



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

JÉSSICA FERREIRA DE ALCÂNTARA

DISSECÇÕES E QUEBRA-CABEÇAS PITAGÓRICOS

JUAZEIRO DO NORTE
2021

JÉSSICA FERREIRA DE ALCÂNTARA

DISSECÇÕES E QUEBRA-CABEÇAS PITAGÓRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.

Dados Internacionais de Catalogação na
Publicação Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

A347d

Alcântara, Jéssica Ferreira de.

Dissecções e quebra-cabeças pitagóricos / Jéssica Ferreira de Alcântara. – 2021.
74 f.: il. color.30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e
Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,
Juazeiro do Norte, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.

1. Dissecções – quebra- cabeças. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Material didático. I. Título.

CDD 371.937

Bibliotecária: Glacínésia Leal Mendonça
CRB 3/925



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E
TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dissecções e Quebra-Cabeças Pitagóricos

JÉSSICA FERREIRA DE ALCÂNTARA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 04 de junho de 2021.

Banca Examinadora

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Junior
Orientador

Clarice Dias de Albuquerque

Prof.^a Dr.^a Clarice Dias de Albuquerque
UFCA

Samara Costa Lima

Prof.^a Dr.^a Samara Costa Lima
UFOB

Lucas Vidal de Meireles

Prof. Dr. Lucas Vidal de Meireles
IFGOIANO

*Dedico este trabalho a Deus por ser
minha fortaleza em todos os momentos
e a minha família por ser minha base.*

AGRADECIMENTOS

A Deus por tudo, especialmente por não deixar me faltar forças para continuar, mesmo nos momentos mais difíceis. Pela benção de uma família que me incentiva, pelas pessoas que colocou na minha vida para me auxiliar nesta caminhada e pela graça da realização deste sonho.

Aos meus pais, Maria Aurení e Antônio Ferreira, por serem os melhores pais, por sempre me ensinarem o valor dos estudos, e por toda dedicação e sacrifício feitos para que eu e minha irmã tivéssemos a melhor educação possível, acompanhando de perto cada etapa desta caminhada.

A minha irmã, por ser a minha melhor amiga, a minha fortaleza, a minha inspiração, por não me deixar desistir nunca. Por sempre me ajudar tirar dúvidas e por ajudar a me erguer nos momentos mais difíceis e me incentivar a realizar os meus sonhos.

A meu noivo, Helano Leom, por toda ajuda ao longo do curso, por todo companheirismo e carinho nas horas mais difíceis dessa jornada.

Aos meus tios e padrinhos, Joana e Galdino pelo carinho e apoio que deram na minha caminhada acadêmica.

Aos meus amigos e colegas de curso, por todo companheirismo, incentivo, e ajuda para estudar. Em especial aos colegas João Paulo pelo incentivo e conhecimentos compartilhados, a Aílton por todo incentivo e momentos de estudo e a Andrea pela parceria nas resoluções de listas, pelo incentivo e pelas orações. Agradecer a todo apoio e parceria da turma 2018.1.

As minhas amigas, que sempre me apoiaram e incentivaram, especialmente a Iza por sempre acreditar em mim e pelas palavras de incentivo, a Cristina por todo apoio pelas orações que fortaleceram a minha fé, a Joacileide (Leleida) pelo incentivo e os puxões de orelhas para mim concluir, a Josefa Maria (Jô) e Kissia por todo incentivo.

Ao meu Orientador, Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior, por toda contribuição no curso e a quem admiro muito. Obrigada pela valorosa orientação, pela atenção, pela oportunidade de trabalhar com este tema e por toda paciência.

Agradeço a todos os professores que contribuíram com minha jornada acadêmica, em especial aos professores do PROFMAT da UFCA, os doutores Steve da Silva Vicentim, Leandro da Silva Tavares, Plácido Francisco de Assis Andrade, Érica Boizan Batista e Maria Silvana Alcântara Costa que participaram diretamente da minha formação e aos demais professores desta instituição que contribuíram indiretamente.

Por fim, agradeço a Universidade Federal do Cariri (UFCA), ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pelo zelo em qualificar os profissionais da educação básica.

“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)

RESUMO

Este trabalho visa abordar a demonstração do Teorema de Pitágoras e sua Generalização, bem como a equivalência entre áreas de figuras planas, de forma geométrica por meio de dissecções (quebra-cabeças). A proposta presente aqui é apresentar um material didático e lúdico, com ideias de atividades que proporcione o professor a trabalhar tais demonstrações em sala de aula.

Palavras-chave: Dissecções. Teorema de Pitágoras. Demonstrações. Quebra-cabeças.

ABSTRACT

This paper aims to address the demonstration of Pythagorean theorem and its Generalization, as well as the equivalence between areas of flat figures, in a geometric shape through dissections (puzzles). The proposal is to present a didactic and ludic material, with ideas of activities that provide the teacher to work such demonstrations in the classroom.

Keywords: Dissections. Pythagorean theorem. Demonstrations. Puzzles.

Figura 36 – Seccionando triângulo equilátero	39
Figura 37 – Dissecção por tesselação de quadrados	40
Figura 38 – Seccionando dois quadrados para um	41
Figura 39 – Demonstração do Teorema de Pitágoras por área de quadrados	41
Figura 40 – Demonstração do Teorema de Pitágoras com pentágonos regulares	42
Figura 41 – Dissecção de um pentágono regular em 9 peças	43
Figura 42 – Peças articuladas do pentágono regular	43
Figura 43 – Composição dos pentágonos	44
Figura 44 – Demonstração do Teorema de Pitágoras por área de hexágonos	44
Figura 45 – Dissecção de dois hexágonos para um	45
Figura 46 – Dissecção do hexágono	45
Figura 47 – Dissecção de dois hexágonos para um em 5 peças	46
Figura 48 – Dissecção do hexágono em 4 peças	46
Figura 49 – Hexágonos com malha	47
Figura 50 – Demonstração da Generalização do Teorema de Pitágoras	47
Figura 51 – Dissecção de dois octógonos regulares para um	48
Figura 52 – Dissecção de octógonos	49
Figura 53 – Demonstração do Teorema de Pitágoras com octógonos	49
Figura 54 – Peças da dissecção de quadrados	50
Figura 55 – Dissecção de quadrados em Poliminós	51
Figura 56 – Peças da dissecção em Poliminós de quadrados	52
Figura 57 – Quebra-cabeça de Poliminós	52
Figura 58 – Peças da dissecção de dois triângulos para um	53
Figura 59 – Quebra-cabeça com triângulos	53
Figura 60 – Peças da dissecção de dois hexágonos para um	54
Figura 61 – Quebra-cabeça com hexágonos	54
Figura 62 – Peças da dissecção de triângulos	55
Figura 63 – Quebra-cabeça de triângulos em 4 peças	55
Figura 64 – Tesselação do problema 6	56
Figura 65 – Peças da dissecção de hexágonos regulares	57
Figura 66 – Quebra-cabeça de hexágonos em 9 peças	57
Figura 67 – Passo 1 e 2	58
Figura 68 – Passo 3	59
Figura 69 – Passo 4	60
Figura 70 – Passo 5	60
Figura 71 – Passo 6	61
Figura 72 – Passo 7	61
Figura 73 – Passo 1 do segundo método	62
Figura 74 – Passo 2 do segundo método	63

Figura 75 – Solução do Problema 1	66
Figura 76 – Solução do Problema 2	67
Figura 77 – Solução do Problema 3	67
Figura 78 – Solução do Problema 4	68
Figura 79 – Solução do Problema 5	68
Figura 80 – Solução do Problema 6	69
Figura 81 – Solução do Problema 7	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Nomeclatura dos polígonos	12
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CONCEITOS PRÉVIOS	11
2.1	Polígonos	11
2.2	Congruência	13
2.3	Semelhança	13
2.4	Área de polígonos	15
2.5	Equivalência de superfícies planas	18
3	DISSECÇÕES	20
3.1	Tipos de Dissecções	24
3.1.1	Técnicas de dissecções	28
4	PITÁGORAS	33
4.1	Teorema de Pitágoras	34
4.2	Dissecções e o Teorema de Pitágoras	38
5	PROPOSTAS DE EXERCÍCIO	50
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	REFERÊNCIAS	65
	APÊNDICE	66

1 INTRODUÇÃO

As demonstrações matemáticas na Educação Básica do Brasil são pouco discutidas, ficando sua abordagem mais concentrada nos cursos superiores de matemática. Esta temática provoca algumas opiniões conflituosas já que alguns pesquisadores, em sua maioria, defendem que as demonstrações devem ser introduzidas no Ensino de matemática desde as séries iniciais e outros acreditam que somente em séries mais elevadas, quando o aluno já apresenta um processo cognitivo mais desenvolvido e capaz de compreender conceitos mais abstratos.

Embora existam opiniões controversias de qual o momento certo e a forma mais adequada de ser abordada, existe um consenso sobre a importância das demonstrações no estudo e desenvolvimento da matemática desde os primórdios, Davis e Hersh (1985) em seu livro [2], relata:

[...] que a primeira demonstração na história da matemática foi dada por Thales de Mileto (600 a. C.). Ele demonstrou que o diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais. Ora, isso é uma afirmação tão simples que parece evidente por si própria. A genialidade, neste caso, foi perceber que uma demonstração é possível e necessária. O que torna uma demonstração mais do que simples pedantismo são suas aplicações a situações onde as afirmativas são muito menos transparentes. Na opinião de alguns, o nome do jogo da matemática é demonstração; sem demonstrações, nada de matemática. Na opinião de outros, isso é bobagem; há muitos jogos na matemática. (DAVIS; HERSH, 1985,p.178).

Tendo em vista a importância de se trabalhar o processo de demonstração no Ensino de Matemática e levando em consideração que o aluno da Educação Básica geralmente tem uma dificuldade maior para compreender as demonstrações quando feitas de forma algébrica, realidade muitas vezes vivenciada nas escolas brasileiras, este trabalho vem com uma proposta de apresentar uma forma dinâmica e lúdica para expor a demonstração geométrica de um dos mais importantes teoremas da Geometria Plana, o Teorema de Pitágoras e sua Generalização, além da equivalência de áreas entre figuras planas, tudo isso através de dissecções matemáticas (quebra-cabeças).

Ao longo deste trabalho serão apresentadas algumas técnicas e o processo de construção de alguns quebra-cabeças que possibilitará aos docentes a produção de um material didático que facilitará a compreensão dos estudantes acerca destas demonstrações.

No Capítulo 2, serão apresentados alguns conceitos básicos de Geometria Plana para melhor assimilação dos conteúdos abordados no decorrer do texto.

No Capítulo 3, falaremos das dissecções matemáticas destacando alguns fatos históricos e expondo alguns tipos e técnicas de dissecções, com o intuito de facilitar o entendimento e a aplicação destas, no processo de construção dos quebra-cabeças.

O Capítulo 4, traz um breve histórico da vida de Pitágoras, discorre também sobre o Teorema de Pitágoras e sua Generalização e por último apresenta a construção de algumas dissecções utilizadas para demonstrar a Generalização desse teorema.

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos algumas propostas de atividades que podem ser trabalhadas na sala de aula para facilitar a compreensão e auxiliar nas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Estas propostas podem ser aplicadas tanto no ensino fundamental como no médio, a depender das metodologias usadas pelo professor.

2 CONCEITOS PRÉVIOS

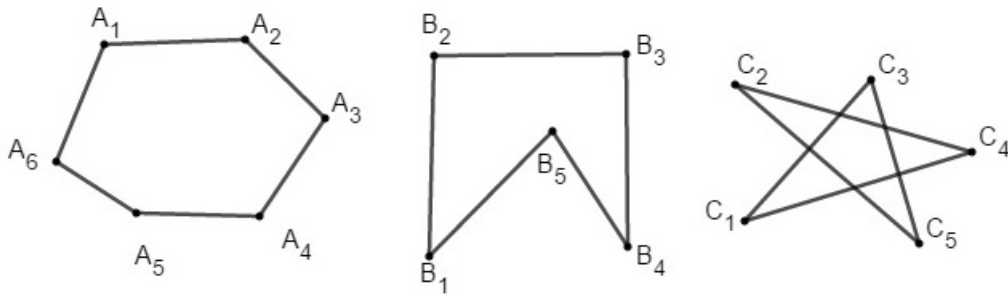
Neste capítulo, enunciaremos alguns conceitos básicos de matemática, que servirão para elucidar e fundamentar a compreensão dos assuntos abordados ao longo deste trabalho. O texto a seguir, é baseado nas referências [3] e [9], o leitor que tenha interesse em um estudo mais detalhado destes temas, recomenda-se consultá-las.

2.1 Polígonos

Definição 1 *Sejam A_1, A_2, \dots, A_n , com $n \geq 3$, pontos distintos, de modo que três pontos consecutivos não são colineares, então temos que a reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ chama-se polígono.*

A figura a seguir representa exemplos de polígonos

Figura 1: Polígonos



Fonte: Autor.

Os polígonos são constituídos dos seguintes elementos: *vértices, lados e ângulos*. chamamos de perímetro do polígono a soma das medidas dos lados do mesmo. Ou seja, considerando o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, da Figura 1, temos que:

- Os vértices do polígono são os pontos: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
- Os lados do polígono são os segmentos: $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \overline{A_5A_6}, \overline{A_6A_1}$.
- E os ângulos internos do polígono são: $\widehat{A_1} = A_6\widehat{A_1}A_2, \widehat{A_2} = A_1\widehat{A_2}A_3, \dots, \widehat{A_6} = A_5\widehat{A_6}A_1$

Chamamos ainda de *região poligonal*, a região limitada do plano delimitada pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

Os polígonos podem ser classificados de acordo com a sua região poligonal e também pelo seu número de lados.

Classificando os polígonos de acordo com sua região poligonal, dizemos que ele é convexo ou côncavo (não convexo).

