



PRISCILA INACIO BUENO

TRIÂNGULOS HEPTAGONAIS

Santo André, 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

PRISCILA INACIO BUENO

TRIÂNGULOS HEPTAGONAIS

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELA ALUNA PRISCILA INACIO BUENO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, 2022

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Inacio Bueno, Priscila

Triângulos heptagonais / Priscila Inacio Bueno. — 2022.

131 fls. : il.

Orientador: Marcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, Santo André, 2022.

1. triângulo heptagonal. 2. heptágono regular. 3. geometria
triangular. I. da Silva, Marcio Fabiano. II. Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,
2022. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , **06 de maio de 2022 .**

Priscila Inácio Bueno

Autora: Priscila Inacio Bueno

Márcio Fabiano da Silva

Orientador: prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP

CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata, PRISCILA INÁCIO BUENO realizada em 09 de Fevereiro de 2022:

p/ Márcio Fabiano da Silva
Prof.(a) ALEXANDRE LYMBERPOULOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

p/ Márcio Fabiano da Silva
Prof.(a) RODRIGO ROQUE DIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) ARMANDO TRALDI JUNIOR
INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO

Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Márcio Fabiano da Silva
Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Dedico esse trabalho ao meu pai (*in memoriam*)
que não pôde ver a sua finalização. Embora fosse
um homem com pouco estudo, sempre prezou
pela educação dos filhos.

AGRADECIMENTOS

Devo agradecer a Deus, que mesmo diante das vicissitudes da vida, não permitiu que o desânimo me tirasse do caminho dos estudos.

Agradeço à minha mãe, que sempre compactuou com meus sonhos e projetos, me apoiando e dando suporte.

Sou grata aos amigos que fiz durante o curso do PROFMAT, sempre nos apoiamos mutuamente, o que nos garantiu um fôlego extra durante a jornada.

O professor Márcio Fabiano merece minha gratidão por me apresentar o tema desse trabalho e ter me dado a oportunidade de aprender que uma figura que parece simples pode ter uma infinidade de propriedades surpreendentes e nunca deixou de fazer eu acreditar que eu conseguiria fazer as demonstrações, mesmo as mais difíceis.

"Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre."

(Paulo Freire, A importância do ato de ler: em três artigos que se completam)

RESUMO

Dada uma ordem para os vértices de um heptágono regular inscrito numa circunferência, chamamos de triângulos heptagonais àqueles cujos vértices são o primeiro, o segundo e o quarto vértices do heptágono regular. Neste trabalho, estudamos algumas propriedades de tais triângulos, como, por exemplo, sua semelhança com seus triângulos órticos e tangenciais. Também são obtidas relações trigonométricas envolvendo seus ângulos internos, a saber, $\pi/7$, $2 \cdot \pi/7$ e $4 \cdot \pi/7$. Com a abordagem dos números complexos, estudamos uma relação entre o primeiro ponto de Brocard e o centro da circunferência de nove pontos de um triângulo heptagonal.

Palavras-chave: triângulo heptagonal, heptágono regular, geometria triangular

ABSTRACT

Given an order to the regular heptagon's vertices inscribed on a circumference, we call heptagonal triangles those whose vertices are the first, the second and the fourth vertices of a regular heptagon. In this paper, we study some properties of such triangles, for example, their similarity between their orthic and tangential triangles. Trigonometric relations involving their internal angles are also obtained, namely, $\pi/7$, $2 \cdot \pi/7$ and $4 \cdot \pi/7$. By complex numbers approach, we study a relation between Brocard's first point and the center of the nine-point circle of a heptagonal triangle.

Keywords: heptagonal triangle, regular heptagon, triangular geometry

CONTEÚDO

Introdução	1
1 PRELIMINARES	3
1.1 Triângulo medial	3
1.2 Teoremas das bissetrizes	5
1.3 Teorema do ângulo externo e Teorema do ângulo inscrito	7
1.4 Arco capaz	10
1.5 Quadrilátero inscritível	14
1.6 Reta de Euler	15
1.7 Circunferência de nove pontos	17
1.8 Pontos de Brocard	19
1.9 Homotetia	22
1.10 Triângulo órtico e triângulo tangencial	25
1.11 Números complexos	32
1.11.1 O plano complexo	33
1.11.2 Operações em \mathbb{C}	33
1.11.3 Módulo e conjugado de um número complexo	35
1.11.4 Representação polar de um número complexo	39
1.11.5 Produto e quociente de complexos na forma polar	40
1.11.6 Fórmula de De Moivre	40
1.11.7 Raízes n -ésimas de números complexos	41
1.11.8 Exponencial complexa	44
1.12 A fórmula binomial para os complexos	45
2 O TRIÂNGULO HEPTAGONAL E SUA TRIGONOMETRIA	47
2.1 Geometria do heptágono regular	47
2.2 O triângulo heptagonal	62
2.3 Trigonometria no triângulo heptagonal	65
3 OUTRAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO HEPTAGONAL	103
4 O TRIÂNGULO HEPTAGONAL NO PLANO COMPLEXO	121
Conclusão	129
Bibliografia	131

INTRODUÇÃO

Historicamente, o heptágono regular não foi tão estudado quanto outros polígonos regulares. Em [4, pp. 7–8], L. Bankoff e J. Garfunkel apontam possíveis motivos para isso: o heptágono regular não é face de nenhum poliedro regular; ao contrário do pentágono regular e do decágono regular, as propriedades do heptágono regular não estão associadas à Proporção Divina; diferentemente do triângulo equilátero, do quadrado e do hexágono regular, não é possível pavimentar um plano com heptágonos regulares.

Um aspecto curioso sobre o heptágono regular é sua inconstribilidade com régua e compasso. Em 1801, Gauss publicou o livro *Disquisitiones arithmeticae*, no qual provou uma condição suficiente para a construtibilidade de polígonos regulares com régua e compasso. Ele afirmava que tal condição era também necessária, mas uma prova para isto foi obtida somente alguns anos mais tarde, em 1837, por Pierre Wantzel. Em suma, um polígono regular de N lados pode ser construído com régua e compasso se e somente se $N = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$, onde $m, s \geq 0$ e, caso $s > 0$, p_1, p_2, \dots, p_s são primos distintos de Fermat, isto é, números primos que podem ser escritos como $2^{2^n} + 1$, com $n \in \mathbb{N}$. Como 7 é um número primo, que não é um primo de Fermat, o heptágono regular não pode ser construído com régua e compasso.

Graças aos trabalhos do matemático francês Victor Thébault, o estudo de propriedades do heptágono regular ganhou espaço no campo da pesquisa em geometria. Mais especificamente, uma classe de triângulos escalenos, chamados de triângulos heptagonais, formados por três dos vértices do heptágono regular. Os resultados obtidos por Thébault a respeito deste tema foram publicados na língua francesa, em sua maioria, na revista *Mathesis*. Bankoff e Garfunkel publicaram então uma compilação dos resultados de Thébault, em inglês, no artigo [4], que foi a referência básica para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado. A seguir, apresentamos a organização do nosso trabalho.

No Capítulo 1, abordamos resultados que serão importantes para o entendimento dos temas trabalhados nos capítulos seguintes. Em sua maioria, estão relacionadas à Geometria plana, mas há também uma Seção sobre números complexos.

No Capítulo 2, são obtidas algumas propriedades métricas dos triângulos heptagonais, nas quais são utilizadas fortemente relações trigonométricas para os ângulos internos de um triângulo heptagonal.

No Capítulo 3, propriedades geométricas dos triângulos heptagonais são apresentadas, como a semelhança entre um triângulo heptagonal e seu triângulo órtico, simetria entre os circuncentros de um triângulo heptagonal e de seu triângulo tangencial.

O Capítulo 4 traz uma abordagem a respeito dos triângulos heptagonais no plano complexo, com base no trabalho [9].

A escolha pelo estudo da geometria triangular, mais especificamente, dos triângulos heptagonais, no âmbito de um mestrado profissional em Matemática, justifica-se pela potencialidade do tema como objeto de pesquisa e por sua relevância no campo da geometria plana trabalhada na educação básica.

Além de conhecerem os triângulos heptagonais e algumas de suas propriedades, os professores de Matemática da educação básica que se interessarem pela leitura desta dissertação de mestrado estarão em contato com muitos outros importantes objetos geométricos, os quais raramente são introduzidos nos livros didáticos, como o triângulo tangencial, os pontos de Brocard, a circunferência de nove pontos ou a reta de Euler. Procuramos didatizar as formulações dos resultados apresentados neste trabalho, de modo a tornar possível sua utilização, como atividades exploratórias, em aulas de geometria da educação básica.

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados básicos que serão utilizados no desenvolvimento da dissertação. Começaremos abordando algumas Definições e Teoremas relacionados à Geometria Plana. Em seguida, damos uma introdução aos Números Complexos, da maneira como este tema é trabalhado na Educação Básica. Em seguida, finalizamos com a adaptação da fórmula do binômio de Newton para os números complexos. A maior parte das demonstrações relacionadas à Geometria Plana foram baseadas na referência [8]. A referência para as demonstrações relacionadas aos números complexos é a [3].

1.1 TRIÂNGULO MEDIAL

Nesta Seção, apresentamos uma propriedade do triângulo medial de um triângulo qualquer. De modo especial, provamos o Teorema da base média, ou seja, que a base média de um triângulo qualquer é paralela à respectiva base e é igual à sua metade. Utilizaremos o resultado da base média nas Proposições 1.19, 1.21 e 2.12. Com relação ao triângulo medial, seus resultados serão utilizados na Proposição 3.1.

Definição 1.1. Base média de um triângulo é um segmento que possui como extremos os pontos médios de dois dos lados do triângulo.

Proposição 1.2 (Teorema da base média). *Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, consideremos a base média \overline{MN} , em que M e N são os pontos médios de \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Então, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$.*

Demonstração. Tomemos M' sobre \overrightarrow{MN} de forma que $M - N - M'$ e $MN = NM'$. Assim, como N é o ponto médio de \overline{AC} e $\hat{A}NM = \hat{C}NM'$, pois são opostos pelo vértice, os triângulos $\triangle AMN$ e $\triangle CM'N$ são congruentes pelo caso *LAL*. Essa construção está ilustrada na Figura 1. Logo, $M'C = MA$ e $M'\hat{C}N = M\hat{A}N$, o que implica que $\overleftarrow{M'C} \parallel \overleftarrow{AM}$. Então:

$$BM = AM = M'C$$

e

$$\overleftarrow{BM} = \overleftarrow{AM} \parallel \overleftarrow{M'C}.$$

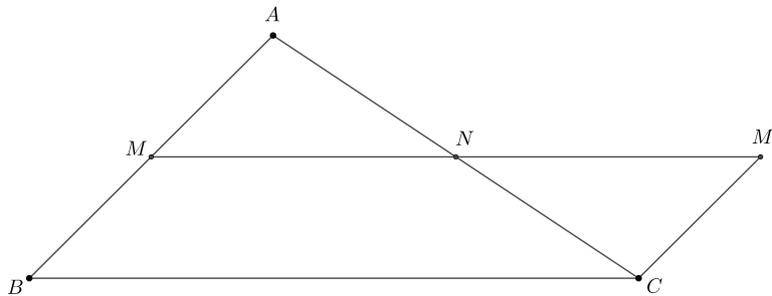


Figura 1: Triângulo $\triangle ABC$ e sua base média \overline{MN} .

Como o quadrilátero $MBCM'$ possui um par de lados opostos congruentes e paralelos, podemos afirmar que ele é um paralelogramo. Assim,

$$\overleftarrow{BC} \parallel \overleftarrow{MM'} = \overleftarrow{MN} \quad \text{e} \quad BC = MM' = 2 \cdot MN.$$

□

Definição 1.3. Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam M o ponto médio de \overline{AB} , N o ponto médio de \overline{AC} e P o ponto médio de \overline{BC} . O triângulo $\triangle MNP$ é denominado triângulo medial do triângulo $\triangle ABC$.

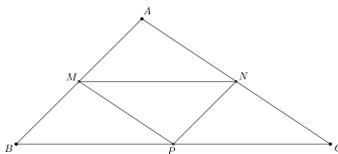


Figura 2: Triângulo $\triangle ABC$ e o triângulo medial $\triangle MNP$.

Na Figura 2 estão ilustrados um triângulo $\triangle ABC$ e seu triângulo medial $\triangle MNP$.

Proposição 1.4. *Dado um triângulo $\triangle ABC$ e seu triângulo medial $\triangle MNP$, o perímetro do triângulo $\triangle MNP$ é igual à metade do perímetro do triângulo ABC .*

Demonstração. Como o triângulo medial $\triangle MNP$ é formado pelas bases médias do triângulo $\triangle ABC$, decorre da Proposição 1.2 que o comprimento de cada base média é igual à metade do comprimento do respectivo lado do triângulo $\triangle ABC$. Deste modo, $AB + BC + CA = 2 \cdot (MN + NP + PM)$. \square

1.2 TEOREMAS DAS BISSETRIZES

Nesta Seção, apresentamos dois resultados importantes na geometria triangular, a saber, os Teoremas das bissetrizes interna e externa. Eles serão utilizados na prova da Proposição 3.3. O Teorema da bissetriz interna também será utilizado na Proposição 2.15. Começamos definindo a bissetriz de um ângulo.

Definição 1.5. Dado um ângulo $\angle ABC$, a semirreta \overrightarrow{BD} , com $D \in \text{int}(\angle ABC)$, e tal que $\angle ABD \cong \angle CBD$, é chamada de bissetriz do ângulo $\angle ABC$.

Dado um triângulo qualquer, as bissetrizes de seus ângulos internos são chamadas de bissetrizes internas, enquanto que as bissetrizes de seus ângulos externos são chamadas de bissetrizes externas.

Proposição 1.6. (Teorema da bissetriz interna) *Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, seja \overrightarrow{BF} a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$, com $A - F - C$. Então*

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{CF}. \quad (1.1)$$

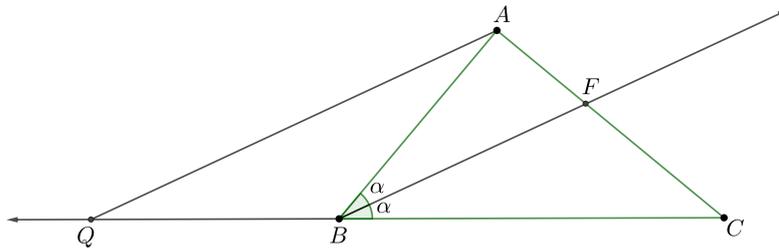


Figura 3: Triângulo $\triangle ABC$ e a bissetriz interna \vec{BF} do ângulo $\angle ABC$.

Demonstração. Sejam $\alpha = \hat{A}BF = \hat{C}BF$ e $Q \in \vec{CB}$ tal que $\vec{AQ} \parallel \vec{BF}$, como está ilustrado na Figura 3. Pelo Teorema de Tales, temos que

$$\frac{QB}{BC} = \frac{AF}{CF} \quad (1.2)$$

Como $\vec{AQ} \parallel \vec{BF}$, $\hat{B}QA = \hat{C}BF = \alpha$ e $\hat{BA}Q = \hat{ABF} = \alpha$ (alternos internos). Assim, o triângulo $\triangle ABQ$ é isósceles, com $QB = AB$. Consequentemente, em (1.2),

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{CF} \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{CF}.$$

□

Proposição 1.7. (Teorema da bissetriz externa) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e \vec{AL} a bissetriz externa do ângulo $\angle BAC$, com $B - C - L$. Então

$$\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}. \quad (1.3)$$

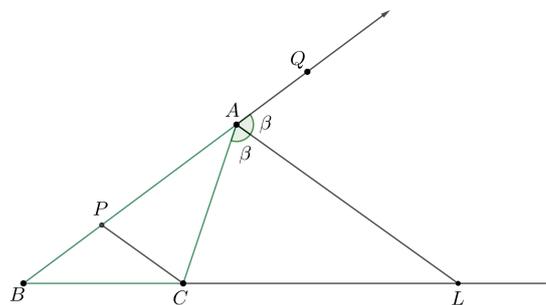


Figura 4: Triângulo $\triangle ABC$ e a bissetriz externa \vec{AL} do ângulo $\angle BAC$.

Demonstração. Sejam $P \in \overline{AB}$ tal que $\overline{PC} \parallel \overline{AL}$ e Q tal que $B - A - Q$. Supomos que $C\hat{A}L = L\hat{A}Q = \beta$. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AP} \quad (1.4)$$

Como $\overline{PC} \parallel \overline{AL}$, então $A\hat{P}C = L\hat{A}Q = \beta$ e $P\hat{C}A = C\hat{A}L = \beta$ (alternos internos), conforme ilustra a Figura 4. Portanto, o triângulo $\triangle PAC$ é isósceles e $AP = AC$. Consequentemente, em (1.4),

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}.$$

□

1.3 TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO E TEOREMA DO ÂNGULO INSCRITO

Nesta Seção, vamos apresentar o Teorema do ângulo externo, o qual será utilizado nas Proposições 1.9 e 1.23. Também se fazem necessárias as demonstrações do Teorema do ângulo inscrito e do seu caso limite, o ângulo de segmento. O Teorema do ângulo inscrito será utilizado nas demonstrações das Proposições 1.13, 1.15 e 1.19. Esse Teorema, junto com o Teorema do ângulo de segmento, aparecerão nas Proposições 1.22, 1.34 e 1.35 e no Lema 3.5.

Proposição 1.8 (Teorema do ângulo externo). *Em qualquer triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

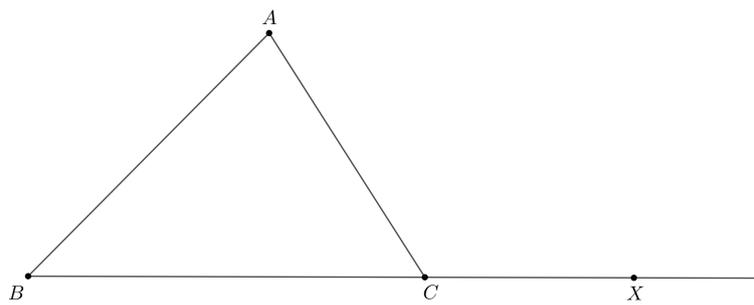


Figura 5: Triângulo $\triangle ABC$ e o ângulo externo $\angle ACX$.

Demonstração. Consideremos um triângulo $\triangle ABC$ qualquer. Seja X tal que $B - C - X$. Assim, o ângulo $\angle ACX$ é externo ao triângulo $\triangle ABC$, como está ilustrado na Figura 5.

Temos que $\angle ACX$ e $\angle ACB$ são suplementares, de modo que $\widehat{ACX} = \pi - \widehat{ACB}$. Como $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \pi$, então $\widehat{ACX} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$. \square

Proposição 1.9 (Teorema do ângulo inscrito). *Sejam \overline{AB} e \overline{AC} cordas de um circunferência com centro em O . A medida do ângulo $\angle BAC$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle BOC$.*

Demonstração. Daremos a prova de acordo com a posição de O em relação ao ângulo $\angle BAC$: no primeiro caso, O pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ (Figura 6), no segundo, O pertence ao exterior do ângulo $\angle BAC$ (Figura 7) e, finalmente, no terceiro caso, O pertence ao ângulo $\angle BAC$ (Figura 8).

a) quando temos o centro O contido no ângulo $\angle BAC$, os triângulos $\triangle OAC$ e $\triangle OAB$ serão isósceles, de bases \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Podemos dizer que $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \alpha$ e $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \beta$. Temos que $\widehat{BAC} = \alpha + \beta$ e, sendo A' o ponto simétrico a A em relação ao centro O , pelo Teorema do ângulo externo (Proposição 1.8) vale que $\widehat{COA'} = 2 \cdot \alpha$ e $\widehat{BOA'} = 2 \cdot \beta$. Então

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOA'} + \widehat{COA'} = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot \widehat{BAC}.$$

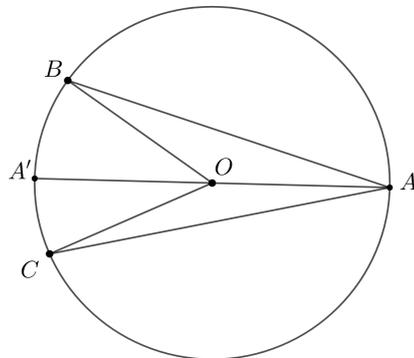


Figura 6: O centro O pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$.

b) neste caso, o centro O pertence ao exterior do ângulo $\angle BAC$. Novamente, os triângulos $\triangle OAC$ e $\triangle OAB$ são isósceles de bases \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Sendo A' o ponto simétrico a A em relação ao centro O , sem perda de generalidade, supomos que C pertence ao interior do ângulo $\angle A'AB$. Deste modo, sendo $\alpha =$

$O\hat{A}C = O\hat{C}A$ e $\beta = O\hat{A}B = O\hat{B}A$, segue que $B\hat{A}C = \beta - \alpha$ e, pelo Teorema do ângulo externo (Proposição 1.8), $C\hat{O}A' = 2 \cdot \alpha$ e $B\hat{O}A' = 2 \cdot \beta$. Logo,

$$B\hat{O}C = B\hat{O}A' - C\hat{O}A' = 2 \cdot (\alpha - \beta) = 2 \cdot B\hat{A}C.$$

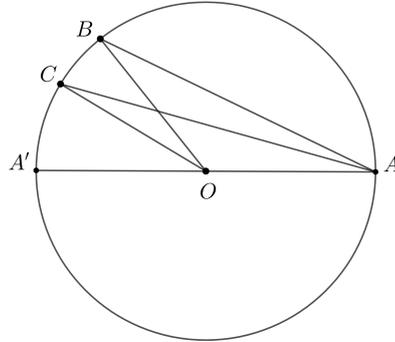


Figura 7: O centro O pertence ao exterior do ângulo $\angle BAC$.

c) neste caso, o centro O pertence ao ângulo $\angle BAC$. Temos que os triângulos $\triangle ABO$ e $\triangle ACO$ são isósceles com $\alpha = A\hat{B}O = B\hat{A}O$ e $\beta = A\hat{C}O = C\hat{A}O$. Sem perda de generalidade, supomos que $B - O - C$, de modo que O pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$. Logo, $B\hat{A}C = \alpha + \beta$. Pelo Teorema do ângulo externo, $A\hat{O}C = 2 \cdot \alpha$ e $A\hat{O}B = 2 \cdot \beta$. Assim,

$$B\hat{O}C = B\hat{O}A + A\hat{O}C = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot B\hat{A}C.$$

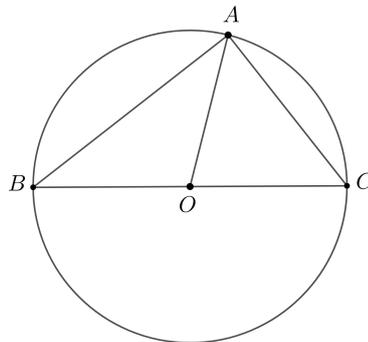


Figura 8: O centro O pertence ao ângulo $\angle BAC$.

□

Observação 1.10. No caso em que o centro O pertence ao lado do ângulo $\angle BAC$, temos que $\angle BAC$ é um ângulo reto, pois $B\hat{O}C = B\hat{O}A + A\hat{O}C = \pi$.

Em uma nova proposição, vamos abordar o caso limite, no qual um dos lados do ângulo inscrito é tangente à circunferência, como está ilustrado na Figura 9. Este ângulo é chamado de ângulo de segmento.

Proposição 1.11 (Ângulo de segmento). *Sejam C uma circunferência de centro O , A e B dois pontos distintos sobre C , t a reta tangente a C no ponto A e C um ponto sobre t de modo que B e C estejam do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{AO} . A medida do ângulo de segmento $\angle BAC$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle AOB$.*

Demonstração. Sendo $\alpha = \widehat{BAC}$, temos que $\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, pois o triângulo $\triangle AOB$ é isósceles de base \overline{AB} e $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AO}$. Sendo A' o simétrico a A em relação ao centro O , então $\widehat{A'OB} = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - 2 \cdot \alpha$. Portanto,

$$\widehat{BOA} = \pi - (\pi - 2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot \widehat{BAC}.$$

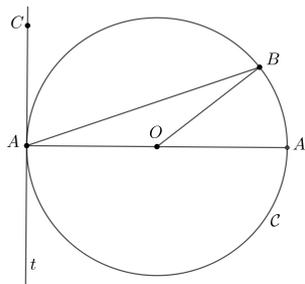


Figura 9: Ângulo de segmento $\angle BAC$.

□

1.4 ARCO CAPAZ

Um arco capaz de um dado segmento é um importante lugar geométrico, que será utilizado nas demonstrações das Proposições 1.15 e 2.6. A rigor, temos

Definição 1.12. Consideremos um dado segmento \overline{AB} e α um número real tal que $0 < \alpha < \pi$. Um arco capaz de \overline{AB} de ângulo de medida α é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\widehat{APB} = \alpha$.

Para cada α , existe um par de arcos capazes, sendo um simétrico ao outro em relação à reta \overleftrightarrow{AB} , como na Figura 10. Deste modo, basta construir um deles e refleti-lo em relação à reta suporte do segmento dado.

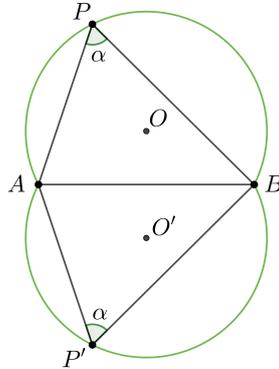


Figura 10: Arcos capazes de \overline{AB} de medida α .

A seguir, apresentamos uma construção para determinação de um arco capaz de um dado segmento. Ela será dada em função da natureza da medida do ângulo: reto, agudo ou obtuso.

Proposição 1.13. *Sejam \overline{AB} um dado segmento e α um número real com $0 < \alpha < \pi$.*

- a) *se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o par de arcos capazes de \overline{AB} de medida α é a circunferência de diâmetro \overline{AB} , com exceção dos pontos A e B , como na Figura 11.*

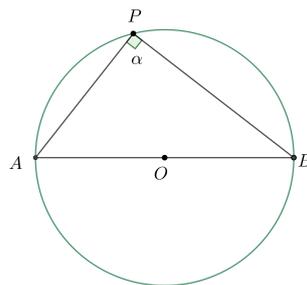


Figura 11: Arco capaz de \overline{AB} com $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

- b) *se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ então um arco capaz de \overline{AB} de medida α é o arco da circunferência de centro O cujos pontos estão do mesmo lado de O em relação à reta \overline{AB} , sendo O o*

ponto de intersecção da mediatriz m do segmento \overline{AB} com a reta t que passa por A e é perpendicular à reta s que forma com \overrightarrow{AB} um ângulo de medida α , como na Figura 12.

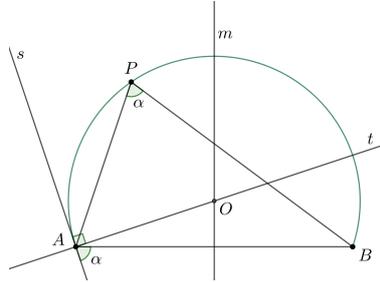


Figura 12: Arco capaz de \overline{AB} com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

c) se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ então um arco capaz de \overline{AB} de medida α é o arco da circunferência de centro O cujos pontos estão do lado oposto a O em relação à reta \overline{AB} , sendo O o ponto de intersecção da mediatriz m do segmento \overline{AB} com a reta t que passa por A e é perpendicular à reta s que forma com \overrightarrow{AB} um ângulo de medida α , como na Figura 13.

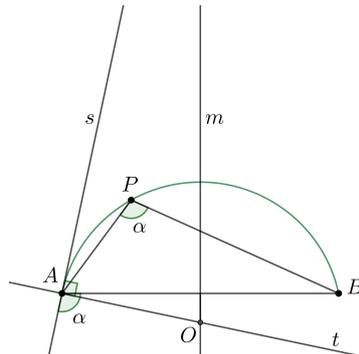


Figura 13: Arco capaz de \overline{AB} com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Demonstração. a) Sendo Γ a circunferência de diâmetro \overline{AB} e P um ponto qualquer de Γ , $P \notin \{A, B\}$, temos pelo Teorema do ângulo inscrito (Proposição 1.9) que $A\hat{P}B = \frac{180}{2} = 90 = \alpha$. Deste modo, $\Gamma \setminus \{A, B\}$ está contida no par de arcos capazes, de acordo com a Definição 1.12. Reciprocamente, seja Q um ponto qualquer tal que $A\hat{Q}B = \frac{\pi}{2}$. Suponhamos, por absurdo, que $Q \notin \Gamma$. Seja $\{Q'\} = \overleftrightarrow{AQ} \cap \Gamma$, $Q' \neq A$. Pelo Teorema do ângulo inscrito, temos que $A\hat{Q}'B = \frac{\pi}{2}$ e, conseqüentemente,

$B\hat{Q}'Q = \frac{\pi}{2}$. Como $B\hat{Q}Q' = \frac{\pi}{2}$, temos que o triângulo $\triangle BQQ'$ tem dois ângulos retos, o que é absurdo. Portanto, $\Gamma \setminus \{A, B\}$ é o par de arcos capazes desejado.

- b) Sejam M o ponto médio do segmento \overline{AB} , Γ a circunferência de centro O que passa por A (e, conseqüentemente, por B), β o conjunto dos pontos de Γ que ficam do mesmo lado que O em relação à reta \overleftrightarrow{AB} e φ o conjunto dos pontos de Γ que ficam do lado oposto a O em relação à reta \overleftrightarrow{AB} . Por construção de t , temos que $M\hat{A}O = \frac{\pi}{2} - \alpha$, donde segue que $M\hat{O}A = \alpha$. Mas, pelo Postulado lado-ângulo-lado de congruência de triângulos, são congruentes os triângulos $\triangle AOM$ e $\triangle BOM$, donde temos que $B\hat{O}M = \alpha$. Assim, $A\hat{O}B = 2 \cdot \alpha$, de modo que a medida do arco \widehat{AB} determinado em φ é igual a $2 \cdot \alpha$. Sendo P um ponto qualquer de β , pelo Teorema do ângulo inscrito, $A\hat{P}B = \frac{2 \cdot \alpha}{2} = \alpha$. Então, β está contida num arco capaz de \overline{AB} , de acordo com a Definição 1.12. Reciprocamente, seja Q um ponto qualquer tal que $A\hat{Q}B = \alpha$. Suponhamos, por absurdo, que $Q \notin \beta$. Seja $\{Q'\} = \overleftrightarrow{AQ} \cap \beta$, $Q' \neq A$. Pelo Teorema do ângulo inscrito, temos que $A\hat{Q}'B = \frac{2 \cdot \alpha}{2} = \alpha$ e, conseqüentemente, $B\hat{Q}'Q = \pi - \alpha$. Como $B\hat{Q}Q' = \alpha$, temos que o triângulo $\triangle BQQ'$ tem dois ângulos cuja soma é π , o que é absurdo. Portanto, β é um dos arcos capazes de \overline{AB} desejado. O outro arco procurado é o simétrico de β em relação à reta \overleftrightarrow{AB} , pois a reflexão em relação a uma reta é uma isometria do plano e isometrias preservam medida angular.
- c) Sejam M o ponto médio do segmento \overline{AB} , Γ a circunferência de centro O que passa por A (e, conseqüentemente, por B), β o conjunto dos pontos de Γ que ficam do mesmo lado que O em relação à reta \overleftrightarrow{AB} e φ o conjunto dos pontos de Γ que ficam do lado oposto a O em relação à reta \overleftrightarrow{AB} . Por construção de t , temos que $M\hat{A}O = \alpha - \frac{\pi}{2}$, donde segue que $M\hat{O}A = \pi - \alpha$. Mas, pelo Postulado lado-ângulo-lado de congruência de triângulos, são congruentes os triângulos $\triangle AOM$ e $\triangle BOM$, donde temos que $B\hat{O}M = \pi - \alpha$. Assim, $A\hat{O}B = 2 \cdot (\pi - \alpha)$, de modo que a medida do arco \widehat{AB} determinado em φ é igual a $2 \cdot (\pi - \alpha)$. Conseqüentemente, a medida do arco \widehat{AB} determinado em β é igual a $2 \cdot \pi - 2 \cdot (\pi - \alpha) = 2 \cdot \alpha$. Sendo P um ponto qualquer de β , pelo Teorema do ângulo inscrito, $A\hat{P}B = \frac{2 \cdot \alpha}{2} = \alpha$. Então, β está contida num arco capaz de \overline{AB} , de acordo com a Definição 1.12. Reciprocamente, seja Q um ponto qualquer tal que $A\hat{Q}B = \alpha$. Suponhamos, por absurdo, que $Q \notin \beta$. Seja $\{Q'\} = \overleftrightarrow{AQ} \cap \beta$, $Q' \neq A$. Pelo Teorema do ângulo inscrito, temos que $A\hat{Q}'B = \frac{2 \cdot \alpha}{2} = \alpha$ e, conseqüentemente, $B\hat{Q}'Q = \pi - \alpha$. Como $B\hat{Q}Q' = \alpha$, temos que o triângulo $\triangle BQQ'$ tem dois ângulos cuja soma é π , o que é absurdo. Portanto, β é um dos arcos capazes de \overline{AB} desejado. O outro arco procurado é o simétrico de

β em relação à reta \overleftrightarrow{AB} , pois a reflexão em relação a uma reta é uma isometria do plano e isometrias preservam medida angular.

□

Observação 1.14. Na prova do item b) da Proposição 1.13, observamos que quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$, o ponto Q não pode ser tomado sobre a reta s , a qual, neste caso, é a reta tangente a Γ no ponto A ; caso contrário, teríamos o triângulo $\triangle AQB$ com $A\hat{Q}B = \frac{\pi}{4}$ e $B\hat{A}Q = \frac{3 \cdot \pi}{4}$, cuja soma é π . Do mesmo modo, na prova do item c) da Proposição 1.13, observamos que quando $\alpha = \frac{3 \cdot \pi}{4}$, o ponto Q não pode ser tomado sobre a reta s , a qual, neste caso, é a reta tangente a Γ no ponto A ; caso contrário, teríamos o triângulo $\triangle AQB$ com $A\hat{Q}B = \frac{3 \cdot \pi}{4}$ e $B\hat{A}Q = \frac{\pi}{4}$.

