UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

RENATO DE BRITO MOTA

ENSINO INTERDISCIPLINAR DE MATEMÁTICA COM ARTES: sequência didática para construção de cônicas com a técnica *String Art*

JUAZEIRO
2022

RENATO DE BRITO MOTA

ENSINO INTERDISCIPLINAR DE MATEMÁTICA COM ARTES: sequência didática para a construção de cônicas com a técnica *String Art*

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, campus Juazeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo.

JUAZEIRO

2022

Mota, Renato de Brito

M917e Ensino interdisciplinar de matemática com artes: sequência didática para a construção de cônicas com a técnica String Art / Renato Brito Mota. – Juazeiro-Ba, 2022.

xi; 72 f.: il. 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2022.

Orientador: Prof. Evando Santos Araújo.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Geometria I. Título. II. Araújo, Evando Santos. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.7

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF

Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB - 5 / 1369

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

ENSINO INTERDISCIPLINAR DE MATEMÁTICA COM ARTES: sequência didática para a construção de cônicas com a técnica *String Art*

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, campus Juazeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 28 de abril de 2022.

Banca Examinadora

Evando Santos Araújo

Prof. Dr. Evando Santos Araújo
Orientador. PROFMAT/UNIVASF.

Alison M. V. D. L. Melo

Prof. Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo
Examinador Interno. PROFMAT/UNIVASF.

Marcelo Reis dos Santos

Prof. Dr. Marcelo Reis dos Santos
Examinador Externo. CCINAT/UNIVASF.

Dedico esse trabalho aos meus alunos e professores, guardo dentro do meu coração todos os ensinamentos.

AGRADECIMENTOS

Deus me presenteou com dias incríveis no PROFMAT, tive a oportunidade de conviver com pessoas maravilhosas e especiais que levarei para toda minha vida. Por tudo isso, só posso dizer o meu mais sincero obrigado!

Agradeço a minha mãe Maria Josilene e minha irmã Jéssica que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e incentivando durante toda a minha vida.

Agradeço aos meus amigos Carlos Alberto, Fabiana, Fernanda, Gismenya, Gonçalo, Jamerson, João Batista, Joaquim, Layane e Pablo por tornarem minhas sextas-feiras enumeradas mais alegres, leves e divertidas. Aprendi muito com cada um de vocês!

Agradeço meu orientador, Profº Dr. Evando Araújo, por acreditar e me apoiar do início até o dia da minha apresentação. Sua competência, dedicação e sabedoria em conduzir cada etapa desse trabalho foram fundamentais e me fizeram aprender muito com tudo que foi construído, sou grato por cada ensinamento.

Agradeço também a todos os professores do PROFMAT que compartilham o seu saber e nos motivam a estudar sempre mais. Em especial, agradeço aos professores: Alexandre Ramalho Silva, Alison Marcelo Van Der Laan Melo, Beto Rober Bautista Saavedra, Damião Silva, Edson Leite Araújo, Evando Araújo, Fábio Henrique de Carvalho e Lino Marcos da Silva.

Ao secretário do PROFMAT, Manoel Pereira, muito obrigado! Sempre nos tratou com educação, competência e disposição em ajudar.

Agradeço aos membros da banca, o Prof. Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo e Prof. Dr. Marcelo Reis dos Santos pelas contribuições significativas para melhoria do trabalho final.

Por fim, agradeço ao meu pai que lá do céu está feliz em ver seu filho realizar o sonho de se tornar mestre em matemática.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

A interdisciplinaridade no ensino de Matemática com Artes torna essa articulação uma fonte geradora do conhecimento abrangente e significativo para ambas as áreas, com possibilidade de se explorar a ludicidade e a criatividade com objetivo educacional. Nesse contexto, a técnica de *string art* (que consiste em construir figuras diversas como resultado da manipulação ordenada de cordas sobre pontos fixados em uma superfície sólida) se mostra como recurso didático potencial para o desenvolvimento de metodologias que possam melhorar aspectos do ensino-aprendizagem de figuras geométricas planas e de suas propriedades, como é o caso das formas cônicas (pouco exploradas em relação a outras formas geométricas). A exploração da técnica pode auxiliar o docente no processo de ensino de Geometria Analítica, por meio de aulas dinâmicas com emprego de materiais manipuláveis, com a possibilidade de se obter melhores resultados de aprendizagem. Nesse sentido, o presente trabalho explora o contexto da interdisciplinaridade entre Matemática e Arte e propõe uma sequência didática direcionada ao ensino de seções cônicas no Ensino Médio, com *string art*. A sequência didática evidencia uma metodologia orientada à participação dos alunos como ativos na construção do próprio conhecimento, a partir das orientações de construção das formas planas pelo professor mediador. No viés profissional, o objetivo da sequência didática (produto deste trabalho) é auxiliar o docente na construção de novas metodologias de ensino que contribuam para aperfeiçoar os conhecimentos do aluno sobre cônicas, a fim de obter resultados satisfatórios no ensino de Geometria e superar dificuldades observadas na prática em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Matemática. Interdisciplinaridade. Matemática e Arte. *String art*. Seções cônicas.

ABSTRACT

The interdisciplinarity in the teaching of mathematics through art makes this articulation a source that generates comprehensive and significant knowledge for both areas, with the possibility of exploring playfulness and creativity for educational purposes. In this context, the string art technique (which consists of building different figures as a result of the orderly manipulation of strings on points fixed on a solid surface) is shown as a potential didactic resource for the development of methodologies that can improve aspects of teaching and learning of geometric figures and their properties, such as conical sections (little explored in relation to other geometric shapes). The exploration of the technique can help the teacher in the teaching process of Analytical Geometry, through dynamic classes using manipulative materials, with the possibility of obtaining better learning results. In this sense, the present work explores the context of interdisciplinarity between Mathematics and Arts and proposes a didactic sequence directed to the teaching of conic sections in High School, with string art. The didactic sequence evidences a methodology oriented to the participation of students as active in the construction of their own knowledge, based on the guidelines for the construction of geometric figures by the mediator teacher. In the professional perspective, the objective of the didactic sequence (product of this work) is to help the teacher in the construction of new teaching methodologies that contribute to improve the student's knowledge about conics, in order to obtain satisfactory results in the teaching of Geometry and overcome difficulties observed in classroom practice.

Keywords: Mathematics teaching-learning. Interdisciplinarity. Mathematics and Art. String art. Conic sections.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A utilização de materiais didáticos manipuláveis pode auxiliar no ensino da Matemática e, consequentemente, favorecer a curiosidade e o raciocínio geométrico. Os materiais didáticos manipuláveis constituem importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem aproximação da teoria à prática (VERSA, 2019). A Matemática é uma disciplina conhecida pelos baixos índices de aprendizagem, especialmente para alunos com dificuldades em desenvolver a lógica e pensamento abstrato, requeridos para aprender os conteúdos específicos desse campo do saber (OLIVEIRA, 2019).

Nesse sentido, com uso do binômio arte-matemática no ensino de geometria, além de tornar aulas mais interessantes e agradáveis, busca-se, também, a melhor compreensão do conteúdo, a fim de despertar curiosidade, além de criar soluções e conceitos e melhorar a relação de ensino e aprendizagem (SANTOS, 2015).

Segundo Sabino (2018), a arte se configura como uma alternativa viável para agregar valores sociais ao ato de educar, de ensinar e de aprender. Neste sentido, os docentes podem encontrar neste componente uma possibilidade a ser inserida na metodologia, de modo a tornar o ensino de Matemática mais atrativo.

Tomando como um exemplo a atividade de pintura em tela, é possível propor alternativas didáticas que explorem os conceitos de ponto, reta e curva no plano para formar desenhos e ou outros elementos geométricos de interesse, através da observação e também a confecção de figuras geométricas desejadas. Essa ação pode dar significado ao conteúdo matemático que é ensinado (SANTOS, 2015), a partir da aplicação de conceitos artísticos articulados com os elementos geométricos relacionados.

A *String art* é, dentro dessa perspectiva, uma técnica para a criação de obras de arte visual (BIRSAK *et al*., 2018), como é o caso de telas artísticas, a partir da manipulação ordenada de cordas sobre pinos fixados em uma superfície sólida. A técnica artística permite a construção de elementos geométricos que podem, como mecanismo de aprendizagem, ser usados no ambiente de sala de aula como um recurso de ensino, a partir de propostas didáticas interdisciplinares de Matemática através da arte.

Por meio do trabalho com a *String Art*, os professores podem estimular a construção de cenários geométricos com alunos, potencializando a aprendizagem matemática a partir da prática lúdica. Para La Haye (2016), a *string art* define-se como visualização final da imagem construída com pregos, linhas, barbante ou outro elemento elástico dispostos numa base sólida e resistente que possibilite a construção de diversas concepções de arte, inclusive, no caso em estudo, das formas geométricas que possam desenvolver as formas de aprendizagem.

Nessa perspectiva, Novais (2019) destaca que muitos dos alunos desconhecem, total ou parcialmente, as formas de figuras geométricas, inclusive as chamadas seções cônicas tais como a elipse, a hipérbole e a parábola.

Baseado nesses pressupostos, esta dissertação tem como objetivo desmistificar a prática interdisciplinar de Matemática através da Arte no Ensino Básico apresentando uma revisão bibliográfica descritiva sobre o tema. Em adição, é proposta uma sequência didática de ensino interdisciplinar de Matemática através da Arte. A proposta de sequência didática é direcionada ao estudo de conceitos e elementos de seções cônicas no Ensino Médio, a partir da confecção dessas formas em telas artísticas, usando a técnica artística *string art*.

Em adição, a proposta didática (produto educacional deste trabalho) auxiliará o docente na utilização de novas metodologias em sala de aula que contribuam para aprendizagem do aluno, a fim de obter resultados satisfatórios no ensino-aprendizagem de Geometria e, em especial, das seções cônicas. Para Moreira (2017), o professor muitas vezes identifica vários desafios para relacionar o conteúdo trabalhado com as aplicações no cotidiano do aluno. Nesse sentido, as cônicas se constituem um excelente assunto para se trabalhar essa temática no Ensino Médio, por meio de aulas dinâmicas com emprego de materiais manipuláveis e relação com a arte.

Esta dissertação está dividida em seções. A Seção 2 descreve a metodologia usada para se atingir os objetivos da pesquisa. Já a Seção 3 apresenta os resultados da revisão bibliográfica proposta, desmistificando conceitos, momentos históricos e a prática da interdisciplinaridade de Matemática através da arte. Uma subseção é destinada à apresentação da técnica de *string art.* Na Seção 4 são descritos conceitos básicos, elementos e técnicas de construções das cônicas já bem conhecidas no meio acadêmico. A Seção 5 apresenta de forma detalhada todos os procedimentos para o desenvolvimento da proposta de sequência didática para o ensino de seções cônicas com string art.

2 METODOLOGIA

Este trabalho de dissertação propõe um estudo de revisão da literatura de caráter descritivo, com proposta de sequência didática de ensino interdisciplinar de Matemática através da Arte. Mais especificamente, a pesquisa buscou mostrar conceitos e aplicações importantes relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem interdisciplinar de Matemática com Arte e, em seguida, é apresentada uma sequência didática para a construção de seções cônicas, com o uso de materiais manipuláveis, trabalhada com a técnica artística de *string art*. O trabalho foi executado a partir das etapas de investigação e de análise explicativa das soluções e de síntese integradora (LIMA; MIOTO, 2007; MARCONI; LAKATOS, 2003).

Na etapa de investigação das soluções, usou-se o acervo de trabalhos científicos (artigos científicos, teses, dissertações, livros e capítulos de livro) disponíveis nas bases de dados do Portal de Periódicos Capes como fonte de referência principal da pesquisa bibliográfica. Como critério semântico de busca, as palavras-chave “ensino”, “Matemática”, “interdisciplinaridade” e “arte” foram utilizadas de forma combinada para iniciar a busca por trabalhos significativos à pesquisa (LIMA; MIOTO, 2007).

Na etapa de análise explicativa das soluções, as contribuições dos diversos autores e trabalhos retornados da pesquisa inicial foram organizadas e, em seguida, os trabalhos considerados significativos para a pesquisa foram selecionados pelo autor para posterior discussão e interpretação dos resultados (LIMA; MIOTO, 2007).

A apresentação dos resultados também foi organizada com o auxílio de tabelas e figuras. Na etapa de síntese integradora foi desenvolvido um estudo descritivo, no formato de revisão da literatura, com as principais contribuições científicas para a obtenção dos objetivos propostos. Estas reflexões foram relacionadas com os conceitos e definições matemáticas, usando uma linguagem adequada ao público-alvo (LIMA; MIOTO, 2007).

A proposta de sequência didática envolve a interação Matemática/Artes com a utilização de matérias concretos manipuláveis, destinada ao ensino interdisciplinar de conceitos de geometria plana para alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Especificamente, esse produto educacional visa explorar a potencialidade da técnica artística *string art* para a construção de seções cônicas.

Os procedimentos da sequência didática foram dados em detalhes, levando-se em consideração as justificativas para sua execução e as orientações dos documentos que regimentam o Ensino Básico no Brasil.

3 O ENSINO INTERDISCIPLINAR DE MATEMÁTICA COM ARTE

3.1 Importância do tema no cenário da Educação Matemática

A interdisciplinaridade no estudo da matemática através da arte torna essa articulação uma fonte geradora do conhecimento abrangente e significativo para ambas as disciplinas, trazendo o lúdico, a criatividade para auxiliar nos problemas e nas dificuldades de aprendizagem da matemática. Segundo Flores e Wagner (2014, p. 255), "o contexto das artes torna-se interessante para problematizar objetos de pesquisa na Educação Matemática".

As discussões sobre temas interdisciplinares no ensino de matemática são abordadas principalmente por meio de duas abordagens: epistemologia e pedagogia, ambas englobando conceitos distintos e muitas vezes complementares. No campo da epistemologia, estuda-se o conhecimento em termos de produção, reconstrução e socialização, a ciência e seus paradigmas e os métodos como mediadores entre sujeito e realidade. Em termos de métodos de ensino, discute-se fundamentalmente a questão da natureza do currículo, do ensino e da aprendizagem escolar (THIESEN, 2008). Considerando essa compreensão da interdisciplinaridade, e defendendo que, no cenário escolar, ela não é apenas uma questão de ordem instrucional, mas precisa ser colocada em função de princípios epistemológicos, ressaltando que os professores assumem uma forma de representação operacional que possa compreender essas práticas (LAVAQUI e BATISTA, 2007).

As mudanças que estão ocorrendo no sistema educacional brasileiro estão levando os educadores a repensarem sua prática educativa, por meio da interdisciplinaridade e da contextualização no ensino, na possibilidade de interações entre diferentes ciências (LEIRIA e LUZ, 2011). A questão da interdisciplinaridade usando de aspectos da arte é marcada por duas questões que se tornaram emergentes na educação brasileira a partir dos anos de 1980, a saber, a constituição do campo arte-educação e a moda do termo interdisciplinaridade (FLORES e WAGNER, 2014).

A interdisciplinaridade deve ser entendida como uma forma de interação entre as ciências, onde vários tipos de conhecimento ocorrem em um contexto mais amplo, produzindo uma interpretação holística dos fatos e fenômenos a serem observados (TRINDADE *et al.* 2015).

Conectar os conteúdos estudados em diferentes disciplinas, tornando-os mais atrativos aos estudantes e mostrá-los que são aplicados na vida real, são desafios a serem examinados e concebidos por uma intervenção pedagógica quando se pretende promover um trabalho interdisciplinar e/ou transdisciplinar na escola (FLUGSEDER e VARGAS, 2021). A matemática e as ciências naturais, são ciências com muitos pontos de contato, porém, às vezes, estudos mais longos são necessários na busca da interdisciplinaridade. Essa interdisciplinaridade entre matemática e arte pode ser explorada como um recurso valioso para educadores matemáticos no processo de aprendizagem, tornando-os mais motivados e eficientes. A Interdisciplinaridade e a Arte podem ser utilizadas de forma divertida, valorizando seus componentes gráficos e permitindo que os alunos aprendam de forma mais prática e interativa (SILVA, 2016).

Segundo Leiria e Luz (2011), por exemplo, o uso de tangram possibilita atender a essas regras, pois proporciona o manuseio de diferentes formas geométricas como: quadrados, triângulos e paralelogramos, e permite que os alunos despertem a compreensão da geometria em seu contexto, criando situações propícias à estruturação de um sistema para todo o processo de construção do conhecimento.

Flugseder e Vargas (2021), ao relacionar artes visuais e matemática, estabeleceu laços de cooperação entre as disciplinas envolvidas que, certamente, irão inspirar novos projetos de modo a possibilitar a construção do conhecimento alinhando teoria, prática e a superação de desafios enfrentados no ambiente escolar.

Para Silva (2016), o uso de técnicas de origami para a criação de figuras bidimensionais e espaciais permite que os alunos investiguem, descrevam e descubram as propriedades dessas estruturas, ampliando as possibilidades de sua percepção e exploração do conhecimento geométrico. Através do diálogo entre matemática e arte, são organizadas atividades que proporcionarão um ambiente de aprendizagem onde a geometria pode estar envolvida. O origami pode representar um importante recurso metodológico para o processo de ensino/aprendizagem da matemática, por meio do qual os alunos ampliarão seus conhecimentos geométricos formais, inicialmente adquiridos informalmente pela observação do mundo, dos objetos e das formas ao seu redor.

De acordo com Silva e Santos (2016) nas Artes, por exemplo, a Matemática apresenta um papel de destaque. Desde a antiguidade se buscava um padrão matemático nas obras de artes, como: escultura e pintura. O número de ouro, por exemplo, foi sinal de beleza e harmonia por muito tempo, assim como a simetria nas figuras desenhadas. Esses exemplos confirmam a presença da Matemática nas Artes e vice versa. Foi através do número áureo e da seção áurea que se descobriu o que hoje chamamos de proporção divina, pois desde a antiguidade intrigou e fascinou grandes filósofos da matemática. Os números dourados são considerados o padrão de beleza, e artistas como Leonardo Da Vinci estudaram as proporções do corpo humano para encontrar a simetria que melhor se adequasse às suas pinturas, especialmente ao pintar retratos (CANEPPELE; MÜHL; FELDMANN, 2015).

Nos estudos de Leite *et al*. (2012) observou-se que é possível desenvolver atividades matemáticas dentro do teatro com a participação ativa e o interesse dos alunos que conseguem colocar em prática suas habilidades teatrais. Portanto, cabe aos educadores de ambas as áreas trabalhar em conjunto para que os alunos desenvolvam o raciocínio lógico dedutivo, gosto e percepção de leitura nas situações apresentadas, mesmo sendo consideradas disciplinas separadas, essas combinações podem levar a resultados muito bons, tanto na formação de professores como na aprendizagem dos alunos.

Ferreira (2015) utilizou como estratégia a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Arte, com a exploração de pinturas de diferentes períodos históricos e artísticos. A ação teve um papel fundamental para que conteúdos que antes eram trabalhados de maneira individual, passassem a fazer algum sentido para os sujeitos da pesquisa pela forma alternativa que foram apresentados.

A palavra geometria significa “medir a terra”, por isso é necessário identificar o que existe no mundo físico e visualizar o que se apresenta em três dimensões, criar conceitos em geometria e entender essa informação visual (BOYER, 1996). A geometria é uma ciência dedicada ao estudo do espaço e da forma, tornando-se um campo fértil para lidar com situações-problema e um tema de interesse natural para os alunos. A geometria básica pode ser pensada como conceitos geométricos identificados nos PCNs (1998, p. 39) que auxiliam no aprendizado de números e medidas, pois estimulam as crianças a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar padrões e vice-versa.

As atividades sobre geometria básica propiciaram uma ligação entre a Matemática e Arte que, segundo os PCNs (1998, p. 51)

> [...] é fundamental que os estudos do Espaço e Forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

O cinema também é utilizado para a interdisciplinaridade da arte com a matemática. No trabalho desenvolvido por Costa e*t al.* (2016), denominado “Curtas na escola”, foi possível por meio da utilização da técnica de *stop motion*, os alunos desenvolverem relações entre os conteúdos matemáticos e artísticos, de uma forma mais lúdica e criativa, através da elaboração de um mini roteiro para desenvolver a atividade proposta e posteriormente trabalharam na produção das imagens, para que pudessem produzir seus vídeos no final da atividade. Além disso, o mesmo autor avaliou a utilização da música nesse processo através da Banda Escolar que apresenta aulas e com teoria sobre a música, além da familiarização dos alunos com as notas musicais e com os instrumentos musicais, proporcionando diversas atividades escolares, como desfile escolar, participação da feira do livro e demais eventos em que são convidados. Houve uma evolução positiva no comportamento em sala de aula, as notas nas disciplinas curriculares aumentaram, os estudantes aprenderam a conviver com suas diferenças. Além disso, os alunos tiveram um aprendizado significativo em relação ao instrumento musical, em que envolve muita dedicação. Estas relações interdisciplinares entre Matemática e Artes serão discutidas com mais detalhes nas seções adiante.

A produção de pesquisa em Ensino de Matemática e arte é, ainda, bastante insipiente no Brasil. O número de pesquisas realizadas por ano é, de maneira geral, estável, sem picos notáveis, sem aumento significativo de produtividade. Os grupos interessados nesta área de pesquisa são bem pontuais, demarcados espacialmente, e concentrados na região Sul e Sudeste do Brasil (FLORES e WAGNER, 2014). Para

Leiria e Luz (2011) estas duas áreas do saber podem se conectar no processo de aprendizagem fazendo da escola um espaço cooperativo entre educandos e educadores, bem como entre os educadores da matemática e arte os quais poderão assumir uma atitude investigativa e desafiadora sobre seus fazeres e saberes.

