Silva

Geometria Espacial de Posição: uma abordagem axiomática utilizando material concreto para o Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Roberto Andreani

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Jonas Barletta Silva e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Andreani.

Campinas

2022

"Without the diligent study of Euclid's Elements, it is impossible to attain unto the perfect knowledge of geometry, and consequently of any of the other mathematical sciences."
(Henry Billingsley, 1570)

Resumo

Este trabalho trata, de forma axiomática, a introdução da geometria espacial chamada, na maioria dos materiais, de geometria espacial de posição, visando o ensino básico. O estudo começa com uma apresentação resumida da história da geometria e em seguida são brevemente apresentados os axiomas da geometria plana, algumas de suas definições e seus teoremas. Tais proposições são a base da geometria espacial, que é a expansão da geometria plana com o acréscimo do espaço e postulados pertinentes. A partir disso diversos resultados são concluídos, tais como, a construção de pirâmides, prismas e de todos os Poliedros de Regulares. Ao final são propostas atividades que utilizam material concreto ou digital para o ensino da geometria espacial de posição no ensino básico.

Palavras-chave: geometria espacial. material concreto. geometria axiomática.

Abstract

This work treats, in an axiomatic way, with the introduction of spacial geometry called, in most materials, spatial position geometry, aiming at basic education. The study begins with a brief presentation of the history of geometry and then the axioms of plane geometry, some of its definitions and theorems are briefly presented. Such propositions are the basis of spatial geometry, which is the expansion of plane geometry with the addition of space and relevant postulates. After that, several results will be concluded, such as the construction of pyramids, cousins and all Regular Polyhedra. At the end, activities are proposed that use concrete or digital material to teach spatial geometry of position in basic education.

Keywords: spatial geometry. concrete material. axiomatic geometry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Reta AB . . . 22
Figura 2 – O ponto C está entre A e B . . . 23
Figura 3 – O ponto C está entre A e B, e o ponto B está entre A e D . . . 23
Figura 4 – Ângulo $\widehat{ABC}$ . . . 24
Figura 5 – $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$ . . . 25
Figura 6 – Critério de congruência de triângulos ALA . . . 26
Figura 7 – Critério de congruência de triângulos LLL . . . 27
Figura 8 – Reta contida no plano . . . 30
Figura 9 – Determinação do plano por uma reta e um ponto exterior à ela . . . 31
Figura 10 – Determinação do plano por duas retas concorrentes . . . 32
Figura 11 – Um plano separa o espaço em dois semiespaços . . . 35
Figura 12 – Demonstração Teorema 6' . . . 36
Figura 13 – Construção de uma pirâmide de base pentagonal ($n = 5$). . . . 38
Figura 14 – Definição 2 . . . 39
Figura 15 – Construção de um paralelepípedo . . . 41
Figura 16 – Pares de retas paralelas derterminam ângulos iguais . . . 42
Figura 17 – Critério de paralelismo entre reta e plano . . . 43
Figura 18 – Aplicação do Teorema 11 . . . 44
Figura 19 – Demonstração do Teorema 12 . . . 44
Figura 20 – Teorema 13 . . . 45
Figura 21 – O plano α é paralelo a várias retas paralelas de β . . . 46
Figura 22 – Construção do plano paralelo a α passando por A . . . 47
Figura 23 – Unicidade do plano paralelo . . . 47
Figura 24 – Teorema 16 . . . 48
Figura 25 – Plano secante a dois planos paralelos . . . 49
Figura 26 – Posição relativa entre três planos . . . 51
Figura 27 – Construção de um prisma pentagonal ($n = 5$) . . . 52
Figura 28 – Reta r perpendicular ao plano α . . . 53
Figura 29 – A reta r' que é paralela a r é perpendicular a α . . . 54
Figura 30 – A reta r perpendicular ao plano α' que é paralelo a α . . . 54
Figura 31 – Teorema 19 . . . 55
Figura 32 – Demonstração da primeira parte do Teorema 19 . . . 55
Figura 33 – Demonstração da segunda parte do Teorema 19 . . . 56
Figura 34 – Demonstração do Teorema 20 . . . 57
Figura 35 – Construção do plano perpendicular a uma reta . . . 58
Figura 36 – Construção da reta perpendicular a um plano . . . 59

Figura 37 – Teorema das Três Perpendiculares 60
Figura 38 – Construção da reta perpendicular comum a duas retas reversas 60
Figura 39 – Prismas retos 61
Figura 40 – Pirâmide pentagonal regular 62
Figura 41 – Definição de distância entre o ponto P e o plano α 63
Figura 42 – Altura de uma pirâmide 63
Figura 43 – Tetraedro regular 64
Figura 44 – Propriedades métricas em um tetraedro regular 65
Figura 45 – As arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais 67
Figura 46 – Construção do Octaedro Regular 68
Figura 47 – Construção de um Dodecaedro Regular 69
Figura 48 – Os pontos A, U, V, B e W são coplanares 70
Figura 49 – O pentágono é equilátero 71
Figura 50 – $\overline{AV} = \overline{AB}$ 73
Figura 51 – $\overline{WU} = \overline{AB}$ 74
Figura 52 – O pentágono $AUVBW$ é equiângulo 75
Figura 53 – Os planos α e β são perpendiculares 76
Figura 54 – Demonstração do Teorema 27 77
Figura 55 – Planos perpendiculares a α passando por A 78
Figura 56 – Plano perpendicular a α passando por s não perpendicular a α 78
Figura 57 – Construção do Icosaedro regular de Luca Pacioli 79
Figura 58 – As faces do icosaedro são triângulos equiláteros 80
Figura 59 – O ponto Q é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α 81
Figura 60 – Projeção ortogonal da reta r sobre o plano α 82
Figura 61 – Demonstração do Teorema 30 83
Figura 62 – Fluxograma da Geometria Espacial 84
Figura 63 – Jogo da velha tradicional x Jogo da velha 3D 86
Figura 64 – Duas opções para a construção do Jogo da Velha 3D 87
Figura 65 – Molde das placas da acrílico do tabuleiro da Figura 64(b) 87
Figura 66 – Análise dos alinhamentos dos marcadores. 88
Figura 67 – Modelo dos cortes nas três placas de MDF 90
Figura 68 – As três placas de MDF 90
Figura 69 – Alguns exemplos de posições relativas com o material concreto 91
Figura 70 – Três planos perpendiculares cuja interseção dos três planos é um ponto 93
Figura 71 – Icosaedro Regular com o material concreto 93
Figura 72 – Tetraedro Regular inscrito em um Cubo 94
Figura 73 – Palitos 95
Figura 74 – Construção do Tetraedro Regular Inscrito no Cubo 96
Figura 75 – Atividade 4 98

Figura 76 – Geometria da molécula de metano 99
Figura 77 – Construção do segmento áureo 107
Figura 78 – Construção do retângulo áureo 110
Figura 79 – O retângulo $AEFD$ é áureo 111

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Enem	Exame Nacional da Ensino Médio
Espcex	Escola Preparatória de Cadetes do Exército
Fuvest	Fundação Universitária para o Vestibular
Ufal	Universidade Federal de Alagoas
Cefet-MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
UEM	Universidade Estadual de Maringá
Puc-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Lista de símbolos

AB	Reta que passa pelos pontos A e B
$\overline{AB}$	Segmento com extremidades nos pontos A e B, ou medida do segmento $\overline{AB}$
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta com início em A passando por B
$\widehat{ABC}$	Ângulo definido pelas semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, ou medida do ângulo $\widehat{ABC}$
$\widehat{A}$	Ângulo com vértice em A, ou medida do ângulo $\widehat{A}$
$\equiv$	Congruência

Sumário

Introdução . . . 14

1 UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DA GEOMETRIA E O MÉTODO AXIOMÁTICO . . . 16

1.1 Aspectos formais dos Elementos de Euclides . . . 17

1.2 O quinto postulado de Euclides . . . 19

1.3 Defeitos dos Elementos de Euclides . . . 20

2 PROPRIEDADES INICIAIS DA GEOMETRIA PLANA . . . 22

2.1 Axiomas de Incidência . . . 22

2.2 Axiomas de Ordem . . . 23

2.3 Axiomas de Continuidade . . . 24

2.4 Axiomas de Congruência . . . 25

2.5 Axioma das Paralelas . . . 27

3 A GEOMETRIA ESPACIAL . . . 29

3.1 Propriedades iniciais . . . 29

3.2 Construção de pirâmides . . . 37

3.3 Congruência de triângulos no espaço . . . 38

3.4 Paralelismo entre retas . . . 38

3.5 Construção de paralelepípedos . . . 40

3.6 Paralelismo entre reta e plano . . . 42

3.7 Paralelismo entre planos . . . 45

3.8 Construção de prismas . . . 52

3.9 Perpendicularismo entre reta e plano . . . 53

3.10 Construção de um prisma reto . . . 61

3.11 Construção de pirâmides regulares . . . 62

3.12 Distância entre ponto e plano . . . 62

3.13 Construção de um tetraedro regular . . . 64

3.14 Construção de um octaedro regular . . . 68

3.15 Construção de Euclides de um dodecaedro regular . . . 68

3.16 Planos perpendiculares . . . 75

3.17 Construção de Luca Pacioli de um icosaedro regular . . . 79

3.18 Projeções ortogonais . . . 81

3.19 Fluxograma . . . 83

4 ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL . . . 85
4.1 Atividade 1 - Jogo da Velha 3D 85
4.2 Atividade 2 - Posições relativas com material concreto 89
4.3 Atividade 3 - Posições relativas no tetraedro regular inscrito em um cubo 93
4.4 Atividade 4 - Projeções ortogonais 97
4.5 Atividade 5 - Tetraedro regular e a molécula de metano 98
4.6 Atividade 6 - Resumo e lista de exercícios 99
4.7 Relato de aplicação 100

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 102

REFERÊNCIAS 103

APÊNDICES 105

APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DE UM SEGMENTO ÁUREO . . 106

APÊNDICE B – CONSTRUÇÃO DE UM RETÂNGULO ÁUREO . 109

ANEXOS 112

ANEXO A – ATIVIDADE 2 - POSIÇÕES RELATIVAS COM MATERIAL CONCRETO 113

ANEXO B – ATIVIDADE 3 - POSIÇÕES RELATIVAS NO TETRAEDRO REGULAR INSCRITO EM UM CUBO . . 117

ANEXO C – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3 ‘POSIÇÕES RELATIVAS NO TETRAEDRO REGULAR INSCRITO EM UM CUBOS’ 119

ANEXO D – ATIVIDADE 5 - TETRAEDRO REGULAR E A MOLÉCULA DE METANO 121

ANEXO E – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5 ‘TETRAEDRO REGULAR E A MOLÉCULA DE METANO’ 125

ANEXO F – RESUMO DE GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO129

ANEXO G – LISTA DE EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO 132

ANEXO H – RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 139

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) estabelece competências e habilidades que os alunos devem desenvolver no Ensino Médio, em todas as disciplinas. Em matemática, para o Ensino Médio, são cinco competências específicas, a quinta é:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
>
> [...] Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições. (BRASIL, 2018, p.540)

Dessa forma, no contexto da Geometria Espacial, esse trabalho propõe uma abordagem axiomática e formal, mas com auxílio de recursos concretos e digitais, que podem estimular a formulação de conjecturas, assim como auxiliar na obtenção de argumentos ou contraexemplos de proposições geométricas.

Além disso, é notória a dificuldade da transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, muitas vezes realizada no 2^o ano do Ensino Médio. Dentre as diversas explicações para essas dificuldades, que variam de aluno para aluno, mas uma delas é a forma de representar os novos objetos, que são tridimensionais. No livro *Introdução à Geometria Espacial* (CARVALHO, 1999), Paulo Cezar comenta:

> As superfícies sobre as quais escrevemos ou desenhamos são excelentes modelos para o plano da Geometria e permitem representar com fidelidade retas, polígonos, círculos e demais figuras planas. Ou seja, podemos facilmente concretizar as noções abstratas da Geometria.
>
> Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversas ordens.[...] Em geral, recorremos a projeções bidimensionais de tais objetos. Mas essas projeções distorcem ângulos, modificam comprimento de segmento e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção. (CARVALHO, 1999, p.1-2)

Mesmo quando utilizamos rescursos computacionais, como o Geogebra 3D, o problema de visualizar um objeto tridimensional em um plano (tela do monitor ou celular) continua. Dessa forma, é necessário que antes da utilização de recursos digitais, haja uma introdução com material concreto, para que os alunos visualizem, toquem, manipulem e construam os objetos tridimensionais. E assim, estarão preparados para entender as representações tridimensionais via desenho.

Então, pensando que um bom entendimento da Geometria Espacial de Posição ajudará em outros tópicos de Gemetria Espacial, preparamos algumas atividades que devem auxiliar na visualização tridimensional, além de estimular a necessidade de argumentar (ou mostrar contraexemplos) para demonstrar determinada proposição e até conjecturar outras. Nesse trabalho, além das atividades, apresentaremos no capítulo 1 um pouco da história da Geometria Euclidiana enfatizando o quão marcante foi a obra de Euclides e falaremos sobre o intrigante Axioma das Paralelas que permitiu as descobertas de outras geometrias. Por se tratar de um trabalho focado na Geometria Espacial, no capítulo 2 falaremos brevemente sobre alguns resultados da Geometria Plana, para que no capítulo 3 seja desenvolvida a teoria da Geometria Espacial detalhadamente, desde a escolha dos postulados até a construção de todos os poliedros regulares. O capítulo 4 é destinado às práticas pedagógicas mencionadas anteriormente e por fim o capítulo 5 é destinado à conclusão.

1 Um pouco sobre a História da Geometria e o Método Axiomático

Por volta de 300 a.C., em Alexandria, o matemático Euclides publicou seus *Elementos*, o chamado *Elementos de Euclides* (anteriormente à ele outros livros de mesmo nome foram escritos por outros matemáticos). É um dos livros mais vendidos, perdendo apenas para a Bíblia, e o mais antigo em Matemática (geometria) em vigor até hoje.

Euclides escreveu diversos trabalhos, mas o que ganhou maior destaque foram seus *Elementos*. O livro é composto por 465 proposições, não apenas sobre geometria, distribuídas em treze livros. Trata-se de uma compilação de vários resultados alcançados naquela época, arranjados em uma sequência organizada.

Grande parte da história da matemática grega foi ofuscada pela grandeza dos *Elementos de Euclides*. De fato é uma obra excepcional, mas Euclides estudou grandes matemáticos para reunir nesse trabalho uma boa parte dos resultados descobertos, não apenas geométricos, daquela época. Antes de falarmos mais sobre essa obra, vejamos alguns matemáticos que antecedem Euclides e que serviram de bibliografia para seus *Elementos*.

Tales, de Mileto (640? a.C. - 564? a.C.), matemático a quem se refere o grandioso *Teorema de Tales*, foi o fundador da escola jônica, em Mileto, e criou a geometria demonstrativa, ou seja, os resultados geométricos deveriam ser provados via raciocínio lógico.

Pitágoras, de Samos (586? a.C. - 500? a.C.) e seus discípulos realizaram diversas contribuições, como a demonstração do famoso *Teorema de Pitágoras*, estudos sobre aritmética e a descoberta da existência de números irracionais.

Hipócrates, de Quios (470 a.C. - 410 a.C.) é considerado o primeiro a publicar uma geometria organizada em seu livro *Elementos de Geometria*.

Grande parte do material dos décimo e décimo terceiro livros dos *Elementos de Euclides*, devemos aos trabalhos de Teeteto (415? a.C. - 369? a.C.)

Eudoxo, de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.) realizou grandes estudos na teoria das proporções utilizado para resolver um problema criado pelos pitagóricos ao descobrirem os números irracionais.

Menaecmo (380 a.C. - 320 a.C.) descobriu e estudou as secções cônicas.

1.1 Aspectos formais dos Elementos de Euclides

O Livro I começa com as definições, postulados e axiomas (ou noções comuns). Naquela época, postulado e axioma tinham significados diferentes, axiomas eram afirmações evidentes por si mesmas e aplicáveis a todas as ciências, e postulados eram fatos particulares da disciplina que podiam ser aceitas sem demonstração. Hoje, os termos tem o mesmo significado, são afirmações designadas sem demonstração, são o ponto de partida de uma teoria dedutiva.

Euclides enuncia então as definições, como por exemplo:

1. O ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.

Estas são as primeiras definições de muitas. Depois são enunciados os cinco postulados.

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongados as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Após os cinco postulados, Euclides enuncia os axiomas (ou noções comuns).[1]

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.

[1] Há divergências entre as noções comuns apresentadas nos livros modernos, as nove enunciadas acima estão na tradução feita por Irineu Bicudo (BICUDO et al., 2009). Bicudo observa que os axiomas de 4 à 6 provavelmente não estavam no livro original, mas a referência (EVES, 1995) aponta apenas as noções comuns 1, 2, 3, 7 e 8.

5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.

6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.

7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

8. E o todo é maior que a parte.

9. E duas retas não contêm uma área.

A partir dessas afirmações, até o livro X, foram demonstrados proposições sobre diversos assuntos, principalmente sobre a Geometria Plana. Apenas no livro XI são definidos os entes do espaço e os três últimos livros são destinados para a Geometria Espacial.

Apresentar, logo no começo do livro, essas diversas afirmações é uma característica do método axiomático utilizado por Euclides para desenvolver a geometria. Para dar significado ao que é uma teoria axiomática, João Lucas M. Barbosa, em seu livro *Geometria Euclidiana Plana*(BARBOSA, 1985), comenta:

> Para se aprender a jogar algum jogo, tal com damas, firo, xadrez etc, temos que, inicialmente, aprender suas regras. Um pai tentando ensinar seu filho a jogar damas dirá algo como: “Este é o tabuleiro de damas e estas são as pedras com que se joga”, “São 12 para cada jogador”, “As pedras são arrumadas no tabuleiro assim.”, e arrumará as pedras para o filho. Ai já terá recebido uma enxurrada de perguntas do tipo: “Por que as pedras só ficam nas casas pretas?”, “Por que só são 12 pedras?”, “Eu acho mais bonitas as pedras brancas nas casas pretas e as pretas nas casas brancas; por que não é assim?” etc.
>
> Todas estas perguntas têm uma única respota: Porque esta é uma regra do jogo. Se alguma delas for alterada, o jogo resultante, embora possa ser também muito interessante, não será mais um jogo de damas.
>
> Observe que, ao ensinar um tal jogo, você dificilmente deter-se-ia em descrever o que são as pedras. O importante são as regras do jogo, isto é, a maneira de arrumar as pedras no tabuleiro, a forma de movê-las, a forma de “comer” uma pedra do adversário etc. Qualquer criança, após dominar o jogo, improvisará tabuleiros com riscos no chão e utilizará tampinhas de garrafa, botões, cartões etc., como pedras.
>
> Ao criar-se um determinado jogo é importante que suas regras sejam suficientes e consistentes. Por *suficiente* queremos dizer que as regras devem estabelecer o que é permitido fazer em qualquer situação que possa vir a ocorrer no desenrolar de uma partida do jogo. Por *consistente* queremos dizer que as regras não devem contradizer-se, ou sua aplicação pode levar a situações contraditórias.
>
> Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com certos elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamadas de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas

> ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas.(BARBOSA, 1985)

Como João Lucas mencionou nesse comentário, os axiomas devem ser propriedades suficientes e consistentes, veremos nesse trabalho que existe certa flexibilidade na escolha dos axiomas da Geometria Euclidiana, de forma que escolheremos as afirmações mais intuitivas.

1.2 O quinto postulado de Euclides

Nesse contexto de escolha dos axiomas, o quinto postulado enunciado por Euclides, também conhecido como Postulado das Paralelas[2], gerou grandes discussões. Por mais de 2000 anos discutiu-se se essa afirmação deveria ser considerada um postulado, ou se poderia ser demonstrada com os quatro anteriores.

Grandes matemáticos se preocuparam com esse problema, entre eles Proclo (412-485), John Wallis (1616-1703), Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Louis Bertrand (1731-1812), Carl F. Gauss (1777-1855), Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) e Janos Bolyai (1802-1860).

Muitas "demonstrações" foram dadas, mas todas faziam suposições que são equivalentes ao postulado. O primeiro a publicar algo mais relevante foi Girolamo Saccheri, em 1773. Saccheri leu o *Elementos* de Euclides e ficou impressionado com o método de redução ao absurdo, e foi com essa ferramenta que fez as primeiras investigações. Saccheri demonstra numerosas propriedades, com as quais esperava encontrar alguma contradição, mas encontra apenas resultados, aparentemente, estranhos (mas não contraditórios). O matemático havia, sem perceber, construído a primeira Geometria não-Euclidiana, a Geometria Hiperbólica. Marvin Jay Greenberg fez o seguinte comentário sobre a descoberta de Saccheri:

> "Era como se um homem tivesse descoberto um diamante raro, mas, incapaz de acreditar no que via, anunciasse que era vidro. Embora não a tivesse reconhecido, Saccheri tinha descoberto a Geometria não-Euclidiana." (GREENBERG, 1993, p.155). [3]

[2] Essa denominação dá-se pois a formulação mais moderna desse postulado, enunciada pelo matemático John Playfair(1748-1819) é: *Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta.*

[3] It is as if a man had discovered a rare diamond, but, unable to believe what he saw, announced it was glass. Although he not recognized it, Saccheri has discovered non-Euclidean geometry.

Trinta e três anos após a publicação da obra de Saccheri, o matemático Johann Heinrich Lambert escreveu algo semelhante, mas mesmo indo um pouco mais além do que Saccheri, seus resultados foram insatisfatórios.

Adrien-Marie Legendre também realizou grandes tentativas que foram publicadas em seu livro *Élements de Géométrie* o que contribuiu para a popularização do problema do Postulado das Paralelas.

Esses três matemáticos cometiam, basicamente, o mesmo erro: tentar encontrar absurdos quando se parte de hipóteses diferentes do Postulado das Paralelas. Os primeiros que pensaram diferente e anunciaram a existência de Geometrias não-Euclidianas, foram Carl F. Gauss, Janos Bolyai e Nicolai Ivanovitch Lobachevsky.

Tais geometrias são denominadas dessa maneira por serem diferentes da proposta de Euclides, por exemplo, a Geometria Hiperbólica em que o Postulado das Paralelas é substituído por: *Por um ponto fora de uma reta dada passa mais de uma paralela a essa reta.* Ou ainda a Geometria Elíptica em que a substituição é feita por : *Por um ponto fora de uma reta dada não existe reta paralela a essa reta.* É provável que Gauss tenha sido o primeiro a descobrir a existência desse tipo de geometria, mas como nunca publicou nada sobre esse assunto, a honra dessa descoberta é dada à Bolyai e Lobachevsky.

As Geometrias não-Euclidianas se mostraram tão consistentes quanto a Euclidiana o que nos confirma a importância de um conjunto de postulados adequado.

1.3 Defeitos dos Elementos de Euclides

Hoje, após estudos minuciosos do método axiomático, sabemos que na grandiosa obra de Euclides há erros de lógica. Por exemplo, Euclides se preocupou em definir alguns conceitos que hoje são chamados de conceitos primitivos, como: *"Ponto é aquilo que não tem partes"* e *"Reta é comprimento sem largura"*, em que se utiliza de novos termos (partes, comprimento, largura) que não estavam definidos anteriormente. Do ponto de vista da lógica, ponto e reta não estavam definidos pelas afirmações de Euclides, apenas foram substituídos por outros termos sem definição. E ainda, se tentássemos continuar definindo os novos termos que fossem aparecendo, entraríamos em um ciclo vicioso.

Para evitar erros lógicos desse tipo são aceitos alguns conceitos como primitivos (sem defini-los), e tais conceitos devem satisfazer um conjunto de postulados. Desse ponto de vista, os conceitos primitivos estão sendo definidos implicitamente quando satisfazem os postulados da teoria a ser desenvolvida.

Outro exemplo, na demonstração Proposição I 21 (proposição 21 do livro I), Euclides assume que se uma reta fura um triângulo por um de seus vértices, então ela cortará o lado oposto ao vértice. Por mais que pareça uma afirmação óbvia, Moritz Pasch

(1843 – 1930) percebeu que era necessário um axioma que tornasse essa situação verdadeira. Ocorre que a excessiva familiaridade com os objetos geométricos (que claramente pertencem ao nosso mundo e, por isso, são tão familiares) atrapalhou Euclides em algumas afirmações.

Apenas no final do século XIX e começo do século XX, surgiram conjuntos de postulados logicamente satisfatórios para a construção da Geometria Euclidiana Plana e Espacial. Dos matemáticos que mais contribuíram para essa construção foram M. Pasch, G. Peano, M. Pieri, D. Hilbert, O Veblen, E. V. Huntington, G. D. Birkhoff e L. M. Blumenthal. O principal foi Hilbert em sua obra *The Foundations of Geometry*, que utilizou para os conceitos primitivos *pontos, retas, plano, estar em, congruente* e *estar entre*, e um conjunto de vinte e um postulados. Essa geometria de Hilbert é a base para a maioria dos livros do ensino básico e para esse trabalho.

2 Propriedades iniciais da Geometria Plana

Neste capítulo, baseado em (BARBOSA, 1985), enunciaremos os axiomas e algumas definições da Geometria Plana que serão tomadas como base para o desenvolvimento da Geometria Espacial. Como vimos anteriormente, no Capítulo 1, Hilbert foi um dos principais matemáticos a axiomatizar a Geometria Euclidiana, e apresentou seu conjunto de postulados em cinco grupos:

- Axiomas de Incidência;
- Axiomas de Ordem;
- Axiomas de Continuidade;
- Axiomas de Congruência;
- Axioma das Paralelas.

Tomaremos o conjunto de axiomas de Hilbert como base, mas com algumas adaptações pertinentes ao trabalho. Aqui, na Geometria Plana, partiremos de alguns conceitos primitivos: *plano*, *ponto*, *reta*, *estar em* (incidência), *estar entre* (ordem) e *congruente*. As retas e os pontos são elementos do plano, e serão caracterizados pelos axiomas.

2.1 Axiomas de Incidência

Axioma 1. *Dois pontos distintos determinam uma única reta, à qual eles pertencem.*

Denotaremos a reta que passa pelos pontos A e B por AB.

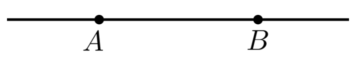


Figura 1 – Reta AB

Axioma 2. *Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.*

Pontos que pertencem a mesma reta são chamados *colineares*, caso contrário, são chamados *não colineares*.

2.2 Axiomas de Ordem

Os axiomas de ordem são responsáveis por caracterizar a relação de *estar entre*. Dessa maneira, veremos que existe uma ordem nos pontos de uma reta.

Axioma 3. *Para quaisquer três pontos distintos e colineares, apenas um deles está entre os outros dois.*

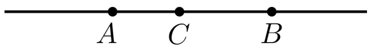


Figura 2 – O ponto C está entre A e B

Definição 1. *(Segmento) O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado segmento AB, e denotaremos por $\overline{AB}$. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.*

Definição 2. *(Semirreta) Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento $\overline{AB}$ e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B, e é representado por $\overrightarrow{AB}$. Dizemos que o ponto A é a origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$.*

Axioma 4. *Dados dois pontos distintos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.*

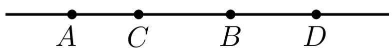


Figura 3 – O ponto C está entre A e B, e o ponto B está entre A e D

Deste axioma podemos concluir que entre dois pontos distintos existem uma infinidade de pontos. E que em uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ também existem uma infinidade de pontos, além dos pontos do segmento $\overline{AB}$.

Consideremos uma reta r e dois pontos A e B que não pertencem a esta reta, dizemos que A e B estão em um mesmo lado da reta r se o segmento $\overline{AB}$ não a intersecta.

Definição 3. *Sejam r uma reta e A um ponto que não pertence a r. O conjunto constituído pelos pontos de r e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta r é chamado de semiplano determinado por r contendo A, e será representado por P_{rA}.*

Axioma 5. *Uma reta r determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a reta r.*

2.3 Axiomas de Continuidade

Os axiomas de continuidade nos permitirão medir distâncias entre pontos e ângulos. Do ponto de vista da axiomática clássica, a introdução dos conceitos de medição constitui-se em um problema difícil e não pertinente para esse momento, em que o objetivo principal é a discussão dos resultados geométricos. Em (AMARO, 2014) encontra-se a construção dos conceitos de medição de forma mais rigorosa.

Axioma 6. *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior do que ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes.*

Esse número associado ao par de pontos é chamado de *distância* entre os pontos. Ou ainda, se esses pontos são as extremidades de um segmento, dizemos que esse número é o *comprimento* ou a *medida* do segmento.

Axioma 7. *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Axioma 8. *Se um ponto C está entre A e B então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.*

Axioma 9. *Fixado um segmento arbitrário $\overline{AB}$, para qualquer segmento $\overline{CD}$, existe um ponto E pertencente a semirreta $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} = \overline{CE}$.*

Agora, enunciaremos os axiomas para medidas de ângulos, mas antes, vejamos a seguinte definição.

Definição 4. *Ângulo é uma figura geométrica formada por duas semirretas com mesma origem.*

As semirretas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum delas é chamado de *vértice* do ângulo. Na Figura 4, o ângulo possui vértice em B e lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Para denotar esse ângulo podemos escrever $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ ou apenas $\hat{B}$, quando não houver outro ângulo com o vértice em B. Ainda, se existe uma semirreta $\overrightarrow{BD}$, com D diferente de A e B, que intersecta o segmento $\overline{AC}$, dizemos que $\overrightarrow{BD}$ divide o ângulo $\widehat{ABC}$.

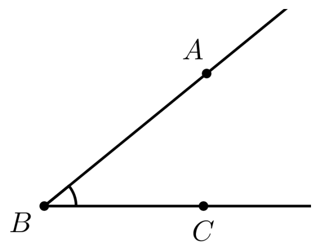


Figura 4 – Ângulo $\widehat{ABC}$

Axioma 10. *A todo ângulo está associado um único número real positivo. Este número é zero se, e somente se, o ângulo é constituído por duas semirretas coincidentes.*

Esse número associado ao ângulo é chamado de medida do ângulo.

Definição 5. *Dizemos que uma semirreta divide um semiplano se ela estiver contida no semiplano e sua origem for um ponto da reta que o determina.*

Axioma 11. *Seja um dos semiplanos determinado por uma reta r. Existe uma relação biunívoca entre os números reais entre 0 e 180 e as semirretas de mesma origem, em r, que dividem este semiplano. O módulo da diferença entre dois números associados a duas dessas semirretas é a medida do ângulo formado pelas semirretas.*

O axioma acima descreve, basicamente, que podemos utilizar um transferidor para medir ângulos.

Axioma 12. *Se uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide um ângulo $\widehat{AOB}$ então $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$.*

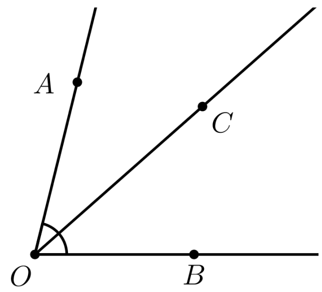


Figura 5 – $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$

2.4 Axiomas de Congruência

Os axiomas de congruência são responsáveis por indicar quando os objetos geométricos possuem as mesmas medidas, mesmo em posições diferentes. Antes de falarmos específicamente sobre congruência, vamos a uma definição de um objeto geométrico muito importante, os *polígonos*.

Definição 6. *Um polígono é uma figura geométrica formada por uma sequência de pontos $A_1A_2, ..., A_n$ e pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *$A_n = A_1$;*

2. *Os segmentos A_iA_{i+1}, chamados lados do polígono, interceptam-se somente em suas extremidades;*

3. *Cada vértice é extremidade de dois lados;*

4. *dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.*

Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são os vértices do polígono. Os segmentos com extremidades em vértices não consecutivos são as diagonais do polígono.

Dessa forma, o polígono $ABCA$ é um triângulo de vértices A, B e C, mas que denotaremos apenas por ABC.

Um polígono é chamado de *convexo* se ele está sempre contido em um semiplano definido pelas retas que contêm seus lados. Em um polígono convexo, dois lados consecutivos de um polígono determinam um ângulo, esses ângulos são chamados *ângulos internos* do polígono.

Agora, vamos aos conceitos de congruência.

Definição 7. *Diremos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes quando suas medidas forem as mesmas, escreveremos $\overline{AB} = \overline{CD}$. Diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida, escreveremos $\widehat{A} = \widehat{B}$.*

Definição 8. *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. Se os triângulos ABC e EFG forem congruentes denotaremos por $ABC \equiv EFG$ e os pares de vértices correspondentes são A e E, B e F, C e G.*

Axioma 13. *(Critério (ou caso) de congruência LAL) Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$ então $ABC \equiv EFG$.*

Na verdade, podemos tomar qualquer um dos casos de congruência como axioma e demonstrar os outros a partir deste. O mais comum é adotar o caso LAL como postulado.

Teorema 1. *(Critério de congruência ALA) Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\widehat{A} = \widehat{E}$ e $\widehat{B} = \widehat{F}$, então $ABC \equiv EFG$.*

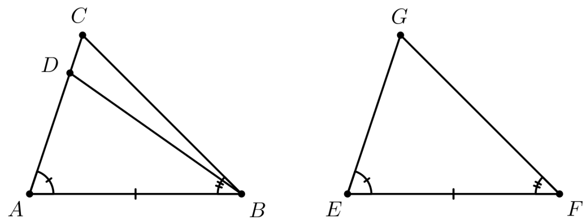


Figura 6 – Critério de congruência de triângulos ALA

Demonstração. Sejam dois triângulos ABC e EFG, com $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\widehat{A} = \widehat{E}$ e $\widehat{B} = \widehat{F}$. Seja D um ponto na semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$. Pelo Axioma 13, podemos concluir que ABD é congruente a EFG. Então, $\widehat{ABD} = \widehat{F}$ e como, por hipótese, $\widehat{ABC} = \widehat{F}$, então $\widehat{ABD} = \widehat{ABC}$, ou seja, os pontos C e D são coincidentes. Portanto, o triângulo ABC é congruente ao triângulo ABD que ,por sua vez, é congruente ao triângulo EFG. Logo, os triângulos ABC e EFG são congruentes.

Teorema 2. *(Critério de congruência LLL) Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{CA} = \overline{GE}$, então $ABC \equiv EFG$.*

Demonstração. Sejam dois trângulos ABC e EFG tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{CA} = \overline{GE}$. Consideremos o semiplano definido pela reta AB e oposto ao vértice C. Neste semiplano, consideremos o ângulo com vértice em A, congruente a $\widehat{E}$ e com lado $\overrightarrow{AB}$. No outro lado desse ângulo, consideremos o ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$. Como $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\widehat{DAB} = \widehat{E}$ e $\overline{AD} = \overline{EG}$, pelo Axioma 13, os triângulos ABD e EFG são congruentes. Agora, basta mostrar que ABC e ABD são congruentes.

Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{FG} = \overline{BC}$, os triângulos ACD e BCD são isósceles. Assim, $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$ e $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$, portanto, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Logo, pelo Axioma 13, os triângulos $ABD \equiv ABC$. Então, $ABC \equiv EFG$. $\square$

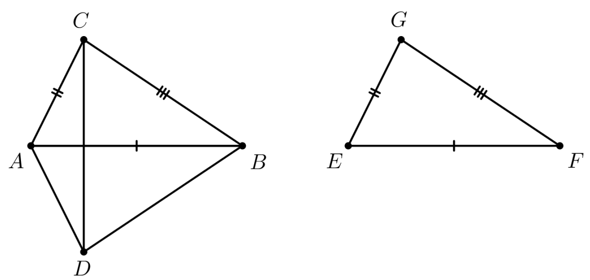


Figura 7 – Critério de congruência de triângulos LLL

Utilizando esses novos conceitos, podemos definir uma nova classe de polígonos: os *polígonos regulares.*

Definição 9. *Um polígono regular é um polígono convexo no qual todos os lados são congruentes entre si e, também, todos os ângulos internos são congruentes entre si.*

2.5 Axioma das Paralelas

Definição 10. *Duas retas que não se intersectam são ditas paralelas.*

Axioma 14. *(Playfair) Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta.*

Com esse axioma concluímos as propriedades básicas da Geometria Plana necessárias para o desenvolvimento da Geometria Espacial. Lembrando que essa apresentação foi feita de forma bastante resumida.