1.5 QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Dizemos que um quadrilátero é inscritível quando existe uma circunferência passando por seus quatro vértices. Esse quadrilátero carrega consigo certas propriedades, que serão demonstradas a seguir e utilizadas na Proposição 3.1.

Proposição 1.15. Um quadrilátero convexo $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $D\hat{A}B + B\hat{C}D = \pi$.

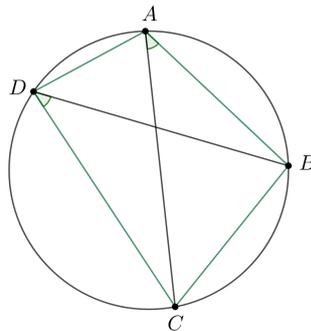


Figura 14: Quadrilátero inscritível $ABCD$.

Demonstração. Sendo $ABCD$ um quadrilátero inscritível, como na Figura 14, temos, pelo Teorema do ângulo inscrito (Proposição 1.9), que $D\hat{A}B = \frac{\text{med}(\widehat{BCD})}{2}$ e $B\hat{C}D = \frac{\text{med}(\widehat{DAB})}{2}$. Então

$$D\hat{A}B + B\hat{C}D = \frac{\text{med}(\widehat{BAD})}{2} + \frac{\text{med}(\widehat{BCD})}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi.$$

Reciprocamente, suponhamos que $D\hat{A}B + B\hat{C}D = \pi$. Suponhamos, por absurdo, que o quadrilátero $ABCD$ não seja inscrito. Assim, se Γ é a (única) circunferência que passa pelos pontos A , B e D , então $C \notin \Gamma$. Seja $\{C'\} = \overrightarrow{AC} \cap \Gamma$. Deste modo, o quadrilátero $ABC'D$ é inscrito. De acordo com o que acabamos de provar, $D\hat{A}B + B\hat{C}'D = \pi$. Como, por hipótese, $D\hat{A}B + B\hat{C}D = \pi$, então $B\hat{C}D = B\hat{C}'D$. Consequentemente, os ângulos $\angle BCD$ e $\angle BC'D$ estão inscritos no mesmo arco, que, neste caso, é o arco $\widehat{BC'D}$ de Γ . Ou seja, $C \in \Gamma$, obtendo assim uma contradição. Portanto, $ABCD$ é um quadrilátero inscrito.

□

Observação 1.16. Se $ABCD$ é um quadrilátero inscrito então $B\hat{A}C = B\hat{D}C$. De fato, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle BDC$ estão inscritos no mesmo arco \widehat{BC} da circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$, como está ilustrado na Figura 14.

1.6 RETA DE EULER

A seguir, mostramos que estão alinhados o baricentro, o circuncentro e o ortocentro de um triângulo não isósceles qualquer, sendo que o baricentro sempre está entre os outros dois. Observamos que este resultado é válido para os triângulos isósceles não equiláteros. No entanto, como estamos interessados nos triângulos heptagonais, que são triângulos escalenos, daremos a prova do resultado somente para este caso.

Proposição 1.17. Sendo $\triangle ABC$ um triângulo escaleno qualquer e O , G e H seus circuncentro, baricentro e ortocentro, respectivamente, então

- $AH = 2 \cdot OM$, onde M é o ponto médio de \overline{BC} ;
- H , G e O são colineares, com $G \in \overline{OH}$ e $HG = 2 \cdot GO$.

Demonstração. a) Sendo N o ponto médio de \overline{AC} , segue do Teorema da base média que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ e $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$. Como H pertence às retas suportes das alturas do triângulo $\triangle ABC$ e O é intersecção das mediatrizes de seus lados, temos que \overrightarrow{AH} e \overrightarrow{OM} são perpendiculares à reta \overleftrightarrow{BC} , de modo que $\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{OM}$. Consequentemente, as medidas dos ângulos $\angle OMN$ e $\angle HAB$ são iguais, assim como as medidas

dos ângulos $\angle ONM$ e $\angle HBA$ ($\overleftrightarrow{HB} \parallel \overleftrightarrow{ON}$ de maneira análoga ao paralelismo entre \overleftrightarrow{AH} e \overleftrightarrow{OM}). Portanto, os triângulos $\triangle OMN$ e $\triangle HAB$ são semelhantes o que nos leva a

$$\frac{OM}{AH} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}.$$

- b) Consideramos um ponto H' tal que $O - G - H'$ e $GH' = 2 \cdot GO$. Em relação aos triângulos $\triangle OGM$ e $\triangle H'GA$, temos que $GH' = 2 \cdot GO$, $H'\hat{G}A = O\hat{G}M$ e $GA = 2 \cdot GM$, pois G é baricentro do triângulo $\triangle ABC$. Pelo caso L.A.L. de semelhança de triângulos, temos que $\triangle OGM \sim \triangle H'GA$, donde obtemos que $\angle OMG \cong \angle H'AG$, que correspondem a ângulos alternos internos formados entre a transversal \overleftrightarrow{AM} e as retas $\overleftrightarrow{H'A}$ e \overleftrightarrow{OM} . Consequentemente, $\overline{OM} \parallel \overline{H'A}$. Como $\overline{OM} \parallel \overline{HA}$ então $\overleftrightarrow{AH'}$ passa pelo ortocentro H do triângulo $\triangle ABC$. De modo análogo, considerando também o ponto médio P de \overline{BC} , obtemos que $\overleftrightarrow{BH'}$ e $\overleftrightarrow{CH'}$ passam por H , de modo que $H' = H$, donde temos $O - G - H$ e $GH = 2 \cdot OG$.

□

Definição 1.18. Sendo $\triangle ABC$ um triângulo escaleno qualquer, O , G e H seus circuncentro, baricentro e ortocentro, respectivamente, a reta que passa por O , G e H é chamada de *Reta de Euler* do triângulo e o segmento \overline{OH} é chamado de segmento de Euler.

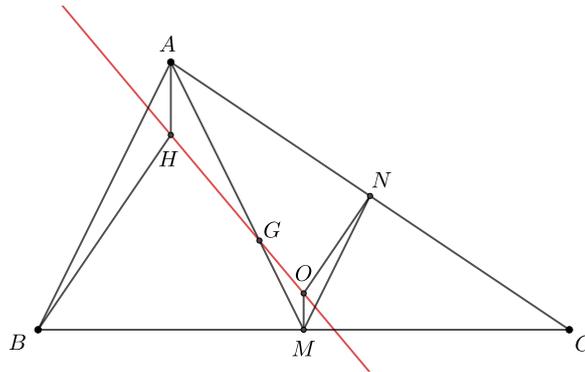


Figura 15: Reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$.

A reta de Euler está ilustrada na Figura 15 e será mencionada nas Proposições 1.30, 1.36, 1.37, 2.16 e 3.7.

1.7 CIRCUNFERÊNCIA DE NOVE PONTOS

Nesta Seção, apresentamos uma importante propriedade da circunferência de nove pontos, que será utilizada no decorrer do trabalho. Esta circunferência será mencionada nas Proposições 1.30, 3.1, 3.2, 3.7, 4.5 e 4.6. As demonstrações vão de encontro com a referência [6].

Proposição 1.19. *Dado um triângulo escaleno qualquer $\triangle ABC$, sejam M_1, M_2, M_3 os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, H_1, H_2, H_3 os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C , respectivamente, C_1, C_2, C_3 os pontos médios dos segmentos \overline{HA} , \overline{HB} e \overline{HC} , onde H é o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$. Existe uma circunferência que passa por $M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, C_1, C_2, C_3$, cujo centro F é o ponto médio entre o circuncentro O e o ortocentro H , como está ilustrado na Figura 16.*

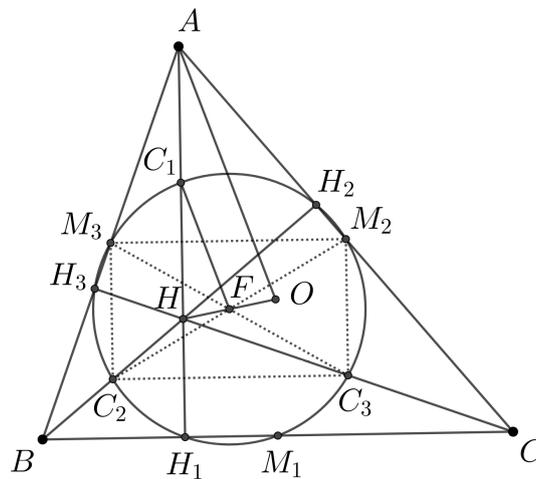


Figura 16: Circunferência de nove pontos do triângulo $\triangle ABC$.

Demonstração. Pelo Teorema da base média (Proposição 1.2), temos que $\overline{BC} \parallel \overline{M_2M_3}$ e $\overline{C_2C_3} \parallel \overline{BC}$. Assim, $\overline{C_2C_3} \parallel \overline{M_2M_3}$. Segue do Teorema da base média que $\overline{M_3C_2} \parallel \overline{AH_1}$, assim como $\overline{M_2C_3} \parallel \overline{AH_1}$, donde temos que $\overline{M_3C_2} \parallel \overline{M_2C_3}$. Deste modo, o quadrilátero $M_2M_3C_2C_3$ é um paralelogramo. Mas, como $\overline{AH_1} \perp \overline{BC}$, então $\overline{M_3C_2} \perp \overline{C_2C_3}$. Logo, o paralelogramo $M_2M_3C_2C_3$ é um retângulo. De maneira análoga, mostramos que os quadriláteros $M_1M_2C_1C_2$ e $M_1M_3C_1C_3$ são retângulos.

Sendo F o ponto de intersecção entre as diagonais $\overline{M_2C_2}$ e $\overline{M_3C_3}$ do retângulo $M_2M_3C_2C_3$, temos que F é o ponto médio das diagonais $\overline{M_2C_2}$ e $\overline{M_3C_3}$, que são congruentes, de modo que $FM_2 = FC_2 = FM_3 = FC_3$, isto é, F é o centro da circunferência Γ que passa pelos pontos M_2, M_3, C_2 e C_3 . Do mesmo modo, considerando o retângulo $M_1M_2C_1C_2$, temos que F é também o ponto médio da diagonal $\overline{M_1C_1}$ e $FM_1 = FC_1 = FM_2$. Assim, a circunferência Γ de centro F e raio FM_2 passa pelos pontos M_1, M_2, M_3, C_1, C_2 e C_3 .

Como $\overline{M_1C_1}$ passa pelo centro F e o ângulo $\angle C_1H_1M_1$ é reto, o ponto H_1 pertence a Γ (Teorema do ângulo inscrito, Proposição 1.9); de maneira análoga, $H_2, H_3 \in \Gamma$. Concluímos que existe uma circunferência Γ que passa pelos pontos $M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, C_1, C_2, C_3$.

Pelo Teorema da base média, temos que $\overline{AB} \parallel \overline{M_1M_2}$ e $M_1M_2 = \frac{1}{2} \cdot AB$. Além disso, $\overline{AH_1} \parallel \overline{OM_1}$, pois ambos são perpendiculares ao segmento \overline{BC} . Da mesma forma, $\overline{OM_2} \parallel \overline{BH_2}$. Consequentemente, os triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle M_1OM_2$ são semelhantes, pois $H\hat{A}B = O\hat{M}_1M_2$ e $A\hat{B}H = M_1\hat{M}_2O$. Como $M_1M_2 = \frac{1}{2} \cdot AB$ então $OM_1 = \frac{1}{2} \cdot AH$. Agora, como C_1 é ponto médio de \overline{AH} então $C_1H = OM_1$. Logo, o quadrilátero C_1HM_1O é um paralelogramo. Uma vez que F é o ponto médio da diagonal $\overline{C_1M_1}$, temos que F é também o ponto médio da diagonal \overline{OH} , isto é, $OF = OH$. \square

Definição 1.20. Dado um triângulo escaleno qualquer $\triangle ABC$, sendo M_1, M_2, M_3 os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, H_1, H_2, H_3 os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C , respectivamente, C_1, C_2, C_3 os pontos médios dos segmentos \overline{HA} , \overline{HB} e \overline{HC} , onde H é o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$, a circunferência que passa por $M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, C_1, C_2, C_3$ é chamada de circunferência de nove pontos do triângulo $\triangle ABC$.

Proposição 1.21. O raio da circunferência de nove pontos de um triângulo escaleno $\triangle ABC$ é igual à metade do raio da circunferência circunscrita ao mesmo triângulo.

Demonstração. Pelo Teorema da base média aplicado ao triângulo $\triangle AHO$, temos que $C_1F = \frac{1}{2} \cdot AO$. Mas, $\overline{C_1F}$ é o raio da circunferência de nove pontos e \overline{AO} é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$. \square

1.8 PONTOS DE BROCARD

Nesta Seção, apresentamos os ângulos de Brocard de um triângulo. Além disso, exploramos uma propriedade importante que relaciona a cotangente do ângulo de Brocard com as medidas dos ângulos internos do triângulo. Esta relação será utilizada nas Proposições 2.23 e 4.6.

Proposição 1.22. *Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, existem somente dois pontos Ω e Ω' tais que*

$$\Omega\hat{A}B = \Omega\hat{B}C = \Omega\hat{C}A = \omega$$

e

$$\Omega'\hat{B}A = \Omega'\hat{C}B = \Omega'\hat{A}C = \omega'.$$

Os pontos Ω, Ω' e os ângulos ω, ω' são chamados, respectivamente, de primeiro ponto de Brocard, segundo ponto de Brocard e ângulos de Brocard do triângulo $\triangle ABC$.

Na Figura 17 estão ilustrados o primeiro e o segundo pontos de Brocard de um triângulo $\triangle ABC$.

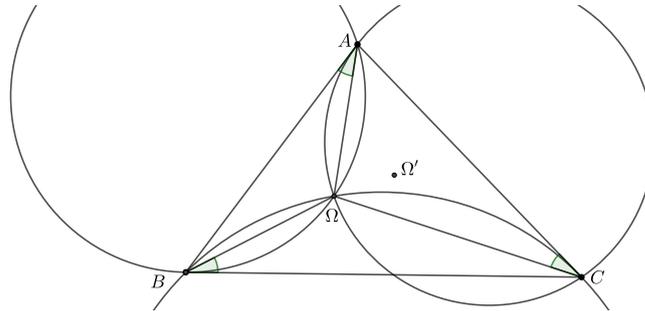


Figura 17: Pontos de Brocard do triângulo $\triangle ABC$.

Demonstração. Supondo que o ponto Ω existe, consideremos \mathcal{C}_1 a circunferência que passa pelos pontos A, C e Ω . Como a medida do ângulo $\angle \Omega CA$ é igual à do ângulo $\angle \Omega AB$, segue da Proposição 1.9 e Proposição 1.11 que \overline{AB} é tangente à circunferência \mathcal{C}_1 no ponto A . Ou seja, \mathcal{C}_1 é a circunferência que tangencia \overline{AB} no ponto A e que passa por C . Sendo \mathcal{C}_2 a circunferência que tangencia \overline{BC} no ponto B e que passa por A , \mathcal{C}_3 a circunferência que tangencia \overline{AC} no ponto C e que passa por B , então o primeiro ponto de Brocard Ω é obtido por $\{\Omega\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$. A existência e unicidade de tal ponto Ω é uma consequência do Teorema de Miquel, com o qual garante-se que Ω e Ω' pertencem ao interior do triângulo $\triangle ABC$. Os detalhes podem ser vistos na referência [6].

De maneira análoga, o segundo ponto de Brocard Ω' é determinado por $\{\Omega'\} = C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3$, onde C'_1 é a circunferência que tangencia \overline{AC} no ponto A e que passa por B , C'_2 é a circunferência que tangencia \overline{AB} no ponto B e que passa por C , C'_3 é a circunferência que tangencia \overline{BC} no ponto C e que passa por A . \square

Nas condições da Proposição 1.22, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.23. *Se Ω o primeiro ponto de Brocard de um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, φ_1, φ_2 e φ_3 as medidas dos ângulos $\angle BAC, \angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente, então*

$$\cot(\omega) = \cot(\varphi_1) + \cot(\varphi_2) + \cot(\varphi_3).$$

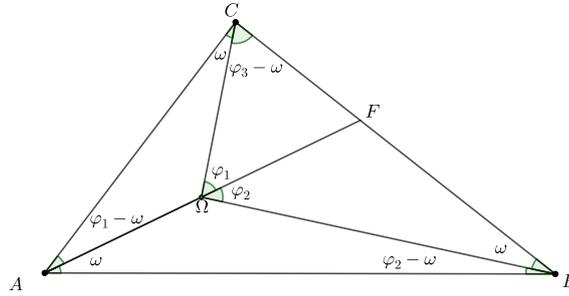


Figura 18: Triângulo $\triangle ABC$ e o ponto de Brocard Ω .

Demonstração. Como Ω pertence ao interior do triângulo $\triangle ABC$, então $\overrightarrow{A\Omega} \cap \overline{BC} = \{F\}$, com $B - F - C$, como está ilustrado na Figura 18. Pelo Teorema do ângulo externo (Proposição 1.8), temos que $C\hat{\Omega}F = \varphi_1$ e $B\hat{\Omega}F = \varphi_2$. Aplicando a lei dos senos ao triângulo $\triangle AC\Omega$, temos:

$$\frac{C\Omega}{\text{sen}(\varphi_1 - \omega)} = \frac{AC}{\text{sen}(\pi - \varphi_1)} \Rightarrow \frac{C\Omega}{\text{sen}(\varphi_1 - \omega)} = \frac{AC}{\text{sen}(\varphi_1)}. \tag{1.5}$$

Aplicando-se a lei dos senos aos triângulos $\triangle BC\Omega$ e $\triangle ABC$, obtemos

$$\frac{C\Omega}{\text{sen}(\omega)} = \frac{BC}{\text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{BC}{\text{sen}(\pi - \varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{BC}{\text{sen}(\varphi_3)}. \tag{1.6}$$

e

$$\frac{BC}{\text{sen}(\varphi_1)} = \frac{AC}{\text{sen}(\varphi_2)} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\text{sen}(\varphi_2)}{\text{sen}(\varphi_1)}. \tag{1.7}$$

Por (1.5) e (1.6), podemos dizer que

$$\frac{AC \cdot \text{sen}(\varphi_1 - \omega)}{\text{sen}(\varphi_1)} = \frac{BC \cdot \text{sen}(\omega)}{\text{sen}(\varphi_3)} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\text{sen}(\varphi_1) \cdot \text{sen}(\omega)}{\text{sen}(\varphi_1 - \omega) \cdot \text{sen}(\varphi_3)}. \quad (1.8)$$

Por (1.7) e (1.8),

$$\frac{\text{sen}(\varphi_2)}{\text{sen}(\varphi_1)} = \frac{\text{sen}(\varphi_1) \cdot \text{sen}(\omega)}{\text{sen}(\varphi_1 - \omega) \cdot \text{sen}(\varphi_3)} \Rightarrow \frac{\text{sen}(\varphi_1 - \omega) \cdot \text{sen}(\varphi_2) \cdot \text{sen}(\varphi_3)}{\text{sen}(\varphi_1) \cdot \text{sen}(\omega)} = \text{sen}(\varphi_1). \quad (1.9)$$

Mas, $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$. Daí,

$$\text{sen}(\varphi_1) = \text{sen}(\pi - \varphi_2 - \varphi_3) \Rightarrow \text{sen}(\varphi_1) = \text{sen}(\varphi_2 + \varphi_3). \quad (1.10)$$

Substituindo (1.10) em (1.9), temos

$$\frac{\text{sen}(\varphi_1 - \omega) \cdot \text{sen}(\varphi_2) \cdot \text{sen}(\varphi_3)}{\text{sen}(\varphi_1) \cdot \text{sen}(\omega)} = \text{sen}(\varphi_2 + \varphi_3). \quad (1.11)$$

Mas, $\text{sen}(\varphi_1 - \omega) = \text{sen}(\varphi_1) \cdot \cos(\omega) - \text{sen}(\omega) \cdot \cos(\varphi_1)$. Deste modo,

$$\frac{\text{sen}(\varphi_1 - \omega)}{\text{sen}(\varphi_1) \cdot \text{sen}(\omega)} = \frac{\text{sen}(\varphi_1) \cdot \cos(\omega) - \text{sen}(\omega) \cdot \cos(\varphi_1)}{\text{sen}(\varphi_1) \cdot \text{sen}(\omega)} = \frac{\cos(\omega)}{\text{sen}(\omega)} - \frac{\cos(\varphi_1)}{\text{sen}(\varphi_1)} = \cot(\omega) - \cot(\varphi_1). \quad (1.12)$$

Substituindo (1.12) em (1.11), concluimos que

$$(\cot(\omega) - \cot(\varphi_1)) \cdot \text{sen}(\varphi_2) \cdot \text{sen}(\varphi_3) = \text{sen}(\varphi_2 + \varphi_3)$$

$$(\cot(\omega) - \cot(\varphi_1)) \cdot \text{sen}(\varphi_2) \cdot \text{sen}(\varphi_3) = \text{sen}(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_3) + \text{sen}(\varphi_3) \cdot \cos(\varphi_2)$$

$$\cot(\omega) - \cot(\varphi_1) = \frac{\text{sen}(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_3) + \text{sen}(\varphi_3) \cdot \cos(\varphi_2)}{\text{sen}(\varphi_2) \cdot \text{sen}(\varphi_3)}$$

$$\cot(\omega) - \cot(\varphi_1) = \frac{\cos(\varphi_3)}{\text{sen}(\varphi_3)} + \frac{\cos(\varphi_2)}{\text{sen}(\varphi_2)}$$

$$\cot(\omega) - \cot(\varphi_1) = \cot(\varphi_3) + \cot(\varphi_2)$$

$$\cot(\omega) = \cot(\varphi_1) + \cot(\varphi_2) + \cot(\varphi_3)$$

□

1.9 HOMOTETIA

Nesta Seção, apresentamos o conceito de homotetia, enfatizando o caso dos triângulos. Por exemplo, na Proposição 1.35 será obtida uma relação de homotetia entre dois triângulos. Para este tema, tomamos por base a referência [1].

Definição 1.24. Dados um ponto S e λ um número real positivo quaisquer, a homotetia de centro S e razão λ , denotada por $\mathcal{H}_{S,\lambda}$, é a transformação no plano que fixa S e que associa a cada ponto $P \neq S$ o ponto $P' \in \overrightarrow{SP}$ tal que $SP' = \lambda \cdot SP$. O ponto S e a constante λ são chamados de centro e razão da homotetia, respectivamente.

Na Figura 19 estão ilustrados o quadrilátero $ABCD$ e o quadrilátero $A'B'C'D'$ obtido pela homotetia de centro S . Dizemos que $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são homotéticos, conforme a Definição a seguir.

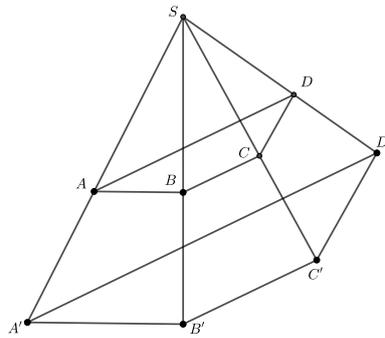


Figura 19: Quadriláteros homotéticos $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

Definição 1.25. Sendo \mathcal{F} uma figura no plano (isto é, um conjunto de pontos) e \mathcal{F}' a figura obtida pela homotetia $\mathcal{H}_{S,\lambda}$ aplicada sobre \mathcal{F} , para algum ponto S e para algum número real $\lambda > 0$, dizemos que \mathcal{F} e \mathcal{F}' são homotéticas.

Segue da Definição 1.24 e Definição 1.25 que as retas que passam pelos vértices correspondentes de duas figuras homotéticas são concorrentes no centro S da homotetia. A seguir, estudamos a posição relativa entre os lados de dois triângulos homotéticos.

Teorema 1.26. *Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos homotéticos, com $A' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(A)$, $B' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(B)$ e $C' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(C)$, para algum $S \notin \{A, B, C\}$ fixado e $\lambda = \frac{SA'}{SA}$. Então $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$.*

Demonstração. Como $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \lambda$ e $\angle ASB \cong \angle A'SB'$, então pelo caso lado-ângulo-lado de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle ASB$ e $\triangle A'SB'$ são semelhantes. Assim, $\angle SAB \cong \angle SA'B'$. Consequentemente, $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$. De modo análogo, mostramos que $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$. \square

Reciprocamente, temos o seguinte resultado sobre homotetia de triângulos. Nele, quando escrevemos que dois segmentos são paralelos, estamos considerando uma orientação para as extremidades dos segmentos. Isto é, dizer que $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ significa que o quadrilátero $ABB'A'$, ordenado pelos vértices, tem um par de lados opostos paralelos.

Teorema 1.27. *Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$, $AB \neq A'B'$, $BC \neq B'C'$ e $AC \neq A'C'$. Então, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são triângulos homotéticos.*

Demonstração. Como $AB \neq A'B'$ então o quadrilátero $ABB'A'$ não é um paralelogramo, de onde temos que $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \neq \emptyset$. Sejam $\{S\} = \overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'}$ e $\lambda = \frac{A'B'}{AB}$. Como $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ então $\triangle SA'B' \sim \triangle SAB$. Logo,

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB} = \lambda.$$

Isto significa que $\mathcal{H}_{S,\lambda}(A) = A'$ e $\mathcal{H}_{S,\lambda}(B) = B'$. Além disso, para todo ponto $P \in \overline{AB} \setminus \{A, B\}$, seja $\{P'\} = \overleftrightarrow{SP} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$. Assim, $\overline{A'P'} \parallel \overline{AP}$, de onde temos, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, que $\triangle SAP \sim \triangle SA'P'$. Consequentemente, $\mathcal{H}_{S,\lambda}(P) = P'$ e como P é arbitrário, obtemos que $\mathcal{H}_{S,\lambda}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$.

A seguir, mostramos que esta homotetia de centro S e razão λ leva C em C' . De fato, seja $C'' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(C)$. Assim, $SC'' = \lambda \cdot SC$. Mas,

$$\frac{SC''}{SC} = \lambda = \frac{SB'}{SB},$$

e $\angle ASB = \angle A'SB'$. Pelo caso lado-ângulo-lado de semelhança de triângulos, temos que $\triangle SC''B' \sim \triangle SCB$, de onde segue que $\overline{B'C''} \parallel \overline{BC}$. Como, por hipótese, $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, temos que $C' \in \overleftrightarrow{B'C''}$. Analogamente, mostra-se que $C' \in \overleftrightarrow{A'C''}$. Então $C'' = C'$, de modo que $\mathcal{H}_{S,\lambda}(C) = C'$.

Procedendo-se como no caso do segmento \overline{AB} , concluímos que $\mathcal{H}_{S,\lambda}(\overline{AC}) = \overline{A'C'}$ e $\mathcal{H}_{S,\lambda}(\overline{BC}) = \overline{B'C'}$. Portanto, são homotéticos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. \square

Agora, estendemos o conceito de centro de homotetia para o caso de circunferências não-concêntricas e de raios distintos.

Teorema 1.28. *Sejam c e c' duas circunferências com centros O e O' distintos, respectivamente, e com raios distintos, R, Q e R' três pontos quaisquer tais que $R, Q \in c$, $R' \in c'$, $R - O - Q$, $R \notin \overleftrightarrow{OO'}$, $\overline{O'R'} \parallel \overline{OR}$ e de modo que R, R' estejam do mesmo lado em relação à reta $\overleftrightarrow{OO'}$, como está ilustrado na Figura 20. Se $\{S\} = \overleftrightarrow{OO'} \cap \overleftrightarrow{RR'}$ e $\{S'\} = \overleftrightarrow{OO'} \cap \overleftrightarrow{QR'}$ então $c' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(c)$ e $c'' = \mathcal{H}_{S',\lambda}(c'')$, onde c'' é a imagem pela reflexão em relação a S' de c , com $\lambda = \frac{O'R'}{OR}$. Nestas condições, S e S' são chamados de centro de homotetia externo e interno das circunferências c e c' , respectivamente.*

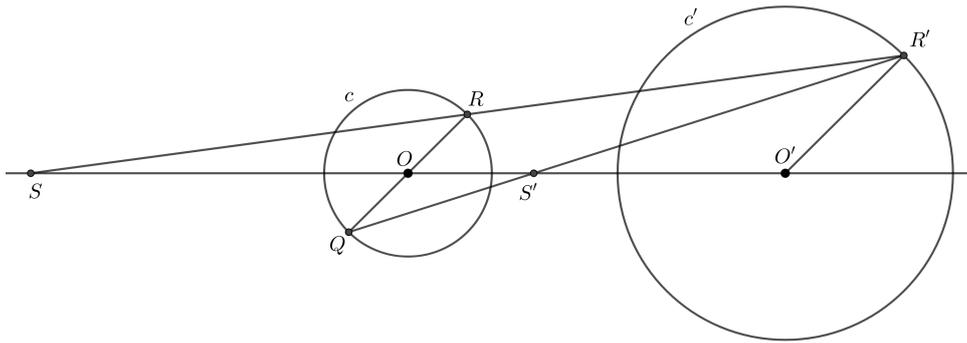


Figura 20: Circunferências homotéticas c e c' .

Demonstração. Como $\overline{O'R'} \parallel \overline{OR}$ temos que $\widehat{SRO} = \widehat{SR'O'}$ e $\widehat{S\hat{O}R} = \widehat{S\hat{O}'R'}$. Pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle SRO$ e $\triangle SR'O'$ são semelhantes. Deste modo,

$$\frac{SR'}{SR} = \frac{SO'}{SO} = \frac{O'R'}{OR} = \lambda. \quad (1.13)$$

Ou seja, para todo $R \in c \setminus \overleftrightarrow{OO'}$, por (1.13), obtemos que $SR' = \lambda \cdot SR$. Além disso, por construção, $R' \in \overrightarrow{SR}$. Sejam $\{A, B, C, D\} = (c \cup c') \cap \overleftrightarrow{OO'}$. Sem perda de generalidades, suponhamos que $S - A - B - C - D$. Temos que

$$SC = SO' - CO' = \lambda \cdot SO - O'R' = \lambda \cdot SO - \lambda \cdot OR \quad (1.14)$$

$$= \lambda \cdot (SO - OR) = \lambda \cdot (SO - AO) = \lambda \cdot SA \quad (1.15)$$

e, analogamente, $SD = \lambda \cdot SB$. Com isto, mostramos que $c' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(c)$.

Por outro lado, como $\overline{OQ} \parallel \overline{O'R'}$, temos que $Q\hat{O}S' = R'\hat{O}'S'$. Além disso, $O\hat{S}'Q = O'\hat{S}'R'$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle OQS'$ e $\triangle O'R'S'$ são semelhantes. Deste modo,

$$\frac{S'R'}{S'Q} = \frac{O'S'}{OS'} = \frac{O'R'}{OQ} = \lambda, \quad (1.16)$$

uma vez que $OQ = OR$. Como a reflexão em relação a um ponto é uma isometria, então c'' é a circunferência de centro $O'' = R_{S'}(O)$ e raio $OQ = OR$. Sendo $Q' = R_{S'}(Q)$, temos que $Q' \in c''$, $Q - S' - Q'$ e $S'Q = S'Q'$. Consequentemente, $R' \in \overrightarrow{S'Q'}$ e, por (1.16),

$$S'R' = \lambda \cdot S'Q = \lambda \cdot S'Q'.$$

Mostramos que $R' = \mathcal{H}_{S',\lambda}(Q')$, para todo $Q \in c \setminus \overleftrightarrow{OO'}$. De modo análogo ao caso anterior, em que S é o centro da homotetia, concluímos, por (1.16), que $c' = \mathcal{H}_{S',\lambda}(c'')$. \square

1.10 TRIÂNGULO ÓRTICO E TRIÂNGULO TANGENCIAL

Nesta seção, definimos os triângulos órtico e tangencial de um dado triângulo, e demonstramos algumas de suas propriedades, como nas Proposições 3.1 e 3.2, no Lema 3.5 e nas Proposições 3.6 e 3.7. Para este tema, tomamos por base a referência [6].

Definição 1.29. Dado um triângulo $\triangle ABC$ não-retângulo, dizemos que o triângulo formado pelos pés das suas alturas é seu *triângulo órtico*.

A seguir, obtemos algumas propriedades dos triângulos órticos, as quais envolvem seus circuncentro e incentro. Para que faça sentido considerar o triângulo órtico de um triângulo e sua circunferência de nove pontos, admitimos que o dado triângulo é escaleno e não-retângulo.

Proposição 1.30. *Dado um triângulo (escaleno, não-retângulo) $\triangle ABC$ qualquer, o circuncentro de seu triângulo órtico é o centro da circunferência de nove pontos do triângulo $\triangle ABC$ e pertence à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$.*

Demonstração. Na Proposição 1.19, mostramos que a circunferência de nove pontos de um triângulo (escaleno) passa pelos pés de suas alturas. Deste modo, temos que a circunferência de nove pontos Γ de um triângulo é a circunferência circunscrita ao triângulo órtico do triângulo $\triangle ABC$. Assim, o circuncentro do triângulo órtico do triângulo $\triangle ABC$ coincide com o centro de Γ . Ainda de acordo com a Proposição 1.19, o centro de Γ é o ponto médio de \overline{OH} , onde O e H são o circuncentro e o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente. Ou seja, o circuncentro do triângulo órtico do triângulo $\triangle ABC$ pertence à reta determinada por O e H , que é a reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$. \square

Proposição 1.31. *Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, seja $\triangle H_1H_2H_3$ seu triângulo órtico, onde H_1, H_2, H_3 são os pés das alturas relativas aos vértices A, B, C do triângulo $\triangle ABC$. Se o triângulo $\triangle ABC$ for acutângulo então seu ortocentro H coincide com o incentro de seu triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$, como está ilustrado na Figura 21, enquanto que se o triângulo $\triangle ABC$ for obtusângulo, seu ortocentro H coincide com o ex-incentro de seu triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$, como está ilustrado na Figura 22.*

Demonstração. Primeiramente, consideramos o caso em que o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo. Mostremos que $\overrightarrow{H_1A}$, $\overrightarrow{H_2B}$ e $\overrightarrow{H_3C}$ são as bissetrizes internas dos ângulos $\angle H_2H_1H_3$, $\angle H_1H_2H_3$ e $\angle H_2H_3H_1$, respectivamente.