Arruda, Fernandes e Esteves (2018) relataram que a interdisciplinaridade é um meio pelo qual os professores buscam novos métodos e experiências na prática colaborativa para desenvolver habilidades, estimular a curiosidade e estimular a aprendizagem ao longo da vida. Em geral, as artes visuais conseguem inserir o pensamento criativo no âmbito da matemática, que deixa de ser meramente simbólico, mas começa a assumir manifestações reais antes de ser abstraído e promover a consolidação do conhecimento. Os mesmos autores também relatam que arte e matemática são dois campos distintos, mas com forte entrelaçamento de histórias complementares. A integração de conteúdo visual no ensino de matemática pode estimular a criatividade, a concentração e facilitar o aprendizado.

Por exemplo, além da melhoria de aprendizado, o estudo interdisciplinar de Matemática com Arte pode ser praticado para que habilidades relativas à criatividade e à contextualização dos conteúdos sejam alcançadas (BARROS, 2017; SILVA; DOS SANTOS, 2016).

Diversos temas do currículo de Matemática podem ser abordados de forma interdisciplinar com Arte. Alguns destes assuntos incluem: razão, proporção, geometria plana, operações com números racionais, sequências numéricas, sólidos geométricos, área de polígonos, multiplicação, divisão e potenciação, círculo e circunferência, quadriláteros e áreas de figuras equivalentes. Esses conteúdos podem ser estudados, através da interpretação de obras de artes que trazem elementos matemáticos como a formação de ângulos, formas geométricas, mosaicos e diferenças arquitetônicas (BARTH, G. M. P., 2006; DA COSTA, J. A. F. *et al*., 2016; FERREIRA, R. J.; JUNIOR, M. A. K, 2015; FLUGSEDER, R. L.; VARGAS, N. P., 2021).

A aprendizagem da geometria possibilita que se desenvolvam habilidades para observar o espaço bi e tridimensional, assim minimizando algumas dificuldades, como a de percepção espacial no mundo físico (importante fator na alfabetização), visto que as formas geométricas estão inseridas rotineiramente na vida do ser humano (BARROS, P. B. Z, 2017; BARTH, G. M. P., 2006). O uso de ferramentas como

Tangram e Origami permitem diferenciar formas geométricas, como quadrado, triângulo e paralelogramo, gerando um espaço de aprendizagem e reflexão de forma contextualizada (FIGUEIREDO, T. D. *et al*, 2014; LEIRIA, R. D. C.; LUZ, V. S., 2011; SILVA, C., 2016). Assim, no acoplamento entre matemática e arte, vemos boas oportunidades para trabalhar de forma interdisciplinar em um ambiente escolar, pois vivemos em um mundo de formas e imagens, portanto há um contexto de exploração que pode transcender os conteúdos de cada disciplina (Figueredo *et al*, 2014).

Dessa forma, percebe-se que existe uma gama de possibilidades de se trabalhar matemática com a arte, e que há uma ampla e diversificada aquisição do conhecimento matemático e artístico.

A interdisciplinaridade entre a matemática e a arte também foi estudada por Serenato (2008) que apresentou uma pesquisa de cunho teórico, onde buscou traçar alguns dos pontos de contato entre matemática e artes de modo a fundamentar um diálogo interdisciplinar entre esses dois campos que muitas vezes são vistos como opostos, esperando assim, contribuir com as possibilidades possíveis decorrentes dessa aproximação entre elas. Para tanto, buscaram enfatizar a relação de mão dupla entre matemática e arte por meio de uma pequena contextualização histórica das duas. Por fim, cita o artista Kandinsky e o matemático Poincaré, que a nosso ver, encarnam o pensamento interdisciplinar e o comportamento imparcial.

Os autores tinham como objetivo principal verificar as possibilidades de diálogo interdisciplinar entre matemática e artes, duas áreas do conhecimento que muitas vezes são vistas como antagônicas. Nesse sentido, percebemos que a matemática está envolvida na arte de diferentes formas, de forma consciente ou não, na obra de vários artistas, desde a antiguidade até os dias atuais. Um exemplo claro pode ser visto no Renascimento, quando a arte combinou os conceitos matemáticos de perspectiva e proporção áurea em busca da perfeição estética desejada na época. Discutiu-se que a arte, assim como a matemática, é uma forma eficaz de alcançar o conhecimento, ainda que de forma diferente. Ou seja, se a matemática pudesse ser construída sobre mais conhecimento intelectual, fundamentada na razão, a arte compreenderia a realidade por meio da experiência sensível e do prazer estético.

A arte, como conhecimento, que propõe à Educação, além de promover o conhecimento cultural, e também o pensamento visual, artístico, matemático, estético, foi o foco do estudo de Barth (2006) que objetivou na sua pesquisa aliar à percepção o pensamento visual artístico e matemático. Esperando-se haver uma clara intenção de evidenciar que as imagens, a intuição, a reflexão, a análise do que se vê e a organização do pensamento fazem parte do processo de domínio do conhecimento cognitivo.

Inicialmente, o objetivo é enfatizar que as ideias podem ser expressas em imagens e promover o desenho geométrico no nível linguístico, entendendo o significado do que é visto através da arte e da matemática; eles também promovem a ideia de espaço identificando o conteúdo do desenho geométrico em algumas das obras de Maurits Cornelis Escher e o conhecimento matemático formal; contribuir para a sistematização do conhecimento das artes gráficas, do desenho geométrico e das artes visuais em geral para formar uma fonte de conhecimento matemático; e auxiliar na reflexão sobre as inter-relações arte/matemática. Assim, deve-se valorar a intuição tal como Escher, por exemplo, liberou a intuição matemática e a utilizou para realizar gravuras e, se assim não o fosse, jamais comporia obras como as aqui analisadas, pois não se teria aprendido conteúdos matemáticos acadêmicos e, a partir daí, dado início a uma nova dimensão espacial – tetradimensional, representada, embora impossível de existir no espaço tridimensional, com formas e criatividade, foi transcendente e deixou a arte o envolver.

Arruda; Fernandes; Esteves (2018) estudaram a arte, como área complementar do conhecimento no ensino de matemática, abordaram a relação entre matemática e arte, visualizando a matemática e a habilidade docente no ensino de matemática. Como pode ser visto a partir da discussão proposta, arte e matemática são dois campos distintos, mas com um forte entrelaçamento de histórias complementares. A integração de conteúdo visual no ensino de matemática pode estimular a criatividade, estimular a concentração e facilitar o aprendizado.

Os dados coletados abrangem grandes marcos históricos nas áreas de matemática e arte. Para análise e discussão, a pesquisa encontrada está organizada de acordo com a especificidade de cada tema identificado no material coletado, seguida de uma análise dos fundamentos teóricos de cada texto.

3.2 Manifestações da prática interdisciplinar de Matemática através da arte

3.2.1 PINTURAS ARTÍSTICAS

O trabalho de Barros (2017) teve como o objetivo revitalizar o ensino de geometria com uma perspectiva interdisciplinar entre matemática e arte. O estudo envolveu alunos do sexto ano, utilizando diversos recursos, principalmente recursos técnicos, banco de questões e desenhos artísticos. A dinâmica promoveu a melhoria no processo ensino/aprendizagem da Geometria básica, a revitalização do ensino de Geometria e demonstrou a importância de se trabalhar os conceitos geométricos nos currículos escolares. Mesmo com um resultado satisfatório em se trabalhar a “Geometria” de forma interdisciplinar entre a Arte e Matemática, observou-se que os índices alcançados foram pequenos pela grande dificuldade dos alunos em desenvolver algumas atividades, isto se deve ao pouco trabalho desenvolvido na sala de aula em relação aos conceitos de Geometria.

Trindade *et al* (2015), também estudaram a natureza interdisciplinar do ensino e aprendizagem nas escolas de ensino médio por meio das artes e da matemática, por meio de um estudo do conteúdo matemático de figuras planas. Os alunos do ensino médio aprendem sobre a biografia e as obras de arte do artista Piet Mondrian. Os alunos leem as imagens contextualizadas para identificar o uso da cor, estilo de pintura, linha e forma presentes na obra plástica.

Como resultado, encontraram que os alunos realizaram um percurso crítico e estético para a compreensão das obras de arte com os fatos históricos, sociais e culturais, com a história da arte, com a biografia do artista e com a técnica pictórica, juntamente com o conteúdo de Matemática. As práticas pedagógicas aplicadas nesse estudo foram compatíveis com o conteúdo de arte e de matemática.

Assim, os alunos iniciaram as atividades propostas a partir das obras de arte de Piet Mondrian. Observaram os aspectos estéticos e técnicos, pontos relevantes que proporcionaram o desenvolvido pelo potencial criador do aluno, por meio da leitura, fruição e produção com os elementos visuais e os conceitos matemáticos dos polígonos, consequentemente, compreenderam as medidas das arestas e o cálculo da área da superfície das figuras planas presentes nas produções artísticas.

Dessa forma, concluíram que o projeto é relevante porque a natureza interdisciplinar da prática docente permite que os alunos se engajem no diálogo, melhorem a geração de textos e a compreensão da matemática e retenham aprendizados importantes por todo o desenvolvimento em sala de aula, sendo o conhecimento contextualizado.

A valorização da diversidade humana torna-se essencial na ação interdisciplinar, ou seja, ultrapassar os limites da ciência sem infringir ou adulterar a essência de cada indivíduo. A construção do conhecimento está centrada em um ambiente colaborativo que possibilita criticidade, autonomia, questionamento, contribuição e interpretação, com vistas a tornar a interdisciplinaridade uma sugestão no processo de ensino de alunos na educação básica.

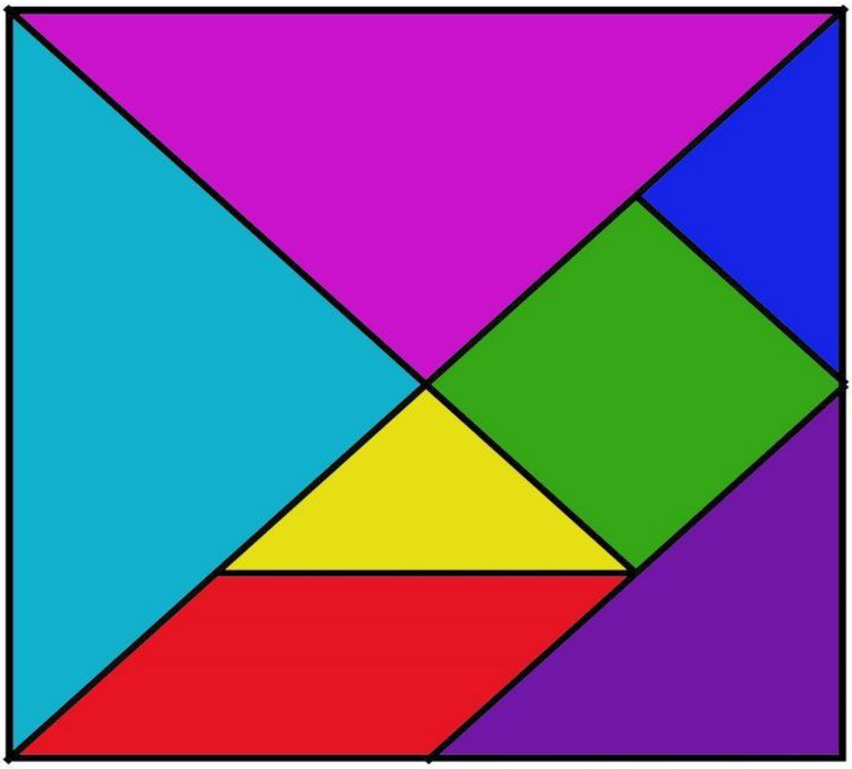
3.2.2 DOBRADURAS

A técnica de Origami foi utilizada por Silva (2016) para promover a interação da matemática e das artes. Essa técnica utiliza formas geométricas na construção artística de figuras e objetos, e o papel colorido é um recurso que pode ser utilizado para enriquecer o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos.

O estudo desenvolvido em uma escola brasileira no Japão, apresenta os resultados de uma intervenção interdisciplinar explorando temas e conceitos de ecologia (ecossistemas e fauna do Brasil), geografia (mapas de vegetação do Brasil) e relacionados ao uso do origami como ensino de matemática no campo da geometria e ferramentas de aprendizagem, especialmente aquelas que envolvem a classificação morfológica de figuras planas. Através do diálogo entre ciência e arte, são organizadas atividades para proporcionar um ambiente de aprendizagem em que a geometria possa participar. As atividades práticas utilizam origami, recorte, colagem e pintura como ferramentas para a confecção de figuras geométricas e, posteriormente, construção de animais brasileiros e seu ambiente natural. Como resultado, os alunos se envolveram ativamente na prática proposta, e o estudo da geometria é explorado de forma artística. O conteúdo proposto vai além do espaço reservado aos projetos para serem replicados e discutidos nas aulas de outros professores.

O Tangram é um jogo antigo composto por sete peças (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo) através das quais podem ser representadas inúmeras figuras, utilizando todas as peças sem sobreposição. É um material didático interessante que enriquece o conhecimento dos alunos e estimula sua curiosidade e criatividade (BEZERRA e LOPES, 2016). Um exemplo é mostrado na **fig. 1**.

Figura 1. Tangram.



Fonte: ttps://i.pinimg.com/736x/a8/35/cb/a835cb22683dc0c97fb7e8bbdf23b9c8.jpg.

Dessa forma, os autores Bezerra e Lopes (2016), objetivaram explorar situações em que o manuseio de material manipulável é parte integrante do processo de atividade da solução. Ou seja, para compreender determinada situação-problema, os alunos precisam necessariamente recorrer ao suporte do material e sua análise. Dessa forma, eles trabalharam com uma turma do sexto ano, relacionando o conteúdo de geometria plana em relação aos materiais manipuláveis.

Nesse contexto, o material manipulável atua como elemento facilitador no desenvolvimento de conceitos e atividades, pois permite que os alunos visualizem melhor o conteúdo geométrico e as propriedades e conceitos que estão sendo trabalhados. Os resultados mostram que materiais manipuláveis podem se apresentar como potencializadores da abstração de conteúdo e reconhecer suas representações inerentemente diferentes.

Além disso, pode-se inferir que o engajamento físico do tangram é fundamental para o processo de abstração do conceito de área e perímetro e a percepção de suas diferentes representações. O material manipulável, quando devidamente vinculado a ação docente e ao comportamento do aluno, é, na verdade, um recurso que potencializa o processo de ensino e aprendizagem de conceitos e propriedades relacionados à geometria plana, principalmente quando se trata de conceitos de área e perímetro. Construir e reconstruir figuras diversas vezes, em relação ao que é apresentado, permite ao aluno ampliar sua visão das figuras e propriedades geométricas, principalmente a partir de exercícios táteis (o ato de “pegar”) em atividades.

Para Leiria e Luz (2011), trabalhar de modo interdisciplinar entre duas áreas do conhecimento, a arte e matemática, lidando com tangrams. Esse quebra-cabeça, também conhecido como jogo de sete peças, é usado por professores de matemática como ferramenta para promover a compreensão das formas geométricas.

Além de promover o estudo da geometria, também fomenta a criatividade e o raciocínio lógico, que são a base da matemática. Em seguida, realizaram uma oficina de ensino intitulada “Arte e Matemática em Tangrams” em uma escola de educação básica da rede pública do município de Rio Grande/RS. Eles então começaram a criar Tangrams, utilizando dobraduras e as imagens de obras de arte dos pintores famosos, e os resultados puderam validar os momentos do processo de formação, onde os professores tiveram a oportunidade de aprender conceitos de outras ciências que não eram sua especialidade, assim como possibilidade de reflexão no que concerne o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática.

Além disso, possibilita aos educandos desenvolver sua compreensão da realidade que o circunda de forma significativa, através do convívio com o outro e de atividades que lhe desperte para o mundo, seja por analogias, interpretações cognitivas ou discussões acerca de assuntos que surgem frente à atividade proposta.

Um espaço reflexivo no qual as ideias são compartilhadas pode configurar educadores com um novo pensar metodológico. Considerando o estudo interdisciplinar entre matemática e artes, essas duas áreas do conhecimento podem se aproximar no processo de aprendizagem, tornando a escola um espaço colaborativo entre alunos e entre os educadores das diferentes ciências, que podem assumir uma postura investigativa e desafiadora sobre seus fazeres e saberes.

O estudo feito por Costa (2016) revela que com o movimento cubista foi possível aprender sobre conteúdos como sólidos geométricos e suas classificações, conceitos de face, aresta, vértice, ponto e retas. Outros movimentos da arte moderna, como o surrealismo, com a obra de Salvador Dalí “Persistência da Memória” (1931), mostraram as características de cada peça do Tangram que surgia, explorando as diversas figuras geométricas que o constitui, bem como as imagens que podem ser formadas com a utilização de todas as suas sete peças, abordando os conceitos de relações trigonométricas, teoria dos grafos, geometria plana, polinômios, frações, lógica, e etc.

Assim, concluíram que foi possível vivenciar momentos intensos no processo de formação, tendo a oportunidade de entender conceitos de outras ciências que não a de nossa especialidade, assim como possibilidade de reflexão no que concerne o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. Ainda possibilita aos educandos desenvolver sua compreensão da realidade que o circunda de forma significativa, através do convívio com o outro e de atividades que lhe desperte o interesse, seja por analogias, interpretações cognitivas ou discussões acerca de assuntos que surgem frente à atividade proposta.

3.2.3 MAQUETES DE OBRAS ARQUITETÔNICAS

A interdisciplinaridade entre matemática e arte também foi observada nos estudos de Flugseder e Vargas (2021). Eles desenvolveram um projeto com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, tendo como objetivo a construção de uma maquete da escola, utilizando os conhecimentos estudados nos conteúdos de escala, desenho tridimensional e bidimensional e o estudo das diferenças arquitetônicas.

Na atividade, os alunos observaram desenhos de diferentes formas, como por exemplo: frutas e louças. Dessa forma, tomaram o conhecimento do significado de *natureza morta* e quais são as diferenças entre essas imagens e as de desenhos arquitetônicos de plantas de construção. Após essa etapa, os estudantes foram solicitados a desenhar um cubo em uma superfície bidimensional, e em seguida construírem um cubo tridimensional com palitos.

Assim, possibilitou-se a descoberta de que, a partir de formas geométricas, pode-se desenhar diversas formas arquitetônicas como casas e prédios. Ao realizarem a observação de imagens, criarem um desenho bidimensional e a construírem de uma forma tridimensional.

Na Atividade 2, em que os alunos tomaram conhecimento das diferenças arquitetônicas existentes, os alunos estudaram a Arte Grega, Romana e Gótica, a partir da arquitetura de cada período e as descobertas que possibilitaram as construções arquitetônicas que temos.

O invento e o uso de diferentes materiais como mármore, blocos de pedra, argamassa e, posteriormente, o ferro, possibilitou aos arquitetos, o desenvolvimento do estilo de arquitetura de cada época, e assim, ao conhecer esses detalhes, possibilitou-se, ao estudante, um maior entendimento de como certas estruturas conseguiram permanecer intactas por tanto tempo. Na Atividade 3, os alunos incluíram os conceitos matemáticos, mais precisamente o cálculo da escala em suas atividades. Posteriormente, tomaram conhecimento de uma aplicação prática para um conteúdo estudado em sala de aula, já que todos os dias, professores são questionados em relação à aplicabilidade que um conteúdo tem na vida cotidiana.

Nas práticas que seguiram, ou seja, Atividade 4, 5 e 6, os estudantes foram desafiados a dividirem-se em grupos e realizarem o que estava sendo proposto, de modo a incluírem além dos conteúdos que haviam sido estudados nas aulas de Matemática e Artes Visuais, as práticas de integração, trabalho em grupo, respeito mútuo e cooperação. Dessa forma, procurou-se alinhar teoria e prática de modo a demonstrar que o aluno materializa as suas experiências vivenciadas em sala de aula na sua vida cotidiana mesmo que inconscientemente. Isso demonstra uma apreensão da teoria na *práxis*, ou seja, os conhecimentos apreendidos nas aulas de Matemática são efetivamente utilizados fora da sala de aula, o que torna a aprendizagem mais interessante e gerando uma efetiva participação dos estudantes na realização desse projeto.

3.2.4 TEATRO

Sachser (2017) propôs um trabalho interdisciplinar que une Matemática e Teatro. Sendo assim, tornar o ensino da Matemática mais interessante, e trazer para dentro da sala de aula o ensino do Teatro. Por fim, analisar como os alunos de turmas do ensino fundamental colaborariam com ideias para o desenvolvimento do projeto.

A primeira Ação para iniciar os trabalhos aconteceu em uma aula de Artes através de uma conversa com as turmas. No início foi conversado sobre o que é arte, relembrando que Teatro também é Arte, pois isso já havia sido trabalhado anteriormente. Depois os alunos se reuniram em grupos e juntos elencaram temas de interesse para montar, futuramente, uma peça de teatro. Eles também tiveram que elencar possibilidades de trabalhar matemática com esses temas. Por fim, tiveram que escrever o que gostam e o que não gostam em Matemática.

Uma das turmas trouxe como sugestões: musical, magia, *aliens* e *minions*. Já outra turma: Grenal, Einstein, super-heróis, terror, releituras de peças já existentes. Em relação as possibilidades de trabalhar matemática com os temas por eles elencados, em ambas as turmas, os alunos citaram apenas quantidades e cálculos. Após o levantamento dos interesses dos alunos iniciou-se a segunda Ação, que foi constituída de duas grandes etapas: aulas de teatro e escrita do roteiro. Os alunos tiveram três aulas de teatro, em que uma graduanda do curso de Licenciatura em Teatro, ensina e desenvolve práticas teatrais. Nas aulas de matemática, os alunos escreveram o roteiro e as possibilidades de envolver matemática foram aprofundadas.

Na terceira Ação, foram confeccionados cenários e figurinos nas aulas de artes e matemática. Esse processo ocorreu de forma simultânea e durou quatro semanas. Na aula de artes aconteceu a criação e confecção. Enquanto na aula de matemática desenvolveram conceitos de geometria e medidas para a confecção. A culminância do projeto aconteceu com a apresentação das peças teatrais.