3 A Geometria Espacial

Este capítulo traz uma releitura de (CARVALHO, 1999), com algumas complementações. O objetivo é trazer ao professor, ou alunos de graduação, uma base teórica formal e rigorosa sobre o desenvolvimento da Geometria Espacial. Todas as imagens desse capítulo estão disponíveis no meu perfil do GeoGebra e podem ser acessadas pelo link <geogebra.org/u/jonasbarletta> ou clicando na legenda de cada imagem.

O estudo da Geometria Espacial se dá a partir dos mesmos elementos básicos da Geometria Plana (a qual estamos tomando como base), acrescentando o *espaço* — onde ficam os *pontos*, as *retas* e os *planos* — com os postulados necessários. Como já falamos anteriormente, os termos em itálico são considerados conceitos primitivos, pois não nos preocuparemos em definí-los, ao invés disso, os caracterizaremos a partir de postulados, que servem como ponto inicial para o desenvolvimento da teoria. Representaremos os pontos por letras maiúsculas (A, B, C,...), retas por letras minúsculas (r, s, t,...) e planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ,...).

A Geometria Espacial não possui um conjunto fixo de postulados, há uma certa flexibilidade na escolha deles, ou seja, podemos escolher as propriedades que nos parecer mais intutivas, básicas e mais simples de serem utilizadas para demonstrar teoremas.

Como vimos no primeiro capítulo, a escolha dos postulados e as investigações de suas relações entre si é um problema que, desde o tempo de Euclides, gerou muita discussão. Os postulados devem ser propriedades "básicas", intuitivas e não contraditórias sobre os elementos geométricos primitivos. A partir dessas afirmações deduziremos os teoremas mais importantes da geometria em questão.

Tomaremos como ponto de partida a Geometria Plana, ou seja, utilizaremos os postulados enunciados do capítulo anterior, que são afirmações sobre o ponto e a reta no plano, porém, reafirmaremos as propriedades de ponto e reta no espaço.

3.1 Propriedades iniciais

Postulado 1. *Por dois pontos do espaço passa uma, e somente uma, reta.*

Postulado 2. *Dada uma reta do espaço, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.*

Postulado 3. *Por três pontos, não colineares, do espaço passa um, e somente um, plano.*

Postulado 4. *Dado um plano no espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.*

Antes de falarmos sobre estes postulados, é importante comentar que é comum nos depararmos com materiais didáticos que colocam como postulado o fato de que na reta, no plano e no espaço existem uma infinidade de pontos. Mas, notemos que essa proposição não é básica, o conceito de infinito não é intuitivo, então tais afirmações não são ideais para serem postulados, mas não deixam de ser verdadeiras. Tal fato é consequência direta do Axioma 4 (no caso da reta) e expandido para o plano e espaço com os postulados anteriores.

Agora, notemos que o Postulado 3 nos dá a ideia de que, enquanto a reta é unidimensional, o plano deve ser bidimendional. Já o Postulado 4 nos dá a ideia de que o espaço deve ter uma dimensão maior do que a do plano (ou seja, pelo menos tridimensional). Precisamos então de um postulado que fixe o espaço como um ente tridimensional mas, antes disso, vejamos o que já conseguimos concluir apenas com esses quatro postulados.

Teorema 3. *Se uma reta r tem dois de seus pontos em um plano, então ela está contida neste plano.*

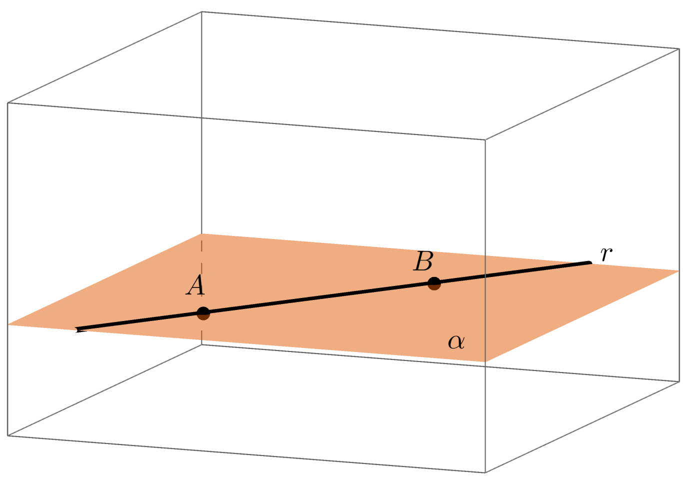


Figura 8 – Reta contida no plano

Demonstração. Sejam A e B os pontos da reta r que pertencem ao plano α. Da Geometria Plana sabemos que dois pontos situados no mesmo plano determinam uma única reta (no plano), então no plano α os pontos A e B determinam um única reta. Pelo Postulado 1, existe uma única reta do espaço passando por esses pontos, portanto, essa reta só pode ser a reta r, que está contida no plano. □

Esse teorema nos permite concluir que existem três posições relativas entre uma reta e um plano: a reta pode estar contida no plano (teorema anterior); pode ser secante (ou concorrente) ao plano, se possuirem um único ponto em comum; ou a reta pode ser paralela ao plano, se ela não possui ponto em comum com o plano.

Além disso, a partir do Teorema 3 podemos concluir outras formas de determinar um plano, além da enunciada no Postulado 3, no qual o plano é determinado por três pontos não colineares.

Teorema 4. *Por uma reta r e um ponto A exterior a esta reta passa um único plano.*

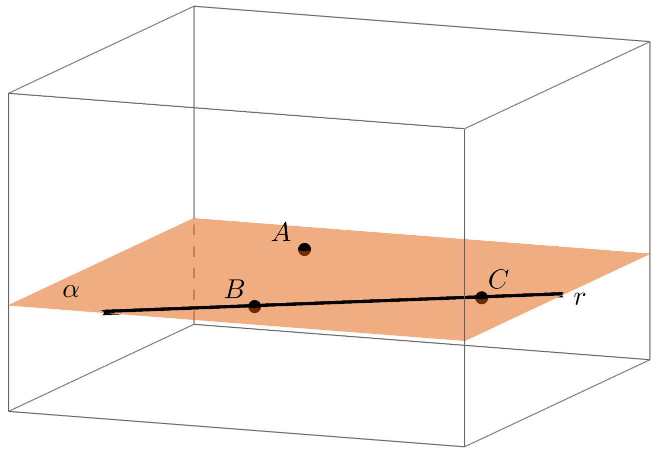


Figura 9 – Determinação do plano por uma reta e um ponto exterior à ela

Demonstração. Sejam B e C dois pontos distintos da reta r. Pelo Postulado 3, existe um único plano passando pelos pontos A, B e C, já que A não pertence à reta r, ou seja, não é colinear à B e C. Agora, pelo Teorema 3, como B e C pertencem a esse plano, a reta r também pertence. Então, existe um único plano passando pela reta r e pelo ponto A. □

Para o próximo teorema, precisamos de uma definição bastante utilizada na Geometria Plana, que se estende para a Geometria Espacial.

Definição 11. *Duas retas r e s são concorrentes se elas possuem um único ponto em comum.*

Teorema 5. *Por duas retas concorrentes s e t passa um único plano.*

Demonstração. Seja P o ponto de interseção entre as retas s e t, e sejam M e N pontos das retas s e t, respectivamente, ambos distintos de P. Pelo Postulado 3, existe um único plano passando pelos pontos P, M e N. Pelo Teorema 3, esse plano deve conter as retas s e t, já que contém dois de seus pontos. □

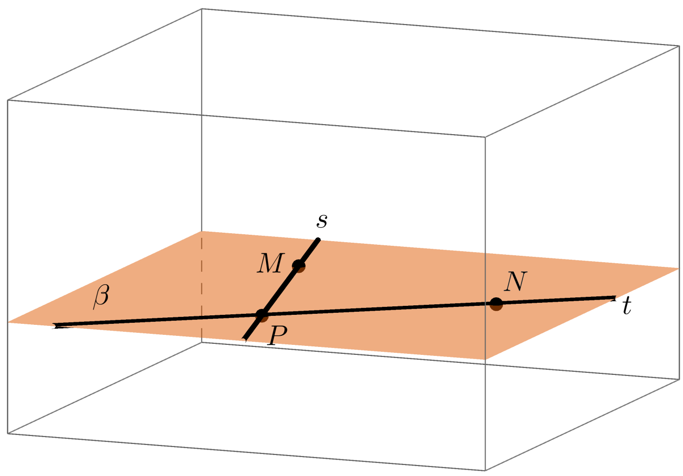


Figura 10 – Determinação do plano por duas retas concorrentes

Voltando agora aos postulados. Vimos anteriormente que precisaremos de um postulado que caracterize o espaço como um ente tridimensional. De fato, com apenas esses quatro postulados o espaço poderia ter, digamos, quatro dimensões.

Analisando as interseções entre planos com os postulados que temos, podemos ter dois planos que: possuem dois pontos em comum, e portanto, possuem a reta, definida por eles, em comum; possuem três pontos em comum, nesse caso, os planos são coincidentes, pelo Postulado 3; não possuem pontos em comum; possuem apenas um ponto em comum. O último caso não é válido em um espaço tridimensional, mas nenhum postulado anterior exclui essa possibilidade. Com um pouco de abstração e geometria analítica podemos observar isso facilmente, como segue o exemplo.

Exemplo 1. *Seja o espaço de quatro dimensões $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w)|x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$. Nesse espaço os pontos são quadras ordenadas. As retas são dadas por $(x, y, z, w) = A + t.\overrightarrow{AB}$, onde A e B são pontos distintos da reta, $\overrightarrow{AB}$ é o vetor diretor da reta e t é um parâmetro real. Os planos são definidos por $(x, y, z, w) = A + t.\overrightarrow{AB} + s.\overrightarrow{AC}$, em que A, B e C são pontos distinos do plano, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são os vetores linearmente independentes (L.I.) do plano e t e s são parâmetros reais. Vejamos que os Postulados de 1 à 4 são válidos para os entes definidos da maneira acima.*

Para verificar o Postulado 1 notemos que, por definição, a reta r $A + t.\overrightarrow{AB}$ passa pelos pontos A e B, vamos mostrar que ela é única. Suponhamos que existe outra reta s $C + t.\overrightarrow{CD}$ que contenha os pontos A e B, ou seja, existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = C + t_1\overrightarrow{CD} \tag{3.1}$$

$$B = C + t_2\overrightarrow{CD} \tag{3.2}$$

Vamos mostrar que um ponto qualquer P pertende a r se, e somente se, pertence a s.

Se P pertence a r, então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + t_0\overrightarrow{AB}$. Subtraindo as equações (3.2) e (3.1), temos:

$$B - A = (t_2 - t_1)\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB} = (t_2 - t_1)\overrightarrow{CD} \tag{3.3}$$

Substituindo as equações (3.1) e (3.3) em $P = A + t_0\overrightarrow{AB}$, temos:

$$P = C + t_1\overrightarrow{CD} + t_0(t_2 - t_1)\overrightarrow{CD}$$
$$P = C + (t_1 + t_0(t_2 - t_1))\overrightarrow{CD}$$
$$P = C + t'\overrightarrow{CD}.$$

Ou seja, P pertence a s.

Agora, suponhamos que P pertence a s, isto é, existe t_0 tal que $P = C + t_0\overrightarrow{CD}$.

Da equação (3.3) e lembrando que os pontos A e B são distintos, portanto $t_2 \neq t_1$, temos:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{AB}}{(t_2 - t_1)}.$$

E da equação (3.1), temos:

$$C = A - t_1\overrightarrow{CD}.$$

Substituindo ambas em $P = C + t_0\overrightarrow{CD}$, temos:

$$P = A - t_1\overrightarrow{CD} + t_0\frac{\overrightarrow{AB}}{t_2 - t_1}$$
$$P = A - t_1\frac{\overrightarrow{AB}}{(t_2 - t_1)} + t_0\frac{\overrightarrow{AB}}{(t_2 - t_1)}$$
$$P = A + \frac{t_0 - t_1}{(t_2 - t_1)}\overrightarrow{AB}$$
$$P = A + t''\overrightarrow{AB}.$$

Ou seja, se P pertence a s, também pertence a r e vice-versa. Então, r e s são coincidentes.

Vamos verificar o Postulado 2. Dada a reta $A + t\overrightarrow{AB}$, por definção, A pertence a reta, basta tomarmos $t = 0$. Agora, seja $\overrightarrow{v}$ um vetor L.I. com $\overrightarrow{AB}$. Então, $P = A + \overrightarrow{v}$ não pertence a reta. Dessa forma, existem pontos na reta e fora dela.

A verificação do Postulado 3 é análoga a do Postulado 1, e a do Postulado 4 é análoga a do Postulado 2.

Nesse espaço que acabamos de definir, sejam os planos:

$$\alpha : (0,0,0,0) + t(1,0,0,0) + s(0,1,0,0), \text{ que é o plano } xy.$$

$$\beta : (0,0,0,0) + t(0,0,1,0) + s(0,0,0,1), \text{ que é o plano } zw.$$

A interseção entre os planos α e β é a origem, $(0,0,0,0)$. Ou seja, em um espaço de quatro dimensões, dois planos podem possuir apenas um ponto em comum.

Então, o quinto postulado será responsável por definir nosso espaço como tridimensional.

Postulado 5. *Se dois planos possuem um ponto em comum então eles possuem pelo menos mais um ponto em comum (e portanto, pelo menos uma reta em comum).*

Isso nos permite concluir que para dois planos existem apenas três posições relativas: coincidentes (todos os pontos em comum); paralelos (quando não possuem pontos em comum); secantes ou concorrentes (quando possuem apenas uma reta em comum).

O Postulado 5 também nos permite provar o teorema a seguir que pode ser utilizado como postulado no lugar do Postulado 5.

Teorema 6. *Todo plano α divide o espaço em duas regiões, chamadas semiespaços, com a seguinte propriedade: se dois pontos A e B estão em um mesmo semiespaço, então o segmento $\overline{AB}$ está contido neste semiespaço e não corta o plano α; se os pontos A e B estão em semiespaços distintos, o segmento $\overline{AB}$ corta o plano α.*

Notemos que assim como um ponto divide uma reta em duas semirretas e uma reta divide o plano em dois semiplanos, o plano divide o espaço em dois semiespaços.

Demonstração. Seja P um ponto qualquer do espaço que não pertença ao plano α. Vamos dividir os pontos do espaço que não pertencem a α em dois conjuntos, não vazios, chamados de semiespaços, de acordo com o seguinte critério: um semiespaço é formado por todos os pontos Q, exteriores ao plano α, tais que o segmento $\overline{PQ}$ não corta o plano (este é o semiespaço que contém P); o outro semiespaço é formado pelos pontos Q, exteriores a α, tais que o segmento $\overline{PQ}$ corta o plano. Esses semiespaços possuem a propriedade do teorema, como demonstraremos a seguir.

Mas antes, vejamos que tais conjuntos são de fato, não vazios. O Postulado 4, nos garante que existe o ponto P fora do plano α, e que existe um ponto N em α. Traçando a reta PN sabemos, pelos axiomas da Geometria Plana, que existe ponto K nessa reta tal que N está entre P e K. Como os pontos P e K pertencem a semiespaços distintos então, os dois semiespaços não são vazios. Seguimos então com a demonstração.

Sejam A e B pontos situados no semiespaço que contém P. Seja β um plano passando por P, A e B (este plano é único se P, A e B não são colineares, mas existe em qualquer caso). Se o plano β não corta o plano α, o segmento $\overline{AB}$ também não corta α. Suponhamos, então, que α e β tenham pontos em comuns e como são planos distintos, sua interseção é uma reta r, que divide β em dois semiplanos (Figura 11(a)). Como os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ não cortam α, certamente não cortam r; logo, A e B estão no mesmo semiplano. Mas isso significa que o segmento $\overline{AB}$ está contido nesse semiplano e assim não corta r e, em consequência, não corta α.

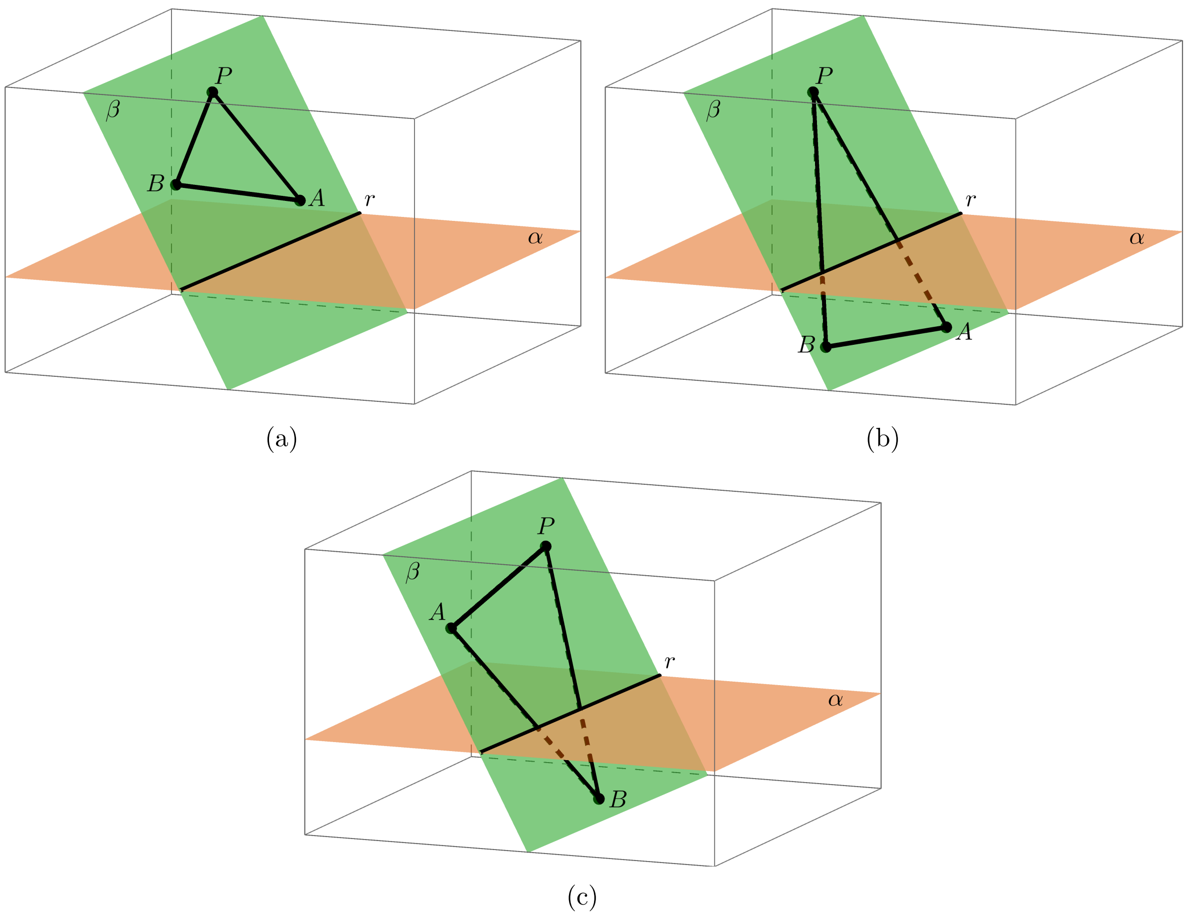


Figura 11 – Um plano separa o espaço em dois semiespaços

Se A e B estão ambos situados no semiespaço que não contém P (Figura 11(b)), a situação é análoga: existe um plano β que passa por P, A e B, que corta α segundo uma reta r. No plano β, A e B estão ambos situados no semiplano oposto ao de P em relação a r. Logo, o segmento $\overline{AB}$ não corta r e assim não corta α.

Finalmente, consideremos o caso em que A está em um semiespaço e B no outro (Figura 11(c)). Como antes, existe um plano β passando por P, A e B que corta α segundo a reta r. Agora, no plano β, A está situado no semiplano de P, e B está situado no outro semiplano em relação a r. Logo, o segmento $\overline{AB}$ corta a reta r e, assim, o plano α

□

Como mencionamos anteriormente, esse teorema pode ser utilizado como axioma no lugar do Postulado 5, isso significa que se assumirmos o Teorema 6 como postulado, o Postulado 5 passa ser um teorema. Vamos mostrar isso:

Postulado 5': Um plano divide os pontos que lhe são exteriores em dois subconjuntos, chamados semiespaços, de forma que um segmento com extremos no mesmo semiespaço não corta o plano e um segmento com extremos em semiespaços diferentes corta o plano.

Teorema 6': Se dois planos possuem um ponto em comum então eles possuem pelo menos mais um ponto em comum (e portanto, pelo menos uma reta em comum).

Demonstração. Sejam α e β dois planos com um ponto P em comum. O caso em que α e β são coincidentes é trivial, então vamos supor que α e β são distintos.

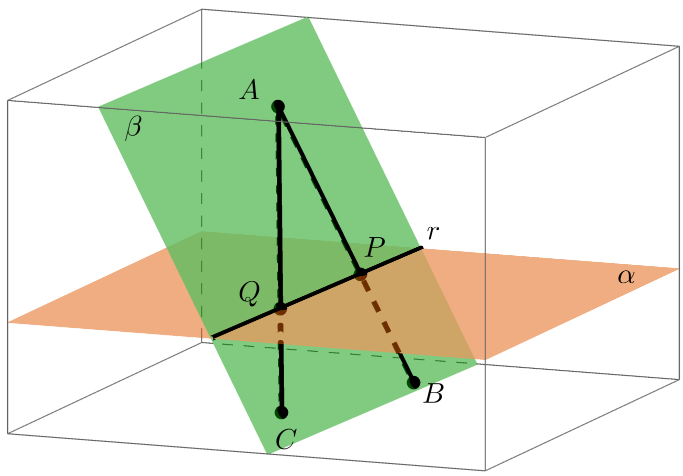


Figura 12 – Demonstração Teorema 6'

Seja o segmento $\overline{AB}$ em β que corta α em P de modo que A e B estejam em semiespaços diferentes em relação à α. Tomemos um ponto C não pertencente a $\overline{AB}$ de β, no mesmo semiespaço de B, em relação ao plano α. Então, o segmento $\overline{AC}$ corta o plano α em um ponto Q diferente de P, já que as retas AC e AB são distintas. Como P, Q pertencem a α e β então a reta PQ pertence a ambos os planos. □

Dessa forma, o conjunto de Postulados 1, 2, 3, 4 e 5 é equivalente ao conjunto 1, 2, 3, 4 e 5'.

3.2 Construção de pirâmides

Com as proposições apresentadas até aqui podemos construir o nosso primeiro poliedro, a pirâmide. Mas antes, vamos definir o que é um poliedro.

Definição 12. *Um poliedro é uma região do espaço delimitada por um conjunto de polígonos, chamados de faces do poliedro, que safistazem as seguintes condições:*

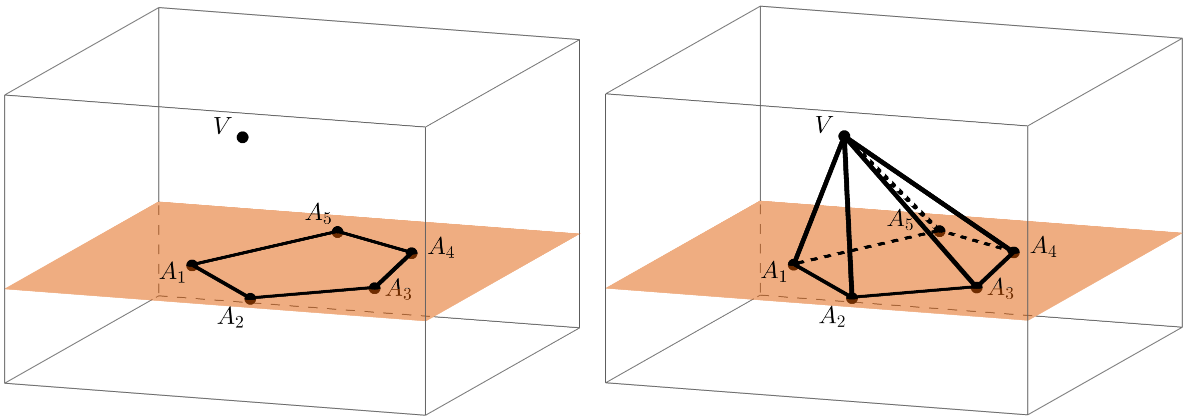
- *cada lado de um polígono pertence à exatamente duas faces do poliedro;*
- *a interseção entre duas faces é vazia ou é um vértice comum ou é um lado comum;*
- *é sempre possível, caminhando sobre as faces, ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra sem passar por nenhum vértice.*

Os lados dos polígonos são chamados de arestas do poliedro, e os vértices dos polígonos são também vértices do poliedro.

Agora, vamos a construção da pirâmide:

Consideremos o polígono $A_1A_2A_3...A_n$ e um ponto V exterior ao plano do polígono, o Postulado 4 garante a existência do ponto V (Figura 13). Traçando os segmentos $\overline{VA_1}$, $\overline{VA_2}$, ... , $\overline{VA_n}$ teremos n triângulos VA_1A_2, VA_2A_3, VA_3A_4, ... , $VA_{n-1}A_n$ e VA_nA_1. Esses triângulos e o polígono $A_1A_2A_3...A_n$ são os polígonos que definem a pirâmide, os triângulos são chamados de *faces laterais* e o polígono $A_1A_2A_3...A_n$ é a *base* da pirâmide. Assim dizemos que temos uma pirâmide de base $A_1A_2A_3...A_n$ e *vértice* V. Os segmentos $\overline{VA_1}$, $\overline{VA_2}$, ... , $\overline{VA_n}$ são as *arestas laterais.*

Notemos que as condições da definição de poliedro são satisfeitas nessa construção.



(a) (b)

Figura 13 – Construção de uma pirâmide de base pentagonal ($n = 5$).

3.3 Congruência de triângulos no espaço

Até a seção anterior utilizamos apenas postulados de posição, o que significa, que falamos sobre as posições relativas entre nossos entes geométricos e como determiná-los, e essas proposições foram suficientes para obter diversos teoremas e até construir pirâmides. Mas, não falamos sobre postulados de congruência, necessários para estabelecermos noções de medidas de segmentos, ângulos e de congruência entre figuras. Como adotamos os postulados da Geometria Plana como nosso ponto de partida, precisamos apenas estendê-los para a Geometria Espacial.

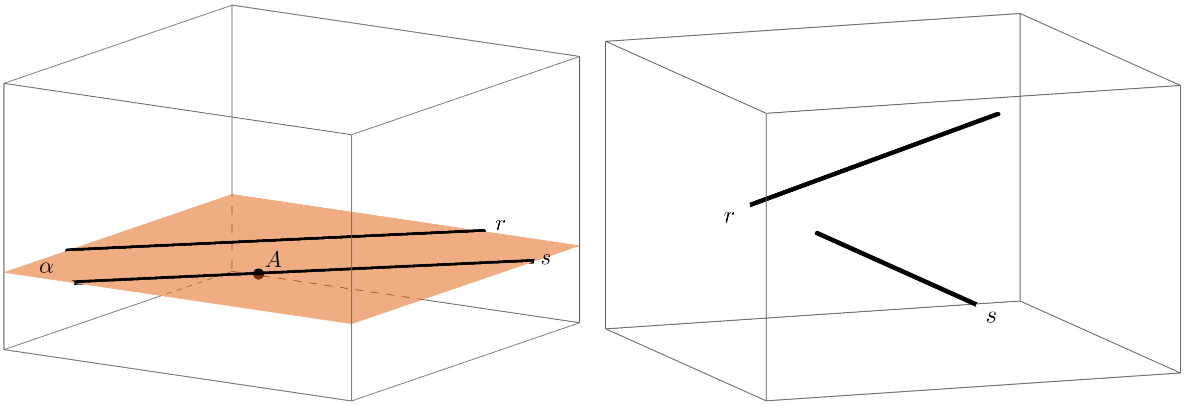
Postulado 6. *O caso de congruência lado, ângulo, lado (LAL) da Geometria Plana também é válido para triângulos situados em planos distintos.*

Como consequência desse postulado, os outros critérios de congruência de triângulos também são válidos para triângulos em planos distintos. As demonstrações são análogas, basta trocar a utilização do Axioma 13 pelo Postulado 6 e já foram realizadas no Capítulo 2 (Teorema 1 e Teorema 2).

3.4 Paralelismo entre retas

Até então não definimos o conceito de paralelismo no espaço. No plano, duas retas podem ter um ponto em comum (secantes ou concorrentes), ter todos pontos os pontos em comum (coincidentes) ou não possuir pontos em comum (paralelas). No espaço, duas retas também podem ser concorrentes, coincidentes ou não ter pontos em comum, porém esta última situação dividiremos em dois casos (paralelas e reversas).

Definição 13. *Duas retas do espaço chamam-se paralelas quando não possuem ponto em comum mas estão contidas em um mesmo plano. Quando duas retas do espaço não estão* *contidas no mesmo plano (o que necessariamente implica que elas não possuam ponto comum) elas são chamadas retas reversas.*



(a) Retas parelelas (b) Retas reversas

Figura 14 – Definição 2

Alguns textos didáticos ainda dividem em *retas paralelas distintas* (retas coplanares sem ponto comum) e *retas paralelas coincidentes* (todos os pontos em comum), nesse trabalho não faremos essa distinção. Portanto, aqui, retas paralelas são, obrigatoriamente, distintas.

Dessa definição podemos concluir mais um caso de determinação de plano.

Teorema 7. *Por duas retas paralelas passa um e somente um plano.*

Demonstração. Sejam duas retas paralelas r e s, por definição, existe um plano α que as contenham. Basta mostrar que esse plano é único.

Por absurdo, suponhamos que exista um plano α' diferente de α que contenha r e s. Tomemos um ponto A da reta s, assim os planos α e α' conteriam a reta r e o ponto A de s (Figura 14(a)), mas já vimos no Teorema 4 que por uma reta e um ponto exterior passa um único plano, portanto temos um absurdo. Logo, não existe um plano diferente de α que contenha as retas paralelas r e s, esse plano é único. □

Podemos também estender o Axioma das Paralelas para o espaço, como segue o teorema abaixo.

Teorema 8. *Por um ponto fora de uma reta se pode traçar uma única reta paralela a ela.*

Demonstração. Sejam r uma reta e A um ponto fora dela, chamaremos de α o plano determinado por r e A (que existe e é único, pelo Teorema 4). Pelo Axioma das Paralelas, nesse plano α existe uma única reta paralela à reta r que passa por A, vamos chamar de s.

Para a unicidade, suponhamos que exista outra reta s' (distinta de s) paralela a r que passa por A. Seja β o plano definido pelas retas r e s', como A pertence a s', A também pertence a β. Então, o plano α (definido por r e A) coincide com β, logo, temos duas retas, de um mesmo plano, que passam por A que são paralelas a r, o que contradiz o Axioma das Paralelas. Portanto, a reta s é única. □

Outras propriedades do paralelismo entre retas que são válidas no plano, também são válidas no espaço, como o teorema a seguir.

Teorema 9. *Se duas retas distintas r e s são paralelas à mesma reta t, então r e s são paralelas entre si.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que r e s não são paralelas. Seja P o ponto de interseção entre essas retas. Nesse caso, pelo ponto P passam duas retas paralelas a t, o que contradiz o Teorema 8. Portanto, r e s são paralelas. □

3.5 Construção de paralelepípedos

Agora, vamos utilizar o conceito de paralelismo entre retas para construir um paralelepípedo. Partiremos de três segmentos não coplanares (não existe um plano que contenha os três segmentos) $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ (Figura 15(a)). Por B e D tracemos as paralelas aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, formando o paralelogramo $ABCD$ (Figura 15(b)). Agora, pelos pontos B, C e D tracemos as paralelas ao segmento $\overline{AE}$ (Figura 15(c)). Traçando por E retas paralelas aos segmento $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, formam-se os paralelogramos $ABFE$ e $ADHE$ (Figura 15(d)). Finalmente, pelos pontos F e H tracemos as retas paralelas aos segmentos $\overline{EH}$ e $\overline{EF}$, respectivamente, formando assim os paralelogramos $EFGH$, $BCGF$, $CGHD$ (Figura 15(e)). Construímos então o paralelepípedo $ABCDEFGH$, que é um poliedro formado por seis faces (hexaedro) e todas são paralelogramos.

Também precisaremos do conceito de paralelismo para definir *ângulo* entre duas retas do espaço. Se as duas retas são concorrentes, utilizaremos a mesma definição da Geometria Plana, ou seja, é o menor ângulo formado por elas. Agora, para retas reversas definiremos da seguinte maneira:

Definição 14. *O ângulo entre duas retas reversas do espaço é o ângulo formado por duas retas concorrentes, paralelas às retas reversas dadas.*

Mas existem várias retas concorrentes e paralelas à duas retas reversas. Para que essa definição seja coerente, a escolha das retas paralelas não deve importar, como mostraremos no teorema a seguir.

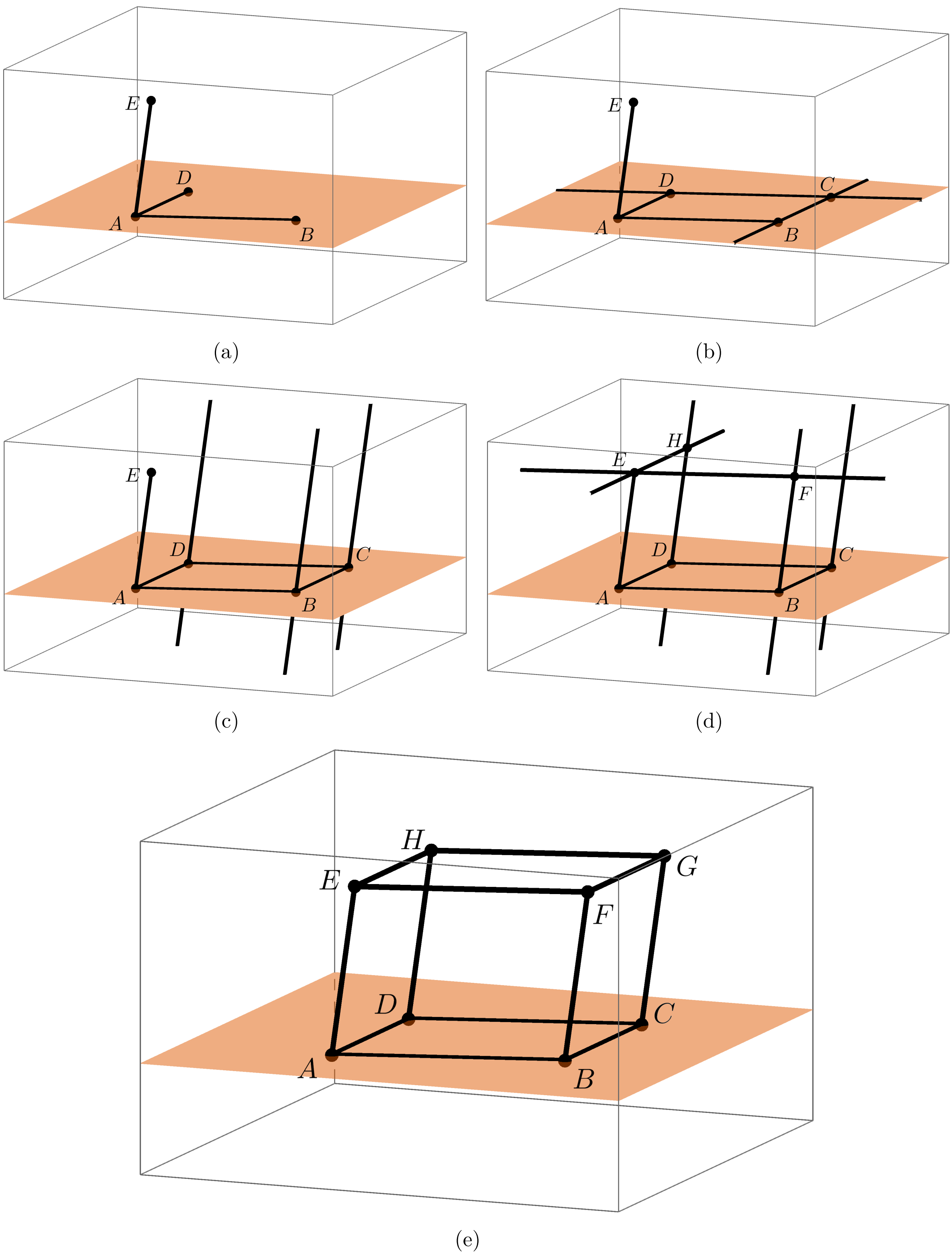


Figura 15 – Construção de um paralelepípedo

Teorema 10. *Sejam (r, s) e (r', s') dois pares de retas concorrentes tais que r e r' são paralelas entre si e s e s' também são paralelas entre si. O ângulo formado por r e s é igual ao ângulo formado por r' e s'.*

Demonstração. Sejam A o ponto de interseção de r e s e B o ponto de interseção de r' e s'. Sobre r e s, tomemos pontos A_1 e A_2 e tracemos as paralelas A_1B_1 e A_2B_2 à reta AB. Os quadriláteros AA_1B_1B, AA_2B_2B e $A_1A_2B_2B_1$ são paralelogramos. Logo, $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$, $\overline{AA_2} = \overline{BB_2}$ e $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$. Logo, os triângulos AA_1A_2 e BB_1B_2 são congruentes (critério de congruência LLL), o que mostra que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes. Portanto, o ângulo entre as retas r e s é igual ao ângulo entre as retas r' e s'. □

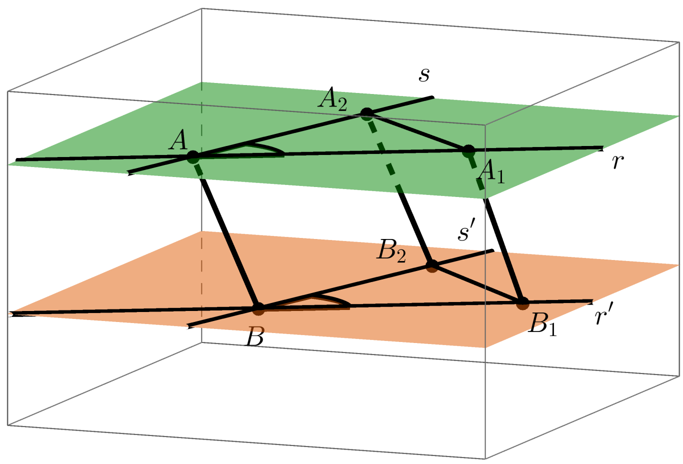


Figura 16 – Pares de retas paralelas derterminam ângulos iguais

No espaço, quando retas formam ângulo reto, são chamadas retas *ortogonais* e retas perpendiculares são retas ortogonais e coplanares (portanto, concorrentes).