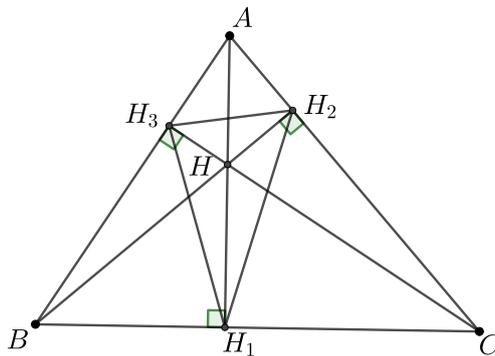


Figura 21: Triângulo acutângulo $\triangle ABC$ e o seu triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$.

O quadrilátero AH_2HH_3 é inscrito, já que os ângulos $\angle AH_2H$ e $\angle AH_3H$ são retos. Logo, $H_2\hat{H}_3H = H_2\hat{A}H$. Mas,

$$H_2\hat{A}H = C\hat{A}H_1 = \frac{\pi}{2} - A\hat{C}B.$$

Assim,

$$H_2\hat{H}_3H = \frac{\pi}{2} - A\hat{C}B. \tag{1.17}$$

Também, o quadrilátero H_3HH_1B é inscrito, pois os ângulos $\angle HH_1B$ e $\angle BH_3H$ são retos. Logo, $H_1\hat{H}_3H = H_1\hat{B}H$. Mas,

$$H_1\hat{B}H = C\hat{B}H_2 = \frac{\pi}{2} - A\hat{C}B.$$

Assim,

$$H_1\hat{H}_3H = \frac{\pi}{2} - A\hat{C}B. \tag{1.18}$$

Por (1.17) e (1.18), concluímos q's ângulos $\angle H_2H_3H$ e $\angle H_1H_3H$ são congruentes. Como o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo, então seu ortocentro H pertence ao interior de seu triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$. Assim, $\overrightarrow{H_3H} = \overrightarrow{H_3C}$ é a bissetriz interna do ângulo $\angle H_1H_3H_2$. De maneira análoga, mostra-se que $\overrightarrow{H_1A}$ e $\overrightarrow{H_2B}$ são as bissetrizes internas dos ângulos $\angle H_2H_1H_3$ e $\angle H_1H_2H_3$. Portanto, H é o incentro do triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$.

Agora, consideramos o caso em que o triângulo $\triangle ABC$ é obtusângulo. Sem perda de generalidade, suponha que o ângulo obtuso é o ângulo $\angle BAC$.

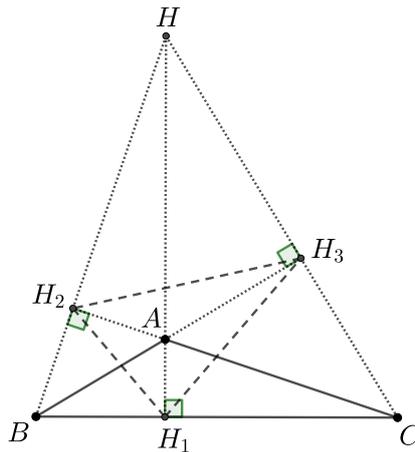


Figura 22: Triângulo obtusângulo $\triangle ABC$ e o seu triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$.

Como o ângulo $\angle BAC$ é obtuso, temos que $H_2 \notin \overline{AC}$; caso contrário, como $B\hat{H}_2A = \frac{\pi}{2}$, a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABH_2$ excederia π . Analogamente, $H_3 \notin \overline{AB}$.

O quadrilátero HH_2AH_3 é inscritível, já que os ângulos $\angle HH_2A$ e $\angle HH_3A$ são retos. Logo, $H_2\hat{H}_3A = H_2\hat{H}A$. Mas,

$$H_2\hat{H}A = B\hat{H}H_1 = \frac{\pi}{2} - H_1\hat{B}H.$$

Assim,

$$H_2\hat{H}_3A = \frac{\pi}{2} - H_1\hat{B}H. \quad (1.19)$$

Também, o quadrilátero AH_1CH_3 é inscritível, pois são retos os ângulos $\angle AH_1C$ e $\angle CH_3A$. Logo, $A\hat{H}_3H_1 = A\hat{C}H_1$. Mas,

$$A\hat{C}H_1 = H_2\hat{C}B = \frac{\pi}{2} - C\hat{B}H_2 = \frac{\pi}{2} - H_1\hat{B}H.$$

Assim,

$$A\hat{H}_3H_1 = \frac{\pi}{2} - H_1\hat{B}H. \quad (1.20)$$

Por (1.19) e (1.20), concluímos que os ângulos $\angle H_2H_3A$ e $\angle AH_3H_1$ são congruentes. Como o triângulo $\triangle ABC$ é obtusângulo com ângulo $\angle BAC$ obtuso, temos que A pertence ao interior do triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$. Deste modo, $\overrightarrow{H_3A} = \overrightarrow{H_3B}$ é a bissetriz interna do ângulo $\angle H_1H_3H_2$. Como $\overline{HC} \perp \overline{BH_3}$, \overleftarrow{HC} é a reta suporte da bissetriz externa do ângulo $\angle H_1H_3H_2$. De maneira análoga, \overleftarrow{HB} é a reta suporte da bissetriz externa do ângulo $\angle H_1H_2H_3$. Portanto, H é o ex-incentro do triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$. \square

Passemos a discutir algumas propriedades dos triângulos tangenciais.

Definição 1.32. Dado um triângulo (não-retângulo) $\triangle ABC$ qualquer, sejam Γ sua circunferência circunscrita, r, s e t as retas tangentes a Γ nos pontos A, B e C , respectivamente. Sejam ainda $\{T_1\} = s \cap t$, $\{T_2\} = r \cap t$ e $\{T_3\} = r \cap s$. O triângulo $\triangle T_1T_2T_3$ é chamado de triângulo tangencial do triângulo $\triangle ABC$.

Observação 1.33. A condição de que $\triangle ABC$ é um triângulo não retângulo garante que as tangentes r, s e t sejam não paralelas e, conseqüentemente, que existem os pontos T_1, T_2 e T_3 . De fato, sem perda de generalidades, supondo por absurdo que s e t sejam paralelas então \overline{BC} seria um diâmetro de Γ . Neste caso, o ângulo $\angle BAC$ seria um ângulo reto, contrariando a hipótese de que $\triangle ABC$ é um triângulo não retângulo.

Nas condições da Definição 1.32, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.34. *Dado um triângulo acutângulo, seu circuncentro é o incentro de seu triângulo tangencial, como está ilustrado na Figura 22, enquanto que se o triângulo $\triangle ABC$ for obtusângulo, seu circuncentro O coincide com o ex-incentro de seu triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$, como está ilustrado na Figura 24.*

Demonstração. Primeiramente, consideramos o caso em que o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo. Mostremos que O (centro da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$) equidista dos lados do ângulo $\angle T_2T_1T_3$, assim como dos lados do ângulo $\angle T_1T_2T_3$. Neste caso, O deve pertencer às bissetrizes internas dos ângulos $\angle T_2T_1T_3$ e $\angle T_1T_2T_3$. Conseqüentemente, O é a intersecção destas bissetrizes e, portanto, o incentro do triângulo $\triangle T_1T_2T_3$.

De fato, como o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo, então seu circuncentro O pertence ao seu interior. Por construção do triângulo tangencial, temos que $\overline{OB} \perp \overline{T_1T_3}$ e $\overline{OC} \perp \overline{T_1T_2}$. Além disso, $OB = OC$, pois são raios de Γ . Logo, O pertence à bissetriz interna do ângulo $\angle T_2T_1T_3$. De modo análogo, $\overline{OA} \perp \overline{T_2T_3}$, $\overline{OC} \perp \overline{T_2T_1}$ e $OA = OC$, de onde obtemos que O pertence à bissetriz interna do ângulo $\angle T_1T_2T_3$.

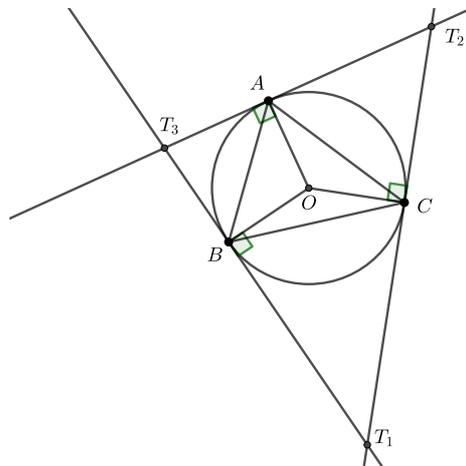


Figura 23: Triângulo acutângulo $\triangle ABC$ e seu triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$.

Agora, consideramos o caso em que o triângulo $\triangle ABC$ é obtusângulo. Sem perda de generalidade, suponha que o ângulo obtuso é o ângulo $\angle BAC$. Segue do teorema do ângulo inscrito que A e O estão em lados opostos em relação à reta \overleftrightarrow{BC} , uma vez que a medida do arco \widehat{BC} que subtende o ângulo $\angle BAC$ é maior que 180° .

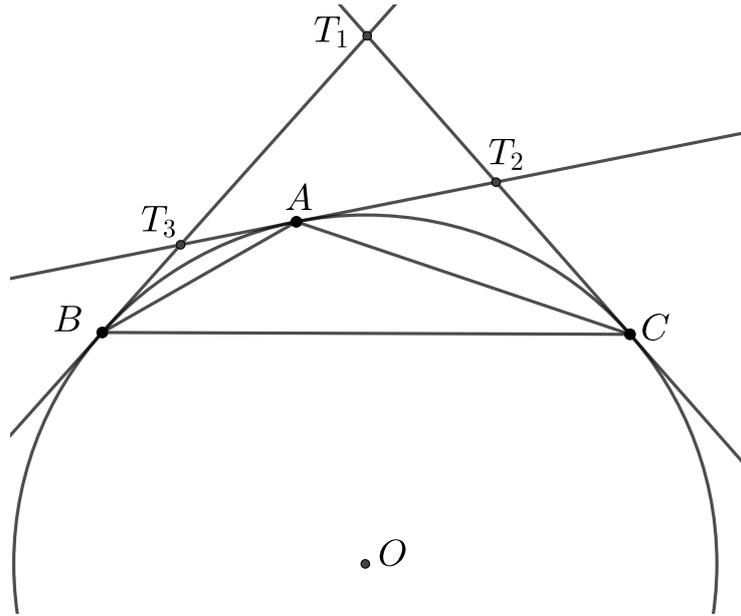


Figura 24: Triângulo obtusângulo $\triangle ABC$ e seu triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$.

Como T_3 é determinado pela intersecção das retas tangentes à circunferência Γ nos pontos A e B , temos que $\angle ABT_3$ e $\angle BAT_3$ são ângulos de segmento. Além disso, $\angle ABT_3 \cong \angle BAT_3$, sendo sua medida igual à metade da medida do ângulo central $\angle AOB$, de modo que o triângulo $\triangle ABT_3$ é isósceles, com $T_3A = T_3B$. Logo, T_3 pertence à mediatriz do segmento \overline{AB} . Sendo M o ponto médio de \overline{AB} então, pelo caso cateto-hipotenusa de congruência de triângulos, temos que $\triangle T_3AM \cong \triangle T_3BM$. Consequentemente, $\overrightarrow{T_3M}$ é a bissetriz (interna) do ângulo $\angle AT_3B$, que é externo ao triângulo $\triangle T_1T_2T_3$ no vértice T_3 . Ou seja, $\overrightarrow{T_3M}$ é a bissetriz externa do ângulo $\angle T_1T_3T_2$. Logo, $\overleftrightarrow{T_3O}$ é a reta suporte da bissetriz externa do ângulo $\angle T_1T_3T_2$. De modo análogo, mostra-se que $\overleftrightarrow{T_2O}$ é a reta suporte da bissetriz externa do ângulo $\angle T_3T_2T_1$. Portanto, O é o ex-íncetro do triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$.

□

Nas condições da Definição 1.29 e da Definição 1.32, temos o seguinte resultado que os relaciona.

Proposição 1.35. *Dado um triângulo (não-retângulo) $\triangle ABC$ qualquer, são homotéticos seus triângulos órtico $\triangle H_1H_2H_3$ e tangencial $\triangle T_1T_2T_3$, como está ilustrado na Figura 25.*

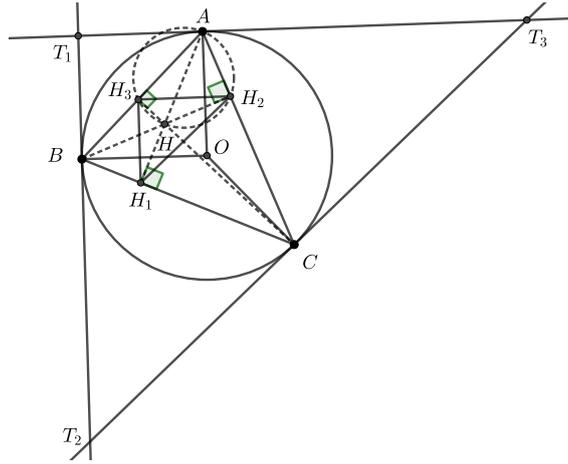


Figura 25: Triângulos $\triangle H_1H_2H_3$ e $\triangle T_1T_2T_3$ têm seus lados paralelos.

Demonstração. Os pontos H_2 e H_3 pertencem à circunferência de diâmetro \overline{AH} , já que os ângulos $\angle AH_2H$ e $\angle AH_3H$ são retos. Então os pontos A, H_2, H_3 e H pertencem a mesma circunferência.

Pelo Teorema do ângulo inscrito (Proposição 1.9), temos que $A\hat{H}_2H_3 = A\hat{H}H_3$. Os ângulos $\angle AHH_3$ e $\angle H_1HC$ são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Assim, em relação ao triângulo $\triangle HH_1C$,

$$A\hat{H}_2H_3 = H_1\hat{H}C = \frac{\pi}{2} - H\hat{C}H_1 = \frac{\pi}{2} - H_3\hat{C}B. \tag{1.21}$$

Mas, $H_3\hat{B}C = \frac{\pi}{2} - H_3\hat{C}B$. Assim, em (1.21),

$$A\hat{H}_2H_3 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - H_3\hat{B}C\right) = H_3\hat{B}C = A\hat{B}C.$$

Pelo teorema do ângulo inscrito (Proposição 1.9) e do ângulo de segmento (Proposição 1.11), o ângulo $\angle ABC$ tem medida igual à do ângulo $\angle T_3AC$. Dessa forma, temos que os ângulos (alternos internos) $\angle AH_2H_3$ e $\angle T_3AC$ são congruentes. Assim, $\overline{T_1T_3} \parallel \overline{H_3H_2}$.

De maneira análoga, mostra-se que $\overline{T_1T_2} \parallel \overline{H_3H_1}$ e $\overline{T_2T_3} \parallel \overline{H_1H_2}$.

Pela Proposição 1.27, concluímos que são homotéticos os triângulos órtico e tangencial do triângulo $\triangle ABC$. □

Proposição 1.36. *O centro de homotetia dos triângulos órtico $\triangle H_1H_2H_3$ e tangencial $T_1T_2T_3$ de um triângulo (não-retângulo) $\triangle ABC$ qualquer pertence à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$.*

Demonstração. De acordo com as Proposições 1.31 e 1.34, se o triângulo $\triangle ABC$ for acutângulo então o ortocentro H e o circuncentro O do triângulo $\triangle ABC$ são, respectivamente, o incentro de seu triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$ e o incentro de seu triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$. Como $\triangle H_1H_2H_3$ e $\triangle T_1T_2T_3$ são triângulos homotéticos, seus incentros se correspondem, de modo que O e H são colineares ao centro da homotetia que leva um triângulo no outro. Como O e H determinam a reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$, então o centro da homotetia pertence à reta de Euler.

De maneira análoga, mostra-se que a tese é válida para o caso em que o triângulo $\triangle ABC$ é obtusângulo, mas agora H e O são ex-incentros de seus triângulos órtico $\triangle H_1H_2H_3$ e tangencial $\triangle T_1T_2T_3$. \square

Proposição 1.37. *Os circuncentros dos triângulos órtico $\triangle H_1H_2H_3$ e tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ de um triângulo (não-retângulo) $\triangle ABC$ qualquer pertencem à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.30, o circuncentro do triângulo órtico $\triangle H_1H_2H_3$ pertence à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$. Pelas Proposições 1.35 e 1.36, os triângulos órtico $\triangle H_1H_2H_3$ e tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ são homotéticos e o centro da homotetia pertence à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$.

Como o circuncentro do triângulo órtico e o centro de homotetia pertencem à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$, o circuncentro do triângulo tangencial deve pertencer à reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$, pois os circuncentros dos triângulos tangencial e órtico são pontos correspondentes pela homotetia. \square

1.11 NÚMEROS COMPLEXOS

Vamos considerar algumas definições e propriedades básicas dos números complexos. Entendemos ser necessária a compreensão de tais conceitos pelo fato de que usaremos a abordagem dos números complexos para estudar os triângulos heptagonais, na Proposição 2.20 e nas proposições do Capítulo 4.

Definição 1.38. Um número complexo é um número da forma $z = x + y \cdot i$ (ou, equivalentemente, da forma $z = x + i \cdot y$), com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Os números reais x e y são chamados de, respectivamente, parte real e parte imaginária do número complexo z . Quando $x = 0$, dizemos que o número complexo z é um imaginário puro.

Notação: Sendo $z = x + y \cdot i$, denotamos $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$. Denotamos por \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

1.11.1 O plano complexo

Podemos associar a cada número complexo $z = x + y \cdot i$ o par ordenado (x, y) . Geometricamente, isto nos dá uma representação dos números complexos como pontos no plano cartesiano, ora denominado *plano complexo*.

A representação de um número complexo $z = x + y \cdot i$ por um ponto P dá-se do seguinte modo: a parte real $\operatorname{Re}(z)$ é a abscissa do ponto P , enquanto que a parte imaginária $\operatorname{Im}(z)$ é a ordenada de P . Assim, $P = (x, y)$ representa o número complexo $z = x + y \cdot i$.

Por exemplo, na Figura 26, representamos os números $z_1 = 2 + 3 \cdot i$, $z_2 = 1 - 2 \cdot i$, $z_3 = -2 + 3 \cdot i$, $z_4 = -2 - 2 \cdot i$ e $z_5 = i$ no plano complexo.

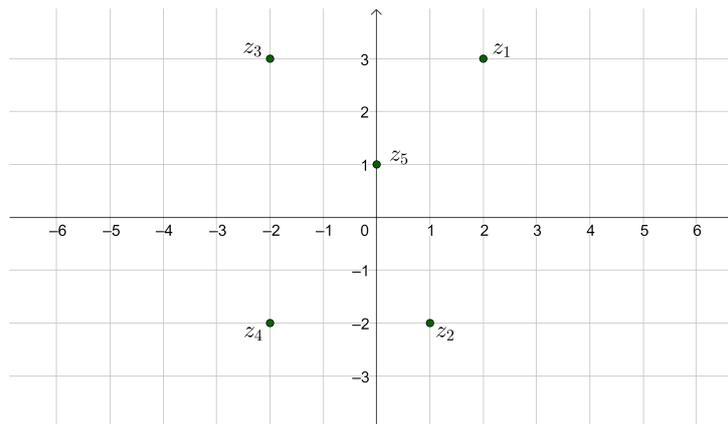


Figura 26: Números complexos representados no plano complexo.

1.11.2 Operações em \mathbb{C}

Nesta subseção, definimos as operações básicas entre números complexos.

Definição 1.39. (Soma e multiplicação em \mathbb{C}) Sendo $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$, $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$, definimos a soma de z_1 e z_2 , denotada por $z_1 + z_2$, como sendo o número complexo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

e a multiplicação de z_1 e z_2 , denotada por $z_1 \cdot z_2$, por

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i.$$

Definição 1.40. (Oposto de um número complexo) Dado um número complexo $z = x + y \cdot i$, definimos o seu oposto por

$$-z = -x - y \cdot i.$$

Definição 1.41. (Elemento neutro em \mathbb{C}) Define-se o elemento neutro em \mathbb{C} o número complexo $0 = 0 + 0 \cdot i$.

Definição 1.42. (Igualdade de números complexos) Sendo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dizemos que $z_1 = z_2$ se $Re(z_1) = Re(z_2)$ e $Im(z_1) = Im(z_2)$.

Definição 1.43. (Subtração em \mathbb{C}) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, definimos a subtração de z_1 por z_2 como

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Definição 1.44. (Inverso em \mathbb{C}) Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}^*$, isto é, $z \neq 0$, definimos seu inverso, denotado por $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} , como sendo o número complexo tal que

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Se considerarmos $z = x + y \cdot i$ e $\frac{1}{z} = a + b \cdot i$, deve valer que

$$\begin{aligned} (x + y \cdot i) \cdot (a + b \cdot i) &= 1 \\ (x \cdot a - y \cdot b) + (x \cdot b + a \cdot y) \cdot i &= 1 = 1 + 0 \cdot i. \end{aligned}$$

Pela igualdade de números complexos,

$$\begin{cases} x \cdot a - y \cdot b = 1 \\ x \cdot b + a \cdot y = 0. \end{cases}$$

Se $y \neq 0$, segue da segunda equação do sistema que

$$a = \frac{-x \cdot b}{y}.$$

Substituindo a na primeira equação do sistema, obtemos:

$$b \cdot \left(\frac{-x^2 - y^2}{y} \right) = 1.$$

Como $z = x + y \cdot i \neq 0$ então $x^2 + y^2 \neq 0$. Assim,

$$b = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Voltando em $a = \frac{-x \cdot b}{y}$, temos:

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Desse modo, se $y \neq 0$ então

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i.$$

Se $y = 0$ então $x \neq 0$ e o sistema fica

$$\begin{cases} x \cdot a = 1 \\ x \cdot b = 0. \end{cases}$$

Desse modo, $a = \frac{1}{x}$ e $b = 0$. Logo, se $y = 0$ então

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + 0 \cdot i.$$

Em geral,

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot i. \quad (1.22)$$

Definição 1.45. (Divisão em \mathbb{C}) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, definimos a divisão de z_1 por z_2 como

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}.$$

1.11.3 Módulo e conjugado de um número complexo

Definição 1.46. Dado um número complexo $z = x + y \cdot i$, o módulo de z , denotado por $|z|$, é o número real $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

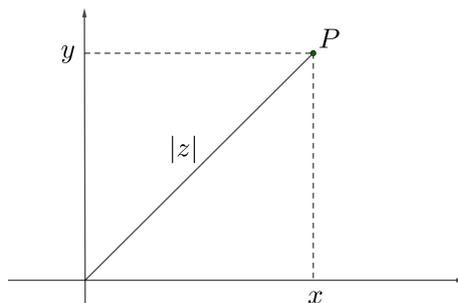


Figura 27: Representação geométrica do módulo de um número complexo.

Geometricamente, o módulo de um número complexo z é a distância à origem do ponto P que representa z no plano complexo, como está ilustrado na Figura 27.

Definição 1.47. Dado um número complexo $z = x + y \cdot i$, o conjugado de z , denotado por \bar{z} , é o número complexo $\bar{z} = x - y \cdot i$.

Geometricamente, no plano complexo, se o ponto P representa o número complexo z , o conjugado de z é representado pelo ponto P' obtido pela reflexão de P em relação ao eixo das abscissas, ora chamado de eixo real, conforme está ilustrado na Figura 28.

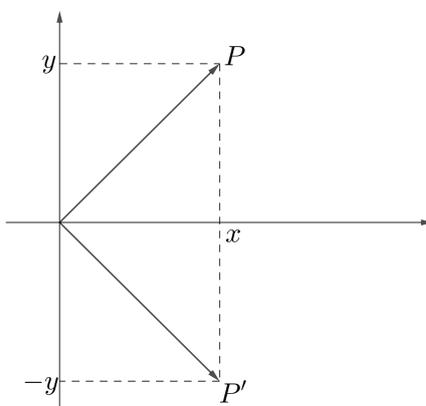


Figura 28: Representação geométrica do conjugado de um número complexo.

Uma propriedade interessante envolvendo módulo e conjugado de um número complexo é dada na seguinte proposição.

Proposição 1.48. Dado um número complexo z , vale que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Demonstração. Em coordenadas, sendo $z = x + y \cdot i$, temos que

$$z \cdot \bar{z} = (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

□

Observação 1.49. Se $z \in \mathbb{C}^*$, observamos que

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

que está de acordo com a equação (1.22).

Vamos elencar algumas propriedades que envolvem o módulo dos números complexos.

Proposição 1.50. Sendo $z = x + i \cdot y$, z_1 e z_2 números complexos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

- a) $|z| \geq 0$;
- b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- c) $|z| = |-z|$;
- d) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$; $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
- e) $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$;
- f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- g) (*Desigualdade triangular*) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- h) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- i) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$;
- j) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Demonstração. a) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$;

b) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

c) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = |-z|$;

d) $|\operatorname{Re}(z)| = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ e $|\operatorname{Im}(z)| = |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$;

e) $z + \bar{z} = x + i \cdot y + x - i \cdot y = 2 \cdot x = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$;

f)

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Como $|z_1 \cdot z_2| \geq 0$, $|z_1| \geq 0$ e $|z_2| \geq 0$, segue que $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

g)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot |\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot |z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Como $|z_1 + z_2| \geq 0$ e $|z_1| + |z_2| \geq 0$, concluímos que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

h)

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|;$$

i)

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|.$$

Subtraindo $|z_2|$ em ambos os membros da desigualdade, temos que

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|;$$

j) Pelo item anterior, temos que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$. Trocando z_1 por z_2 e vice-versa neste expressão, obtemos $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$, isto é, $|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 + z_2|$. Deste modo,

$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Portanto, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

□

1.11.4 Representação polar de um número complexo

Os números complexos podem ser representados na forma polar, onde o *argumento* de z é o ângulo θ formado pelo eixo Ox e o vetor Oz , conforme a Figura 29. Os ângulos são orientados no sentido anti-horário.

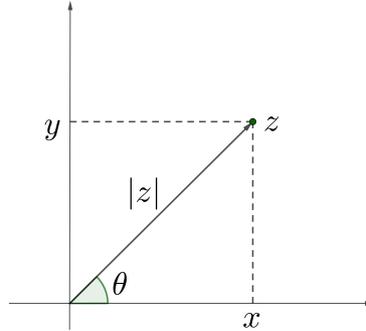


Figura 29: Representação polar de um número complexo.

Observando a Figura 29, podemos deduzir os valores de x e y em coordenadas polares, usando as razões trigonométricas no triângulo retângulo:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \cos(\theta)$$

e

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \text{sen}(\theta).$$

Substituindo os valores de x e y na expressão $z = x + y \cdot i$, temos

$$z = |z| \cdot \cos(\theta) + |z| \cdot \text{sen}(\theta) \cdot i = |z| \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)).$$

Esta é a *expressão polar* ou *expressão trigonométrica* de z , na qual comumente usamos r para representar $|z|$:

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)).$$

Consideramos r e θ as coordenadas polares de z , onde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ é o número real pertencente ao intervalo $] -\pi, \pi]$ tal que $x = r \cdot \cos(\theta)$ e $y = r \cdot \text{sen}(\theta)$.

A partir de (1.22), obtemos a representação polar de z^{-1} , para $z \in \mathbb{C}^*$:

$$z^{-1} = \frac{r \cdot \cos(\theta)}{r^2} + \frac{-r \cdot \text{sen}(\theta)}{r^2} \cdot i = r^{-1} \cdot (\cos(-\theta) + \text{sen}(-\theta) \cdot i). \quad (1.23)$$

1.11.5 Produto e quociente de complexos na forma polar

Nesta subseção, obtemos a forma polar da multiplicação e divisão de números complexos. Sejam

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sen(\theta_1)) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sen(\theta_2)).$$

Efetuando $z_1 \cdot z_2$, obtemos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sen(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sen(\theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - \sen(\theta_1) \cdot \sen(\theta_2) + i \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \sen(\theta_2) + \sen(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2))) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sen(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + i \cdot \sen(\theta_1))}{r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sen(\theta_2))} \cdot \frac{(\cos(\theta_2) - i \cdot \sen(\theta_2))}{(\cos(\theta_2) - i \cdot \sen(\theta_2))} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + \sen(\theta_1) \cdot \sen(\theta_2) + i \cdot (\sen(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1) \cdot \sen(\theta_2))}{\cos^2(\theta_2) + \sen^2(\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sen(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

1.11.6 Fórmula de De Moivre

A expressão que obteremos a seguir, conhecida como primeira fórmula de De Moivre, permite-nos calcular a potência inteira de um número complexo.

Proposição 1.51. (Fórmula de De Moivre) Sendo $r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta))$ a representação polar de um número complexo z e $n \in \mathbb{Z}$, então

$$z^n = r^n \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta))^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sen(n \cdot \theta)).$$

Demonstração. Daremos a prova por indução finita em n . Primeiramente, consideramos $n \in \mathbb{N}$.

- (Passo inicial)

Para $n = 1$, a afirmação é verdadeira, pois

$$z^1 = r^1 (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta))^1 = r^1 \cdot (\cos(1 \cdot \theta) + i \cdot \sen(1 \cdot \theta)).$$

- (Hipótese de indução)

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para algum $n = k$, onde $k \geq 1$. Ou seja,

$$z^k = r^k \cdot (\cos(k \cdot \theta) + i \cdot \sen(k \cdot \theta)).$$

- (Passo de indução)

Mostremos que a afirmação é então verdadeira para $n = k + 1$, isto é, que

$$z^{k+1} = r^{k+1} \cdot (\cos((k+1) \cdot \theta) + i \cdot \sen((k+1) \cdot \theta)).$$

De fato, segue da hipótese de indução que

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= (r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta)))^{k+1} = (r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta)))^k \cdot (r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta))) \\ &= r^k \cdot (\cos(k \cdot \theta) + i \cdot \sen(k \cdot \theta)) \cdot r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta)) \\ &= r^{k+1} \cdot (\cos(k \cdot \theta) \cdot \cos(\theta) - \sen(k \cdot \theta) \cdot \sen(\theta) + i \cdot (\cos(k \cdot \theta) \cdot \sen(\theta) + \sen(k \cdot \theta) \cdot \cos(\theta))) \\ &= r^{k+1} \cdot (\cos(k \cdot \theta + \theta) + i \cdot \sen(k \cdot \theta + \theta)) \\ &= r^{k+1} \cdot (\cos((k+1) \cdot \theta) + i \cdot \sen((k+1) \cdot \theta)). \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, a afirmação é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$. Provemos agora a validade da afirmação para os inteiros negativos.

Sendo $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, temos que $m = -n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Segue de (1.23) e do que acabamos de provar que

$$\begin{aligned} z^m &= z^{-n} = (r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta)))^{-n} = \left((r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta)))^{-1} \right)^n \\ &= (r^{-1} \cdot (\cos(-\theta) + i \cdot \sen(-\theta)))^n = r^{-n} \cdot (\cos(-n \cdot \theta) + i \cdot \sen(-n \cdot \theta)) \\ &= r^m \cdot (\cos(m \cdot \theta) + i \cdot \sen(m \cdot \theta)). \end{aligned}$$

□

1.11.7 Raízes n -ésimas de números complexos

Nesta subseção, abordamos a radiciação em \mathbb{C} . Tomamos por base a referência [2].

Definição 1.52. Sendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}^*$ quaisquer, definimos a raiz n -ésima de a como sendo um número complexo z tal que $z^n = a$.

Escrevendo a e z em suas formas polares, temos $a = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta))$ e $z = \rho \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sen(\varphi))$. Utilizando a fórmula de De Moivre, a equação $z^n = a$ torna-se

$$\rho^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sen(n \cdot \varphi)) = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta))$$

Disto obtemos que $\rho^n \cdot \cos(n \cdot \varphi) = r \cdot \cos(\theta)$ e $\rho^n \cdot \sen(n \cdot \varphi) = r \cdot \sen(\theta)$. Assim,

$$\rho^n = r$$

e

$$n \cdot \varphi = \theta + 2 \cdot k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, as raízes n -ésimas de a são dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \sen\left(\frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.24)$$

Observamos que (1.24) admite n valores distintos quando k percorre o conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Tomando-se k fora deste conjunto, o valor de z coincide com aquele da divisão de k por n . Portanto, o número complexo $a \neq 0$ possui n raízes distintas, $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, dadas por (1.24), todas com o mesmo módulo $\rho = \sqrt[n]{|a|}$ e com os argumentos $\varphi_k = \frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Geometricamente, as raízes n -ésimas de a são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{|a|}$ e centro na origem do plano complexo, como está ilustrado na Figura 30.

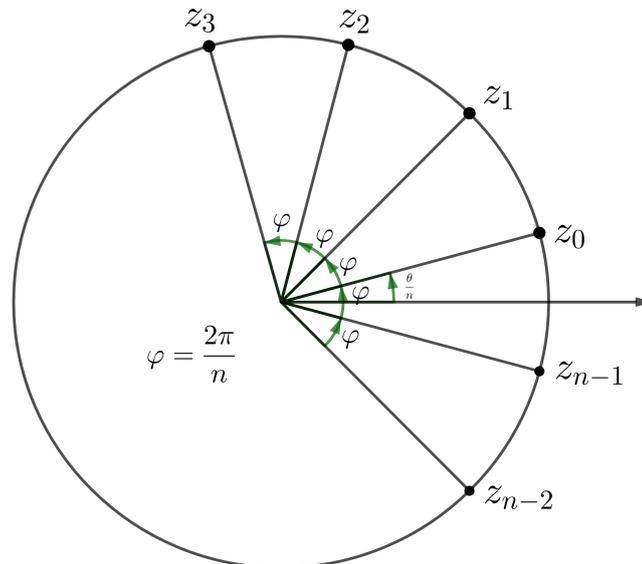


Figura 30: Representação geométrica das n raízes de a .