O Teatro Pedagógico também foi escolhido como estratégia para interdisciplinaridade entre a arte e a matemática nos estudos de Edilson (2011) que avaliou ser possível reunir emoção e razão, alavancando desta maneira, o interesse dos participantes, disseminando informações e popularizando, de modo divertido e lúdico, conhecimentos científicos de diversas áreas, neste caso, da Matemática.

Com a escolha de apresentar a Matemática deste modo, obtiveram-se alguns resultados muito interessantes. Durante a peça, percebeu-se que os estudantes deixam de lado o preconceito e o medo pela Matemática, não mais pensando que tudo na Matemática é chato, difícil e sem aplicação alguma. Após a peça, durante o momento de diálogo, notou-se também que os participantes fazem diversas perguntas, interagem entre si e com os monitores, tiram dúvidas e dialogam a respeito dos conceitos vistos durante a encenação, sinalizando deste modo, uma possível melhora no aprendizado do tema. Os professores também consideraram a vivência muito produtiva, no sentido de ser mais uma alternativa para o ensino de Matemática.

Esse trabalho buscou apresentar não uma maneira diferenciada de ensinar Matemática, mas sim, apresentar uma proposta de discussão que nos leve a refletir a respeito de encarar a Matemática a partir de uma ótica mais próxima da realidade. Na busca de estratégias que possam auxiliar a prática docente em Matemática, percebeu-se a grande importância do uso da História da Matemática como estratégia pedagógica. É claro que se deve tomar um cuidado no sentido de não ficar apenas na superficialidade, apresentando curiosidades históricas, afinal o objetivo é entender como se dá o processo de construção de determinado conceito em Matemática e o caráter humano envolvido nesse processo.

O conhecimento a respeito do Teatro Pedagógico também veio contribuir no sentido de ser uma alternativa mais "viva", mais dinâmica no processo de ensinar. A capacidade de reunir razão e emoção, conforme visto na fundamentação teórica é muito válida levando em consideração a pouca integração social atualmente no sistema de ensino. Além disso, o teatro pelas suas características próprias pode instigar, surpreender e chamar a atenção do público. E, no momento em que é combinado a temas científicos, o Teatro Pedagógico faz o estudante/expectador perguntar, discordar, dialogar e querer saber mais.

Ao lado desses dois aspectos vistos, temos os Museus de Ciências como espaços propícios para uma educação não-formal, que procuram popularizar a ciência por meio de exibições interativas e atividades capazes de envolver os visitantes na construção e/ou no entendimento de algum conhecimento. Neste contexto, foi apresentado o relato da experiência que aborda uma visita temática de Matemática realizada no Museu de Ciências (Parque da Ciência Newton Freire Maia (PNFM), situado no município de Pinhais, estado do Paraná), e na qual foram utilizados o Teatro Pedagógico e a História da Matemática como estratégias pedagógicas. Ficou evidente que é possível realizar atividades criativas e que tragam resultados satisfatórios no ensino de Matemática. Contudo, são poucas as experiências divulgadas nesse sentido. Desta maneira, incentiva-se que outras experiências sejam colocadas em prática, assim como sejam realizados mais estudos, buscando avaliar as suas contribuições num ensino de Matemática com mais qualidade.

Na mesma abordagem Leite *et al.* (2012) objetivaram unir o conhecimento de português e matemática de forma lúdica, fazendo com que estimulasse o interesse dos alunos para obter novos conhecimentos e adquirissem a prática relacionada ao seu convívio em grupo. Sendo assim, teatro foi a oficina escolhida para dar dinâmica aos conteúdos das duas disciplinas.

O texto base escolhido vem do livro O Homem que Calculava do professor de matemática Júlio Cesar de Melo e Sousa, conhecido sob o pseudônimo de Malba Tahan, conhecido no Brasil e no mundo por seus livros e fábulas matematicamente ambientadas no Oriente. Onde se destaca a incrível história de três irmãos que tentam fazer a repartição de uma herança.

Dessa forma, no processo de ensino-aprendizagem o Teatro se torna um instrumento facilitador para o educador que estará entendendo melhor as necessidades do aluno, e isso se dá porque o teatro desenvolve o autoconhecimento do aluno, ajuda a controlar suas emoções, a respeitar o próximo e a despertar a criatividade e a imaginação.

3.2.5 CINEMA

A interdisciplinaridade da arte com a matemática foi avaliada por Costa *et al.* (2016) no projeto "Curtas na escola" destinado a duzentos alunos de quatro escolas da rede pública de ensino da cidade do Rio Grande/RS.

Através da metodologia interdisciplinar, e por meio da utilização da técnica de *stop motion*, os alunos puderam desenvolver relações entre os conteúdos matemáticos e artísticos, de uma forma mais lúdica e criativa. Foi apresentado para os alunos a aproximação entre as duas áreas do conhecimento, traçando um diálogo com a linguagem cinematográfica desde seu primórdio até os dias atuais, entrelaçando sempre que possível com os conteúdos matemáticos.

Em seguida, foram apresentadas três propostas distintas, nas quais os próprios alunos escolhiam o que queriam desenvolver. Os estudantes optaram pela oficina 3 – Esta oficina tinha como base o movimento concretista e a vida e obra do artista brasileiro Geraldo de Barros, junto a isso, eram abordados conceitos matemáticos perceptíveis na obra do artista, tais como: retas, eixos e figuras geométricas. Com base na oficina escolhida os alunos tinham que elaborar um mini roteiro para desenvolver a atividade proposta, que era a criação de curtas metragens utilizando a técnica de *stop motion*, foi previsto a utilização de materiais como: câmeras digitais, software de edição de imagem e vídeo (MovieMaker e Photoscape).

Na sequência, os alunos tiveram que trabalhar na produção das imagens, para que pudessem produzir seus vídeos. No mesmo encontro ao final da produção, foi criado um espaço de apreciação dos trabalhos realizados, possibilitando o diálogo. Através deste trabalho interdisciplinar foi possível desenvolver propostas que possibilitassem aos alunos uma maior aproximação com as áreas de Arte e Matemática sob uma diferente perspectiva, tendo em vista que os mesmos já possuem contato com as disciplinas quando trabalhadas separadamente. Nas oficinas os estudantes eram estimulados a participar das atividades, colaborar com suas vivências e pontos de vista, de modo a contribuir para um trabalho significativo.

Desta forma, o programa também permitiu que os oficineiros experimentassem o ambiente escolar e suas diversidades, observando os desafios e possibilidades do trabalho interdisciplinar.

A articulações entre a matemática e a arte do cinema também foi objeto de estudo de Bona e Zoboli (2020). Eles propuseram em um primeiro momento, algumas articulações entre a matemática, a arte do cinema e a filosofia, deslocamento que promove uma crítica ao estatuto dos saberes matemáticos. Este ensaio propõe uma aproximação entre a matemática e a arte do cinema enquanto prática pedagógica.

Desse modo, foram apresentadas algumas articulações entre a matemática, a arte do cinema e a filosofia, com a intenção de criticar uma tradição matemática que se define soberana, racional, dura e transcendente. O diálogo entre matemática e arte que foi realizado neste ensaio é forjado nos espaços educacionais, ou seja, é criado no plano da experiência em lugares em que se faz educação. O ensaio parte do pressuposto de que assistir a filmes pode ser uma linha de fuga construída para que outras matemáticas, além da hegemônica, para que possam ser pensadas na experiência escolar. “O Jogo da Imitação” (2014), “O homem que Viu o Infinito” (2015) e “Estrelas Além do Tempo” (2016) são filmes trazidos ao texto para pensar práticas pedagógicas que possibilitem construir diferentes *perfectos e afectos*, diante de uma matemática homogenia e que transpõe sua rigidez interna para o campo das práticas.

Concluiu-se que a arte do cinema, diante da rigidez pedagógica que caracteriza grande parte das aulas de matemática, em todos os níveis, provoca rachaduras nos muros axiomáticos que prometem isolar a matemática dominante do mundo da vida. Como resultados, perceberam que deslocar a matemática para o campo das artes, do cinema, provoca o surgimento de um campo de possibilidades criativas, filosóficas, no sentido deleuziano. O cinema, assim, torna-se catalizador de transformação das práticas pedagógicas e dos sujeitos, alunos e professores de matemática.

Silva, Morais e Santos (2021) trabalharam na perspectiva de investigar as possibilidades da utilização do Cinema associado à leitura, elaboração e resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, para tal foi selecionado o filme *“O Menino que Descobriu o Vento”* e, a partir dele, foram elaboradas situações problemas com o intuito de contextualizar a unidade temática *“Grandezas e Medidas”* em acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Para este trabalho, apresenta-se um problema denominado “Problema do Tambor de Água” baseado no citado filme. Inicialmente, ouve uma breve discussão sobre a utilização do cinema na sala de aula, bem como nas aulas de Matemática e a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica contemplando as concepções de alguns autores, em seguida, explicitaram a metodologia utilizada para realização deste trabalho, a análise dos dados e as considerações finais.

Os resultados apontaram que a utilização de filmes associado à Resolução de Problemas é uma importante estratégia para o planejamento de tarefas matemáticas, pois uma abordagem interdisciplinar pode propiciar a criatividade, a autonomia, o pensamento matemático e o uso de tecnologias.

A criação dos problemas a partir do filme escolhido promoveu o debate, a busca pelo entrelaçamento com as situações reportadas nas cenas escolhidas e o entendimento que a Matemática pode ser abordada em contexto, bem como diálogo com a realidade. Por hora, a pesquisa se encontra na fase de criação de problemas a partir do filme escolhido, pois devido à pandemia não foi possível ir a campo desenvolver as atividades com os estudantes da Educação Básica. Contudo, as reflexões na construção deste trabalho contribuíram de forma significativa, para o aperfeiçoamento da prática dos pesquisadores.

3.2.6 MÚSICA

A música foi objeto de estudo interdisciplinar no trabalho de Costa *et al.* (2016) com o projeto conhecido como Banda Escolar, e tem influenciado na vida dos alunos e despertado o interesse, tanto em relação ao ensino quanto no convívio familiar. A ação objetivou desenvolver nos alunos o raciocínio matemático, a capacidade de concentração e a adquirem mais responsabilidade, disciplina, interesse em sala de aula e amor pela escola.

As aulas iniciaram com teoria sobre a música, além da familiarização dos alunos com as notas musicais e com os instrumentos musicais. Essa proposta ocorreu no período extraclasse, três vezes por semana, com duração de duas horas, com aproximadamente 30 alunos. O grupo participa de diversas atividades escolares, como desfile escolar, participação da feira do livro e demais eventos em que são convidados.

Conforme o andamento do projeto os alunos criaram laços de amizade, que os próprios consideram a Escola Banda como uma família. Esse acompanhamento que temos deles é muito importante, pois aos poucos fomos observando as mudanças ocorridas durante esse processo. Houve uma evolução positiva no comportamento em sala de aula, as notas nas disciplinas curriculares aumentaram, os estudantes aprenderam a conviver com suas diferenças, além disso os alunos tiveram um aprendizado significativo em relação ao instrumento musical, o que envolve muita dedicação.

Vasconcelos *et al.* (2021) analisaram videoaulas de iniciação musical com elementos matemáticos, possibilitando que o aluno consiga utilizar variados conceitos, de uma forma mais ilustrada, por meio da Teoria Musical (TM); além disso, existe a possibilidade de se trabalhar a matematização do processo de produção de sons em instrumentos de cordas e de tubos, inserida no contexto do ensino de acústica.

Deste modo, a Física, aliada à Matemática e à Teoria Musical (TM) potencializaria conceitos normalmente trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Buscou-se utilizar nas vídeo aulas linguagem adequada ao Ensino Médio, sendo este o público-alvo da proposta. Ao final da pesquisa, conclui-se que a conciliação entre Música e Matemática pode se apresentar como opção metodológica para aqueles que mostram certo encantamento com a Música, mas têm dificuldade com os conceitos matemáticos.

Tanto a Matemática quanto a Música estão intimamente ligadas à vida de todas as pessoas. Nesse contexto, Bromberg (2014) destacou que

> Durante alguns períodos da história, a Música e a Matemática foram ciências que compartilharam seus conceitos e discussões. Um dos períodos no qual essa comunhão se deu de maneira significativa foi o Renascimento. A Música era então classificada como ciência e, pertencendo ao grupo das matemáticas, dividia seu espaço com a Aritmética, a quem era subordinada, com a Geometria e a Astronomia. A relevância da subalternação das ciências fica clara, visto que, como mostrado, aos problemas musicais existiam soluções matemáticas, tanto textuais como práticas. A adoção ou não dessas soluções não estava vinculada à acessibilidade a elas, mas ao fato de elas poderem pertencer à noção de ciência adotada pelo teórico, que legitimava e norteava o sistema escolhido, como demonstrou a análise das obras. A historiografia que aborda esses dois autores (Palisca, Walker, Drake, Coelho, Cohen, entre outros), surpreendentemente, ignora não só as suas demonstrações matemáticas, mas também suas arguições sobre a classificação das ciências.

Porém, cada um, em sua própria história, em sua própria experiência, se relaciona com as duas de forma diferente. Pensando-se numa possível aplicação em sala de aula, seria interessante que as explicações fossem mais ilustrativas, tivessem exemplos de sons tocados ou cantados para prender a atenção do aluno e tornar mais fácil seu entendimento. Abre-se também a hipótese de esta conciliação ser expandida para além do Ensino Médio, ou seja, em cursos de graduação para futuros docentes.

3.3 A técnica *String Art*

String Art é uma técnica onde o artista faz pinturas por meio de linhas e pinos, visto que, muitas dessas artes são feitas manualmente onde a criatividade do artista é totalmente necessária (SOUZA, 2021).

Birsak et al. (2018) ressalta ainda que *String art* é uma técnica para a criação de obras de arte visuais onde as imagens emergem de um conjunto de cordas que são estendidas entre os pinos. Lebouthillier e Sajna (2020) afirmam ainda que a arte das cordas é um arranjo de pinos em uma placa com fios amarrados entre esses pinos para formar belos padrões geométricos.

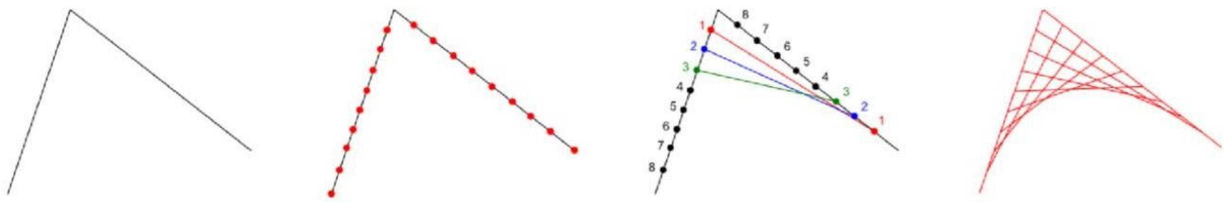
Segundo Zrinšÿak (2019**)** a arte com agulha e linha, que em inglês é chamada de "*string art*" é uma técnica de fazer imagens geométricas ou imagens da vida cotidiana. Essas imagens artísticas têm como material base: papelão ou madeira com pregos, pinos ou agulhas e linha. Essa técnica utiliza fios coloridos amarrados entre os pontos para formar um padrão geométrico e, em seguida, toda a imagem. Os pregos são pregados na base de madeira na forma desejada e puxando as linhas entre eles, a forma selecionada é obtida. Simplificando, a *string art* envolve o uso de cordas, fios, linhas ou fibras formando uma imagem artística.

A característica que define a arte das cordas é a singularidade modesta e a fina delicadeza do material. Seja o fio sobre tela, superfície de madeira ou como instalação, os efeitos de tais composições incluem tons sutis de cor, textura e ilusões de ótica. A característica de tal "costurado" é sua transparência, que permite uma sobreposição encantadora e atmosférica das formas e imagens.

Pode-se entender a *String art* como uma forma de *design* que se tornou popular nos anos 70. Composto de cordas coloridas conectadas na forma de padrões e formas geométricas interessantes. A arte das cordas tem sua base e origens na matemática, projetando inúmeras obras de arte.

A ideia é fazer um desenho com linhas retas, e dividir as linhas (geralmente em intervalos regulares) e conectando os pontos em duas linhas adjacentes, novamente com linhas retas (1 a 1, 2 a 2 e assim sucessivamente). Um exemplo é mostrado na **Fig. 2**.

Figura 2. Exemplo de passo a passo para a confecção de figura geométrica usando String Art.



Fonte: Zrinšÿak (2019).

A técnica *string Art* foi utilizada pela matemática Mary Everest, no século XIX, como uma forma de ensinar matemática para crianças. Surgiu como uma técnica para criar telas usando-se de linhas e pinos, onde os pinos são fixos em uma tábua para que através de uma linha ligando nesses pinos forma-se padrões ou desenhos complexos. Essa técnica passou a ser bastante conhecida nos anos 60 com os *hippies.*

Yan S., Cai e Yan B. (2020**)** define a *String art* como uma forma de arte abstrata que emprega linhas, cordas ou retas para obter uma imagem natural ou padrões simples. Uma imagem de arte de cordas geralmente é formada pela passagem de uma corda por uma série de pregos presos em uma placa de madeira.

3.3.1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE A *STRING ART*

A chamada costura de curvas, ou seja, a arte do barbante, foi idealizada no final do século XIX por Mary Everest Boole, conhecida por suas muitas ideias inovadoras no ensino prático de matemática aplicando conhecimentos e métodos que desenvolvem o interesse das crianças pela ciência. Foi esse método que a ajudou a entender a conexão entre a tangente e a curva. Estimulou habilidades matemáticas e artísticas ao conectar esse método a teoria e a prática.

A versão moderna dessas curvas geométricas é a curva de Bézier. Pierre Bézier desenvolveu uma fórmula de curva inspirada no algoritmo de Castejau, e foi publicada em 1962 inspirado vários artistas, embora tenha sido concebido como uma ferramenta matemática. O artista americano John Eichinger criou desenhos geométricos de cordas. Ele os chamou de "cordas mandalas” na palavra hindu mandala, que significa “círculo dentro de um círculo”. Suas obras foram vendidas pela primeira vez no final da década de 1960. Livro de arte de cordas chamado Symmography by Lois Kreischer foi publicado em 1971.

Algumas grandes mentes ajudaram desenvolver arte das cordas. A primeira delas foi Mary Everest Boole nascida em 11 de março de 1832 na Inglaterra já em sua juventude ela tinha idéias inovadoras. Passou a infância na Inglaterra e França. Aos 18 anos, durante uma visita à Irlanda, conheceu George Boole (1815-1864), então Professor autodidata de matemática de 35 anos no Queen's Cork College. Jorge abriu sua escola aos 20 anos, ele evitou os métodos tradicionais de aprendizado e preferiu aplicar o conhecimento prático. Apesar da grande diferença de idade, Mary e George estavam interessados em ciência e matemática e, em particular, compartilharam uma abordagem igualitária para aprender através da aplicação prática do conhecimento. Em 1855 Mary se casou com George, que mais tarde ficou conhecido como o inventor das conhecidas álgebras booleanas.

Com George, Mary desenvolveu seus conhecimentos matemáticos e depois da sua morte continuou a refinar suas idéias de aprendizagem aplicando o conhecimento e mantendo diferentes seminários sobre este tema. Ela escreveu dois livros, A Preparação da Criança para a Ciência (1904) e Filosofia e diversão da Álgebra (1909). Embora não haja dados exatos sobre quando Mary aplicou pela primeira vez o método de costurar curvas, mas suas anotações podem-se inferir que ela era muito jovem.

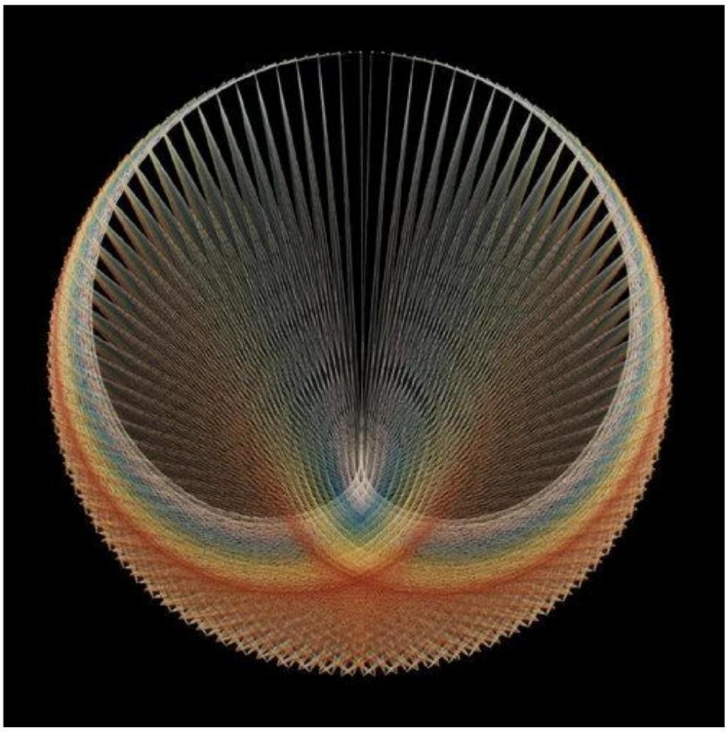
Mais tarde, a arte de costurar a ajudou a entender a conexão entre a curva e as tangentes a essa curva, e a professora da escola lhe deu instruções em que direção ela poderia continuar sua pesquisa. Costurar curvas um tipo de artesanato acessível até para crianças, porque não requer conhecimentos de matemática básica, e Mary recomendou que fosse uma atividade para crianças no jardim de infância. A beleza desse método na medida em que conecta teoria e prática; estimula a imaginação matemática e artística, ao fazê-lo requer apenas habilidades práticas básicas.