3.6 Paralelismo entre reta e plano

Existem três casos de posições relativas entre uma reta r e um plano α no espaço. Se a reta r possui dois ou mais pontos em comum com o plano α, então a reta r está contida no plano no α (Teorema 3). Se existir um único ponto em comum, dizemos que a reta r e α são *secantes* (ou *concorrentes).* E o terceiro caso, quando r e α não possuírem pontos em comum, dizemos que eles são *paralelos.*

Vejamos algumas propriedades sobre o paralelimos entre reta e plano.

Teorema 11. *Um plano α e uma reta r não contida em α são paralelos se, e somente se, existe uma reta s paralela a r e contida em α.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que a reta r e o plano α são paralelos. Seja A um ponto qualquer de α e consideremos o plano β determinado por r e A. Os planos α e β são distintos e possuem o ponto A em comum, logo possuem uma reta s em comum.

As retas r e s são paralelas, pois são coplanares e não possuem ponto em comum (já que s é uma reta de α e r é paralela à α). Logo, existe uma reta s em α que é paralela à r.

Agora, para a volta, suponhamos que a reta s de α seja paralela a r. Seja β o plano definido por r e s. Os planos α e β são distintos e possuem a reta s em comum. Como a reta r está contida em β, se ela cortasse o plano α, seria necessariamente em um ponto da interseção s de α e β. Mas isso é impossível, já que r e s são paralelas. Logo, r é paralela a α. $\square$

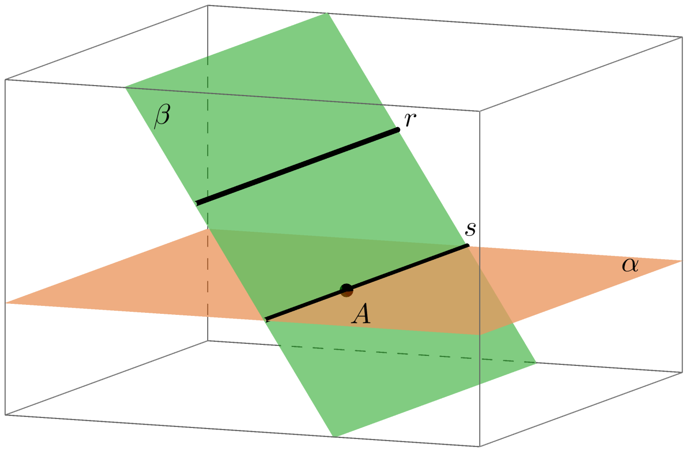


Figura 17 – Critério de paralelismo entre reta e plano

A volta desse teorema é extremamente útil para identificar se uma reta é paralela a um plano, bastando encontrar uma reta desse plano que é paralela a reta dada. Como no exemplo a seguir.

Exemplo 2. *Consideremos a pirâmide $VABCD$ cuja base é um trapézio em que AB é paralelo a CD. O teorema anterior nos permite concluir que a reta CD é paralela ao plano formado pelos pontos V, A e B, já que CD é paralela a AB que está contida no plano. (Figura 18).*

Da mesma forma, a reta AB é paralela ao plano formado pelos pontos V, D e C.

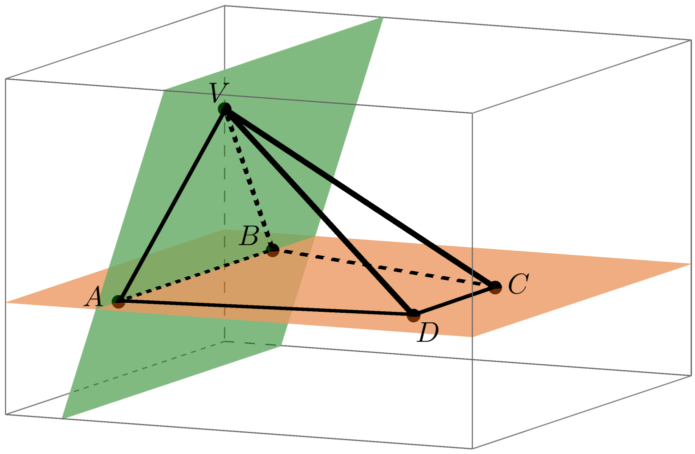


Figura 18 – Aplicação do Teorema 11

Teorema 12. *Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à interseção dos dois planos.*

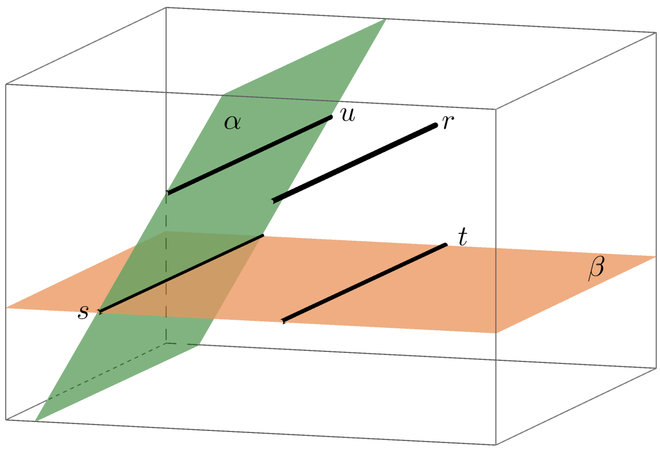


Figura 19 – Demonstração do Teorema 12

□

Demonstração. Sejam α e β dois planos secantes, com interseção s, e a reta r paralela a α e β. Como r é paralela a α, existe uma reta u paralela a r em α, analogamente, existe t em β paralela a r (suponhamos u e t diferentes de s, pois nesse caso a demonstração estaria concluída). Como u e t são paralelas a r, pelo Teorema 9, u e t também são paralelas. Pelo Teorema 11, u é paralela a β e t é paralela a α. Agora, a reta u não é concorrente a s já que é paralela a α (plano que contém s), nem é reversa a s já que pertencem a um mesmo plano β, então u e s são paralelas. Temos então que, r e s são paralelas a u, portanto, pelo Teorema 9, são paralelas entre si.

Agora, partindo de duas retas reversas vamos construir um plano paralelo a uma delas.

Teorema 13. *Dadas duas retas reversas r e s, existe um único plano paralelo a s contendo r.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar a existência desse plano. Tomemos um ponto qualquer de r, por ele trace uma reta s' paralela a s que existe pelo Teorema 8. O plano definido por s' e r é paralelo a s já que contém s' que é paralela a s (Teorema 11).

Agora, vamos mostrar a unicidade desse plano. Suponhamos que existam dois planos distintos α e β que contenham r e sejam paralelos a s. Dessa forma, a intersecção entre os planos α e β é a própria reta r, mas pelo Teorema 12 s é paralela a interesecção dos planos, ou seja, s é paralela a r, contradizendo a hipótese. Assim, existe apenas um plano paralelo a s contendo r. □

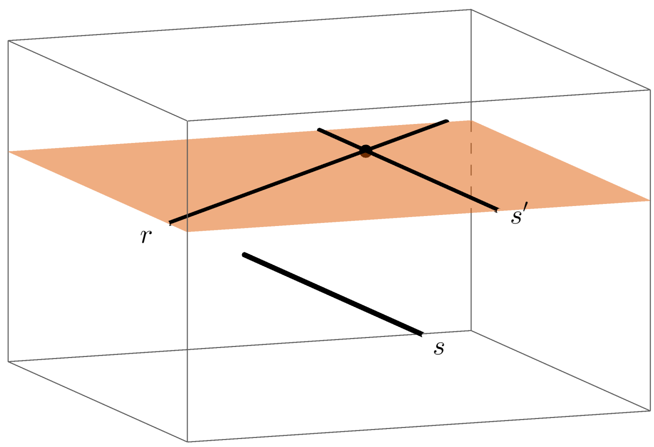


Figura 20 – Teorema 13

3.7 Paralelismo entre planos

Já vimos que dois planos distintos podem ser secantes se houverem um ponto em comum, portanto terão uma reta em comum. Dois planos também podem ser coincidentes ou paralelos (se não possuírem pontos em comum). Nessa seção exploraremos este último caso de posição relativa entre planos. Primeiramente, estabeleceremos um critério de paralelismo entre planos baseado em retas.

Teorema 14. *Se α e β são paralelos, então α é paralelo a cada reta de β. Reciprocamente, se o plano α é paralelo a duas retas concorrentes contidas ao plano β, então α e β são paralelos.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que α seja paralelo a β, então α e β não possuem pontos em comum. Logo uma reta r qualquer de β não tem pontos em comum com α, portanto r é paralela a α.

Agora, para a volta, sejam duas retas r e s do plano β, concorrentes em A, ambas paralelas ao plano α. Como os planos α e β são distintos, vamos supor que eles sejam secantes, e tenham como interseção uma reta t. As retas r e s não cortam α, portanto não podem cortar a reta t, que está em α. Mas isso significa que as retas r e s (que estão no mesmo plano β que t) são ambas paralelas a t, o que contradiz a unicidade da paralela a t passando por A (Teorema 8). Logo, α e β não possuem uma reta em comum, ou seja, são paralelos. □

A segunda parte do teorema nos permite concluir que, para mostrar que dois planos são paralelos, basta encontrar um par de retas concorrentes de um deles que sejam paralelas ao outro plano. Notemos a importância das retas serem concorrentes. Um plano pode ser paralelo a várias retas paralelas de outro sem que os planos sejam paralelos, como mostra a Figura 21.

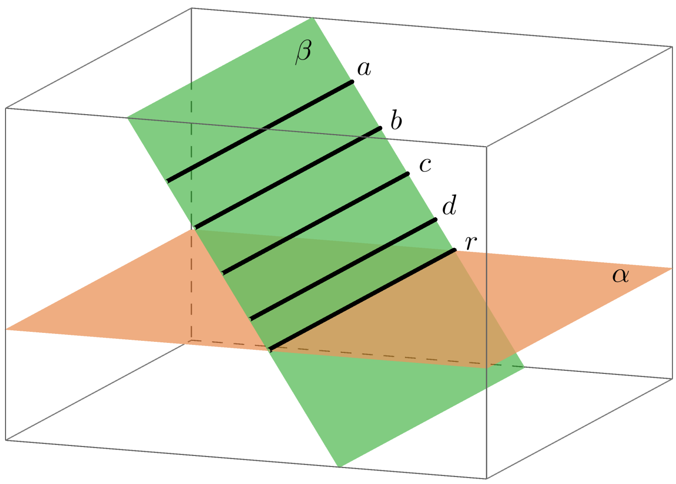


Figura 21 – O plano α é paralelo a várias retas paralelas de β

Agora, utilizando o teorema anterior, construiremos planos paralelos.

Teorema 15. *Por todo ponto A exterior a um plano dado α passa um único plano β paralelo a α.*

Demonstração. Primeiramente, vamos demonstrar a existência do plano. Tomemos duas retas concorrentes r e s de α (Figura 22). Sejam r' e s' as retas paraleas a r e s, respectivamente, que passam pelo ponto A. Seja β o plano definido pelas retas r' e s'. Pelo Teorema 11, r' e s' são paralelas a α e portanto o plano β é paralelo a α.

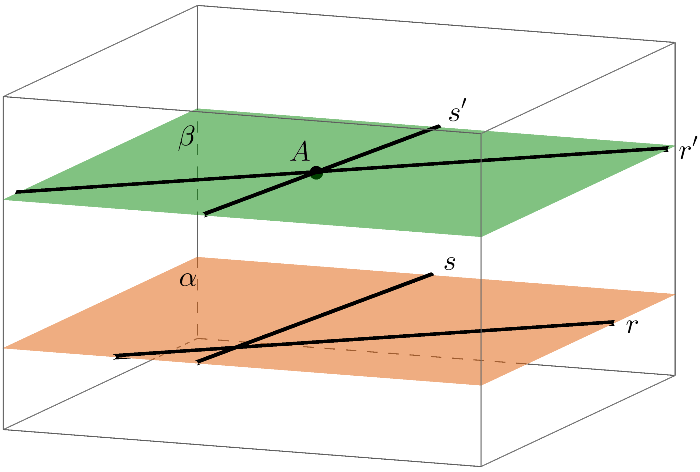


Figura 22 – Construção do plano paralelo a α passando por A

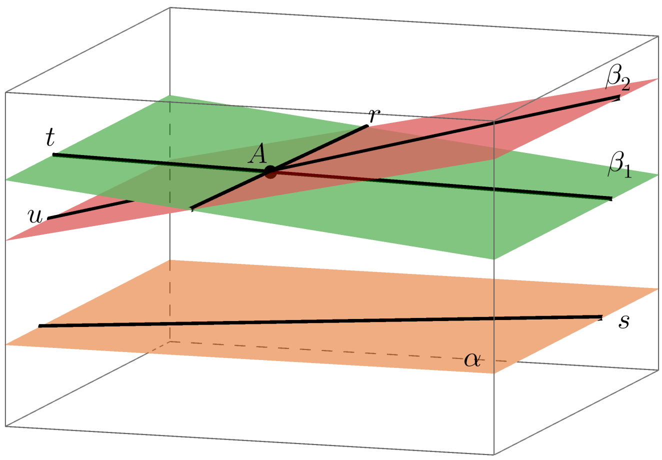
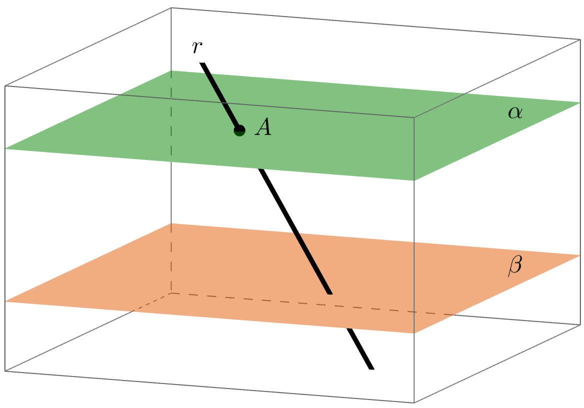


Figura 23 – Unicidade do plano paralelo

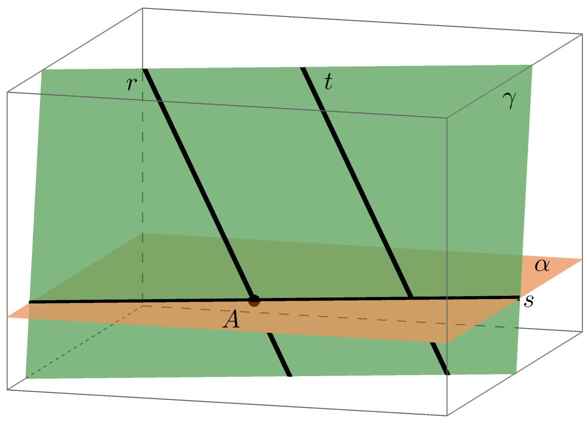
Para mostrar que o plano é único, suponhamos que existam dois planos β_1 e β_2 paralelos a α, ambos passando por A (Figura 23). Como os planos são distintos e passam por A, a interseção é uma reta r, paralela a α. Tomemos uma reta s de α, não paralela a r, que determina com A um plano γ (não representado na Figura 23). A interseção de γ com β_1 é uma reta t, que é necessariamente paralela a s (já que t e s não se intersectam, pois estão situados em planos paralelos e são coplanares). Notemos que t é distinta de r, pois r não é paralela a s. Analogamente, a interseção de γ e β_2 é uma reta u, também paralela a s e distinta de r. Então, temos duas retas paralelas a s que passam pelo mesmo ponto A, t e u devem ser coincidentes. Logo, β_1 e β_2 contêm a reta r e as retas coincidentes t e u, como t e u são distintas de r, necessariamente, os planos são coincidentes. Então, o plano paralelo a α por A é único. $\square$

Com esse teorema construímos o único plano paralelo a α passando por A a partir de duas retas concorrentes e paralelas a α. Como essas retas foram escolhidas de forma arbitrária, podemos afirmar que todas as retas paralelas a α passando por A, fazem parte do plano β, na verdade, a união dessas retas formam o plano β. Estamos dizendo então que uma reta não pode ser paralela a um plano α e secante a um plano β paralelo a α, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 16. *Se uma reta corta um plano, corta também qualquer plano paralelo a este. Se um plano corta uma reta, corta também qualquer reta paralelo a ela.*



(a) A reta r corta o plano α, então corta todos os planos paralelos a α



(b) O plano α corta a reta r, então corta todas as retas paralelas a r

Figura 24 – Teorema 16

Demonstração. (Primeira parte) Sejam α e β planos paralelos e r uma reta secante a α. Seja A o ponto de interseção entre r e α. A reta r não está contida em β, pois ela passa pelo ponto A de α. Também não pode ser paralela a β, pois estaria contida em α. Então, r só pode ser secante a β.

(Segunda parte) Consideremos a reta r e o plano α secantes em A. Tomemos uma reta t paralela a r. O plano γ determinado pelas retas paralelas r e t é necessariamente secante a α já que contém r e, portanto, contém A. Seja s a interseção entre α e γ. Pela Geometria Plana, no plano γ, as retas r e s são secantes em A, então a reta t, paralela a r, também é secante a s e, portanto, a α. $\square$

No teorema a seguir temos uma situação parecida com as que acabamos de discutir, mas agora serão dois planos paralelos cortados por outro plano.

Teorema 17. *Se dois planos α e β são secantes e possuem como interseção a reta r, então α corta um plano paralelo a β segundo uma reta paralela a r.*

Demonstração. Seja β' um plano paralelo a β (Figura 25). Os planos α e β' são distintos, pois α é secante a β e β' é paralelo a β. Também não são paralelos, pois por um ponto de r só existe um plano paralelo ao plano β' que é β (Teorema 15). Logo, α e β' são secantes, seja a interseção a reta s. As retas r e s pertencem ao plano α (são coplanares) e não possuem pontos comuns, já que estão em planos paralelos, β e β', respectivamente. Logo, s é paralela a r. □

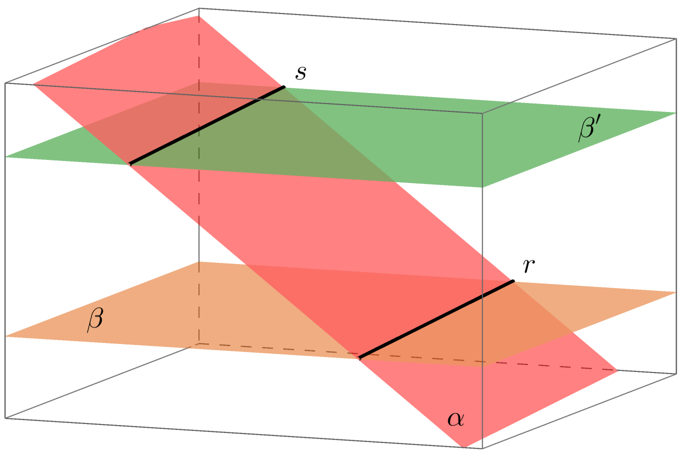


Figura 25 – Plano secante a dois planos paralelos

Nesse teorema vimos uma possível posição relativa entre três planos (dois planos paralelos e o terceiro secante a ambos). Na verdade, existem cinco posições relativas entre três planos distintos como veremos a seguir.

Já vimos que dois planos podem ser coincidentes, paralelos ou secantes. Partindo de dois planos α e β paralelos: o terceiro plano γ pode ser paralelo a um deles e consequentemente paralelo ao outro plano (Figura 26(a)); ou γ pode ser secante a α (ou β) e consequentemente secante a β (ou α) (Figura 26(b)), esgotando assim as possibilidades começando com dois planos paralelos.

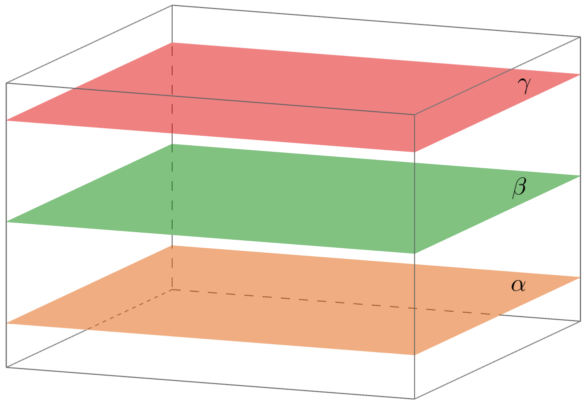
Agora, partindo de α e β secantes segundo uma reta r. Se colocarmos γ paralelo a α ou β resultará na posição da Figura 26(b). Então, tomemos γ secante aos planos α e β, digamos em s e t, respectivamente. Assim, vamos analisar as posições relativas entre as interseções dos planos. Primeiramente, notemos que as retas r, s e t são, duas a duas, coplanares, portanto, elas podem ser, duas a duas, coincidentes, paralelas ou concorrentes.

Supondo que as retas r e s sejam coincidentes, então como r está contida em β, s também está. Portanto, s está contida em β e em γ, ou seja, s é a intersecção entre β e γ, que por hipótese, é a reta t. Então, s é coincidente a t. Logo, as três retas são coincidente entre si, como na Figura 26(c).

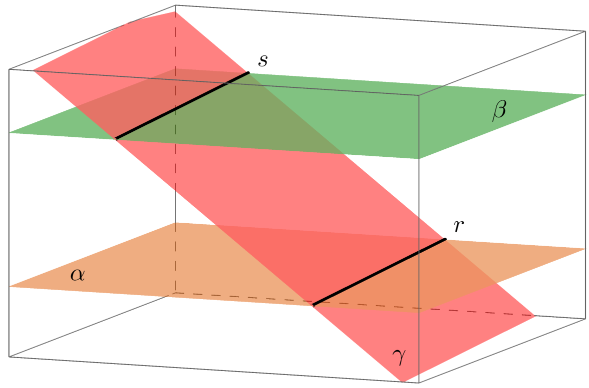
Se as retas r e s forem paralelas, pelo Teorema 11, s é paralela a β, portanto deve ser paralela a interseção entre β e γ, t, já que pertencem a um mesmo plano γ, resultando assim em três retas, duas a duas, paralelas, como na Figura 26(d).

Por fim, se r e s forem concorrentes em um ponto P. Dessa forma P pertence aos três planos, em particular pertence a β e γ e portanto, pertence a reta t (interseção entre β e γ). Além disso, P é o único ponto de t que pertence a r ou s, pois, se houvesse mais, t seria coincidente com r ou s resultando em planos coincientes ou no caso da Figura 26(c). Ou seja, a última posição relativa entre três planos distintos é como mostra a Figura 26(e).

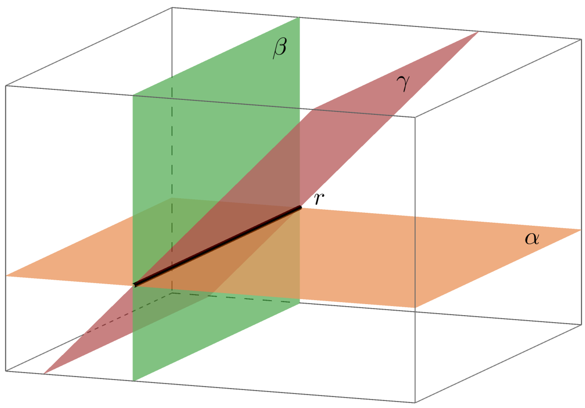
Se fossemos considerar que os planos ainda podem ser coincidentes, teriamos mais três posições relativas: os três planos coincidentes; dois deles coincidentes e o terceiro paralelo aos primeiros; dois deles coincidentes e o terceiro concorrente aos primeiros. Mas essas posições são, basicamente, análogas as posições relativas entre dois planos.



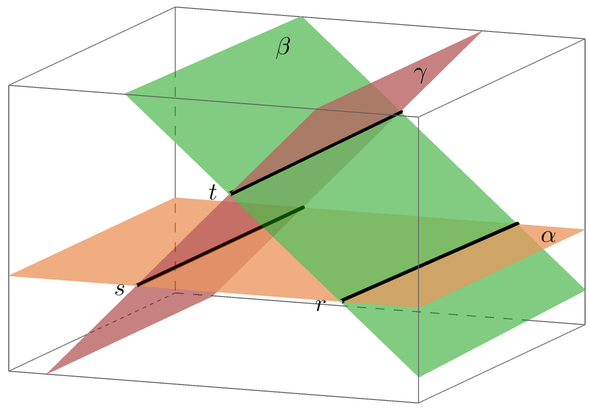
(a) Os três planos paralelos



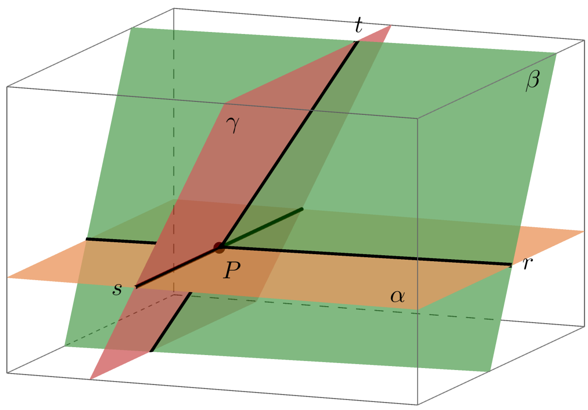
(b) Dois deles paralelos e o terceiro secante a ambos



(c) Os três planos se cortam segundo uma reta



(d) Os três planos se cortam, dois a dois, segundo três retas paralelas



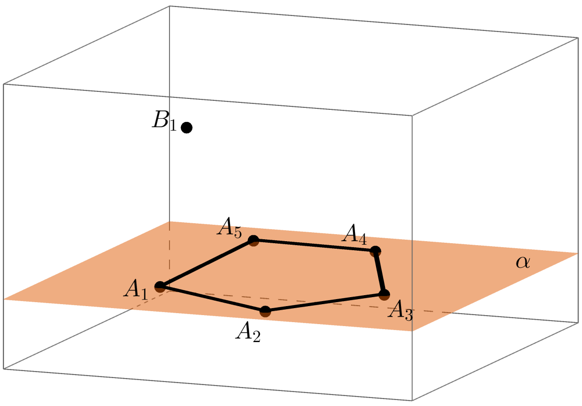
(e) Os três planos se cortam, dois a dois, segundo retas concorrentes; a interseção entre as três retas é o único ponto comum entre os três planos

Figura 26 – Posição relativa entre três planos

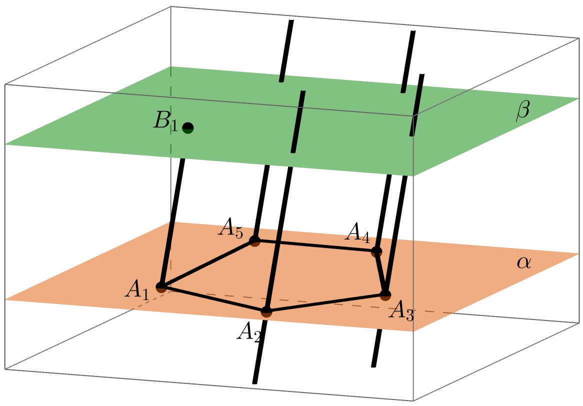
Agora, com o conceito de paralelismo entre planos podemos construir mais um tipo de poliedro, os prismas, como veremos a seguir.

3.8 Construção de prismas

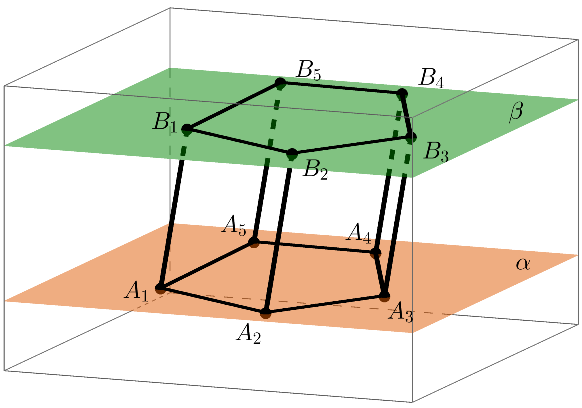
Seja o polígono $A_1A_2A_3...A_n$ no plano α e um ponto B_1 fora de α (Figura 27(a)). Por B_1 tracemos o plano β paralelo a α e o segmento $\overline{A_1B_1}$. Pelos pontos $A_2, A_3, A_4, ..., A_n$ tracemos retas paralelas a A_1B_1 (Figura 27(b)). Como A_1B_1 é secante ao plano β, então todas as retas paralelas traçadas anteriormente também intersectam o plano β, digamos que nos pontos $B_2, B_3, B_4, ...B_n$, respectivamente. Notemos que, por exemplo, os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são coplanares já que A_1B_1 e A_2B_2 são paralelos e, portanto, determinam um plano, então A_1A_2 e B_1B_2 também são paralelos já que são coplanares e estão situados em planos paralelos. Logo, $A_1A_2B_1B_2$ é um paralelogramo, assim como os outros quadriláteros. Estes n paralelogramos, juntamente com os polígonos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$ formam um poliedro denominado *prisma* de bases $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$. (Figura 27(c)).



(a)



(b)



(c)

Figura 27 – Construção de um prisma pentagonal ($n = 5$)

Vejamos alguns elementos dos prismas que recebem nomes especiais. As arestas $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ são chamadas *arestas laterais*. Todas as arestas laterais são paralelas e possuem o mesmo comprimento. As faces formadas com as arestas laterais são chamadas *faces laterais* e são todas paralelogramos, como mostramos anteriormente. As bases $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$ são polígonos congruentes, pois eles possuem lados respectivamente iguais e paralelos (já que as faces laterais são paralelogramos).

Notemos que, os paralelepípedos construídos anteriormente são prismas cuja base é um paralelogramo. Neste caso, quaisquer faces paralelas podem ser consideradas as bases do prisma, pois são pares de polígonos congruentes situados em planos paralelos.

3.9 Perpendicularismo entre reta e plano

Definiremos, nessa seção, o conceito de reta perpendicular a um plano e, a partir disto, contruiremos mais alguns poliedros.

Definição 15. *Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a toda reta contida nesse plano.*

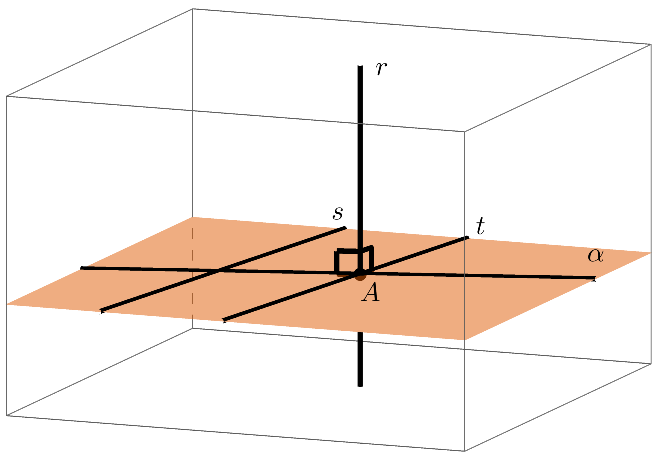


Figura 28 – Reta r perpendicular ao plano α

Na Figura 28, notemos que r é ortogonal a s, portanto é perpendicular a t que é paralela a s passando por A, esse raciocínio pode ser repetido para todas as retas de α. Ou seja, para que a reta r seja perpendicular ao plano α, basta que ela seja perpendicular às retas de α que passam por A (interseção de r com α). Com isso, concluiremos algumas relações entre perpendicularismo e paralelismo.

Teorema 18. *Se a reta r e o plano α são perpendiculares, toda reta r' paralela a r é perpendicular a α; todo plano α' paralelo a α é perpendicular a r.*

Demonstração. (Primeira parte) Seja r uma reta perpendicular a α e r' uma reta paralela a r (Figura 29). Pelo Teorema 16, r' também intersecta α, digamos, no ponto B. Seja s' uma reta de α passando por B de r', e s paralela a s' passando por A. Como r é perpendicular a α, então também é perpendicular a s. Portanto, pelo Teorema 10, s' é perpendicular a

r', analogamente, todas as retas de α que passam por B são perpendiculares a r'. Logo, r' é perpendicular a α.

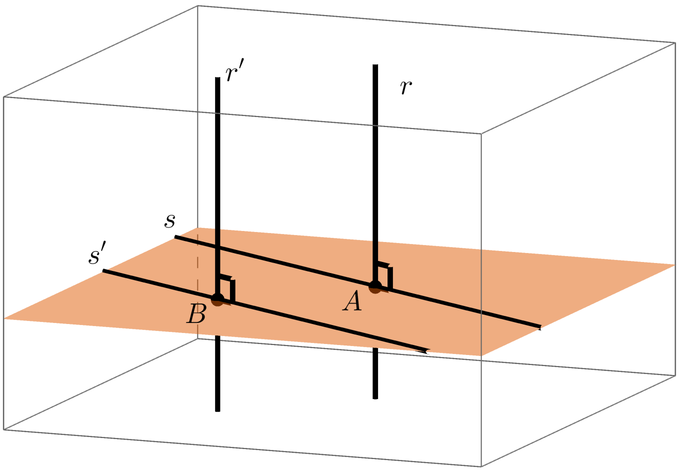


Figura 29 – A reta r' que é paralela a r é perpendicular a α

(Segunda parte) Sejam r uma reta perpendicular a α em A, e α' um plano paralelo a α (Figura 30). Pelo Teorema 16, r intersecta α', digamos, no ponto B. Seja s' uma reta de α' passando por B, e s paralela a s' passando por A. As retas s e s' determinam um plano, neste plano r é transversal a s e a s', e como é perpendicular a s, também é perpendicular a s' (resultado da Geometria Plana). Analogamente, todas as retas de α' que passam por B serão perpendiculares a r, então r é perpendicular a α'.