Definição 2 Um polígono é considerado convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa o polígono totalmente contido em um dos dois semiplanos determinado por essa reta.

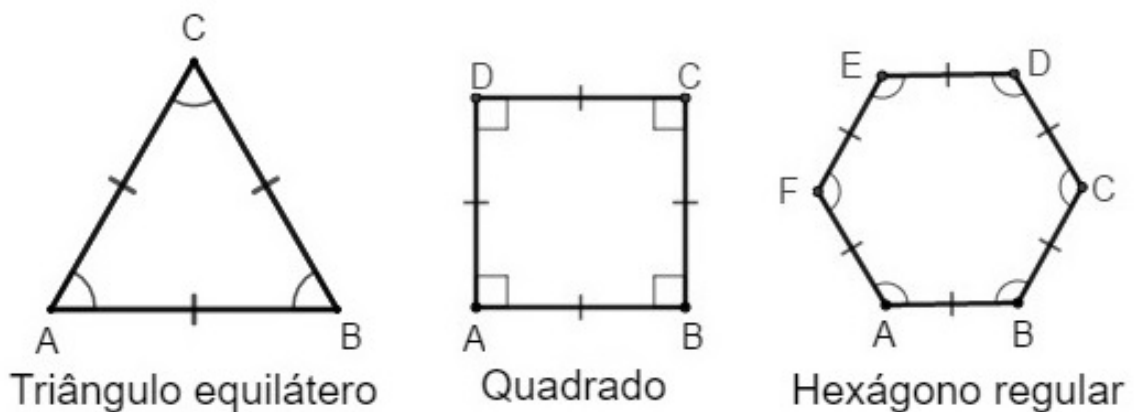
Seja o polígono $A_1A_2 \dots A_n$ podemos classificá-lo quanto ao seu número de lados como um n -lâtero (ou n -ágono). Ou seja, os polígonos recebem nomes especiais de acordo com o número n de lados que possuem. Observe na tabela abaixo alguns exemplos dessa correspondência:

Tabela 1: Nomeclatura dos polígonos

Número n de lados/ângulos	Nome do Polígono
$n = 3$	Triângulo
$n = 4$	Quadrângulo
$n = 5$	Pentágono
$n = 6$	Hexágono
$n = 7$	Heptágono
$n = 8$	Octógono
$n = 9$	Eneágono
$n = 10$	Decágono

Entre os polígonos convexos, destaca-se um grupo especial de polígonos, aqueles que apresentam todos os lados congruentes (equiláteros) e todos os ângulos congruentes (equiângulos), estes são conhecidos como **polígonos regulares**. Veja alguns exemplos abaixo:

Figura 2: Polígonos



Fonte: Autor.

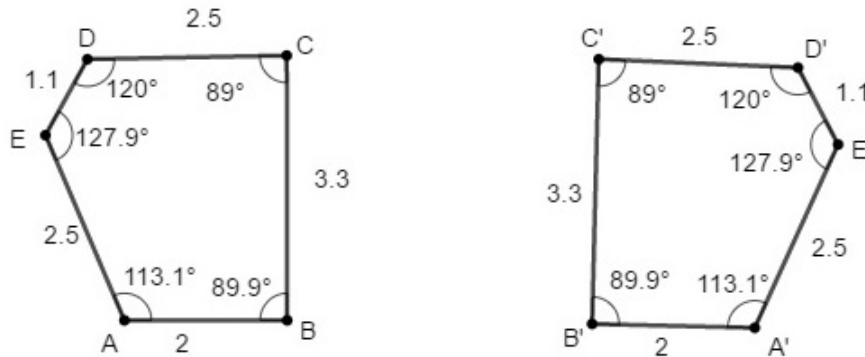
2.2 Congruência

Definição 3 Sejam \overline{AB} e \overline{CD} dois segmentos de mesma medida, então dizemos que \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos congruentes e representamos por $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Da mesma forma, se dois ângulos \widehat{AOB} e \widehat{COD} tem a mesma medida, dizemos que eles são congruentes, e denotamos por $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$.

Definição 4 Sejam dois polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$, com $n \geq 3$, dizemos que estes polígonos são congruentes se todos os ângulos do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ forem congruentes aos respectivos ângulos do polígono $B_1B_2 \dots B_n$ e, além disso, os lados do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ forem congruentes aos lados correspondentes do polígono $B_1B_2 \dots B_n$, ou seja, se dois polígonos são congruentes, é possível mover um deles no espaço e fazer coincidir com o outro sem deformá-los.

Por exemplo, na figura abaixo, os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são congruentes, pois $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, $\overline{DE} \equiv \overline{D'E'}$ e $\overline{EA} \equiv \overline{E'A'}$, e além disso, temos que os ângulos $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCD} \equiv \widehat{B'C'D'}$, $\widehat{CDE} \equiv \widehat{C'D'E'}$, $\widehat{DEA} \equiv \widehat{D'E'A'}$ e $\widehat{EAB} \equiv \widehat{E'A'B'}$.

Figura 3: Polígonos Congruentes



Fonte: Autor.

Em particular, para o caso de triângulos, sabe-se que para que dois triângulos sejam congruentes basta que tenham ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo formado por eles, (caso LAL) ou que tenham ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes (caso ALA), ou ainda os três lados ordenadamente congruentes (caso LLL).

2.3 Semelhança

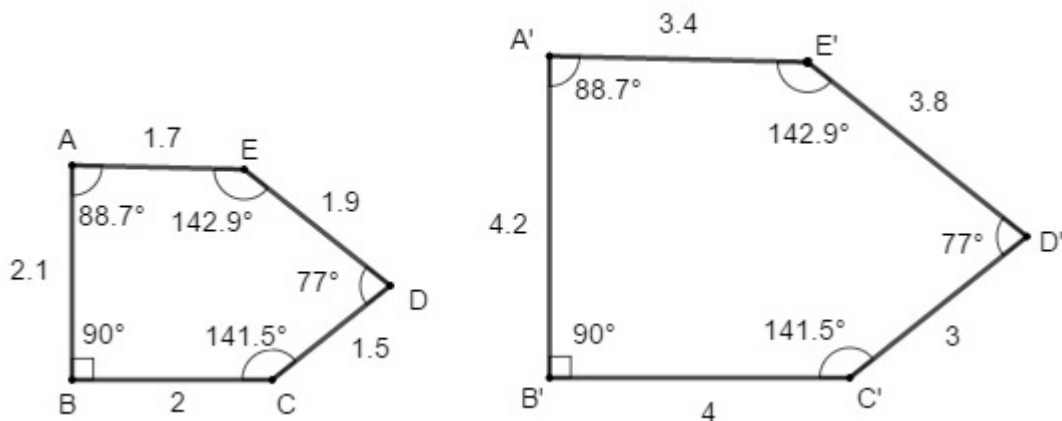
Definição 5 Sejam os polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$, com $n \geq 3$, dizemos que estes polígonos são semelhantes se todos os ângulos dos vértices correspondentes do polígono

$A_1A_2 \dots A_n$ e do polígono $B_1B_2 \dots B_n$ forem congruentes, além disso, todos os lados correspondentes do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ e do polígono $B_1B_2 \dots B_n$ forem proporcionais, ou seja, dois polígonos são ditos semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles até fazer coincidir com o outro.

A razão de proporcionalidade (ou razão de semelhança), que é obtida pelo quociente entre os lados do primeiro polígono e os lados correspondentes do segundo polígono, deve ser a mesma para todos os lados do polígono.

Perceba na figura abaixo, que os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são semelhantes, pois $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCD} \equiv \widehat{B'C'D'}$, $\widehat{CDE} \equiv \widehat{C'D'E'}$, $\widehat{DEA} \equiv \widehat{D'E'A'}$ e $\widehat{EAB} \equiv \widehat{E'A'B'}$, além disso, temos que $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{B'C'}$, $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{C'D'}$, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{D'E'}$ e $\overline{EA} = \frac{1}{2}\overline{E'A'}$, ou seja, os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são semelhantes com razão de proporcionalidade igual a $\frac{1}{2}$.

Figura 4: Polígonos Semelhantes



Fonte: Autor.

Sabemos ainda, que se dois polígonos são congruentes também são semelhantes, pois se são congruentes possuem todos os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes também congruentes, portanto proporcionais, com razão de proporcionalidade igual a 1. Além disso, se dois polígonos são semelhantes suas diagonais e os perímetros também são proporcionais e a razão de proporcionalidade, entre estas medidas, é a mesma estabelecida entre os lados.

Em específico temos que, dois triângulos são semelhantes se, e só se, possuem dois ângulos ordenadamente congruentes (caso AA), ou se tem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e o ângulo compreendido entre eles seja congruente (caso LAL), ou ainda se possuem os três lados correspondentes ordenadamente proporcionais (caso LLL). Estas três situações são conhecidos como os casos (ou critérios) de semelhança de triângulos.

2.4 Área de polígonos

Definição 6 Dado o polígono $A_1A_2 \dots A_n$, com $n \geq 3$, a área dessa região poligonal é um número real positivo que serve para quantificar o espaço delimitado por ela, e possui as seguintes propriedades:

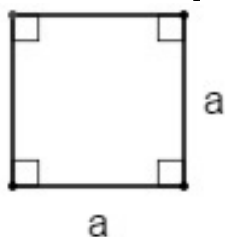
1. Polígonos congruentes estão associados a áreas iguais (números iguais).
2. Se um Polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, de forma que quaisquer dois deles possuem em comum somente uma aresta ou um vértice, então a soma das áreas dos polígonos menores é igual a área do polígono maior.
3. Se um polígono (menor) $A_1A_2 \dots A_n$, com $n \geq 3$, está contido no interior de um polígono (maior) $B_1B_2 \dots B_m$, com $m \geq 3$, então a área do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ é menor que a área do polígono $B_1B_2 \dots B_m$.
4. A área de um quadrado unitário é igual a $1u.a.$

Agora que já sabemos o conceito generalizado de área de polígonos, apresentaremos as fórmulas utilizadas no cálculo da área de alguns polígonos mais conhecidos, porém não iremos mostrar demonstrações destas fórmulas por não ser este o objetivo do trabalho, mas tais demonstrações podem ser encontradas nas referências [3] e [9]. Lembrando que, como estamos trabalhando com superfícies bidimensionais a unidade de medida estará sempre ao quadrado, por exemplo, cm^2, m^2, km^2 , etc.

- **Área do Quadrado**

O quadrado é um polígono que possui 4 lados iguais e 4 ângulos retos (ângulos de 90°). E sua área é calculada pelo produto de suas dimensões assim, dado um quadrado de lado a , temos que:

Figura 5: Área do quadrado



$$\text{Área}_{(Q)} = a \times a$$

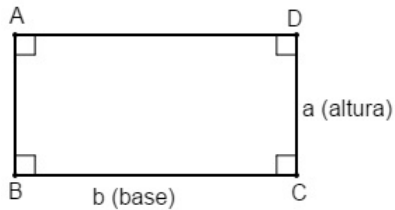
$$\text{Área}_{(Q)} = a^2$$

Fonte: Autor.

- **Área do Retângulo**

O retângulo é um quadrilátero que tem seus pares de lados opostos paralelos e congruentes, além disso possui todos os ângulos internos congruentes e igual a 90° . Sua área também é dada pelo produto de suas dimensões assim, dado um retângulo de lados a e b , segue que:

Figura 6: Área do retângulo



$$\text{Área}_{(R)} = \text{base} \times \text{altura}$$

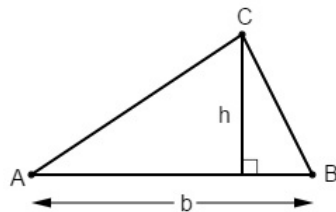
$$\text{Área}_{(R)} = b \times a$$

Fonte: Autor.

- **Área do Triângulo**

Dado um triângulo qualquer de base b e altura h , temos que:

Figura 7: Área do triângulo



$$\text{Área}_{(T)} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

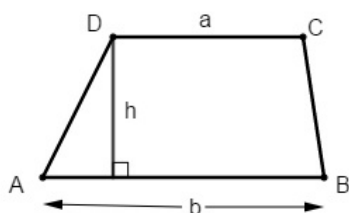
$$\text{Área}_{(T)} = \frac{b \times h}{2}$$

Fonte: Autor.

- **Área do Trapézio**

O trapézio é um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos, que são chamados de base. Dado um trapézio qualquer, de base menor a , base maior b e altura h , temos que:

Figura 8: Área do trapézio



$$\text{Área}_{(T_{ra})} = \frac{(a + b) \times h}{2}$$

Fonte: Autor.

- **Área de Polígonos Regulares**

Seja um polígono regular de n lados com medidas iguais a ℓ e apótema de medida a , então podemos calcular a área desse polígono de duas formas:

- *Apótema*: é o segmento de reta que liga o centro do polígono ao ponto médio do lado dele, formando um ângulo reto, ou seja, o apótema é perpendicular ao lado do polígono.
- *Perímetro*: é a soma de todos os lados do polígono.

1ª Forma: Podemos seccionar este polígono em n triângulos de base ℓ e altura h , assim a área do polígono pode ser dada por:

$$Área_{(POL)} = n \times Área_{(T)}$$

Onde, $Área_{(T)}$ é a área dos triângulos formados pela secção do polígono.