O nome "Bézier" é conhecido pelos artistas gráficos de computador por causa da curva de Bézier. Bézier foi um famoso inventor, engenheiro e matemático. Depois de se formar na Universidade de Paris, ele encontrou um emprego como engenheiro em uma empresa automobilística. Foi aí que as habilidades matemáticas de Bézier foram testadas. Ele teve que encontrar uma maneira de descrever todos os pontos da curva para ajudar na produção de um projeto. Isso foi muito antes da computação gráfica em 3D.

Bézier então inventou um sistema de curvas chamado “Curva de Bézier”. Dessa forma, ele poderia descrever qualquer outra curva de segundo grau com apenas quatro pontos. A arte das cordas usa as mesmas leis matemáticas para criar a ilusão de curvas a partir de linhas retas.

A invenção de Bézier foi tornada pública em 1962. Foi concebida como uma ferramenta matemática importante, mas havia uma grande arte por trás disso. A primeira empresa a comercializar arte em cordas foi a “Open Door Company” com sede em Los Gatos, Califórnia. Seu designer-chefe foi John Eichinger que nomeou suas obras de "mandala de cordas" (**Fig. 3**). A palavra mandala vem do hindu, que significa “círculo dentro de um círculo".

Figura 3. *Mandala de cordas (John Eichinger, década de 1970).*



Fonte: Zrinšÿak (2019).

Outro que contribuiu para o desenvolvimento da *String Art* foi John Eichinger. John Eichinger nasceu e foi criado em Cranford, Nova Jersey. Quando criança, gostava de desenhar formas geométricas. Em seus vinte e poucos anos, ele desenvolveu suas habilidades e criações artísticas de desenhos geométricos. Jonh vendeu suas mandalas de cordas em muitas prestigiadas exposições de arte nos Estados Unidos, Canadá e Europa. Seus desenhos de mandala são apresentados em revistas; Revista Parabola, The Christian Science Monitor e The Newark Star Ledger além de ser exibido em muitas galerias nos EUA e na Europa.

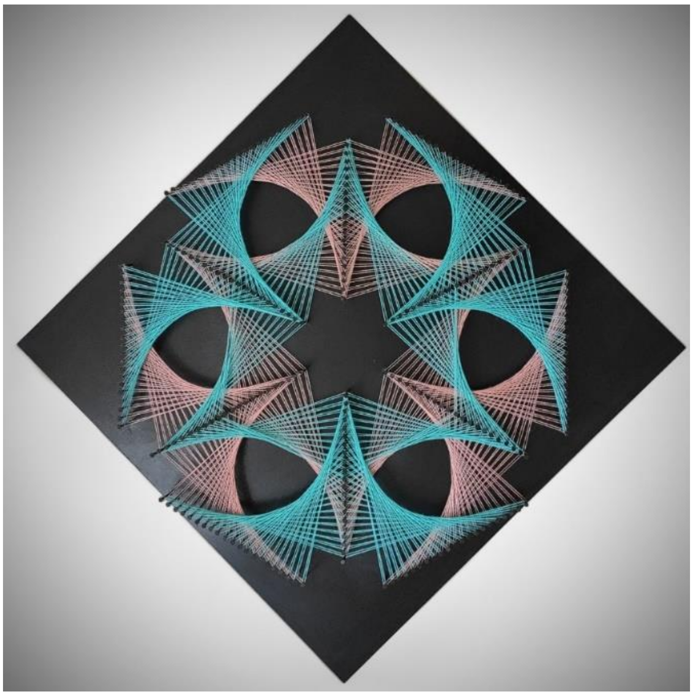
John gosta de lembrar às pessoas que as curvas que elas pensam que veem são uma ilusão de ótica. Essas lindas obras de arte podem ser ajustadas em cor e tamanho para trazer meditação apropriada à beleza de qualquer ambiente.

3.3.2 TIPOS DE *STRING ART*

Existem três tipos de arte contemporânea com *String Art.*

a) Imagens de cordas - este tipo de arte em cordas contém uma tela ou moldura através da qual os fios são puxados, a imagem é majoritariamente bidimensional, mas aproxima-se do tridimensional devido à forma como a luz e sombra se entrelaçados com fios (**Fig. 4**).

Figura 4. Exemplo de uma imagem de arte de cordas.



Fonte: https://vixentattoo.eu/images/works/60x60-stringart.jpg.

b) Escultura em barbante - na obra de Henry Moore e Naum Gabo, o barbante é usado para complementar estruturas de suporte feitas de plástico, metal, madeira ou pedra. As esculturas tem um papel mais dominante como meio primário e as cordas cria um visual encantador (**Fig. 5**).

Figura 5. Exemplo de escultura de arte em cordas (Henry Moore, 1960).

Fonte: Zrinšÿak (2019).

Henry Moore descreveu os modelos artístico-matemáticos que o inspiraram: não foi o estudo científico desses modelos, mas a capacidade de olhar pelas cordas como uma gaiola de pássaro e ver uma forma dentro da outra que o inspiravam.

c) Instalação de cadeia espacial – são instalações específicas no local e tem interação direta com o espaço expositivo. Projetadas especificamente para o local da exposição, essas obras criam a experiência de assistir (**Fig. 6**).

Figura 6. Exemplo de uma instalação de arte de corda espacial.

Fonte: Zrinšÿak (2019).

3.3.3 TRABALHOS RELACIONADOS À *STRING ART*

Yan S., Cai e Yan B. (2020) trabalharam uma proposta de Ocultação de dados em arte de *string* circular simétrica, dessa forma objetivou um algoritmo de ocultação de dados projetado especificamente para arte de cordas. Os autores comentaram ainda que uma imagem de arte digital de cordas consiste em uma sequência de linhas de cordas, cada uma especificada por dois pregos fixados nas duas extremidades dessa linha. Os dados secretos criptografados (a marca d'água) são incorporados na lista de segmentos de linha por modulação ímpar par, onde um bit '1' é incorporado forçando o próximo nó a ser um nó ímpar, e um bit '0' é incorporado por forçando o próximo nó a ser um nó par.

Para minimizar o impacto da incorporação de dados na qualidade da imagem original da arte das cordas, um algoritmo de otimização local é desenvolvido para selecionar os nós que produzem distorção mínima. Resultados experimentais mostram que, usando o algoritmo proposto, a distorção entre a imagem original da *string art* e a imagem da *string art* com marca d'água é imperceptível. A imagem de arte de cordas modificada é estatisticamente indistinguível da arte de cordas original e, portanto, é segura sob esta análise. Até onde se sabe, este é o primeiro trabalho para ocultação de dados e proteção de direitos autorais da arte digital de cordas.

Uma categoria existente no *String Art* foi estudada por Souza (2021). Essa categoria é o Circle *String Art,* onde os pinos são dispostos de forma circular, podendo, assim, gerar padrões ou réplicas de fotos. O autor teve como objetivo desenvolver um sistema com boa usabilidade que gere um caminho entre pontos, de modo que transforme uma dada imagem passada pelo usuário em uma cópia da imagem em *Circle String Art.* Através da criação de um software para facilitar a utilização desses algoritmos, além de fornecer uma base inicial para arte em Circle *String Art*, onde o artista pode desenvolver seu próprio estilo de arte utilizando a base gerada pelo algoritmo, podendo assim gerar uma nova forma de renda ou satisfação pessoal, tendo em vista as belas obras de arte que este algoritmo pode produzir.

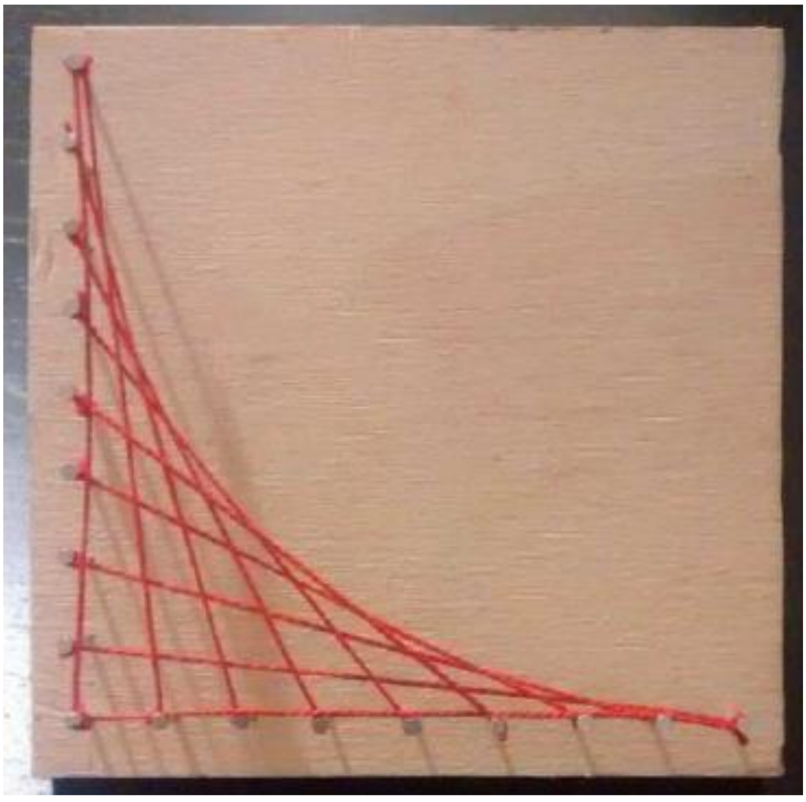
Para confeccionar Circle *String Art* pode-se criar algoritmos que nos ajudem a fazer essas artes, tendo como parâmetro de entrada uma imagem qualquer e como saída uma lista contendo as ligações necessárias para gerar aquela imagem em Circle *String Art*, como por exemplo, o Weaving Algorithm, que é um algoritmo que nos retorna uma sequência de ligações entre pontos para formar uma cópia de uma dada imagem em Circle *String Art*. Como resultado notou-se um interesse por parte das pessoas que viram o desenvolvimento, mostrando assim uma certa curiosidade na arte.

O algoritmo pode retornar belos trabalhos dependendo do material e parâmetros informados na interface gráfica, porém, é limitado a certas imagens escuras, pois muitas linhas são desperdiçadas e muitas ligações vão ser direcionadas a estas áreas escuras. Este algoritmo abre muitas oportunidades não só para artesãos autônomos como também para grandes empresas, como, por exemplo, a indústria da moda e decoração, podendo estampar estas artes em camisas, calças, cortinas, entre outros, oferecendo mais valor para estas peças.

A *String Art* foi abordada por Ostanin (2020) para o design e fabricação de Materiais e Estruturas Compósitos Ótimos. Os autores relataram uma nova ideia promissora sobre o projeto e fabricação de estruturas compostas de camadas, adaptadas para exibir rigidez máxima sob determinadas restrições de peso e condições de carregamento. Baseia-se na ideia de uma técnica artística conhecida como "*string art*". Um algoritmo foi empregado recentemente para formalizar o processo de encontrar uma configuração de enrolamentos de rosca que se fundem em uma determinada imagem em escala de cinza.

Lebouthillier e Sajna (2020) consideraram uma forma simples de arte de cordas onde os pregos são colocados em dois eixos perpendiculares, e segmentos de corda unem o primeiro prego em um eixo ao último prego no segundo eixo, o segundo prego no o primeiro eixo até o penúltimo prego no segundo eixo e assim por diante. O padrão resultante é peculiarmente em forma de rede (**Fig. 7**). Sua borda superior é uma curva linear, discutido por Gregory Quenell em Gregory Envelopes and String Art, Mathematics Magazine 82 (2009), é uma parábola.

Figura 7. Parábola construída com a técnica string art.



Fonte: Lebouthillier e Sajna (2020).

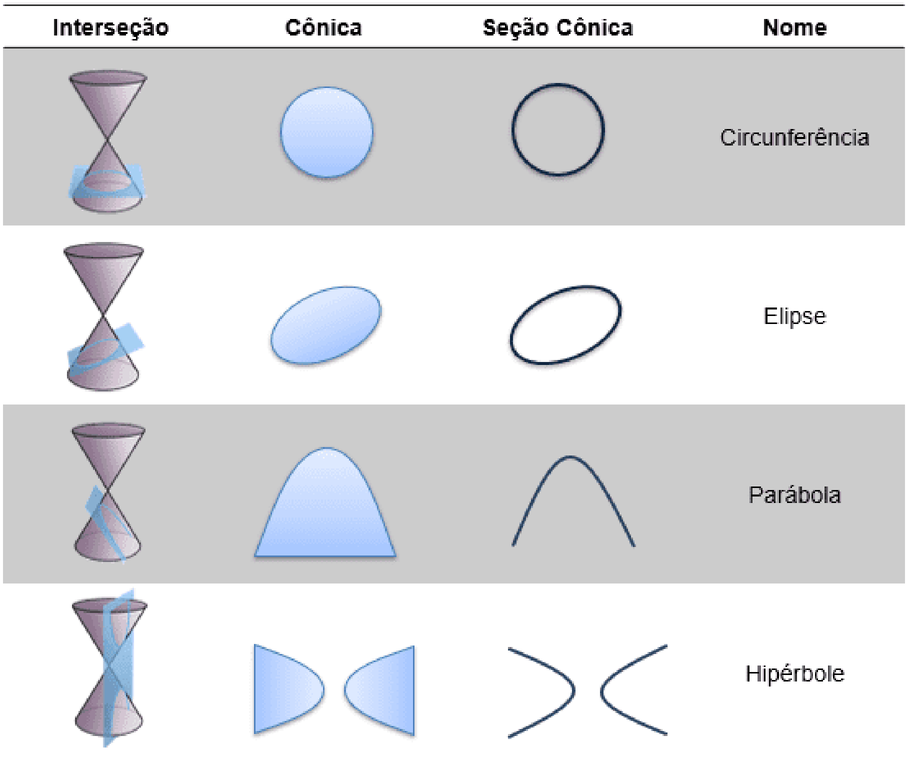
Para Renesse e Ecke (2016) objetivaram no projeto, “Descobrindo a Arte da Matemática”, capacitar os alunos das artes liberais a se tornarem criadores confiantes de arte e criadores imaginativos de matemática. Neste artigo, descreveram suas experiências com o uso da arte de cordas para orientar estudantes de artes liberais na exploração de ideias de cálculo. Foram fornecidos trechos de materiais de aprendizagem baseados em perguntas (disponíveis gratuitamente em www.artofmathematics.org) e mostramos algumas artes originais de cordas de alunos. Além disso, foi feita a reflexão sobre a complexidade da definição de tangência e como dar vida à complexidade na sala de aula.

Em *“A Mathematician's Lament”,* Paul Lockhart afirma que a matemática deve ser ensinada de tal forma que os alunos estejam fazendo matemática ativamente. Ninguém ensinaria arte sem que os alunos realmente criassem arte, mas nas aulas de matemática tradicionais (baseadas em palestras), o professor faz a matemática enquanto os alunos geralmente apenas repetem os procedimentos. Queremos mudar essa abordagem.

4 SEÇÕES CÔNICAS

As cônicas ou seções cônicas são curvas obtidas pela intersecção de um plano com um cone duplo. De acordo com a inclinação desse plano, a curva será chamada de elipse, hipérbole ou parábola. Quando o plano está paralelo ao plano da base do cone, a curva é uma circunferência sendo considerada um caso particular da elipse (**Fig. 8**).

Figura 8. Seções cônicas.



Fonte: https://www.respondeai.com.br/conteudo/algebra-linear-e-geometria-analitica/conicas-e-quadricas.

Essas curvas possuem características, aplicabilidade e propriedades geométricas amplamente utilizadas para solucionar diversos problemas práticos como, por exemplo, em sistemas de localização em navegação, construções civil e mecânica, arquitetura, lançamento de projéteis, nos movimentos planetários, funcionamento de antenas parabólicas, radares, telescópios, espelhos, faróis de veículos, entre inúmeros outros aspectos importantes (SILVA, 2016).

Apolônio, conhecido como um dos grandes geômetras da antiguidade, desenvolveu um importante trabalho sobre seções cônicas. Em um contexto histórico, as seções cônicas: elipse, hipérbole e parábola tiveram suas formulações gerais anteriores à época de Euclides (325-265 a.C.).

A propriedade descoberta por Apolônio (262-190 a.C.) foi que não era necessário cortar o cone com um plano perpendicular à geratriz, bastava mudar a inclinação da seção. Ele também mostrou que os cones não precisam ser retos, eles podem ser escalenos ou oblíquos, porque antes de Apolônio se pensava que as seções cônicas eram derivadas dos ângulos nos vértices do cone serem agudos, obtusos ou retos. E ele foi o responsável por substituir o cone de uma folha pelo de duas folhas; desta forma, uma hipérbole é entendida como uma curva de dois ramos (SILVA e SANTOS, 2016).

Domingues (2022), constatou que um dos principais motivos que dificultam o desenvolvimento de conteúdos relacionados as cônicas, é a falta de interesse dos alunos por verem pouca aplicabilidade das mesmas durante as aulas. Este trabalho traz alguns exercícios contextualizados ao conteúdo abordado e sugere diferentes formas de construção das cônicas, esperando que o presente trabalho possa contribuir positivamente para o ensino e aprendizagem das cônicas no ensino médio.

Segundo Lago (2021) é notório que as cônicas desempenham papéis importantíssimos em diversos ramos de estudos e pesquisas. Por isso, as cônicas são um tema importante e relevante para ensino básico da matemática.

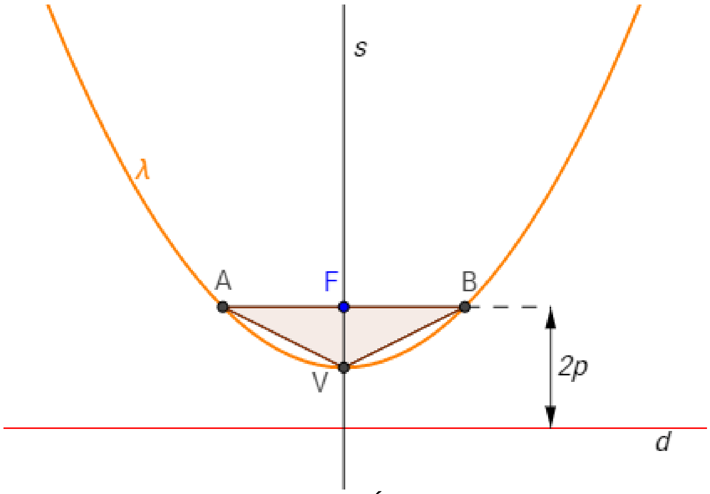
Como vistos há 4 tipos de cônicas, cada uma com seus elementos específicos. Vamos destacar as três menos trabalhadas, porque a circunferência recebe uma maior atenção inclusive relacionada a outras habilidades, como em cálculo de área, perímetro e seus elementos já são mais conhecidos.

4.1 Conceitos, elementos e construções das cônicas

4.1.1 PARÁBOLA

Por definição, dada uma reta d e F um ponto fora dela. A parábola de foco F e diretriz d é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes do ponto fixo F e da reta diretriz d, ou seja, se o ponto P pertence à parábola, temos que $D(P,F) = D(P,d)$. Na **Fig. 9**, temos os elementos que compõe a parábola.

Figura 9. Parábola e seus elementos.



Fonte: (MUNIZ JÚNIOR, 2018).

Foco: é o ponto *F*;

Diretriz: é a reta d;

Eixo focal: é a reta s que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz;

Vértice: é o ponto *V* de intercessão entre a parábola e o eixo focal;

Parâmetro da parábola: é o valor 2*p* que é a distância entre o foco e a diretriz.

Moreira (2017, p. 83) descreve que se pode construir uma parábola de forma simples. Será necessária uma régua para servir de base, um esquadro, um alfinete, cola quente e barbante. Na **Fig. 10** tem-se uma demonstração da construção da parábola. Os procedimentos a seguir são os seguintes.

Passo 1: Sobre uma folha de cartolina pregamos um prego em um ponto *F* que será o foco da parábola;

Passo 2: Colocamos a régua sobre a folha a uma distância 2*p* do ponto *F*;

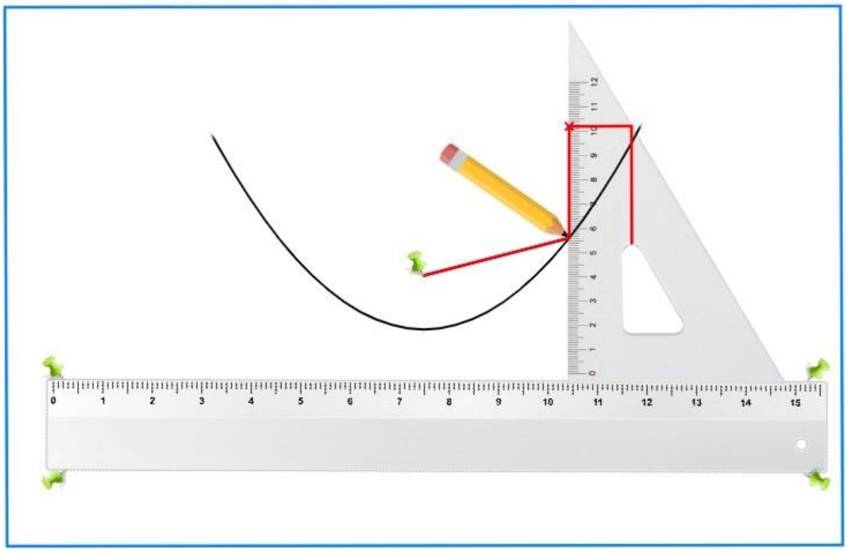
Passo 3: Colocamos o esquadro sobre a ripa de forma que sua hipotenusa fique do lado oposto ao ponto *F*;

Passo 4: Colamos na extremidade superior do esquadro a ponta de um barbante;

Passo 5: Amarramos o barbante no prego (ponto *F*) de tal maneira que o comprimento do barbante seja o mesmo comprimento do esquadro;

Passo 6: Usando a ponta do lápis para manter o barbante esticado e deslizando o esquadro sobre a régua, a ponta do lápis descreverá uma parábola. Veja a construção na **Fig 10**.

Figura 10. Construindo uma parábola utilizando régua e barbante.