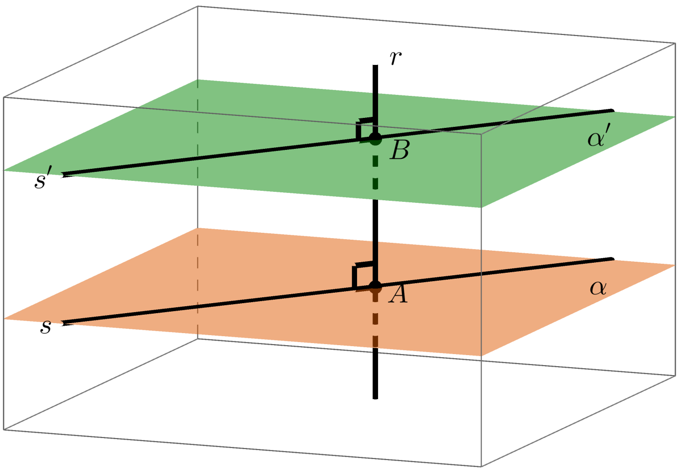


Figura 30 – A reta r perpendicular ao plano α' que é paralelo a α

□

Teorema 19. *Duas retas r e r' perpendiculares a um mesmo plano α são paralelas; dois planos α e β perpendiculares a uma mesma reta r são paralelos.*

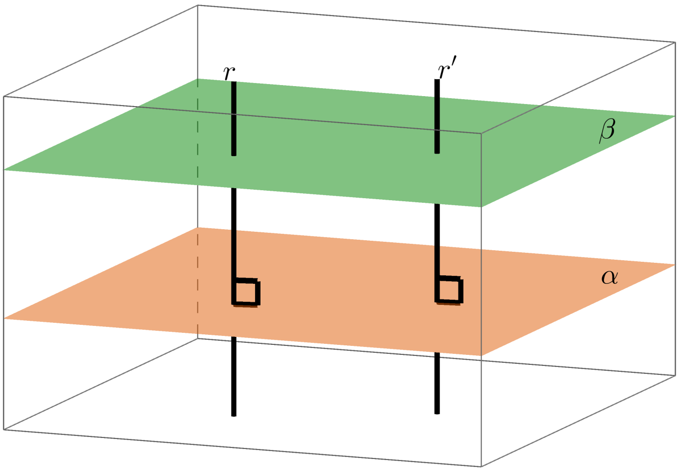


Figura 31 – Teorema 19

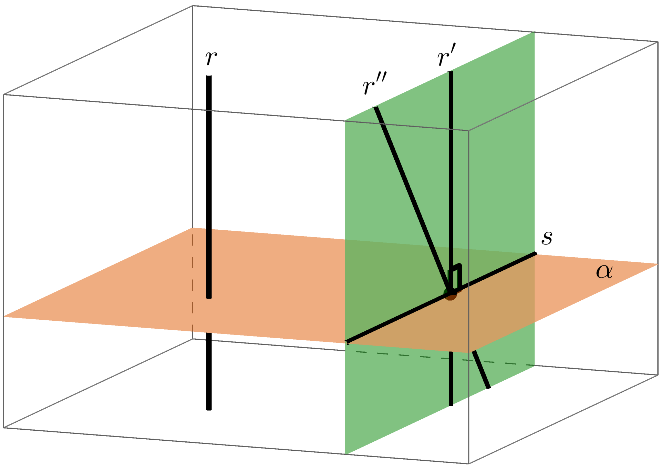


Figura 32 – Demonstração da primeira parte do Teorema 19

Demonstração. (Primeira parte) Sejam r e r' retas perpendiculares ao plano α e suponhamos que r e r' não sejam paralelas (Figura 32). Pelo ponto de interseção de r' e α tracemos a reta r'', paralela a r (r'' é perpendicular a α pelo Teorema 18). As retas r' e r'' são distintas, já que apenas r'' é paralela a r, então determinam um plano β que corta α na reta s. Como r' e r'' são ambas perpendiculares a α, resulta que r' e r'' são ambas perpendiculares a s. Mas isso significa que , no plano β, existem duas perpendiculares à reta s passando pelo mesmo ponto, o que é um absurdo. Logo, se as retas r e r' são ambas perpendiculares a α, então elas são paralelas entre si.

(Segunda parte) Sejam α e β dois planos distintos perpendiculares a reta r, e suponhamos que α e β não sejam paralelos, e que se cortem segundo uma reta s (Figura 33). Sejam A e B, respectivamente, os pontos de interseção de r com α e β (notemos que A não pertence a s, caso contrário r estaria contida em β). Por B tracemos uma reta t que corte s no ponto C. Dessa forma construímos o triângulo ABC com dois ângulos retos, em A e B, o que é um absurdo. Logo, se α e β são perpendiculares a reta r, então eles são paralelos entre si.

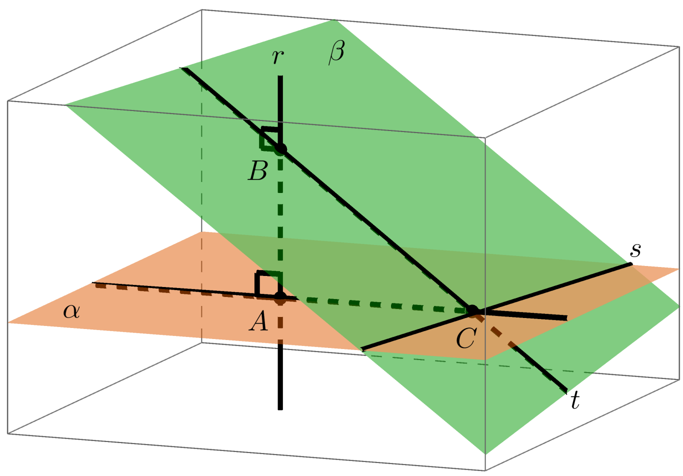


Figura 33 – Demonstração da segunda parte do Teorema 19

□

Acabamos de definir e mostrar alguns resultados sobre perpendicularismo entre reta e plano, mas ainda não demonstramos quando essa posição relativa ocorre. Afinal, a definição exige que para a reta ser perpendicular a um plano ela deve ser perpendicular a uma infinidade de retas desse plano, o que não é algo muito prático. O próximo teorema é de extrema importância, pois além de nos mostrar a existência de retas e planos com essa propriedade, mostrará que para uma reta ser perpendicular a um plano, basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes do plano. Tal resultado abrirá portas para construirmos retas e planos perpendiculares com facilidade.

Teorema 20. *Se r é ortogonal a um par de retas concorrentes de α, então r é perpendicular a α.*

Demonstração. Sejam t e s duas retas de α que se intersectam em no ponto A. Sem perda de generalidade, suponhamos que r também passe por A (caso contrário, tomamos uma reta paralela a r que passe por A). Mostraremos que toda reta u de α passando por A é perpendicular a r. Para isso utilizaremos algumas congruências de triângulos na Figura 34. Suponhamos que u seja distinta de t e s, caso contrário trivialmente u seria perpendicular a r. Tomemos três pontos colineares S, U e T, das retas s, u e t, respectivamente, de tal forma que U esteja entre S e T. Em cada semiespaço definido por α, marquemos em r os ponto A_1 e A_2 de modo que $\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$.

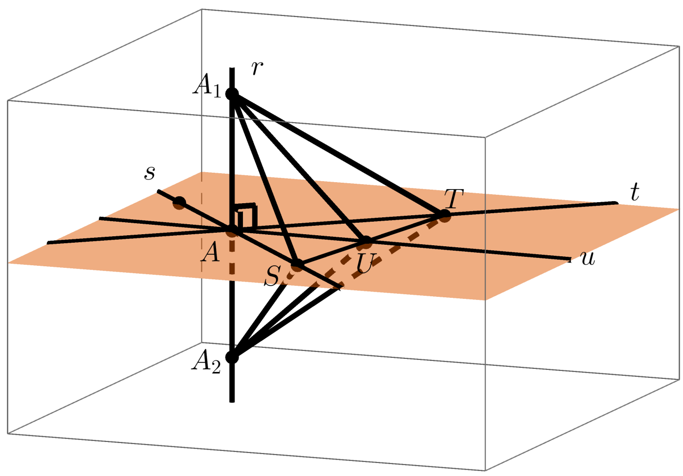


Figura 34 – Demonstração do Teorema 20

Primeiramente, notemos que os triângulos AA_1S e AA_2S são congruentes, já que $\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$ e o cateto AS é comum. Então as hipotenusas desses triângulos possuem a mesma medida, $\overline{SA_1} = \overline{SA_2}$. Analogamente, os triângulos AA_1T e AA_2T são congruentes, assim, $\overline{TA_1} = \overline{TA_2}$. Agora, os triângulos A_1ST e A_2ST também são congruentes (LLL, $\overline{SA_1} = \overline{SA_2}$, $\overline{TA_1} = \overline{TA_2}$ e ST é comum), o que implica $\widehat{A_1ST} = \widehat{A_2ST}$. Com isso, os triângulos A_1SU e A_2SU são congruentes (LAL, $\overline{SA_1} = \overline{SA_2}$, $\widehat{A_1ST} = \widehat{A_2ST}$ e SU é comum), então $\overline{UA_1} = \overline{UA_2}$. Finalmente, os triângulos A_1AU e A_2AU são congruentes (LLL, $\overline{UA_1} = \overline{UA_2}$, $\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$ e AU é comum), então $\widehat{A_1AU} = \widehat{A_2AU}$ e somam um ângulo raso (já que A_1, A e A_2 são colineares), então cada um desses ângulos é reto. Ou seja, a reta u é perpendicular a r.

Assim, toda reta de α passando por A é perpendicular a r e, portanto, r é perpendicular a α.

$\square$

Vamos, agora, construir retas e planos perpendiculares.

Teorema 21. *Por um ponto dado, se pode traçar um único plano perpendicular a uma reta dada. Por um ponto dado, se pode traçar uma única reta perpendicular a um plano dado.*

Demonstração. Sejam r e A, respectivamente, a reta e o ponto dado que traçaremos o plano perpendicular (Figura 35). Primeiramente, tracemos dois planos β_1 e β_2 contendo r. Por um ponto B em r tracemos, em cada um dos planos β_1 e β_2, retas s_1 e s_2, ambas perpendiculares a r. O plano α determinado pelas retas s_1 e s_2 contém duas retas perpendiculares a r, e, portanto, pelo teorema anterior, α é perpendicular a r. No caso em que os pontos A e B são coincidentes, a demonstração finaliza aqui com o plano α, caso contrário, seja α' o plano que passa por A e é paralelo a α, α' também é perpendicular a r (Teorema 18). Logo, α' passa por A e é perpendicular a r. Para mostrar a unicidade, suponhamos que exista outro plano γ que passa por A e é perpendicular a r. Pelo Teorema 19, α' e γ devem ser paralelos, o que é um absurdo, já que possuem o ponto A em comum. Então, α' é o único plano que passa por A e é perpendicular a r.

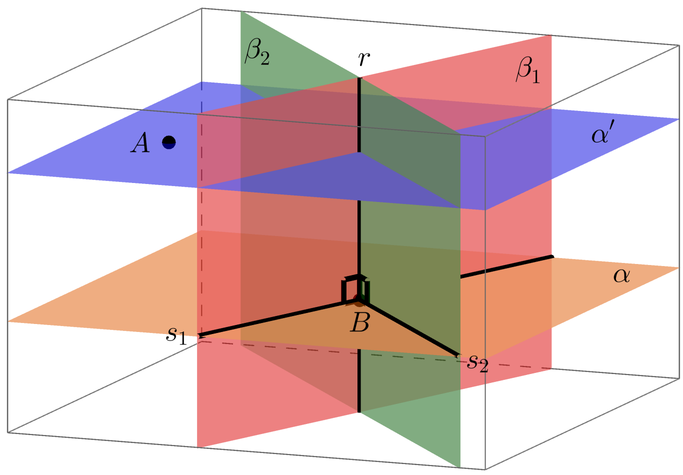


Figura 35 – Construção do plano perpendicular a uma reta

Agora, vamos construir a reta perpendicular ao plano α passando por A (Figura 36). Em α tomemos duas retas concorrentes, t_1 e t_2 e tracemos os planos β_1 e β_2, respectivamente, perpendiculares a essas retas e contendo seu ponto de interseção P. Seja r a reta de interseção entre β_1 e β_2. A reta r está contida em β_1 e passa por P, então ela é perpendicular a reta t_1 que é perpendicular a β_1 em P. Analogamente, r é perpendicular a t_2. Então, r é perpendicular a duas retas concorrentes de α , logo é perpendicular a α (Teorema 20). No caso em que os pontos A e P são coincidentes, a demonstração finaliza aqui com a reta r, caso contrário, tracemos por A a paralela r' a r que, pelo Teorema 18, é perpendicular a α. Para a unicidade, suponhamos que exista outra reta s perpendicular a

α passando por A, pelo Teorema 19, r' e s devem ser paralelas, o que é um absurdo, já que possuem o ponto A em comum. Logo, r' é a única reta passando por A que é perpendicular a α.

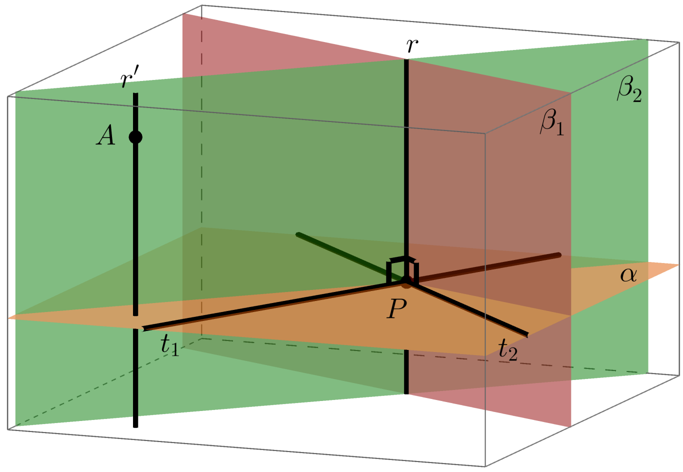


Figura 36 – Construção da reta perpendicular a um plano

□

Esse resultado nos permitirá aumentar nosso catálogo de poliedros. Mas antes, demonstraremos dois importantes teoremas. O primeiro é conhecido como *Teorema das Três Perpendiculares* e o segundo nos permite construir uma reta perpendicular a duas retas reversas.

Teorema 22. *A reta r é perpendicular ao plano α em A. A reta s está contida em α e não passa por A. O ponto B da reta s é tal que AB é perpendicular a s. Então, se P é qualquer ponto de r, PB é perpendicular a s. Além disso, se PB é perpendicular a s, então AB também é.*

Demonstração. (Primeira parte) Na Figura 37, como r é perpendicular a α, r é ortogonal a qualquer reta de α, em particular r é ortogonal a s. Então, como s é perpendicular a AB e ortogonal a r, pelo Teorema 20, s é perpendicular ao plano definido por r e AB, vamos chamá-lo de β. Mas, como P e B são pontos de β, PB é uma reta contida em β que concorre s em B. Logo, s é perpendicular a PB.

(Segunda parte) Analogamente, como r é perpendicular a α, r é ortogonal a qualquer reta de α, em particular r é ortogonal a s. Então, como s é perpendicular a PB e ortogonal a r, pelo Teorema 20, s é perpendicular ao plano definido por r e PB, vamos chamá-lo de β. Como, A e B são pontos de β, AB é uma reta contida em β, que concorre s em B. Logo, s é perpendicular a AB. □

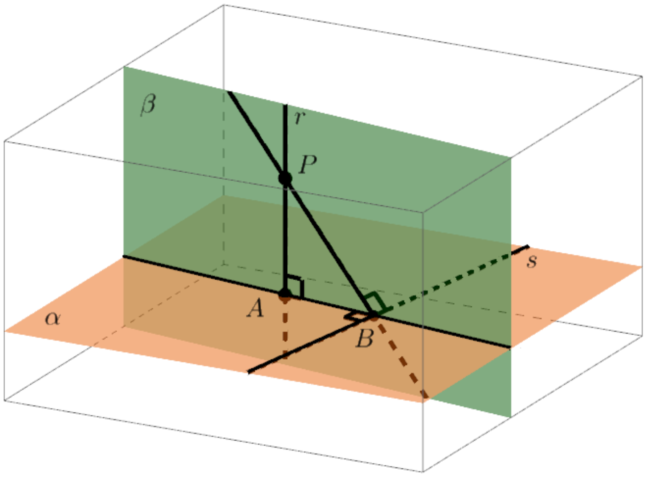


Figura 37 – Teorema das Três Perpendiculares

Teorema 23. *Dadas duas retas reversas r e s, existe uma única reta perpendicular comum a r e s.*

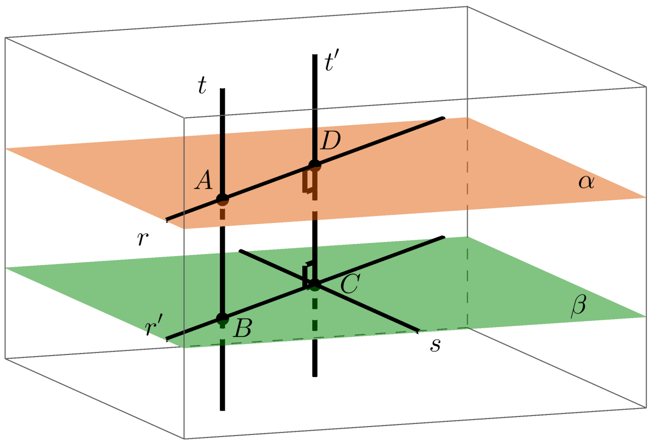


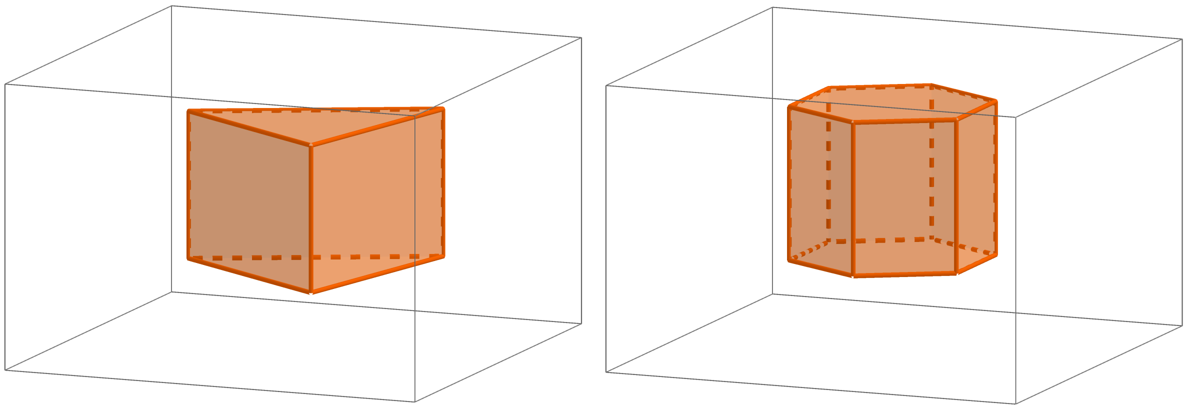
Figura 38 – Construção da reta perpendicular comum a duas retas reversas

Demonstração. Comecemos construindo um plano α contendo r e paralelo a s e outro plano β contendo s e paralelo a r. Essas construções, e a unicidade delas, são garantidas pelo Teorema 13 (Figura 38). Agora, por um ponto qualquer A de r tracemos uma reta t, perpendicular ao plano β, que o corta em B. Por B, tracemos a reta r' paralela a r. Como r é paralela a β, então a reta r' (que contém um ponto de β) está contida em β e corta s no ponto C. Para finalizar a construção, por C tracemos a reta t' paralela a t. Por construção, r é coplanar com t que é coplanar com r' que por sua vez é coplanar com t', logo as quatro retas são coplanares. Portanto, t' corta r em um ponto D. A reta t' é concorrente com r e s e é perpendicular aos planos α de r e β de s, portanto t' é uma perpendicular comum a r e s.

Para a mostrar a unicidade, suponhamos que exista outra perpendicular comum $C'D'$ com C' em r e D' em s, ela seria paralela a CD por serem ambas perpendiculares aos planos α e β. Dessa forma, os pontos C, D, C' e D' seriam coplanares juntamente com r e s, o que contradiz a hipótese que r e s são reversas. □

3.10 Construção de um prisma reto

Os *prismas retos* possuem as arestas laterais perpendiculares aos planos das bases. Então, para construir prismas retos, basta repetir a construção feita na Seção 3.8 mas tomando retas perpendiculares a base para as arestas laterais . Como consequência as faces laterais dos prismas retos são retângulos (Figura 39).



(a) Prisma tringular reto (b) Prisma hexagonal reto

Figura 39 – Prismas retos

Existem ainda alguns casos particulares de prismas retos. Quando a base é um polígono regular dizemos que o prisma é *regular*. Quando a base é um retângulo obtemos um *paralelepípedo reto retângulo*, em que todas as faces são retângulos. Ainda podemos obter o cubo (hexaedro regular), que é um paralelepípedo reto retângulo com todas as faces quadradas.

O hexaedro regular (cubo) é um dos cinco de poliedros regulares que existem, nesse trabalho também realizaremos a construção dos outros: tetraedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular. Para que fique mais claro o que isso significa, segue a definição de poliedro regular.

Definição 16. *Um poliedro é dito regular se suas faces são polígonos regulares congruentes e em cada vértice concorrem o mesmo número de arestas.*

Notemos que o cubo satisfaz essa definição: todas as faces são quadrados e em cada vértice concorrem três arestas.

3.11 Construção de pirâmides regulares

Uma *pirâmide regular* possui um polígono regular como base e a reta que liga o vértice da pirâmide com o centro da base é perpendicular ao plano da base. A construção é análoga a realizada na Seção 3.2, mas tomando um polígono regular $A_1A_2...A_n$ e escolhendo o vértice V situado sobre a perpendicular ao plano da base passando pelo seu centro O. Os triângulos VOA_1, VOA_2,..., VOA_n são triângulos retângulos congruentes, já que possuem catetos respectivamente congruentes ($\overline{VO}$ é comum e $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = ... = \overline{OA_n}$). Então, as arestas laterais $\overline{VA_1}$, $\overline{VA_2}$, ..., $\overline{VA_n}$ são todas congruentes entre si, portanto as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

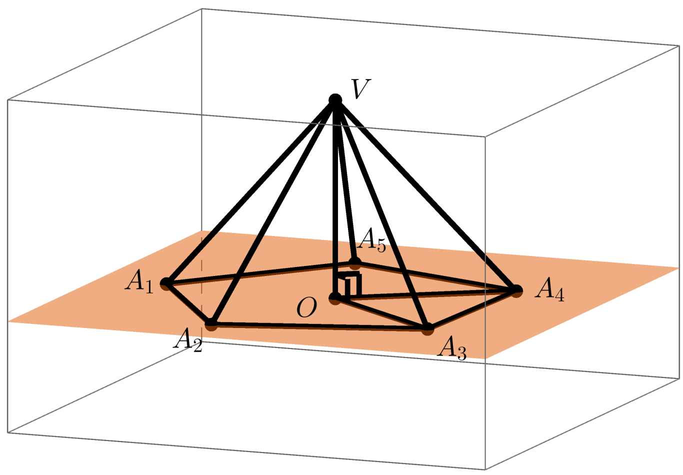


Figura 40 – Pirâmide pentagonal regular

3.12 Distância entre ponto e plano

Antes de continuarmos a construir novos poliedros, vamos definir o conceito de *distância entre ponto e plano*. Tal conceito será importante para as próximas construções que faremos.

A distância entre dois pontos já foi definida no Capítulo 2 na Seção 2.3 para a Geometria Plana, mas no espaço a definição é análoga: a distância entre dois pontos A e B é a medida do segmento $\overline{AB}$. Lembrando disso, vamos definir o conceito de distância entre ponto e plano.

Definição 17. *Sejam α um plano, P um ponto do espaço fora de α e r a reta perpendicular a α que passa por P. Vamos chamar a interseção entre r e α de Q, a medida do segmento $\overline{PQ}$ é a distância entre P e α (Figura 41).*

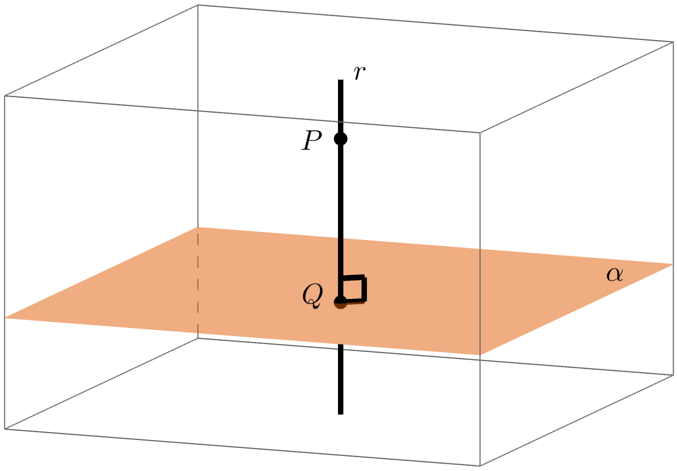


Figura 41 – Definição de distância entre o ponto P e o plano α

Com essa definição, podemos definir o conceito de *altura de um pirâmide*:

Definição 18. *A altura de uma pirâmide é a distância entre seu vértice e o plano da base.*

Vamos fazer um exemplo:

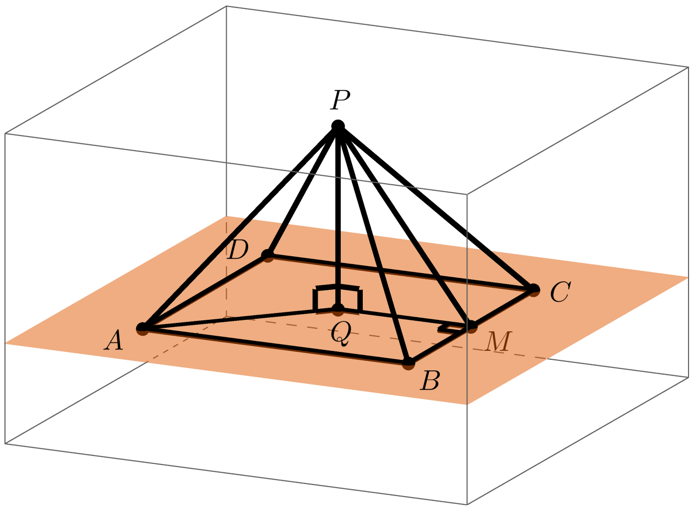


Figura 42 – Altura de uma pirâmide

Exemplo 3. *Seja a pirâmide quadrangular regular $VABCD$, onde V é o vértice e o quadrado $ABCD$ é a base (Figura 42). Pela simetria da pirâmide quadrangular regular, é* *fácil ver que o ponto Q é o centro da base $ABCD$. Então, para calcular a altura $\overline{PQ}$ basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulos PQM ou no triângulo PQA.*

Agora, vamos voltar às construções.

3.13 Construção de um tetraedro regular

Consideremos uma pirâmide triangular regular de base ABC e vértice V. Um tetraedro regular é obtido escolhendo o vértice V (sobre a perpendicular ao plano da base traçada por seu centro O) de modo que as arestas laterais $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ tenham a mesma medida que as arestas da base $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (Figura 43). As faces da pirâmide obtida são triângulos equiláteros congruentes. Além disso, se por A tomamos a perpendicular ao plano de VBC, que corta este plano em P, os triângulos retângulos APB, APV e APC são congruentes, já que as hipotenusas são congruentes e o cateto $\overline{AP}$ é comum. Assim, temos $\overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PV}$. Logo, P é o centro do triângulo equilátero VBC, o que significa que a pirâmide é regular qualquer que seja a face considerada como base.

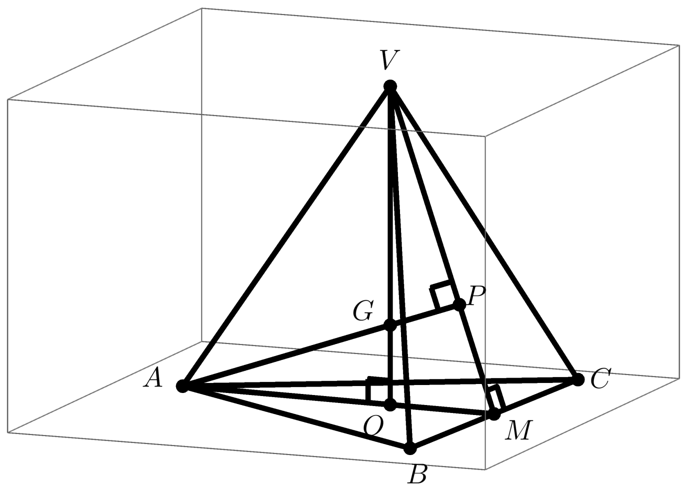


Figura 43 – Tetraedro regular

Notemos ainda, na Figura 43, que as retas VO e AP são coplanares, vejamos o porquê. Consideremos o plano α determinado pela reta VO e pelo vértice A. Este plano corta o plano da base ABC segundo a reta AO, mas como ABC é um triângulo equilátero de centro O, AO corta o lado $\overline{BC}$ em seu ponto médio M. Logo, a altura $\overline{VM}$ da face VBC está contida no plano α; em particular, o ponto P, que é o centro de VBC, está neste plano, ou seja, V, O, A e P são coplanares. Mais do que isso, a reta VP está contida em α, o que mostra que VP e AO são concorrentes (em M). Além disso, como os pontos de VO são equidistantes de A, B e C e os pontos de AP são equidistantes de V, B e

C, o ponto de interseção de VO e AP é um ponto equidistante dos quatro vértices do tetraedro, chamado de *centro*, G, do tetraedro. Analogamente, podemos mostrar que as quatro perpendiculares traçadas de um vértice do tetraedro ao plano da face oposta (as retas suportes das alturas do tetraedro) passam todas pelo centro do tetraedro. Tal ponto possui uma propriedade bastante interessante, como veremos a seguir.

Teorema 24. *O centro do tetraedro divide a altura em dois segmentos cuja razão do segmento que liga o vértice ao centro em relação ao segmento que liga o centro ao plano oposto ao vértice é três.*

Demonstração. Consideremos que as arestas do tetraedro (Figura 44) tenham medida l. Vejamos, primeiramente, a relação entre a altura e a medida das arestas.

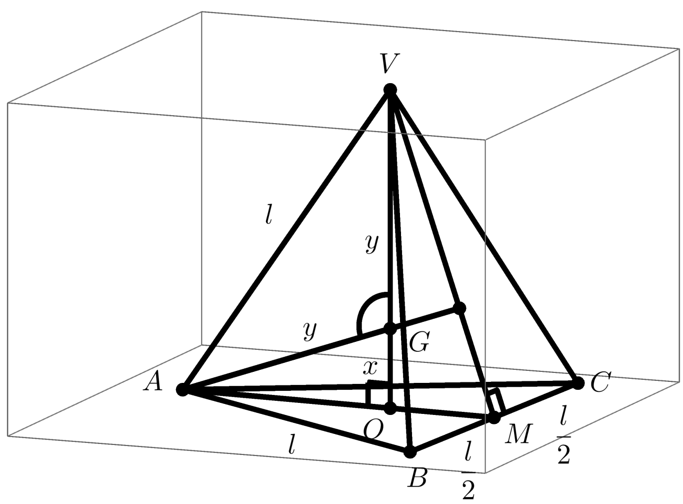


Figura 44 – Propriedades métricas em um tetraedro regular

O segmento $\overline{VM}$ é a altura da face VBC, então, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{VB}^2 = \overline{VM}^2 + \overline{BM}^2$$

$$l^2 = \overline{VM}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\overline{VM}^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$\overline{VM}^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$\overline{VM} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Além disso, $\overline{OM}$ é o apótema da base ABC, então $\overline{OM} = \dfrac{\overline{AM}}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$.

No triângulo retângulo VOM, temos:

$$\overline{VM}^2 = \overline{VO}^2 + \overline{OM}^2$$

$$\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \overline{VO}^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$\overline{VO}^2 = \frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{36}$$

$$\overline{VO}^2 = \frac{24l^2}{36}$$

$$\overline{VO} = \frac{2l\sqrt{6}}{6}$$

$$\overline{VO} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Vimos anteriormente que o ponto G equidista dos vértices do tetraedro, vamos chamar essa distância de y, ou seja, $\overline{VG} = \overline{AG} = y$. Para simplificar a notação, vamos dizer que $\overline{GO} = x$. Então, temos que $x + y = \frac{l\sqrt{6}}{3}$. Agora, notemos que no triângulo retângulo AOG, $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{2}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:

$$\overline{AG}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{GO}^2$$

$$y^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 + x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{l^2}{3}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y = \frac{l\sqrt{6}}{3} \\ y^2 - x^2 = \frac{l^2}{3} \end{cases}$$

Chegamos em $x = \frac{l\sqrt{6}}{12} = \frac{\overline{VO}}{4}$ e $y = \frac{3l\sqrt{6}}{12} = \frac{3\overline{VO}}{4}$, ou seja, $y = 3x$ o que significa que $\overline{VG}$ mede o triplo de $\overline{GO}$.

□

Esse teorema nos permite calcular a medida do ângulo $\widehat{VGA}$. Aplicando o Teorema dos Cossenos no triângulo VGA, temos:

$$\overline{VA}^2 = \overline{VG}^2 + \overline{AG}^2 - 2\overline{VG}.\overline{AG}.cos(\widehat{VGA})$$

$$l^2 = \left(\frac{l\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 2.\frac{l\sqrt{6}}{4}.\frac{l\sqrt{6}}{4}.cos(\widehat{VGA})$$
$$l^2 = \frac{6l^2}{16} + \frac{6l^2}{16} - 2\frac{6l^2}{16}.cos(\widehat{VGA})$$
$$l^2 = \frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{4}.cos(\widehat{VGA})$$
$$-\frac{3l^2}{4}.cos(\widehat{VGA}) = \frac{l^2}{4}$$
$$cos(\widehat{VGA}) = -\frac{1}{3}$$
$$\widehat{VGA} = arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$\widehat{VGA} \approx 109,47°$$

Outro resultado interessante sobre tetraedros regular é o seguinte:

Teorema 25. *As retas suportes de arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.*

Demonstração. Seja $VABC$ um tetraedro regular (Figura 45), vamos mostrar que as retas VA e CB são ortogonais. Seja M o ponto médio do segmento $\overline{CB}$, como o triângulo VBC é equilátero, então VM (reta suporte da altura) é perpendicular a CB. De forma análoga, AM também é perpendicular a CB. As retas VM e AM são concorrentes em M, portanto, definem o plano VMA. Como CB é perpendicular a duas retas concorrentes desse plano, então CB é perpendicular ao plano VMA, logo é ortogonal a qualquer reta deste plano, em particular, CB é ortogonal a VA. □

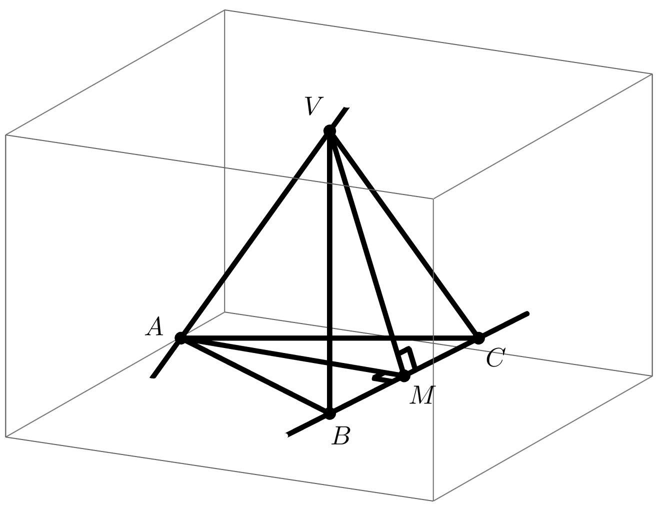


Figura 45 – As arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais

3.14 Construção de um octaedro regular

Um octaedro regular é um poliedro regular limitado por oito faces que são triângulos equiláteros congruentes. Para construí-lo vamos partir de três segmentos de mesma medida e, dois a dois, perpendiculares $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ que se cortam no ponto médio O de cada um deles (Figura 46(a)). Os segmentos definidos por esses seis pontos (exceto os que definem os segmentos originais) são todos iguais (pelo caso de congruência de triânguilo LAL) e são as arestas do octaedro regular (Figura 46(b)). Também podemos pensar o octaedro regular como duas pirâmides quadrangulares regulares congruentes em que as faces laterais são triângulos equiláteros e com as bases justapostas (na Figura 46(b) essas pirâmides são, por exemplo, $EADBC$ e $FADBC$).