Quando, em particular, $a = 1$, dizemos que os números complexos $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, dados por (1.24), são as raízes n -ésimas da unidade.

Para $a = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)) = 1$, obtemos $r = 1$ e $\theta = 0$. Então, as raízes z_k de (1.24) reduzem-se a

$$z_k = \cos\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.25)$$

Tomando

$$\omega = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right), \quad (1.26)$$

observamos, pela fórmula de De Moivre, que as raízes n -ésimas da unidade são exatamente

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}. \quad (1.27)$$

Representadas no plano complexo, estas raízes são os vértices de um polígono regular de n lados com centro na origem. De fato, sejam $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ os pontos no plano complexo que representam, respectivamente, as n raízes n -ésimas da unidade $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ dadas por (1.25). Como $OM_k = |z_k| = 1$, para $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, os pontos M_k estão sobre a circunferência \mathcal{C} de centro $(0, 0)$ e raio 1. A medida de cada arco $\widehat{M_k M_{k+1}}$ é igual a

$$\theta_{z_{k+1}} - \theta_{z_k} = \frac{2 \cdot (k+1) \cdot \pi - 2 \cdot k \cdot \pi}{n} = \frac{2 \cdot \pi}{n},$$

para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$. Para o arco remanescente $\widehat{M_{n-1} M_0}$ temos

$$2 \cdot \pi - \frac{(n-1) \cdot 2 \cdot \pi}{n} = \frac{2 \cdot \pi}{n}.$$

Como todos os arcos $\widehat{M_0 M_1}, \widehat{M_1 M_2}, \dots, \widehat{M_{n-1} M_0}$ têm a mesma medida $2 \cdot \pi/n$, o polígono $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ é regular.

Exemplo 1.53. Calculemos as raízes sextas da unidade $a = 1$ em \mathbb{C} .

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \omega = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_2 = \omega^2 = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\bar{\omega};$$

$$z_3 = \omega^3 = \cos(\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1;$$

$$z_4 = \omega^4 = \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\omega;$$

$$z_5 = \omega^5 = \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5 \cdot \pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\omega}.$$

Geometricamente, os números complexos $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^5$ representam os vértices de um hexágono regular, como está ilustrado na Figura 31.

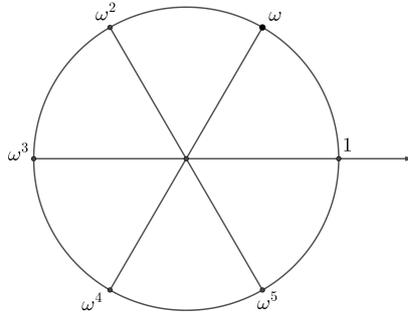


Figura 31: Raízes da unidade para $n = 6$.

1.11.8 Exponencial complexa

Nesta subseção, definiremos a função exponencial tomada sobre os números complexos.

Definição 1.54. Sendo $z = x + i \cdot y$ um complexo qualquer, definiremos a exponencial de z , denotada por e^z , como

$$e^z = e^{x+y \cdot i} = e^x \cdot \left(\cos(y) + i \cdot \operatorname{sen}(y) \right).$$

Em outras palavras, $e^z = e^{x+y \cdot i}$ é o número complexo cujo módulo é igual a e^x e cujo ângulo formado entre o eixo Ox positivo e a semirreta que parte da origem e passa pelo ponto que representa z no plano é igual a y .

Exemplo 1.55. Se $z = i \cdot \pi$ então

$$e^{i \cdot \pi} = e^0 \cdot \left(\cos(\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi) \right) = -1.$$

Concluiremos esta subseção determinando a soma das raízes n -ésimas da unidade:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot k}{n}} = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (0)}{n}} + e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (1)}{n}} + \dots + e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (n-1)}{n}}. \quad (1.28)$$

Por (1.26) e (1.27), temos que $e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{n}} = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) = \omega$ e

$$S = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}.$$

Assim,

$$\omega \cdot S = \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n,$$

de modo que

$$\omega \cdot S - S = \omega^n - 1.$$

Como $\omega \neq 1$ e $\omega^n = \cos\left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{n}\right) = \cos(2 \cdot \pi) + i \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \pi) = 1$, obtemos que

$$S = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot k}{n}} = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0. \quad (1.29)$$

1.12 A FÓRMULA BINOMIAL PARA OS COMPLEXOS

Nesta Subseção, adaptamos a fórmula do binômio de Newton para os números complexos, isto é, provamos uma relação para $(a + i \cdot b)^n$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Antes disso, lembramos a relação de Stiefel:

Lema 1.56. *Se $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 1$ e $k \leq n$, então*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \quad (1.30)$$

Demonstração. Por Definição,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k) \cdot (k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

□

O próximo resultado, conhecido como binômio de Newton para os complexos, será utilizado na prova da Proposição 2.20.

Proposição 1.57. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$(a + i \cdot b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot (i \cdot b) \cdot a^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \cdot (i \cdot b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{n-k}.$$

Demonstração. A prova será dada por indução finita em n .

- (Passo inicial)

Como $(a + i \cdot b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{1-k}$, segue a afirmação é válida para $n = 1$.

- (Hipótese de indução)

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = r$, em que r é um número natural qualquer, $r \geq 1$. Ou seja,

$$(a + i \cdot b)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{r-k}.$$

- (Passo de indução)

Mostremos que a afirmação é então verdadeira para $n = r + 1$, isto é, que

$$(a + i \cdot b)^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{(r+1)-k}.$$

De fato, segue da hipótese de indução e da relação (1.30) que

$$\begin{aligned} (a + i \cdot b)^{r+1} &= (a + i \cdot b) \cdot (a + i \cdot b)^r = (a + i \cdot b) \cdot \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{r-k} \\ &= a \cdot \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{r-k} + i \cdot b \cdot \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{r-k} \\ &= \binom{r}{0} \cdot i^0 \cdot b^0 \cdot a^{r+1} + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \cdot i^k \cdot b^k \cdot a^{r+1-k} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} \cdot i^{k+1} \cdot b^{k+1} \cdot a^{r-k} \\ &\quad + i \cdot b \cdot \binom{r}{r} \cdot i^r \cdot b^r \cdot a^0 \\ &= \binom{r}{0} \cdot i^0 \cdot b^0 \cdot a^{r+1} + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \cdot i^k \cdot b^k \cdot a^{r+1-k} + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k-1} \cdot i^k \cdot b^k \cdot a^{r+1-k} \\ &\quad + \binom{r}{r} \cdot i^{r+1} \cdot b^{r+1} \cdot a^0 \\ &= \binom{r+1}{0} \cdot i^0 \cdot b^0 \cdot a^{r+1} + \sum_{k=1}^r \left[\binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} \right] \cdot i^k \cdot b^k \cdot a^{r+1-k} + \binom{r+1}{r+1} \cdot i^{r+1} \cdot b^{r+1} \cdot a^0 \\ &= \binom{r+1}{0} \cdot (i \cdot b)^0 \cdot a^{r+1} + \sum_{k=1}^r \binom{r+1}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{r+1-k} + \binom{r+1}{r+1} \cdot (i \cdot b)^{r+1} \cdot a^0 \\ &= \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} \cdot (i \cdot b)^k \cdot a^{r+1-k}. \end{aligned}$$

□

O TRIÂNGULO HEPTAGONAL E SUA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades relacionadas à trigonometria do triângulo heptagonal. Antes, faremos algumas considerações sobre a geometria do heptágono regular e definiremos o que é, de fato, um triângulo heptagonal. As proposições apresentadas foram extraídas do artigo de Bankoff e Garfunkel [4].

2.1 GEOMETRIA DO HEPTÁGONO REGULAR

Nesta seção, exploramos algumas propriedades geométricas do heptágono regular. Vamos considerar um heptágono regular $ABCDEFG$ inscrito numa circunferência de centro O e raio R para realizar as demonstrações, como está ilustrado na Figura 32.

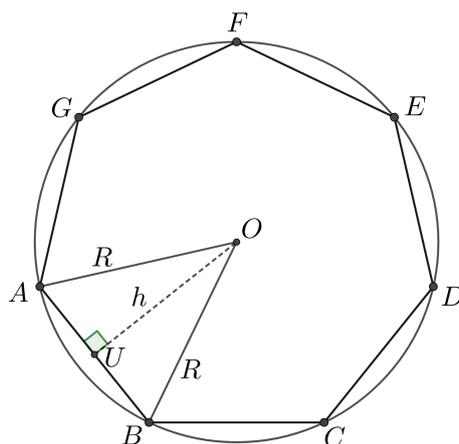


Figura 32: Heptágono regular.

Cada ângulo interno do heptágono regular mede $\frac{5 \cdot \pi}{7}$. O heptágono regular pode ser decomposto em sete triângulos isósceles congruentes, formados por dois vértices consecutivos do heptágono e o centro O . Sendo o triângulo $\triangle ABO$ um representante desses sete triângulos congruentes, temos que $\widehat{AOB} = \frac{2 \cdot \pi}{7}$ e $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{5 \cdot \pi}{14}$.

Denotando por ℓ a medida do lado do heptágono regular, obtemos a seguir uma expressão para ℓ em função de R .

$$\ell^2 = 2 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$$

$$\ell = \sqrt{2} \cdot R \cdot \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \sqrt{2} \cdot R \cdot \sqrt{2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)} = 2 \cdot R \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right). \quad (2.1)$$

A área do heptágono regular pode ser calculada em função de ℓ . Se h denota a apótema do heptágono regular, como na Figura 32, então h é a altura do triângulo $\triangle ABO$ relativa ao vértice O . Sendo U o ponto médio de \overline{AB} , temos

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{h}{R} \Rightarrow R = \frac{h}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}. \quad (2.2)$$

No triângulo $\triangle BOU$, determinamos h usando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{h^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)} - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right) = -\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \\ h^2 \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)} &= -\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 \cdot \left(-\frac{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right) = -\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \\ h^2 &= \frac{\ell^2}{4} \cdot \cot^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \Rightarrow h = \frac{\ell}{2} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que a área do heptágono regular, denotada por $(ABCDEFG)$, é igual a sete vezes a área do triângulo $\triangle ABO$, obtemos

$$(ABCDEFG) = 7 \cdot \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{7}{4} \cdot \ell^2 \cdot \cot\left(\frac{\pi}{7}\right). \quad (2.3)$$

Substituindo (2.1) em (2.3), determinamos $(ABCDEFG)$ em função de R :

$$(ABCDEFG) = 7 \cdot R^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{7}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right).$$

Nas condições anteriores, temos a seguinte propriedade para o triângulo $\triangle ABE$ (respectivamente, $\triangle ADE$; $\triangle ADG$):

Proposição 2.1. *São colineares os pontos E , O e U (respectivamente, A , O e K , com K sendo o ponto médio de \overline{DE} ; D , O e L , com L sendo o ponto médio de \overline{AG}).*

Demonstração. Devido à regularidade do heptágono, as diagonais \overline{AE} e \overline{BE} são congruentes, de modo que o triângulo $\triangle ABE$ é isósceles, com $AE = BE$. Assim, a mediana \overline{EU} coincide com a mediatriz do lado \overline{AB} . Como existe uma única circunferência passando por A , B e E , o circuncentro do triângulo $\triangle ABE$ é o ponto O , centro da circunferência circuncrita ao heptágono $ABCDEFG$. Uma vez que o circuncentro do triângulo $\triangle ABE$ pertence à mediatriz de \overline{AB} , concluímos que os pontos E , U e O são colineares. \square

A seguir, apresentamos mais algumas propriedades do heptágono regular, que serão úteis no decorrer do trabalho, especialmente no próximo capítulo.

Proposição 2.2. *Nas condições anteriores, sendo V o ponto médio do raio perpendicular ao lado \overline{BC} , como está ilustrado na Figura 33, a distância d de U a V é igual à metade da medida do lado do quadrado inscrito na mesma circunferência de centro O e raio R em que o heptágono regular $ABCDEFG$ está inscrito.*

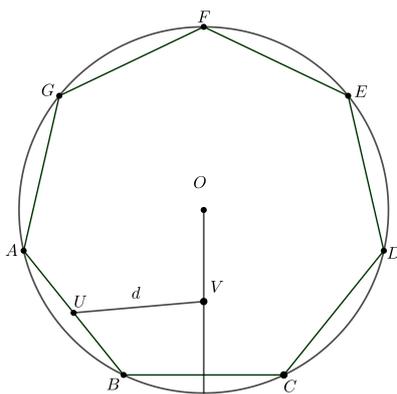


Figura 33: Cálculo de UV .

Demonstração. Temos que a diagonal de um quadrado inscrito numa circunferência de raio R é igual a $2 \cdot R$ e, por consequência, o lado do quadrado mede $R \cdot \sqrt{2}$.

Como os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle BOC$ são isósceles, com $AO = OB$ e $OB = OC$, segue que \overrightarrow{OU} e \overrightarrow{OV} são bissetrizes dos ângulos centrais $\angle AOB$ e $\angle BOC$, respectivamente. Assim, $U\hat{O}B = \frac{\pi}{7}$, $B\hat{O}V = \frac{\pi}{7}$ e $U\hat{O}V = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} = \frac{2 \cdot \pi}{7}$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle UVO$, obtemos que

$$d^2 = OU^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \cdot OU \cdot \frac{R}{2} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.4)$$

Notamos que o triângulo $\triangle UOB$ é retângulo em U , pois U é o ponto médio do segmento \overline{AB} , e o triângulo $\triangle ABO$ é isósceles, sendo $AO = BO = R$. Deste modo,

$$\cos(U\hat{O}B) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{OU}{R} \Rightarrow OU = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} d^2 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R^2 + \frac{R^2}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot R^2 \\ &= R^2 \left(\frac{1}{4} + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como $\frac{3 \cdot \pi}{7}$ e $\frac{4 \cdot \pi}{7}$ são ângulos suplementares, então

$$\text{sen}\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = \text{sen}\left(\pi - \frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = \text{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \quad (2.7)$$

e

$$\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.8)$$

Desenvolvendo (2.7), chegamos a

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) &= 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) &= 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Escrevendo $\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$ como $1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$, obtemos

$$3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4 \cdot \text{sen}^3\left(\frac{\pi}{7}\right) = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$$

Dividindo esta igualdade por $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{3 - 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4} &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \frac{3}{4} - \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \frac{3}{4} - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ -\frac{1}{4} + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.6), temos que

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \\ d &= R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

□

Proposição 2.3. *Nas condições da Proposição 2.2, sejam U', W, W', X e X' os pontos médios de $\overline{CD}, \overline{BG}, \overline{CE}, \overline{AE}$ e \overline{DG} , respectivamente. A circunferência de centro V e raio UV passa pelos pontos U', W, W', X e X' .*

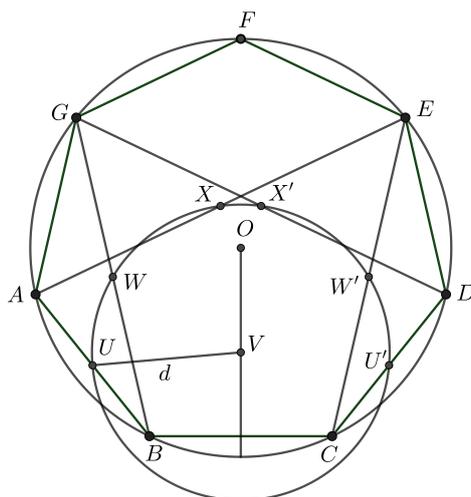


Figura 34: Circunferência de centro V e raio $d = UV$.

Demonstração. Por (2.10), $UV = d = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Provaremos que $VW = VW' = VX = VX' = VU' = d$.

Mutatis mutandis, a prova de que $VU' = d$ é a mesma de que $UV = d$, dada na Proposição 2.2.

A seguir, calculamos VW . Para isso, consideramos, de modo especial, o triângulo $\triangle ABG$. Pela lei dos cossenos, temos que

$$BG^2 = AB^2 + AG^2 - 2 \cdot AB \cdot AG \cdot \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{7}\right) = 2 \cdot \ell^2 - 2 \cdot \ell^2 \cdot \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{7}\right).$$

Mas, $\frac{5 \cdot \pi}{7}$ e $\frac{2 \cdot \pi}{7}$ são suplementares. Logo,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5 \cdot \pi}{7}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{5 \cdot \pi}{7}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right), \quad (2.11)$$

$$\cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{7}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{5 \cdot \pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.12)$$

Por (2.1) e (2.12), obtemos que

$$\begin{aligned} BG^2 &= 8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R^2 - 8 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right) \\ BG^2 &= 8 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mas

$$1 + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = 1 + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Logo, (2.13) torna-se

$$\begin{aligned} BG^2 &= 8 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) = 16 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ BG &= 4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Como W é o ponto médio do segmento \overline{BG} , então

$$BW = 2 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right). \quad (2.14)$$

O triângulo $\triangle BWO$ é retângulo em W , pois o triângulo $\triangle BGO$ é isósceles ($BO = GO = R$) e W é ponto médio do segmento \overline{BG} . Assim, a mediana \overline{OW} é também altura do triângulo $\triangle BWO$. Então, pelo Teorema de Pitágoras e por (2.14),

$$\begin{aligned} OW^2 &= R^2 - 4 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ OW^2 &= R^2 \cdot \left(1 - 4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \\ OW^2 &= R^2 \cdot \left(1 - \left(2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^2\right) \\ OW^2 &= R^2 \cdot \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right) \\ OW^2 &= R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Desta forma,

$$OW = R \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.15)$$

Para calcular VW , utilizamos o triângulo $\triangle OVW$. Primeiramente, observamos que A, W e O são colineares, pois como \overline{OW} e \overline{AW} são medianas dos triângulos isósceles $\triangle BOG$ e $\triangle BAG$, respectivamente, então são também alturas dos respectivos triângulos. Consequentemente,

$$\begin{aligned} V\hat{O}W &= B\hat{O}V + A\hat{O}B \\ &= \frac{\pi}{7} + \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}. \end{aligned}$$

Pela lei dos cossenos, por (2.15) e (2.8), obtemos que

$$\begin{aligned} VW^2 &= OW^2 + OV^2 - 2 \cdot OW \cdot OV \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) \\ VW^2 &= R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \frac{R^2}{4} - 2 \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) \\ VW^2 &= R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \frac{R^2}{4} - R^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\right) \\ VW^2 &= R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \frac{1}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para determinar $\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)$, desenvolvemos novamente (2.7):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2 \cdot \pi}{7}\right) &= \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) &= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) &= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) &= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\end{aligned}$$

Mas,

$$2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}.$$

Desse modo, a equação anterior torna-se

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right),$$

isto é,

$$2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right).$$

Dividindo esta equação por $\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned}2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \frac{1}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} &= 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} &= \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ \frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) &= \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)$$

Em vista de (2.8), esta equação torna-se

$$\frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.17)$$

Agora, usando que $\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$, que $\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$ e simplificando $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$, o lado esquerdo de (2.17) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4} \\ & \frac{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 - 2 \cdot \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)}{4} \\ & \frac{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 3}{4} \\ & \frac{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4}{4} + \frac{1}{4} \\ & - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + \frac{1}{4} \\ & - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + \frac{1}{4} \\ & - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + \frac{1}{4} \\ & - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + \frac{1}{4} \\ & - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(4 \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right) - 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + \frac{1}{4} \\ & - 4 \cdot \cos^4\left(\frac{\pi}{7}\right) + 3 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + \frac{1}{4} \\ & - 4 \cdot \cos^4\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1\right)^2 + \frac{1}{4} \\
& -\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^2 + \frac{1}{4} \\
& -\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Consequentemente, (2.17) torna-se

$$\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{1}{4}. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) em (2.16), concluímos que

$$VW^2 = R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow VW = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2} = d.$$

Mutatis mutandis, a prova de que $VW' = d$ é a mesma de que $VW = d$ que acabamos de fazer.

Seguimos agora para o cálculo da medida do segmento \overline{OX} . Iniciamos determinando UE .

Como $AE = BE$ então o triângulo $\triangle ABE$ é isósceles. Sendo U o ponto médio de \overline{AB} , temos que o triângulo $\triangle AUE$ é retângulo com ângulo reto no vértice U .

De acordo com a Proposição 2.1, os pontos U , O e E estão alinhados. Logo, por (2.5),

$$UE = EO + OU = R + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R = R \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right).$$

Mas, por (2.1), podemos dizer que $AU = \frac{AB}{2} = R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$. Assim,

$$\begin{aligned}
AE^2 &= AU^2 + UE^2 = R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + R^2 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^2 \\
AE^2 &= R^2 \cdot \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1\right) \\
AE^2 &= R^2 \cdot \left(2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\right) = R^2 \cdot \left(2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1\right)\right) \\
AE^2 &= R^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right)
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$AE = 2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right). \quad (2.19)$$

Sendo X o ponto médio do segmento \overline{AE} , temos por (2.19) que $AX = R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$. Como o triângulo $\triangle AEO$ é isósceles, com $AO = EO = R$ e X é o ponto médio de \overline{AE} , então o triângulo $\triangle AOX$ é retângulo em X . Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} OX^2 &= R^2 - AX^2 = R^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \\ OX^2 &= R^2 \cdot \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right)\right) \\ OX^2 &= R^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \\ OX &= R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{14}\right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Observamos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) = \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.21)$$

e

$$\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.22)$$

Então, substituindo (2.22) em (2.20), obtemos que

$$OX = -R \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \quad (2.23)$$

Finalmente, para determinar VX , consideramos o triângulo $\triangle XVO$ e calculamos $X\hat{O}V$. Observamos que $A\hat{O}E = \frac{6 \cdot \pi}{7}$. Como o triângulo $\triangle AOE$ é isósceles com $AO = EO = R$ e X é o ponto médio do segmento \overline{AE} , então

$$A\hat{O}X = \frac{A\hat{O}E}{2} = \frac{3 \cdot \pi}{7}.$$

Além disso,

$$A\hat{O}V = A\hat{O}B + B\hat{O}V = \frac{2 \cdot \pi}{7} + \frac{\pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}.$$

Deste modo,

$$X\hat{O}V = A\hat{O}X + A\hat{O}V = \frac{3 \cdot \pi}{7} + \frac{3 \cdot \pi}{7} = \frac{6 \cdot \pi}{7}.$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle XVO$, obtemos

$$VX^2 = OX^2 + OV^2 - 2 \cdot OX \cdot OV \cdot \cos\left(\frac{6 \cdot \pi}{7}\right).$$

Mas,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{6 \cdot \pi}{7} \right) = \operatorname{sen} \left(\pi - \frac{6 \cdot \pi}{7} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right), \quad (2.24)$$

e

$$\cos \left(\frac{6 \cdot \pi}{7} \right) = -\cos \left(\pi - \frac{6 \cdot \pi}{7} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{7} \right). \quad (2.25)$$

Assim, por (2.25) e (2.23),

$$\begin{aligned} VX^2 &= R^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) + \frac{R^2}{4} - 2 \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \\ VX^2 &= R^2 \cdot \left(\cos^2 \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) - \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

A seguir, calculamos

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) - \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) &= \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \left(\cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \right) = \\ &= \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \left(-2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{4 \cdot \pi}{7} + \frac{\pi}{7}}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{4 \cdot \pi}{7} - \frac{\pi}{7}}{2} \right) \right) = \\ &= \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \left(-2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{5 \cdot \pi}{14} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{3 \cdot \pi}{14} \right) \right). \end{aligned}$$

Mas,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{5 \cdot \pi}{14} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot \pi}{14} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{7} \right), \quad (2.27)$$

e

$$\operatorname{sen} \left(\frac{3 \cdot \pi}{14} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot \pi}{14} \right) = \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right). \quad (2.28)$$

Consequentemente, por (2.27) e (2.28), obtemos que

$$\cos^2 \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) - \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) = -2 \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right).$$

No entanto,

$$\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{8 \cdot \pi}{7}\right)}{8 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = -\frac{1}{8}.$$

Ou seja,

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = -\frac{1}{8}. \quad (2.29)$$

Desta maneira,

$$\cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}. \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.26), obtemos

$$VX^2 = R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right).$$

Portanto,

$$VX = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2} = d.$$

Mutatis mutandis, a prova de que $VX' = d$ é a mesma de que $VX = d$ que acabamos de fazer.

□

Proposição 2.4. *Sejam O o centro do heptágono regular $ABCDEFG$, W o ponto médio de \overline{OF} , M o simétrico a F em relação a O , U o ponto médio de \overline{AB} , V o ponto médio de \overline{OM} e J o ponto sobre \overline{UB} tal que $UJ = UM$, como está ilustrado na Figura 35. Então*

- (1) UW é igual à medida da diagonal do quadrado cuja medida do lado é igual à medida da apótema do heptágono regular $ABCDEFG$;
- (2) OJ é igual à medida da diagonal do quadrado cuja medida do lado é igual à metade da medida do lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência circunscrita ao heptágono regular $ABCDEFG$;
- (3) \overleftrightarrow{UV} é a tangente à circunferência que passa pelos pontos U, O e W , no ponto U .

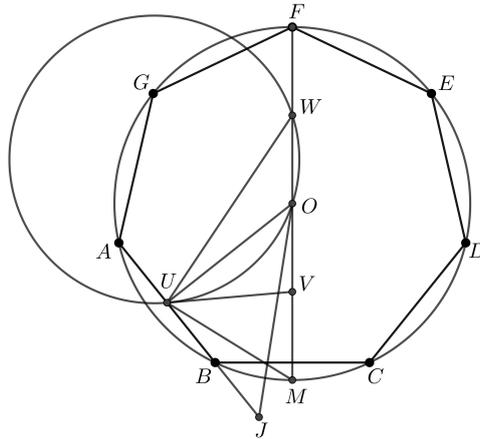


Figura 35: Mais uma propriedade do heptágono regular.

Demonstração. (1) A medida da apótema do heptágono regular $ABCDEFG$ é OU , que é igual a $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R$, por (2.5). Assim, a medida da diagonal d_1 do quadrado cujo lado mede OU é igual a

$$d_1 = R \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right). \tag{2.31}$$

Em relação ao triângulo $\triangle OUW$, temos que

$$U\hat{O}W = U\hat{O}A + A\hat{O}F = \frac{\pi}{7} + \frac{4 \cdot \pi}{7} = \frac{5 \cdot \pi}{7}.$$

Por (2.5) e (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} UW^2 &= OU^2 + OW^2 - 2 \cdot OU \cdot OW \cdot \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{7}\right) \\ UW^2 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R^2 + \frac{R^2}{4} - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R \cdot \frac{R}{2} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right) \\ UW^2 &= R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \frac{1}{4}\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Substituindo (2.9) em (2.32), obtemos

$$\begin{aligned} UW^2 &= R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ UW^2 &= R^2 \cdot 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$UW = R \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = d_1.$$

- (2) Primeiramente, calculemos a medida ℓ_1 do lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência circunscrita ao heptágono regular $ABCDEFGH$. Sabendo que a distância do centro da circunferência aos vértices do triângulo equilátero é igual a R , temos

$$\ell_1^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$\ell_1^2 = 2 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\ell_1 = R \cdot \sqrt{3}.$$

Portanto, a medida da diagonal do quadrado cujo lado mede $\frac{\ell_1}{2} = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ é igual a $d_2 = R \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Em relação ao triângulo $\triangle OUM$, temos que

$$U\hat{O}M = U\hat{O}B + B\hat{O}M = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} = \frac{2 \cdot \pi}{7}.$$

Por (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} UM^2 &= OU^2 + OM^2 - 2 \cdot OU \cdot OM \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R^2 + R^2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \\ &= R^2 \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Substituindo (2.9) em (2.33), temos

$$UM^2 = R^2 \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \frac{1}{4} \right) + 1 \right) = R^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \right). \quad (2.34)$$

Finalmente, observamos que o triângulo $\triangle OUI$ é retângulo com ângulo reto em U . Daí, por (2.5) e (2.34),

$$\begin{aligned}
OJ^2 &= OU^2 + UJ^2 \\
OJ^2 &= OU^2 + UM^2 \\
OJ^2 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot R^2 + R^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \\
OJ^2 &= R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \frac{3}{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \\
OJ^2 &= \frac{3}{2} \cdot R^2 \\
OJ &= R \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = d_2.
\end{aligned}$$

(3) Mostremos que $VU^2 = VO \cdot VW$, de onde concluiremos que \overleftrightarrow{UV} é a tangente à circunferência que passa pelos pontos U, O e W , no ponto U .

Pela Proposição 2.2, $UV = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Então, $UV^2 = \frac{R^2}{2}$. Além disso, $VO = \frac{R}{2}$ e $VW = R$, de modo que $VO \cdot VW = \frac{R^2}{2}$. Portanto, $VU^2 = VO \cdot VW$.

□

2.2 O TRIÂNGULO HEPTAGONAL

Devido à regularidade, a menos de congruência, o heptágono regular possui dois tipos de diagonais; por exemplo, do vértice A , partem as diagonais $\overline{AC} \cong \overline{AF}$, bem como as diagonais $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, como está ilustrado na Figura 36. Também, a menos de congruência, existem duas classes de triângulos cujos vértices são vértices do heptágono $ABCDEFG$: isósceles e escalenos. Dentre os isósceles, há aqueles cujos lados congruentes são lados do heptágono e aqueles cujos lados congruentes são diagonais do heptágono. Sem perda de generalidades, destacamos os triângulos que têm o ponto A como vértice, lembrando que todos os outros triângulos pertencem a um dos seguintes três tipos:

- isósceles cujos lados congruentes são lados do heptágono: $\triangle ABC \cong \triangle ABG \cong \triangle AFG$;
- isósceles cujos lados congruentes são diagonais do heptágono: $\triangle ABE \cong \triangle ADE \cong \triangle ADG, \triangle ADF \cong \triangle ACE \cong \triangle ACF$;
- escaleno: $\triangle ABF \cong \triangle ACD \cong \triangle ACG \cong \triangle AEF \cong \triangle AEG \cong \triangle ABD$.

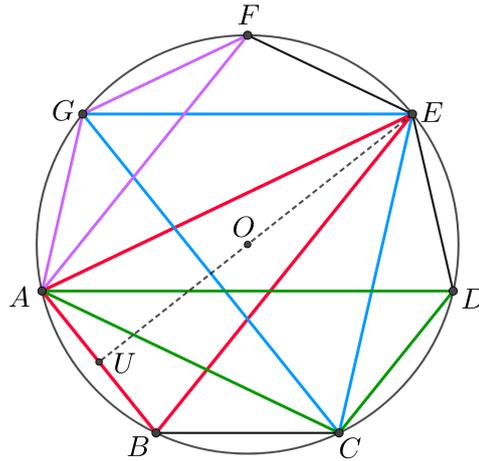


Figura 36: Possíveis triângulos formados a partir dos vértices de um heptágono regular.

Definição 2.5. Dado um heptágono regular, chamamos de triângulo heptagonal àquele triângulo escaleno cujos lados são um lado e duas diagonais do heptágono.

Na Figura 37, está destacado o triângulo heptagonal $\triangle ABD$ do heptágono regular $ABCDEFG$.

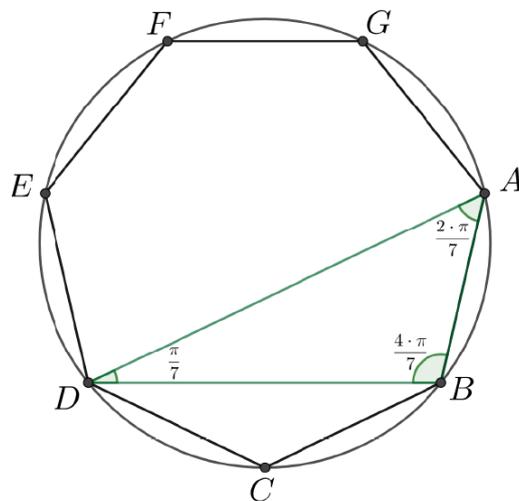


Figura 37: Triângulo heptagonal $\triangle ABD$.

Tomamos o triângulo $\triangle ABD$ como representante da classe de triângulos heptagonais do heptágono regular $ABCDEFG$, observando que todos eles são congruentes ao triângulo $\triangle ABD$.

Proposição 2.6. Os ângulos internos do triângulo heptagonal $\triangle ABD$ medem $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2 \cdot \pi}{7}$ e $\frac{4 \cdot \pi}{7}$.

Demonstração. A medida de cada ângulo central do heptágono regular é igual a $\frac{2 \cdot \pi}{7}$. Como o ângulo $\angle ADB$ está inscrito no arco \widehat{DC} , segue do teorema do ângulo inscrito que

$$\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \cdot \text{med}(\widehat{AB}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

Analogamente, como o ângulo $\angle BAD$ está inscrito no arco \widehat{BCD} , segue do teorema do ângulo inscrito que

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot \text{med}(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{2 \cdot \pi}{7}.$$

Finalmente, como o ângulo $\angle ABD$ está inscrito no arco \widehat{DEFGA} , segue do teorema do ângulo inscrito que

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \text{med}(\widehat{DEFGA}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{4 \cdot \pi}{7}.$$

□

Observamos que os triângulos heptagonais são obtusângulos, já que $\frac{4 \cdot \pi}{7} > \frac{\pi}{2}$.