Fonte: (DOMINGUES, 2022).

Considere que *P* é a posição da ponta do lápis. Então, pela construção, a régua encontra-se a uma distância 2*p* do foco, logo encontra-se na diretriz da parábola. Pode-se chamar a diretriz de reta *d*. Tem-se também que o comprimento do barbante será o comprimento do esquadro que chamaremos de *f*, logo será do ponto *A* à diretriz, então:

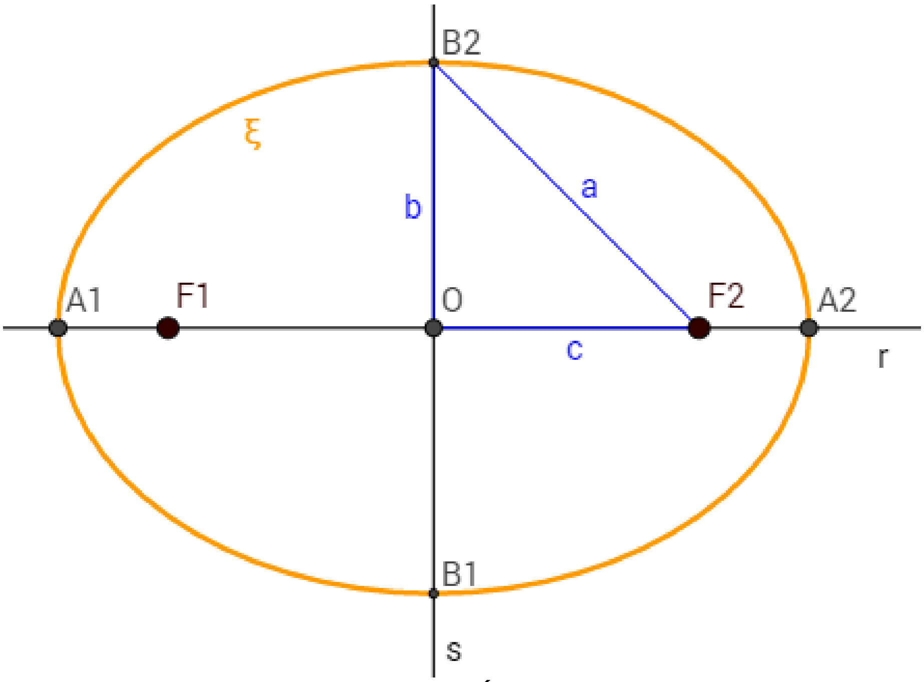
$$D(P,F) = f - D(P,A) = D(P,d).$$

4.1.2 ELIPSE

Por definição, elipse (**Fig. 11**) é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tais que, dados dois pontos fixos (F_1 e F_2) chamados de focos, a soma das distâncias de um ponto P do plano a cada um dos focos é igual a uma contante $2a$, sendo maior que a distância entre F_1 e F_2, ou seja, $d(F_1, F_2) < 2a$.

$$P \in elipse \Leftrightarrow d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a.$$

Figura 11. Elipse e seus elementos.



Fonte: (MUNIZ JÚNIOR, 2018).

Na **Fig. 11**, têm-se as distâncias: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$ Em adição, são destacados os seguintes elementos da elipse:

Focos: são os pontos F_1 e F_2;

Distância focal: é o comprimento do segmento $\overline{F_1F_2} = 2C$;

Centro: é o ponto médio entre os focos;

Reta focal: é a reta que contém os focos, sendo os pontos A_1 e A_2 a interseção desta reta com a elipse;

Eixo focal ou eixo maior: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento;

Reta não focal: é a reta perpendicular à reta focal que passa no centro, sendo os pontos B_1 e B_2, a interseção desta reta com a elipse;

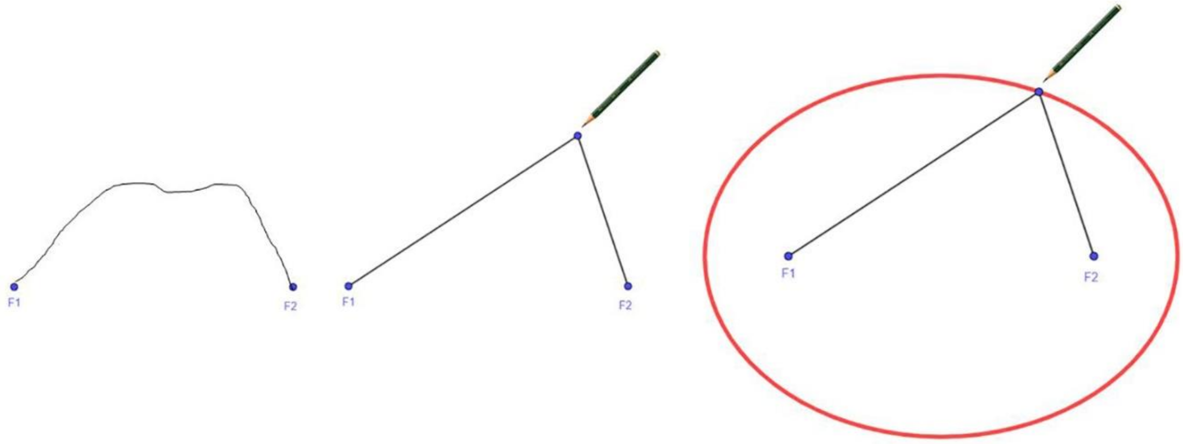
Eixo não focal ou eixo menor: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, de comprimento 2b;

Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2;

Diâmetro: são cordas que passam pelo centro.

É possível construir uma elipse, conforme o trabalho de Moreira (2017, p. 37), conhecendo o eixo maior, usando barbante, pregos ou alfinetes do tipo percevejo. Veja a construção na **Fig. 12**.

Figura 12. Construindo uma elipse com barbante.



Fonte:https://publica.ciar.ufg.br/ebooks/ebook_a_educacao_matematica_na_escola/imagens/Cap11/fig4.jpg.

Os procedimentos para a construção da elipse são:

Passo 1: Conforme a **Fig. 12**, fixamos dois pregos em uma folha de papel apoiada em um papelão grosso. (O papelão poderá ser uma capa dura de um caderno que o aluno não utiliza mais).

Passo 2: Cortamos um barbante de preferência grosso em tamanho que seja maior que a distância entre os dois pregos fixados , em seguida, amarre as pontas do barbante em cada prego.

Passo 3: Mantendo o barbante esticado, corra com um lápis ou caneta, de modo a fechar a figura, que será a Elipse e saberemos que o tamanho que cortamos o barbante é igual a 2*a*.

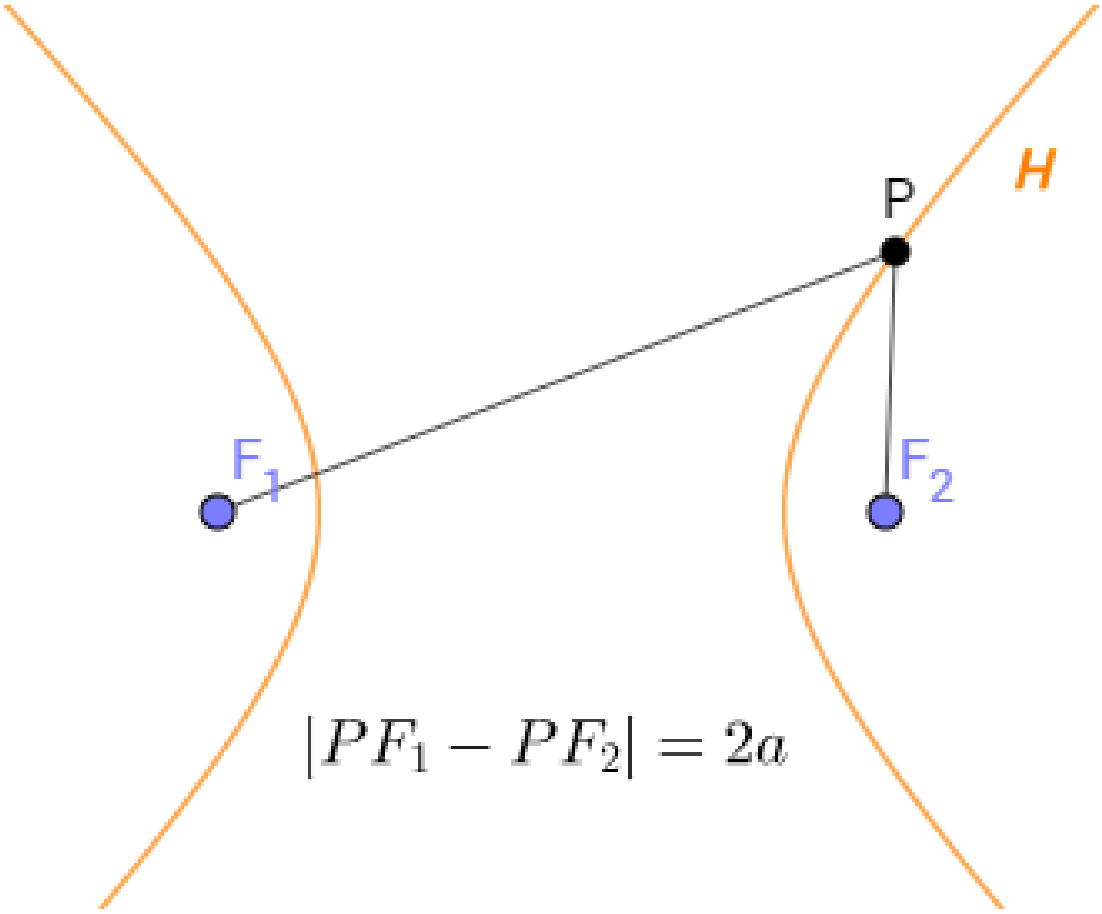
A construção acima é simples de fazer em sala de aula, pois, além de construir a figura temos também a assimilação pelo aluno do fato que o lugar geométrico da elipse foi constatado, pois os pregos fixados são os focos da elipse e a soma das distancias entre um ponto qualquer da Elipse aos focos foi mantida ao esticarmos o barbante. (Este método é tradicionalmente chamado de método do jardineiro).

4.1.3 HIPÉRBOLE

Por definição, hipérbole (**Fig. 13**) é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tais que, dados dois pontos fixos F_1 e F_2 chamados de focos, a diferença, em valor absoluto, das distâncias de um ponto P da hipérbole a cada um dos focos é igual a constante $2a$, sendo menor que a distância entre F_1 e F_2, ou seja, $d(F_1, F_2) > 2a$:

$$P \in hipérbole \leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Figura 13. Definição de uma hipérbole.



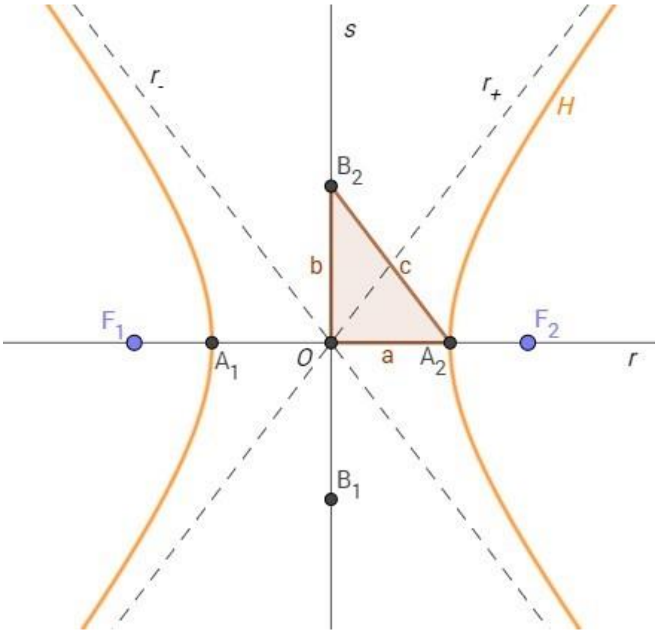
Fonte: (MUNIZ JÚNIOR, 2018).

Como podemos observar na **Fig. 13** que a hipérbole é uma curva com dois ramos, se o ponto P pertence a parte direita da curva então teremos $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ e se P pertencer a pertencer a parte esquerda da curva teremos:

$$d(P_1, F_1) - d(P_1, F_2) = -2a$$

Observe os pontos da hipérbole na **Fig. 14**. Nela, é possível identificar os seguintes elementos:

Figura 14. Elementos de uma hipérbole.



Fonte: (MUNIZ JÚNIOR, 2018).

Focos: são pontos F_1 e F_2;

Distância focal: é o comprimento do segmento $\overline{F_1F_2} = 2c$;

Centro: é o ponto O, que é o ponto médio entre os focos ou os vértices;

Rete focal: reta que contém os focos, sendo os pontos A_1 e A_2 a interseção desta reta com a hipérbole;

Eixo focal, real ou transverso: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento $2a$;

Reta não focal: é a reta perpendicular a reta focal que passa pelo centro;

Eixo não focal: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, de comprimento $2b$, sendo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e B_1 e B_2, simétricos em relação ao eixo focal;

Vértices focais: são os pontos A_1 e A_2, que são as interseções da hipérbole com a reta focal;

Vértices não focais: são os pontos B_1 e B_2;

Construir uma hipérbole utilizando barbante, régua e pregos.

Inicialmente, define-se o lugar onde serão os focos A e B da hipérbole. Faremos um furo em uma das extremidades da régua e na outra colocaremos um barbante, tanto o furo quanto a fixação do barbante devem estar próximos as quinas da régua, conforme a **Fig. 15**.

Se o comprimento do barbante for x cm, e o comprimento do eixo maior da hipérbole a ser construída for $2a$ cm, então cortaremos o barbante de maneira que o comprimento da régua x seja igual a $2a$ mais o comprimento do barbante.

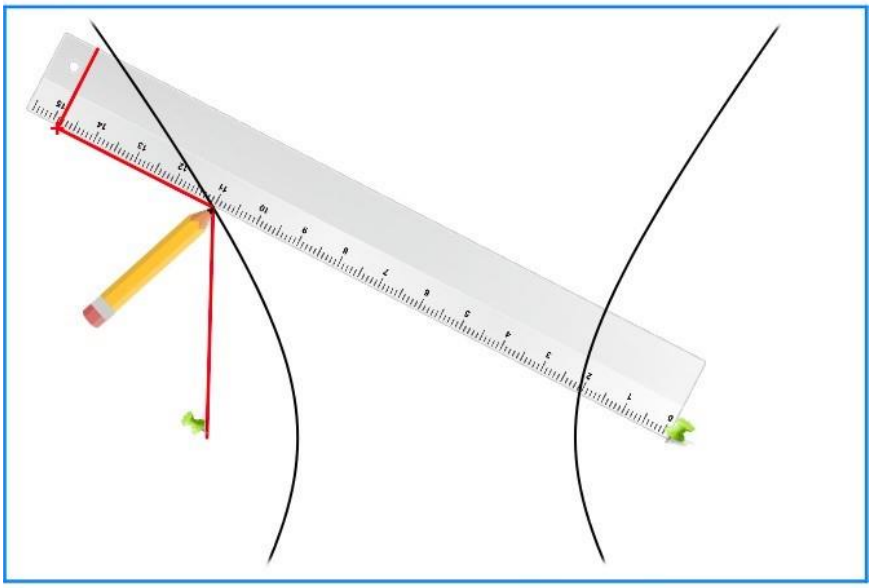
Figura 15. Ilustração da construção de uma hipérbole usando régua e barbante.

Fonte: (MOREIRA, 2017).

Para desenhar o ramo direito da hipérbole, prenderemos a régua no foco esquerdo da hipérbole, de maneira que a régua possa ficar girando em torno deste ponto, amarraremos a ponta solta do barbante no foco direito da hipérbole.

Percorremos com um lápis o barbante esticado na direção da régua, deixando-o encostado nela, conforma a **Fig. 16**. Veremos que a curva construída será uma hipérbole.

Figura 16. Construção de uma hipérbole usando régua e barbante.

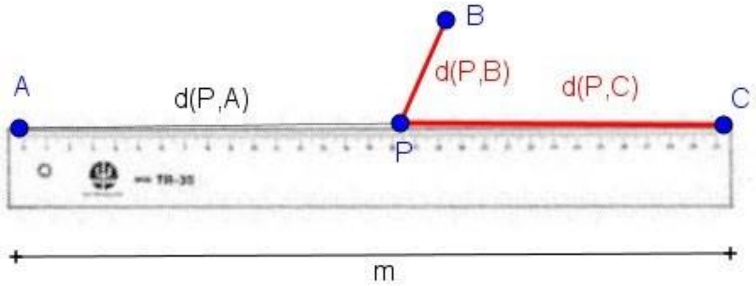


Fonte: (DOMINGUES, 2022).

É importante lembrar que a distância entre os focos $(2c)$ deve ser maior que o eixo focal $(2a)$ (distância entre os vértices).

Então, seja m igual ao comprimento da régua; $2a$ = comprimento do eixo focal; x = comprimento do barbante, temos $m = 2a + x$.

Figura 17. Barbante deslizando na régua.



Fonte: (MOREIRA, 2017).

Observando a **Fig. 17**, se P um ponto obtido em um instante qualquer da construção, temos: $d(P,C) = m - d(P,A)$

$x = d(P,B) + d(P,C) \Rightarrow d(P,C) = x - d(PB)$

Relacionando as equações, temos:

$$m - d(P,A) = x - d(P,B) \Rightarrow d(P,A) - d(PB) = m - x,$$

Logo, temos de $d(P,A) + d(P,B) = 2a$.

As construções mencionadas são simples de fazer em sala de aula, pois além de construir a figura, temos também a assimilação pelo aluno do fato que o lugar geométrico das cônicas foi constatado. É importante destacar, que com os elementos citados de cada cônica, é possível demonstrar as equações de cada uma delas, que não é o foco deste trabalho.

A partir do uso dessas técnicas de construção das cônicas, buscou-se demonstrar conceitos e aplicações importantes relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem interdisciplinar de Matemática com Arte e, em seguida, é apresentada uma sequência didática para o ensino de seções cônicas, com o uso de materiais manipuláveis, trabalhado com a técnica artística *string art*.

5 PRODUTO EDUCACIONAL: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DE SEÇÕES CÔNICAS COM STRING ART

5.1 Apresentação

A sequência didática foi elaborada inicialmente para ser desenvolvida em uma escola pública estadual na cidade de Petrolina-PE, no 3º ano do ensino médio, na disciplina de Matemática. O estudo de caso não foi desenvolvido devido às restrições ao ensino presencial, ocasionadas pela pandemia da Covid 19 no referido estado. Desse modo, escolheu-se pelo trabalho de revisão bibliográfica com desenvolvimento de sequência didática.

O assunto matemático trabalhado esteve relacionado ao ensino das cônicas. Mais especificamente, à construção e identificação de elementos das cônicas, tais como: foco, distância focal, vértices, eixo maior e eixo menor.

Para esse trabalho, foram utilizados diversos recursos didáticos pedagógicos, como escolha do material a ser utilizado, a construção das cônicas a partir da técnica *strig art* e o passo a passo das atividades realizadas como estratégias de ensino.

A utilização de materiais didáticos manipuláveis se dá pelo entendimento de que eles constituem importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula e podem contribuir para a compreensão mais significativa dos conceitos pelos alunos. Por isso, foram propostos recursos que, além de contribuírem para o desenvolvimento do assunto escolhido, também se mostram significativos para os estudantes.

O tema matemático abordado foi o de seções cônicas. A geometria é conhecida por representar uma sub área da Matemática propícia para se trabalhar com materiais manipuláveis e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o estudante a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática vão de acordo com a abordagem proposta, nos quais exploram objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, permitindo ao aluno estabelecer conexões entre a

Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p.39).

As atividades de apresentação e finalização de conteúdos destinam-se a complementar o desenvolvimento das propostas. Por meio da observação e interação, pode-se argumentar, discutir diferentes pontos de vista, desenvolver raciocínios, atitudes investigativas e buscar estratégias criativas para resolver problemas que surgem durante a atividade.

A justificativa para o uso do material manipulável escolhido é a facilidade de uso tanto para professores quanto para alunos, que estão sempre trabalhando em pequenos grupos em atividades de dificuldade crescente. Além disso, utiliza-se conceitos geométricos de forma lúdica, permitindo que aspectos como ações reflexivas que coloquem em prática as ideias do projeto, percebendo erros imediatamente ao olhar para a tela e proporcionando maior dinamismo ao conteúdo do trabalho.

Segue-se a proposta do produto educacional, que contém o cronograma das atividades desenvolvidas durante as cinco sessões e a estrutura de cada sessão.

5.2 Dados iniciais da sequência didática

Este produto educacional inclui uma sequência didática para professores de matemática do 3º ano do ensino médio, projetadas para introduzir conceitos das seções cônicas. Para tanto, oferecemos uma série de atividades construídas a partir dos preceitos do construtivismo e da perspectiva do diálogo problematizado. Os dados básicos da proposta estão disponíveis na **Tab. 1**.

Tabela 1 - Informações sobre Produto Educacional.

Utilização da técnica *string art* para desenvolvimento de conceitos e aprendizagem geométrica das cônicas.	
Temática	Cônicas: elipse, hipérbole e parábola.
Público-alvo	Estudantes do 3º ano.
Duração	5 encontros de 100 minutos cada.

Objetivos	• Identificar elementos geométricos das cônicas; • Conhecer as formas geométricas cônicas; • Relacionar elementos geométricos das cônicas com cada forma cônica específica; • Construir cônicas com o uso da técnica artística *string art*; • Entender a importância dos conceitos estudados para o desenvolvimento de aplicações tecnológicas e resolução de problemas práticos; • Reconhecer os elementos geométricos das cônicas necessários às suas equações.
Estruturação	Busca de objetos geométricos. Construção visual de artefato artístico. Construção física do artefato. Comparação.

5.2.1 CRONOGRAMA DE ATIVIDADES

A sequência de atividades é composta por 5 encontros com 100 minutos de duração cada. A **Tab. 2** dispõe da síntese dos cinco encontros.