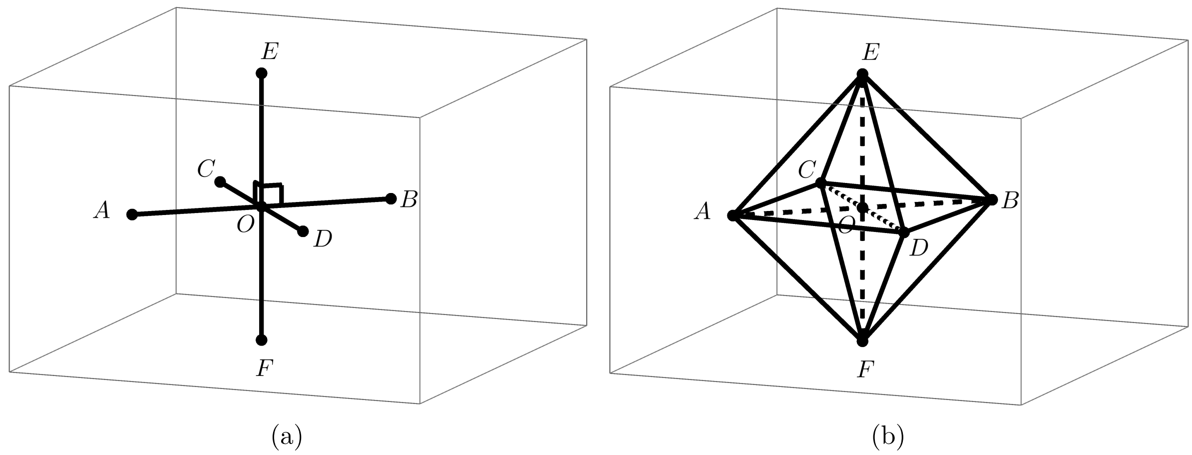


Figura 46 – Construção do Octaedro Regular

3.15 Construção de Euclides de um dodecaedro regular

Um dodecaedro regular é um poliedro limitado por doze faces pentagonais regulares e congruentes. Faremos aqui uma construção proposta por Euclides (Livro XIII, Proposição 17), para isso precisaremos dividir um segmento com a proporção áurea, para não fugirmos muito do assunto que mais nos interessa, faremos essa construção no Apêndice A. Os argumentos utilizados por Euclides são puramente descritivos, diferentemente da proposta original, realizaremos os cálculos utilizando a notação moderna que facilita a resolução de equações.

Faremos a construção de apenas uma face, já que para as outras o procedimento é análogo (Figura 47). Seja $ABCDEFGH$ um cubo, sobre as arestas marcaremos os pontos médios e sobre as faces marcaremos o centro. Sejam M, N e O, respectivamente, os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{BF}$ e $\overline{AE}$. Os pontos P e Q são, respectivamente, os centros das faces $ABFE$ e $ABCD$ (Figura 47(a)). Sobre os segmentos $\overline{PN}$, $\overline{PO}$ e $\overline{QM}$ (Figura 47(b)) marcaremos, respectivamente, os pontos R, S e T (Figura 47(c)) de forma que dividam os segmentos na proporção áurea $\left(\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RN}} = \dfrac{\overline{PN}}{\overline{PR}}; \dfrac{\overline{PS}}{\overline{SO}} = \dfrac{\overline{PO}}{\overline{PS}}; \dfrac{\overline{QT}}{\overline{TM}} = \dfrac{\overline{QM}}{\overline{QT}}\right)$.

Pelos pontos R, S e T subiremos um segmento perpendicular a suas respectivas faces, de modo que esses novos segmentos tenham a mesma medida que os segmentos $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ e $\overline{QT}$, chamaremos esses segmentos de $\overline{RU}$, $\overline{SV}$ e $\overline{TW}$ (Figura 47(d)). O pentágono $AUVBW$ é uma face do dedocaedro regular (Figura 47(e)).

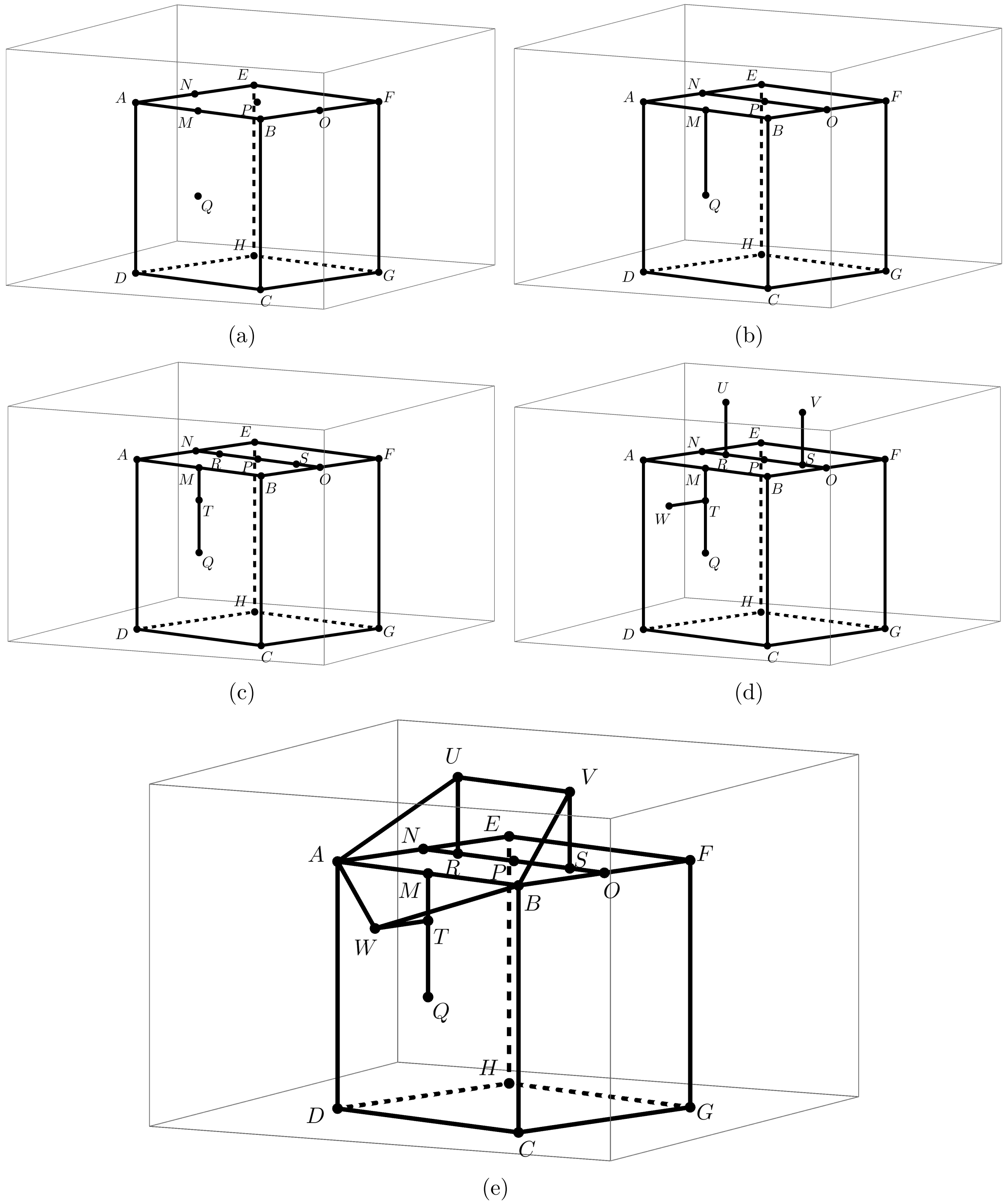


Figura 47 – Construção de um Dodecaedro Regular

De fato essa face é um pentágono regular, primeiramente, vamos mostrar que os cinco pontos estão em um mesmo plano. Por construção, a reta AB é paralela a reta NO que, por sua vez, é paralela a reta UV. Logo, AB é paralela a UV, que determinam um plano que contém o quadrilátero $AUVB$. Então, agora basta mostrar que W também pertence a esse plano.

Seja X o ponto do segmento $\overline{UV}$ tal que PX seja perpendicular a UV (Figura 48). Por construção, PX e TM são paralelos, portanto definem o plano $TMPX$, e MP pertence a esse plano. Como WT é paralelo a MP, então WT também pertence a esse plano. Logo, P, X, M, T e W são coplanares. Pela construção dos segmentos na proporção áurea, sabemos que $\frac{\overline{WT}}{\overline{MT}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PX}}$, além disso, os ângulos $\widehat{WTM}$ e $\widehat{MPX}$ são retos, logo os triângulos WMT e MPX são semelhantes (critério LAL de semelhança). Então, temos, $\widehat{MWT} = \widehat{XMP}$. Junto a isso, sabemos que o ângulo $\widehat{TMP}$ é reto, e temos a seguinte relação:

$$\widehat{XMP} + \widehat{TMP} + \widehat{TMW} = \widehat{MWT} + 90° + \widehat{TMW}.$$

Como $\widehat{MWT}$ e $\widehat{TMW}$ são os ângulos agudo do triângulo retângulo WTM, então $\widehat{MWT} + \widehat{TMW} = 90°$. Então,

$$\widehat{XMW} = 180°.$$

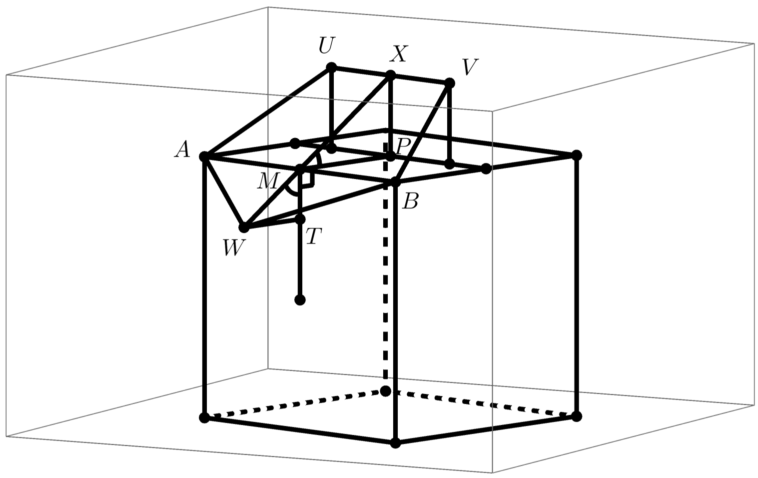


Figura 48 – Os pontos A, U, V, B e W são coplanares

Logo X, M e W são colineares, e como XM pertence ao plano do quadrilátero $AUVB$ (já que X pertence a UV e M pertence a AB), então W também pertence. Logo, os pontos A, U, V, B e W são coplanares.

Agora, vamos mostrar que seus lados tem a mesma medida. Notemos que na Figura 49 os triângulos ANR, BOS, BMT e AMT são congruentes entre si (LAL, $\overline{NR} = \overline{OS} = \overline{MT}$, $\widehat{N} = \widehat{O} = \widehat{M} = 90°$ e $\overline{AN} = \overline{BO} = \overline{BM} = \overline{AM}$), logo as hipotenusas desses triângulos são congruentes, $\overline{AR} = \overline{BS} = \overline{BT} = \overline{AT}$. Agora, os triângulos ARU, BSV, BTW, ATW também são congruentes entre si (LAL, $\overline{AR} = \overline{BS} = \overline{BT} = \overline{AT}$, $\widehat{R} = \widehat{S} = \widehat{T} = 90°$, $\overline{RU} = \overline{SV} = \overline{TW}$), portanto $\overline{AU} = \overline{BV} = \overline{BW} = \overline{AW}$. Basta mostrar agora que o segmento $\overline{UV}$ também é congruente a esses últimos quatro, para isso faremos alguns cálculos envolvendo o Teorema de Pitágoras e a proporção áurea $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

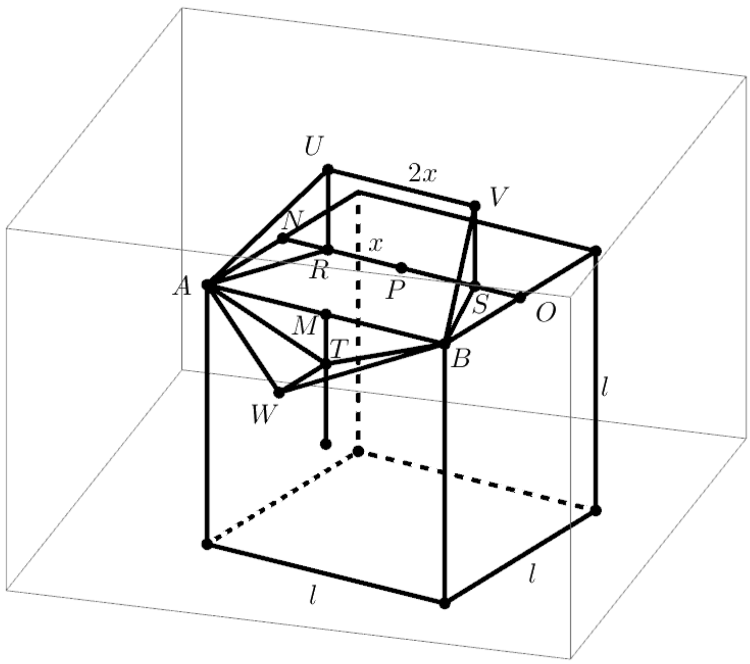


Figura 49 – O pentágono é equilátero

Chamaremos a medida da aresta do cubo de l e do segmento $\overline{PR} = \overline{UR}$ de x. Dessa forma, notemos que $\overline{UV} = 2x$. Pela construção:

$$\overline{PN} = \Phi\overline{PR}$$
$$\frac{l}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$
$$\overline{AN} = \frac{(1+\sqrt{5})x}{2}.$$

Também pela construção,

$$\overline{PR} = \Phi\overline{NR}$$

$$\overline{NR} = \frac{2x}{1+\sqrt{5}}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ANR,

$$\overline{AR}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{NR}^2$$
$$\overline{AR}^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2x^2}{4} + \frac{4x^2}{(1+\sqrt{5})^2}$$
$$\overline{AR}^2 = \frac{x^2[(1+\sqrt{5})^4+16]}{4(1+\sqrt{5})^2}$$
$$\overline{AR}^2 = \frac{x^2(72+24\sqrt{5})}{4(6+2\sqrt{5})}$$
$$\overline{AR}^2 = \frac{3x^2(3+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}$$
$$\overline{AR}^2 = 3x^2.$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ARU,

$$\overline{AU}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RU}^2$$
$$\overline{AU}^2 = 3x^2 + x^2$$
$$\overline{AU^2} = 4x^2$$
$$\overline{AU} = 2x.$$

Logo, $\overline{AU} = \overline{UV}$. Dessa forma, o pentágono $AUVBW$ é equilátero. Vamos mostrar, agora, que ele também é equiângulo. Para isso, mostraremos primeiramente que as diagonais do pentágono possuem a mesma medida.

Notemos que a diagonal $\overline{AB} = l = (1+\sqrt{5})x$ já que coincidente com a aresta do cubo. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ANS (Figura 50),

$$\overline{AS}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{NS}^2$$
$$\overline{AS}^2 = \left(\frac{(1+\sqrt{5})x}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}+x\right)^2$$
$$\overline{AS}^2 = \left(\frac{(1+\sqrt{5})x}{2}\right)^2 + \left(\frac{(3+\sqrt{5})x}{2}\right)^2$$
$$\overline{AS}^2 = (5+2\sqrt{5})x^2.$$

Agora, no triângulo ASV,

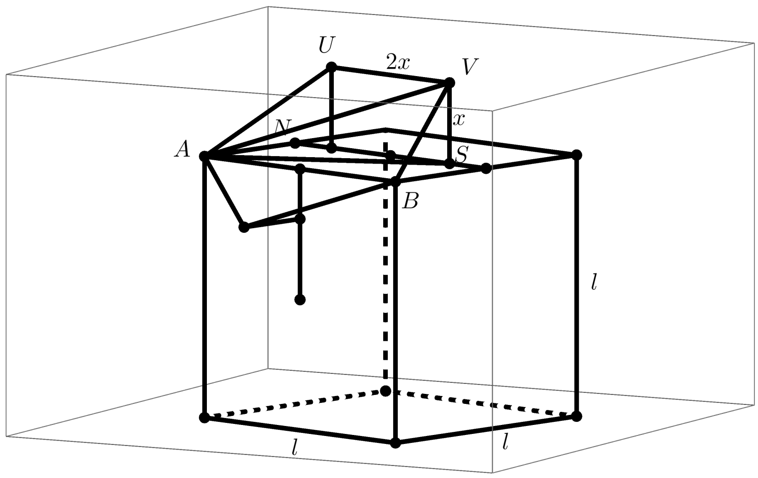


Figura 50 – $\overline{AV} = \overline{AB}$

$$\overline{AV}^2 = \overline{VS}^2 + \overline{AS}^2$$

$$\overline{AV}^2 = x^2 + (5 + 2\sqrt{5})x^2$$

$$\overline{AV}^2 = (1 + 2\sqrt{5} + 5)x^2$$

$$\overline{AV}^2 = (1 + \sqrt{5})^2 x^2$$

$$\overline{AV} = (1 + \sqrt{5})x$$

Ou seja, $\overline{AV} = \overline{AB}$. Analogamente, $\overline{BU} = \overline{AB}$.

Vamos mostrar que as diagonais $\overline{WU}$ e $\overline{WV}$ também possuem a mesma medida que as outras diagonais (Figura 51). Para isso, notemos que a reta WT corta perpendicularmente o plano do retângulo $RSVU$, digamos em um ponto P' (um pouco abaixo de P). Então, a medida do segmento $\overline{WP'}$ é o mesmo que $\overline{WT} + \overline{TP'} = x + \dfrac{l}{2} = \dfrac{(3+\sqrt{5})x}{2}$. Ainda no plano do retângulo $RSVU$, tomemos R' o ponto da reta UR tal que o segmento $\overline{P'R'}$ seja perpendicular a reta UR, dessa forma $R'P'PR$ é um retângulo e assim $\overline{R'P'} = \overline{PR} = x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $WP'R'$,

$$\overline{WR'}^2 = \overline{R'P'}^2 + \overline{WP'}$$

$$\overline{WR'}^2 = x^2 + \left(\frac{(3+\sqrt{5})x}{2}\right)^2$$

$$\overline{WR'}^2 = \frac{4x^2 + (14 + 6\sqrt{5})x^2}{4}$$

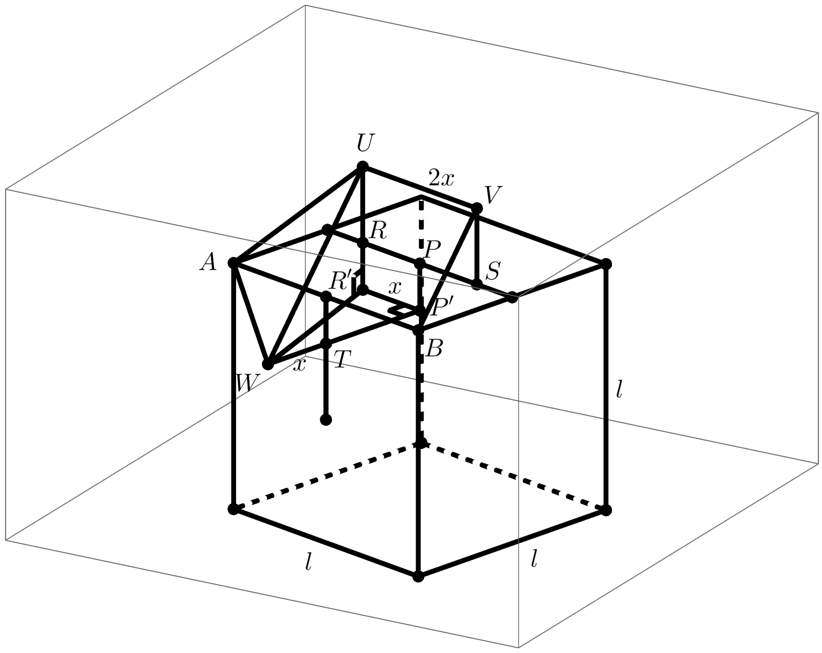


Figura 51 – $\overline{WU} = \overline{AB}$

$$\overline{WR'}^2 = \frac{(18+6\sqrt{5})x^2}{4}.$$

Agora, notemos que no triângulo $WR'U$, $\overline{UR'} = \dfrac{l}{2} = \dfrac{(1+\sqrt{5})x}{2}$. Então,

$$\overline{WU}^2 = \overline{WR'}^2 + \overline{UR'}^2$$
$$\overline{WU}^2 = \frac{(18+6\sqrt{5})x^2}{4} + \left(\frac{(1+\sqrt{5})x}{2}\right)^2$$
$$\overline{WU}^2 = \left(\frac{(24+8\sqrt{5})x^2}{4}\right)$$
$$\overline{WU}^2 = (6+2\sqrt{5})x^2$$
$$\overline{WU}^2 = (1+2\sqrt{5}+5)x^2$$
$$\overline{WU}^2 = (1+\sqrt{5})^2x^2$$
$$\overline{WU} = (1+\sqrt{5})x$$

Ou seja, $\overline{WU} = \overline{AB} = \overline{AV} = \overline{BU}$ e, analogamente, $\overline{WV}$ também é congruente as outras diagonais. Dessa forma, os triângulos AWB, WBV, BVU, VUA e UAW são todos congruentes entre si (critério de congruência LLL), portanto os ângulos internos do pentágono são todos congruentes, ou seja, o pentágono é equiângulo (Figura 52). Então, o pentágono $AUVBW$ é regular, como queríamos demonstrar. Notemos também que, para cada aresta do cubo podemos construir um pentágono regular (o pentágono acima foi construí do sobre a aresta AB), como o cubo possui doze arestas, podemos construir doze pentágonos regulares, formando o dodecaedro regular.

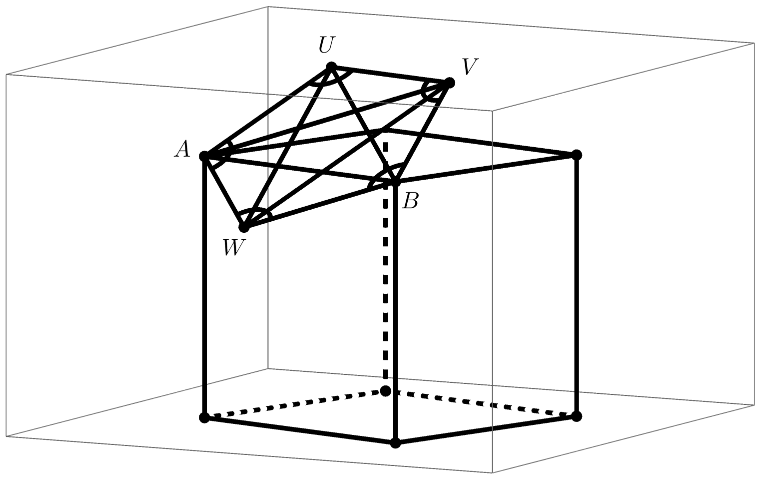


Figura 52 – O pentágono $AUVBW$ é equiângulo

3.16 Planos perpendiculares

Nesse trabalho já discutimos perpendicularismo entre duas retas e entre reta e plano. Agora, utilizaremos esses conceitos para entender o perpendicularismo entre planos.

Sejam dois planos secantes α, β e a interseção entre eles, a reta r. Tracemos um plano γ, perpendicular a r, que corta α e β em s e t, respectivamente (Figura 53). Se s e t forem perpendiculares, dizemos que os planos α e β são *perpendiculares*. Notemos que, o ângulo entre as retas s e t não depende da posição do plano γ, isto é, existe uma infinidade planos perpendiculares a r, e a escolha de um deles para γ não altera o ângulo entre s e t, já que todos os planos perpendiculares a r são paralelos entre si e, portanto, cortam α e β segundo retas, respectivamente, paralelas.

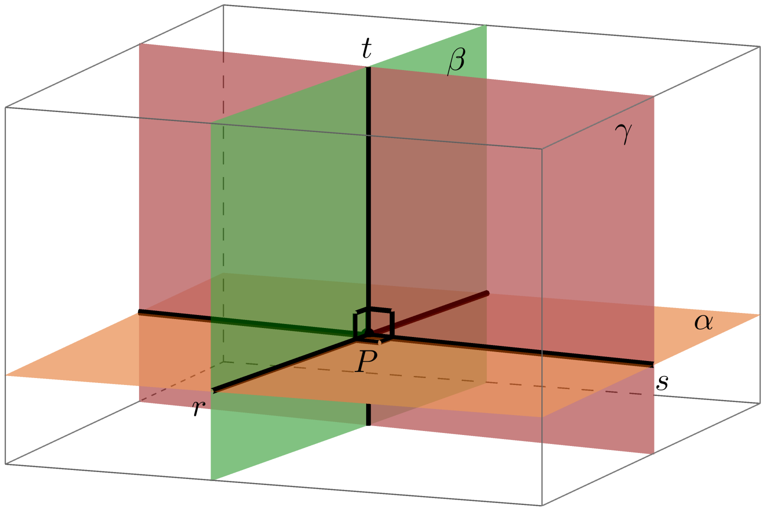


Figura 53 – Os planos α e β são perpendiculares

Para utilizar essa definição de forma mais prática concluiremos, a seguir, um critério para o perpendicularismo entre planos.

Teorema 26. *Dois planos α e β são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.*

Demonstração. Sejam α e β dois planos perpendiculares e r a reta de interseção entre eles. Então, por definição, existem as retas s e t perpendiculares, respectivamente, em α e β. Além disso, s e t são perpendiculares a r, isso significa que, s é uma reta de α que é perpendicular a r e t de β, e portanto, s é perpendicular a β (o mesmo ocorre com a reta t, que é perpendicular a s e r de α, e portanto é perpendicular ao plano α).

Agora, seja uma reta s de α perpendicular a β. O plano α corta β segundo a reta r, que é perpendicular a s. Seja P o ponto de interseção entre s e r. Por P tracemos a reta t, em β, perpendicular a r. O plano definido por s e t é perpendicular a r, já que contém duas retas perpendiculares a r. Como s é perpendicular a β e intersecta t, de β, então s e t são perpendiculares. Portanto, α e β são perpendiculares.

□

Notemos que nos prismas retos que construímos anteriormente, as faces laterais são perpendiculares aos planos da base, já que as arestas laterais são perpendiculares às bases. Nas pirâmides, os planos que contém a altura são sempre perpendiculares ao plano da base (já que a altura é perpendicular à base). Podemos encontrar diversos planos perpendiculares nos poliedros construídos até aqui e utilizando o teorema anterior fica fácil mostrar o perpendicularismo entre eles.

O teorema a seguir nos mostrará como encontrar retas perpendiculares a planos, a partir de planos perpendiculares.

Teorema 27. *Se um plano α é perpendicular a um plano β e a reta r de α é perpendicular à reta de interseção de α e β, então r é perpendicular a β.*

Demonstração. Seja r uma reta de α perpendicular à reta t que é a interseção de α com β (Figura 54). Pelo ponto de interseção de r e t tracemos a reta s de β, também perpendicular a t. O plano determinado por r e s é perpendicular a t. Como α e β são perpendiculares, então r e s também são. Assim, r é perpendicular a um par de retas s e t do plano β, logo, r é perpendicular a β. □

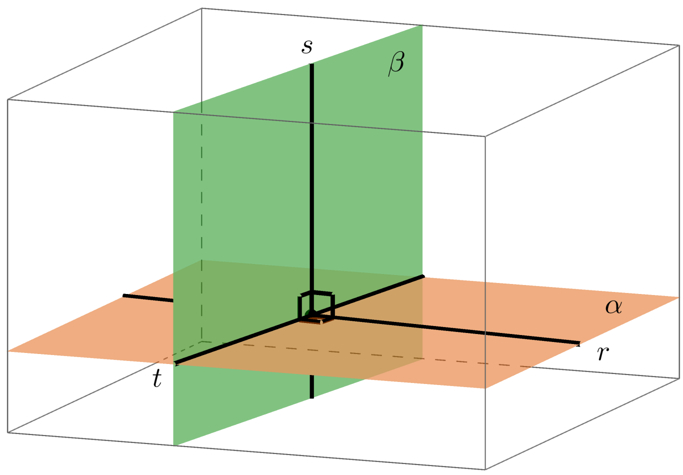


Figura 54 – Demonstração do Teorema 27

Como consequência do teorema acima, temos:

Teorema 28. *Se uma reta r e um plano α são ambos perpendiculares a um mesmo plano β, então r é paralela a α ou está contida em α.*

Demonstração. Se α é perpendicular a β, então existe uma reta s de α que é perpendicular a β. Pelo Teorema 19, r e s são paralelas. Agora, r é paralela a uma reta de α, então pelo Teorema 11, r é paralela a α ou está contida em α. □

Anteriormente, vimos que existe um único plano paralelo a outro plano passando por um ponto dado fora deste. Notemos que, para o perpendicularismo a situação muda. Dado um plano α e um ponto A fora de α, sabemos que por A existe uma única reta r perpendicular a α. Agora, existe uma infinidade de planos que contêm r, e todos estes são perpendiculares a α (Figura 55).

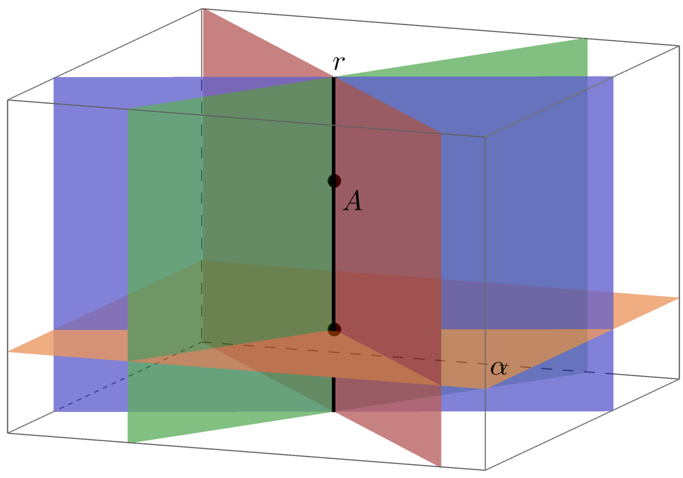
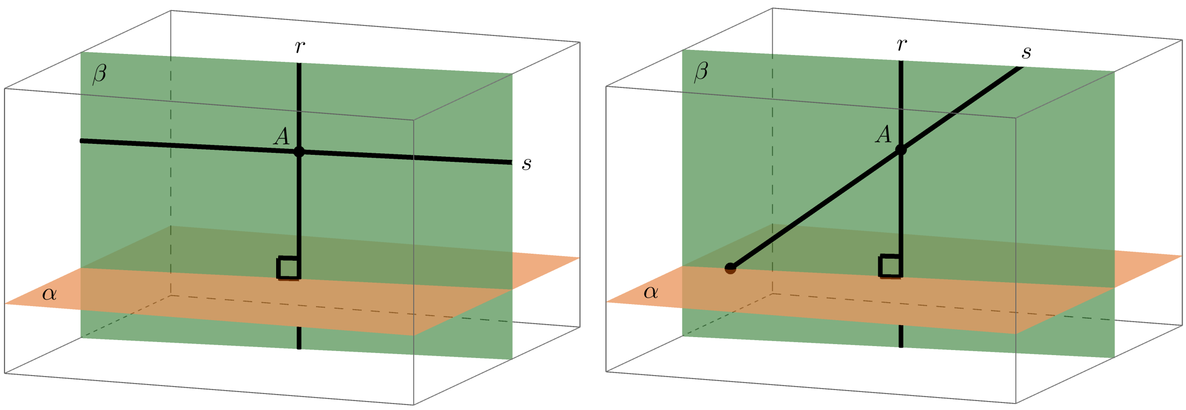


Figura 55 – Planos perpendiculares a α passando por A

Mas, se trocarmos o ponto A por uma reta s não perpendicular ao plano α dado, a existência do plano perpendicular passa a ser única, como mostraremos no tereoma a seguir.

Teorema 29. *Por uma reta não perpendicular a um plano passa um único plano perpendicular a este plano.*



(a) s paralela a α (b) s concorrente a α

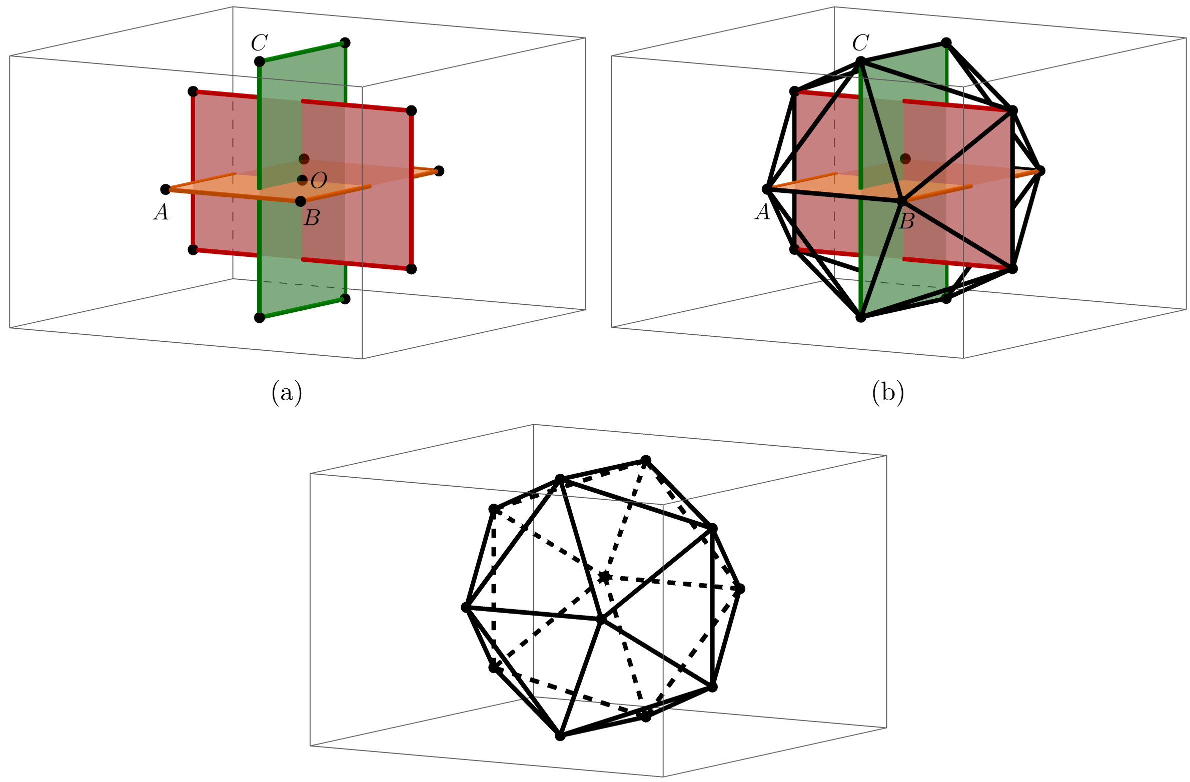
Figura 56 – Plano perpendicular a α passando por s não perpendicular a α

Demonstração. Sejam α um plano e s uma reta não perpendicular a α (Figura 56). Por um ponto A de s, tracemos a reta r perpendicular ao plano α, r e s são concorrentes já que compartilham um ponto e são distintas, dessa forma definem o plano β, que é perpendicular a α por conter a reta r perpendicular a α. Agora, vamos mostrar que esse plano é único. Suponhamos que exista outro plano β' que também passa por s e é perpendicular a α.

Pelo Tereoma 28, o plano β' contém r (não podem ser paralelos pois β' contém o ponto A de r). Mas s e r definem um único plano, ou seja, o plano β é único. $\square$

3.17 Construção de Luca Pacioli de um icosaedro regular

Faremos agora a construção de um icosaedro regular (Figura 57), concluindo assim as construções dos cinco Poliedros Regulares [1]. Essa construção foi proposta por Luca Pacioli, em seu livro *De Divina Proportine* (1509), para isso, utilizaremos o conceito de perpendicularismo entre planos. Partiremos de três retângulos áureos (Apêndice B), dois a dois perpendiculares, compartilhando o mesmo centro O e dispostos como na Figura 57(a). Os 12 vértices definem 20 triângulos equiláteros que são as faces do icosaedro regular (Figura 57(b)), como mostraremos a seguir.