Observação 2.7. Para simplificar a notação, de agora em diante referir-nos-emos aos triângulos heptagonais do heptágono regular como $\triangle ABC$, isto é, renomeamos o vértice D do heptágono como sendo B , de modo que o triângulo $\triangle ACD$ torna-se $\triangle ABC$, como está ilustrado na Figura 38. Desta forma, temos que

$$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{7}, \quad \widehat{ABC} = \frac{2 \cdot \pi}{7} \quad \text{e} \quad \widehat{ACB} = \frac{4 \cdot \pi}{7}.$$

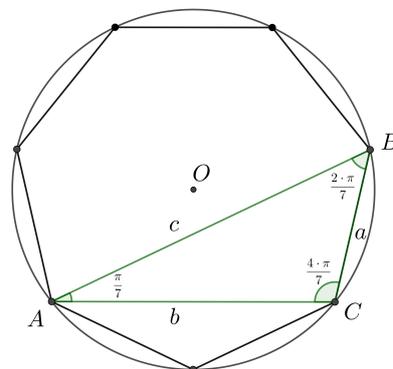


Figura 38: Triângulo heptagonal (renomeado) $\triangle ABC$.

Observação 2.8. Denotando por $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, como $B\hat{A}C < A\hat{B}C < A\hat{C}B$, temos que $a < b < c$. Além disso, temos que $a = \ell$ é a medida do lado do heptágono regular, dada por (2.1).

A seguir, destacamos alguns ângulos determinados pelos vértices do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e o circuncentro O . Para calcular suas medidas, basta observar que a medida de cada ângulo central do heptágono regular é igual a $\frac{2 \cdot \pi}{7}$. Assim,

$$B\hat{O}C = \text{med}(\widehat{BC}) = \frac{2 \cdot \pi}{7}, \quad (2.35)$$

$$A\hat{O}C = \text{med}(\widehat{AC}) = 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{4 \cdot \pi}{7}, \quad (2.36)$$

e

$$A\hat{O}B = \text{med}(\widehat{ACB}) = 3 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{6 \cdot \pi}{7}. \quad (2.37)$$

A partir de relações trigonométricas, obtemos algumas identidades que serão úteis no decorrer do trabalho. Por exemplo, os ângulos $\frac{8 \cdot \pi}{7}$ e $\frac{6 \cdot \pi}{7}$ são replementares. Logo,

$$\text{sen} \left(\frac{8 \cdot \pi}{7} \right) = -\text{sen} \left(2 \cdot \pi - \frac{8 \cdot \pi}{7} \right) = -\text{sen} \left(\frac{6 \cdot \pi}{7} \right) = -\text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \quad (2.38)$$

e

$$\cos \left(\frac{8 \cdot \pi}{7} \right) = \cos \left(2 \cdot \pi - \frac{8 \cdot \pi}{7} \right) = \cos \left(\frac{6 \cdot \pi}{7} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \quad (2.39)$$

Como são suplementares os ângulos $\frac{9 \cdot \pi}{14}$ e $\frac{5 \cdot \pi}{14}$, então

$$\text{sen} \left(\frac{9 \cdot \pi}{14} \right) = \text{sen} \left(\frac{5 \cdot \pi}{14} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot \pi}{14} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{7} \right). \quad (2.40)$$

2.3 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO HEPTAGONAL

Nas condições da Observação 2.7 e Observação 2.8, obtemos, nesta seção, algumas relações trigonométricas do triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

Proposição 2.9. Em relação ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$, valem as seguintes relações:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{b}{2 \cdot a}, \quad \cos(\widehat{ABC}) = \frac{c}{2 \cdot b} \quad e \quad \cos(\widehat{ACB}) = -\frac{a}{2 \cdot c}.$$

Demonstração. Aplicando a lei dos senos ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$, e usando que $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$, conforme Observação 2.7, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} &= \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} \\ \sin(\widehat{BAC}) &= \frac{a \cdot 2 \cdot \sin(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC})}{b} \\ \cos(\widehat{BAC}) &= \frac{b}{2 \cdot a}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Da mesma forma, usando que $\widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{ABC}$, conforme Observação 2.7, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} &= \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} \\ \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} &= \frac{c}{2 \cdot \sin(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC})} \\ \cos(\widehat{ABC}) &= \frac{c}{2 \cdot b}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Novamente, aplicando a lei dos senos ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e usando (2.7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} &= \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} \\ \frac{a}{\sin(\widehat{ACB} - 3 \cdot \widehat{BAC})} &= \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} \\ \frac{a}{\sin(\widehat{ACB}) \cdot \cos(3 \cdot \widehat{BAC}) - \sin(3 \cdot \widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ACB})} &= \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} \\ \frac{a}{-\sin(\widehat{ACB}) \cdot \cos(4 \cdot \widehat{BAC}) - \sin(\widehat{ACB}) \cdot \cos(\widehat{ACB})} &= \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} \\ \frac{a}{-\cos(4 \cdot \widehat{BAC}) - \cos(\widehat{ACB})} &= c \\ \frac{a}{-2 \cdot \cos(\widehat{ACB})} &= c \\ \cos(\widehat{ACB}) &= -\frac{a}{2 \cdot c}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

□

Proposição 2.10. Dado o triângulo heptagonal $\triangle ABC$, a é metade da média harmônica de b e c , isto é,

$$a = \frac{b \cdot c}{b + c}.$$

Demonstração. Por (2.7), temos que $\text{sen}(3 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) = \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) &= \frac{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{2 \cdot \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} = \frac{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{2 \cdot \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} \cdot \frac{\text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{\text{sen}(3 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})} = \\ &= \frac{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{2 \cdot \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot (\text{sen}(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}))} = \\ &= \frac{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{2 \cdot \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot 2 \cdot \cos^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} = \\ &= \frac{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot 2 \cdot \cos^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} = \\ &= \frac{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{\frac{\text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{2} + \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1 + \cos(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{2}\right)} = \\ &= \frac{2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{\text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + 2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + 2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})} = \\ &= \frac{2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{\text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + 2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + 2 \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{sen}(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) = \frac{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})}{\text{sen}(2 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \text{sen}(4 \cdot \hat{B}\hat{A}\hat{C})} = \frac{\text{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \text{sen}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}{\text{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \text{sen}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}. \quad (2.44)$$

Segue da lei dos senos que

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{a}{\text{sen}(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} &= \frac{b}{\text{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C})} + \frac{c}{\text{sen}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} \\ 2 \cdot \frac{a}{\text{sen}(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} &= \frac{b}{\text{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C})} + \frac{c}{2 \cdot \text{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C})}. \end{aligned}$$

Logo,

$$2 \cdot \frac{a}{\text{sen}(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} = \frac{2 \cdot b \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + c}{\text{sen}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}. \quad (2.45)$$

Substituindo (2.44) em (2.45) e usando (2.42), temos que

$$\begin{aligned}
2 \cdot a \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \operatorname{sen}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}{\operatorname{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \operatorname{sen}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} \right) &= \frac{2 \cdot b \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + c}{\operatorname{sen}(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} \\
2 \cdot a &= \frac{\operatorname{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot (2 \cdot b \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + c)}{\operatorname{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + 2 \cdot \operatorname{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C})} = \frac{\operatorname{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot (2 \cdot b \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + c)}{\operatorname{sen}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}))} \\
2 \cdot a &= \frac{2 \cdot b \cdot \frac{c}{2 \cdot b} + c}{1 + 2 \cdot \frac{c}{2 \cdot b}} = \frac{2 \cdot c}{\frac{b+c}{b}} = \frac{2 \cdot b \cdot c}{b+c} \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{b+c}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Consequentemente, $b = \frac{a \cdot c}{c - a}$ e $c = \frac{a \cdot b}{b - a}$. □

Proposição 2.11. Para o triângulo heptagonal $\triangle ABC$, valem as seguintes relações:

$$b^2 - a^2 = a \cdot c, \quad c^2 - b^2 = a \cdot b \quad \text{e} \quad c^2 - a^2 = b \cdot c. \tag{2.47}$$

Demonstração. Pela lei dos cossenos e por (2.42), obtemos que

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \\
b^2 - a^2 &= c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \frac{c}{2 \cdot b} \\
&= c^2 \cdot \left(1 - \frac{a}{b} \right) \\
&= c^2 \cdot \left(\frac{b - a}{b} \right).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Usando que $b = \frac{a \cdot c}{c - a}$ em (2.48), temos

$$b^2 - a^2 = c^2 \cdot \frac{\frac{a \cdot c}{c - a} - a}{\frac{a \cdot c}{c - a}} = \frac{c^2 \cdot (a \cdot c - a \cdot c + a^2)}{a \cdot c} = \frac{a^2 \cdot c^2}{a \cdot c} = a \cdot c. \tag{2.49}$$

De maneira análoga, provamos as outras duas relações. □

Com estes resultados, além de (2.41), (2.42) e (2.43), podemos calcular $\operatorname{sen}^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C})$, $\operatorname{sen}^2(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$ e $\operatorname{sen}^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) &= 1 - \cos^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \\
\operatorname{sen}^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) &= 1 - \frac{b^2}{4 \cdot a^2} = \frac{4 \cdot a^2 - b^2}{4 \cdot a^2} = \frac{3 \cdot a^2 + a^2 - b^2}{4 \cdot a^2} = \frac{3 \cdot a^2 - a \cdot c}{4 \cdot a^2} = \frac{3 \cdot a - c}{4 \cdot a};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) &= 1 - \cos^2(\widehat{ABC}) \\ \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) &= 1 - \frac{c^2}{4 \cdot b^2} = \frac{4 \cdot b^2 - c^2}{4 \cdot b^2} = \frac{3 \cdot b^2 + b^2 - c^2}{4 \cdot b^2} = \frac{3 \cdot b^2 - a \cdot b}{4 \cdot b^2} = \frac{3 \cdot b - a}{4 \cdot b}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) &= 1 - \cos^2(\widehat{ACB}) \\ \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) &= 1 - \frac{a^2}{4 \cdot c^2} = \frac{4 \cdot c^2 - a^2}{4 \cdot c^2} = \frac{3 \cdot c^2 + c^2 - a^2}{4 \cdot c^2} = \frac{3 \cdot c^2 + b \cdot c}{4 \cdot c^2} = \frac{3 \cdot c + b}{4 \cdot c}. \end{aligned}$$

As oito próximas proposições apresentam propriedades geométricas de um triângulo heptagonal, as quais envolvem suas bissetrizes, lados, alturas, dentre outros elementos.

Proposição 2.12. *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo heptagonal, M o ponto de intersecção da bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$ com a circunferência Γ circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$ (que é a circunferência de raio R e centro O em que o heptágono regular está inscrito) e N o ponto de intersecção da bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ com Γ . Para o quadrilátero $OMCN$, vale que os quadrados das medidas de suas bimedias são $\frac{R^2}{2}$ e $\frac{MN^2}{2}$, enquanto que o quadrado da medida do segmento que une os pontos médios de suas diagonais é igual a $\frac{MC^2}{2}$.*

Demonstração. Sejam P, Q, S, T, U e V os pontos médios dos segmentos \overline{ON} , \overline{MC} , \overline{OM} , \overline{NC} , \overline{OC} e \overline{MN} , respectivamente, conforme está ilustrado na Figura 39.

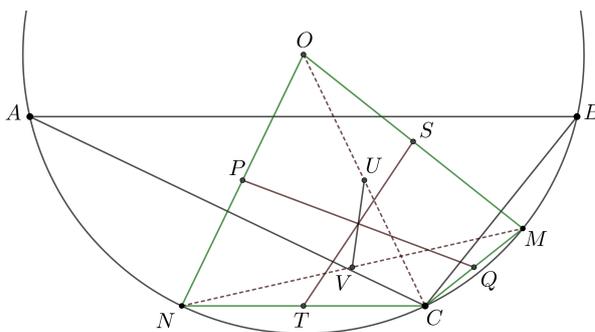


Figura 39: Quadrilátero $OMCN$.

A seguir, usaremos o teorema da base média (Proposição 1.2) para obtermos algumas medidas de alguns segmentos. Observando o triângulo $\triangle ONC$, notamos que $PT = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$. Em relação ao triângulo $\triangle CMN$, observamos que $QT = \frac{MN}{2}$; do triângulo

$\triangle OMN$, temos que $PS = \frac{MN}{2}$ e $SV = \frac{ON}{2} = \frac{R}{2}$ e sobre o triângulo $\triangle OMC$, temos que $SU = \frac{MC}{2}$.

Do mesmo modo, usaremos o teorema do ângulo inscrito (Proposição 1.9) para obtermos algumas medidas de alguns ângulos. Lembramos que, por construção, N pertence à bissetriz do ângulo $\angle ABC$, enquanto que M pertence à bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

$$\begin{aligned} N\hat{O}C &= 2 \cdot C\hat{B}N = \frac{2 \cdot \pi}{7}; \\ M\hat{O}C &= 2 \cdot C\hat{A}M = \frac{\pi}{7}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Assim,

$$M\hat{O}N = N\hat{O}C + M\hat{O}C = \frac{3 \cdot \pi}{7}. \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} O\hat{N}C &= O\hat{C}N = \frac{\pi - N\hat{O}C}{2} = \frac{\pi - \frac{2 \cdot \pi}{7}}{2} = \frac{5 \cdot \pi}{14}; \\ P\hat{T}N &= O\hat{C}N = \frac{5 \cdot \pi}{14}; \\ Q\hat{T}C &= M\hat{N}C = M\hat{A}C = \frac{\pi}{14}; \\ P\hat{T}Q &= \pi - P\hat{T}N - Q\hat{T}C = \frac{4 \cdot \pi}{7}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} N\hat{P}T &= N\hat{O}C = \frac{2 \cdot \pi}{7}; \\ O\hat{P}S &= O\hat{N}M = \frac{\pi - M\hat{O}N}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{7}; \\ T\hat{P}S &= \pi - N\hat{P}T - O\hat{P}S = \frac{3 \cdot \pi}{7}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} O\hat{C}M &= O\hat{M}C = \frac{\pi - M\hat{O}C}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{7}}{2} = \frac{3 \cdot \pi}{7}; \\ O\hat{S}U &= O\hat{M}C = \frac{3 \cdot \pi}{7}; \\ V\hat{S}M &= M\hat{O}N = \frac{3 \cdot \pi}{7}; \\ U\hat{S}V &= \pi - O\hat{S}U - V\hat{S}M = \frac{\pi}{7}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle PTQ$, calcularemos a medida da bimediana \overline{PQ} do quadrilátero $OMCN$. Como esta medida depende de $QT = \frac{MN}{2}$, primeiramente determinemos R em função de MN .

Observando o triângulo $\triangle MNO$ e usando (2.8) e (2.51), temos que

$$\begin{aligned} MN^2 &= R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos(M\hat{O}N) \\ MN^2 &= 2 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) \\ MN^2 &= 2 \cdot R^2 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\right) \\ MN^2 &= 2 \cdot R^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 1\right) \\ MN^2 &= 4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Assim,

$$MN = 2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.55)$$

Para calcularmos PQ^2 , usaremos (2.52) e (2.55):

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PT^2 + QT^2 - 2 \cdot PT \cdot QT \cdot \cos(P\hat{T}Q) \\ PQ^2 &= \frac{R^2}{4} + \frac{MN^2}{4} - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{MN}{2} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \\ PQ^2 &= \frac{MN^2}{16 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} + \frac{MN^2}{4} - \frac{MN^2 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \\ PQ^2 &= \frac{MN^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} + 1 - \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right) \\ PQ^2 &= \frac{MN^2}{4} \cdot \left(1 + \frac{1 - 4 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right). \end{aligned}$$

Por (2.18), obtemos que $\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{1}{4} - \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$. Então,

$$PQ^2 = \frac{MN^2}{4} \cdot \left(1 + \frac{1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4} - \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right)}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}\right)$$

$$PQ^2 = \frac{MN^2}{4} \cdot 2 = \frac{MN^2}{2}.$$

Para determinarmos o quadrado da bimediana ST , aplicamos a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle PST$ e utilizamos (2.18), (2.53) e (2.55). De fato,

$$ST^2 = PT^2 + PS^2 - 2 \cdot PT \cdot PS \cdot \cos(T\hat{P}S)$$

$$ST^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{MN^2}{4} - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{MN}{2} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)$$

$$ST^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + R^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)$$

$$ST^2 = R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\right)$$

$$ST^2 = \frac{R^2}{2}.$$

Finalmente, determinaremos UV aplicando a lei dos cossenos e ao triângulo $\triangle USV$ e utilizando (2.54). Como esta medida depende de $US = \frac{MC}{2}$, primeiramente determinemos R em função de MC .

Para isto, aplicamos a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle OMC$ e utilizamos (2.8), (2.25) e (2.50). De fato,

$$MC^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \cos(M\hat{O}C)$$

$$MC^2 = 2 \cdot R^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

$$MC^2 = 2 \cdot R^2 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{6 \cdot \pi}{7}\right)\right)$$

$$MC^2 = 4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right)$$

Assim,

$$MC = 2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right)$$

e

$$R = \frac{MC}{2 \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right)} = -\frac{MC}{2 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}. \quad (2.56)$$

Deste modo,

$$UV^2 = US^2 + SV^2 - 2 \cdot US \cdot SV \cdot \cos(U\hat{S}V)$$

$$UV^2 = \frac{MC^2}{4} + \frac{R^2}{4} - 2 \cdot \frac{MC}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$UV^2 = \frac{MC^2}{4} + \frac{MC^2}{16 \cdot \cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)} + \frac{MC^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}$$

$$UV^2 = \frac{MC^2}{4} \cdot \left(1 + \frac{1 + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}\right).$$

Por (2.30), temos que $\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \frac{1}{4}$. Daí,

$$\begin{aligned} UV^2 &= \frac{MC^2}{4} \cdot \left(1 + \frac{1 + 4 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \frac{1}{4}\right)}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}\right) = \\ &= \frac{MC^2}{4} \cdot \left(1 + \frac{1 + 4 \cdot \cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - 1}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}\right) = \frac{MC^2}{2}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.13. A soma dos quadrados das medidas dos lados do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é igual a $7 \cdot R^2$, sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7 \cdot R^2.$$

Demonstração. Pela lei dos senos, $a = 2 \cdot R \cdot \sin(B\hat{A}C)$, $b = 2 \cdot R \cdot \sin(A\hat{B}C)$ e $c = 2 \cdot R \cdot \sin(A\hat{C}B)$. Logo,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \cdot R^2 \cdot (\sin^2(B\hat{A}C) + \sin^2(A\hat{B}C) + \sin^2(A\hat{C}B)). \quad (2.57)$$

Mas,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\widehat{ACB}) &= \operatorname{sen}(\pi - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC})) \\ \operatorname{sen}(\widehat{ACB}) &= \operatorname{sen}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{BAC})\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) &= \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{BAC}) + \\ &+ 2 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}).\end{aligned}\quad (2.58)$$

Substituindo (2.58) em $\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})$, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) &= \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \\ &+ \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{BAC}) + \\ &+ 2 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) = \\ &= 1 - \cos^2(\widehat{BAC}) + 1 - \cos^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \\ &+ \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{BAC}) + 2 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) = \\ &= 2 + \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot (\operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) - 1) + \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot (\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) - 1) + \\ &+ 2 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) = \\ &= 2 - 2 \cdot \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + 2 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) = \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot (\cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) - \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC})) = \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = \\ &= 2 + 2 \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot (-\cos(\widehat{BAC} + \widehat{ABC})) = \\ &= 2 + 2 \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\pi - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC})) = \\ &= 2 + 2 \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ACB}).\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) = 2 + 2 \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ACB}).\quad (2.59)$$

Dessa forma, substituindo (2.59), (2.41), (2.42) e (2.43) em (2.57), concluímos que

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= 4 \cdot R^2 \cdot (2 + 2 \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ACB})) \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot \frac{c}{2b} \cdot \left(-\frac{a}{2c}\right)\right) \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right) = 7 \cdot R^2.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.14. Se h_a, h_b, h_c denotam as alturas correspondentes aos lados a, b, c do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, então $h_a = h_b + h_c$.

Demonstração. Segue da Proposição 2.10 que

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b \cdot c} = \frac{b+c}{b \cdot c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad (2.60)$$

Sendo (ABC) a área do triângulo $\triangle ABC$, temos que

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{2 \cdot (ABC)}{a}; \\ h_b &= \frac{2 \cdot (ABC)}{b}; \\ h_c &= \frac{2 \cdot (ABC)}{c}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por (2.61) e (2.60), obtemos

$$\begin{aligned} h_b + h_c &= \frac{2 \cdot (ABC)}{b} + \frac{2 \cdot (ABC)}{c} = 2 \cdot (ABC) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \\ &= 2 \cdot (ABC) \cdot \frac{1}{a} = \frac{2 \cdot (ABC)}{a} = h_a. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.15. O triângulo formado pelos pés das bissetrizes internas do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é isósceles.

Demonstração. Sejam A'', B'' e C'' os pés das bissetrizes internas dos ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Mostremos que o triângulo $\triangle A''B''C''$ é isósceles, conforme ilustra a Figura 40.

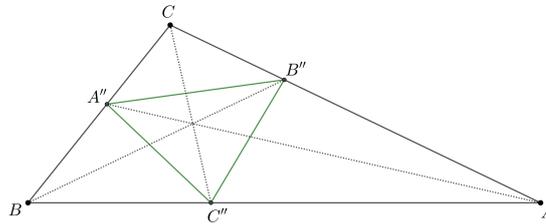


Figura 40: $\triangle A''B''C''$ formado pelos pés das bissetrizes internas do $\triangle ABC$.

Por (2.46), temos que $a = \frac{b \cdot c}{b+c}$ e, conseqüentemente, $b = \frac{a \cdot c}{c-a}$ e $c = \frac{a \cdot b}{b-a}$.

Então

$$\frac{c}{b+c} = \frac{a}{b}. \quad (2.62)$$

Pela Proposição 2.11, $c^2 - a^2 = b \cdot c$. Como $a \neq c$, pois o triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é escaleno, obtemos

$$(c-a) \cdot (c+a) = b \cdot c \Rightarrow a+c = \frac{b \cdot c}{c-a}.$$

Desta forma,

$$\frac{b}{a+c} = \frac{b}{\frac{b \cdot c}{c-a}} = \frac{c-a}{c} = \frac{a}{b}. \quad (2.63)$$

Das equações (2.62) e (2.63) temos

$$\frac{c}{b+c} = \frac{b}{a+c}. \quad (2.64)$$

Usando o Teorema da bissetriz interna (Proposição 1.6), podemos determinar a medida de alguns segmentos:

$$\frac{A''B}{c} = \frac{a-A''B}{b} \Rightarrow A''B \cdot b = a \cdot c - A''B \cdot c \Rightarrow A''B \cdot (b+c) = a \cdot c \Rightarrow A''B = \frac{a \cdot c}{b+c}$$

e

$$\frac{B''C}{a} = \frac{b-B''C}{c} \Rightarrow B''C \cdot c = a \cdot b - B''C \cdot a \Rightarrow B''C \cdot (a+c) = a \cdot b \Rightarrow B''C = \frac{a \cdot b}{a+c}.$$

Segue de (2.64) que $\frac{a \cdot c}{b+c} = \frac{a \cdot b}{a+c}$. Assim, $A''B = B''C$.

Novamente, pelo Teorema da bissetriz interna, temos que

$$\frac{BC''}{a} = \frac{c-BC''}{b} \Rightarrow BC'' \cdot b = a \cdot c - BC'' \cdot a \Rightarrow BC'' \cdot (a+b) = a \cdot c \Rightarrow BC'' = \frac{a \cdot c}{a+b}. \quad (2.65)$$

Determinaremos agora a medida do segmento $\overline{CC''}$. Temos que a área do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é igual à soma das áreas dos triângulos $\triangle BCC''$ e $\triangle ACC''$. Ou seja,

$$\begin{aligned} (ABC) &= (BCC'') + (ACC'') \\ \frac{a \cdot b \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{2} &= \frac{a \cdot CC'' \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)}{2} + \frac{b \cdot CC'' \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)}{2} \\ CC'' &= \frac{a \cdot b \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{(a+b) \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)} \end{aligned}$$

$$CC'' = \frac{a \cdot b \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)}{(a + b) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)}$$

Por (2.42), $\cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) = \frac{c}{2 \cdot b}$. Assim,

$$CC'' = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)}{a + b} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2 \cdot b}}{a + b} = \frac{a \cdot c}{a + b}. \quad (2.66)$$

Por (2.65) e (2.66), concluímos que $BC'' = CC''$.

Como $A''B = B''C$, $BC'' = CC''$ e os ângulos $\angle A''BC''$ e $\angle B''CC''$ possuem a mesma medida $\left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)$, pelo caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado, os triângulos $\triangle A''BC''$ e $\triangle B''CC''$ são congruentes, de modo que $A''C'' = B''C''$. Dessa forma, o triângulo $\triangle A''B''C''$ é isósceles. \square

Proposição 2.16. *O segmento da reta de Euler determinado pelo circuncentro O e pelo ortocentro H do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é congruente à diagonal do quadrado construído sobre o raio R da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$, ou seja, $OH = R \cdot \sqrt{2}$.*

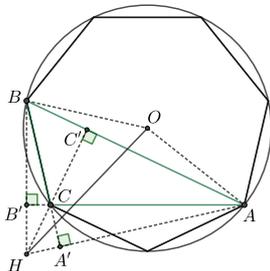


Figura 41: Segmento de Euler do triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

Demonstração. Sejam A', B', C' os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, respectivamente, como está ilustrado na Figura 41. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle BOH$, obtemos

$$OH^2 = BH^2 + R^2 - 2 \cdot BH \cdot R \cdot \cos(\widehat{HBO}) \quad (2.67)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \widehat{HBO} &= \widehat{OBC} + \widehat{CBB'} \\ &= \frac{5 \cdot \pi}{14} + \widehat{CBB'} \end{aligned}$$

Com relação ao ângulo $\angle CBB'$, podemos determiná-lo analisando o triângulo $\triangle CBB'$, que é reto em B' e $B'\hat{C}B = \pi - A\hat{C}B = \pi - \frac{4 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}$. Logo,

$$C\hat{B}B' = \pi - C\hat{B}'B - B'\hat{C}B = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot \pi}{7} = \frac{\pi}{14}. \quad (2.68)$$

Consequentemente,

$$H\hat{B}O = O\hat{B}C + C\hat{B}B' = \frac{5 \cdot \pi}{14} + \frac{\pi}{14} = \frac{3 \cdot \pi}{7}. \quad (2.69)$$

Com relação ao segmento \overline{BH} , observamos o triângulo $\triangle BCC'$, reto em C' , e determinamos o valor de BC' , usando (2.42):

$$\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{BC'}{a} \Rightarrow BC' = a \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{a \cdot c}{2 \cdot b}. \quad (2.70)$$

Observando o triângulo $\triangle BC'H$, reto em C' , e usando (2.68), temos

$$\begin{aligned} H\hat{B}C' &= C\hat{B}B' + A\hat{B}C = \\ &= \frac{\pi}{14} + \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{5 \cdot \pi}{14}. \end{aligned}$$

$$\text{Então } B\hat{H}C' = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot \pi}{14} = \frac{\pi}{7}.$$

Pela lei dos senos no triângulo heptagonal $\triangle ABC$, temos que $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{a}{2 \cdot R}$. Assim, por (2.70),

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{BC'}{BH} \Rightarrow BH = \frac{a \cdot c}{2 \cdot b} \cdot \frac{2 \cdot R}{a} = \frac{c \cdot R}{b}. \quad (2.71)$$

Por (2.67), (2.71), (2.69), (2.8) e pela Proposição 2.11, concluímos que

$$\begin{aligned} OH^2 &= BH^2 + R^2 - 2 \cdot BH \cdot R \cdot \cos(H\hat{B}O) \\ &= \frac{c^2 \cdot R^2}{b^2} + R^2 - 2 \cdot \frac{c \cdot R}{b} \cdot R \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) \\ &= \frac{c^2 \cdot R^2}{b^2} + R^2 + 2 \cdot \frac{c \cdot R^2}{b} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \\ &= \frac{c^2 \cdot R^2}{b^2} + R^2 + 2 \cdot \frac{c \cdot R^2}{b} \cdot \left(\frac{-a}{2 \cdot c}\right) \\ &= \frac{c^2 \cdot R^2}{b^2} + R^2 - \frac{a}{b} \cdot R^2 \\ &= R^2 \left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{a}{b} + 1\right) \\ &= R^2 \cdot \left(\frac{c^2 - a \cdot b}{b^2} + 1\right) \\ &= R^2 \cdot \left(\frac{b^2}{b^2} + 1\right) = 2 \cdot R^2. \end{aligned}$$

Portanto, $OH = R \cdot \sqrt{2}$. □

Proposição 2.17. *As duas retas tangentes à circunferência circunscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$, que passam pelo seu ortocentro H , são perpendiculares.*

Demonstração. Sejam Γ a circunferência de centro O e raio R que é circunscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$, u e v as retas tangentes à Γ que passam por H , P_1 e P_2 os pontos em que u e v tangenciam Γ , como está ilustrado na Figura 42.

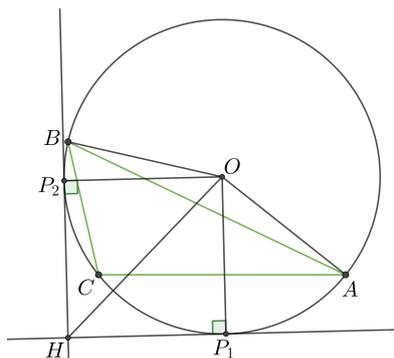


Figura 42: Tangentes à circunferência Γ que passam por H .

Temos que $H\hat{P}_1O = H\hat{P}_2O = \frac{\pi}{2}$ e, de acordo com a Proposição 2.16, $OH = R \cdot \sqrt{2}$.

Em relação ao triângulo $\triangle OHP_1$,

$$\text{sen}(O\hat{H}P_1) = \frac{R}{OH} = \frac{R}{R \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow O\hat{H}P_1 = \frac{\pi}{4}. \quad (2.72)$$

Em relação ao triângulo $\triangle OHP_2$,

$$\text{sen}(O\hat{H}P_2) = \frac{R}{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow O\hat{H}P_2 = \frac{\pi}{4}. \quad (2.73)$$

Segue de (2.72) e (2.73) que

$$P_1\hat{H}P_2 = O\hat{H}P_1 + O\hat{H}P_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, as retas u e v são perpendiculares. □

Proposição 2.18. *Dado o triângulo heptagonal $\triangle ABC$, a medida da altura relativa ao vértice B é igual à metade da medida da ceviana determinada pela bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$.*

Demonstração. Sejam B' e T os pés da altura relativa ao vértice B e da bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$ do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, respectivamente, como está ilustrado na Figura 43. Temos que $B\hat{A}C = B\hat{A}B' = \frac{\pi}{7}$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{a}{2 \cdot R}$, pela lei dos senos.

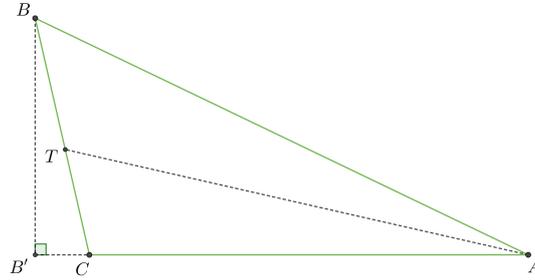


Figura 43: Altura $\overline{BB'}$ e ceviana \overline{AT} do triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

Assim, sendo $h_B = BB'$, temos que

$$\text{sen}(B\hat{A}B') = \frac{h_B}{c} \Rightarrow h_B = \frac{a \cdot c}{2 \cdot R}.$$

Em relação ao triângulo $\triangle ABT$, sabemos que $A\hat{B}T = \frac{2 \cdot \pi}{7}$ e $B\hat{A}T = \frac{\pi}{14}$, donde segue que $A\hat{T}B = \frac{9 \cdot \pi}{14}$. Pela lei dos senos,

$$\frac{AT}{\text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \frac{c}{\text{sen}\left(\frac{9 \cdot \pi}{14}\right)}.$$

Por (2.40),

$$\frac{AT}{\text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \frac{c}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} \Rightarrow AT = \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot c}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)} = 2 \cdot \frac{a}{2 \cdot R} \cdot c = \frac{a \cdot c}{R}.$$

Portanto, $h_B = \frac{AT}{2}$. □

Proposição 2.19. Sendo I e H o incentro e o ortocentro, respectivamente, do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, vale que $IH^2 = \frac{R^2 + 4 \cdot r^2}{2}$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e r o raio da circunferência inscrita ao mesmo triângulo.

Demonstração. Como está ilustrado na Figura 44, sejam A', B' e C' os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, respectivamente, e I_c o

ponto de tangência entre a circunferência inscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e o lado \overline{AB} .

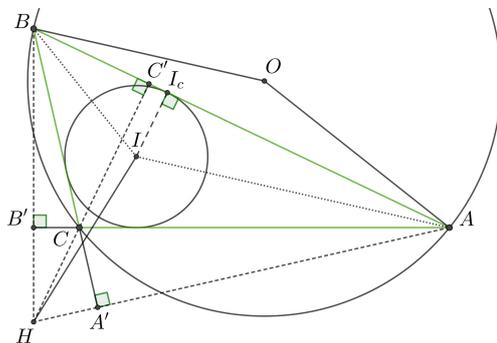


Figura 44: Incentro e ortocentro do triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

O cálculo de IH será dado a partir da aplicação da lei dos cossenos ao triângulo $\triangle AHI$. Para isso, precisamos calcular AI , AH e a medida do ângulo $\angle IAH$.