2ª Forma: Podemos calcular a área do polígono regular usando o apótema a e o perímetro p do polígono. Lembrando que:

Neste caso, temos que a área do polígono regular é obtida pelo produto do seu apótema pela metade do perímetro (semiperímetro) do polígono. Assim,

$$Área_{(POL)} = \frac{a \times p}{2}$$

Perceba, que desenvolvendo a primeira forma apresentada chegamos na segunda, pois

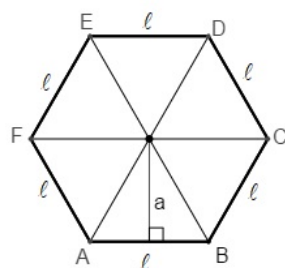
$$Área_{(T)} = \frac{base \times altura}{2} \implies Área_{(T)} = \frac{\ell \times h}{2}$$

Daí,

$$Área_{(POL)} = n \times Área_{(T)} \implies Área_{(POL)} = \frac{n \times (\ell \times h)}{2}$$

Como, o perímetro p desse polígono é dado por $p = n \times \ell$ e a altura do triângulo coincide com o apótema, temos que $h = a$, segue que:

Figura 9: Exemplo de um polígono regular seccionado



$$Área_{(POL)} = \frac{p \times a}{2}$$

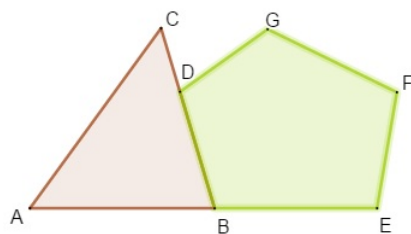
Fonte: Autor.

Se dois polígonos são semelhantes então eles possuem uma razão de proporcionalidade (ou razão de semelhança), como já vimos. Suponhamos que esta razão seja k , então se dividirmos as áreas desses dois polígonos também encontraremos uma razão de semelhança que será dada por k^2 .

2.5 Equivalência de superfícies planas

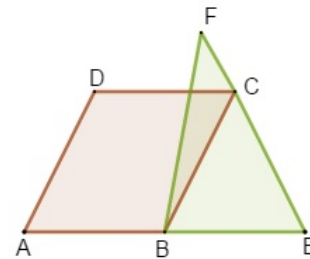
Definição 7 Dados dois polígonos, quando eles possuem em comum apenas pontos de seu contorno, dizemos que eles são **polígonos contíguos ou adjacentes**.

Figura 10: Polígonos contíguos



Fonte: Autor.

Figura 11: Polígonos não contíguos



Fonte: Autor.

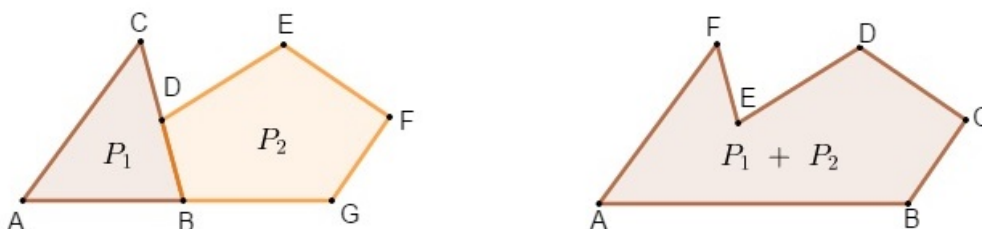
Note pelas imagens acima, que no primeiro caso, temos que os polígonos são contíguos, pois possuem em comum apenas pontos do contorno dos mesmos, já no segundo caso, eles possuem em comum além de pontos do contorno, parte da sua região poligonal, por isso não são considerados polígonos contíguos ou adjacentes.

Conhecendo o conceito de polígonos contíguos, veremos agora a noção de soma de polígonos.

- **Soma de polígonos contíguos (ou adjacentes)**

A região poligonal formada pela união de dois polígonos contíguos (ou adjacentes) é definida como *soma de polígonos contíguos*. Observe nas figuras abaixo a soma de dois polígonos P_1 e P_2 :

Figura 12: Soma de polígonos contíguos

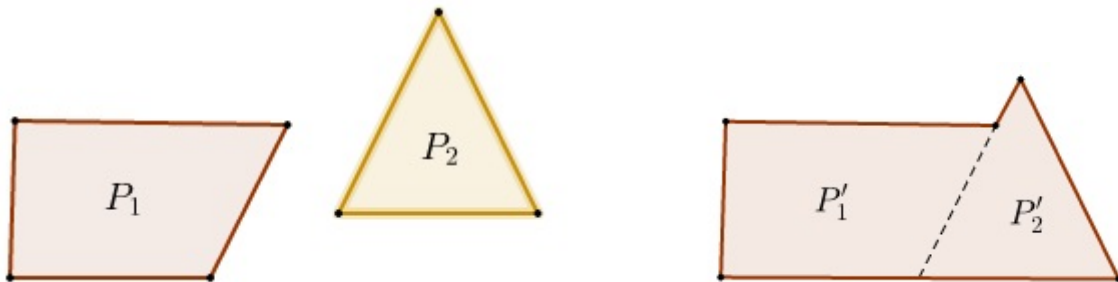


Fonte: Autor.

- Soma de dois polígonos quaisquer

Determinamos como *soma de dois polígonos* quaisquer, P_1 e P_2 , como sendo a soma de dois polígonos adjacentes P'_1 e P'_2 , onde P'_1 é congruente a P_1 e P'_2 é congruente a P_2 , como mostra nas figuras abaixo.

Figura 13: Soma de polígonos quaisquer

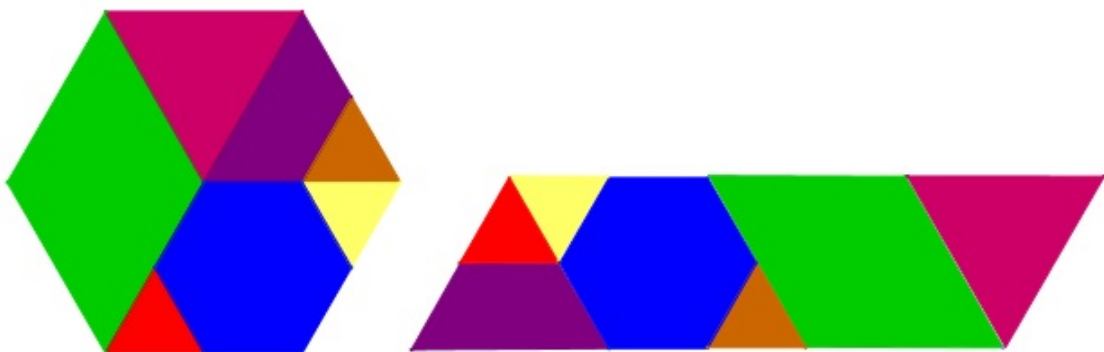


Fonte: Autor.

Perceba que na figura acima temos que os polígonos $P'_1 \equiv P_1$ e $P'_2 \equiv P_2$, portanto $(P_1 + P_2) = (P'_1 + P'_2)$.

Definição 8 Dados dois polígonos quaisquer P_1 e P_2 , eles são chamados de **equivalentes** ou **equicompostos** se, e somente se, for possível seccionar um dos polígonos (P_1 por exemplo) em um número finito de outros polígonos, reordená-los e somá-los de modo a formar o outro polígono (P_2). Ou seja, dois polígonos são considerados equivalentes se tiverem mesma área.

Figura 14: Polígonos equivalentes (ou equicompostos)



Fonte: Autor.

Note que na figura acima, o hexágono e o paralelogramo são polígonos equivalentes, pois têm áreas iguais, já que o paralelogramo é formado pela soma das áreas de polígonos congruentes aos que formam a área do hexágono.

3 DISSECÇÕES

Dissecções geométricas, ou quebra-cabeças matemáticos como também são conhecidos, consiste no método de seccionar (ou decompor) de forma organizada uma figura geométrica, de modo que podem ser reorganizadas e reunidas (recompôr) formando assim outras figuras geométricas.

Harry Lindgren (1972), um famoso autor do campo da matemática recreativa e considerado um dos maiores criadores de quebra-cabeças matemáticos, define dissecções geométricas em seu livro [8], dizendo que:

Dissecações geométricas são quebra-cabeças baseados na arte de cortar uma figura geométrica em pedaços que podem ser remontados para formar outra figura. O desafio é criar a nova figura com o menor número possível de peças, e isso nem sempre é tão fácil quanto você faria pensar. (LINDGREN, 1972, p.2).

Como afirmou Harry Lindgren (1972), um dos principais desafios é conseguir seccionar uma figura geométrica, com o menor número de peças possíveis de tal maneira que consiga reorganizá-las de modo a formar uma ou mais figuras geométricas utilizando todas as peças. Embora este seja o desafio, existem vários tipos de dissecções e em alguns casos é trabalhado apenas a dissecção da figura geométrica para formar outras, sem se preocupar com a quantidade de peças, ou se será utilizado todas as peças no processo de formar outras figuras geométricas.

Então, nem sempre podemos afirmar que este processo formará figuras de áreas equivalentes, pois isso dependerá da composição feita. Assim, como afirma Frederickson (1997, p.1) em [5], "Uma dissecção pode ser apreciada de várias maneiras. O mais básico é como um quebra-cabeça em que um determinado conjunto de peças deve ser montado para formar a figura desejada." Ou seja, ao mencionarmos dissecção nem sempre estaremos falando de um processo que envolva figuras equivalentes.

Com relação as dissecções de figuras equivalentes, Stewart (2005) comenta que:

Gerwein provou que, dados quaisquer dois polígonos planos de área igual, há um conjunto finito de pedaços poligonais idênticos que podem ser reunidos para formar ambas as formas. Esse resultado é tradicionalmente chamado o "Teorema de Bolyai-Gerwein", embora na verdade pareça ter sido provado pela primeira vez por William Wallace em 1807. (STEWART, 2005, p.43).

Apesar de ser possível fazer dissecções em quaisquer dois polígonos planos de áreas equivalentes de modo que os pedaços, resultantes dessa dissecção, formem ambas as figuras, este processo não é algo simples, embora possa ser divertido e fascinante, exige muita precisão e uma enorme imaginação espacial.

A história das dissecções matemáticas é surpreendente e rica, os primeiros registros de dissecções são da época de Platão, na Grécia Antiga, e tratava do desafio de decompor um quadrado maior em dois quadrados iguais, usando quatro peças. Alguns quebra-cabeças de dissecções antigos, foram desenvolvidos para fazer representações geométricas da demonstração do Teorema de Pitágoras. Há também, registros de que os matemáticos árabes usaram dissecções geométricas ao falarem dos Elementos de Euclides. Porém, foi apenas no final do século XIV, que os quebra-cabeças matemáticos se tornaram populares, quando ganharam as colunas de jornais e revistas, destacando-se como um ótimo entretenimento.

Os quebra-cabeças de dois grandes enigmistas, o americano Sam Loyd e o inglês Henry Ernest Dudeney, estavam entre os mais publicados pelas colunas de jornais e revistas da época, seus enigmas que tinham como objetivo o uso do menor número de peças, desafiava e encantava os leitores. Segundo Stewart (2005), os dois trabalharam juntos por um tempo, e essa parceria rendeu belos trabalhos, veja o que ele diz sobre isso em [11]

Ainda no início de suas carreiras, os grandes enigmistas Sam Loyd e Henry Ernest Dudeney - um americano e o outro inglês - escreveram a quatro mãos uma coluna regular de enigmas para a revista Tit-bits. Loyd escrevia os quebra-cabeças e Dudeney (sob o pseudônimo "Sphinx") acrescentava comentários e concedia prêmios. A colaboração não demorou a se converter em rivalidade, e os dois homens seguiram caminhos separados. Ao fazê-lo, criaram toda uma indústria de quebra-cabeças nos dois lados do Atlântico, formulando problemas matemáticos fascinantes inseridos em historietas simples mas atraentes. (STEWART, 2005, p.41).

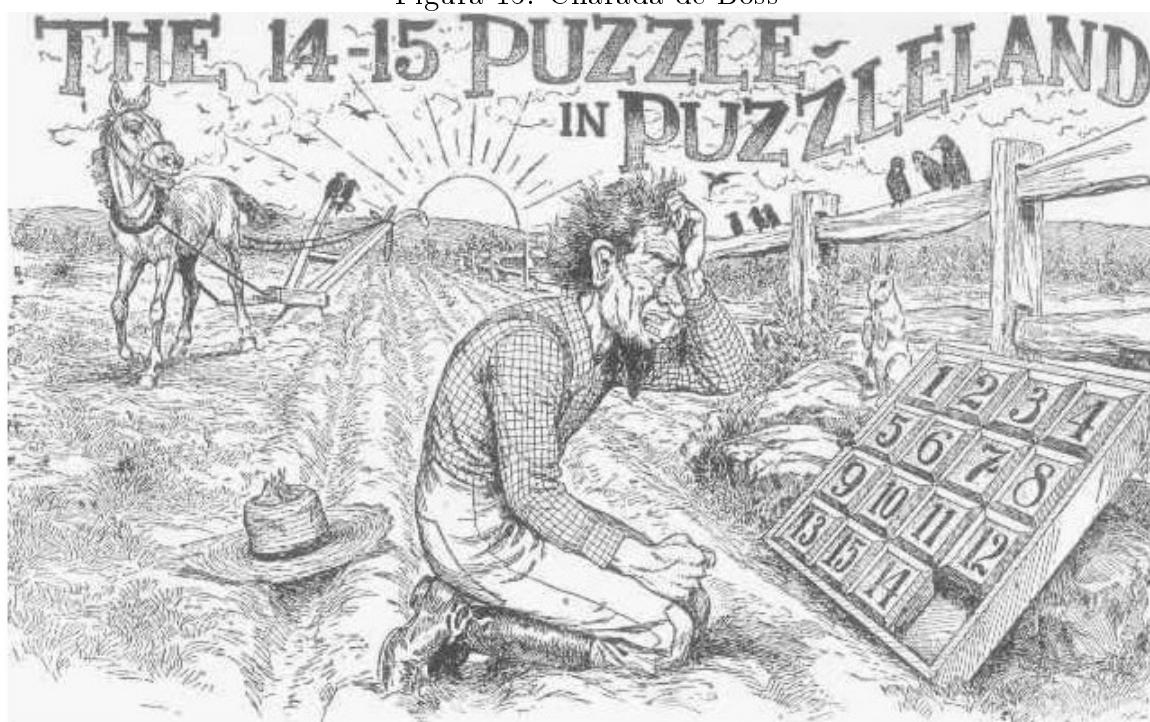
Segundo relatos, essa colaboração teria chegado ao fim porque, os dois combinaram de se corresponderem e trocar ideias sobre os quebra-cabeças que estavam desenvolvendo, porém em determinado momento Sam Loyd teria publicado um dos trabalhos de Henry Dudeney, como se fosse seu, o que o deixou muito enfurecido, chegando assim ao fim dessa parceria.