(a) (b)

(c)

Figura 57 – Construção do Icosaedro regular de Luca Pacioli

Para mostrar que os triângulos mencionados anteriormente são equiláteros utilizaremos o Teorema de Pitágoras (Figura 58). Para isso, notemos que, pelo Teorema 22, os ângulos $\widehat{CFE}$ e $\widehat{CEA}$ são retos. Suponhamos então que o segmento $\overline{AB} = x$ e, portanto, $\overline{BD} = \dfrac{(1+\sqrt{5})x}{2}$. Por construção, $\overline{CF} = \dfrac{(1+\sqrt{5})x}{4}$ e $\overline{EF} = \overline{EO} - \overline{FO} =$

[1] A demonstração da existência de apenas cinco poliedros regulares foge do objetivo do trabalho, mas pode ser encontrada em (LIMA et al., 2006a) nas páginas 266 e 267

$\dfrac{(1+\sqrt{5})x}{4} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{(-1+\sqrt{5})x}{4}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CFE, temos:

$$\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{EF}^2$$
$$\overline{CE}^2 = \left(\frac{(1+\sqrt{5})x}{4}\right)^2 + \left(\frac{(-1+\sqrt{5})x}{4}\right)^2$$
$$\overline{CE}^2 = \frac{12x^2}{16}$$
$$\overline{CE} = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

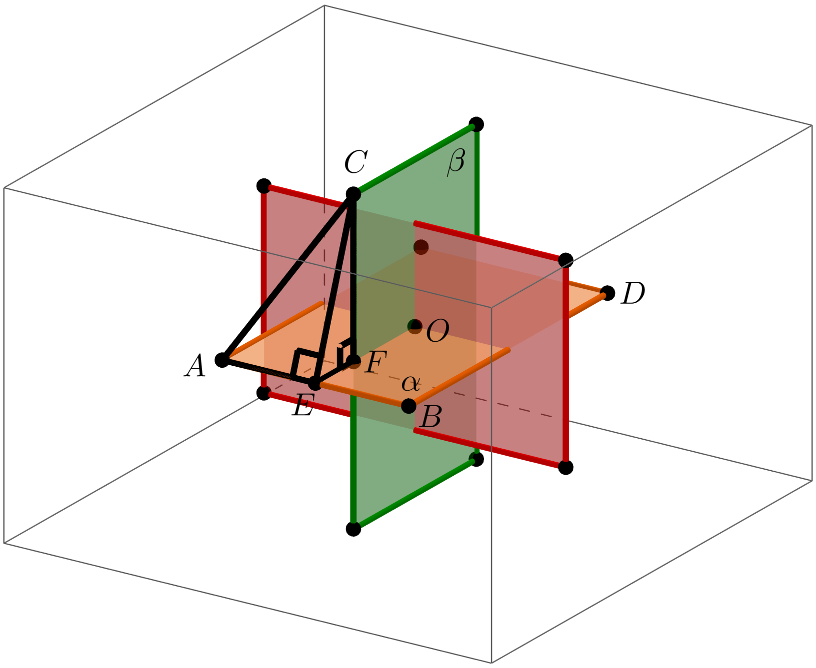


Figura 58 – As faces do icosaedro são triângulos equiláteros

Agora, no triângulo CEA, temos:

$$\overline{CA}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EA}^2$$
$$\overline{CA}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$\overline{CA}^2 = \frac{3x^2}{4} + \frac{x^2}{4}$$
$$\overline{CA}^2 = x^2$$
$$\overline{CA} = x.$$

De forma análoga, podemos mostrar que todos os segmentos que definem as arestas do icosaedro medem o mesmo que $\overline{AB}$, logo as 20 faces são triângulos equiláteros.

Além disso, em cada vértice concorrem 5 arestas. Portanto, o poliedro é, de fato, um icosaedro regular.

3.18 Projeções ortogonais

Utilizando o conceito de perpendicularismo entre reta e plano podemos definir o que é a *projeção ortogonal* de um ponto sobre um plano.

Definição 19. *Dado um plano α e um ponto P do espaço, o ponto Q em que a reta perpendicular a α traçada por P corta o plano α é chamado de projeção ortogonal de P sobre α (Figura 59). Nesse caso, o plano α é chamado de plano de projeção.*

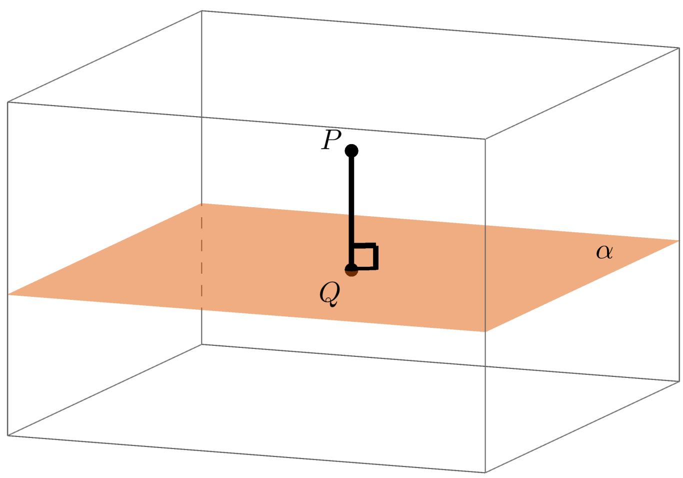


Figura 59 – O ponto Q é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α

Como veremos apenas as projeções ortogonais, simplificaremos a nomenclatura para *projeção*. Então, no exemplo da Figura 59, Q é a projeção de P sobre α.

Podemos expandir o conceito de projeção de ponto para outros objetos, como por exemplo, a reta.

Definição 20. *A projeção da reta r sobre o plano α é o conjunto dos pontos de α que são projeções dos pontos da reta r (Figura 60).*

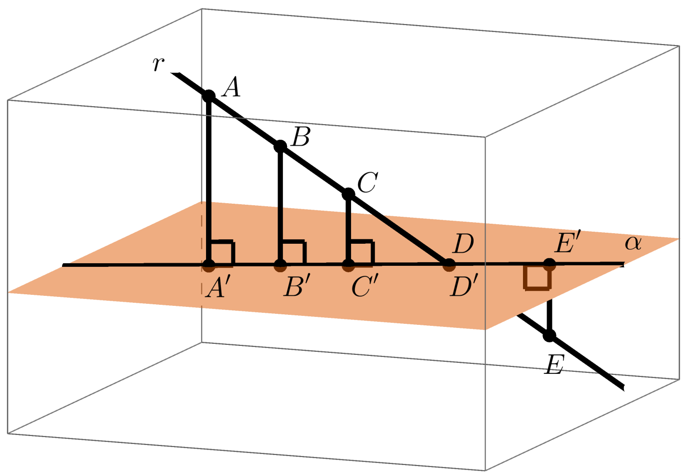


Figura 60 – Projeção ortogonal da reta r sobre o plano α

Teorema 30. *Se r é uma reta não perpendicular a α, então sua projeção ortogonal sobre α é uma reta.*

Demonstração. Sejam P_1 e P_2 dois pontos da reta r com projeção Q_1 e Q_2, respectivamente, sobre o plano α. Por construção, as retas P_1Q_1 e P_2Q_2 são perpendiculares ao plano α, portanto são paralelas entre si, definindo assim o plano β (Figura 61). Os planos α e β são perpendiculares, pelo Teorema 26, cuja interseção é a reta Q_1Q_2.

Como os pontos P_1 e P_2 pertencem a β, então r também pertence a β. Digamos que qualquer ponto P_i de r tenha sua projeção Q_i sobre α. A reta P_iQ_i é perpendicular a α (por construção), então, pelo Teorema 28, ou P_iQ_i é paralela a β ou está contida em β, mas P_i é um ponto de β, portanto, P_iQ_i pertence a β. Dessa forma, Q_i é um ponto de α e β, então, pertence a reta Q_1Q_2. Logo, todos os pontos de r possuem suas projeções sobre a reta Q_1Q_2, ou seja, Q_1Q_2 é a projeção de r sobre α.

□

Para o caso particular, do teorema anterior, em que a reta r é paralela ao plano de projeção α, r também será paralela a sua projeção. Podemos notar que, na demonstração, r é coplanar com sua projeção e, nesse caso, como r não corta o plano α, também não intersecta sua projeção, ou seja, r é paralela a sua projeção. Com um raciocínio análogo ao do Teorema anterior também podemos concluir que a projeção ortogonal de um segmento, não perpendicular ao plano de projeção, é um segmento. Além disso, a projeção de um segmento, paralelo ao plano de projeção, é congruente ao segmento dado. Deste fato, podemos concluir o último teorema desse trabalho.

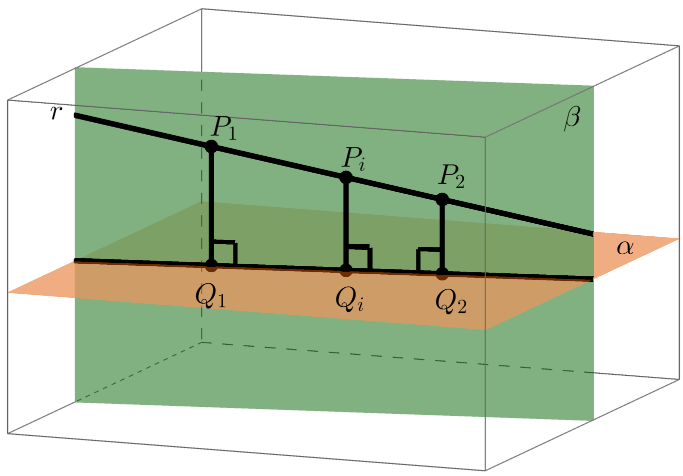


Figura 61 – Demonstração do Teorema 30

Teorema 31. *Se α e β são planos paralelos e ABC é um triângulo contido em β, então a projeção ortogonal de ABC sobre α é um triângulo $A'B'C'$, congruente a ABC*

Demonstração. Do resultado apresentado no comentário acima, temos que $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$, $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ e $\overline{C'A'} \equiv \overline{CA}$. Pelo critério de congruência de triângulo LLL, temos que ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$. □

3.19 Fluxograma

Finalizamos esse capítulo apresentado um fluxograma (Figura 62) que organiza graficamente as relações entre os conceitos da Geometria Espacial que abordamos. Este esquema indica quais postulados e definições são necessárias para concluir outros conceitos e construções, começando com os cinco postulados apresentados na Seção 3.1.

Notemos que, por exemplo, para estudarmos sobre *Paralelismo entre reta e plano* precisamos dos *Cinco Postulados* e do conceito de *Paralelismo entre retas*. Para a construção de todos os poliedros são necessários os conceitos de congruência (*Postulado de Congruência*). Já para a *Posição relativa entre três planos* utilizamos os *Cinco Postulados* e todos os tópicos sobre paralelismo (*Paralelismo entre retas; entre reta e plano; entre planos*).

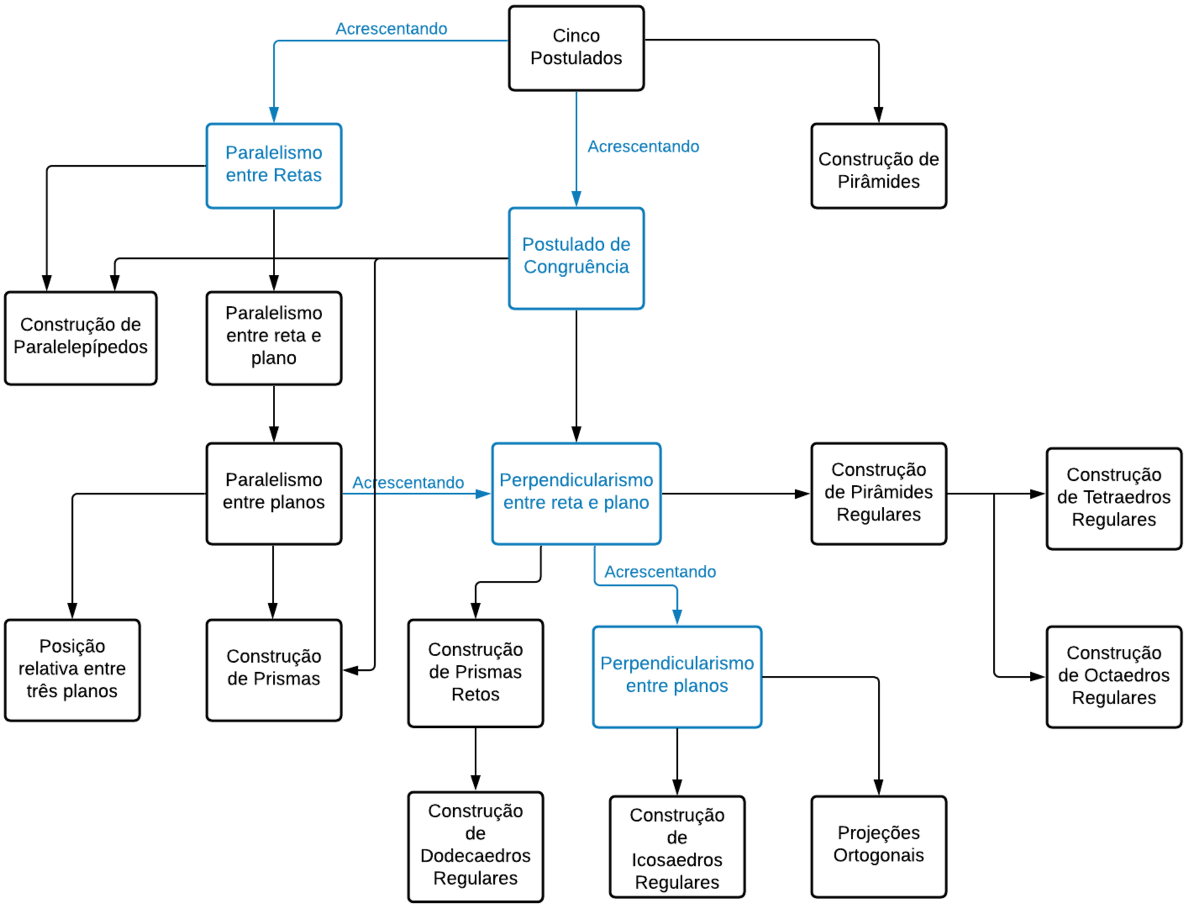


Figura 62 – Fluxograma da Geometria Espacial

4 Atividades para o ensino de geometria espacial

A transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial pode gerar confusões, principalmente quando as figuras geométricas são analisadas apenas no papel. Na Geometria Plana os desenhos feitos no plano do papel ou na lousa são fiéis à realidade e um bom desenho é crucial para o entendimento dessa geometria, porém os desenhos da Geometria Espacial precisam ser analisados em perspectiva e se o aluno não possui familiaridade com esses novos objetos, pode tornar o entendimento complicado.

Pensando nisso, nesse capítulo apresentaremos algumas atividades para o ensino de Geometria Espacial de posição utilizando material concreto e digital. Os materiais manuais permitem que os alunos possam, literalmente, mexer com a Geometria Espacial, dessa forma, criando uma familiaridade real com os objetos. Os programas de geometria dinâmica também podem auxiliar nesse processo de aprendizagem, mas entendemos que utilizar apenas os *softwares* pode não garantir toda a experiência necessária para o entendimento do conteúdo. Diante disso, acreditamos que o melhor caminho para o entendimento da Geometria Espacial seja primeiro com material concreto, depois com os *softwares* de geometria dinâmica, para que depois os alunos consigam entender apenas com desenhos em um papel.

Apresentaremos tais práticas pedagógicas de forma sequencial quanto ao conteúdo, porém sabemos que muitas vezes os professores não possuem tempo para aplicar atividades lúdicas ou diferentes do comum, devido a grande quantidade de conteúdo do currículo de matemática. Mostraremos cinco opções de atividades que o professor pode escolher quais delas se adequadam mais a realidade de cada turma, podendo aplicar apenas uma das atividades ou todas elas. Lembramos ainda que essas práticas são apenas sugestões e que podem (e devem) ser modificadas de acordo com os objetivos do professor.

4.1 Atividade 1 - Jogo da Velha 3D

Público alvo: Ensino Fundamental II e Médio.

Previsão de tempo: 1 aula (50 minutos).

Pré-requisitos: Não há.

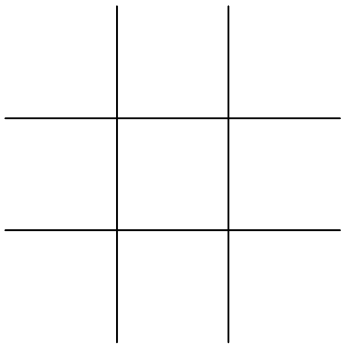
Objetivos:

- Introduzir os conceitos primitivos da Geometria Espacial: ponto, reta, plano e espaço;

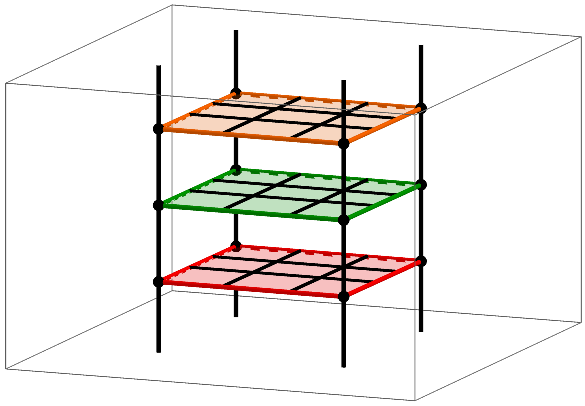
- Introduzir algumas posições relativas entre o entes primitivos;

Construção do Jogo da Velha 3D:

O jogo da velha tradicional possui seu tabuleiro em um plano, e nove quadras para serem preenchidos com X ou O. O jogo da velha 3D utiliza-se de um tabuleiro tridimensional, representando o espaço que tanto falamos na Geometria Espacial, formado por três "planos paralelos", iguais ao tabuleiro tradicional, com 27 regiões (Figura 63).



(a) Jogo da velha tradicional



(b) Jogo da velha 3D

Figura 63 – Jogo da velha tradicional x Jogo da velha 3D

Para construir o jogo da Figura 64(a) utilizamos:

- 3 placas de papelão quadrado 10×10 cm;
- 4 palitos de churrasco 12 cm;
- cola;
- 28 marcadores de papel de duas cores (14 de cada cor), como por exemplo, na Figura 64(a), utilizamos verde e laranja.

Desenhamos o tabuleiro tradicional em cada um dos três planos, furamos os quatros cantos de cada quadrado para colocar os suportes e fixamos com a cola. Nos marcadores escrever X e O para diferenciá-los ainda mais.

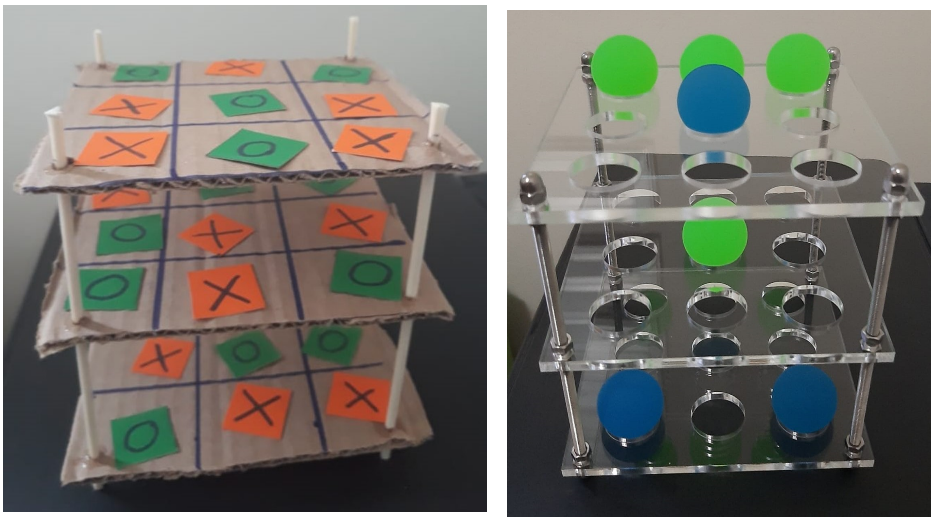
Para construir o jogo da Figura 64(b) utilizamos:

- 3 placas de acrílico furadas a laser como molde (Figura 65) com 5mm de espessura[1];
- 4 barras roscadas com 5 mm de espessura e 15 cm de comprimento;

[1] Esse material pode ser encontrado em empresas especializadas em corte de placas que, normalmente, trabalham com diversos materiais, como, acrílico, metal e madeira.

- 16 porcas de 5 mm;
- 8 porcas calota de 5 mm;
- 28 bolinhas plásticas de duas cores com 27 mm de diâmetro (14 de cada cor);

Encaixamos as barras roscadas nos furos pequenos e prendemos com as porcas. Nas extremidades das barras colocamos as porcas calota.



(a) Papelão, palitos de churrasco e marcadores de papel

(b) Acrílico, barra roscada e bolinhas como marcadores

Figura 64 – Duas opções para a construção do Jogo da Velha 3D

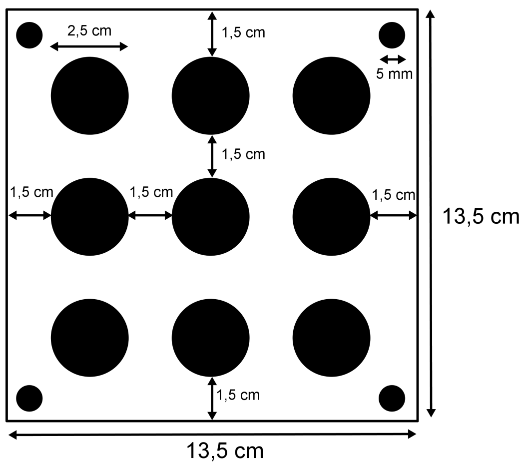


Figura 65 – Molde das placas da acrílico do tabuleiro da Figura 64(b)

Como jogar:

Existem duas maneiras de jogar. Para a primeira maneira, as regras são as mesmas do jogo da velha tradicional, cada jogador escolhe um dos marcadores e jogam alternadamente. O primeiro coloca um de seus marcadores em uma das 27 regiões, o segundo coloca um de seus marcadores nas 26 regiões restantes e assim sucessivamente. Ganha o primeiro jogador que alinhar (na horizontal, vertical ou qualquer diagonal) três marcadores. A segunda maneira **não** termina quando um dos jogadores conseguir um alinhamento de 3 marcadores, mas sim até que todos as regiões sejam preenchidos. Cada alinhamento de três marcadores iguais vale **um** ponto. Ganha o jogador que fizer mais pontos, ou seja, o jogador com mais sequências de três de seus marcadores alinhados.

Proposta:

Divida a sala em grupos de 2 a 4 alunos e distribua um Jogo da Velha 3D para cada grupo. Oriente os alunos quanto as regras do jogo e permita que eles brinquem das duas maneiras, testem as possibilidades de sequências, espontaneamente eles formularão estratégias e até conjecturas. O tempo para os alunos jogarem deve ser entre 20 e 30 minutos, quando estarão familiarizado com os objetos manipulados. Após esse tempo de atividade introduza os conceitos primitivos da Geometria Espacial associando aos elementos do jogo: os pontos são representados pelos marcadores, as retas pelos alinhamentos dos marcadores e os planos que são as placas do tabuleiro. Se estiver utilizando o jogo em acrílico recomendamos que a análise do alinhamento de três marcadores seja feita com uma vareta (se possível, de cores diferentes para marcadores diferentes), como na Figura 66.

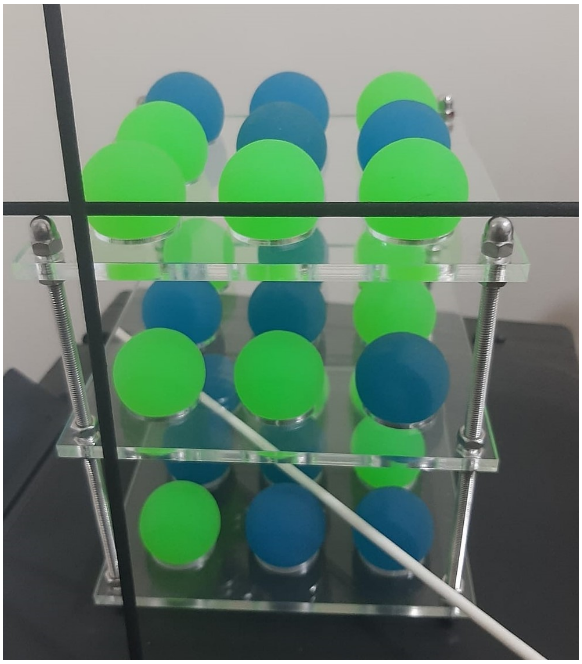


Figura 66 – Análise dos alinhamentos dos marcadores.

Discuta a importância de considerar esses elementos como conceitos primitivos, ou seja, tais objetos não possuem definição mas são caracterizados a partir dos postulados da Geometria Espacial. Apresente os sete postulados, do Anexo F, explicando que essas afirmações são as regras da Geometria Espacial, tais regras são escolhidas de forma a serem o mais intuitivas possível sem se contradizerem e que não são necessárias demonstrações para validá-las. Existem muitos postulados para o Geometria Espacial, já que ela é a expansão da Geometria Plana, mas nesse momento se preocupe apenas com os específicos da Geometria Espacial. Além dos postulados, no resumo do Anexo F, possuí as primeiras conclusões apresente-as e discuta essas proposições com o auxílio do jogo.

Conforme o ritmo da turma pode-se introduzir algumas posições relativas entre retas indicadas também no resumo do Anexo F.

4.2 Atividade 2 - Posições relativas com material concreto

Utilizaremos um material concreto para estudar, de forma prática e mais aprofundada do que a atividade anterior, as posições relativas entre retas, retas e planos e entre planos.

Público alvo: Ensino Médio.

Previsão de tempo: 1 aula dupla (100 minutos).

Pré-requisito:

- Noções básicas de Geometria Espacial: pontos, retas, planos e espaço.

Objetivo:

- Compreender as diversas posições relativas entre os entes primitivos da Geometria Espacial.

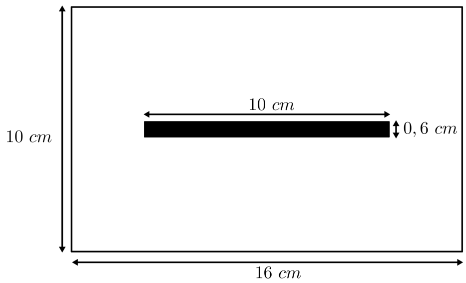
Construção do material concreto:

Para construir o material das Figuras 68, 69, 70 e 71 utilizamos:

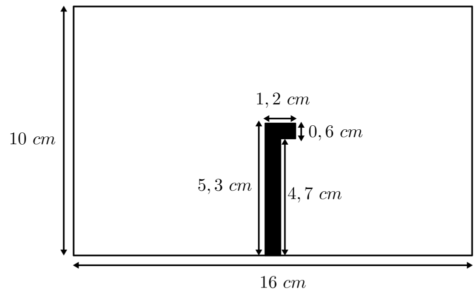
- 3 placas de MDF 16×10 cm, com 6 mm de espessura cortadas a laser conforme o molde da Figura 67;[2]
- palitos de churrasco ou varetas.

Com os cortes conseguiremos trabalhar todas as posições relativas, até mesmo encaixar os três planos perpendicularmente. Na marcenaria esse tipo de encaixe é conhecido como *Encaixe Japonês*. As placas de MDF 16x10 cm são aproximadamente retângulos áureos que possibilitam a construção de um icosaedro regular (Figura 71).

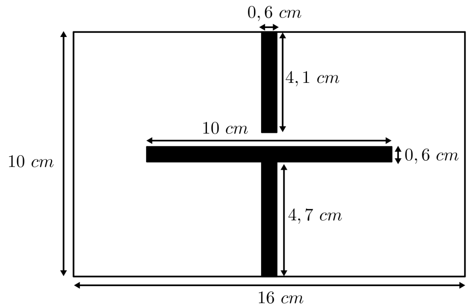
[2] Esse material pode ser encontrado em empresas especializadas em corte de placas que, normalmente, trabalham com diversos materiais como, acrílico, metal e madeira.



(a) Placa 1

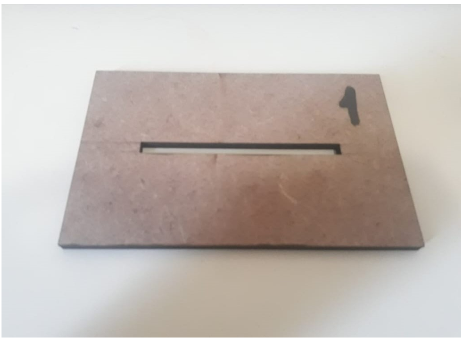


(b) Placa 2



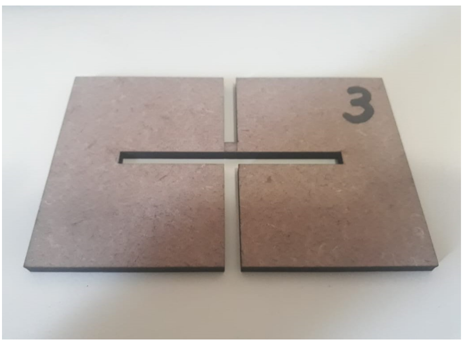
(c) Placa 3

Figura 67 – Modelo dos cortes nas três placas de MDF



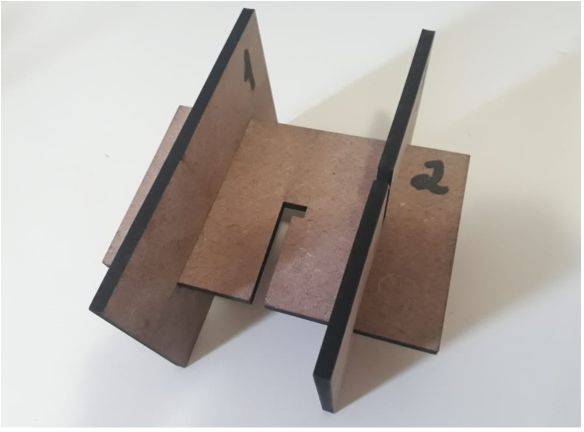
(a) Placa 1

(b) Placa 2

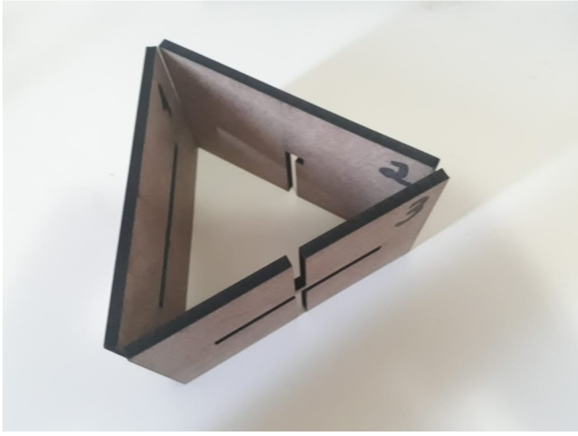


(c) Placa 3

Figura 68 – As três placas de MDF

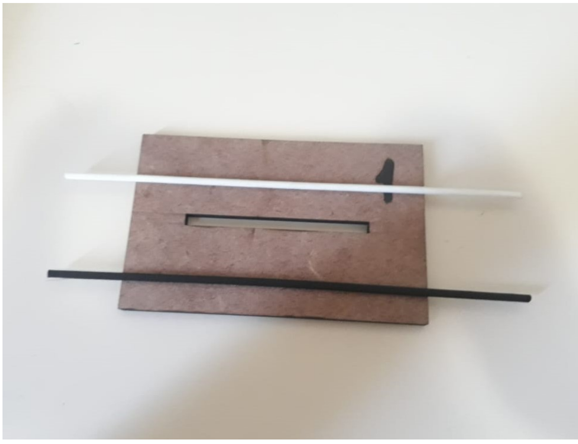


(a) Um plano secante a dois planos paralelos

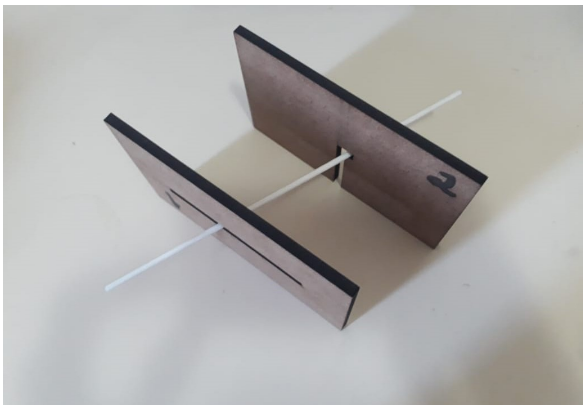


(b) Três planos secantes, dois a dois, segundo uma reta

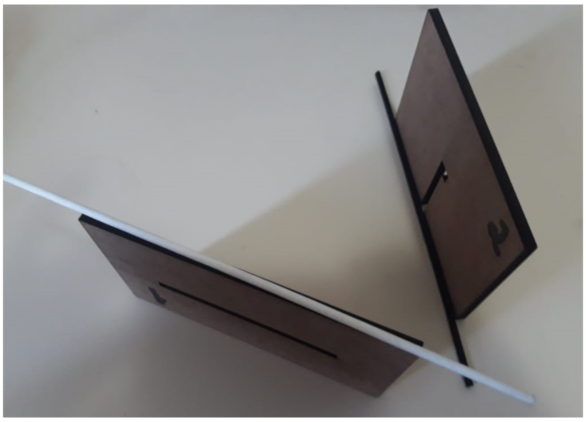
(c) Três planos secante segundo uma mesma reta



(d) Duas retas paralelas determinam um plano



(e) Uma reta secante a dois planos paralelos



(f) Duas retas reversas

Figura 69 – Alguns exemplos de posições relativas com o material concreto

Proposta:

Divida a sala em grupos de 2 a 4 alunos e distribua um conjunto de placas e alguns palitos de churrasco (ou varetas) para cada grupo, e uma cópia do Anexo A para cada aluno. Realize os exercícios com os alunos, orientando-os quanto a definição de cada posição relativa e, se necessário, como realizar a construção com as placas. Nesse momento os alunos estarão "experimentando" a Geometria Espacial e realizando conclusões teóricas.

No **exercício 1**, os alunos devem realizar construções com o material concreto sobre as definições e fazer a relação com a teoria, escrevendo a definição e desenhando a posição geométrica.

Já o **exercício 2**, os alunos serão estimulados a criar contra-exemplos a respeito de afirmações que consideram falsas ou a formular argumentos para a veracidade destas.

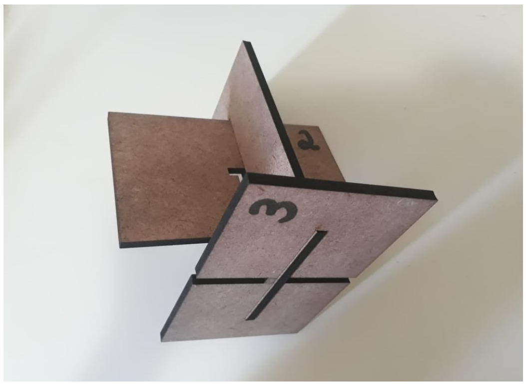
Finalmente, no **exercício 3**, deverão pensar nas possíveis posições relativas entre três planos, oriente-os pedindo para que pensem primeiramente nas posições relativas entre dois planos e peça para inserirem o terceiro plano nessas posições de diversas maneiras, formando assim posições relativas entre três planos.

Na Figura 69 estão algumas posições relativas entre planos e entre retas e planos, com o material concreto.

Para representar três planos perpendiculares cuja interseção deles é um ponto siga o passo a passo da (Figura 70). Complementando essa construção, como as três placas são aproximações de retângulos áureos, esse encaixe nos permite visualizar um icosaedro regular quando ligamos os vértices das placas, como vimos na construção do icosaedro regular da Seção 3.17.

Esse resultado pode ser mais explorado com os alunos. Podemos utilizar, por exemplo, uma régua para medir as distâncias entre os vértices e concluir a congruência dos segmentos que são os lados dos trângulos ou ainda propor os cálculos realizados na Seção 3.17 que possui como pré-requisitos apenas o Teorema de Pitágoras e a noção básica de razão áurea, exposta nos Apêndices A e B.