Começamos estabelecendo uma relação entre r e R . Sendo (ABC) a área do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, temos que $(ABC) = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2}$ e $(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$. Ou seja,

$$\frac{r \cdot (a + b + c)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \Rightarrow r = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot R \cdot (a + b + c)}. \quad (2.74)$$

Pela lei dos senos, $a = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, $b = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$ e $c = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)$. Assim,

$$a \cdot b \cdot c = 8 \cdot R^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \quad (2.75)$$

e

$$a + b + c = 2 \cdot R \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \right). \quad (2.76)$$

A seguir, vamos calcular $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)$.

$$\sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$$

Logo,

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}. \quad (2.77)$$

E

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)$$

Logo,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}. \quad (2.78)$$

Por (2.29), (2.77) e (2.78), temos que

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} + \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} + \frac{1}{2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} + 1 \right) = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \\ &= \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \frac{1}{2}}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Segue de (2.30) e (2.39) que

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - 1}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{-\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} = \\
 & = \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} =
 \end{aligned}$$

$$= \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{-2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}$$

Deste modo,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = -\frac{\tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{2}. \quad (2.79)$$

Substituindo (2.79) em (2.76), obtemos

$$a + b + c = -R \cdot \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.80)$$

Substituindo (2.75), (2.80) e (2.22) em (2.74), chegamos a:

$$\begin{aligned} r &= \frac{8 \cdot R^3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{-2 \cdot R^2 \cdot \tan\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)} = \\ &= -4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)} = \\ &= -4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \\ &= -4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right)\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$r = 4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right). \quad (2.81)$$

Em relação ao triângulo $\triangle AII_c$, temos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{r}{AI} \Rightarrow AI = \frac{r}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

Por (2.81), concluímos que

$$AI = \frac{4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right)} = 4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.82)$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle ABO$, usando (2.7) e que a medida do ângulo $\angle AOB$ é igual a $\frac{6 \cdot \pi}{7}$, obtemos

$$AB^2 = 2 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \cos\left(\frac{6 \cdot \pi}{7}\right) = 2 \cdot R^2 \left(1 - \cos\left(\frac{6 \cdot \pi}{7}\right)\right)$$

$$AB^2 = 2 \cdot R^2 \cdot \left(2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right)\right)$$

$$AB^2 = 4 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = 4 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)$$

Assim,

$$AB = 2 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right). \quad (2.83)$$

Em relação ao triângulo $\triangle ABB'$, que é reto em B' , temos por (2.83) que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{AB'}{AB} = \frac{AB'}{2 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}$$

Logo,

$$AB' = 2 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right). \quad (2.84)$$

Para o cálculo de AH , consideramos o triângulo $\triangle AHB'$, (2.84) e a medida do ângulo $\angle AHB'$.

Observando o quadrilátero $A'CB'H$, temos que $C\hat{A}'H = H\hat{B}'C = \frac{\pi}{2}$ e $A'\hat{C}B' = A\hat{C}B = \frac{4 \cdot \pi}{7}$ (opostos pelo vértice). Assim,

$$A\hat{H}B' = A'\hat{H}B' = 2 \cdot \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}. \quad (2.85)$$

Mas,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{AB'}{AH}$$

Por (2.84) e (2.7),

$$AH = \frac{2 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)} = 2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right). \quad (2.86)$$

Temos que

$$I\hat{A}H = I\hat{A}C + C\hat{A}H.$$

Por (2.85),

$$C\hat{A}H = B'\hat{A}H = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot \pi}{7} = \frac{\pi}{14}.$$

Deste modo,

$$I\hat{A}H = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{7}. \quad (2.87)$$

Por (2.87), (2.29), (2.81), (2.82) e (2.86), temos que:

$$\begin{aligned} IH^2 &= AI^2 + AH^2 - 2 \cdot AI \cdot AH \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \\ &= 16 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + 4 \cdot R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 16 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right)\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \right. \\ &\quad \left. - 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\right) = \\ &= 4 \cdot R^2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cdot R^2 \cdot \left(8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \right) \right) = \\
&= 4 \cdot R^2 \cdot \left(8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\cos\left(\pi - \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} + \frac{4 \cdot \pi}{7}\right)\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \right) \right) = \\
&= 4 \cdot R^2 \cdot \left(8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\cos(\pi) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7} + \frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \operatorname{sen}(\pi) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7} + \frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \right) \right) = \\
&= 4 \cdot R^2 \cdot \left(8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7} + \frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \right) \right) = \\
&= 4 \cdot R^2 \cdot \left(8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \right) \right) = \\
&= 4 \cdot R^2 \cdot \left(8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \right) = \\
&= 4 \cdot R^2 \cdot \left(8 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \frac{1}{8} \right) = \\
&= 32 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + \frac{R^2}{2} = \\
&= 2 \cdot \left(4 \cdot R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \right)^2 + \frac{R^2}{2} = \\
&= 2 \cdot r^2 + \frac{R^2}{2} = \frac{R^2 + 4 \cdot r^2}{2}.
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado é uma lista de relações trigonométricas que envolvem os ângulos de um triângulo heptagonal, isto é, $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2 \cdot \pi}{7}$ e $\frac{4 \cdot \pi}{7}$.

Proposição 2.20. *Nas condições da Observação 2.7, para o triângulo heptagonal $\triangle ABC$, valem as seguintes relações trigonométricas:*

$$a) \operatorname{sen}(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}(A\hat{C}B) = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

$$b) \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) = \frac{7}{4}$$

$$c) \operatorname{sen}(2 \cdot (B\hat{A}C)) + \operatorname{sen}(2 \cdot (A\hat{B}C)) + \operatorname{sen}(2 \cdot (A\hat{C}B)) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$d) \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) = \frac{7}{64}$$

e)

$$\operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) + \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) = \frac{7}{8}$$

$$f) \operatorname{cos}(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{cos}(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{cos}(A\hat{C}B) = -\frac{1}{8}$$

$$g) \operatorname{cos}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{cos}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{cos}^2(A\hat{C}B) = \frac{5}{4}$$

h)

$$\operatorname{cos}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{cos}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{cos}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{cos}^2(A\hat{C}B) + \operatorname{cos}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{cos}^2(A\hat{C}B) = \frac{3}{8}$$

$$i) \operatorname{cos}(2 \cdot (B\hat{A}C)) + \operatorname{cos}(2 \cdot (A\hat{B}C)) + \operatorname{cos}(2 \cdot (A\hat{C}B)) = \frac{-1}{2}$$

$$j) \operatorname{tan}(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{tan}(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{tan}(A\hat{C}B) = -\sqrt{7}$$

$$k) \operatorname{cot}(B\hat{A}C) + \operatorname{cot}(A\hat{B}C) + \operatorname{cot}(A\hat{C}B) = \sqrt{7}$$

$$l) \operatorname{csc}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{csc}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{csc}^2(A\hat{C}B) = 8$$

$$m) \operatorname{sec}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{sec}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sec}^2(A\hat{C}B) = 24$$

$$n) \operatorname{cot}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{cot}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{cot}^2(A\hat{C}B) = 5$$

$$o) \operatorname{tan}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{tan}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{tan}^2(A\hat{C}B) = 21$$

$$p) \operatorname{sec}^4(B\hat{A}C) + \operatorname{sec}^4(A\hat{B}C) + \operatorname{sec}^4(A\hat{C}B) = 416$$

$$q) \operatorname{cos}^4(B\hat{A}C) + \operatorname{cos}^4(A\hat{B}C) + \operatorname{cos}^4(A\hat{C}B) = \frac{13}{16}$$

$$r) \operatorname{sen}^4(B\hat{A}C) + \operatorname{sen}^4(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^4(A\hat{C}B) = \frac{21}{16}$$

$$s) \operatorname{csc}^4(B\hat{A}C) + \operatorname{csc}^4(A\hat{B}C) + \operatorname{csc}^4(A\hat{C}B) = 32$$

$$t) \operatorname{sec}(2 \cdot (B\hat{A}C)) + \operatorname{sec}(2 \cdot (A\hat{B}C)) + \operatorname{sec}(2 \cdot (A\hat{C}B)) = -4.$$

Demonstração. Para realizar a prova de algumas dessas equações, escrevemos $\operatorname{sen}(7 \cdot x)$ em função de $\operatorname{sen}(x)$.

Pela fórmula de De Moivre (Proposição 1.51), temos que

$$(\cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x))^7 = \cos(7 \cdot x) + i \cdot \operatorname{sen}(7 \cdot x). \quad (2.88)$$

Usando a fórmula do binômio de Newton para números complexos (Proposição 1.12), calculamos $(\cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x))^7$:

$$\begin{aligned} (\cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x))^7 &= \binom{7}{0} \cdot (i \cdot \operatorname{sen}(x))^0 \cdot \cos^7(x) + \binom{7}{1} \cdot i \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^6(x) \\ &+ \binom{7}{2} \cdot (i \cdot \operatorname{sen}(x))^2 \cdot \cos^5(x) + \binom{7}{3} \cdot (i \cdot \operatorname{sen}(x))^3 \cdot \cos^4(x) \\ &+ \binom{7}{4} \cdot (i \cdot \operatorname{sen}(x))^4 \cdot \cos^3(x) + \binom{7}{5} \cdot (i \cdot \operatorname{sen}(x))^5 \cdot \cos^2(x) \\ &+ \binom{7}{6} \cdot (i \cdot \operatorname{sen}(x))^6 \cdot \cos(x) + \binom{7}{7} \cdot (i \cdot \operatorname{sen}(x))^7 \cdot \cos^0(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x))^7 &= \cos^7(x) + 7 \cdot i \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^6(x) + 21 \cdot (-1) \cdot \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos^5(x) \\ &+ 35 \cdot (-i) \cdot \operatorname{sen}^3(x) \cdot \cos^4(x) + 35 \cdot \operatorname{sen}^4(x) \cdot \cos^3(x) + 21 \cdot i \cdot \operatorname{sen}^5(x) \cdot \cos^2(x) \\ &+ 7 \cdot (-1) \cdot \operatorname{sen}^6(x) \cdot \cos(x) + (-i) \cdot \operatorname{sen}^7(x) \\ (\cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x))^7 &= (\cos^7(x) - 21 \cdot \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos^5(x) + 35 \cdot \operatorname{sen}^4(x) \cdot \cos^3(x) - 7 \cdot \operatorname{sen}^6(x) \cdot \cos(x)) \\ &+ i \cdot (7 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^6(x) - 35 \cdot \operatorname{sen}^3(x) \cdot \cos^4(x) + 21 \cdot \operatorname{sen}^5(x) \cdot \cos^2(x) - \operatorname{sen}^7(x)). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Comparando as partes imaginárias de (2.88) e (2.89), concluímos então que

$$\operatorname{sen}(7 \cdot x) = 7 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^6(x) - 35 \cdot \operatorname{sen}^3(x) \cdot \cos^4(x) + 21 \cdot \operatorname{sen}^5(x) \cdot \cos^2(x) - \operatorname{sen}^7(x). \quad (2.90)$$

Mas,

$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x);$$

$$\cos^4(x) = (1 - \operatorname{sen}^2(x))^2 = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^4(x);$$

$$\cos^6(x) = (1 - \operatorname{sen}^2(x))^3 = 1 - 3 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + 3 \cdot \operatorname{sen}^4(x) - \operatorname{sen}^6(x).$$

Substituindo esses resultados na equação (2.90), obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(7 \cdot x) &= 7 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot (1 - 3 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + 3 \cdot \operatorname{sen}^4(x) - \operatorname{sen}^6(x)) + \\ &- 35 \cdot \operatorname{sen}^3(x) \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^4(x)) + 21 \cdot \operatorname{sen}^5(x) \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(x)) - \operatorname{sen}^7(x) \\ \operatorname{sen}(7 \cdot x) &= 7 \cdot \operatorname{sen}(x) - 56 \cdot \operatorname{sen}^3(x) + 112 \cdot \operatorname{sen}^5(x) - 64 \cdot \operatorname{sen}^7(x). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Como $\text{sen}(7 \cdot x) = 0$ para $x = \frac{\pi}{7} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, então ao fazermos a mudança de variáveis $t = \text{sen}(x)$ na equação (2.91), com $x \in \left\{0, \frac{\pi}{7}, \frac{2 \cdot \pi}{7}, \frac{4 \cdot \pi}{7}\right\}$, obtemos a equação polinomial (na variável t),

$$64 \cdot t^7 - 112 \cdot t^5 + 56 \cdot t^3 - 7 \cdot t = 0, \quad (2.92)$$

a qual pode ser fatorada como

$$t \cdot (64 \cdot t^6 - 112 \cdot t^4 + 56 \cdot t^2 - 7) = 0,$$

de onde temos que $t = 0$ ou $64 \cdot t^6 - 112 \cdot t^4 + 56 \cdot t^2 - 7 = 0$. Observamos que se r_0 é uma raiz de $64 \cdot t^6 - 112 \cdot t^4 + 56 \cdot t^2 - 7 = 0$ então $-r_0$ também o é. Deste modo, as raízes de (2.92) são dadas por:

$$\begin{aligned} r_1 &= \text{sen}(0) = 0; \\ r_2 &= -\text{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = -\text{sen}(A\hat{C}B); \\ r_3 &= -\text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = -\text{sen}(A\hat{B}C); \\ r_4 &= -\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = -\text{sen}(B\hat{A}C); \\ r_5 &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \text{sen}(B\hat{A}C); \\ r_6 &= \text{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = \text{sen}(A\hat{B}C); \\ r_7 &= \text{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \text{sen}(A\hat{C}B). \end{aligned}$$

Destacamos as seguintes relações de Girard para a equação (2.92):

- I) $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 = -\frac{7}{64}$;
- II) $r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_5 + r_1 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_5 + r_2 \cdot r_6 + r_2 \cdot r_7 + r_3 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_5 + r_3 \cdot r_6 + r_3 \cdot r_7 + r_4 \cdot r_5 + r_4 \cdot r_6 + r_4 \cdot r_7 + r_5 \cdot r_6 + r_5 \cdot r_7 + r_6 \cdot r_7 = -\frac{112}{64} = -\frac{7}{4}$;
- III) $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_5 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_5 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_5 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_5 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 + r_1 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_4 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_1 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_6 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 \cdot r_6 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_5 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 + r_2 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_4 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_2 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 + r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_7 + r_3 \cdot r_4 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_3 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 + r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 \cdot r_7 = \frac{56}{64} = \frac{7}{8}$.

Substituindo as raízes r_1, r_2, \dots, r_7 na relação de Girard I), obtemos a relação trigonométrica d). De fato,

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) &= -\frac{7}{64} \\ \operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) &= \frac{7}{64}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

De (2.93) segue a relação trigonométrica a):

$$\operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) = \frac{\sqrt{7}}{8}. \quad (2.94)$$

Substituindo as raízes r_1, r_2, \dots, r_7 na relação de Girard II), obtemos a relação trigonométrica b). De fato,

$$\begin{aligned} &-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) \cdot (-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C})) + (-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B})) \cdot (-\operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C})) + \\ &(-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) + (-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) + (-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &(-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C})) \cdot (-\operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C})) + (-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) + (-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) + \\ &(-\operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + (-\operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) + (-\operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) + \\ &(-\operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C})) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) + \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &+ \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) = -\operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) - \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) - \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) = \frac{7}{4}. \quad (2.95)$$

Substituindo as raízes r_1, r_2, \dots, r_7 na relação de Girard III), obtemos a relação trigonométrica e). De fato,

$$\begin{aligned} &-\operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) - \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &-\operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &+ \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &+ \operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &+ \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) - \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{C}B}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) + \\ &+ \operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) - \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &+ \operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) + \\ &-\operatorname{sen}^2(\widehat{B\hat{A}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{B}C}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{A\hat{C}B}) = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) = \frac{7}{8}. \quad (2.96)$$

A seguir, provamos a relação trigonométrica c). Para isso, nos serão úteis as seguintes identidades:

- $\widehat{ACB} = \pi - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$;
 - $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$;
 - $\operatorname{sen}(\widehat{ACB}) = \operatorname{sen}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{BAC})$;
 - $\cos(\widehat{ACB}) = -\cos(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) - \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC})$;
- Consequentemente,
- $\operatorname{sen}(\widehat{ACB}) \cdot \cos(\widehat{ACB}) = \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) - \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) - \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{BAC})$.

Por (2.94), temos que

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}(2 \cdot (\widehat{BAC})) + \operatorname{sen}(2 \cdot (\widehat{ABC})) + \operatorname{sen}(2 \cdot (\widehat{ACB})) = 2 \cdot (\operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) + \\ & + \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) + \\ & - \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \\ & - \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{BAC})) = \\ & = 2 \cdot (\operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot (1 - \cos^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC})) + \\ & \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot (1 - \cos^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC})) = \\ & = 4 \cdot (\operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC})) = \\ & = 4 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot (\cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) + \cos(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC})) = \\ & = 4 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 4 \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ACB}) = \\ & = 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

Embora a relação trigonométrica f) tenha sido deduzida em (2.29), apresentamos aqui uma nova prova a partir de (2.41), (2.42) e (2.43):

$$\cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ACB}) = \frac{b}{2 \cdot a} \cdot \frac{c}{2 \cdot b} \cdot \left(-\frac{a}{2 \cdot c} \right) = -\frac{1}{8}. \quad (2.97)$$

A relação trigonométrica g) é uma consequência de (2.95):

$$\begin{aligned} & \cos^2(\widehat{BAC}) + \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{ACB}) = \\ & = 1 - \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + 1 - \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + 1 - \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) = \\ & = 3 - (\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})) = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\cos^2(\widehat{BAC}) + \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{ACB}) = \frac{5}{4}. \quad (2.98)$$

A relação trigonométrica *h*) pode ser provada com (2.96) e (2.98):

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) = \frac{7}{8} \\ & (1 - \cos^2(\widehat{BAC})) \cdot (1 - \cos^2(\widehat{ABC})) + (1 - \cos^2(\widehat{BAC})) \cdot (1 - \cos^2(\widehat{ACB})) + \\ & + (1 - \cos^2(\widehat{ABC})) \cdot (1 - \cos^2(\widehat{ACB})) = \frac{7}{8} \\ & \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) + \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) + \\ & - 2 \cdot (\cos^2(\widehat{BAC}) + \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{ACB})) + 3 = \frac{7}{8} \\ & \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) + \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) + \\ & - 2 \cdot \frac{5}{4} + 3 = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Assim,

$$\cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) + \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) = \frac{3}{8}. \quad (2.99)$$

A relação trigonométrica *i*) segue de (2.98):

$$\begin{aligned} & \cos(2 \cdot (\widehat{BAC})) + \cos(2 \cdot (\widehat{ABC})) + \cos(2 \cdot (\widehat{ACB})) = \\ & = 2 \cdot \cos^2(\widehat{BAC}) - 1 + 2 \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) - 1 + 2 \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) - 1 = \\ & = 2 \cdot (\cos^2(\widehat{BAC}) + \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{ACB})) - 3 = 2 \cdot \frac{5}{4} - 3 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para a relação trigonométrica *j*), utilizaremos (2.94) e (2.97):

$$\tan(\widehat{BAC}) \cdot \tan(\widehat{ABC}) \cdot \tan(\widehat{ACB}) = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ACB})}{\cos(\widehat{BAC}) \cdot \cos(\widehat{ABC}) \cdot \cos(\widehat{ACB})} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{8}}{-\frac{1}{8}} = -\sqrt{7}.$$

Passemos à prova da relação trigonométrica *k*):

$$\begin{aligned} \cot(\widehat{BAC}) + \cot(\widehat{ABC}) + \cot(\widehat{ACB}) &= \frac{\cos(\widehat{BAC})}{\operatorname{sen}(\widehat{BAC})} + \frac{\cos(\widehat{ABC})}{\operatorname{sen}(\widehat{ABC})} + \frac{\cos(\widehat{ACB})}{\operatorname{sen}(\widehat{ACB})} \\ &= \frac{\cos(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ACB}) + \cos(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ACB})}{\operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ACB})} + \quad (2.100) \\ & \frac{\cos(\widehat{ACB}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC})}{\operatorname{sen}(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{ACB})} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\cos(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) &= -\cos((\hat{B}\hat{A}\hat{C}) + (\hat{A}\hat{B}\hat{C})) = \sin(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) - \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \\ \Rightarrow \sin(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) &= \cos(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) + \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}).\end{aligned}\tag{2.101}$$

Substituindo (2.101) em (2.100), obtemos que

$$\begin{aligned}\cot(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \cot(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \cot(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) &= \\ &= \frac{\sin(\hat{A}\hat{C}\hat{B})(\sin(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}))}{\sin(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} \\ &+ \frac{(\cos(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) + \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C})) \cdot \cos(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}{\sin(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} = \\ &= \frac{\sin(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) + \cos^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) + \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}{\sin(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} \\ &= \frac{\sin^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) + \cos^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) + \cos(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}{\sin(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \sin(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}\end{aligned}\tag{2.102}$$

Substituindo (2.93) e (2.94) em (2.102), concluímos que

$$\cot(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \cot(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \cot(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) = \frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{7}}{8}} = \sqrt{7}.\tag{2.103}$$

A relação trigonométrica l segue de (2.93) e (2.96). De fato,

$$\begin{aligned}\csc^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \csc^2(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \csc^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) &= \\ &= \frac{1}{\sin^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C})} + \frac{1}{\sin^2(\hat{A}\hat{B}\hat{C})} + \frac{1}{\sin^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} = \\ &= \frac{\sin^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin^2(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \sin^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) + \sin^2(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \sin^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B})}{\sin^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) \cdot \sin^2(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \cdot \sin^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B})} = \\ &= \frac{7}{\frac{8}{64}} = 8.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\csc^2(\hat{B}\hat{A}\hat{C}) + \csc^2(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) + \csc^2(\hat{A}\hat{C}\hat{B}) = 8.\tag{2.104}$$

A relação trigonométrica m) pode ser provada a partir de (2.97) e (2.99):

$$\begin{aligned} \sec^2(\widehat{BAC}) + \sec^2(\widehat{ABC}) + \sec^2(\widehat{ACB}) &= \\ &= \frac{1}{\cos^2(\widehat{BAC})} + \frac{1}{\cos^2(\widehat{ABC})} + \frac{1}{\cos^2(\widehat{ACB})} = \\ &= \frac{\cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) + \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB})}{\cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB})} = \\ &= \frac{3}{\frac{8}{1}} = 24. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sec^2(\widehat{BAC}) + \sec^2(\widehat{ABC}) + \sec^2(\widehat{ACB}) = 24. \quad (2.105)$$

A relação trigonométrica n) é consequência de (2.104):

$$\begin{aligned} \cot^2(\widehat{BAC}) + \cot^2(\widehat{ABC}) + \cot^2(\widehat{ACB}) &= \\ &= \csc^2(\widehat{BAC}) - 1 + \csc^2(\widehat{ABC}) - 1 + \csc^2(\widehat{ACB}) - 1 = \\ &= (\csc^2(\widehat{BAC}) + \csc^2(\widehat{ABC}) + \csc^2(\widehat{ACB})) - 3 = 8 - 3 = 5. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cot^2(\widehat{BAC}) + \cot^2(\widehat{ABC}) + \cot^2(\widehat{ACB}) = 5. \quad (2.106)$$

A relação trigonométrica o) segue diretamente de (2.105):

$$\begin{aligned} \tan^2(\widehat{BAC}) + \tan^2(\widehat{ABC}) + \tan^2(\widehat{ACB}) &= \\ &= \sec^2(\widehat{BAC}) - 1 + \sec^2(\widehat{ABC}) - 1 + \sec^2(\widehat{ACB}) - 1 = \\ &= (\sec^2(\widehat{BAC}) + \sec^2(\widehat{ABC}) + \sec^2(\widehat{ACB})) - 3 = 24 - 3 = 21. \end{aligned}$$

A relação trigonométrica p) é provada a partir de (2.105), (2.98) e (2.97):

$$\begin{aligned} \sec^4(\widehat{BAC}) + \sec^4(\widehat{ABC}) + \sec^4(\widehat{ACB}) &= (\sec^2(\widehat{BAC}) + \sec^2(\widehat{ABC}) + \sec^2(\widehat{ACB}))^2 + \\ &- 2 \cdot (\sec^2(\widehat{BAC}) \cdot \sec^2(\widehat{ABC}) + \sec^2(\widehat{BAC}) \cdot \sec^2(\widehat{ACB}) + \sec^2(\widehat{ABC}) \cdot \sec^2(\widehat{ACB})) = \\ &= 24^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC})} + \frac{1}{\cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB})} + \frac{1}{\cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB})} \right) = \\ &= 24^2 - 2 \cdot \left(\frac{\cos^2(\widehat{BAC}) + \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{ACB})}{\cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB})} \right) = 576 - 2 \cdot \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{64}} = 416. \end{aligned}$$

Por (2.98) e (2.99), temos a prova da relação trigonométrica q):

$$\begin{aligned} \cos^4(\widehat{BAC}) + \cos^4(\widehat{ABC}) + \cos^4(\widehat{ACB}) &= (\cos^2(\widehat{BAC}) + \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{ACB}))^2 + \\ &- 2 \cdot (\cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + \cos^2(\widehat{BAC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) + \cos^2(\widehat{ABC}) \cdot \cos^2(\widehat{ACB})) = \\ &= \left(\frac{5}{4} \right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

A relação trigonométrica r) segue de (2.95) e (2.96):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4(B\hat{A}C) + \operatorname{sen}^4(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^4(A\hat{C}B) &= (\operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B))^2 + \\ &- 2 \cdot (\operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) + \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B)) = \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{16}. \end{aligned}$$

A relação trigonométrica s) será provada a partir de (2.93), (2.95) e (2.106):

$$\begin{aligned} \operatorname{csc}^4(B\hat{A}C) + \operatorname{csc}^4(A\hat{B}C) + \operatorname{csc}^4(A\hat{C}B) &= (\operatorname{csc}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{csc}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{csc}^2(A\hat{C}B))^2 + \\ &- 2 \cdot (\operatorname{csc}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{csc}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{csc}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{csc}^2(A\hat{C}B) + \operatorname{csc}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{csc}^2(A\hat{C}B)) \\ &= (3 + 5)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B)}{\operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B)} \right) = 64 - 2 \cdot \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{64}} = 32. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos provar a relação trigonométrica t):

$$\begin{aligned} \operatorname{sec}(2 \cdot (B\hat{A}C)) + \operatorname{sec}(2 \cdot (A\hat{B}C)) + \operatorname{sec}(2 \cdot (A\hat{C}B)) &= \\ \frac{1}{\cos(2 \cdot (B\hat{A}C))} + \frac{1}{\cos(2 \cdot (A\hat{B}C))} + \frac{1}{\cos(2 \cdot (A\hat{C}B))} &= \\ \frac{\cos(2 \cdot (A\hat{B}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{C}B)) + \cos(2 \cdot (B\hat{A}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{C}B)) + \cos(2 \cdot (B\hat{A}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{B}C))}{\cos(2 \cdot (B\hat{A}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{B}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{C}B))} &= \end{aligned} \quad (2.107)$$

Mas, por (2.93), (2.95) e (2.96), temos:

$$\begin{aligned} \cos(2 \cdot (B\hat{A}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{B}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{C}B)) &= \\ = (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C)) \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C)) \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B)) &= \\ = (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C)) \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + 4 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B)) &= \\ = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + 4 \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) + \\ + 4 \cdot \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) + 4 \cdot \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \\ - 8 \cdot \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) &= \\ = 1 - 2 \cdot (\operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B)) + \\ + 4 \cdot (\operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) + \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) + \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B)) + \\ - 8 \cdot \operatorname{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \operatorname{sen}^2(A\hat{C}B) &= \\ = 1 - 2 \cdot \frac{7}{4} + 4 \cdot \frac{7}{8} - 8 \cdot \frac{7}{64} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\cos(2 \cdot (B\hat{A}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{B}C)) \cdot \cos(2 \cdot (A\hat{C}B)) = \frac{1}{8}. \quad (2.108)$$

Além disso, por (2.95) e (2.96), temos que

$$\begin{aligned}
& \cos(2 \cdot (\widehat{ABC})) \cdot \cos(2 \cdot (\widehat{ACB})) + \cos(2 \cdot (\widehat{BAC})) \cdot \cos(2 \cdot (\widehat{ACB})) + \cos(2 \cdot (\widehat{BAC})) \cdot \cos(2 \cdot (\widehat{ABC})) = \\
& = (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC})) \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})) + (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC})) \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})) + \\
& + (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC})) \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC})) = \\
& = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + 4 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) + 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) + \\
& - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + 4 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) + 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \\
& + 4 \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) = \\
& = 3 - 4 \cdot (\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})) + \\
& + 4 \cdot (\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})) = \\
& = 3 - 4 \cdot \frac{7}{4} + 4 \cdot \frac{7}{8} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
& \cos(2 \cdot (\widehat{ABC})) \cdot \cos(2 \cdot (\widehat{ACB})) + \cos(2 \cdot (\widehat{BAC})) \cdot \cos(2 \cdot (\widehat{ACB})) + \\
& + \cos(2 \cdot (\widehat{BAC})) \cdot \cos(2 \cdot (\widehat{ABC})) = -\frac{1}{2}. \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.108) e (2.109) em (2.107), concluímos que

$$\sec(2 \cdot (\widehat{BAC})) + \sec(2 \cdot (\widehat{ABC})) + \sec(2 \cdot (\widehat{ACB})) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = -4.$$

□

Como consequências de algumas destas relações trigonométricas, apresentamos mais cinco proposições que exploram propriedades geométricas de um triângulo heptagonal.

Proposição 2.21. *No triângulo heptagonal $\triangle ABC$, temos que:*

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = 5.$$

Demonstração. Segue de (2.41), (2.42), (2.43) e (2.95) que

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} &= 4 \cdot \cos^2(\widehat{BAC}) + 4 \cdot \cos^2(\widehat{ABC}) + 4 \cdot \cos^2(\widehat{ACB}) \\
&= 4 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(\widehat{BAC})) + 4 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC})) + 4 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})) \\
&= 12 - 4 \cdot (\operatorname{sen}^2(\widehat{BAC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ABC}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{ACB})) \\
&= 12 - 7 = 5
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.22. *A soma dos quadrados das medidas das alturas do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é igual à metade da soma dos quadrados das medidas dos lados deste triângulo. Ou seja,*

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

onde h_a, h_b e h_c denotam as medidas das alturas do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ relativas aos vértices A, B e C , respectivamente, como está ilustrado na Figura 45.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \text{sen}(A\hat{B}C) &= \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = \text{sen}(A\hat{B}C) \cdot c \\ \text{sen}(B\hat{A}C) &= \frac{h_b}{c} \Rightarrow h_b = \text{sen}(B\hat{A}C) \cdot c \\ \text{sen}(A\hat{B}C) &= \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = \text{sen}(A\hat{B}C) \cdot a. \end{aligned}$$

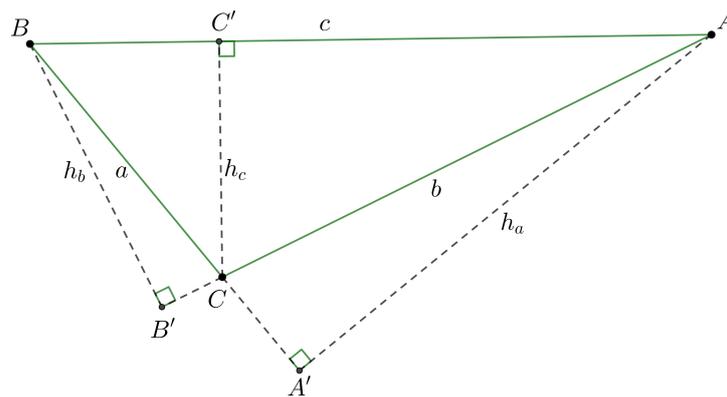


Figura 45: Triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e suas alturas h_a, h_b e h_c .

Assim,

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \text{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot c^2 + \text{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot c^2 + \text{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot a^2. \quad (2.110)$$

Segue da lei dos senos que: $a = \frac{\text{sen}(\widehat{BAC}) \cdot b}{\text{sen}(\widehat{ABC})}$ e $c = \frac{\text{sen}(\widehat{ACB}) \cdot b}{\text{sen}(\widehat{ABC})}$. Assim, por (2.110) e (2.96), obtemos:

$$\begin{aligned} h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 &= \\ &= \frac{\text{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \text{sen}^2(\widehat{ACB}) \cdot b^2 + \text{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \text{sen}^2(\widehat{ACB}) \cdot b^2 + \text{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \text{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot b^2}{\text{sen}^2(\widehat{ABC})} = \\ &= \frac{b^2 \cdot (\text{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \text{sen}^2(\widehat{ABC}) + \text{sen}^2(\widehat{BAC}) \cdot \text{sen}^2(\widehat{ACB}) + \text{sen}^2(\widehat{ABC}) \cdot \text{sen}^2(\widehat{ACB}))}{\text{sen}^2(\widehat{ABC})} \\ &= \frac{7}{8} \cdot \frac{b^2}{\text{sen}^2(\widehat{ABC})}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{7}{8} \cdot \frac{b^2}{\text{sen}^2(\widehat{ABC})}. \quad (2.111)$$

Pela lei dos senos, $\text{sen}(\widehat{ABC}) = \frac{b}{2 \cdot R}$. Logo, (2.111) torna-se

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{7}{8} \cdot \frac{b^2}{\frac{b^2}{4 \cdot R^2}} = \frac{7 \cdot R^2}{2}. \quad (2.112)$$

Segue da Proposição 2.13 e de (2.112) que

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{7}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{7} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

□

Proposição 2.23. A cotangente do ângulo de Brocard do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é igual a $\sqrt{7}$.

Demonstração. Sejam α e T a medida do ângulo de Brocard e o primeiro ponto de Brocard do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, respectivamente, como está ilustrado na Figura 46.