Tabela 2 - Síntese de aplicação da sequência de atividades a serem executadas.

Encontro	Síntese
1º	Apresentação da técnica *string art*, revisão de conceitos aplicados as cônicas e escolha do material manipulável.
2º	Construção da parábola.
3º	Construção da elipse.
4º	Construção da hipérbole.
5º	Seminário de socialização dos trabalhos.

A seguir, são detalhados cada um dos encontros propostos para a execução da sequência didática.

5.3 Estruturação dos encontros

As atividades dessa sequência didática serão desenvolvidas em cinco encontros, onde os estudantes utilizarão a técnica *strig art* para construção e aprendizagem de conceitos das cônicas. Os encontros estão divididos em momentos como mostram os encontros na sequência.

5.3.1 ENCONTRO 1 - APRESENTAÇÃO DA TÉCNICA *STRING ART*, CONCEITOS E PROPRIEDADES DAS CÔNICAS E DESCRIÇÃO DOS MATERIAIS A SEREM UTILIZADOS

No primeiro encontro, é importante conceituar os elementos relacionados as cônicas. Em seguida o professor irá disponibilizar aos estudantes o material a ser utilizado durante a apresentação da técnica da *strig art.*

Momento 1: Nesse momento, o professor ministrará uma aula conceituando, mostrando os elementos, e as propriedades focais das cônicas e a construção geométrica com régua e compasso, conforme o trabalho de Moreira (2017).

Momento 2: Nesse momento, será apresentado o material manipulável usado para construção dos quadros usando a técnica da *string art.*

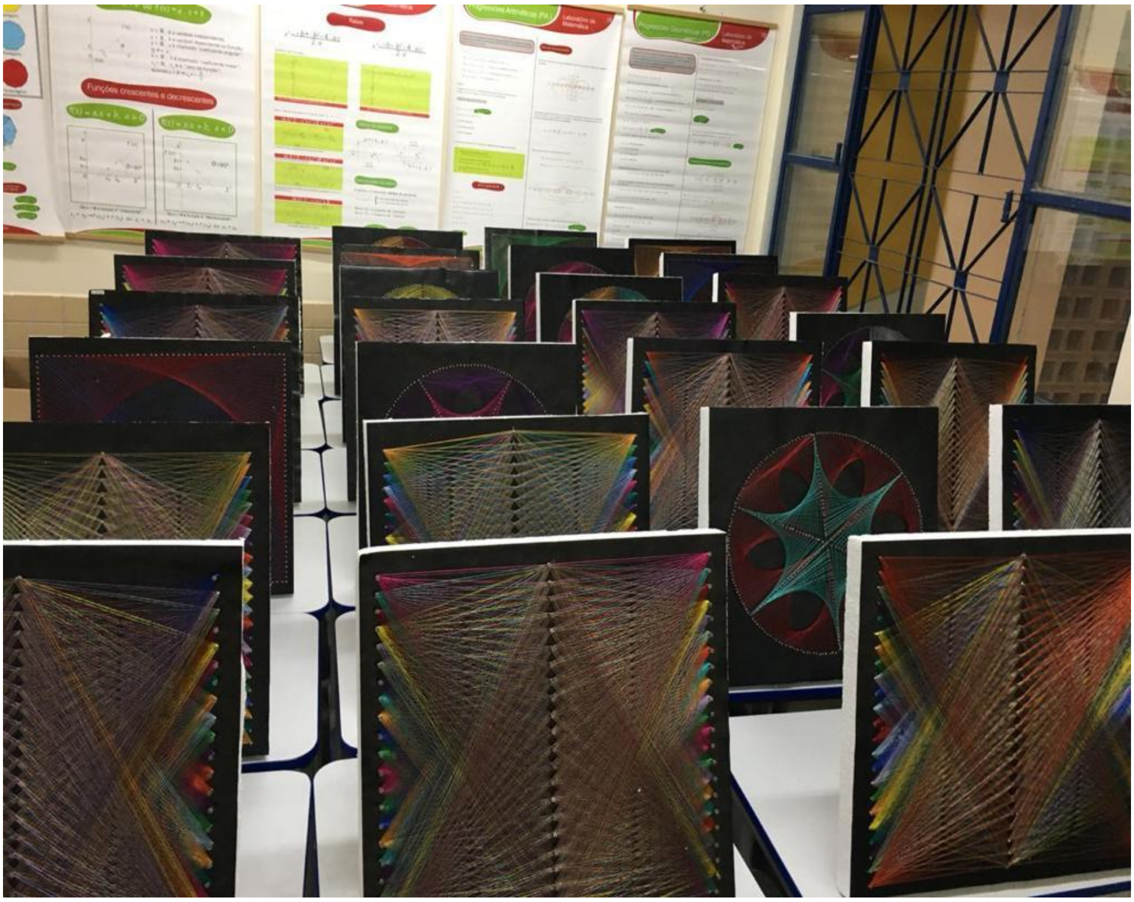
Relação do material a ser utilizado: tela de madeira (50 cm x 50 cm x 1,5 cm), régua de 60 cm, régua de 30 cm, transferidor, linha de bordado, linha encerada, tesoura sem ponta, martelo, pregos de 2 cm, canetas, compasso, pinceis coloridos, papel cartão e papel milimetrado (470 mm x 320 mm), como ilustrado na **Fig. 18**.

Figura 18. Material utilizado para construção das cônicas.

Fonte: Autoria própria.

Momento 3: Nesse momento, será feita a apresentação para se trabalhar com a técnica *string art*, isto é, com o uso de cordas, pregos e uma base sólida, o professor estimulará a construção de cenários geométricos com alunos, potencializando a aprendizagem matemática a partir da prática lúdica. Na **Fig. 19** é possível observar algumas telas que usam elementos geométricos e a técnica da *string art* para sua construção, essas telas serão apresentadas durante a aula.

Figura 19. Telas com elementos geométricos, construídas com a técnica da *string art.*



Fonte: Autoria própria.

5.3.2 ENCONTRO 2 - CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA

No segundo encontro, iniciará o processo de construção da parábola. Serão dados 11 passos que estão dispostos em figuras na sequência.

Momento 4: Nesse momento, os estudantes formarão pequenos grupos para construção da parábola utilizando a técnica da *string art*. É importante que todos os estudantes do grupo participem do processo de construção, que possam se envolver em cada etapa para construir as cônicas com régua e compasso, pregar os pregos e manipular as linhas durante o durante o uso da técnica *string art*. O professor pode orientar os estudantes para realizar todos os passos para construção das cónicas.

1º passo: Coloque um papel milimetrado centralizado sobre a tela de madeira, fixando um prego nas extremidades dos quatro cantos do papel, como ilustrado na **Fig. 20a**.

2º passo: Faça uma reta ortogonal formando um ângulo reto com a base do papel milimetrado, dividindo a folha de papel em duas partes congruentes, essa é a reta focal da parábola. Em seguida, faça dois segmentos de retas formando ângulos de 45° com a reta focal, como ilustrado na **Fig. 20b**.

Nesse momento o professor pode fazer os seguistes questionamentos aos estudantes: O que é uma reta ortogonal? O que são lados congruentes? O que é um segmento de reta?

3º passo: Faça uma reta na base da folha, perpendicular a reta focal, no qual será a reta diretriz. Em seguida, marque pontos que distam 1 cm sobre os dois segmentos de retas, como ilustrado na **Fig. 20c**.

Nesse momento o professor pode fazer o seguinte questionamento aos estudantes: O que é uma reta diretriz?

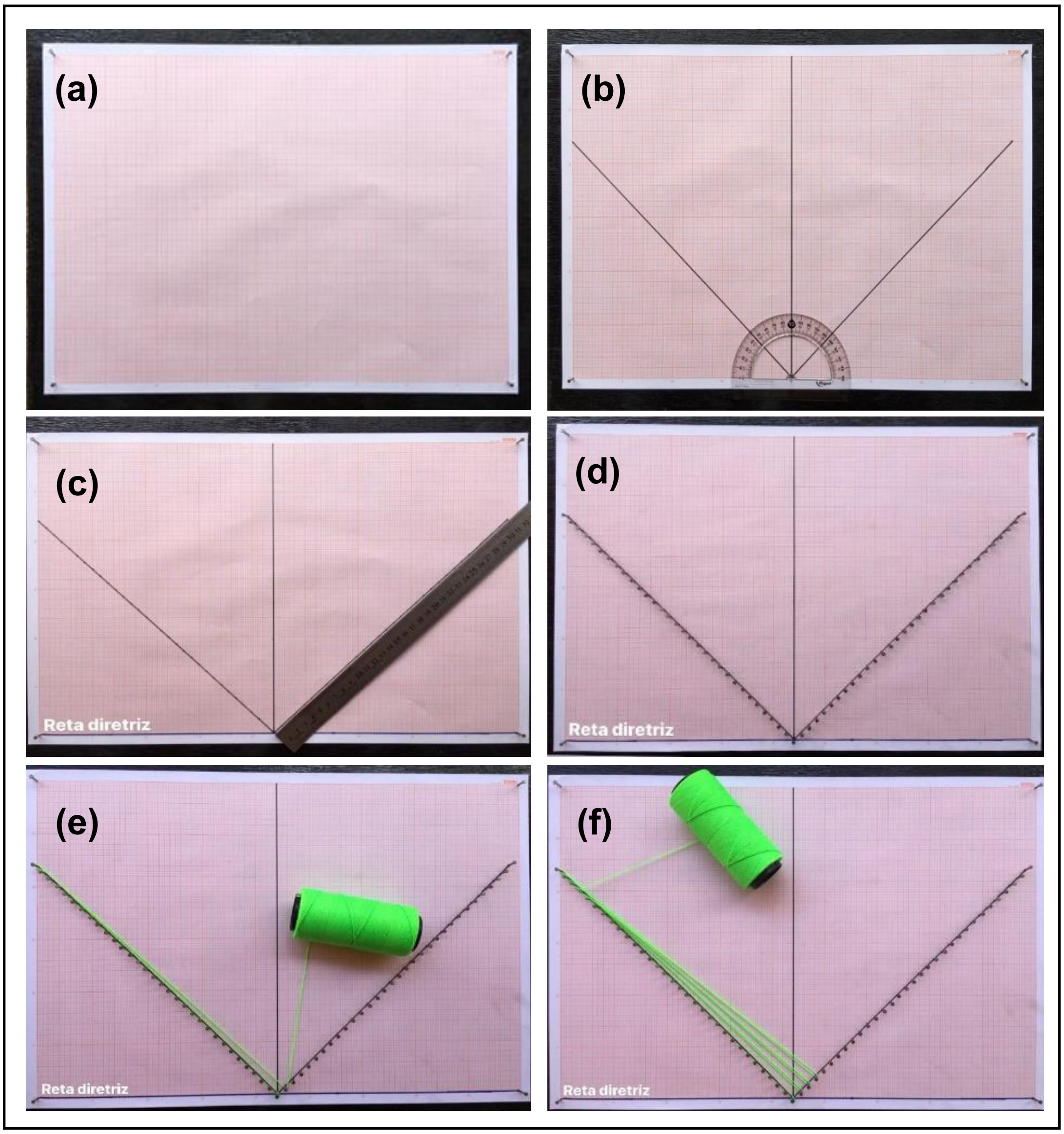
4º passo: Pregue um prego em cada ponto marcada sobre os segmentos de retas, como ilustrado na **Fig. 20d**.

Momento 5: Nesse momento, será utilizado a linha para formar a parábola.

5º passo: Prenda a linha a um prego situado na extremidade superior esquerda de um dos segmentos de retas que contêm pregos. A seguir leve a linha ao primeiro prego da extremidade inferior do outro segmento que contêm pregos, como ilustrado na **Fig. 20e**.

6º passo: Repita o processo anterior, indo e voltando, até que a linha percorra todos os pregos, como ilustrado na **Fig. 20f**.

Figura 20. Passos 1(a), 2(b), 3(c), 4(d), 5(e) e 6(f) para construção da parábola com a técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

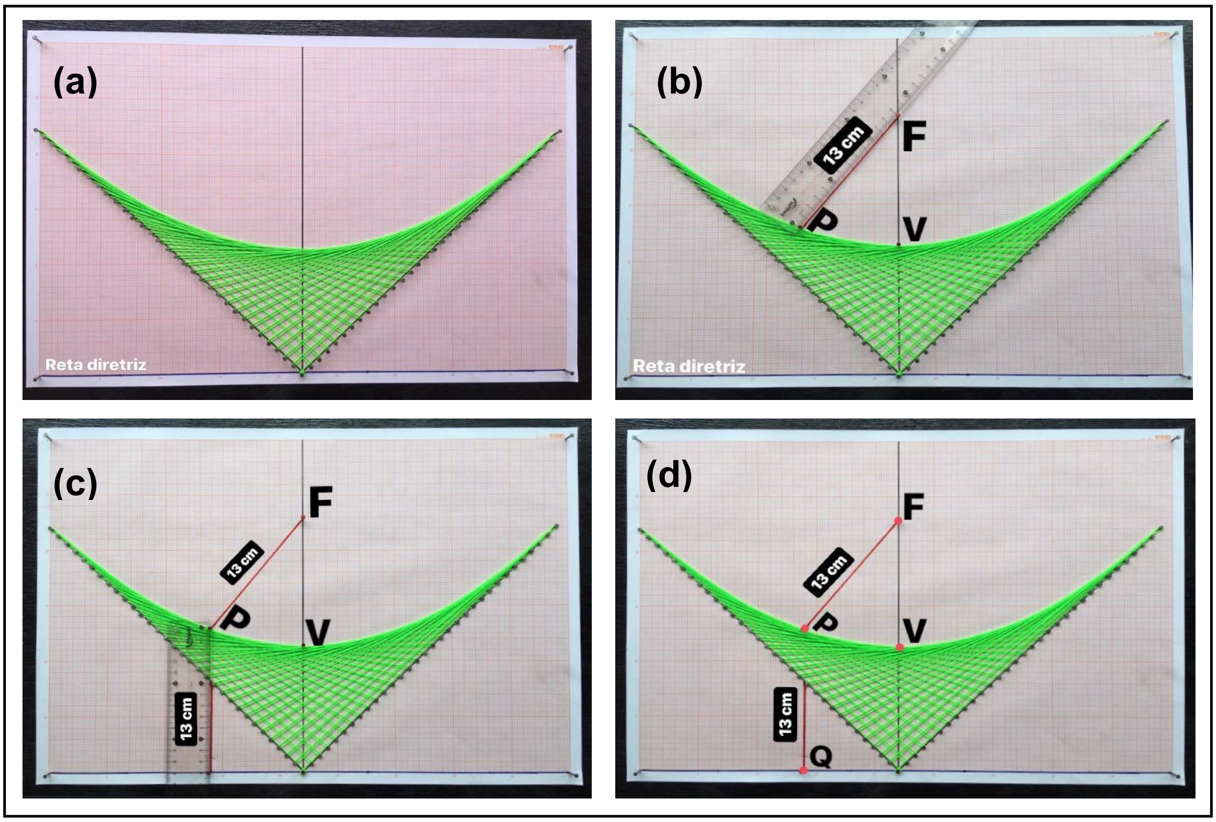
7º passo: Observe a parábola formada após a linha percorrer todos os pregos, como ilustrado na **Fig. 21a**.

8º passo: Marque o ponto V na interseção entre a parábola e a reta focal, chamaremos o ponto V de vértice parábola. Marque a ponto F sobre a reta focal, que dista do ponto V a mesma medida de V até a reta diretriz, ou seja, a medida $\overline{FV}$ é igual a distância de V até a reta diretriz. Chamaremos o ponto F de foco da parábola. Marque um ponto P qualquer pertencente a parábola, com uma regra meça o seguimento de reta $\overline{PF}$ (nesse exemplo $\overline{PF}$ está medindo 13 cm), como ilustrado na Fig. **21b**.

9º passo: Nesse momento o professor deve orientar aos estudantes para verificar que a distância do ponto P a reta diretriz é igual medida $\overline{PF}$, como ilustrado na **Fig. 21c**.

10º passo: A medida $\overline{FP}$ = $\overline{PQ}$ = 13 cm. Com isso, os estudantes podem chegar à conclusão que a medida $\overline{PF}$ e a distância de P a reta diretriz são iguais a 13 cm, como ilustrado na **Fig. 21d**.

Figura 21. Passos 7(a), 8(b), 9(c) e 10(d) para construção da parábola com a técnica *string art.*

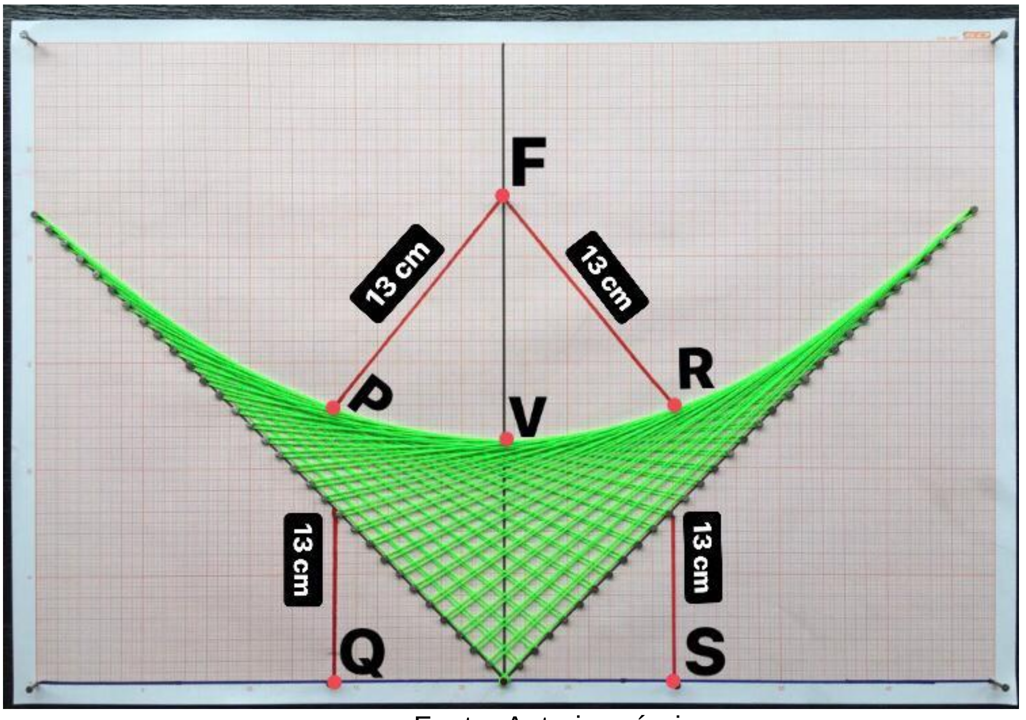


Fonte: Autoria própria.

11º passo: Nesse momento o professor deve pedir para os estudantes repetir os procedimentos das (**Fig. 21c**) e (**Fig. 21d**), marcando um ponto R qualquer pertencente a parábola. Analogamente verifica-se que as medidas $\overline{FR}$ = $\overline{RS}$ = 13 cm.

Com isso, têm-se a construção da parábola com a técnica da *string art*, como ilustrado na **Fig. 22**.

Figura 22. Construção da parábola a partir *técnica string art.*



Fonte: Autoria própria.

Nesse momento o professor fez os seguintes questionamentos aos estudantes: O que vocês acabaram de construir? Qual o conjunto de pontos pertencente ao lugar geométrico da parábola? Quais propriedades podem ser observadas com os elementos da parábola?

5.3.3 ENCONTRO 3 – CONSTRUÇÃO DA ELIPSE

No terceiro encontro, inicia-se o processo de construção da elipse. Serão dados 16 passos que estão dispostos em figuras na sequência desse encontro.

Momento 6: Nesse momento, o professor deve orientar os grupos de estudantes já formados para construção da elipse utilizando régua e barbante, conforme o trabalho de Moreira (2017). Após a entrega de todo material manipulável, os estudantes iniciarão a preparação da tela em madeira para esboçar o desenho da elipse.

1º passo: Faça um quadrado de 44 cm de lado, deixando 3 cm de margem em cada lado da tela de madeira, como ilustrado na **Fig. 23a**.

2º passo: Os estudantes serão orientados pelo professor, a fizer marcações de 1 em 1 cm, até preencher os quatro lados do quadrado para pregar os pregos posteriormente, como ilustrado na **Fig. 23b**.

3º passo: Após pregar os pregos nos pontos demarcados no quadrado, pregar um prego no ponto determinado pela interseção das duas diagonais do quadrado. O ponto de interseção das diagonais do quadrado será o centro da elipse, como ilustrado na **Fig. 23c**.

Nesse momento o professor pode fazes os seguintes questionamentos aos estudantes: O que é a diagonal do quadrado? O que é um ponto de interseção?

4º passo: Aqui os estudantes serão orientados a determinar os elementos de uma elipse. Inicialmente a distância focal ($\overline{\mathrm{F1F2}} = 2c$), a medida do eixo maior ($\overline{A1A2} = 2a$) e a medida do eixo menor ($\overline{B1B2} = 2b$). As distâncias citadas vão depender da dimensão da elipse que se queira, quanto maiores forem os eixos, maior será a elipse formada. Foi determinado para esse exemplo as seguintes medidas: distância focal $\overline{\mathrm{F1F2}}$ = 20 cm, c = 10 cm; eixo maior $\overline{A1A2}$ = 38 cm, a = 19 cm; medida eixo menor $\overline{B1B2}$ = 32 cm, b = 16 cm. Com uma linha de medida $\overline{A1A2} = 38\,cm$, com extremidades fixadas nos pontos F1 e F2 obtenha o ponto P, notavelmente a distância $\overline{F1P}$ + $\overline{F2P}$ = $\overline{A1A2}$. Utilizando uma caneta e girando 360º a partir do ponto P determinado, até formar uma elipse, como ilustrado na **Fig. 23d**.