(a) Primeiro passo: encaixe a Placa 1 com a Placa 2 dessa maneira



(b) Segundo passo: enxaixe a Placa 3 na Placa 1

(c) Terceiro passo: continue o encaixe da Placa 3 e finalize a montagem

Figura 70 – Três planos perpendiculares cuja interseção dos três planos é um ponto

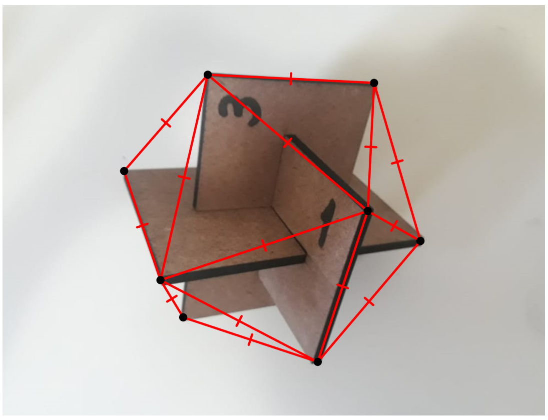


Figura 71 – Icosaedro Regular com o material concreto

4.3 Atividade 3 - Posições relativas no tetraedro regular inscrito em um cubo

A vivência de construir o material concreto é um momento muito rico para o aprendizado do aluno, visando isso, nessa atividade construíremos um tetraedro regular inscrito em um cubo utilizando palito de churrasco e aplicaremos os conceitos da Geometria Espacial de Posição.

Público alvo: Ensino Médio.

Previsão de tempo: 1 aula dupla (100 minutos).

Pré-requisito:

- Conceitos de Geometria Espacial de Posição abordados na atividade anterior.

Objetivo:

- Vivenciar a construção de representações concretas de objetos matemáticos;
- Exercitar os conceitos de Geometria Espacial de Posição.

Construção do Tetraedro Regular inscrito em um Cubo: Primeiramente, vamos analisar brevemente o modelo matemático (Figura 72) do objeto que construiremos. Notemos que o tetraedro regular é formado pelas diagonais das faces do cubo.

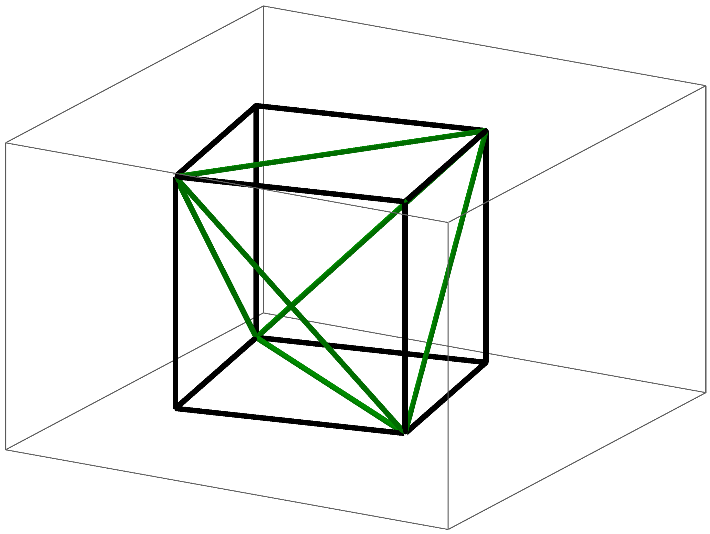


Figura 72 – Tetraedro Regular inscrito em um Cubo

Para a construção utilizamos:

- 18 palitos de churrasco com 25 cm;
- Caneta de lousa;
- Pistola de cola quente;

- 1 bastão de cola quente.

Os palitos serão as arestas dos nossos poliedros, como vimos anteriormente, as diagonais do cubo serão as arestas do tetraedro. Então, o primeiro passo é ajustar os tamanhos dos palitos. Seis palitos (arestas do tetraedro) continuarão com 25 cm. Pensando que para calcular a diagonal de um quadrado podemos utilizar a fórmula $d = l\sqrt{2}$, para encontrar a medida da aresta do cubo basta dividir 25 cm por $\sqrt{2}$, chegando em, aproximadamente, $17,8$ cm. Então, os outros 12 palitos (arestas do cubo) deverão ser cortado com $17,8$ cm. Para melhorar a visualização, pintamos os palitos maiores com uma caneta verde de quadro branco, ficando como na Figura 73.

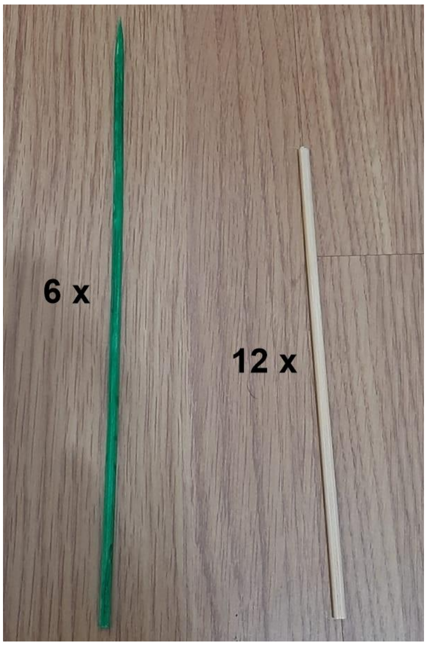


Figura 73 – Palitos

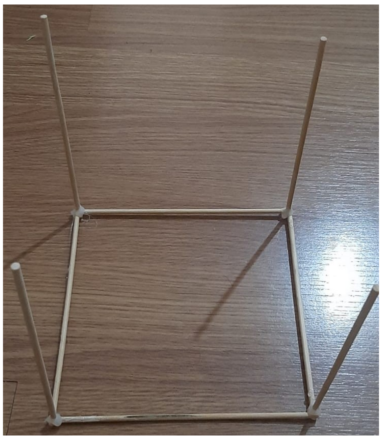
Começamos pelo cubo. Com oito dos palitos menores, utilizamos a cola quente para fazer dois quadrados (Figura 74(a)). Nos vértices de um dos quadrado colamos os quatro palitos menores restantes (Figura 74(b)). Para finalizar o cubo, colamos o segundo quadrado por cima dos palitos colados anteriormente (Figura 74(c)). Agora, com o cubo construído, colamos os palitos maiores. Começamos colando três palitos nas diagonais de três faces formando um triângulo equilátero no interior do cubo (Figura 74(d)). Com os outros três palitos restantes, completamos o tetraedro regular (Figura 74(e)).

Proposta:

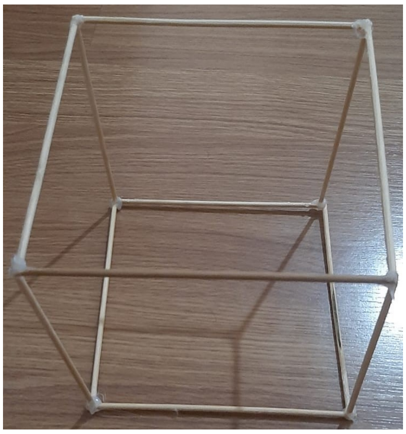
Essa atividade será dividida em duas partes: a primeira será destinada a construção do material concreto e a segunda para realização de exercícios de fixação.

Primeiramente, divida a sala em grupos de 4 a 5 alunos e distribua o material necessário para a construção do material. Mostre o passo-a-passo da construção para

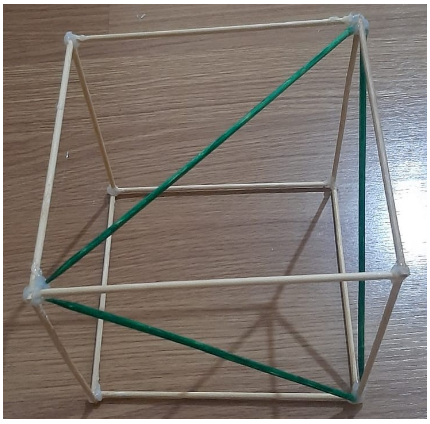
(a) Primeiro passo



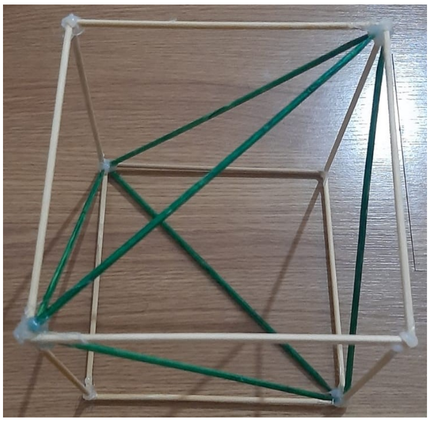
(b) Segundo passo



(c) Terceiro passo



(d) Quarto passo



(e) Quinto passo

Figura 74 – Construção do Tetraedro Regular Inscrito no Cubo

que os alunos construam o objeto. Durante a construção do cubo os alunos não devem ter grandes dificuldades, porém a construção do tetraedro inscrito pode gerar dúvidas então, para guiá-los, tenha consigo um Tetraedro Regular inscrito no Cubo já pronto. Essa primeira etapa deve demorar entre 60 e 70 minutos.

Para a segunda etapa, distribua uma cópia do Anexo B e peça para que os grupos resolvam os exercícios. É importante que os alunos tenham um tempo para debater as questões entre eles, dúvidas surgirão e o professor deve atuar com mediador do debate. Programe-se para deixar de 10 a 15 minutos no final da aula para a correção dos exercícios.

Entender que em todo tetraedro regular podemos circunscrever um cubo da maneira que foi trabalhado nessa atividade pode ajudar o aluno em conceitos futuros na Geometria Espacial, por exemplo: calcular o volume de um tetraedro regular ou calcular a distância entre as arestas reversas. Mas não entraremos em maiores detalhes aqui pois tais resultados não se adequam ao tema da atividade.

4.4 Atividade 4 - Projeções ortogonais

Veremos aqui uma alternativa de material concreto para trabalhar o conceito de projeção ortogonal.

Público alvo: Ensino médio.

Previsão de tempo: 20 minutos.

Pré-requisito:

- Perpendicularismo no espaço.

Objetivo:

- Compreender o conceito de projeção ortogonal.

Construção do material:

Precisaremos dos seguintes materiais:

- garrafa pet 500 ml com um furo na tampa;
- água.

Encha a garrafa com água e tampe-a.

Proposta:

A atividade consiste em observar projeções ortogonais com a água. Ao virar a garrafa de água, mantendo-a verticalmente com a tampa para baixo e movimentá-la, a água tende a cair perpendicularmente ao chão, o rastro de água é uma aproximação da projeção ortogonal do caminho realizado pela tampa da garrafa. A realização de algumas projeções ortogonais pode auxiliar os alunos em um momento posterior, quando for necessário imaginar a projeção ortogonal nos exercícios da lista da Atividade 6 (Anexo G).

Para realizar a atividade, encaminhe os alunos para um local plano que possa ser molhado. Cada aluno pode levar a própria garrafa ou divida a turma em grupos de 2 a 3 alunos por garrafa. Sugira algumas curvas para eles analisarem as suas projeções, como por exemplo: um segmento de reta, uma circunferência, uma espiral ou qualquer outra curva. É bom enfatizar que todas essas projeções criadas com o rastro de água são apenas aproximações e que servem para se ter uma ideia do que acontece com as projeções ortogonais.

Após esse momento mais descontraído é interessante sugerir questões sobre projeções ortogonais para que os alunos utilizem a vivência da atividade prática para resolver os problemas. A lista de exercícios da Atividade 6 (Anexo G) possui 5 exercícios (do 16 ao 20) sobre projeções ortogonais.

(a) Garrafa com água e com a tampa furada

(b) Garrafa virada para baixo

(c) Aproximação da projeção ortogonal de um segmento

Figura 75 – Atividade 4

4.5 Atividade 5 - Tetraedro regular e a molécula de metano

Nessa atividade utilizaremos o *GeoGebra 3D*, para visualizar a geometria de uma molécula de metano (CH_4) e calcular o ângulo entre as ligações dos atómos de carbono e hidrogênio.

Público alvo: Ensino Médio.

Duração: 1 aula dupla (100 minutos).

Pré-requisitos:

- Prática com manipulações algébricas;
- Teorema de Pitágoras e Teorema dos Cossenos;
- Noções básicas da circunferência trigonométrica;
- Posição relativa entre retas.

Objetivos:

- Explorar a geometria do tetraedro regular;
- Calcular o ângulo entre duas alturas do tetraedro regular.

Proposta:

Peça para que os alunos acessem o link <https://www.geogebra.org/m/xqmqk36n>, eles serão direcionados ao local onde estudarão o tetraedro regular motivado pela molécula de metano CH_4.

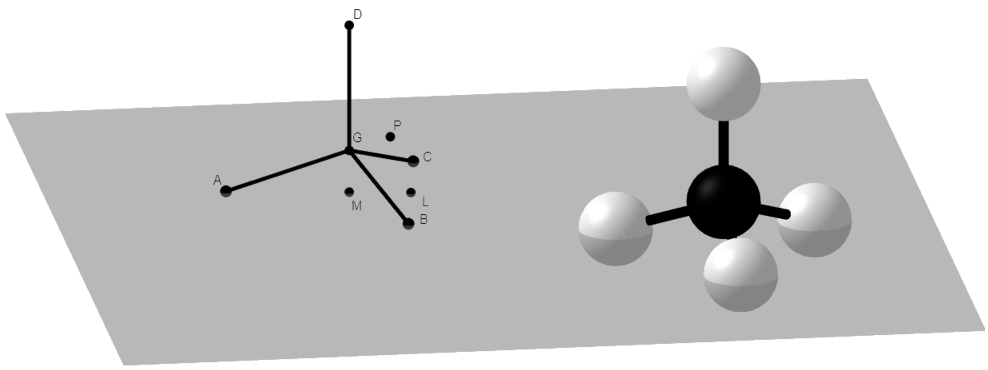


Figura 76 – Geometria da molécula de metano

Com a imagem 3D do *GeoGebra* aberta, siga as instruções do Anexo D e ao final da atividade o ângulo entre as ligações dos átomos de carbono e hidrogênio estará calculado.

Todos os cálculos realizados nessa atividade estão explicados detalhadamente na Seção 3.13 e resumidamente no anexo E.

4.6 Atividade 6 - Resumo e lista de exercícios

Essa atividade é um resumo (Anexo F) e uma lista de exercícios (Anexo G), que podem ser utilizadas para avaliação, tarefa de casa, estudo complementar ou como o professor considerar mais adequado.

Público alvo: Ensino médio.

Previsão de tempo: Depende de como será utilizada.

Objetivo:

- Praticar os conceitos de Geometria Espacial de posição com foco em exercícios de vestibulares, ENEM e olimpíadas.

O Anexo H é a resolução simplificada e não formal da lista de exercícios, as demonstrações rigorosas foram realizadas no Capítulo 3.

4.7 Relato de aplicação

Como dissemos na introdução desse capítulo, as atividades aqui propostas devem ser adaptadas a realidade de cada professor, escola e turma. Então, para finalizar o capítulo segue um relato do autor do trabalho sobre a aplicação dessas práticas em suas aulas.

No momento em que escrevo esse relato estamos vivendo uma crise sanitária causada pela COVID-19, em que não é possível a realização de práticas que envolvem troca de material concreto. A aplicação que vou relatar a seguir foi realizada em fevereiro de 2020, poucas semanas antes das suspensões das aulas presenciais. A pandemia impossibilitou outras aplicações que eu relataria nesse trabalho.

As atividades foram aplicadas para cerca de 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular do interior do estado de São Paulo. O material adotado pela escola é apostilado e disponibiliza apenas duas aulas para o desenvolvimento da Geometria Espacial de Posição. Então, como o tempo era curto adaptei as Atividades 1, 2, 4 e 6.

Comecei a aula distribuindo uma cópia do Resumo (Anexo F) da Atividade 6 (Resumo e lista de exercício) para que eles acompanhassem os principais conceitos que discutiríamos na aula. Para introduzir os conceitos primitivos, os postulados e os primeiros resultados utilizei o Jogo da Velha 3D da Atividade 1, mas ao invés de disponilizar tempo para os alunos jogarem entre si, convidei dois alunos para jogarem contra mim enquanto os outros assistiam, apenas para que eles visualizassem os objetos que iríamos estudar.

Após esse momento introdutório, dividi a turma em grupos e distribuí uma cópia do Anexo A e um conjunto do material concreto da Atividade 2 (Posição relativa com material concreto). Como os alunos estavam com o resumo em mãos e, portanto, possuíam as definições de cada posição relativa, para o exercício 1 pedi para que cada grupo falasse algumas definições e mostrassem-nas com o material concreto, e na lousa eu realizava o desenho para que eles copiassem. Para o exercício 2, disponibilizei 20 minutos para que eles discutissem os itens entre os integrantes do grupo e enquanto isso passei pelos grupos orientando-os. O exercício 3 não foi realizado em sala, pedi para que os alunos pesquisassem em casa as posições relativas entre três planos distintos e fizessem as anotações no espaço indicado.

Para finalizar a aula discuti o conceitos de projeção ortogonal utilizando a definição do resumo (Anexo F) e a Atividade 4 (Projeções ortogonais), mas ao invés de cada grupo ou cada aluno utilizar a própria garrafa, utilizei apenas uma garrafa e *discutimos juntos quais seriam as projeções ortogonais de alguns caminhos como: reta, círculo, espiral, entre outros.*

Para avaliação dos conceitos dessa aula, disponilizei a lista de exercícios (Anexo G) para que eles praticassem em casa e realizei uma pequena prova com os exercícios da lista duas semanas após a aula.

A aplicação das atividades foi significativa em relação a interação dos alunos, principalmente, no momento que eles estavam manipulando o material concreto. Comparando com outra aula expositiva, sobre o mesmo assunto que eu já ministrei, notei que o uso do material concreto motiva a participação dos alunos. Notei também que essas estratégias ajudaram a inserir os alunos com mais dificuldade na aula. Alguns pediram para jogar o Jogo da Velha 3D durante o intervalo e recebi uma devolutiva positiva pedindo por mais aulas nesse formato.

5 Considerações Finais

Com o propósito de elaborar práticas pedagógicas para aulas de Geometria Espacial de Posição, com o uso de material concreto e digital, realizamos uma construção teórica da Geometria Espacial com uma releitura de (CARVALHO, 1999). Para incrementar essa parte teórica, falamos resumidamente sobre a história da geometria e sobre proposições básicas da Geometria Plana, que são tomadas como base para a Geometria Espacial.

Vimos que a Geometria Euclidiana é baseada em um sistema de axiomas, e que a partir deles e dos conceitos primitivos, nos permitem obter resultados sobre os entes geométricos. Com esses resultados construímos pirâmides, prismas e todos os poliedros regulares. Acreditamos que conhecer a construção formal e rigorosa da Geometria Espacial pode auxiliar professores e estudante de graduação a criar alternativas que ajudam no planejamento de aula.

Preparamos, então, atividades que utilizam material concreto, digital e teórico explorando a metodologia ativa. Em tais atividades (com exceção da última) os alunos são motivados a "brincar" com os materiais concretos e com eles desenvolver a Geometria Espacial. É natural que com essas atividades apareçam questionamentos, conjecturas que podem ser vistas com a utilização do material, mas é papel do professor instigar a necessidade de argumentos teóricos e formais para uma possível demonstração, ou obtenção de um contraexemplo. Neste sentido, a teoria desenvolvida neste trabalho é completa e suficiente para demonstrar essas possíveis conjecturas.

Concluímos esse trabalho esperando que as aulas de Geometria Espacial se tornem mais ricas e interessantes.

Referências

AARTS, J.; ERNE, R. Plane geometry. In: *Plane and Solid Geometry*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 1–36. Nenhuma citação no texto.

______. Solid geometry. In: *Plane and Solid Geometry*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 1–77. Nenhuma citação no texto.

AMARO, D. T. Geometrias e isometrias: dos postulados de hilbert ao plano hiperbólico. [sn], 2014. Citado na página 24.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. [S.l.]: SBM, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 22.

BICUDO, I. et al. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009. Citado na página 17.

BRASIL. Base nacional comum curricular. *Ministério da Educação. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Último acesso: 03/03/2020*, 2018. Citado na página 14.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à geometria espacial*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 14, 29 e 102.

CASTRUCCI, B. *Fundamentos da geometria: estudo axiomático do plano euclidiano*. [S.l.]: LTC, 1978. Nenhuma citação no texto.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 1995. Citado na página 17.

GARBI, G. G. *A rainha das ciências*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006. Nenhuma citação no texto.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. [S.l.]: Macmillan, 1993. Citado na página 19.

HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and beyond*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Nenhuma citação no texto.

HILBERT, D. *The foundations of geometry*. [S.l.]: Open court publishing Company, 1902. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A matemática do ensino médio, vol. 2. *Coleção do Professor de Matemática, SBM*, 2006. Citado na página 79.

______. A matemática do ensino médio, vol. 3. *Coleção do Professor de Matemática, SBM*, 2006. Nenhuma citação no texto.

MANFIO, F. Fundamentos da geometria. *São Paulo: ICMC-USP. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/manfio/GeoAxiomatica.pdf Último acesso: 19/02/2020*, v. 12, 2010. Nenhuma citação no texto.

STILLWELL, J. Mathematics and its history. *The Australian Mathem. Soc*, v. 168, 2002. Nenhuma citação no texto.

WAGNER, E. O jogo da velha em 3d. *Revista do Professor de Matemática*, v. 87, 2015. Nenhuma citação no texto.

Apêndices

APÊNDICE A – Construção de um segmento áureo

Sejam o segmento $\overline{AB}$ e um ponto P entre A e B. Dizemos que P divide o segmento $\overline{AB}$ na proporção áurea se, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \Phi$ que é a proporção áurea (nesse caso $\overline{AP}$ é maior do que $\overline{PB}$). Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \\
\Phi &= \frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{AP}} \\
\Phi &= 1 + \frac{1}{\Phi} \\
\Phi^2 &= \Phi + 1 \\
\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} &\text{ ou } \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Como Φ é um valor positivo, então $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Faremos agora a construção geométrica dessa porporção, ou seja, dado um segmento de reta $\overline{AB}$ vamos encontrar onde deve estar o ponto P afim de que satisfaça a definição dada anteriormente.

Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta (Figura 77(a)). Traçaremos as circunferências de centro em A e raio $\overline{AB}$ e de centro B e raio $\overline{AB}$, com o segmento definido pelas interseções das circunferência, encontramos o ponto médio, M, do segmento $\overline{AB}$ (Figura 77(b)). Por B, traçaremos a circunferência de raio $\overline{BM}$, ainda por B desenhamos a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, essa reta intersecta a circunferência em dois pontos, um deles chamemos de C (Figura 77(c). Ligando os ponto A e C, formamos o triângulo retângulo ABC. Por C tracemos a circunferência de raio $\overline{CB}$, essa circunferência intersecta o lado $\overline{AC}$ no ponto D (Figura 77(d)). Finalmente, por A tracemos a circunferência de raio $\overline{AD}$, essa circunferência intersecta o lado $\overline{AB}$ no ponto P. Esse ponto P divide o segmento $\overline{AB}$ na proporção áurea (Figura 77(e)).

Essa construção é válida pela seguinte argumentação:

Vamos considerar que a medida do segmento $\overline{AB}$ é 1. Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, implica que $\overline{BC} = \dfrac{1}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC temos,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

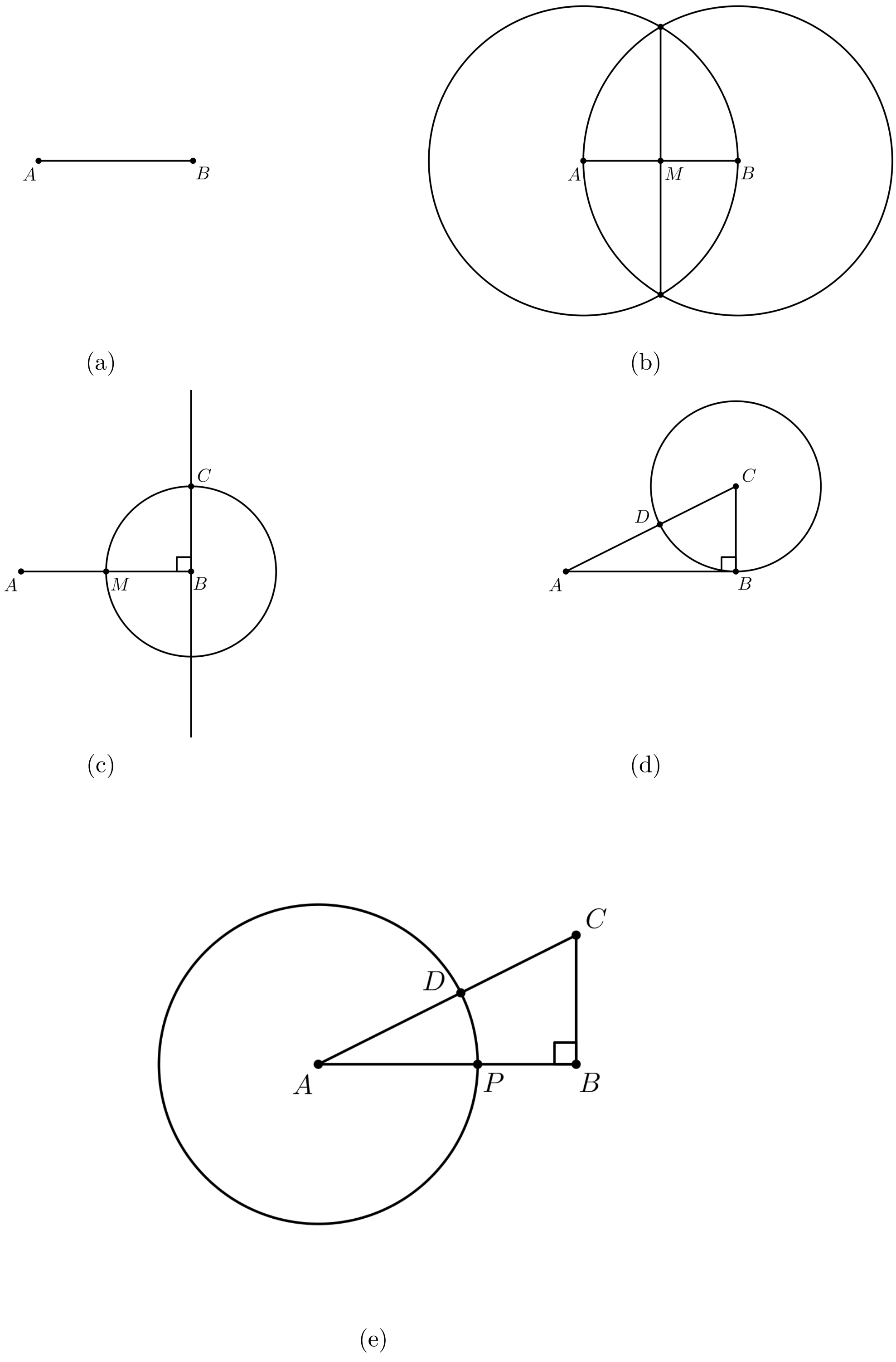


Figura 77 – Construção do segmento áureo

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Agora, por construção, $\overline{CD} = \dfrac{1}{2}$. Logo, $\overline{AD} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \overline{AP}$. Então, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Além disso,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Ou seja, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \Phi$. Finalizando assim a construção de um segmento dividido na proporção áurea.

APÊNDICE B – Construção de um retângulo áureo

Um retângulo é dito áureo quando a razão entre as medidas do lado maior e do menor é igual a razão áurea, ou seja, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vamos construir um retângulo áureo a partir do quadrado $ABCD$ (Figura 78(a)). Seja P o ponto médio do lado $\overline{AB}$, esse ponto define com o vértice C o segmento $\overline{CP}$ (Figura 78(b)). Em P traçaremos a circunferência de raio $\overline{CP}$, e prolongando o segmento $\overline{AB}$, um dos pontos de interseção da reta com a circunferência chamaremos de E (Figura 78(c)). Por E, traçaremos a reta perpendicular a reta AB e prolongaremos o segmento $\overline{CD}$, a interseção dessas duas retas chamaremos de F (Figura 78(d)). O retângulo $AEFD$ é o retângulo áureo que queríamos construir (Figura 78(e)).

Mostraremos a seguir que o retângulo assim construído é um retângulo áureo, para isso temos que mostrar que $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$. Para facilitar os cálculos, denotaremos $\overline{AE} = x$ e $\overline{EF} = y$, e como consequência da construção temos: $\overline{CB} = y$, $\overline{PB} = \dfrac{y}{2}$, $\overline{BE} = x - y$ e portanto $\overline{PE} = x - \dfrac{y}{2} = \overline{CP}$ (Figura 79). Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo PBC, temos:

$$
\begin{gathered}
\overline{CP}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 \\
\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 \\
x^2 - xy + \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{4} + y^2 \\
x^2 - xy - y^2 = 0 \\
\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0 \\
\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{gathered}
$$

Mostrando assim que $AEFD$ é um retângulo áureo.

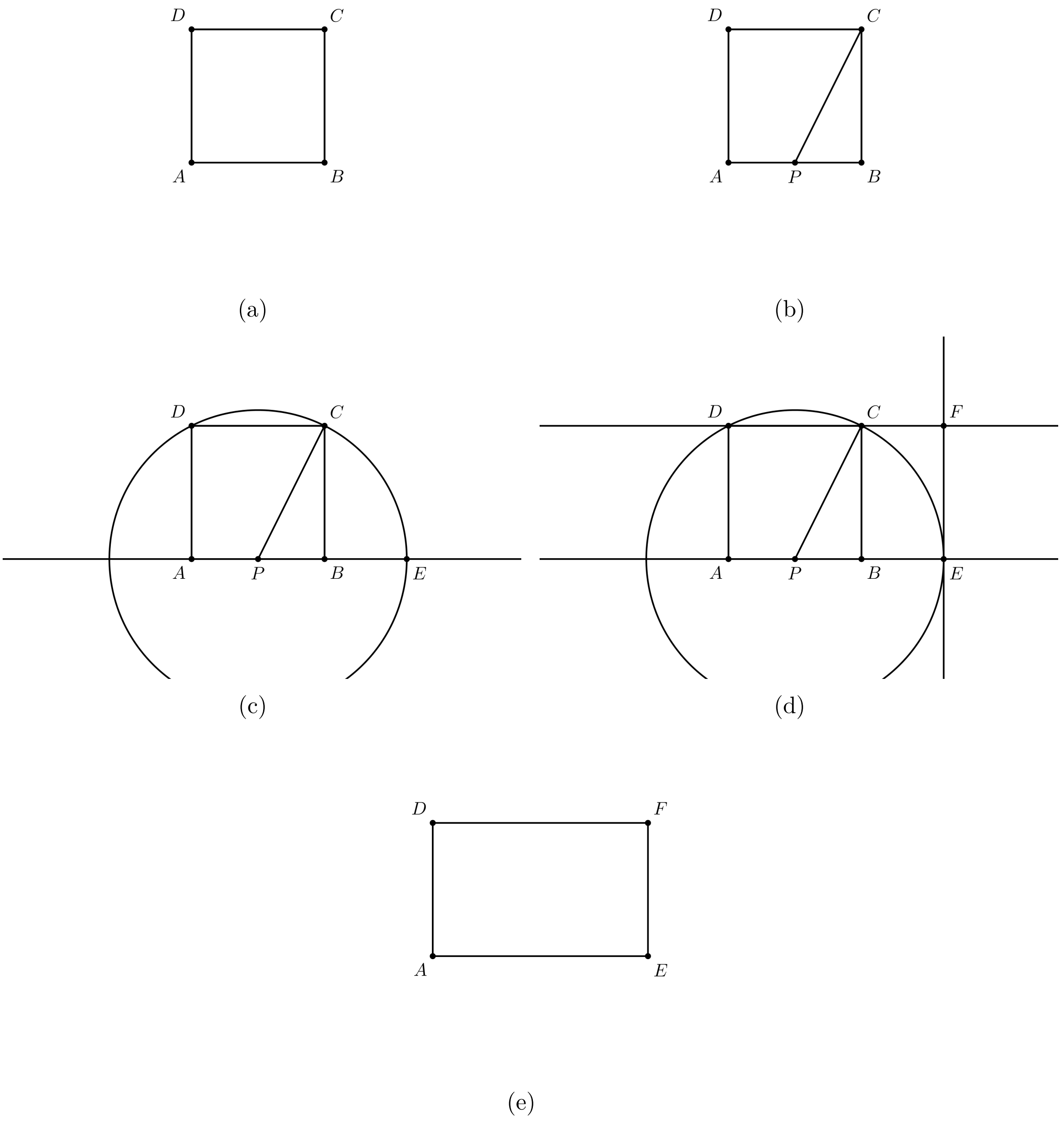


Figura 78 – Construção do retângulo áureo

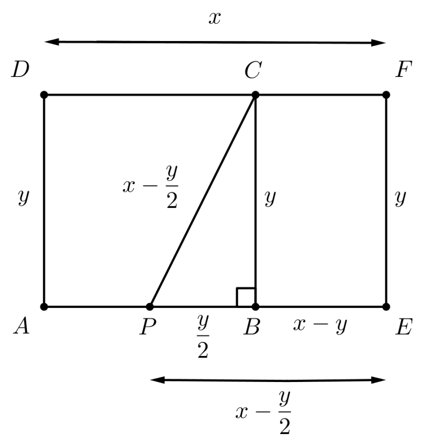


Figura 79 – O retângulo $AEFD$ é áureo

Anexos

ANEXO A – Atividade 2 - Posições relativas com material concreto

Posições Relativas

Exercício 1: Com o auxílio do material concreto, construa as posições relativas e complete a tabela com a definição e um desenho.

Definição:	**Desenho:**
Retas coincidentes:	*Retas coincidentes:*
Retas concorrentes:	*Retas concorrentes:*
Retas paralelas:	*Retas paralelas:*
Retas reversas:	*Retas reversas:*

Definição:

Reta contida no plano:

Reta secante ao plano:

Reta paralela ao plano:

Planos coincidentes:

Planos concorrentes:

Desenho:

Reta contida no plano:

Reta secante ao plano:

Reta paralela ao plano:

Planos coincidentes:

Planos concorrentes:

Definição:	**Desenho:**
Planos paralelos:	*Planos paralelos:*
Planos perpendiculares:	*Planos perpendiculares:*

Exercício 2: Agora, ainda com o auxílio do material concreto, construa, se possível, as situações descritas abaixo, e escreva se é ou não possível.

a) *Uma reta paralela a dois planos concorrentes:*

b) *Duas retas reversas contidas no mesmo plano:*

c) *Um plano secante a duas retas paralelas:*

d) *Três planos, dois a dois, perpendiculares entre si:*

e) *Três planos, dois a dois, concorrentes segundo uma reta:*

f) *Dois planos perpendiculares a uma mesma reta que não sejam paralelos:*

g) *Duas retas perpendiculares a um mesmo plano:*

h) *Uma reta e um plano perpendiculares a um mesmo plano:*

Exercício 3: Existem cinco posições relativas entre três planos distintos, construa-as com o material concreto, faça um desenho e descreva a posição relativa.

a) Primeira:

b) Segunda:

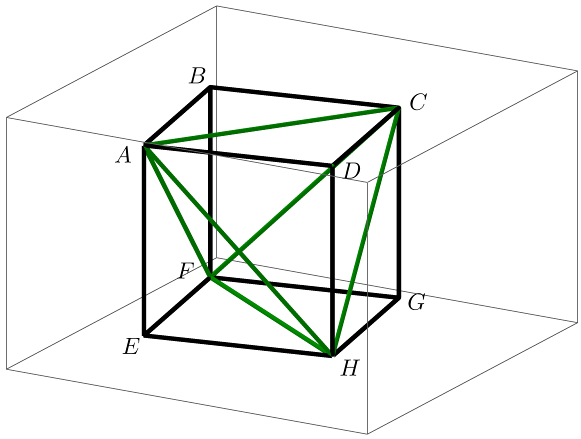
c) Terceira:

d) Quarta:

e) Quinta:

ANEXO B – Atividade 3 - Posições Relativas no Tetraedro Regular Inscrito em um Cubo

Para responder as questões a seguir, utilize o material construído e considere o modelo abaixo para escrever as respostas.



Considerando apenas as retas e planos formados pelos vértices dos poliedros, escreva pelo menos dois exemplos de:

1. retas concorrentes.

2. retas paralelas.