O enigmista Samuel Loyd (1841 - 1911), mais conhecido por Sam Loyd, inventou e adaptou milhares de quebra-cabeças em sua vida e foi o mais famoso criador de quebra-cabeças dos Estados Unidos, ele gostava de embelezar seus enigmas com pequenas histórias (charadas) usando humor e imaginação e proporcionando assim, ao leitor, uma verdadeira aula de matemática e lógica. Uma de suas criações, considerada por muitos como a mais famosa de sua autoria, é a "*Charada de Boss*", que ao publicar ele afirmou que "levaria o mundo inteiro à loucura". Este quebra-cabeça foi baseado no jogo conhecido como "Quebra-cabeças das Quinze Pastilhas" ou como o jogo 14-15, que Sam Loyd afirma ser o criador embora haja contestações quanto a sua autoria.

O Jogo consiste em um quadrado com 15 peças e um espaço vazio, para que seja movimentada as peças até formar uma sequência. No desafio proposto por Loyd,

os números ficaram ordenados de 1 a 13, com as peças 14 e 15 invertidas. O desafio então era formar a sequência de 1 a 15, e como incentivo ele ofereceu um prêmio de 1000 dólares para quem apresentasse a solução correta do mesmo, porém a configuração do jogo, apresentada por Sam Loyd na sua charada, não possuía solução. A figura abaixo, é a ilustração original da publicação da "Charada de Boss".

Figura 15: Charada de Boss



Fonte: <https://www.calendario.cnt.br/charadas/CHARADAS.htm>

Outro famoso enigmista, já mencionado neste trabalho, foi Henry Ernest Dudeney (1857 - 1930), que é tido como principal criador de quebra-cabeças da Inglaterra, e considerado por muitos, "o rei dos quebra-cabeças". Vindo de uma família com tradição matemática, se interessou desde cedo pela mesma, em especial por problemas de xadrez e pela criação de quebra-cabeças matemáticos, os quais começou a desenvolver aos nove anos de idade. Segundo relatos ele apresentava excelentes habilidades matemáticas, mesmo sem ter tido uma educação formal sobre tal disciplina. Suas primeiras publicações foram em jornais e revistas, e muitas destas o fez usando o pseudônimo de "Esfinge". Os trabalhos de Henry Dudeney, não alcançou tanta popularidade quanto os de Sam Loyd, como foi o caso da Charada de Boss que ficou conhecida mundialmente, em contrapartida, seus trabalhos tinham uma sofisticação matemática maior, e assim como Loyd, Dudeney também gostava de escrever histórias envolvendo seus problemas.

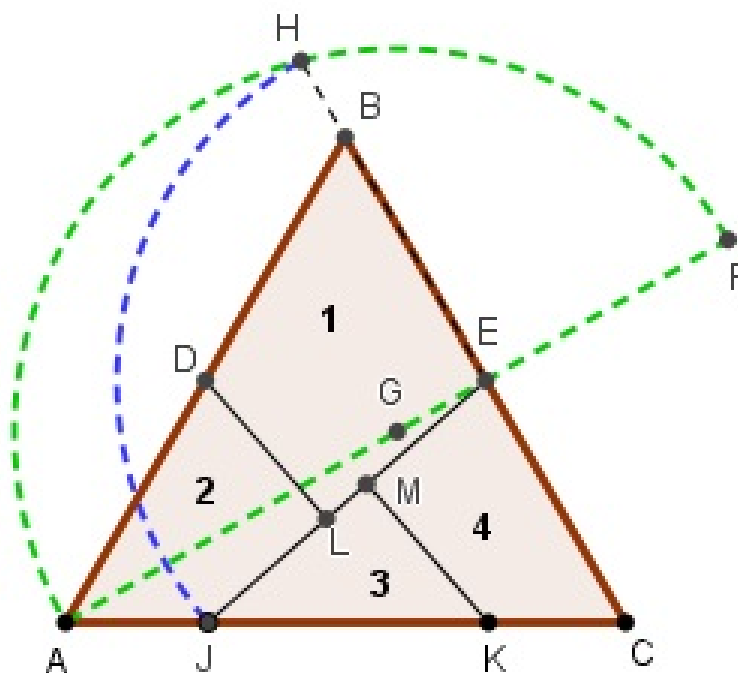
Seu mais famoso trabalho no campo das dissecções geométricas é o "quebra-cabeça de Haberdasher", que foi publicado em 1902, e refere-se a como seccionar um polígono e reorganizar as peças de forma a montar outro de mesma área, mais especifica-

mente seccionar um triângulo equilátero em quatro peças e organizá-los de modo a formar um quadrado de mesma área.

Dudeney publicou a solução deste quebra-cabeças e descreveu como o fez. Primeiro, dado um triângulo equilátero ABC , como mostra a figura abaixo, devia-se marcar o ponto médio dos lados \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente os pontos D e E . Em seguida, estender o segmento \overline{AE} até o ponto F , de modo a obter $\overline{EB} \equiv \overline{EF}$. Marcar o ponto médio G do segmento \overline{AF} , e então traçar o arco \widehat{AF} que tem como centro G . Depois prolongar o segmento \overline{EB} até intersectar o arco \widehat{AF} , obtendo assim o ponto H . E desenhar o arco \widehat{HJ} que tem como centro E , em seguida marcar o ponto K no segmento \overline{AC} , de modo que $\overline{JK} \equiv \overline{BE}$. E por fim, traçar a reta perpendicular ao segmento \overline{EJ} passando por D , obtendo assim o ponto L de interseção da perpendicular com \overline{EJ} , e marcar o ponto M , da interseção da perpendicular baixada de K em relação ao segmento \overline{EJ} .

Veja na figura abaixo, como ficou a dissecção do triângulo ABC após estes passos.

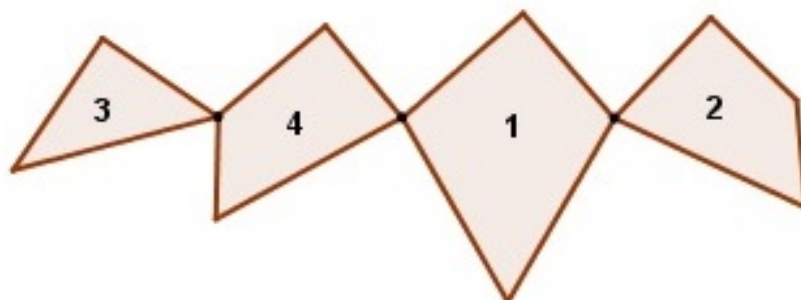
Figura 16: Dissecção do triângulo equilátero dada por Dudeney



Fonte: Autor.

Esta foi a solução apresentada por Dudeney, mas ao longo dos anos outras formas de fazer esta dissecção foram apresentadas. Mas o encanto desta solução é que elas são articuladas e podem ser dobradas em uma direção para formar o quadrado e na outra direção para formar o triângulo. Em 1905, ele apresentou em uma reunião na Royal Society, um modelo feito em mogno com dobradiças de latão. Veja na figura abaixo uma representação desta articulação.

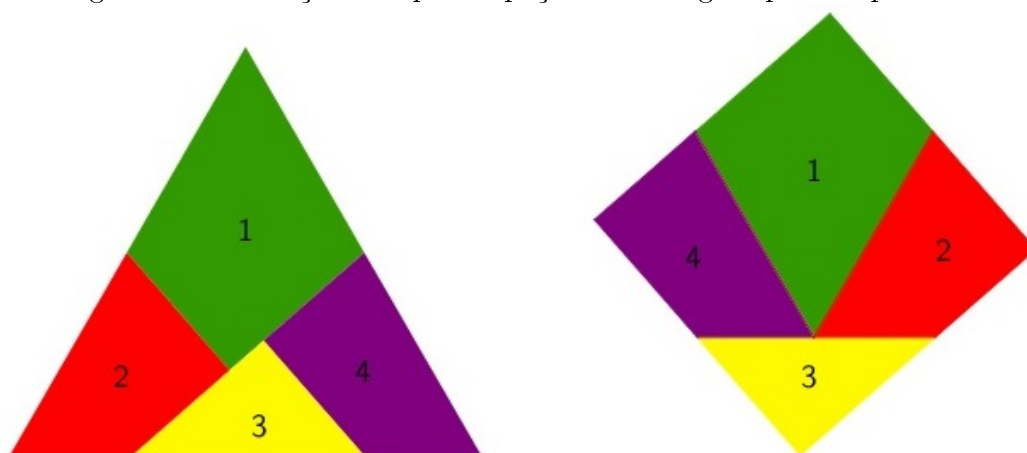
Figura 17: Modelo articulado do quebra-cabeças de Haberdasher



Fonte: Autor.

Na figura a seguir, podemos ver como fica a transformação do triângulo equilátero no quadrado após reorganizar as peças. Como a peça (1) do triângulo é congruente a peça (1) do quadrado e da mesma forma para as outras peças, concluímos que o triângulo e o quadrado apresentados tem mesma área, ou seja são equivalentes.

Figura 18: Dissecção em quatro peças do triângulo para o quadrado



Fonte: Autor.

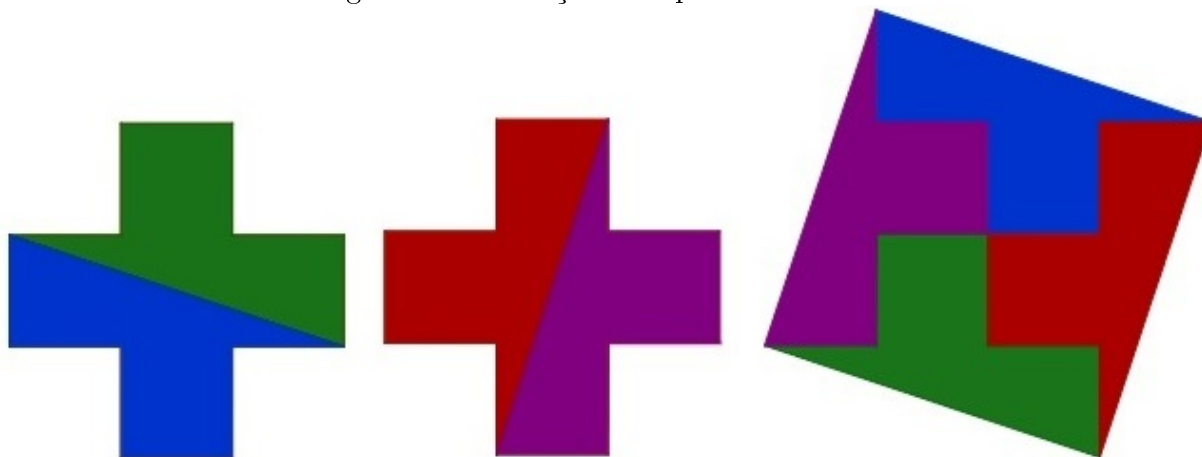
3.1 Tipos de Dissecções

Com a alta popularidade das dissecções geométricas (ou quebra-cabeças matemáticos), surgiu uma grande variedade de dissecções, abordaremos aqui alguns desses tipos e técnicas, bem como suas características principais. As dissecções expostas ao longo deste trabalho são baseadas em dissecções apresentadas nas referências [5], [6] e [8]. Quem desejar um conhecimento mais detalhado desta e de outras técnicas, pode consultar tais obras.

Iniciaremos abordando um pouco das *Dissecções Translacionais (ou sem rotação)*, que são as que possuem a característica de ao seccionarmos duas ou mais figuras geométricas, conseguirmos transladar todas as peças de uma figura para outra

sem virar ou rotacionar nenhuma peça. A figura abaixo, é um exemplo deste tipo de dissecção.

Figura 19: Dissecção do tipo translacional



Fonte: Autor.

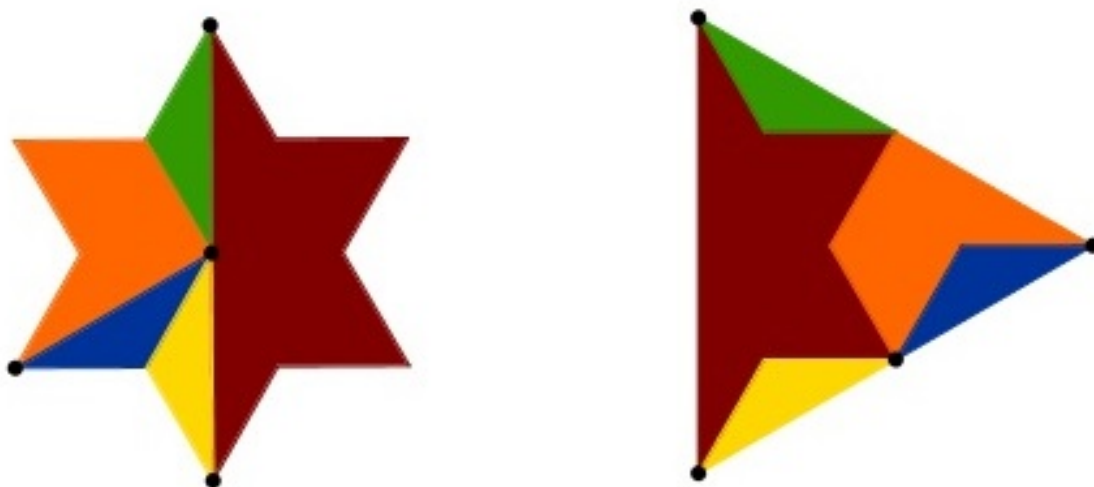
A Figura 19 é a dissecção de dois dodecágonos iguais, no caso as duas cruzes gregas, para um quadrado, com apenas 4 peças. Esta dissecção foi apresentada por Sam Loyd na revista Tib-Bits de 1897, nela podemos ver que as peças das duas cruzes foram transladadas para formar o quadrado sem que houvesse a necessidade de rotacionar nenhuma peça ou virar, para que fosse possível fazer o encaixe.