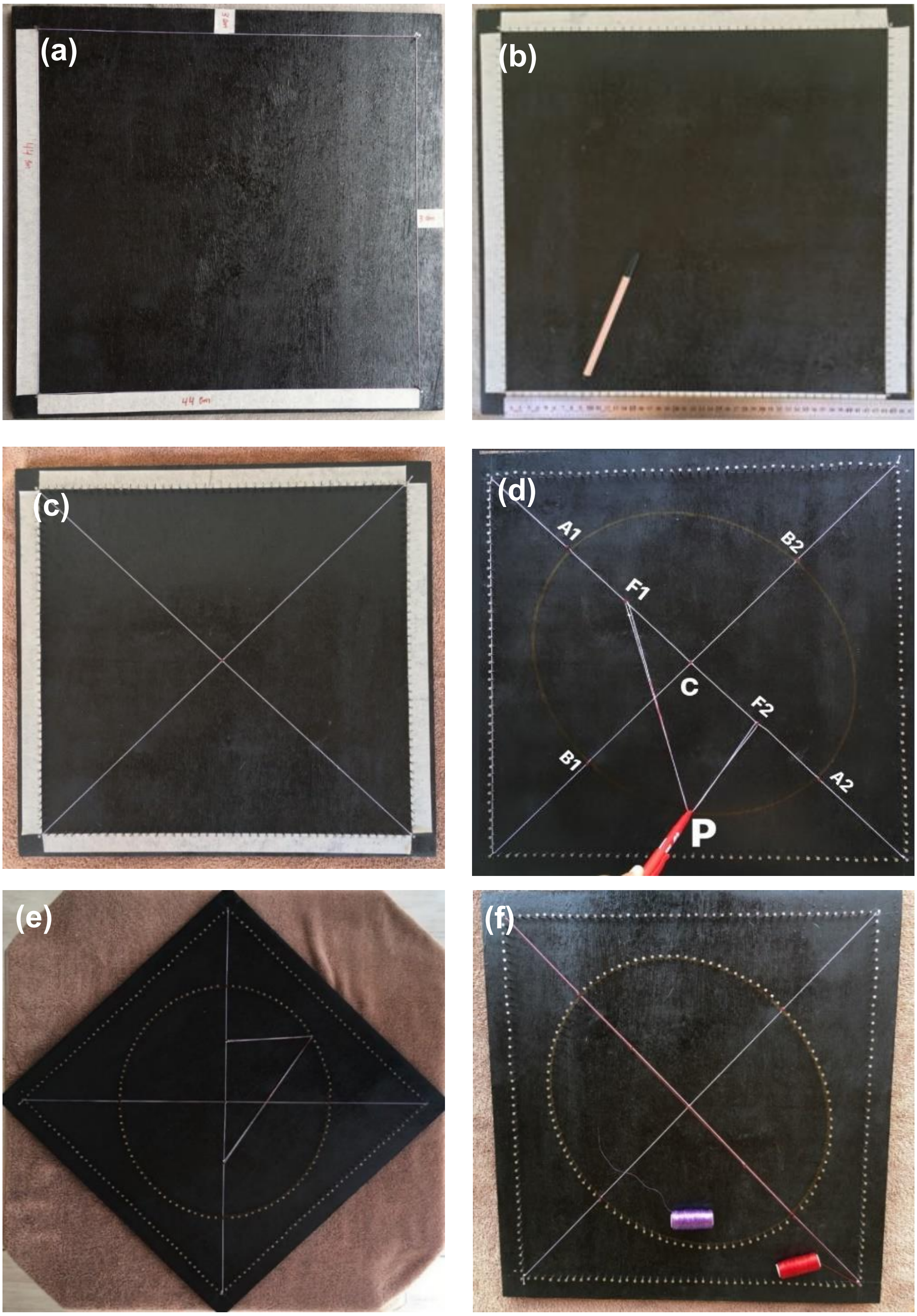
Nesse momento o professor questionou os estudantes: Quais propriedades das cônicas é possível observar?

5º passo: Com um compasso, marca-se pontos que distam um centímetro em toda elipse desenhada, posteriormente prega-se um prego em cada ponto determinado, como ilustrado na **Fig. 23e**.

Momento7: Nesse momento foi feita a escolha das linhas, foram usadas as cores vermelho e roxo.

6º passo: Use uma das linhas (inicialmente foi utilizado o vermelho) dê um nó em um dos vértices do quadrado, e em seguida puxe a linha até o vértice oposto, formando uma diagonal do quadrado, como ilustrado na **Fig. 23f**.

Figura 23. Passos 1(a), 2(b), 3(c), 4(d), 5(e) e 6(f) para construção da elipse com a técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

7º passo: A partir de dois lados paralelos do quadrado, puxe a linha que está em um dos vértices do quadrado para o 1º prego do lado oposto, e assim sucessivamente, como ilustrado na **Fig. 24a**.

8º passo: Repita o procedimento (**Fig. 24a**) até a linha preencher todos os pregos dos lados paralelos, como ilustrado na **Fig. 24b**.

Nesse momento o professor pode fazer o seguinte questionamento aos estudantes: O que são lados paralelos e adjacentes?

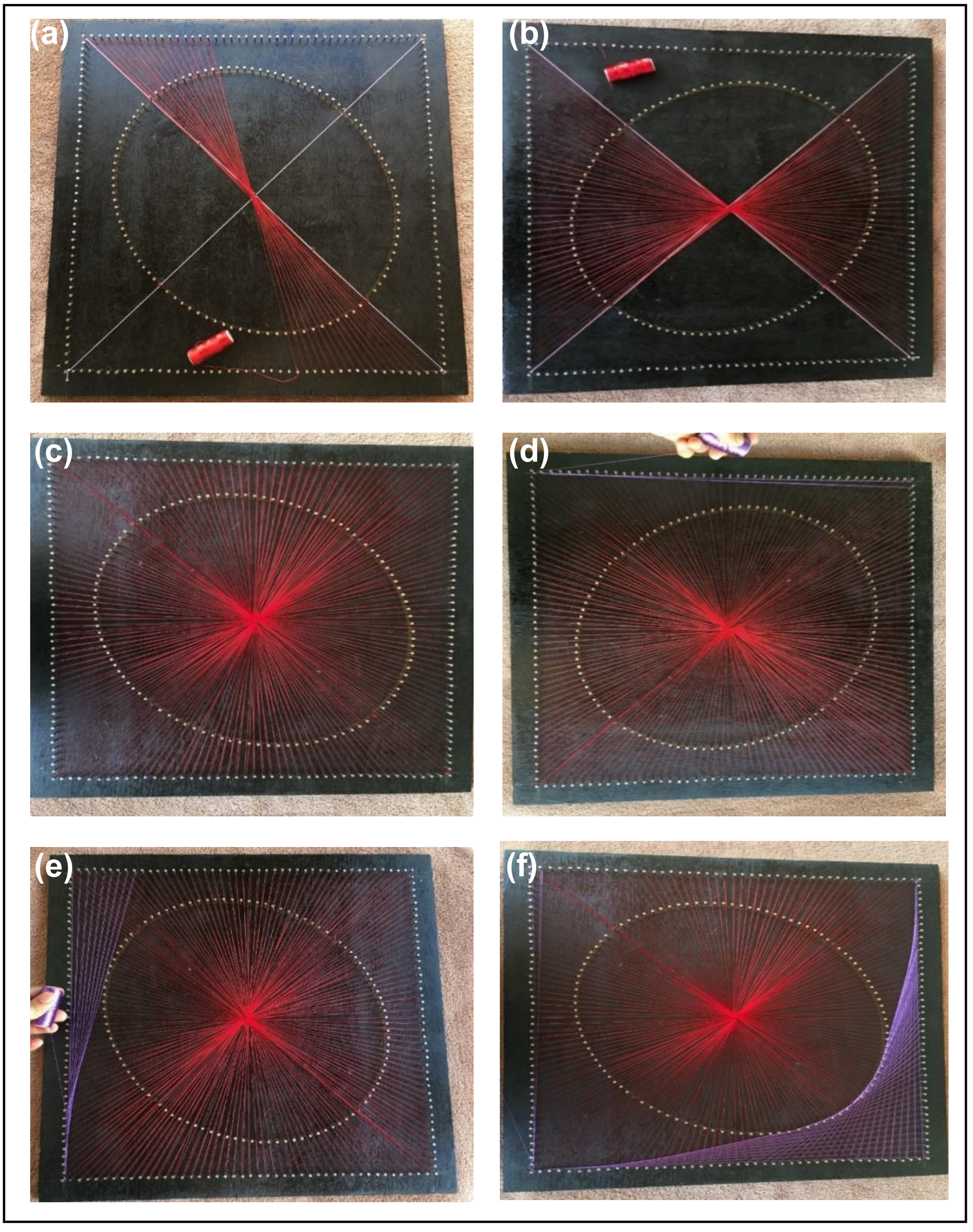
9º passo: Repete-se todo processo (**Fig. 24b**) nos outros dois lados paralelos do quadrado. A linha deve passar em todos os pregos do quadrado, como ilustrado na **Fig. 24c**.

10º passo: Amarre a linha da outra cor escolhida (roxo) no prego situado no vértice do quadrado, utilizando dois lados adjacentes do quadrado. Leve a linha até o prego situado na outra extremidade do outro lado escolhido, volte a linha para o 2º prego do outro lado adjacente como ilustrado na **Fig. 24d**.

11º passo: Nos lados adjacentes escolhidos do quadrado, mova a linha da seguinte forma: 1º prego com o 1º prego, 2º prego com o 2º prego de cada, 3º prego com o 3º prego de cada lado e assim sucessivamente, como ilustrado na **Fig. 24e**.

12º passo: Até a linha chegar ao último prego de cada lado, é possível verificar a curva formada em torno da elipse, como ilustrado na **Fig. 24f**.

Figura 24. Passos 7(a), 8(b), 9(c), 10(d), 11(e) e 12(f) para construção da elipse com a técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

13º passo: Analogamente é feito o procedimento nos lados que formam o vértice oposto ao escolhido na **Fig. 24f**, como ilustrado na **Fig. 25a**.

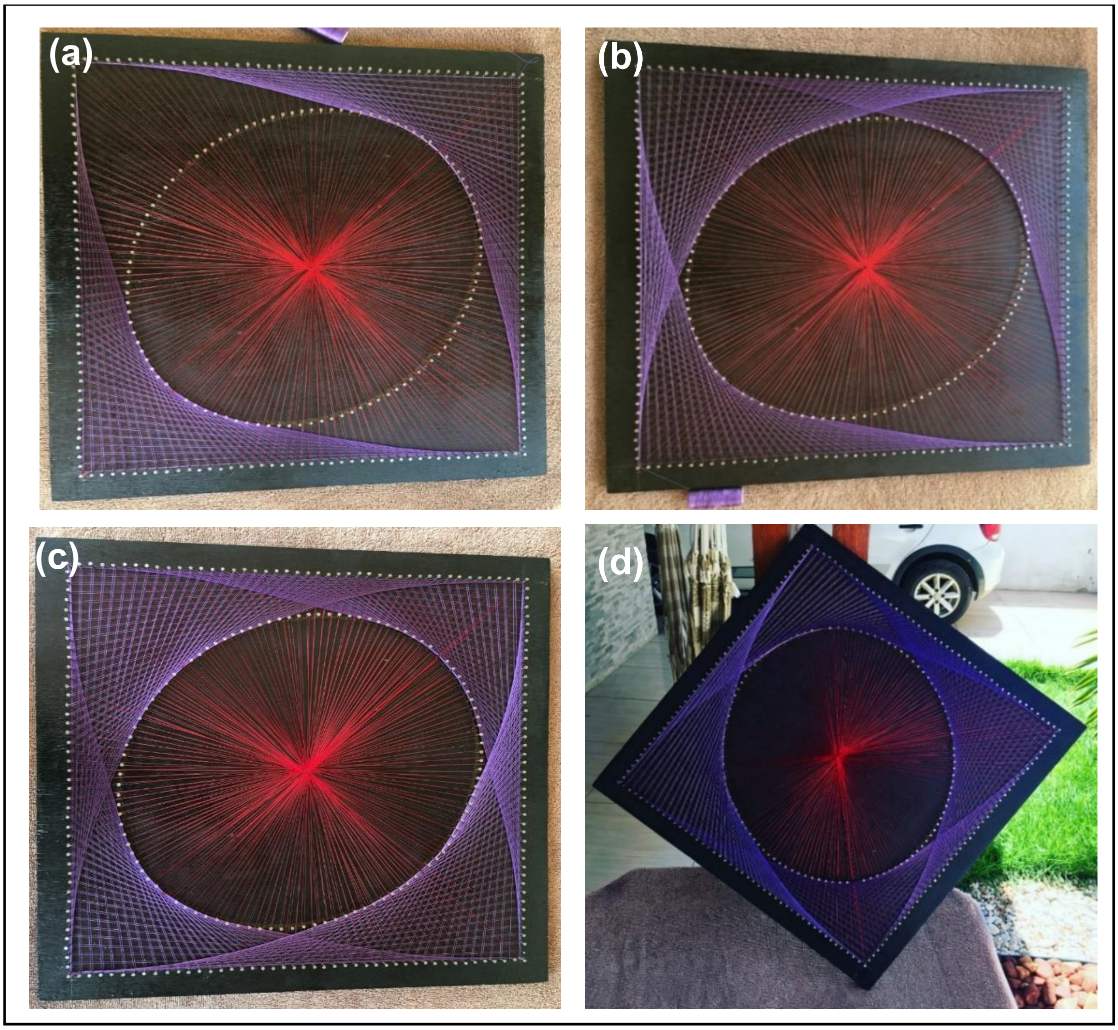
14º passo: Repete-se o procedimento das **Fig. 24f** e **Fig. 25a** nos outros lados do quadrado, como ilustrado na **Fig. 25b**.

15º passo: Ao final verificasse a elipse na cor vermelha, como ilustrado na **Fig. 25c**.

Nesse momento o professor pode fazer os seguintes questionamentos aos estudantes: O que vocês acabaram de construir? Qual o conjunto de pontos pertencente ao lugar geométrico da elipse? Quais propriedades podem ser observadas com os elementos da elipse?

A tela com a elipse pode ser exposta no ambiente escolar ou em um local de sua preferência, como ilustrado na **Fig. 25d**.

Figura 25. Passos 13(a), 14(b), 15(c) e 16(d) para construção da elipse com a técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

5.3.4. ENCONTRO 4 - CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE

No quarto encontro, inicia-se o processo de construção da hipérbole. Serão dados 14 passos que estão dispostos em figuras na sequência desse encontro.

Momento 8: Nesse momento, os estudantes serão orientados para construção da hipérbole utilizando régua e barbante, conforme o trabalho de Moreira (2017).

1º passo: Inicialmente cubra a tela de madeira com o papel cartão, coloca-se um prego em cada canto da tela para fixar o papel na madeira, como ilustrado na **Fig. 26a**.

2º passo: Com uma régua e um lápis, faça dois segmentos de retas perpendiculares com extremidades nos pontos médios dos lados paralelos da tela quadrada, formando os eixos onde construiremos a hipérbole, como ilustrado na **Fig. 26b.**

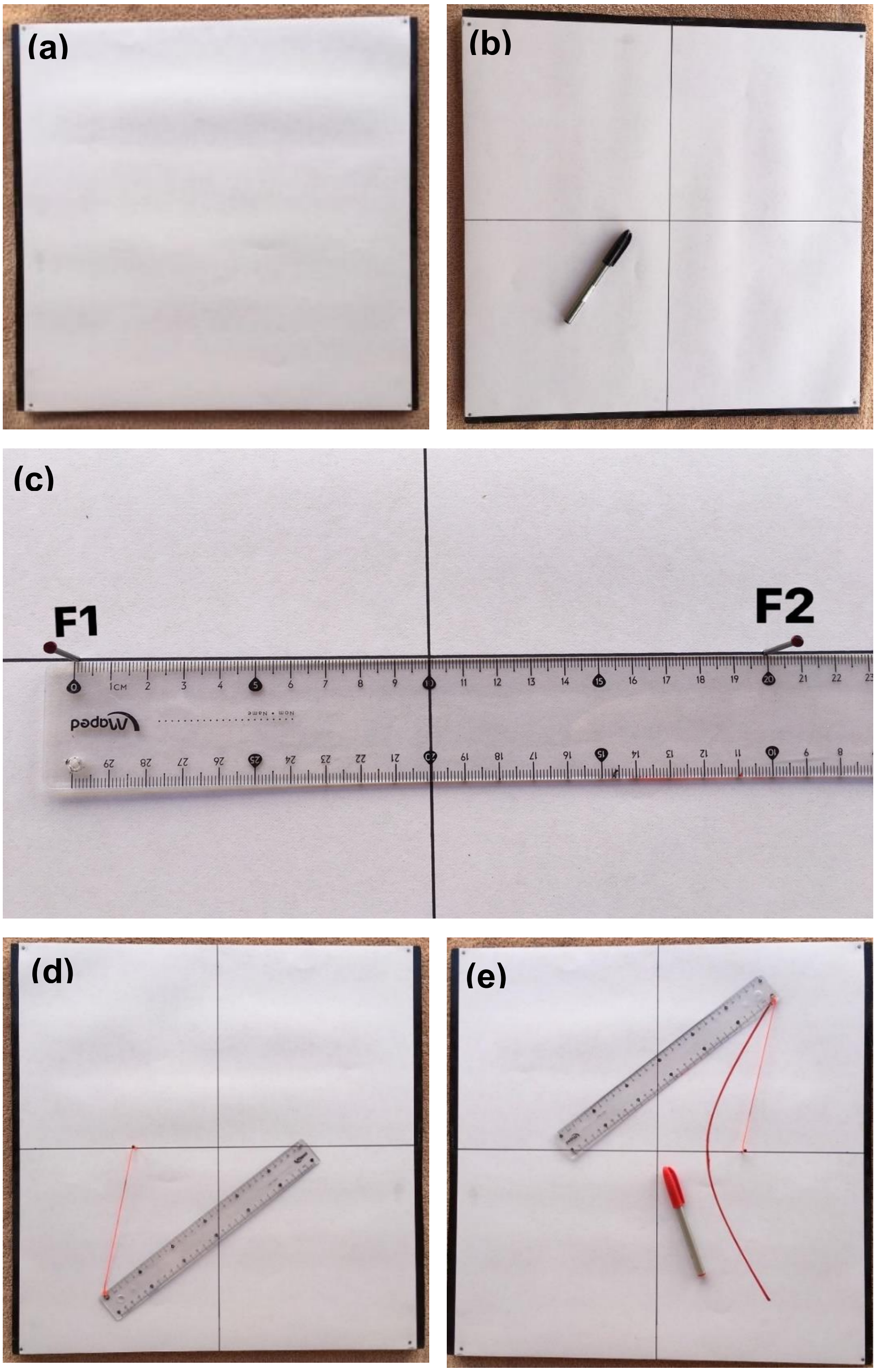
Nesse momento o professor pode fazer os seguintes questionamentos aos estudantes: O que é um ponto médio de um segmento de reta? O que são retas perpendiculares?

3º passo: Marcamos dois pontos F1 e F2 sobre um dos eixos, onde a medida $\overline{F1F2}$ é igual a 20 centímetros, como ilustrado na **Fig. 26c**.

4º passo: Em um dos pregos, predemos a extremidade de uma régua de 30 centímetros, em seguida amarramos a ponta de uma linha ao segundo prego, e a outra extremidade da linha ficará presa à ponta solta da régua. Nesse caso a linha mede 18 centímetros, o comprimento da linha deve ser maior que a diferença entre o tamanho da régua e a distância entre os pregos, como ilustrado na **Fig. 26d**.

5º passo: Move-se a ponta do pincel junto a linha, margeando a lateral da régua, mantendo a linha sempre esticada, para obter um ramo da hipérbole, como ilustrado na **Fig. 26e**.

Figura 26. Passos 1(a), 2(b), 3(c), 4(d) e 5(f) para construção da hipérbole com a técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

6º passo: Para desenhar o outro ramo da hipérbole, invertemos as posições da régua e da linha, como ilustrado na **Fig. 27a**.