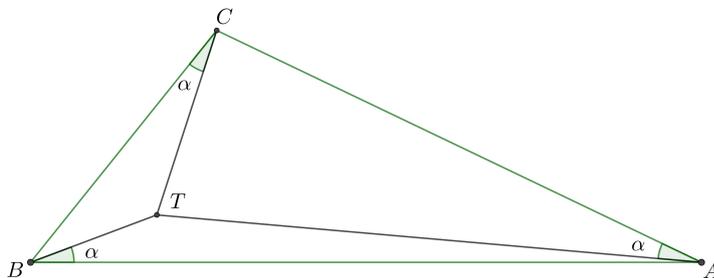


Figura 46: Ângulo e ponto de Brocard do triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

De acordo com a Proposição 1.23 e por (2.103), concluímos que

$$\cot(\alpha) = \cot(B\hat{A}C) + \cot(A\hat{B}C) + \cot(A\hat{C}B) = \sqrt{7}.$$

□

Proposição 2.24. Para o triângulo heptagonal $\triangle ABC$, vale que:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{2}{R^2}.$$

Demonstração. Segue da lei dos senos que

$$a = 2 \cdot R \cdot \text{sen}(B\hat{A}C)$$

$$b = 2 \cdot R \cdot \text{sen}(A\hat{B}C)$$

$$c = 2 \cdot R \cdot \text{sen}(A\hat{C}B).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \\ &= \frac{1}{4 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2(B\hat{A}C)} + \frac{1}{4 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2(A\hat{B}C)} + \frac{1}{4 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2(A\hat{C}B)} = \\ &= \frac{\text{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \text{sen}^2(A\hat{B}C) + \text{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \text{sen}^2(A\hat{C}B) + \text{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \text{sen}^2(A\hat{C}B)}{4 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2(B\hat{A}C) \cdot \text{sen}^2(A\hat{B}C) \cdot \text{sen}^2(A\hat{C}B)}. \end{aligned}$$

Portanto, por (2.93) e (2.96),

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{\frac{7}{8}}{4 \cdot R^2 \cdot \frac{7}{64}} = \frac{2}{R^2}.$$

□

Proposição 2.25. Se A', B', C' são os pés das alturas correspondentes aos vértices A, B, C do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, respectivamente, então

$$BA' \cdot A'C = \frac{a \cdot c}{4}, \quad CB' \cdot B'A = \frac{a \cdot b}{4} \quad \text{e} \quad AC' \cdot C'B = \frac{b \cdot c}{4}.$$

Demonstração. A medida BA' será determinada a partir do triângulo retângulo $\triangle AA'B$, ilustrado na Figura 45, e de (2.42):

$$\cos(A\hat{B}C) = \frac{BA'}{c} \Rightarrow BA' = c \cdot \cos(A\hat{B}C) = c \cdot \frac{c}{2 \cdot b} = \frac{c^2}{2 \cdot b}. \quad (2.113)$$

Como o ângulo $\angle A'CA$ é suplementar ao ângulo $\angle ACB$, que mede $\frac{4 \cdot \pi}{7}$, então $\angle A'CA = \frac{3 \cdot \pi}{7}$. Assim, por (2.8) e (2.43), temos:

$$\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{A'C}{b} \Rightarrow -\cos(\angle A'CB) = \frac{A'C}{b} \Rightarrow A'C = -b \cdot \cos(\angle A'CB) = \frac{a \cdot b}{2 \cdot c}. \quad (2.114)$$

Multiplicando (2.113) e (2.114), obtemos que

$$BA' \cdot A'C = \frac{c^2}{2 \cdot b} \cdot \frac{a \cdot b}{2 \cdot c} = \frac{a \cdot c}{4}.$$

Em relação ao triângulo $\triangle BB'C$, notamos que o ângulo $\angle B'CB$ mede $\frac{3 \cdot \pi}{7}$, pois ele é suplementar ao ângulo $\angle ACB$. Logo, por (2.8) e (2.43), temos:

$$\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{7}\right) = -\cos(\angle A'CB) = \frac{CB'}{a} \Rightarrow CB' = -a \cdot \cos(\angle A'CB) = \frac{a^2}{2 \cdot c}. \quad (2.115)$$

A medida $B'A$ será determinada a partir do triângulo retângulo $\triangle AB'B$, ilustrado na Figura 45, e de (2.43):

$$\cos(\angle B'AC) = \frac{B'A}{c} \Rightarrow B'A = c \cdot \cos(\angle B'AC) = c \cdot \frac{b}{2 \cdot a} = \frac{b \cdot c}{2 \cdot a}. \quad (2.116)$$

Multiplicando (2.115) e (2.116), obtemos

$$CB' \cdot B'A = \frac{a^2}{2 \cdot c} \cdot \frac{b \cdot c}{2 \cdot a} = \frac{a \cdot b}{4}.$$

Finalmente, a medida AC' será determinada a partir do triângulo retângulo $\triangle AC'C$, ilustrado na Figura 45, e de (2.41):

$$\cos(\angle B'AC) = \frac{AC'}{b} \Rightarrow AC' = b \cdot \cos(\angle B'AC) = b \cdot \frac{b}{2 \cdot a} = \frac{b^2}{2 \cdot a}. \quad (2.117)$$

Já a medida $C'B$, vamos determinar através do triângulo $\triangle BCC'$ e de (2.42):

$$\cos(\angle A'BC) = \frac{C'B}{a} \Rightarrow C'B = a \cdot \cos(\angle A'BC) = a \cdot \frac{c}{2 \cdot b} = \frac{a \cdot c}{2 \cdot b}. \quad (2.118)$$

Multiplicando (2.117) e (2.118), concluímos que

$$AC' \cdot C'B = \frac{b^2}{2 \cdot a} \cdot \frac{a \cdot c}{2 \cdot b} = \frac{b \cdot c}{4}.$$

□

OUTRAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO HEPTAGONAL

Este capítulo explora propriedades do triângulo heptagonal, apresentadas no artigo [4]. Com exceção da Proposição 3.7, os outros resultados não estão diretamente relacionados à trigonometria de um triângulo. Observamos que continuamos nos baseando nas condições da Observação 2.7.

Proposição 3.1. *Se A', B' e C' são os pés das alturas relativas aos vértices A, B, C do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, respectivamente, como está ilustrado na Figura 47, o triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ é semelhante ao triângulo $\triangle ABC$ e seu perímetro é igual à metade do perímetro do triângulo $\triangle ABC$.*

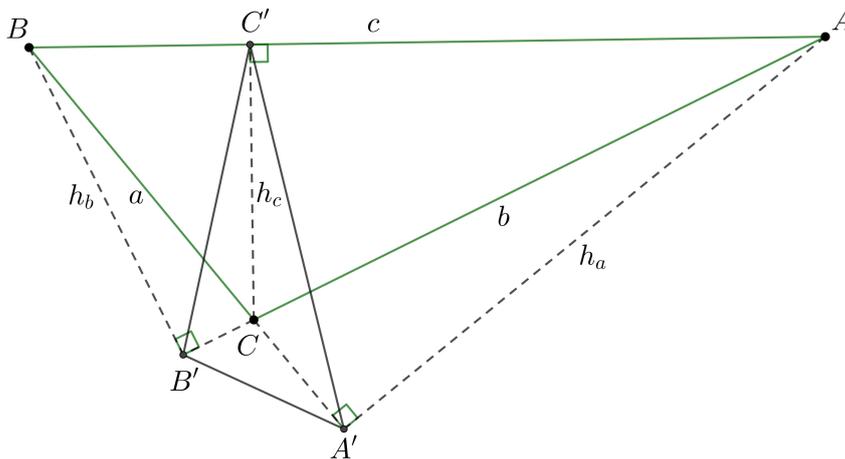


Figura 47: Triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ do triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

Demonstração. Começamos calculando a medida do ângulo $\angle A'C'B'$. Para isso, obtemos

$$B'\hat{C}B = \pi - A\hat{C}B = \pi - \frac{4 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}. \quad (3.1)$$

De acordo com a Proposição 1.15, o quadrilátero $CB'BC'$ é inscrito, pois como os ângulos opostos $\angle CC'B$ e $\angle CB'B$ são retos, sua soma é igual a π . Pela Observação 1.16 e por (3.1), podemos dizer que

$$\begin{aligned} C\hat{C}'B' &= C\hat{B}B' \\ &= \pi - C\hat{B}'B - B'\hat{C}B \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot \pi}{7} \\ &= \frac{\pi}{14}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Segue de $C\hat{A}'A = A\hat{C}'C = \frac{\pi}{2}$ que o quadrilátero $A'AC'C$ é inscrito. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} A'\hat{C}'C &= A'\hat{A}C = \pi - A\hat{A}'C - A\hat{C}A' \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - (\pi - A\hat{C}B) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot \pi}{7} = \frac{\pi}{14}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por (3.2) e (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} A'\hat{C}'B' &= A'\hat{C}'C + C\hat{C}'B' \\ &= \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{7}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De modo análogo, determinamos a medida do ângulo $\angle A'B'C'$.

$$\begin{aligned} C'\hat{B}'B &= C'\hat{C}B = \pi - C\hat{C}'B - C'\hat{B}C \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{14}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por (3.5),

$$\begin{aligned} C\hat{B}'C' &= C\hat{B}'B - C'\hat{B}'B \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot \pi}{14} = \frac{2 \cdot \pi}{7}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Uma vez que $A\hat{A}'B = A\hat{B}'B = \frac{\pi}{2}$, segue que o quadrilátero $AA'B'B$ é igualmente inscritível. Por (3.3), temos:

$$\begin{aligned} A'\hat{A}B + A'\hat{B}'B &= \pi \\ A'\hat{A}C + C\hat{A}B + A'\hat{B}'C + C\hat{B}'B &= \pi \\ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7} + A'\hat{B}'C + \frac{\pi}{2} &= \pi \\ A'\hat{B}'C &= \frac{2 \cdot \pi}{7}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por (3.6) e (3.7), obtemos

$$A'\hat{B}'C' = A'\hat{B}'C + C\hat{B}'C' = \frac{2 \cdot \pi}{7} + \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{4 \cdot \pi}{7}. \tag{3.8}$$

Assim, por (3.4), (3.8) e pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, temos que são semelhantes os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, em relação à correspondência $ABC \longleftrightarrow C'A'B'$ entre seus vértices.

Com relação a segunda afirmação da Proposição, na qual diz que o perímetro do triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ equivale a metade do perímetro do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, para justificar essa afirmação temos que saber que o triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ está inscrito na circunferência de nove pontos do triângulo $\triangle ABC$ - podemos ver a demonstração das propriedades da circunferência de nove pontos na Proposição 1.19 - e o raio da circunferência de nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$ (Proposição 1.21). Assim, os lados do triângulo $\triangle A'B'C'$ também serão iguais a metade dos lados correspondentes ao triângulo $\triangle ABC$. Também podemos afirmar que o triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ é congruente ao triângulo medial do triângulo $\triangle ABC$ (o triângulo medial está descrito na Proposição 1.1) . \square

Proposição 3.2. *O raio da circunferência ex-inscrita relativa ao vértice A do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é igual ao raio da circunferência de nove pontos do mesmo triângulo.*

Demonstração. Dados os triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e seus elementos: o triângulo órtico $\triangle A'B'C'$, a circunferência de nove pontos com centro O_N , a circunferência ex-inscrita relativa ao vértice A com centro I_a e a bissetriz $\overleftrightarrow{AI_a}$ do ângulo $\angle BAC$. Também são dados M, N e P , que são os pontos de tangência da circunferência ex-inscrita com $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ e \overrightarrow{AB} , respectivamente, conforme ilustra a Figura 48.

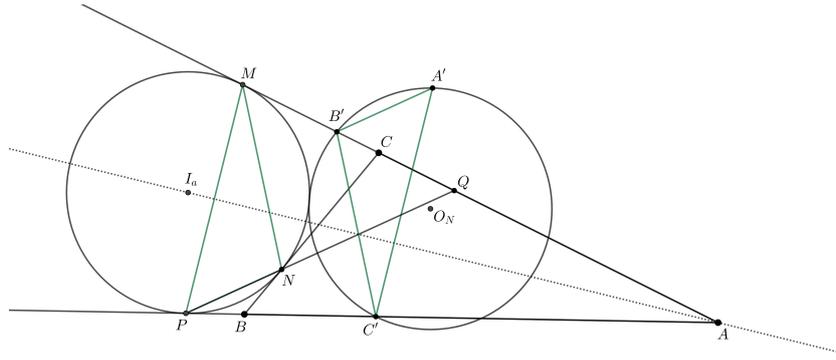


Figura 48: Circunferência ex-inscrita ao triângulo $\triangle ABC$ oposta ao vértice A e outros elementos

Os triângulos $\triangle AMI_a$ e $\triangle API_a$ são congruentes: $A\hat{M}I_a = A\hat{P}I_a = \frac{\pi}{2}$, $PI_a = MI_a$ e compartilham a mesma hipotenusa, $\overline{AI_a}$. Então, pelo caso de congruência entre triângulos retângulos, $\triangle AMI_a \cong \triangle API_a$.

Consequentemente, o triângulo $\triangle AMP$ é isósceles de base \overline{MP} e a bissetriz $\overleftrightarrow{AI_a}$ é perpendicular ao segmento \overline{MP} . Como o ângulo $\angle MAP$ é congruente ao ângulo $\angle BAC$, $M\hat{A}P = \frac{\pi}{7}$ e $A\hat{P}M = A\hat{M}P = \frac{3 \cdot \pi}{7}$.

Por (3.3), $A'\hat{C}'C = \frac{\pi}{14}$ e $A\hat{C}'C = \frac{\pi}{2}$, já que C' é o pé da altura relativa ao vértice C . A medida do ângulo $\angle AC'A'$ será igual a $A\hat{C}'C - A'\hat{C}'C = \frac{3 \cdot \pi}{7}$. Portanto, as medidas dos ângulos $\angle APM$ e $\angle AC'A'$ são iguais e os segmentos \overline{MP} e $\overline{A'C'}$ são paralelos.

Vamos determinar as medidas dos ângulos do triângulo $\triangle MNP$. Observando o triângulo $\triangle PBN$:

- $P\hat{B}N = \pi - A\hat{B}C = \pi - \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{5 \cdot \pi}{7}$;
- $\overline{PB} \cong \overline{BN}$, ou seja, o triângulo $\triangle PBN$ é isósceles;
- $N\hat{P}B = P\hat{N}B = \left(\pi - \frac{5 \cdot \pi}{7}\right) \div 2 = \frac{\pi}{7}$.

Dessas observações decorre que: $M\hat{P}N = A\hat{P}M - N\hat{P}B = \frac{3 \cdot \pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{2 \cdot \pi}{7}$.

Analisando agora o triângulo $\triangle CMN$:

- $M\hat{C}N = \pi - A\hat{C}B = \pi - \frac{4 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}$;
- $\overline{CM} \cong \overline{CN}$, ou seja, o triângulo $\triangle CMN$ é isósceles;
- $C\hat{M}N = C\hat{N}M = \left(\pi - \frac{3 \cdot \pi}{7}\right) \div 2 = \frac{2 \cdot \pi}{7}$.

Diante dessas afirmações, temos: $N\hat{M}P = A\hat{M}P - C\hat{M}N = \frac{3 \cdot \pi}{7} - \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{\pi}{7}$.

Sabendo as medidas dos ângulos $\angle MPN$ e $\angle NMP$, podemos determinar a medida do ângulo $\angle MNP$: $M\hat{N}P = \pi - M\hat{P}N - N\hat{M}P = \pi - \frac{2 \cdot \pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{4 \cdot \pi}{7}$.

Portanto, o triângulo $\triangle MNP$ é heptagonal. Como os segmentos \overline{MP} e $\overline{A'C'}$ são paralelos, então: $\overline{NP} \parallel \overline{A'B'}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{B'C'}$.

Prolongando o segmento \overline{NP} , ele encontrará o lado \overline{AC} no ponto Q , conforme ilustrado na Figura 48.

Observando o triângulo $\triangle MQP$, temos que $Q\hat{M}P = \frac{3 \cdot \pi}{7}$ e $M\hat{P}Q = \frac{2 \cdot \pi}{7}$. Logo, $M\hat{Q}P = \frac{2 \cdot \pi}{7}$. Portanto, o triângulo $\triangle MQP$ é isósceles e $\overline{MP} \equiv \overline{MQ}$.

Em relação ao triângulo $\triangle QAP$ notamos que $A\hat{P}Q = N\hat{P}B = \frac{\pi}{7}$ e $Q\hat{A}P = \frac{\pi}{7}$. Ou seja, $A\hat{Q}P = \pi - A\hat{P}Q - Q\hat{A}P = \pi - \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{5 \cdot \pi}{7}$. Portanto, esse triângulo é também isósceles e $\overline{PQ} \equiv \overline{AQ}$.

O triângulo $\triangle MQN$ possui os ângulos com medidas:

- $M\hat{Q}N = \pi - A\hat{Q}P = \pi - \frac{5 \cdot \pi}{7} = \frac{2 \cdot \pi}{7}$;
- $Q\hat{M}N = A\hat{M}P - N\hat{M}P = \frac{3 \cdot \pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{2 \cdot \pi}{7}$;
- $M\hat{N}Q = \pi - M\hat{Q}N - Q\hat{M}N = \pi - \frac{2 \cdot \pi}{7} - \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}$.

Portanto, o triângulo $\triangle MQN$ é isósceles e $\overline{MN} \equiv \overline{NQ}$.

Através das especificidades dos triângulos $\triangle MAP$, $\triangle QAP$ e $\triangle MQN$ podemos dizer que:

$$AP = AM = AQ + QM = QP + QM = QN + NP + QM = MN + NP + PM.$$

Logo, a medida AP é igual ao perímetro do triângulo $\triangle MNP$.

Ainda sobre o segmento \overline{AP} , vamos determinar a sua medida usando como parâmetro as medidas dos lados do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, sendo $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ e $p = \frac{a+b+c}{2}$. Já sabemos que $AP = AM$. Então:

$$\begin{aligned} 2 \cdot AP &= AP + AM = (AB + BP) + (AC + CM) = (AB + AC) + (BP + CM) \\ &= (b + c) + (BN + CN) = b + c + a \\ AP &= \frac{a + b + c}{2}. \end{aligned}$$

Isto posto, AP é igual ao semiperímetro do triângulo $\triangle ABC$.

Na Proposição 3.1 foi provado que o perímetro do triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ equivale a metade do perímetro do triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

Então AP é igual ao perímetro do triângulo órtico $\triangle A'B'C'$, assim como ao perímetro do triângulo $\triangle MNP$. Como os triângulos $\triangle A'B'C'$ e o triângulo $\triangle MNP$ são heptagonais e possuem o mesmo perímetro, a circunferência circunscrita a eles possuem o mesmo raio. Assim, o raio da circunferência ex-inscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$ oposta ao vértice A e o raio da circunferência de nove pontos desse mesmo triângulo são iguais.

□

Proposição 3.3. *Em relação ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$, isto é, $B\hat{A}C = \frac{\pi}{7}$, $A\hat{B}C = \frac{2 \cdot \pi}{7}$ e $B\hat{C}A = \frac{4 \cdot \pi}{7}$, sejam \overrightarrow{BF} e \overrightarrow{CG} as bissetrizes internas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente, com $A - F - C$ e $A - G - B$, e \overrightarrow{AL} a bissetriz externa do ângulo $\angle BAC$, com $B - C - L$. Então*

$$BF = AB - BC, \quad CG = CA - BC, \quad AL = CA + AB.$$

Demonstração. Observamos que como o maior ângulo de um triângulo está oposto o maior lado, então $AB > AC > BC$. Começamos mostrando que $BF = AB - BC$. Como $A\hat{B}F = B\hat{A}F = \frac{\pi}{7}$, temos que o triângulo $\triangle ABF$ é isósceles, com $AF = BF$. Pelo Teorema da bissetriz interna (Proposição 1.6), temos que

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FC}.$$

Mas, $AF = BF$ e $FC = AC - AF = AC - BF$. Logo,

$$\frac{AB}{BF} = \frac{BC}{AC - BF},$$

donde

$$BF = \frac{AC \cdot AB}{BC + AB} = \frac{AC \cdot AB}{BC + AB} \cdot \frac{AB - BC}{AB - BC}.$$

Sendo $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. mostramos que

$$BF = \frac{b \cdot c \cdot (c - a)}{c^2 - a^2}.$$

Por (2.49), temos que

$$BF = \frac{b \cdot c \cdot (c - a)}{b \cdot c} = c - a.$$

Ou seja, $BF = AB - BC$. Analogamente, obtém-se que $CG = CA - BC$.

Como $\widehat{CAL} = \widehat{ACL} = \frac{3 \cdot \pi}{7}$, temos que o triângulo $\triangle ALC$ é isósceles, com $AL = LC$.
 Pelo Teorema da bissetriz externa (Proposição 1.7), temos que

$$\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}.$$

Mas, $AL = LC$ e $BL = BC + CL = a + AL$. Logo,

$$\frac{c}{a + AL} = \frac{b}{AL},$$

donde

$$AL = \frac{a \cdot b}{c - b} = \frac{a \cdot b}{c - b} \cdot \frac{c + b}{c + b}.$$

Mostramos que

$$AL = \frac{a \cdot b \cdot (c + b)}{c^2 - b^2}.$$

Por (2.49), temos que

$$AL = \frac{a \cdot b \cdot (c + b)}{a \cdot b} = c + b.$$

Ou seja, $AL = AB + AC$.

□

Proposição 3.4. O triângulo $\triangle II_bI_c$ que é formado pelo incentro do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e pelos ex-incentros relativos aos vértices B e C é semelhante ao triângulo $\triangle ABC$ (figura 49).

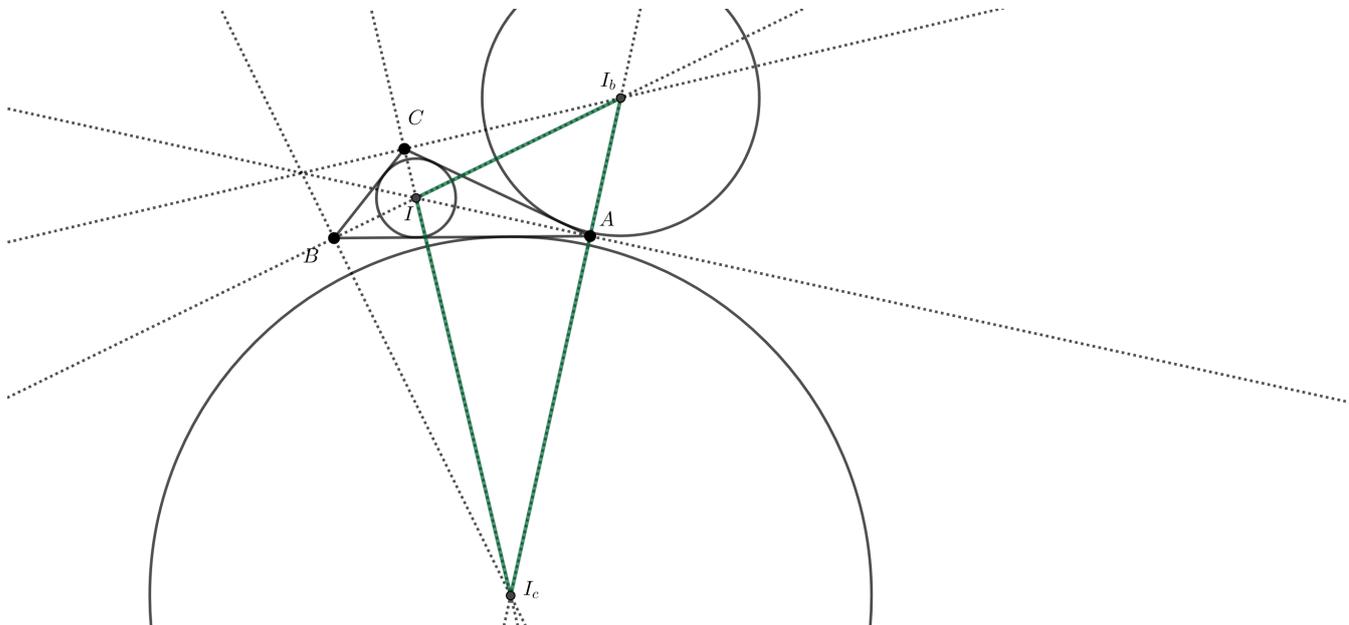


Figura 49: Triângulo $\triangle II_bI_c$

Demonstração. Observando a Figura 49, que além do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e do triângulo $\triangle I_b I_c$, temos traçados as retas em pontilhado que correspondem as bissetrizes internas e externas dos ângulos formados pelos vértices do triângulo $\triangle ABC$. A medida do ângulo $\angle BIC$ é igual a $\frac{4 \cdot \pi}{7}$, pois $\widehat{I_b C} = \frac{\pi}{7}$ e $\widehat{I_c B} = \frac{2 \cdot \pi}{7}$. Como os ângulos $\angle BIC$ e $\angle I_b I_c$ têm a mesma medida por serem opostos pelo vértice, o ângulo $\angle I_b I_c$ também mede $\frac{4 \cdot \pi}{7}$.

A bissetriz externa do vértice C passa por I_b , pois \overleftrightarrow{BC} e \overline{AC} são tangentes à circunferência ex-inscrita oposta ao vértice B . O mesmo ocorre com a bissetriz externa ao vértice A , pois \overleftrightarrow{AB} também é tangente a mesma circunferência já mencionada.

Sobre o quadrilátero $CI A I_b$ podemos dizer que ele é inscritível, pois os ângulos $\angle I C I_b$ e $\angle I A I_b$ são retos. Ambos os ângulos são formados pela intersecção das bissetrizes internas e externas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BAC$.

Dessa forma, a medida do ângulo $\angle I I_b A$ é igual a medida do ângulo $\angle I C A$, que é igual a $\frac{2 \cdot \pi}{7}$.

Sabendo que $I_b \widehat{I_c} = \frac{4 \cdot \pi}{7}$ e $I \widehat{I_b} A = \frac{2 \cdot \pi}{7}$, é fácil concluir que $I \widehat{I_c} I_b = \frac{\pi}{7}$. Portanto, o triângulo $\triangle I I_b I_c$ é heptagonal. \square

Lema 3.5. *O triângulo tangencial do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é também um triângulo heptagonal.*

Demonstração. Pela Proposição 1.35, os triângulos tangencial e órtico de um mesmo triângulo são semelhantes; na Proposição 3.1 foi demonstrado que o triângulo órtico de um triângulo heptagonal também é um triângulo heptagonal. Portanto, o triângulo tangencial de um triângulo heptagonal também é heptagonal.

Vamos determinar quais os valores dos ângulos do triângulo tangencial.

Dado o triângulo heptagonal $\triangle ABC$ inscrito numa circunferência com centro O . O triângulo tangencial será definido pelas retas tangentes à circunferência, sendo r tangente em A , s tangente em B e t tangente em C . Os vértices do triângulo tangencial serão $T_1 = r \cap s$, $T_2 = s \cap t$ e $T_3 = r \cap t$. O triângulo $\triangle T_1 T_2 T_3$ é o triângulo tangencial do triângulo heptagonal $\triangle ABC$. A construção pode ser observada na Figura 50.

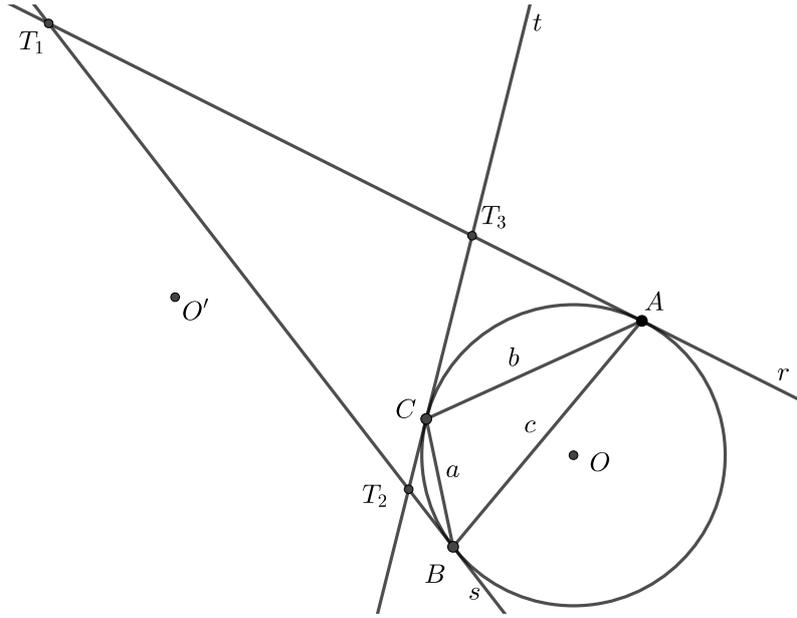


Figura 50: Triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e seu triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$.

De acordo com o Teorema do ângulo de segmento (Proposição 1.11), $T_2\hat{B}C = \frac{1}{2} \cdot B\hat{O}C$ e pelo Teorema do ângulo inscrito (Proposição 1.9) $B\hat{A}C = \frac{1}{2} \cdot B\hat{O}C$. Portanto, $T_2\hat{B}C = B\hat{A}C = \frac{\pi}{7}$. De maneira análoga, $T_2\hat{C}B = B\hat{A}C = \frac{\pi}{7}$. Analisando o triângulo $\triangle T_2BC$ temos:

$$B\hat{T}_2C = \pi - T_2\hat{B}C - T_2\hat{C}B = \pi - \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{5 \cdot \pi}{7}.$$

Como o ângulo $\angle T_1T_2T_3$ é suplementar ao ângulo $\angle BT_2C$, vamos obter:

$$T_1\hat{T}_2T_3 = \pi - B\hat{T}_2C = \pi - \frac{5 \cdot \pi}{7} = \frac{2 \cdot \pi}{7}. \quad (3.9)$$

Fazendo o mesmo tipo de análise em relação ao triângulo $\triangle T_3AC$ temos:

$$T_3\hat{A}C = T_3\hat{C}A = A\hat{B}C = \frac{2 \cdot \pi}{7}.$$

Com relação ao ângulo $\angle AT_3C$:

$$A\hat{T}_3C = \pi - T_3\hat{A}C - T_3\hat{C}A = \pi - \frac{2 \cdot \pi}{7} - \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{3 \cdot \pi}{7}.$$

Como $\angle T_1T_3T_2$ é suplementar ao ângulo $\angle AT_3C$ podemos dizer que

$$T_1\hat{T}_3T_2 = \pi - A\hat{T}_3C = \pi - \frac{3 \cdot \pi}{7} = \frac{4 \cdot \pi}{7}. \quad (3.10)$$

Com os resultados das equações (3.9) e (3.10) podemos determinar a medida do ângulo $\angle T_2T_1T_3$:

$$T_2\hat{T}_1T_3 = \pi - T_1\hat{T}_2T_3 - T_1\hat{T}_3T_2 = \pi - \frac{2 \cdot \pi}{7} - \frac{4 \cdot \pi}{7} = \frac{\pi}{7}. \quad (3.11)$$

Como $B\hat{A}C = T_2\hat{T}_1T_3 = \frac{\pi}{7}$, $A\hat{B}C = T_1\hat{T}_2T_3 = \frac{2 \cdot \pi}{7}$ e $A\hat{C}B = T_1\hat{T}_3T_2 = \frac{4 \cdot \pi}{7}$, podemos dizer que existe uma correspondência entre os pares de vértices A e T_1 , B e T_2 e C e T_3 . Os ângulos formados entre os vértices do triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ e o seu circuncentro O' será o mesmo que os vértices do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e seu circuncentro O .

Da equação (2.35) podemos tirar a seguinte relação:

$$T_2\hat{O}'T_3 = B\hat{O}C = \frac{2 \cdot \pi}{7}. \quad (3.12)$$

Em relação a equação (2.36) temos:

$$T_1\hat{O}'T_3 = A\hat{O}C = \frac{4 \cdot \pi}{7}. \quad (3.13)$$

Já da equação (2.37):

$$T_1\hat{O}'T_2 = A\hat{O}B = \frac{6 \cdot \pi}{7}. \quad (3.14)$$

□

Proposição 3.6. *O perímetro de um triângulo heptagonal é igual a metade do perímetro do seu triângulo tangencial.*

Demonstração. O lema 3.5 afirma que o triângulo heptagonal é semelhante ao seu triângulo tangencial. Dessa forma, lado c do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ é semelhante ao lado $\overline{T_1T_2}$ do triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$, já que $T_2\hat{T}_1T_3 = \frac{\pi}{7}$ (equação (3.11)) e $T_1\hat{T}_2T_3 = \frac{2 \cdot \pi}{7}$ (equação (3.9)).

Pela lei dos senos, $c = 2 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)$. Vamos demonstrar que $T_1 T_2 = 4 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)$.

Conforme ilustra a Figura 50, $T_1 T_2 = BT_1 - BT_2$. Vamos determinar as medidas de $\overline{BT_1}$ e $\overline{BT_2}$.