Outro tipo de dissecção bastante interessante são as *dissecções articuladas (ou com dobradiças)*. Elas podem ser *totalmente articuladas*, se todas as peças estiverem conectadas com dobradiças de modo que seja possível formar uma corrente com estas peças, que quando girar em um sentido reúne as peças formando uma das figuras geométricas da dissecção e quando girar em outro sentido forme a outra dissecção. Se em uma dissecção só tivermos parte das peças articuladas, então dizemos que ela é *parcialmente articulada*.

A mais famosa destas dissecções é o quebra-cabeças de Haberdasher, ilustrado na Figura 18, mas ao longo dos anos foram apresentadas várias dissecções deste tipo que encantou a muitos por sua forma engenhosa e a praticidade de transformar em um brinquedo geométrico. O autor Greg Frederickson ficou tão fascinado com este tipo dissecção que acabou por escrever dois livros somente sobre elas, onde reúne criações suas e de diversos autores.

A Figura 20 é um exemplo de dissecção articulada de uma estrela de 6 pontas para um triângulo equilátero em apenas 5 peças. Esta dissecção foi publicada em 1946 por Geoffrey Mott-Smith e faz parte de um conjunto de cinco dissecções diferentes de um hexagrama para um triângulo equilátero, as quais apresentam como característica o fato de o lado do triângulo equilátero ser igual ao diâmetro do hexagrama.

Figura 20: Dissecção do tipo Articulada



Fonte: Autor.

Perceba que a Figura 20 trata-se de uma dissecção totalmente articulada, e os pontos em destaque representam as dobradiças que liga as peças. Na Figura 21 é ilustrada a corrente de peças articuladas, que compõem as duas dissecções da estrela e do triângulo com pontos mostrando as dobradiças.

Figura 21: Peças articuladas para a dissecção de uma estrela para um triângulo equilátero



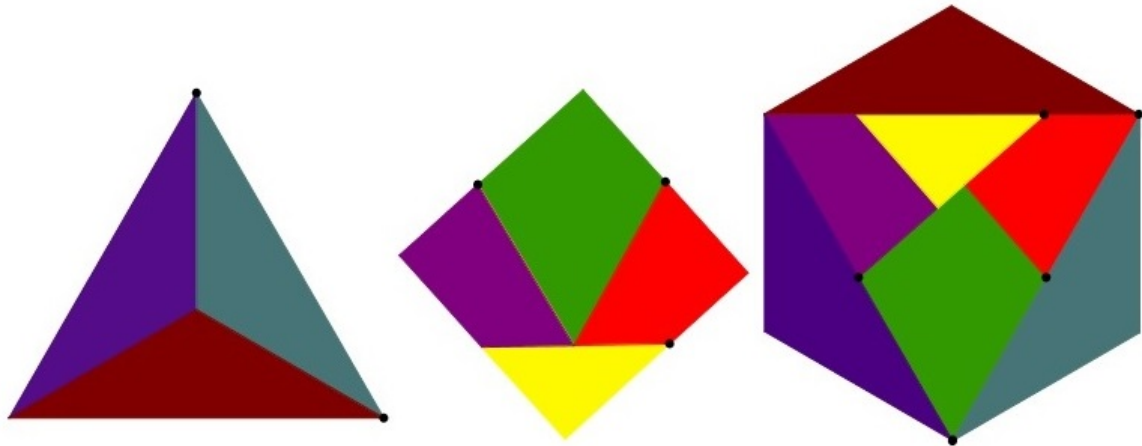
Fonte: Autor.

Note pela articulação da Figura 21, que se segurarmos a peça vinho e girarmos a peça verde no sentido horário e as demais no sentido anti-horário, a reunião das peças formará o triângulo equilátero. Se segurar a peça vinho e girar a peça verde no sentido anti-horário e as demais peças no sentido horário, teremos a estrela de 6 pontas.

Na Figura 22 temos um exemplo de uma dissecção parcialmente articulada de um triângulo equilátero e um quadrado, para um hexágono, com todas as dobradiças destacadas, o autor desta bela dissecção foi Ernest Irving Freese, um arquiteto de Los Angeles que em determinado momento da vida concentrou-se na criação de desafios mentais, como quebra-cabeças baseado em matemática.

Perceba que a dissecção do quadrado é a mesma da Figura 18, do quebra-cabeças de Haberdasher, na qual podemos girar as peças para formar um triângulo equilátero como o que aparece no centro do hexágono.

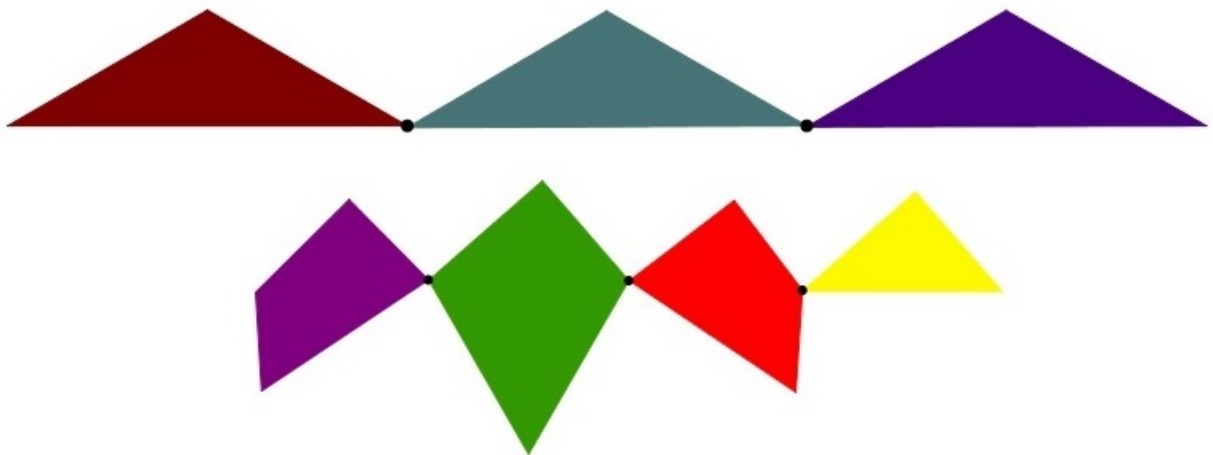
Figura 22: Dissecção do tipo Parcialmente articulada



Fonte: Autor.

Já na Figura 23, temos as correntes formadas pelas peças do triângulo equilátero e do quadrado, apresentados na Figura 22, ligadas por suas dobradiças. Ao girarmos estas peças articuladas no sentido certo e uni-las obteremos o hexágono regular mostrado da Figura 22.

Figura 23: Peças articuladas para compor o hexágono



Fonte: Autor.

Note que se segurarmos a peça verde, da dissecção do quadrado e girarmos a peça roxa no sentido horário e as demais no sentido anti-horário, teremos o triângulo equilátero ilustrado no centro do hexágono da Figura 22. Se fixarmos a peça vinho do primeiro triângulo equilátero da Figura 22, na base do triângulo formado pelas peças do quadrado e giramos as demais peças no sentido horário, formaremos com a união destas peças o hexágono regular ilustrado na Figura 22, que tem área igual a soma das áreas do triângulo equilátero e do quadrado. Como nem todas as peças do hexágono estão ligadas

pelas dobradiças, já que é formado por duas articulações diferentes, dizemos que é uma dissecção parcialmente articulada.

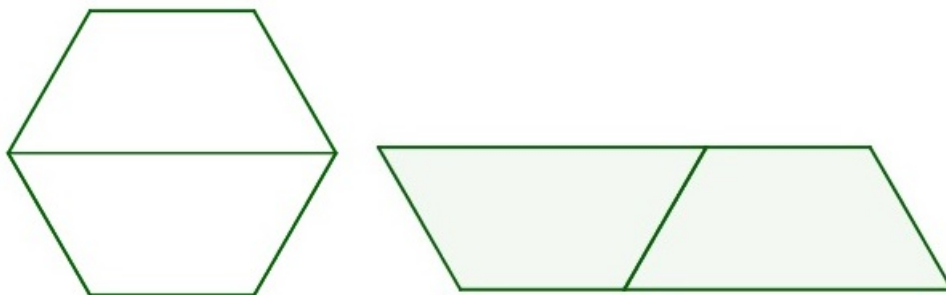
3.1.1 Técnicas de dissecções

Veremos agora algumas técnicas de como seccionar figuras geométricas de forma a reunir as peças de uma figura para formar outra de mesma área. Abordaremos aqui estas técnicas de forma superficial, mas que vai permitir ao leitor entender um pouco o procedimento para usar nos exemplos mostrados aqui ou em outros.

A primeira técnica que será apresentada é a de **Tira-P (ou P-strip)**, este tipo de tira possui como protótipo um paralelogramo, por isso recebem o nome de tira-P. A maioria dos polígonos que são mais fáceis de seccionar, são facilmente transformados em tira. Para fazer uma dissecção por esta técnica, deve-se cortar o primeiro polígono, e organizar as peças, que podem ser repetidas, de modo a formar uma faixa infinita na forma de um paralelogramo, o mesmo deve ser feito com o segundo polígono. Atendendo ao fato de que a largura de uma faixa não pode ser maior que o comprimento da outra. Depois de formada as duas **Tiras-P**, é necessário sobrepô-las para obter a dissecção, o resultado desta sobreposição de duas tiras é chamado de **Tira-PP**, as peças pertencentes a área comum as duas faixas formam a dissecção desejada. Se uma tira for sobreposta a outra de modo que a área da sobreposição seja apenas metade da área da dissecção desejada, é necessário sobrepor a tira mais uma vez para obter todas as peças, neste caso teremos uma **Tira-PP₂**.

A Figura 26 é um exemplo de dissecção por **Tira-PP**, de um hexágono para quadrado de mesma área, feita pelo belga Paul-Jean Busschop. Para esta dissecção, primeiro devemos formar duas **Tiras-P**, uma com as peças do hexágono e outra com quadrados. Para isto foi feito um corte na diagonal do hexágono, conforme mostra a Figura 24 e organizado as peças para formar a tira. Para o quadrado não é necessário fazer corte já que basta alinhá-los para formar uma tira.

Figura 24: Tira-P hexagonal

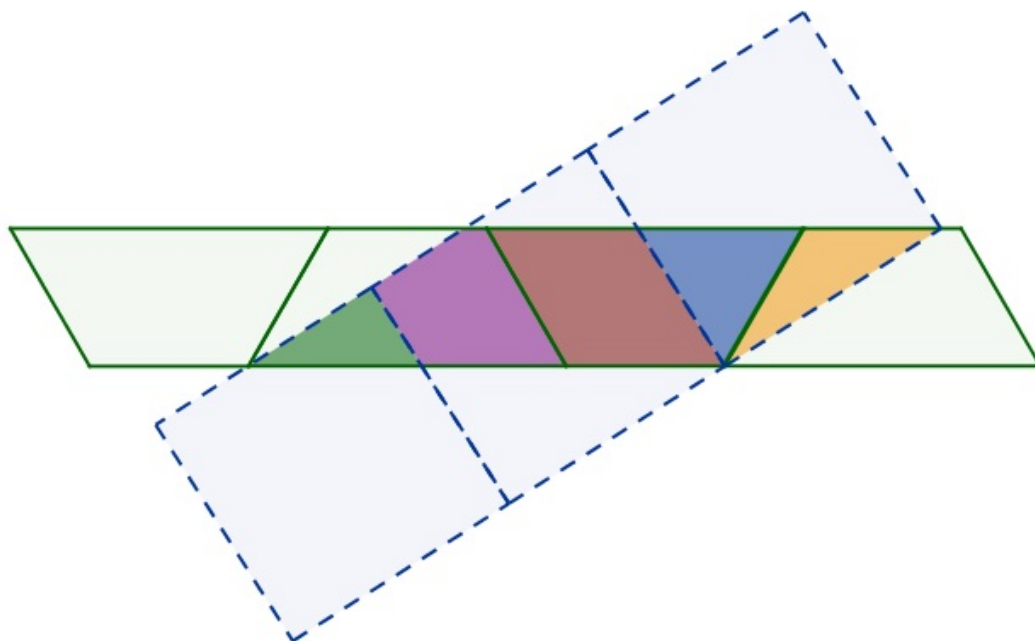


Fonte: Autor.

Organizada as peças do hexágono de modo a preencher a tira simples hexagonal,

é preciso sobrepor à esta a *Tira-P*, formada pelos quadrados. Para reduzir o número de peças desta dissecção Busschop optou por fazer coincidir o vértice de um dos quadrados da tira com o vértice do hexágono como mostra a Figura 25, obtendo assim uma dissecção em 5 peças. Observe que as 5 peças que formam esta dissecção, aparecem em destaque na figura e correspondem a intersecção das duas tiras.