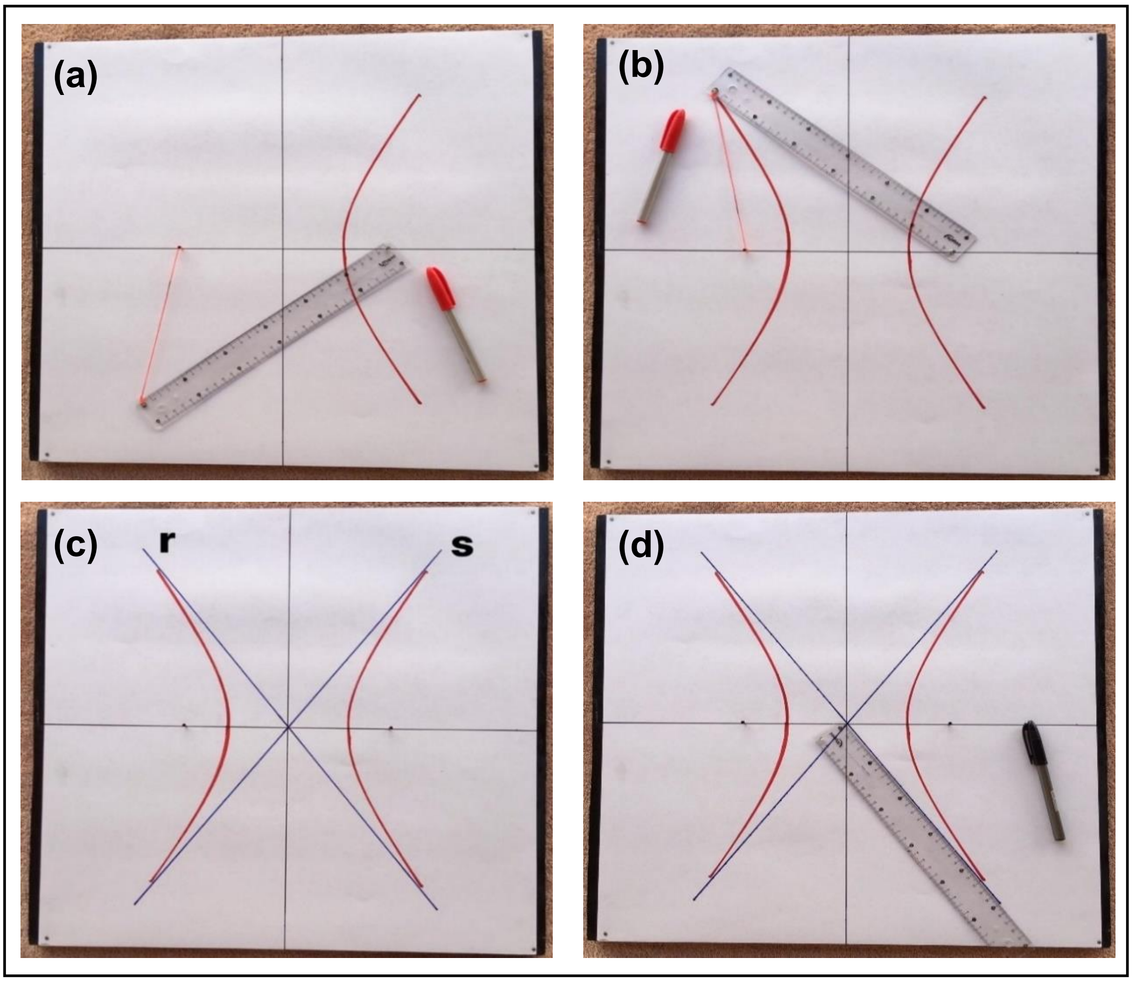
7º passo: Com procedimento análogo ao da **Fig. 27a**, desenhamos o outro ramo da hipérbole, como ilustrado na **Fig. 27b**.

8º passo: Com uma régua construímos duas retas que passam pela origem da hipérbole. Sejam as retas r e s as assíntotas, que se interceptam no ponto O que é o cento da hipérbole, como ilustrado na **Fig. 27c**.

Nesse momento o professor pode fazer o seguinte questionamento aos estudantes: O que são assíntotas?

9º passo: Com uma régua marcamos pontos de 1 em 1 cm sobre as assíntotas, como ilustrado na **Fig. 27d**.

Figura 27. Passos 6(a), 7(b), 8(c) e 9(d) para construção da hipérbole com a técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

Momento 9: Nesse momento, os pregos serão pregados nos pontos marcados nas assíntotas.

10º passo: Pragamos os pregos nos pontos marcados nas assíntotas, como ilustrado na **Fig. 28a**.

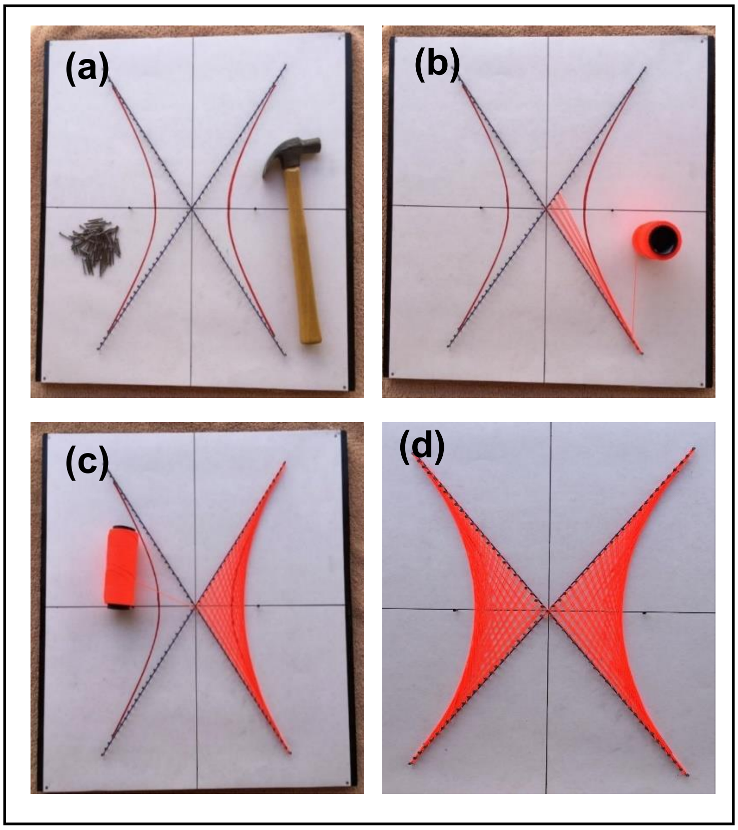
Momento 10: Passar a linha entre os pregos.

11º passo: Utilizando os pregos (pontos) das assíntotas que estão à direita do centro da hipérbole. Amarre-se a linha ao prego situado no centro da hipérbole, em seguida leve a linha até o prego situado em uma das extremidades de uma das assíntotas, volte a linha para o 1º prego da outra assíntota. Repita o movimento até que a linha passe por todos os pregos uma única vez, como ilustrado na **Fig. 28b**.

12º passo: Repetimos todo processo da **Fig. 28b**. Utilizando os pregos (pontos) das assíntotas que estão à esquerda do centro da hipérbole, como ilustrado na **Fig. 28c**.

13º passo: Verifica-se a hipérbole formada, como ilustrado na **Fig. 28d**.

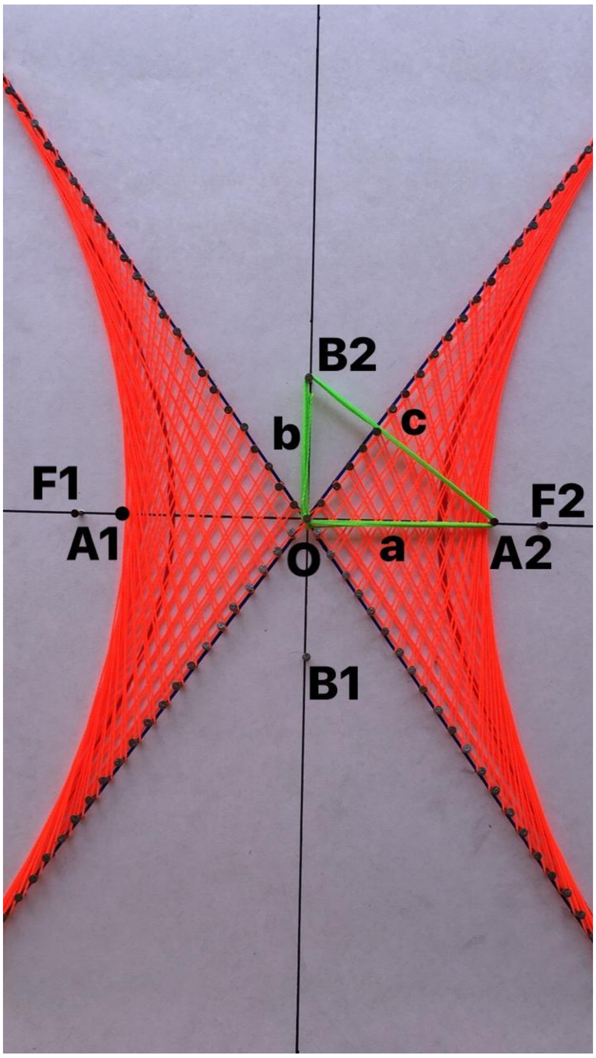
Figura 28. Passos 10(a), 11(b), 12(c) e 13(d) para construção da hipérbole com a técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

14º passo: Sejam as medidas $\overline{A1A2}$ = 2a, $\overline{B1B2}$ = 2b e $\overline{F1F2}$ = 2c. Foi determinado para esse caso as seguintes medidas: distância focal $\overline{F1F2}$ = 20 cm, c = 10 cm; eixo focal $\overline{A1A2}$ = 16 cm, a = 8 cm e eixo não focal $\overline{B1B2}$ = 12 cm, b = 6 cm, como ilustrado na **Fig. 29**.

Figura 29. Construção da hipérbole a partir da técnica *string art.*



Fonte: Autoria própria.

Nesse momento o professor pode fazer os seguintes questionamentos aos estudantes: O que vocês acabaram de construir? Qual o conjunto de pontos pertencente ao lugar geométrico da hipérbole? Quais propriedades podem ser observadas com os elementos da hipérbole?

Esse conhecimento, construído de forma ativa e lúdica, pode melhorar significativamente o entendimento de identificação das equações, desses lugares geométricos, uma vez que a grande dificuldade dos alunos é de identificar essas equações e os parâmetros nelas envolvidos. Equações essas, que podem ser trabalhadas na sequência dessas atividades, já com outra visão do aluno sobre os conceitos geométricos envolvidos.

3.3.5 ENCONTRO 5 – SEMINÁRIO DE SOCIALIZAÇÃO DOS TRABALHOS

No último encontro, há a socialização dos trabalhos. Assim, cada um dos grupos de estudantes apresentará as telas desenvolvidas com as técnicas, propriedades e conceitos aprendidos nos encontros anteriores. Além disso, vem de encontro com a habilidade *(EM13MAT105)* da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que traz referência a "utilizar *as noções de transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)" Brasil (2017, p. 533).*

Entre as principais contribuições observadas com o alinhamento pedagógico entre arte e ensino da matemática durante os encontros, evidenciaram-se uma forte identificação entre beleza e uso das ideias matemáticas manifestadas em trabalhos artísticos, os estudantes paderão aplicar o conhecimento assimilado ao produzir telas e expor o trabalho, potencializando resultados de aprendizagem matemática, maximizando a capacidade de absorver as vantagens didáticas que o trabalho artístico possibilita, e estimulam nos estudantes a apropriação mais efetiva dos conceitos geométricos, o reconhecimento e a aplicabilidade prática da matemática.

Dessa forma, é substancial desenvolver em sala de aula, e em construção de conhecimento geométrico com os estudantes do Ensino Médio, ações e práticas artísticas que possibilitaram a maximização dos resultados, do desempenho matemático e da definição de competências e habilidades significativas. Trabalhando de forma mais eficiente essa nova abordagem didática com todos os professores da área de Matemática para o Ensino Médio, evidenciando o impacto efetivo do uso da técnica da *string art* na assimilação de conteúdos geométricos e na verificação dos resultados na aprendizagem.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos da pesquisa foram destacados neste trabalho de dissertação.

A revisão bibliográfica sobre o tema da interdisciplinaridade no ensino de Matemática com Artes foi realizada e retornou diversos conceitos, relações históricas, tipos de expressões artísticas e práticas vigentes que vêm sendo utilizadas na busca da melhoria do ensino de Matemática no Ensino Básico.

Verificou-se que a técnica artística *String Art* é uma potencial ferramenta para o ensino de geometria plana, em especial de seções cônicas, a partir do uso de materiais concretos manipuláveis.

A proposta de sequência didática para o ensino de seções cônicas no 3° Ano do Ensino Médio foi desenvolvida em detalhes e apresentou todos os procedimentos necessários à sua reprodução por professores e agentes educacionais que busquem uma aplicação lúdica e significativa do tema da interdisciplinaridade entre Matemática e Artes.

Como perspectiva para a continuidade do trabalho, tem-se a aplicação da proposta em uma escola da rede estadual de ensino em Pernambuco, a partir de um estudo de caso. Esta pesquisa de campo está planejada para ocorrer em Novembro de 2022 e os resultados obtidos serão divulgados em congresso/revista científica da área de Ensino de Matemática.

Espera-se que a aplicação da proposta possa desenvolver nos estudantes as competências expressivas para a aplicação do saber prático desenvolvido nas vivências sociais de rotina, além de tornar a aprendizagem em Matemática um mecanismo mais atraente, motivadora e estimulante para superação de desafios na vida acadêmica no Ensino Básico.

REFERÊNCIAS

ALVES, H. S. P. **Ensinar Matemática através da Arte: um Incentivo ao Gosto pela Matemática?** 2013. 166 f. Dissertação (Mestrado em Arte e Educação) - Universidade Aberta. Lisboa, 2013.

ANDRADE, L. G. Curvas cônicas: um tema relevante na formação matemática do ensino médio. **XIX Seminário Temático Internacional**, Osasco-SP, p. 1-20, 2021.

ARRUDA, D.; FERNANDES, M. N. F.; ESTEVES, R. B. Desenhando a matemática com arte: o ensino interdisciplinar e a atuação docente. **Tecnologia Educacional**, Rio de Janeiro, n. 220, p. 164-173, 2018.

BARROS, P. B. Z. **A Arte na Matemática: contribuições para o ensino de geometria.** 2017. 206 f. Dissertação (Mestrado em Docência para Educação Básica) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2017.

BARTH, G. M. P. **ARTE E MATEMÁTICA, SUBSÍDIOS PARA UMA DISCUSSÃO INTERDISCIPLINAR POR MEIO DAS OBRAS DE M. C. ESCHER.** 2006. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, 2006.

BEZERRA, L. S.; LOPES, J. P. O tangram e suas contribuições para o processo de abstração e Compreensão dos conceitos geométricos de área e perímetro. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 2016, São Paulo. **Anais [...].** São Paulo: Universidade Federal de Goiás, p. 1-13.

BIRSAK, M.; *et al*. String Art: towards computational fabrication of string images. **Computer Graphics Forum**, [S.L.], v. 37, n. 2, p. 263-274, 2018.

BIRSAK, M.; RIST, F.; WONKA, P.; MUSIALSKI, P. String Art: Towards Computational Fabrication of String Images. **EUROGRAPHICS**, [S.L.], v. 37, n. 2, 2018.

BONA, J.; BONA, C. T. A.; ZOBOLI, F. A matemática e o cinema: articulações e possibilidades no campo das práticas pedagógicas. **Educação em Foco**, n. 41, p. 54-71, 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (**BNCC**). Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - PCNEM**, Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 1998.

BROMBERG, C. The Objects of Music and Mathematics and the Subordination of Sciences in Musical Treatises of the 16th century. **Trans/Form/Acao**, Marília, v. 37, n. 1, p.9-30, 2014.

CANEPPELE; MÜHL; FELDMANN. **Número de ouro e secção áurea**. 2º Simpósio de Agronomia e Tecnologia em Alimentos (AGROTEC), 2015. Disponível em: http://faifaculdades.edu.br/eventos/AGROTEC/. Acesso em: 12 de fevereiro de 2022.

CÔNICAS E QUÁDRICAS. Disponível em: https://www.respondeai.com.br/conteudo/algebra-linear-e-geometria-analitica/conicas-e-quadricas. Acesso em: 27 de março de 2022.

COSTA, J. A. F. *et al*. **AÇÕES DO PROGRAMA ARTE E MATEMÁTICA: ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA O TRABALHO INTERDISCIPLINAR.** COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 2016.

DIAS, R. M. C.; BRANDEMBERG, J. C. A história da matemática no campo da educação matemática: um olhar a partir da instituição e constituição do campo. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 16, p. 01-19, 2021.

DOMINGUES, A. C. L. **Ensino de cônicas.** 2022. 86 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2022.

EDNILSON, R. O teatro e a história da matemática como estratégias pedagógicas de atendimento em um museu de ciências. *In:* X Congresso Nacional de Educação (EDUCERE). I Seminário Internacional de Representações Sociais, Subjetividade e Educação-SIRSSE, 2011, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, p. 1433-1447.

FERREIRA, R. J. **Atividades interdisciplinares envolvendo matemática e arte**. 2015. 58 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2015.

FIGUEIREDO, T. D. *et al*. Ações do programa arte e matemática: possibilidades interdisciplinares na educação básica. *In:* IV EIEMAT – ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2014, Rio Grande – RS. **Anais [...]**. Rio Grande-RS: FURG. p. 1-8.

FLORES, C. R. Descaminhos: potencialidades da Arte com a Educação Matemática**.** **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 502 - 514, 2016.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R. Um mapa e um inventário da pesquisa brasileira sobre arte e educação matemática. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.16, n.1, pp. 243-258, 2014.

FLUGSEDER, R. L.; VARGAS, N. P. Matemática e Artes Visuais: uma escala possível. **Revista Insignare Scientia**. v.4, n.2, 2021. p. 201-2011.

LA HAYE, R. String Art in a First Calculus Course. **Primus**, [S.I.], v. 26, n. 4, p. 274-282, 2016.

LAGO, D. M. **Um estudo das cônicas.** 2017. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT – profissional), Goiânia, 2017.

LAVAQUI, V.; BATISTA, I. L. Interdisciplinaridade em ensino de ciências e de matemática no ensino médio. **Ciência & Educação**, v. 13, n. 3, p. 399-420, 2007.

LEBOUTHILLIER, C.; ŠAJNA, M. The Mathematics of String Art Nets. **ArXiv preprint**, p.01-16, 2020.

LEIRIA, R. D. C.; LUZ, V. S. Uma proposta interdisciplinar entre arte e matemática no ensino fundamental. *In:* X Congresso Nacional de Educação- EDUCERE. I Seminário Internacional de Representações Sociais, Subjetividade E Educação-SIRSSE. 2011, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, p. 14208 – 14217.

LEITE, N. S.*et al*. O desafio da interdisciplinaridade: a matemática no teatro. *In:* III EIEMAT- Escola de Inverno de Educação Matemática, 1º Encontro Nacional PIBID-Matemática, 2012, Vitória da Conquista. **Anais [...].** Vitória da Conquista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, p. 1-11.

LENZ, M. **O estudo das cônicas a partir da construção geométrica**. 2014. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro-SP, 2014.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista katálysis**, v. 10, 2007, 37-45.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas, Autores Associados, Coleção Formação de Professores, 2006.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 5 ed. São Paulo, Atlas, 2003.

MOREIRA, J. **Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e os instrumentos concretos.** 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

MUNIZ JUNIOR, F. H. M. **Seções cônicas.** 2018. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Florestal-MG, 2018.

NOVAIS, A. **A identificação de cônicas e das quádricas com o uso do software GeoGebra**. 2019. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba-MG, 2019.

OLIVEIRA, F.; BIANCHINI, L.; REIS, L. Significações do professor e indicadores de resiliência em estudantes com dificuldades de aprendizagem em matemática. **Educação Temática Digital**, Campinas-SP, v. 21, n. 2, 2019.

OSTANIN, Igor. “String art” approach to the design and manufacturing of optimal composite materials and structures. **Composite Structures**, v. 246, p. 01-09, 2020.

RAMOS, T. C. A importância da matemática na vida cotidiana dos alunos do ensino fundamental II. **Cairu em Revista**, n. 09, p. 201-218, 2017.

SABINO, A.; VIZOLLI, I. Matemática em contexto e aplicações: conexões entre arte e matemática. **Revista REAMEC**, Cuiabá - MT, v. 6, n. 01, 2018.

SACHSER, P. T. F. Matemática e Teatro: uma proposta interdisciplinar. *In:* XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, 2017, Pelotas-RS. **Anais [...].** Pelotas-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 1-12.

SANTOS, M.; BICUDO, M. Experiência de Formação Continuada com Professores de Arte e Matemática no Ensino de Geometria. **Bolema**, v. 29, n. 53, 2015.

SERENATO, L. J. **Aproximações interdisciplinares entre matemática e arte: resgatando o lado humano da matemática.** 2008. 163 f. Dissertação (mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Educação, Programa de Pós Graduação em Educação. Curitiba, 2008.

SILVA, C. da. Ciência e Arte: O origami no ensino da geometria: uma experiência interdisciplinar com alunos brasileiros no Japão. **Atas do VII Encontro do CIED–II Encontro Internacional**, **Estética e Arte em Educação**, p. 460-471, 2016.

SILVA, I. P. da.; SANTOS, C. C. dos. Matemática e arte: o impacto da interdisciplinaridade na escola. *In:* III CONEDU – CONGRESSO NACIONAL EM EDUCAÇÃO, 3., 2016, João Pessoa. **Anais [...]**. João Pessoa: UFPB. p. 1-10.

SILVA, J. F.; MORAIS, B. M. M.; SANTOS, G. H. D. A utilização do Cinema nas aulas de Matemática na perspectiva da Resolução de Problemas. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v.6, n.16, 2021.

SILVA, W. S**. Ensino-aprendizagem de cônicas em turmas com número reduzido de alunos: aplicação e avaliação de metodologia alternativa pelo modelo de rasch dicotômico.** 2016. 34 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro - BA, 2016.

SOUSA, J. D. N. **Desenvolvimento de um software para auxiliar na confecção de Circle string art**. 2021. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Graduação em Engenharia de Software) – Campus Russas, Universidade Federal do Ceará, Russas, 2021.

THIESEN, J. S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação** v. 13, n. 39, 2008.

TRINDADE, S. P. *et al*. Arte e matemática: uma proposta interdisciplinar no ensino e na aprendizagem da educação básica. *In*: Seminário Institucional do Pibid, 2015, **Anais eletrônicos [..]**, 2015.

VASCONCELOS, A. M. S. *et al*. Matemática e Música no Ensino Médio: duas linguagens e uma sinfonia. Revista Educação Pública. **Revista Educação Pública**, v. 21, n. 36, 2021. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/matematica-e-musica-no-ensino-medio-duas-linguagens-e-uma-sinfonia. Acesso em: 20 de fevereiro de 2022.

VERSA, I.; SOUZA, J. **Uso de material didático manipulável (material concreto) no estudo da geometria métrica espacial.** 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1953-8.pdf. Acesso em: 11 de outubro de 2020.

YU-SONG, Y; HUI-LI, C.; BIN, Y. Data Hiding in Symmetric Circular String Art. **Symmetry**, [S.L.], v. 12, n. 08, p. 1227, 2020.

ZRINŠČAK, L. **Prostorna instalacija, String Art**. 2019. 58 f. Tese (Doutorado em Artes) - University North. University centre Koprivnica. Department of Media Design. Koprivnica, Croácia, 2019.