3. retas reversas.

4. retas perpendiculares.

5. retas ortogonais.

6. reta contida em um plano.

7. reta secante em um plano.

8. reta paralela a um plano.

9. reta perpendicular a um plano.

10. planos concorrentes.

11. planos paralelos.

12. planos perpendiculares.

13. planos determinados por uma reta e um ponto fora dela.

14. planos determinados por duas retas concorrentes.

15. planos determinados por duas retas paralelas.

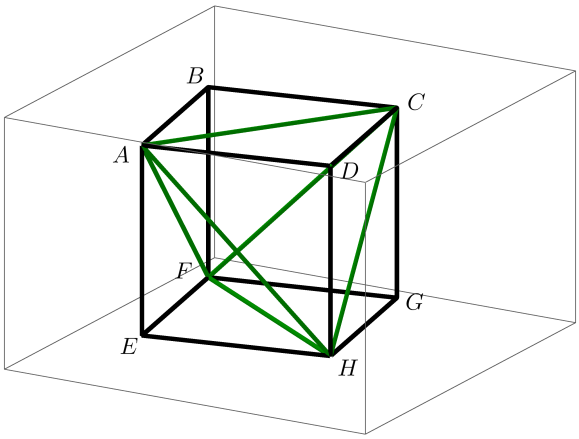
16. dois planos paralelos e um terceiro concorrente a ambos.

17. três planos que se cortam segundo a mesma reta.

18. três planos que se cortam, dois a dois, segunda retas concorrentes e que as três retas se intersectam em um único ponto.

ANEXO C – Resolução da Atividade 3 ‘Posições Relativas no Tetraedro Regular Inscrito em um Cubos’

Para responder as questões a seguir, utilize o material construído e considere o modelo abaixo para escrever as respostas.



Considerando apenas as retas e planos formados pelos vértices dos poliedros, escreva pelo menos dois exemplos de:

1. retas concorrentes.
   FH e HC, AD e DC.

2. retas paralelas.
   AD e BC, BC e EH.

3. retas reversas.
   AC e FH, BC e EF.

4. retas perpendiculares.
   AE e EH, AC e GC.

5. retas ortogonais.
   AC e FH, AF e CH.

6. retas contidas em um plano.
   AH está contida em AEH, AC está contida em ACH

7. retas secantes com um plano.
   EF e AEH, AC e AFH.

8. retas paralelas a um plano.
   AC e EFH, DH e AFH.

9. retas perpendiculares a um plano.
   BC e CGH, DA e ABF.

10. planos concorrentes.
    ACH e AFH, ADH e CDH.

11. planos paralelos.
    ADC e EHG, ADH e BCG.

12. planos perpendiculares.
    AEH e FEH, BCG e CGH.

13. planos determinados por uma reta e um ponto fora dela.
    EHD é determinado pela reta EH e pelo ponto D, ACH é determinado pela reta CH e pelo ponto A.

14. planos determinados por duas retas concorrentes.
    AFH é determinado pelas retas AF e AH, CDH é determinado pelas retas CD e DH.

15. planos determinados por duas retas paralelas.
    BCD é determinado pelas retas BC e AD, BAE é determinado pelas retas AE e BF.

16. dois planos paralelos e um terceiro concorrente a ambos.
    ACH concorre os planos ADC e EHG que são paralelos, ADH concorre os planos ABF e DCG que são paralelos.

17. três planos que se cortam segundo a mesma reta.
    ACH, ACF e ADC se cortam na reta AC; AFH, CFH e EFG se cortam na reta FH.

18. três planos que se cortam, dois a dois, segunda retas concorrentes e que as três retas se intersectam em um único ponto.
    ACH, AFH e ACF se intersectam no ponto A; AEF, FEH e AEH se intersectam no ponto E.

ANEXO D – Atividade 5 - Tetraedro regular e a molécula de Metano

Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/xqmqk36n>. Você tomará essa imagem como base para realizar essa atividade. O objetivo dessa atividade é calcular o ângulo entre as ligações da molécula de metano. Para isso, siga o passo a passo a seguir.

1. Note que a figura a esquerda, representa a molécula de metano CH_4 de forma mais simplificada. Com a ferramenta *Segmento* construa os segmentos: AB, BC, CA, AD, BD e CD.

2. Você acabou de construir um tetraedro regular, em que seus vértices são os átomos de hidrogênio, e no centro G, desse tetraedro temos o átomo de carbono, chamado de baricentro do tetraedro (centro de gravidade).

3. Agora, vamos traçar os primeiros segmentos para começarmos nossos cálculos. Novamente com a ferramenta *Segmento*, trace AL, DM, DL e AP. Antes de passar para o próximo passo, explore a figura movendo, girando e ampliando-a.

4. Os segmentos DM e AP são alturas do tetraedro regular, para conferir, utilize a ferramenta *Ângulo*, e selecione os pontos D, M e L, nessa ordem. O mesmo pode ser feito com os vértice A, P e D. Se achar que esses ângulos estão "poluindo" sua figura, clique neles e aperte *Delete*, para apagá-los.

5. Ainda sobre esses pontos, note que M é o centro do triângulo equilátero ABC, e P é o centro do triângulo equilátero BCD. Quais são os valores das seguintes razões?

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{ML}} = ... \quad \text{e} \quad \frac{\overline{DP}}{\overline{PL}} = ...$$

   Portanto,

$$\overline{AM} = ...\ \overline{ML} \text{ e } \overline{DP} = ...\ \overline{PL}$$

6. Vamos começar os cálculos. Utilize $1u.C.$ para a medida das arestas do tetraedro. Pelo Teorema de Pitágoras, calcule $\overline{DL}$ e $\overline{AL}$.

7. Usando os resultados dos passos 5 e 6, calcule as medidas de $\overline{DP}$, $\overline{PL}$, $\overline{AM}$ e $\overline{ML}$.

8. No triângulo APL, calcule a medida de $\overline{AP}$.

9. No triângulo DML, calcule a medida de $\overline{DM}$.

10. Os valores são os mesmos, claro, ambos segmentos são alturas do tetraedro regular. Agora, note que $\overline{GM} = \overline{GP}$ e chame essa medida de x. Então, a medida de $\overline{AG}$, em função de x, é

11. No triângulo AMG, utilize o Teorema de Pitágoras para calcular o valor de x.

12. Calcule a medida de $\overline{AG}$.

13. Note que $\overline{AG} = 3\overline{GP}$, ou seja, que $\overline{GP} = \dfrac{1}{4}\overline{AP}$. Em outras palavras, isso significa que o centro do tetraedro regular divide a altura na razão 3:1.

14. Observe que $\overline{AG} = \overline{BG}$. Então, finalmente, no triângulo AGB, utilize o Teorema dos Cossenos para encontrar o $\cos(\widehat{AGB})$.

15. Com o auxílio de uma tabela trigonométrica, e lembrando que $\cos(\theta) = -\cos(180° - \theta)$, encontre o valor aproximado do ângulo $\widehat{AGB}$.

16. Apenas para conferir o resultado, utilize a ferramenta *Ângulo* e selecione os pontos A, G e B, nessa ordem.

Extra. Saindo um pouco do contexto da molécula, vamos aproveitar o tetraedro regular e calcular a distância entre duas arestas reversas. Para isso, com a ferramentas *Ponto Médio*, selecione o segmento $\overline{AD}$ isso fará com que apareça o ponto J, trace o segmento $\overline{JL}$. Note que esse segmento define a distância entre as arestas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, além disso ele é perpendicular as duas arestas e passa pelos seus pontos médios. Utilize o Teorema de Pitágoras, no triângulo AJL para calcular a medida de $\overline{JL}$.

ANEXO E – Resolução da Atividade 5 'Tetraedro regular e a molécula de Metano'

Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/xqmqk36n>. Você tomará essa imagem como base para realizar essa atividade. O objetivo dessa atividade é calcular o ângulo entre as ligações da molécula de metano. Para isso, siga o passo a passo a seguir.

1. Note que a figura a esquerda, representa o molécula de metano CH_4 se forma mais simplificada. Com a ferramenta *Segmento* construa os segmentos: AB, BC, CA, AD, BD e CD.

2. Você acabou de construir um tetraedro regular, em que seus vértices são os átomos de hidrogênio, e no centro G, desse tetraedro temos o átomo de carbono, chamado de baricentro do tetraedro (centro de gravidade).

3. Agora, vamos traçar os primeiros segmentos para começarmos nossos cálculos. Novamente com a ferramenta *Segmento*, trace AL, DM, DL e AP.

4. Os segmentos DM e AP são alturas do tetraedro regular, para conferir, utilize a ferramenta *Ângulo*, e selecione os pontos D, M e L, nessa ordem. O mesmo pode ser feito com os vértice A, P e D. Se achar que esses ângulos estão "poluindo" sua figura, clique neles e aperte *Delete*, para apagá-los.

5. Ainda sobre esses pontos, note que M é o centro do triângulo equilátero ABC, e P é o centro do triângulo equilátero BCD. Isso significa que (complete)

$$\overline{AM} = 2\overline{ML} \text{ e } \overline{DP} = 2\overline{PL}$$

6. Vamos começar os cálculos. Utilize $1u.C.$ para a medida das arestas do tetraedro. Pelo Teorema de Pitágoras, calcule $\overline{DL}$ e $\overline{AL}$.

$$\overline{DC}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{DL}^2$$
$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{DL}^2$$
$$\overline{DL} = \frac{\sqrt{3}}{2}u.C.$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{AL}^2$$
$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{DL}^2$$
$$\overline{AL} = \frac{\sqrt{3}}{2}u.C.$$

7. Usando os resultados dos passos 5 e 6, calcule as medidas de $\overline{DP}$, $\overline{PL}$, $\overline{AM}$ e $\overline{ML}$.

$$\overline{DP} = \frac{2}{3}\overline{DL}$$

$$\overline{DP} = \frac{\sqrt{3}}{3}u.C.$$

Analogamente,

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}u.C.$$

$$\overline{PL} = \frac{1}{3}\overline{DL}$$

$$\overline{PL} = \frac{\sqrt{3}}{6}u.C.$$

Analogamente,

$$\overline{ML} = \frac{\sqrt{3}}{6}u.C.$$

8. No triângulo APL, calcule a medida de $\overline{AP}$.

$$\overline{AL}^2 = \overline{PL}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{6}}{3}u.C.$$

9. No triângulo DML, calcule a medida de $\overline{DM}$.

$$\overline{DL}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{DM}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \overline{DM}^2$$

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{6}}{3}u.C.$$

10. Os valores são os mesmos, claro, ambos segmentos são alturas do tetraedro regular. Agora, note que $\overline{GM} = \overline{GP}$, chame essa medida de x. Então, a medida de $\overline{AG}$, em função de x, é

$$\overline{AG} = \overline{AP} - \overline{GP}$$

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{6}}{3} - x$$

11. No triângulo AMG, utilize o Teorema de Pitágoras para calcular o valor de x.

$$\overline{AG}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{AM}^2$$
$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3} - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$x = \frac{\sqrt{6}}{12} u.C.$$

12. Calcule a medida de $\overline{AG}$.

$$\overline{AG} = \overline{AP} - \overline{GP}$$
$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{12}$$
$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{6}}{4} u.C.$$

13. Note que $\overline{AG} = 3\overline{GP}$, ou seja, que $\overline{GP} = \frac{1}{4}\overline{AP}$. Em outras palavras, isso significa que o centro do tetraedro regular divide a altura na razão 3:1.

14. Observe que $\overline{AG} = \overline{BG}$. Então, finalmente, no triângulo AGB, utilize o Teorema dos Cossenos para encontrar o $\cos \widehat{AGB}$.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2.\overline{AG}.\overline{BG}.cos(\widehat{AGB})$$
$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{6}}{4}.\frac{\sqrt{6}}{4}.cos(\widehat{AGB})$$
$$cos(\widehat{AGB}) = \frac{-1}{3}$$

15. Com o auxílio de uma tabela trigonométrica, e lembrando que $\cos(\theta) = -\cos(180° - \theta)$, encontre o valor aproximado do ângulo $(\widehat{AGB})$.

$$\widehat{AGB} = arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109°$$

16. Apenas para conferir o resultado, utilize a ferramenta *Ângulo* e selecione os pontos A, G e B, nessa ordem.

Extra. Saindo um pouco do contexto da molécula, vamos aproveitar o tetraedro regular e calcular a distância entre duas arestas reversas. Para isso, com a ferramenta *Ponto Médio*, selecione o segmento $\overline{AD}$ isso fará com que apareça o ponto J, trace o segmento $\overline{JL}$. Note que esse segmento define a distância entre as arestas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, além disso ele é perpendicular as duas arestas e passa pelos seus pontos médios. Utilize o Teorema de Pitágoras, no triângulo AJL para calcular a medida de $\overline{JL}$.

$$\overline{AL}^2 = \overline{AJ}^2 + \overline{JL}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{JL}^2$$

$$\overline{JL} = \frac{\sqrt{2}}{2} u.C.$$

ANEXO F – Resumo de Geometria Espacial de Posição

Para iniciar o estudo da Geometria Espacial é necessário definir alguns conceitos básicos, chamados *conceitos primitivos*, que serão aceitos sem definição. Além disso, é necessário algumas regras, chamadas de *postulados (ou axiomas)*. A partir disso, conseguiremos entender como a Geometria Espacial funciona e conseguir concluir alguns resultados.

Conceitos primitivos:

Ponto (A, B, C, ...), reta (r, s, t, ...), plano (α, β, γ, ...) e espaço.

Postulados:

1. Por dois pontos distintos do espaço passa uma, e somente uma, reta.
2. Dada uma reta do espaço, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem a reta.
3. Um ponto qualquer de uma reta divide essa reta em duas partes e cada parte será chamada semirreta.
4. Por três pontos distintos, não colineares, do espaço passa um, e somente um, plano.
5. Dado um plano no espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.
6. Uma reta separa um plano em dois semiplanos e esta reta é a origem dos semiplanos opostos.
7. Um plano qualquer divide o espaço em duas partes e cada parte será chamada semiespaço.

Primeiras conclusões:

- Em uma reta existe uma infinidade de pontos, assim como fora dela.
- Em um plano existe uma inifinidade de pontos e retas, assim como fora dele.
- No espaço existe uma infinidade de pontos, retas e planos.
- As retas, os planos e o espaço são “infinitos”, ou seja, qualquer desenho que fizermos deles, estará representando apenas uma parte.
- Se uma reta tem dois de seus pontos em um plano, então elas está contida no plano.
- Se dois planos tem um ponto em comum, então eles possuem uma reta em comum, que passa por esse ponto.

Posições relativas entre duas retas:

- Duas retas são *coincidentes* se possuem todos os seus pontos em comuns.
- Duas retas são *concorrentes* (ou *secantes*) se possuem apenas um ponto comum.
- Duas retas são *paralelas* se são coplanares e não possuem pontos em comum.
- Duas retas são *reversas* se não são coplanares, e portanto, não possuem pontos em comum.

- Duas retas concorrentes que formam um ângulo reto são ditas *perpendiculares.*
- Duas retas reversas que formam um ângulo reto são ditas *ortogonais.*

Determinação de planos:

O Postulado 4, diz que: "Por três pontos distintos, não colineares, do espaço passa um, e somente um, plano." Isso é o mesmo que dizer que três pontos distintos e não colineares determinam um plano. Vejamos outras maneiras de determinar um plano:

- Por uma reta e um ponto fora dela.
- Por duas retas concorrentes.
- Por duas retas paralelas.

Posições relativas entre reta e plano:

- Uma reta está *contida* no plano se tiver dois pontos comuns com o plano
- Uma reta e um plano são *concorrentes* (ou *secantes*) se tiverem um único ponto comum.
- Uma reta e um plano são *paralelos* quando não têm ponto comum.

Posições relativas entre planos:

- Dois planos são *coincidentes* se têm todos os pontos em comum.
- Dois planos são *concorrentes* (ou *secantes*) se têm uma única reta em comum.
- Dois planos são *paralelos* quando não tem ponto em comum.

Perpendicularismo:

Entre reta e plano:

- Uma *reta é perpendicular a um plano* se for concorrente com o plano e perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de concorrência.
- Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
- Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela será perpendicular ou ortogonal a qualquer reta desse plano.

Entre dois planos:

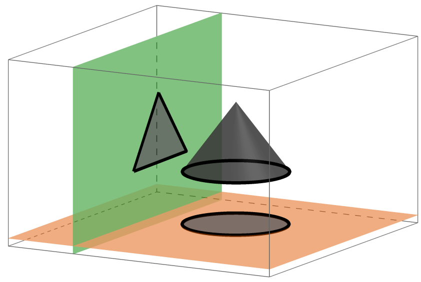
- *Dois planos são perpendiculares* se um deles contiver uma reta perpendicular ao outro.

Posições relativas entre três planos:

- Os três planos coincidentes.
- Dois deles coincidentes e o terceiro paralelo aos primeiros.
- Dois deles coincidentes e o terceiro concorrente aos primeiros.
- Os três planos paralelos entre si.
- Dois deles paralelos e o terceiro concorrente a ambos.
- Os três planos se cortam segundo a mesma reta.
- Os três planos se cortam, dois a dois, segundo três retas paralelas.
- Os três planos se cortam, dois a dois, segundo retas concorrentes; a interseção entre as três retas é o único ponto comum entre os três planos.

Projeção Ortogonal:

A projeção ortogonal de uma figura em um plano é a figura formada nesse plano quando se projeta perpendicularmente cada ponto da figura original nesse plano. Para que fique mais claro observe a figura ao lado.



Na figura, a projeção ortogonal do cone no plano de baixo é um círculo, já no plano lateral é um triângulo.

ANEXO G – Lista de Exercícios de Geometria Espacial de Posição

Geometria Espacial de Posição

1. Dadas as proposições a seguir, classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a)( ) Três pontos quaisquer determinam um plano.

b)( ) Três pontos quaisquer pertencem a um plano.

c)( ) Uma reta e um ponto determinam um plano.

d)( ) Duas retas determinam um plano.

e)( ) Duas retas paralelas são aquelas que não se intersectam e estão contidas em um mesmo plano.

f)( ) Dadas duas retas paralelas, não existe um plano que as contenha.

g)( ) Dadas duas retas paralelas, se uma reta é secante delas, é secante a outra também.

h)( ) Se duas retas são reversas, então não se intersectam.

i)( ) Se r e s são retas reversas e s e t também são reversas, então r e t reversas.

j)( ) Por um ponto exterior a duas retas reversas sempre pode-se traçar uma reta secante as duas retas reversas.

k)( ) Se uma de duas retas reversas é secante a um plano, então a outra reta também é.

l)( ) Se três retas são paralelas entre si, o plano determinado por duas delas será paralelo a terceira.

m)( ) Toda reta paralela a dois planos secantes, será paralela a interseção desses planos.

n)( ) Três planos podem ter um único ponto em comum.

o)( ) Se duas retas, r e s, são perpendiculares a uma terceira, então r e s determinam um plano.

p)( ) Por um ponto é possível traçar uma única reta perpendicular a um plano.

q)( ) A interseção entre três planos é necessariamente uma reta.

r)( ) Se um plano intersecta uma de três retas paralelas, então intersecta as outras também.

s)( ) Todos os planos paralelos a um plano dado são paralelos entre si.

t)( ) Todos os planos paralelos a uma reta dada são paralelos entre si.

2. (Espcex) Considere as seguintes proposições:

I) Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.

II) Uma reta e um ponto determinam sempre um plano.

III) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

Pode-se afirmar que

a) só I é verdadeira.
b) só III é verdadeira.
c) só I e III são verdadeiras.
d) só III é falsa.
e) só I e III são falsas.

3. (Ufal) Se uma reta r é perpendicular a dois planos α e β , $\alpha \neq \beta$, então é verdade que

a) α é paralelo a qualquer plano que contenha r.
b) β contém todas as retas perpendiculares a r.
c) a distância entre α e β é igual a 10 cm.
d) α e β são paralelos entre si.
e) α e β são perpendiculares entre si.

4. (Mackenzie) r, s, t são retas distintas tais que s é perpendicular a r e t é perpendicular a r. Relativamente às retas s e t, podemos afirmar que

a) elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.
b) elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.
c) elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.
d) elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
e) elas podem ser unicamente reversas.

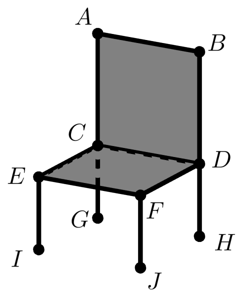
5. (Cefet-MG) No contexto da Geometria Espacial, afirma-se:

I) Se uma reta é paralela a um plano, então ela está contida nesse plano.
II) Duas retas sem ponto comum são paralelas ou reversas.
III) Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ao outro.
IV) Duas retas distintas paralelas a um plano são paralelas entre si.

São corretas apenas as afirmativas

a) I e II.
b) I e III.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

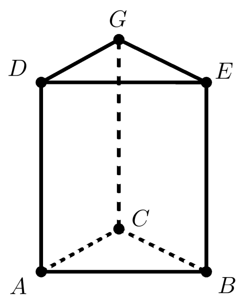
6. (Cefet-MG) A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto.



A partir dos pontos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas

a) CD e EF são paralelos.
b) BD e FJ são concorrentes.
c) AC e CD são coincidentes.
d) AB e EI são perpendiculares.

7. (Fuvest) Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face $ADGC$ e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a CG. A formiga chegou ao vértice



a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

8. (UEM - adaptada) Sabendo que r, s e t são três retas no espaço tridimensional com r e s paralelas distintas, assinale V para afirmações verdadeiras e F para as falsas.

( ) Se a reta r é perpendicular a um plano α, então a reta s também é perpendicular ao plano α.
( ) Se a reta t é concorrente com a reta s, então t também é concorrente com a reta r.
( ) Se um plano β contém a reta s, então o plano β também contém a reta r.
( ) Se a reta t é perpendicular à reta r, então t é perpendicular ou ortogonal à reta s.
( ) Se as três retas r, s e t são paralelas distintas, então existe um plano que contém as três retas.

9. (Mackenzie) Considere as afirmações:

I) Se uma reta é paralela a dois planos, então estes planos são paralelos.
II) Se dois planos são paralelos, toda reta de um é paralela a uma reta do outro.
III) Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

Então,

a) todas são verdadeiras.
b) somente a II é verdadeira.
c) somente a III é verdadeira.
d) somente a I é verdadeira.
e) somente II e III são verdadeiras.

10. (Puc-SP) Se r e s são retas reversas, então pode-se garantir que

a) todo plano que contém r também contém s.
b) existe um plano que contém r e é perpendicular a s.
c) existe um único plano que contém r e s.
d) existe um plano que contém r e é paralelo a s.
e) toda reta que encontra r encontra s.

11. (Fuvest) São dados cinco pontos não coplanares A, B, C, D e E. Sabe-se que $ABCD$ é um retângulo, $AE \perp AB$ e $AE \perp AD$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas

a) EA e EB.
b) EC e CA.
c) EB e BA.
d) EA e AC.

e) AC e BE.

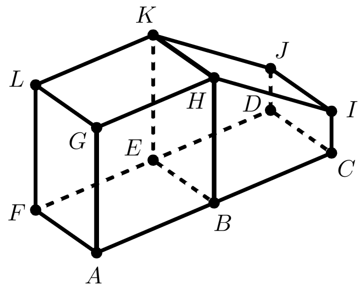
12. (Puc-SP) Dois planos β e γ se cortam na reta r e são perpendiculares a um plano α. Então

a) β e γ são perpendiculares.
b) r é perpendicular a α.
c) r é paralela a α.
d) todo plano perpendicular a α encontra r.
e) existe uma reta paralela a α e a r.

13. (Fuvest) Sejam r e s duas retas distintas. Podemos afirmar que sempre

a) existe uma reta perpendicular a r e a s.
b) r e s determinam um único plano.
c) existe um plano que contém s e não intercepta r.
d) existe uma reta que é paralela a r e a s.
e) existe um plano que contém r e um único ponto de s.

14. (Especex) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: LB e GE; AG e HI; AD e GK. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



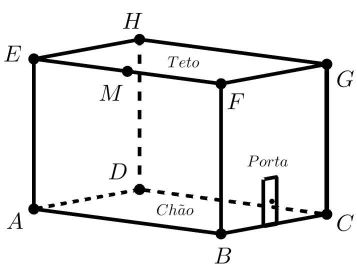
a) concorrentes; reversas; reversas.
b) reversas; reversas; paralelas.
c) concorrentes; reversas; paralelas.
d) reversas; concorrentes; reversas.
e) concorrentes; concorrentes; reversas.

15. (Fuvest) Cada aresta do tetraedro regular $ABCD$ mede 10. Por um ponto P na aresta $\overline{AC}$, passa o plano α paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Dado que $AP = 3$, o quadrilátero determinado pelas interseções de α com as arestas do tetraedro tem área igual a

a) 21.
b) $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$.
c) 30.
d) $\dfrac{30}{2}$.
e) $\dfrac{30\sqrt{3}}{2}$.

Projeção Ortogonal

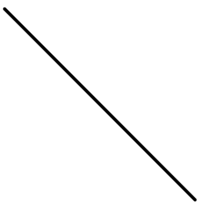
16. (ENEM) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.

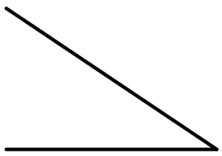


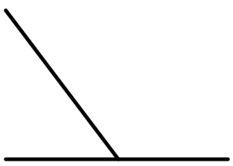
A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

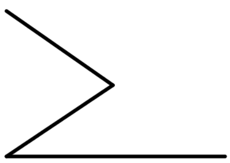
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a)

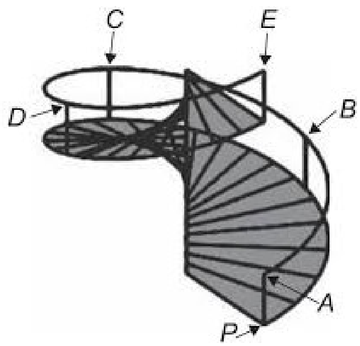
b) 

c) 

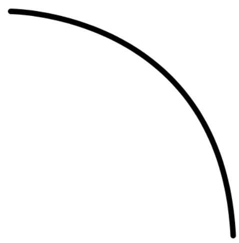
d) 

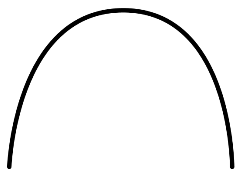
e) 

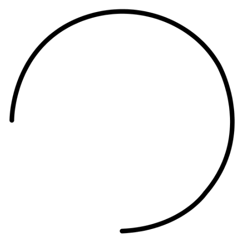
17. (ENEM) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

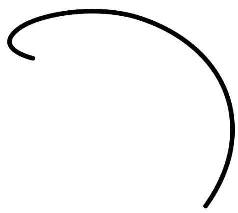


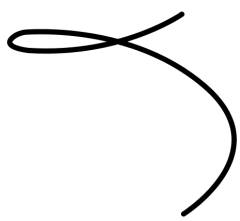
A figura que melhor representa a projeção ortogonal sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é

a) 

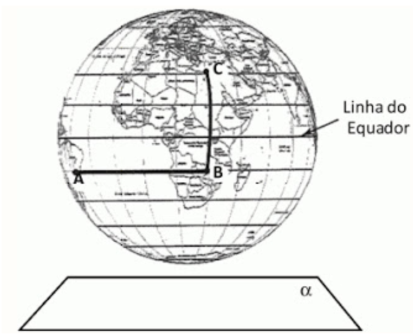
b) 

c) 

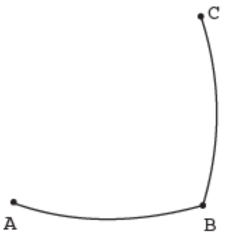
d) 

e) 

18. (ENEM) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

a) 

b) 

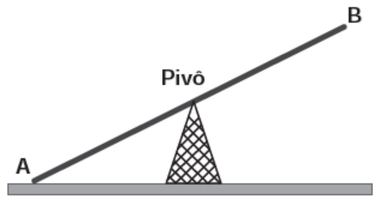
c) 

d) 

e) 

19. (ENEM) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

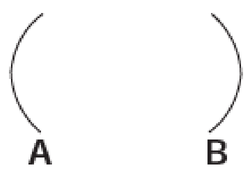
Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:

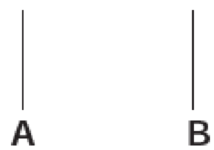


A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e)

20. (ENEM) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

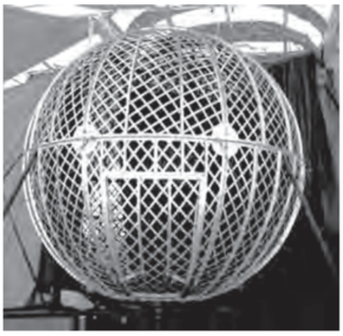


Figura 1

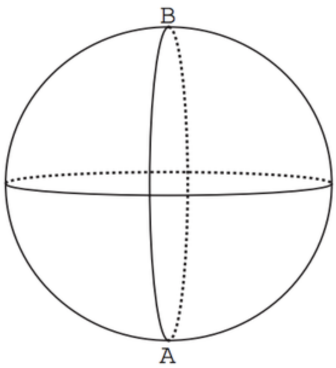
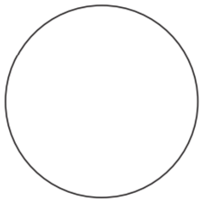
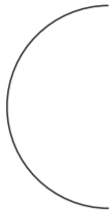


Figura 2

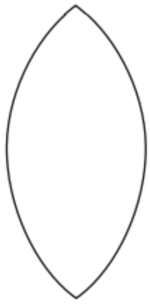
Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B. A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por



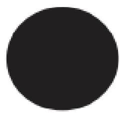
a)



b)



c)



d)

e)

ANEXO H – Resolução da Lista de Exercícios

1.

a) **F** - Três pontos colineares não determinam um plano.

b) **V** - Sempre existe um plano (não necessariamente único) que passa por três pontos.

c) **F** - Se o ponto pertencer a reta eles não determinam um plano.

d) **F** - Retas coincidentes e reversas não determinam um plano.

e) **V** - Por definição de retas paralelas.

f) **F** - Por definição, retas paralelas são coplanares.

g) **F** - A reta secante pode ser reversas a outra.

h) **V** - Por definição, retas reversas não são coplanares, portanto não possuem pontos em comum.

i) **F** - As retas r e t podem ser paralelas.

j) **F** - Com um ponto que determina um plano paralelo com uma das retas não é possível traçar o segmento.

k) **F** - A outra reta pode ser paralela ao plano.

l) **F** - As três retas podem ser coplanares.

m) **V** - Teorema 12.

n) **V** - Figura 26(e).

o) **F** - As retas r e s podem ser reversas e portanto não coplanares.

p) **V** - Teorema 21

q) **F** - A interseção pode ser um único ponto, Figura 26(e).

r) **V** - Teorema 16.

s) **V** - Supondo, por absurdo, que isso não ocorre contradiz o Teorema 17.

t) **F** - Os planos podem ser concorrentes.

2. B

I) **F** - A reta pode ser reversa a retas do plano.

II) **F** - Se o ponto pertencer a reta eles não determinam um plano.

III) **V** - Teorema 20.

3. D

a) **F** - Pode existir um plano que contenha r que seja concorrente com α.

b) **F** - O plano β contém algumas retas perpendiculares a r, mas não todas.

c) **F** - Não podemos afirmar nada sobre a distância entre os planos.

d) **V** - Teorema 19.

e) **F**- Os planos α e β são paralelos.

4. D

5. C

I) **F** - Por definição de retas paralelas.

II) **V** - Por definição de retas paralelas e reversas.

III) **V** - Teorema 14

IV) **F** - As retas podem ser concorrentes.

6. A - CD e EF são lados opostos de um paralelogramo então, são paralelos.

7. E - Partindo do ponto G percorreu a aresta GC que é perpendicular à base ABC chegando em C. De C percorreu a diagonal CD chegando em D. Finalmente, de D percorreu a aresta DE que é reversa a CG chegando em E.

8. **V** - Teorema 18.

F - A reta t pode ser reversa a r.

F - O plano β pode ser paralelo a reta r.

V - Pela de Definição 14 e pelo Teorema 10.

F - Duas a duas as retas definem um plano, portanto são três planos.

9. C

I) **F** - Os planos podem ser correntes e a reta paralela a interseção deles.

II) **F** - As retas podem ser reversas.

III) **V** - Teorema 23.

10. D

a) **F** - As retas r e s não são coplanares por definição de retas reversas.

b) **F** - Existe apenas para o casos particular que r e s são ortogonais.

c) **F** - As retas r e s não são coplanares por definição de retas reversas.

d) **V** - O plano definido por uma reta paralela a s que intersecta r é paralelo a s.

e) **F** - Existem retas que concorrem com r e são paralelas ou reversas a s.

11. D - Como EA é perpendicular a AB e AD, então é perpendicular ao plano definido por AB e AD que é justamente o plano que contém o retângulo $ABCD$. Então, EA é perpendicular a qualquer reta do plano $ABCD$ que passe por A, em particular AC.

12. B

a) **F** - Não há informações para concluir o ângulo entre os planos.

b) **V** - Pela construção de planos perpendiculares.

c) **F** - A reta r é perpendicular a α.

d) **F** - Existem planos perpendiculares a α que são paralelos a r.

e) **F** - As retas paralelas a r são perpendiculares ao plano α.

13. A

a) **V** - Para retas paralelas existe várias retas perpendiculares em comum. Para retas concorrentes existe uma reta perpendicular que passa pelo ponto de concorrência. O caso para retas reversas é menos intuitivo, mas foi demonstrado no Teorema 23.

b) **F** - Se r e s forem reversas, então elas não são coplanares.

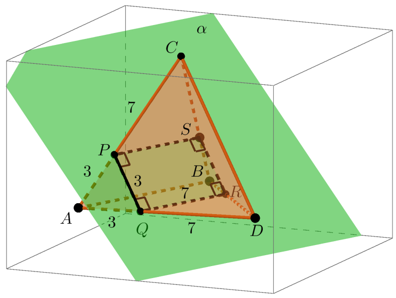
c) **F** - Se r e s forem concorrentes, então um plano que contém s concorre com a reta r.

d) **F** - Se r e s forem reversas ou concorrente não existe uma reta que seja paralela a ambas.

e) **F** - Se r e s forem paralelas, então os planos que contém r ou são paralelos a s ou contém s.

14. E - LB e GE são as diagonais do paralelepípedo reto retângulo $ABEFGHKL$, portanto são concorrentes. AG e HI são concorrentes pois são coplanares e HI é concorrente com HB que é paralela a AG. AD e GK são reversas pois não existe um plano que as contenha.

15. A - Seja $PQRS$ o quadrilátero determinado pelas interseções de α com as arestas do tetraedro. Como α é paralelo a aresta CD, então PQ é paralela a CD já que são coplanares e não possuem intereseção. Analogamente, SR é paralela a CD e PS e QR são paralelas a AB. Desta forma, os triângulos equiláteros APQ, QRD, CPS e BRS são semelhantes as suas respectivas faces. Então, $\overline{PQ} = 3$, $\overline{QR} = 7$, $\overline{SR} = 3$ e $\overline{PS} = 7$. Sendo assim, o quadrilátero $PQRS$ é um retângulo de dimensões 7×3 e portanto possui área igual a 21.



16. D - A projeção ortogonal do segmento AB no plano do chão é o próprio segmento AB. A projeção do segmento AM está contida no segmento AB e a projeção de MH é um segmento de parte do ponto médio de AB até o ponto D.

17. C - A projeção ortogonal sobre o piso do ponto A ao ponto E seguindo pelo corrimão é uma circunferência, em que A e E estão projetados no mesmo ponto. Como os cinco pontos estão igualmente espaçados no corrimão, então a projeção de A a D é $\frac{3}{4}$ da circunferência.

18. E - O arco AB pertence a um plano paralelo a α, portanto sua projeção ortogonal em α também será um arco. Os pontos B e C não são simétricos em relação ao plano do equador e o arco BC pertence a um plano perpendicular a α, assim sua projeção ortogonal sobre α será um segmento de reta. Logo, a melhor representação é a da alternativa E.

19. B - As projeções ortogonais dos pontos A e B sobre o chão são dois segmentos horizontais.

20. **E** - A trajetória do motoqueiro será circunferência da esfera em um plano perpendicular ao plano do chão, portanto a projeção dessa ciorcunferência no chão é um segmento.