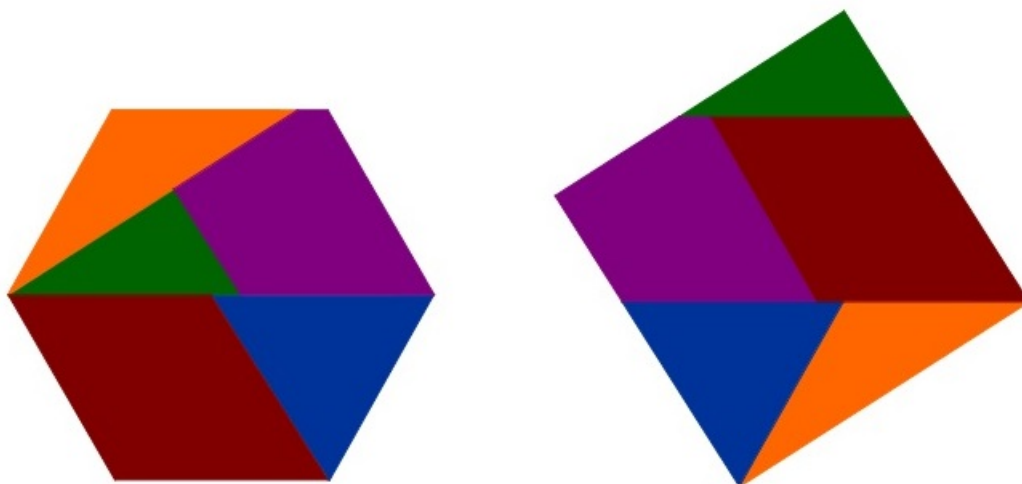
Figura 25: Tira-PP de hexágonos e quadrados



Fonte: Autor.

Na Figura 26, podemos ver as 5 peças desta dissecção reunidas na composição do hexágono regular e do quadrado, onde podemos verificar de forma clara a equivalência entre a área dos dois polígonos.

Figura 26: Dissecção de Busschop de um hexágono para quadrado



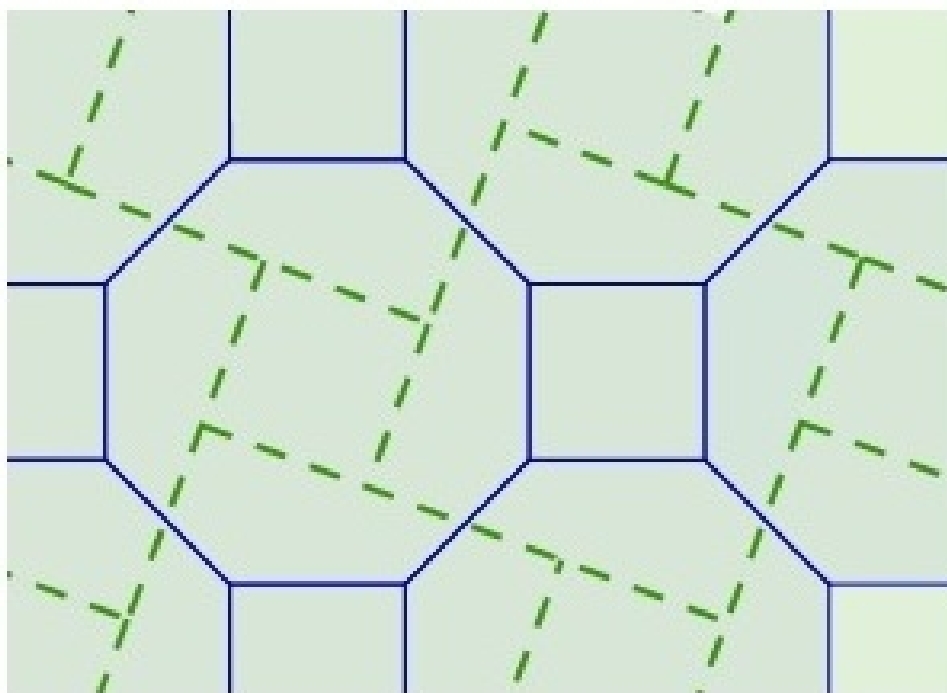
Fonte: Autor.

Observe ainda, que esta dissecção é do tipo translacional, pois todas as peças foram transladadas de um polígono para outro sem que houvesse a necessidade de que alguma peça fosse rotacionada ou virada.

Outra técnica que abordaremos aqui é a *técnica da tesselação (ou mosaico/ou pavimentação)*, que consiste em usar um conjunto de figuras planas para ladrilhar e recobrir o plano, de modo que as figuras não se sobreponham. As figuras usadas para ladrilhar um plano são chamadas de elementos de tesselação e podem ser usadas uma ou mais figuras em uma mesma ladrilhagem. Se tivermos duas tesselações diferentes compostas por elementos de mesma área e sobrepormos uma a outra, é possível ver como fazer a dissecção de uma figura para outra.

A Figura 27 mostra a dissecção por tesselação de um octógono para um quadrado em 5 peças, que segundo Frederickson (2017) foi originada a mais de 700 anos, mas que em 1926 Henry Dudeney noticiou a redescoberta desta belíssima dissecção pelo matemático Geoffrey Thomas Bennett.

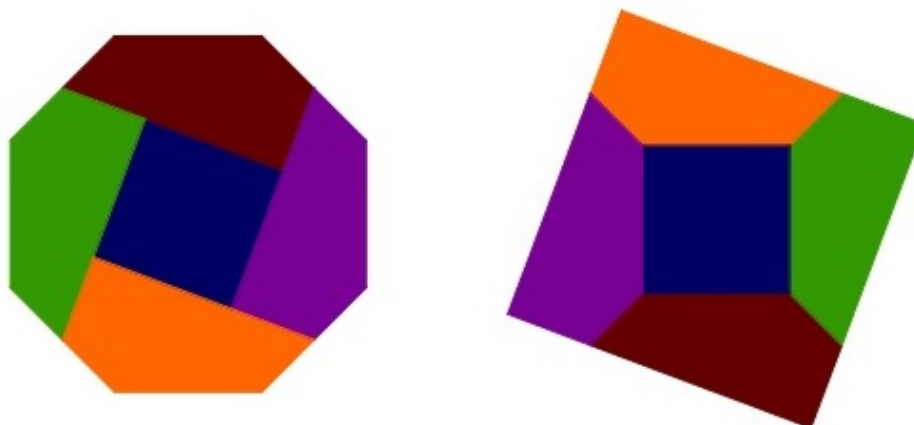
Figura 27: Dissecção por sobreposição de tesselação



Fonte: Autor.

Perceba que para esta dissecção foi ladrilhado um plano com um octógono regular e um quadrado de lado igual ao lado do octógono. Para a outra tesselação foi usado um par de quadrados, um maior com a mesma área que o octógono e um menor com a medida do lado igual ao lado do octógono, apresentado na figura em linhas tracejadas. Depois foi sobreposta as duas tesselações de modo que os centros dos quadrados pequenos coincidissem com o centro do octógono e do quadrado grande.

Figura 28: Dissecção de um octógono para um quadrado



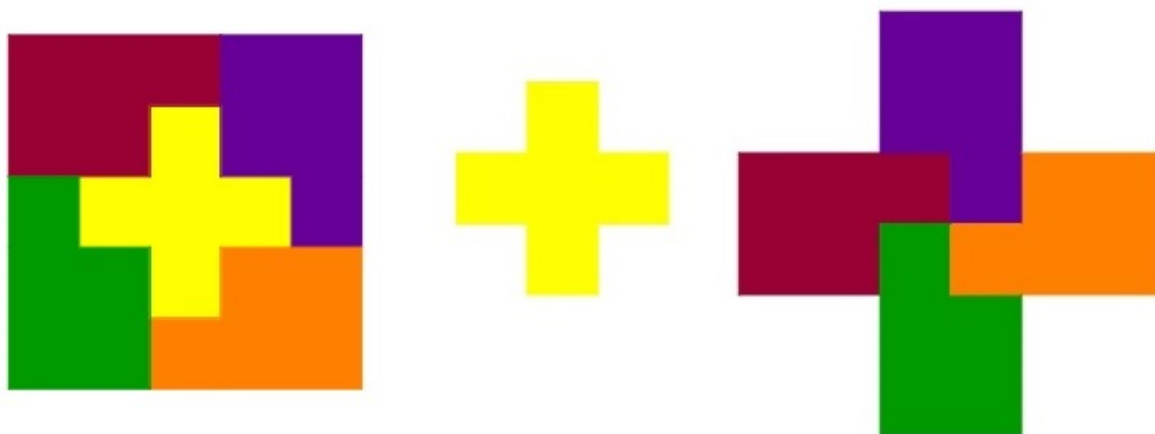
Fonte: Autor.

Na Figura 28 podemos ver o resultado da dissecção mostrada na Figura 27. É fácil perceber, pela composição das figuras, que o octógono regular e o quadrado grande possuem mesma área.

A terceira técnica que apresentaremos aqui é a *racional*, que consiste em seccionar uma figura fazendo cortes paralelos, a algum segmento de linha correspondente aos lados da figura. O comprimento do segmento deste corte é igual a um número racional vezes o comprimento do lado ao qual é paralelo. Acredita-se que as dissecções racionais são as mais numerosas, devido a sua facilidade de ser criada.

A dissecção de um quadrado para duas cruzes, apresentada na Figura 29, é um exemplo de dissecção racional apresentada por Sam Loyd a revista *Tib-bits* em 1897. Nesta dissecção a cruz menor é um quarto da área da cruz maior e os cortes são todos verticais ou horizontais e com medida de comprimento igual ao lado da cruz menor ou duas vezes o lado desta.

Figura 29: Dissecção de um quadrado para duas cruzes



Fonte: Autor.

Podemos perceber pela composição das figuras, que a área do quadrado é equiva-

lente a soma das áreas das duas cruzeiras mostradas, e que se trata de uma dissecção do tipo translacional, pois conseguimos mover as peças de uma figura para a outra sem precisar rotacionar ou virar alguma peça.

Como já mencionado, o uso de dissecções foi utilizado pelos gregos para apresentar demonstrações do Teorema de Pitágoras, algumas dessas demonstrações até foram citadas nos livros *Os Elementos* de Euclides. Veremos então, nos capítulos a seguir, algumas formas de demonstrar este teorema de forma geométrica, por meio de dissecções de figuras planas.

4 PITÁGORAS

A vida de Pitágoras é envolta em muitas histórias não comprovadas, logo não se tem certeza do que seria lenda ou real, isso se deve ao fato de muitas biografias a seu respeito terem sido escritas há muitos anos e se perdido com o tempo.

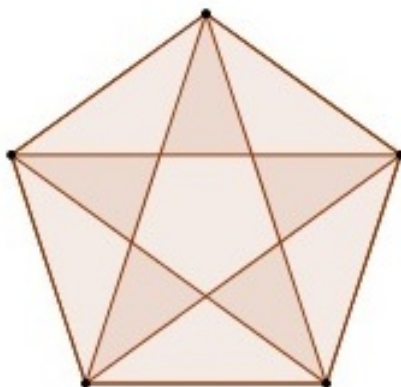
Segundo Eves (2011), a principal fonte de informações sobre a matemática grega encontra-se no Sumário Eudemiano, escrito por Proclo. De acordo com tal, Pitágoras nasceu na Ilha de Samos, na Grécia, por volta de 572 a.C., próximo a cidade de Mileto, onde Tales residia. Acredita-se então que Pitágoras foi enviado ainda muito jovem para Mileto onde foi discípulo de Tales.

Durante a sua juventude viajou pelo Egito e Babilônia onde se aperfeiçoou e aprendeu sobre matemática, filosofia, astronomia, entre outras. Quando Pitágoras retornou a Grécia, estabeleceu-se na cidade de Crotona, na costa sudeste da região conhecida como Magna Grécia, onde hoje se situa a Itália. Fundando neste local, a Escola Pitagórica, que seria um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais.

De acordo com Boyer (1974), a Escola Pitagórica era uma espécie de sociedade politicamente conservadora e de princípios rígidos, onde o conhecimento e propriedades eram comuns, e seus membros eram proibidos de revelar qualquer descoberta ao mundo externo, assim todas as contribuições eram atribuídas aos pitagóricos, como se tornaram conhecidos os membros da escola. Por este motivo e pelo fato dos ensinamentos serem passados de forma oral, não se sabe precisamente o que foi descoberto por Pitágoras ou por seus discípulos.

A escola tinha por lema "Tudo é número", pois acreditavam que os mesmos possuíam propriedades mágicas, e tinham como símbolo o pentagrama (Uma estrela de cinco pontas inscrita num pentágono), o pentágono e a estrela nele inscrita composta por diagonais, possuem propriedades que os pitagóricos consideravam místicas.

Figura 30: Pentagrama - símbolo da escola Pitagórica



Fonte: Autor.

Com o passar do tempo, devido à forte influência desta sociedade, forças democráticas do sul da Itália atacaram e destruíram os prédios da escola, destruindo assim a sociedade e forçando Pitágoras fugir para cidade de Metaponto, onde acredita-se que morreu por volta dos 80 anos de idade.

4.1 Teorema de Pitágoras

Existem indícios históricos de que os babilônios já tinham conhecimento do teorema que mais tarde ficaria conhecido como o Teorema de Pitágoras, porém não existia nenhuma demonstração do mesmo. No *Plimpton 322*, uma espécie de tábula de argila de origem babilônica que acredita-se ter sido escrita por volta de 1800 a.C. e que atualmente se encontra na Universidade de Columbia nos Estados Unidos, especialistas encontraram ternos pitagóricos, o que comprova que os babilônios já tinham conhecimento da relação entre os lados do triângulo retângulo. Pois, como afirma Eves (2011):

Estreitamente ligado ao Teorema de Pitágoras está o problema de encontrar inteiros a , b e c que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Um terno de números dessa espécie recebe a designação de terno pitagórico e, como vimos na Seção 2-6, a análise da tábula Plimpton 322 oferece evidências razoavelmente convincentes de que os babilônios antigos sabiam como calcular esses ternos. (EVES, 2011, p. 104).