Observando o triângulo $\triangle ABT_1$, temos que ele é isósceles de base c , já que as retas $\overleftrightarrow{AT_1}$ e $\overleftrightarrow{BT_1}$ são tangentes na circunferência circunscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$ nos pontos A e B . Como $T_2 \hat{T}_1 T_3 = \frac{\pi}{7}$, temos que $A \hat{B} T_1 = B \hat{A} T_1 = \frac{3 \cdot \pi}{7}$ e $BT_1 = AT_1$. Lembrando que, pela lei dos senos, $a = 2 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right)$, $\cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) = -\frac{a}{2 \cdot c}$ (equação (2.43)) e $\cos \left(\frac{3 \cdot \pi}{7} \right) = -\cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)$ (equação 2.8), usaremos a lei dos cossenos para determinar BT_1 :

$$\begin{aligned}
 BT_1^2 &= AT_1^2 + c^2 - 2 \cdot AT_1 \cdot c \cdot \cos \left(\frac{3 \cdot \pi}{7} \right) \\
 BT_1^2 &= BT_1^2 + c^2 + 2 \cdot BT_1 \cdot c \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \\
 BT_1^2 &= BT_1^2 + c^2 - 2 \cdot BT_1 \cdot c \cdot \frac{a}{2 \cdot c} \\
 BT_1^2 &= BT_1^2 + c^2 - a \cdot BT_1 \\
 BT_1 &= \frac{c^2}{a} = \frac{4 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{2 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right)} = \frac{2 \cdot R \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right)} \\
 BT_1 &= \frac{4 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right)} \\
 BT_1 &= \frac{8 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right)} \\
 BT_1 &= 8 \cdot R \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right). \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Analisando o triângulo $\triangle BCT_2$, temos que ele também é isósceles, pois as retas $\overleftrightarrow{BT_2}$ e $\overleftrightarrow{CT_2}$ são tangentes à circunferência circunscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$ nos pontos B e C . O segmento a é base do triângulo $\triangle BCT_2$, $BT_2 = CT_2$, $B \hat{T}_2 C = \pi - T_1 \hat{T}_2 T_3 = \pi - \frac{2 \cdot \pi}{7} = \frac{5 \cdot \pi}{7}$ ($T_1 \hat{T}_2 T_3$ está demonstrado na equação (3.9))

e $B\hat{C}T_2 = C\hat{B}T_2 = \frac{\pi}{7}$. Lembrando que pela lei dos senos $b = 2 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)$, $\text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) = \text{sen} \left(\frac{6 \cdot \pi}{7} \right)$ (equação (2.24)), $\text{sen} \left(\frac{3 \cdot \pi}{7} \right) = \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)$ (equação (2.7)), $\cos \left(\frac{3 \cdot \pi}{7} \right) = -\cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)$ (equação (2.8)) e que $\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) = \frac{b}{2 \cdot a}$ (equação (2.41)), vamos usar a lei dos cossenos para determinar BT_2 :

$$\begin{aligned}
 BT_2^2 &= CT_2^2 + a^2 - 2 \cdot CT_2 \cdot a \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \\
 BT_2^2 &= BT_2^2 + a^2 - 2 \cdot BT_2 \cdot a \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \\
 BT_2 &= \frac{a^2}{b} = \frac{4 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{7} \right)}{2 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)} = \frac{2 \cdot R \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{7} \right)}{2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right)} \\
 BT_2 &= \frac{R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{7} \right)} = \frac{R \cdot \text{sen} \left(\frac{6 \cdot \pi}{7} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{7} \right)} = \frac{2 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{3 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{3 \cdot \pi}{7} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{7} \right)} \\
 BT_2 &= - \frac{2 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{7} \right)} = - \frac{4 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{7} \right)} \\
 BT_2 &= - \frac{8 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{7} \right)} \\
 BT_2 &= - 8 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right).
 \end{aligned}$$

Usando esse último resultado, o resultado de (3.15) e lembrando que $\text{sen} \left(\frac{5 \cdot \pi}{7} \right) = \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right)$ (equação (2.11)), vamos determinar T_1T_2 :

$$\begin{aligned}
 T_1T_2 &= BT_1 - BT_2 \\
 T_1T_2 &= 8 \cdot R \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) + 8 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \\
 T_1T_2 &= 8 \cdot R \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) + \text{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right) \right) \\
 T_1T_2 &= 8 \cdot R \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{5 \cdot \pi}{7} \right) = 8 \cdot R \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi}{7} \right) \\
 T_1T_2 &= 4 \cdot R \cdot \text{sen} \left(\frac{4 \cdot \pi}{7} \right).
 \end{aligned}$$

□

Proposição 3.7. *O circuncentro do triângulo tangencial coincide com o simétrico do circuncentro do triângulo heptagonal em relação ao seu ortocentro.*

Demonstração. Dados o triângulo heptagonal $\triangle ABC$, o seu triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ construído nas mesmas condições que na demonstração do Lema 3.5 e seu circuncentro O . Podemos acompanhar a construção dessa demonstração na Figura 51. Sendo as retas $\overleftrightarrow{AT_3}$ e $\overleftrightarrow{CT_3}$ tangentes à circunferência circunscrita ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$ e R o raio da mesma circunferência, os ângulos $\angle OCT_3$ e $\angle OAT_3$ são iguais a $\frac{\pi}{2}$ e $OA = OC = R$. Então os triângulos $\triangle OAT_3$ e $\triangle OCT_3$ são congruentes pelo caso de congruência de triângulos retângulos.

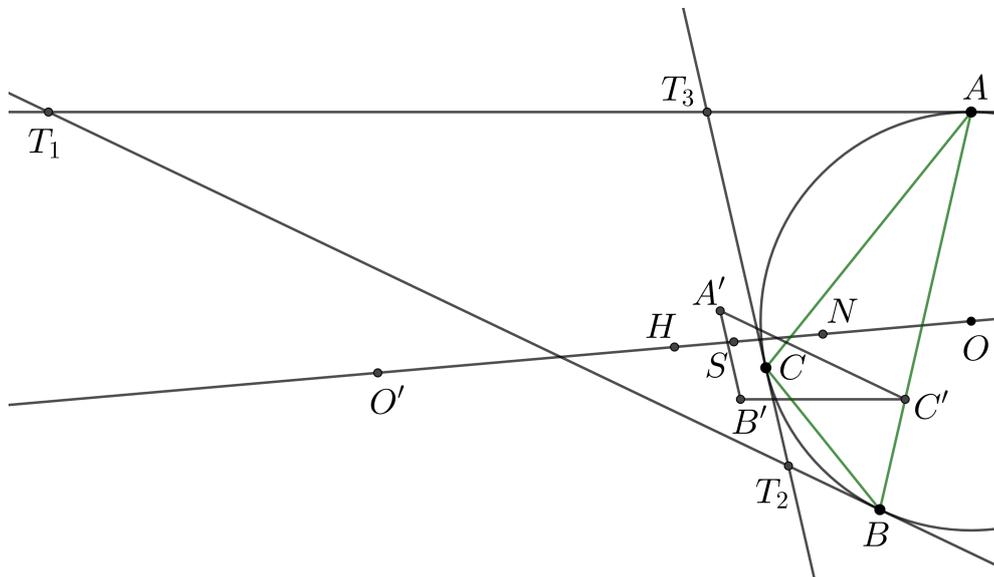


Figura 51: Triângulo heptagonal $\triangle ABC$, seu triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$, seu triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ e outros pontos relevantes.

A medida do ângulo $\angle AOC$ é igual a $\frac{4 \cdot \pi}{7}$, (equação (2.36)). Com essa informação e sabendo da congruência entre os triângulos $\triangle OAT_3$ e $\triangle OCT_3$ podemos determinar a medida do ângulo $\angle AOT_3$:

$$\angle AOT_3 = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{\frac{4 \cdot \pi}{7}}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{7}. \tag{3.16}$$

Usando esse último resultado e observando o triângulo $\triangle OT_3A$, determinaremos a medida do ângulo $\angle OT_3A$:

$$O\hat{T}_3A = \pi - A\hat{O}T_3 - O\hat{A}T_3 = \pi - \frac{2 \cdot \pi}{7} - \frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot \pi}{14}. \quad (3.17)$$

Ainda observando o triângulo $\triangle OT_3A$, vamos estabelecer um valor para OT_3 fazendo uso do resultado da equação (3.16):

$$\cos(A\hat{O}T_3) = \frac{R}{OT_3} \Rightarrow \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{R}{OT_3} \Rightarrow OT_3 = \frac{R}{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}. \quad (3.18)$$

De acordo com a Proposição 3.6 o perímetro do triângulo tangencial é igual ao dobro do perímetro do triângulo heptagonal, então caso o raio do triângulo heptagonal seja igual a R , o raio do seu triângulo tangencial será igual a $2 \cdot R$. O triângulo $\triangle T_1O'T_3$ é isósceles, com $\overline{O'T_1} = \overline{O'T_3} = 2 \cdot R$. A medida do ângulo $\angle T_1O'T_3$ é igual a $\frac{4 \cdot \pi}{7}$ (equação (3.13)). Com essas informações podemos determinar a medida do ângulo $\angle O'T_3T_1$:

$$O'\hat{T}_3T_1 = \frac{\pi - T_1\hat{O}'T_3}{2} = \frac{\pi - \frac{4 \cdot \pi}{7}}{2} = \frac{3 \cdot \pi}{14}.$$

Usando esse último resultado e o resultado da equação (3.17) podemos determinar a medida do ângulo $\angle OT_3O'$:

$$O\hat{T}_3O' = \pi - O\hat{T}_3A - O'\hat{T}_3T_1 = \pi - \frac{3 \cdot \pi}{14} - \frac{3 \cdot \pi}{14} = \frac{4 \cdot \pi}{7}. \quad (3.19)$$

Vamos determinar a medida do segmento $\overline{OO'}$ observando o triângulo $\triangle OO'T_3$ e fazendo uso dos resultados da última equação e da equação (3.18):

$$\begin{aligned}
 OO^2 &= O'T_3^2 + OT_3^2 - 2 \cdot O'T_3 \cdot OT_3 \cdot \cos(O'\hat{T}_3O) \\
 &= (2 \cdot R)^2 + \left(\frac{R}{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot R \cdot \frac{R}{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \\
 &= 4 \cdot R^2 + \frac{R^2}{\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} - \frac{4 \cdot R^2}{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) \\
 &= R^2 \cdot \left(4 + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} - \frac{4 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right) \\
 &= R^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 4 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 1}{\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right). \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Pela equação (2.18):

$$\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) = \frac{1}{4} - \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right).$$

Substituindo esse último resultado na equação (3.20):

$$\begin{aligned}
 OO^2 &= R^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 4 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{7}\right) + 1}{\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right) \\
 &= R^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{4} - \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)\right) + 1}{\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right) \\
 &= R^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) - 1 + 4 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right) + 1}{\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right) \\
 &= R^2 \cdot \left(\frac{8 \cdot \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)}{\cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \right) = 8 \cdot R^2 \Rightarrow OO' = 2 \cdot R \cdot \sqrt{2}. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Na Proposição 1.28 diz que duas circunferências não concêntricas possuem dois centros de homotetia; um interno ao segmento que possui como extremos os centros dessas circunferências e outro externo a esse segmento, porém está sobre a reta que também passa pelos centros.

Os triângulos órtico $\triangle A'B'C'$ e tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ estão em homotetia, conforme demonstra a Proposição 1.35. Portanto o seu centro de homotetia está na reta NO' , sendo O' o circuncentro do triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ e N o circuncentro do triângulo órtico $\triangle A'B'C'$, lembrando que N é o centro da circunferência de nove pontos (Proposição 1.30).

Devemos descobrir se o centro de homotetia dos triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ e órtico $\triangle A'B'C'$ é interno ou externo ao segmento $\overline{NO'}$.

O centro de homotetia S pertence à reta de Euler, assim como os pontos O' e N , como demonstrado nas Proposições 1.36 e 1.37.

A razão de homotetia entre os triângulos órtico $\triangle A'B'C'$ e tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ é igual a $\frac{1}{4}$, pois o perímetro do triângulo órtico $\triangle A'B'C'$ é igual a metade do perímetro do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ (Proposição 3.1) e o perímetro do triângulo tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ é igual ao dobro do triângulo heptagonal $\triangle ABC$ (Proposição 3.6).

O centro de homotetia S deve dividir a reta $\overleftrightarrow{NO'}$ numa razão $\frac{1}{4}$ em relação ao segmento $\overline{NO'}$, de acordo com a Proposição 1.28.

Deve-se destacar que o circuncentro O e o ortocentro H também pertencem à reta de Euler (Proposição 1.17) e são pontos correspondentes de homotetia, já que são os ex-centros dos triângulos tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ e órtico $\triangle A'B'C'$ (Proposições 1.31 e 1.34).

O ponto N é ponto médio de \overline{OH} (Proposição 1.19). Então:

$$H - N - O$$

A medida OH é igual a $R \cdot \sqrt{2}$ (Proposição 2.16). Portanto, $ON = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}$.

A medida OO' é igual a $2 \cdot R \cdot \sqrt{2}$ (equação (3.21)). Se o centro de homotetia S for externo ao segmento $\overline{NO'}$ ele coincidirá com o ponto O , pois $\frac{ON}{OO'} = \frac{\frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}}{2 \cdot R \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4}$.

Porém isso é um absurdo, pois como já foi mencionado, os pontos O e H são pontos correspondentes na homotetia e devem estar numa razão de $\frac{1}{4}$ em relação ao centro de homotetia, o que é impossível nesse caso.

Portanto o centro de homotetia S dos triângulos órtico $\triangle A'B'C'$ e tangencial $\triangle T_1T_2T_3$ está contido no segmento $\overline{NO'}$.

Desa forma, o ponto S também está entre O e H , sendo $HS = \frac{1}{4} \cdot SO$. Como N é ponto médio de \overline{OH} , S está entre H e N .

$$H - S - N - O.$$

O ponto O' é oposto a N em relação a S . Então O' também é oposto a O em relação a S . Como $OO' > OH$, temos:

$$O' - H - S - N - O. \tag{3.22}$$

O ponto H está entre O e O' . Como $OH = R\sqrt{2}$ (Proposição 2.16) e $OO' = 2 \cdot R \cdot \sqrt{2}$ (equação (3.21)), temos que H é ponto médio de $\overline{OO'}$, ou seja, O' é simétrico a O em relação a H .

□

O TRIÂNGULO HEPTAGONAL NO PLANO COMPLEXO

Neste capítulo, estudamos algumas propriedades dos triângulos heptagonais usando a abordagem dos números complexos, assim como o heptágono regular.

Iremos definir os vértices do heptágono regular no plano complexo usando as raízes da unidade e depois determinar quais serão os vértices do triângulo heptagonal.

Faremos a demonstração de uma Proposição que consta no artigo [4], mas essa demonstração estará inspirada na apresentada por Paul Yiu no artigo [9].

Proposição 4.1. *Os afixos das raízes da unidade para $n = 7$ correspondem aos vértices de um heptágono regular.*

Demonstração. Podemos representar o heptágono regular no plano complexo ao utilizar a fórmula para as raízes da unidade (equação (1.25)) para $n = 7$.

A fórmula a ser utilizada para esse caso será:

$$\omega = \cos\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{7}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{7}\right),$$

com $k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Teremos como raízes $\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ e ω^6 . Seus afixos correspondem aos vértices de um heptágono regular no plano complexo, cuja circunferência circunscrita possui centro $O = (0, 0)$ e raio $R = 1$, conforme a Figura 52.

□

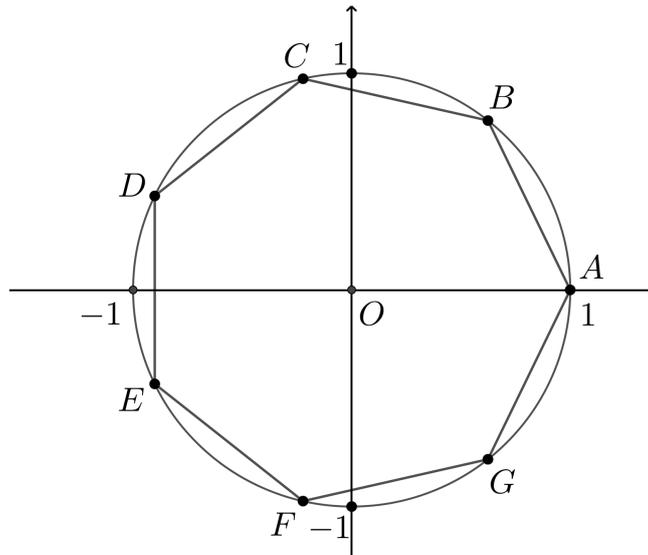


Figura 52: Heptágono regular no plano complexo.

A demonstração da Proposição 2.2 pode ser realizada utilizando números complexos, como veremos a seguir.

Proposição 4.2. *A distância do ponto médio do lado \overline{AB} de um heptágono regular $ABCDEFG$ inscrito em uma circunferência até o ponto médio do raio perpendicular ao lado \overline{BC} , é igual a metade do lado do quadrado inscrito na mesma circunferência.*

Demonstração. Vamos designar os vértices do heptágono regular F, G, A, \dots, E como os afixos das raízes n -ésimas da unidade para $n = 7$, respectivamente, $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ e ω^6 . Nesse caso, vamos considerar que o raio da circunferência circunscrita ao heptágono regular é igual a 1, o que leva ao lado do quadrado inscrito nessa mesma circunferência ser igual a $\sqrt{2}$. O ponto médio U de \overline{AB} corresponde a $u = \frac{\omega^2 + \omega^3}{2}$ e o ponto médio V do raio perpendicular ao segmento \overline{BC} equivale a $v = \frac{-1}{2}$, como pode ser observado na Figura 53.

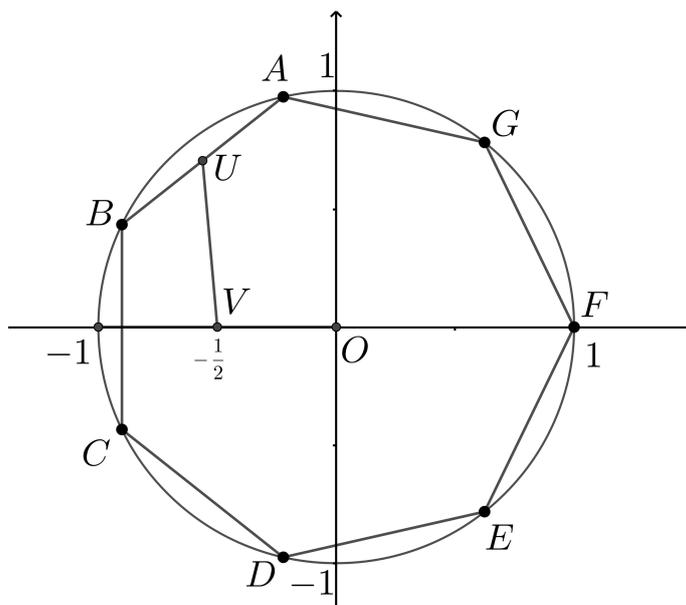


Figura 53: Heptágono Regular $ABCDEFG$ no plano complexo

Para determinar o valor de UV utilizando coordenadas complexas, podemos desenvolver os cálculos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 UV^2 &= (u - v) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) \\
 UV^2 &= \left(\frac{\omega^2 + \omega^3}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\omega^4 + \omega^5}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
 UV^2 &= \frac{\omega^6 + \omega^7 + \omega^2 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1}{4} \\
 UV^2 &= \frac{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + 2}{4}. \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

Substituindo (1.29) em (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
 UV^2 &= \frac{2}{4} \\
 UV &= \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Observação 4.3. *Tratando-se do triângulo heptagonal $\triangle ABC$, vamos considerar seus vértices $A = \omega^4$, $B = \omega$ e $C = \omega^2$ (Figura 54).*

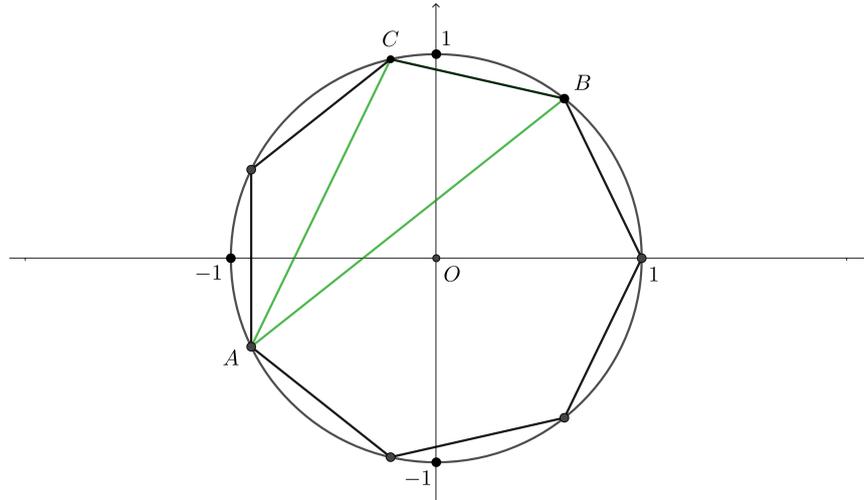


Figura 54: Triângulo heptagonal $\triangle ABC$ no plano complexo

Os ângulos formados nos vértices A , B e C correspondem a $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2 \cdot \pi}{7}$ e $\frac{4 \cdot \pi}{7}$. Para chegar nesse resultado, podemos usar o mesmo princípio usado na Proposição 2.6.

Vamos destacar alguns pontos importantes associados ao triângulo heptagonal $\triangle ABC$.

Proposição 4.4. *As coordenadas do ortocentro H do triângulo heptagonal no plano complexo corresponde a $H = \omega + \omega^2 + \omega^4$.*

Demonstração. Pela equação (2.71) temos que $BH = \frac{c \cdot R}{b}$. Como $R = 1$, $b = \omega^4 - \omega^2$, $c = \omega - \omega^4$ e considerando que τ representa H no plano complexo, segue que:

$$\tau - \omega = \frac{\omega - \omega^4}{\omega^4 - \omega^2} = \frac{\omega^8 - \omega^4}{\omega^4 - \omega^2} = \frac{(\omega^4 - \omega^2) \cdot (\omega^4 + \omega^2)}{\omega^4 - \omega^2} \Rightarrow \tau = \omega + \omega^2 + \omega^4.$$

□

Proposição 4.5. *As coordenadas do centro N da circunferência de nove pontos do triângulo heptagonal no plano complexo equivale a $N = \frac{1}{2} \cdot (\omega + \omega^2 + \omega^4)$.*

Demonstração. Na proposição 1.19 vimos que o centro da circunferência de nove pontos é o ponto médio entre O e H . Desse modo:

$$N = \frac{OH}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\omega + \omega^2 + \omega^4).$$

□

Diante dessas considerações, podemos realizar a demonstração da proposição a seguir.

Proposição 4.6. *Dado o triângulo heptagonal $\triangle ABC$, o centro da circunferência de nove pontos é o primeiro ponto de Brocard.*

Demonstração. Devemos provar que as relações

$$(1) \frac{1}{2} \cdot (\omega + \omega^2 + \omega^4) - \omega^4 = \frac{(-2 \cdot c_1 - 3 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega - \omega^4);$$

$$(2) \frac{1}{2} \cdot (\omega + \omega^2 + \omega^4) - \omega = \frac{(-2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega^2 - \omega) \text{ e}$$

$$(3) \frac{1}{2} \cdot (\omega + \omega^2 + \omega^4) - \omega^2 = \frac{(-3 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega^4 - \omega^2)$$

são verdadeiras, pois elas mostram que as linhas \overline{NA} , \overline{NB} e \overline{NC} são obtidas através de rotações de \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, sobre o mesmo ângulo, que necessariamente deve ser o ângulo de Brocard α (Figura 55).

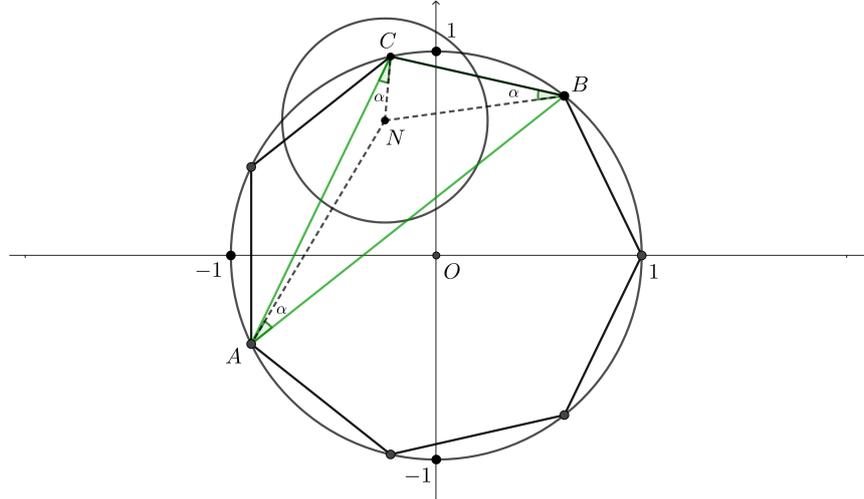


Figura 55: Círculo de nove pontos e ângulo de Brocard do triângulo heptagonal $\triangle ABC$

Precisamos saber que:

$$c_1 = \frac{\omega + \omega^6}{2}; c_2 = \frac{\omega^2 + \omega^5}{2} \text{ e } c_3 = \frac{\omega^3 + \omega^4}{2}. \quad (4.2)$$

Então:

$$\begin{aligned} -2 \cdot c_1 - 3 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 &= -2 \cdot \frac{\omega + \omega^6}{2} - 3 \cdot \frac{\omega^2 + \omega^5}{2} - 2 \cdot \frac{\omega^3 + \omega^4}{2} = \\ &= -\omega - \omega^2 - \omega^3 - \omega^4 - \omega^5 - \omega^6 - \frac{\omega^2 + \omega^5}{2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pela Proposição 1.11.8 podemos dizer que:

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0 \Rightarrow -\omega - \omega^2 - \omega^3 - \omega^4 - \omega^5 - \omega^6 = 1. \quad (4.4)$$

Substituindo o resultado da equação (4.4) na equação (4.3) vamos obter:

$$-2 \cdot c_1 - 3 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 = 1 - \frac{\omega^2 + \omega^5}{2} = \frac{2 - \omega^2 - \omega^5}{2}.$$

Aplicaremos esse último resultado no segundo membro da relação (1):

$$\begin{aligned} \frac{(-2 \cdot c_1 - 3 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega - \omega^4) &= \frac{2 - \omega^2 - \omega^5}{2} \cdot \frac{4 + \omega + \omega^2 + \omega^4}{7} \cdot (\omega - \omega^4) = \\ \frac{1}{14} \cdot (7 + 2 \cdot \omega - 3 \cdot \omega^2 - \omega^3 + \omega^4 - 4 \cdot \omega^5 - 2 \cdot \omega^6) \cdot (\omega - \omega^4) &= \\ \frac{1}{14} \cdot (-1 + 6 \cdot \omega + 6 \cdot \omega^2 - \omega^3 - 8 \cdot \omega^4 - \omega^5 - \omega^6). \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.11.8, temos:

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0 \Rightarrow -\omega^3 - \omega^5 - \omega^6 = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad (4.5)$$

Aplicando esse último resultado na equação anterior vamos obter:

$$\begin{aligned} \frac{(-2 \cdot c_1 - 3 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega - \omega^4) &= \frac{1}{14} \cdot (7 \cdot \omega + 7 \cdot \omega^2 - 7 \cdot \omega^4) = \\ \frac{1}{2}(\omega + \omega^2 - \omega^4) &= \frac{1}{2}(\omega + \omega^2 + \omega^4) - \omega^4. \end{aligned}$$

Vamos calcular $-2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3$ usando os valores de (4.2):

$$\begin{aligned} -2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3 &= -2 \cdot \frac{\omega + \omega^6}{2} - 2 \cdot \frac{\omega^2 + \omega^5}{2} - 3 \cdot \frac{\omega^3 + \omega^4}{2} = \\ -\omega - \omega^2 - \omega^3 - \omega^4 - \omega^5 - \omega^6 - \frac{\omega^3 + \omega^4}{2}. \end{aligned}$$

Aplicando o resultado da equação (4.4):

$$-2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3 = 1 - \frac{\omega^3 + \omega^4}{2} = \frac{2 - \omega^3 - \omega^4}{2}.$$

Utilizaremos esse último resultado no segundo membro da relação (2):

$$\begin{aligned} \frac{(-2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega^2 - \omega) &= \frac{2 - \omega^3 - \omega^4}{2} \cdot \frac{4 + \omega + \omega^2 + \omega^4}{7} \cdot (\omega^2 - \omega) = \\ \frac{1}{14} \cdot (7 + \omega + 2 \cdot \omega^2 - 4 \cdot \omega^3 - 3 \cdot \omega^4 - 2 \cdot \omega^5 - \omega^6) \cdot (\omega^2 - \omega) &= \\ = \frac{1}{14} \cdot (-1 - 8 \cdot \omega + 6 \cdot \omega^2 - \omega^3 + 6 \cdot \omega^4 - \omega^5 - \omega^6). \end{aligned}$$

Substituiremos o resultado da equação (4.5):

$$\begin{aligned} \frac{(-2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 3 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega^2 - \omega) &= \frac{1}{14} \cdot (-7 \cdot \omega + 7 \cdot \omega^2 + 7 \cdot \omega^4) = \\ \frac{1}{2} \cdot (-\omega + \omega^2 + \omega^4) &= \frac{1}{2} \cdot (\omega + \omega^2 + \omega^4) - \omega. \end{aligned}$$

Calcularemos agora a expressão $-3 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3$ utilizando os resultados de (4.2) e (4.4):

$$\begin{aligned} -3 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3 &= -3 \cdot \frac{\omega + \omega^6}{2} - 2 \cdot \frac{\omega^2 + \omega^5}{2} - 2 \cdot \frac{\omega^3 + \omega^4}{2} = \\ -\omega - \omega^2 - \omega^3 - \omega^4 - \omega^5 - \omega^6 - \frac{\omega + \omega^6}{2} &= 1 - \frac{\omega + \omega^6}{2} = \frac{2 - \omega - \omega^6}{2}. \end{aligned}$$

Substituiremos esse resultado no segundo membro da relação (3):

$$\begin{aligned} \frac{(-3 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega^4 - \omega^2) &= \frac{2 - \omega - \omega^6}{2} \cdot \frac{4 + \omega + \omega^2 + \omega^4}{7} \cdot (\omega^4 - \omega^2) = \\ \frac{1}{14} \cdot (7 - 3 \cdot \omega + \omega^2 - 2 \cdot \omega^3 + 2 \cdot \omega^4 - \omega^5 - 4 \cdot \omega^6) \cdot (\omega^4 - \omega^2) &= \\ \frac{1}{14} \cdot (-1 + 6 \cdot \omega - 8 \cdot \omega^2 - \omega^3 + 6 \cdot \omega^4 - \omega^5 - \omega^6). \end{aligned}$$

Aplicamos acima o resultado da equação (4.5):

$$\begin{aligned} \frac{(-3 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_3) \cdot (4 + \omega + \omega^2 + \omega^4)}{7} \cdot (\omega^4 - \omega^2) &= \frac{1}{14} \cdot (7 \cdot \omega - 7 \cdot \omega^2 + 7 \cdot \omega^4) = \\ \frac{1}{2} \cdot (\omega - \omega^2 + \omega^4) &= \frac{1}{2} \cdot (\omega + \omega^2 + \omega^4) - \omega^2. \end{aligned}$$

□

CONCLUSÃO

O presente trabalho nos apresentou o triângulo heptagonal, e como consequência, também foram apresentadas propriedades do heptágono regular. A maior parte do trabalho foi inspirado na referência [4], que possui algumas demonstrações sobre as propriedades do heptágono regular e explora mais intensamente o triângulo heptagonal.

O artigo de Bankoff e Garfunkel [4] inicia-se justificando a relevância do tema pelo fato de que havia poucos estudos sobre o assunto e a maioria das demonstrações relacionadas ao triângulo heptagonal estavam em francês, então produziram um material em inglês sobre o tema. Podemos fazer um paralelo e admitir a importância desse trabalho em apresentar o triângulo heptagonal num documento em português, visto que fazendo uma busca nas ferramentas de pesquisa da internet dificilmente encontra-se algo sobre o assunto nesse idioma.

Os polígonos regulares sempre foram fruto de curiosidade e estudo por parte dos matemáticos e muitos desses polígonos são abordados nas salas de aula da Educação Básica. A oportunidade estudar o triângulo heptagonal foi extremamente relevante, pois suas propriedades podem ser estendidas ao heptágono regular, pelo fato desse triângulo ser formado por um lado e duas de suas diagonais.

O professor da Educação Básica, ao ler e se apropriar desse trabalho terá como consequência o enriquecimento de seu repertório, podendo usar muitos dos assuntos apresentados em sala de aula, pois muitas das demonstrações usam conceitos que são estudados na Educação Básica como, por exemplo, lei do seno e do cosseno, Teoremas do ângulo inscrito e externo, Teorema das bissetrizes, pontos notáveis do triângulo, entre outros. Além disso, as propriedades do triângulo heptagonal nos trazem relações muito importantes como, por exemplo, o fato do triângulo órtico e tangencial do triângulo heptagonal também serem um triângulo heptagonal, o centro da circunferência de nove pontos coincidir com o primeiro ponto de Brocard e a lista de relações trigonométricas que podemos tirar desse triângulo.

Dentre as habilidades de Matemática a serem desenvolvidas na Educação Básica de acordo com a Base Nacional Comum Curricular [7] estão: classificações de polígonos

quanto ao número de vértices, medidas de lados e ângulos e paralelismo e perpendicularismo dos lados; construção de figuras semelhantes; congruência de triângulos; relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo; aplicação de relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos; etc. Essas habilidades podem ser exploradas com as propriedades do triângulo heptagonal apresentadas nesse trabalho.

Com relação às propriedades demonstradas com números complexos, podemos relacionar a determinação dos vértices de um heptágono regular no plano complexo usando as raízes n -ésimas da unidade com a habilidade: “Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)”.

Na Educação Básica, ao estudar conceitos de Geometria Plana que envolvem triângulos, geralmente são tomados nas demonstrações triângulos acutângulos. O triângulo heptagonal é um bom exemplo de triângulo que pode ser usado para fugir desse padrão. Podemos usá-lo para exemplificar, explicar e elaborar exercícios.

Ao abordar o triângulo heptagonal em suas aulas, o professor de matemática estará diversificando a maneira de expor os conteúdos e desenvolver as habilidades e estará oportunizando aos seus alunos uma forma de ampliarem seu repertório, não só em relação às habilidades apresentadas na Base Nacional Comum Curricular, mas também em relação à matemática estudada no mundo acadêmico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALTSHILLER-COURT, N. *College Geometry*. Dover Publications, 1952.
- [2] ANDREESCU, T.; ANDRICA, D., *Complex Numbers from A to Z*. New York: Birkhauser Boston, 2006.
- [3] ÁVILA, G., *Variáveis Complexas e Aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [4] BANKOFF, L.; GARFUNKEL, J., *The Heptagonal Triangle*. Mathematics Magazine, 1973.
- [5] DOLCE, O.; POMPEO, J.N., *Elementos da Matemática Elementar 9: Geometria Plana*. São Paulo: Editora atual, 2005.
- [6] JOHNSON, R.A., *Advanced Euclidean Geometry*. New York: Dover Publications, 1960.
- [7] MIINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 01 de fevereiro de 2021.
- [8] MUNIZ NETO, A.C., *Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [9] YIU, P., *Heptagonal Triangle and Their Companions*. Forum Geometricorum, 2009.