Na figura abaixo, temos a imagem do *Plimpton 322*, que se encontra na Universidade de Columbia. Ele possui quatro colunas e quinze linhas, nas quais consta os ternos pitagóricos.

Figura 31: Plimpton 322



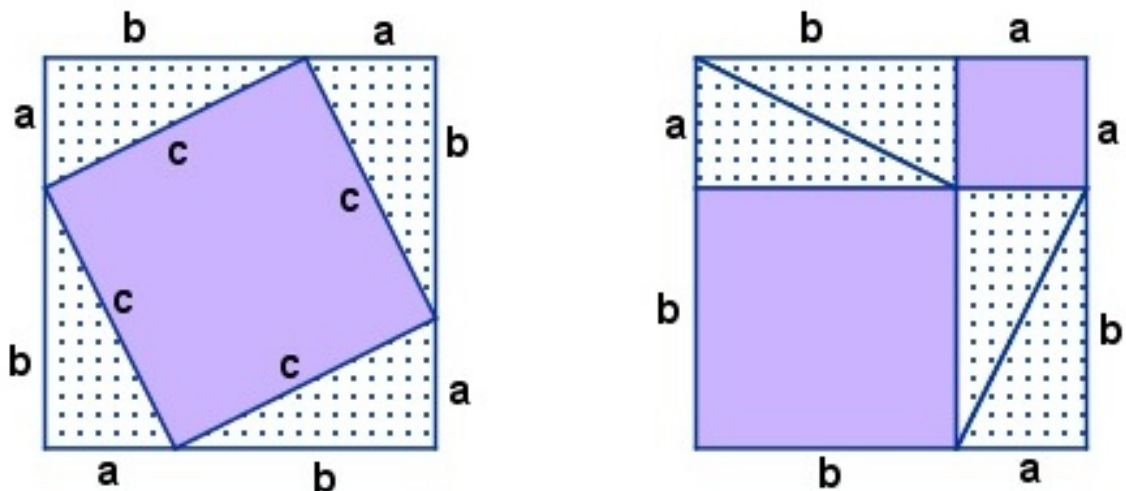
Fonte: Introdução a História da Matemática.

O Teorema de Pitágoras, é o mais famoso teorema matemático que estabelece uma relação entre os lados do triângulo retângulo, afirmando que: "a área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos."

Tal teorema recebeu este nome em homenagem ao matemático Pitágoras, pois acredita-se que foi ele ou um dos alunos da Escola Pitagórica, quem primeiro apresentou uma demonstração de que o teorema era válido para todo triângulo retângulo. Desde então, diversas demonstrações diferentes foram apresentadas por estudiosos a respeito deste teorema.

Não se sabe precisamente qual foi a demonstração exibida por Pitágoras, mas historiadores acreditam que foi uma demonstração geométrica baseada na comparação de áreas por meio de decomposição. Imagina-se que tenha sido uma demonstração como a apresentada na Figura 32:

Figura 32: Provável demonstração de Pitágoras



Fonte: Autor.

Perceba, que no quadrado que tem lado $a + b$, da esquerda, se retirarmos os 4 triângulos retângulos de catetos a e b , restará o quadrado que tem lado c . Se o mesmo processo for feito no quadrado de lado $b + a$, da direita, vai sobrar apenas o quadrado de lado a e o quadrado de lado b , logo concluí-se que, a área do quadrado de lado c corresponde a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem, respectivamente, a e b .

Outra forma de fazer a leitura dessa demonstração é observando a área do quadrado de lado $a + b$, da esquerda, onde temos que sua área é dada pela soma das áreas de 4 triângulos retângulos de catetos com medida a e b , respectivamente, e hipotenusa c mais a área de um quadrado de lado c , ou seja, a área do quadrado da esquerda é:

$$Área_{(Q)} = 4 \times \left(\frac{a \times b}{2} \right) + c^2.$$

Já a área do quadrado de lado $b + a$, da direita, é obtida pela soma das áreas de 4 triângulos retângulos, com catetos a e b mais as áreas de dois quadrados de lados, respectivamente, a e b , assim, a área do quadrado de lado $b + a$, é:

$$\text{Área}_{(Q)} = 4 \times \left(\frac{a \times b}{2} \right) + a^2 + b^2.$$

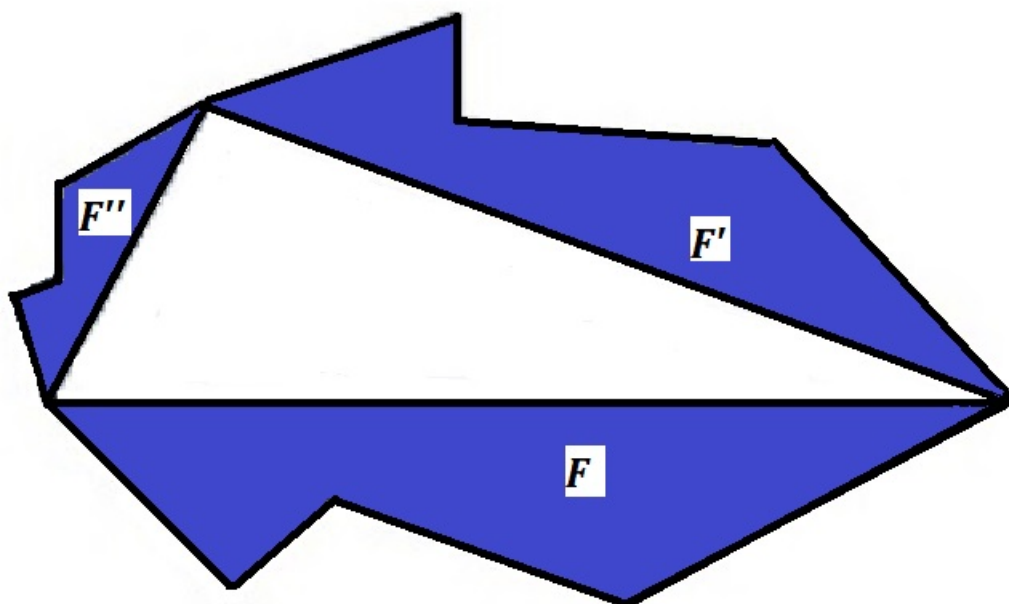
Como as áreas dos quadrados de lados, respectivamente, $a + b$ e $b + a$ são iguais, segue que,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

A demonstração dada acima, trata-se da representação geométrica do Teorema de Pitágoras. No entanto, George Polya (1887-1985), provou que a demonstração deste teorema não se limita apenas aos quadrados, mas que é válida para quaisquer três figuras semelhantes que também sejam construídas sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo, tal demonstração ficou conhecida como Generalização do Teorema de Pitágoras.

Lima (2012, p.57), anuncia tal proposição como, "Se F , F' e F'' são figuras semelhantes, construídas respectivamente sobre a hipotenusa c e sobre os catetos a, b de um triângulo retângulo, então a área de F é igual à soma das áreas de F' e F'' ."

Figura 33: Generalização do Teorema de Pitágoras



Fonte: Meu Professor de Matemática e outras histórias.

Como se sabe, se duas figuras são semelhantes, elas possuem uma razão de semelhança, e a razão entre as medidas de suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Sendo assim, da Figura 33, temos que:

$$\frac{F}{F'} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \implies \frac{F}{F'} = \frac{c^2}{a^2} \quad (4.1)$$

$$\frac{F}{F''} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \implies \frac{F}{F''} = \frac{c^2}{b^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{F'}{F''} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \implies \frac{F'}{F''} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (4.3)$$

Suponha que outras figuras semelhantes S, S' e S'' sejam construídas respectivamente sobre a hipotenusa c e sobre os catetos a, b de um triângulo retângulo, como descrito na proposição em Lima(2012). Daí, tem-se que:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \implies \frac{S}{S'} = \frac{c^2}{a^2} \quad (4.4)$$

$$\frac{S}{S''} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \implies \frac{S}{S''} = \frac{c^2}{b^2} \quad (4.5)$$

$$\frac{S'}{S''} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \implies \frac{S'}{S''} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (4.6)$$

Logo, de (4.1) e de (4.4), tem-se:

$$\frac{F}{F'} = \frac{S}{S'} \implies \frac{S}{F} = \frac{S'}{F'}.$$

De modo análogo, segue-se que:

$$\frac{S}{F} = \frac{S'}{F'} = \frac{S''}{F''} = k.$$

Assim,

$$S = kF; S' = kF' \text{ e } S'' = kF''.$$

Logo,

$$S' + S'' = kF' + kF'' = k(F' + F'') = kF = S.$$

Ou seja, isso significa que se tivermos figuras semelhantes F, F' e F'' construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo de forma que valha a relação $F = F' + F''$, então dados quaisquer três figuras semelhantes S, S' e S'' , construídas de modo análogo ao anterior, também valerá a relação $S = S' + S''$.

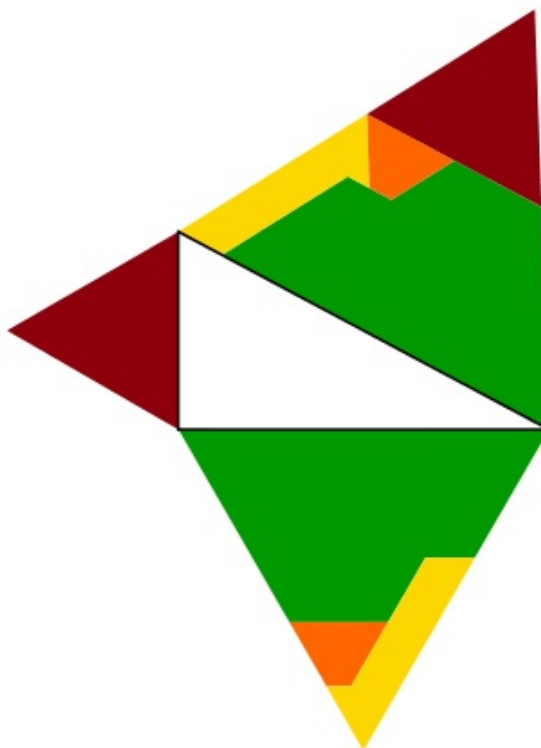
Portanto, conclui-se que se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo a soma das áreas construídas sobre os catetos é igual a área da figura construída sobre a hipotenusa.

4.2 Dissecções e o Teorema de Pitágoras

Como vimos na seção anterior, se construirmos figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras vale ao relacionarmos as áreas destas figuras. Então, observaremos nos exemplos a seguir, que esta relação é válida para diferentes figuras semelhantes, não apenas para o quadrado, como costumamos observar nas demonstrações geométricas desse teorema.

O primeiro exemplo que veremos aqui é uma dissecção apresentada por Harry Cyrus Bradley, em que temos dois triângulos equiláteros que ao serem seccionados, suas peças podem ser movimentadas de forma a montar um outro triângulo equilátero cuja área é igual a soma das áreas dos outros dois.

Figura 34: Demonstração do Teorema de Pitágoras com triângulos



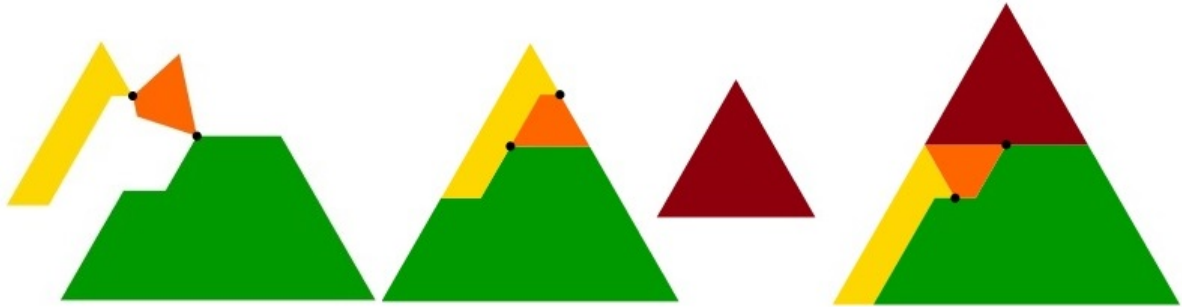
Fonte: Autor.

Observe que na Figura 34 temos três triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo retângulo e podemos concluir facilmente, através do processo de dissecção de figuras geométricas, que a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é equivalente a soma das áreas construídas sobre os catetos, para comprovar isto, basta observar as peças que compõe os triângulos.

A dissecção usada na Figura 34, para demonstrar a validade do Teorema de Pitágoras, trata-se de uma dissecção racional, pois os segmentos que cortam a figura são todos paralelos a algum lado do triângulo. Podemos observar ainda, através da Figura 35 que a dissecção do triângulo médio é articulada, visto que podemos manter as suas

três peças ligadas de forma que ao movimentarmos e encaixar as peças podemos obter um triângulo equilátero ou um trapézio, como o que aparece na composição do triângulo maior.

Figura 35: Dissecção de dois triângulos para um

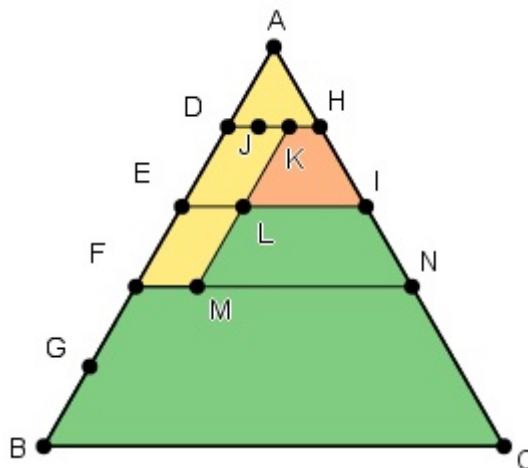


Fonte: Autor.

Para seccionar o triângulo médio, divida o seu lado em 5 partes iguais como mostra na Figura 36, destacado pelos pontos D, E, F e G . Trace um segmento de reta \overline{DH} paralelo ao lado \overline{BC} , em seguida divida este segmento em três partes iguais, marcando os pontos J e K . Trace dois segmentos de reta, \overline{EI} e \overline{FN} , paralelos à \overline{BC} , passando respectivamente pelos pontos E e F . Trace segmento de reta \overline{KM} paralelo ao lado \overline{AB} , em que M é o ponto de interseção com o segmento \overline{FN} . Marque o ponto L de interseção do segmento \overline{KM} com \overline{EI} . Assim, obtemos as peças da nossa dissecção, que serão os polígonos $AFMKH$, $HKLI$ e $BFMLIC$.

Como mostrado na Figura 35, ao girarmos as peças do triângulo ABC , obtemos um trapézio, cujo a base menor corresponde ao lado do triângulo equilátero menor (vermelho). Ao encaixarmos as três peças que compõem o triângulo equilátero médio com o triângulo equilátero menor, obtemos o triângulo equilátero cuja área é a soma da área dos dois anteriores.

Figura 36: Seccionando triângulo equilátero

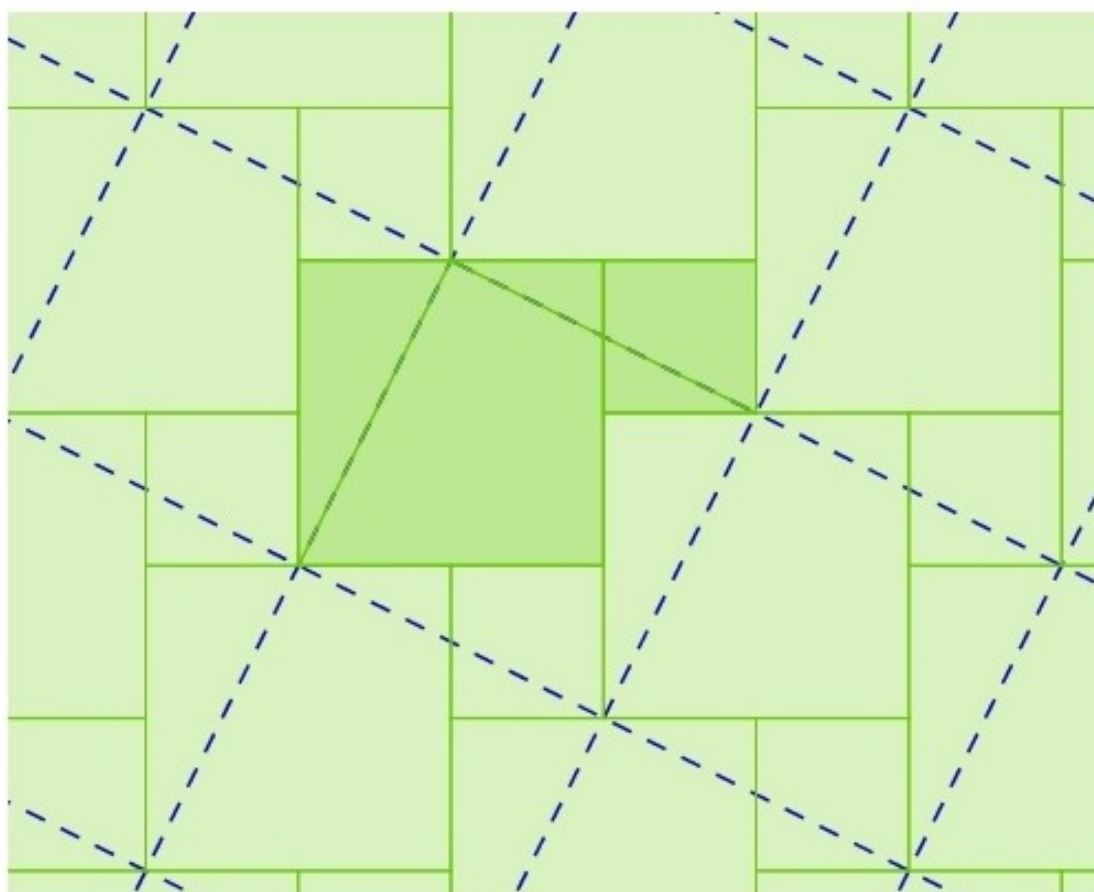


Fonte: Autor.

No exemplo a seguir temos uma demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras que chamou muita atenção no século XVIII, feita por área de quadrados. Paul Mahlo, apresentou em 1908 uma ilustração desta demonstração obtida pela dissecção de quadrados através da técnica de sobreposição de tesselação.

Para obter a dissecção de dois quadrados para um, foram utilizados duas tesselações, a primeira composta por dois quadrados, um grande e um pequeno, e a outra tesselação composta por apenas um quadrado cujo lado é igual a hipotenusa do triângulo retângulo que tem como catetos o lado do quadrado grande e o lado do quadrado pequeno que compunha a primeira tesselação. Ao sobrepor as duas tesselações como mostra na Figura 37, teremos a dissecção em 5 peças de dois quadrados para um.

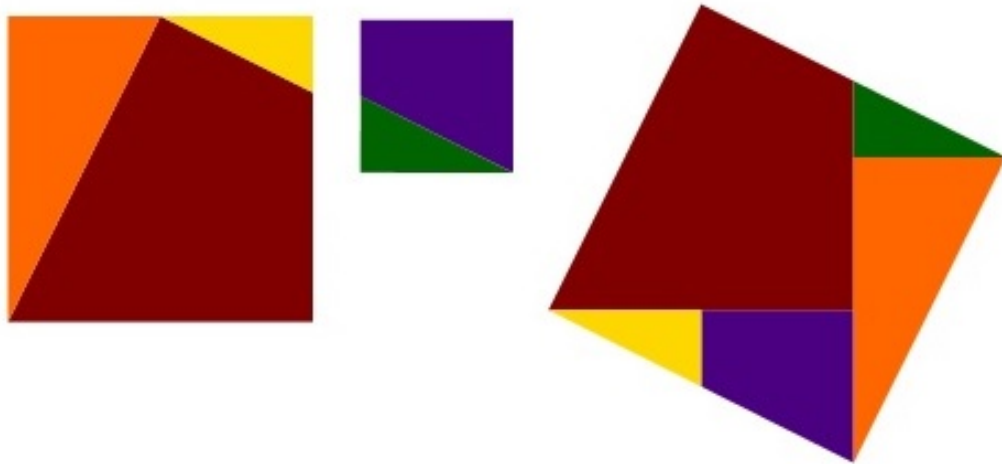
Figura 37: Dissecção por tesselação de quadrados



Fonte: Autor.

Na Figura 38, podemos ver os quadrados que compõem esta dissecção, os dois quadrados da primeira tesselação estão à esquerda, sendo o quadrado maior composto por 3 peças e o quadrado menor composto por 2 peças, resultantes da dissecção por sobreposição de tesselação. Perceba ainda, que o quadrado maior que aparece a direita é formado pela reunião das 5 peças que compõem os outros dois quadrados.

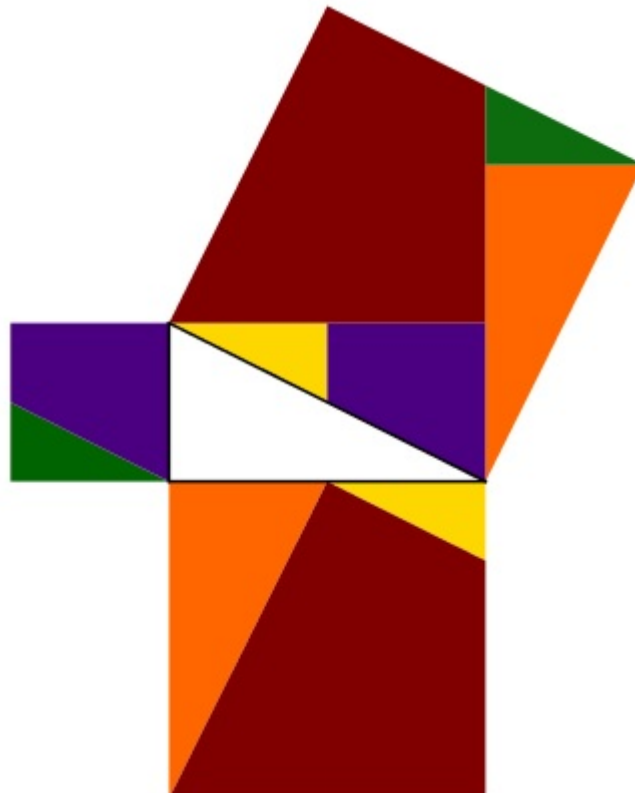
Figura 38: Seccionando dois quadrados para um



Fonte: Autor.

Assim, como é possível observar na Figura 39 é válido o Teorema de Pitágoras, pois a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa do mesmo triângulo e podemos verificar isso apenas transladando as peças que compõem os dois quadrados menores e reorganizando para formar o quadrado maior.

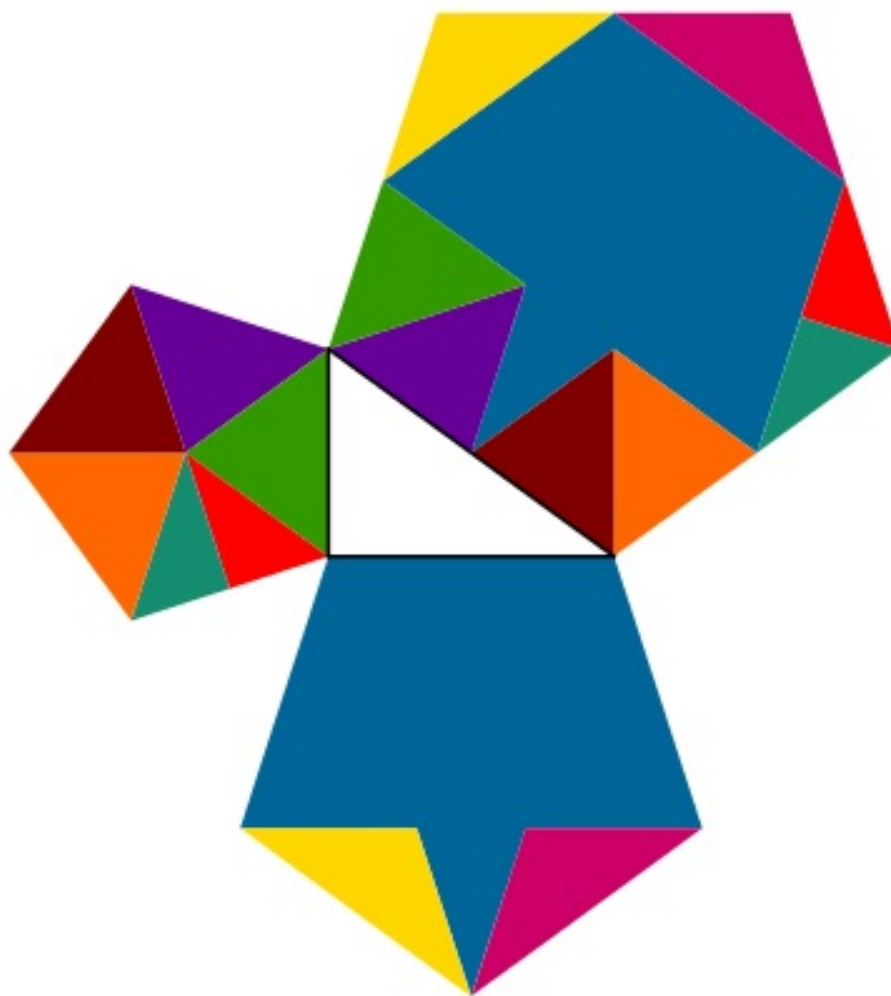
Figura 39: Demonstração do Teorema de Pitágoras por área de quadrados



Fonte: Autor.

No próximo exemplo, veremos uma demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras através da dissecção de pentágonos semelhantes construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. É uma dissecção articulável em 9 peças apresentada por Greg N. Frederickson.

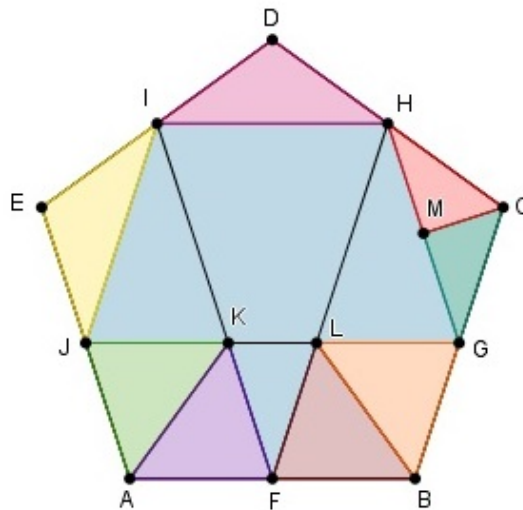
Figura 40: Demonstração do Teorema de Pitágoras com pentágonos regulares



Fonte: Autor.

A Figura 41 mostra o pentágono regular maior, que tem a medida do lado igual a hipotenusa do triângulo retângulo apresentado, cuja dissecção foi feita pelo método racional. Para obtermos tal dissecção, basta marcar o ponto médio de cada lado do pentágono $ABCDE$, representados na figura pelos pontos F, G, H, I e J . Em seguida trace os segmentos de reta \overline{GJ} e \overline{HI} , depois trace o segmento de reta \overline{FI} e \overline{FH} e marque os respectivos pontos K e L , de intersecção com o segmento \overline{GJ} . Daí, trace o polígono $FLGHIJK$. Marque ainda o ponto médio M do segmento \overline{GH} e trace os polígonos CMG e CMH . Trace também os polígonos GLB, BLF, FKA, AKJ, JEI e IDH obtendo assim as 9 peças da dissecção.

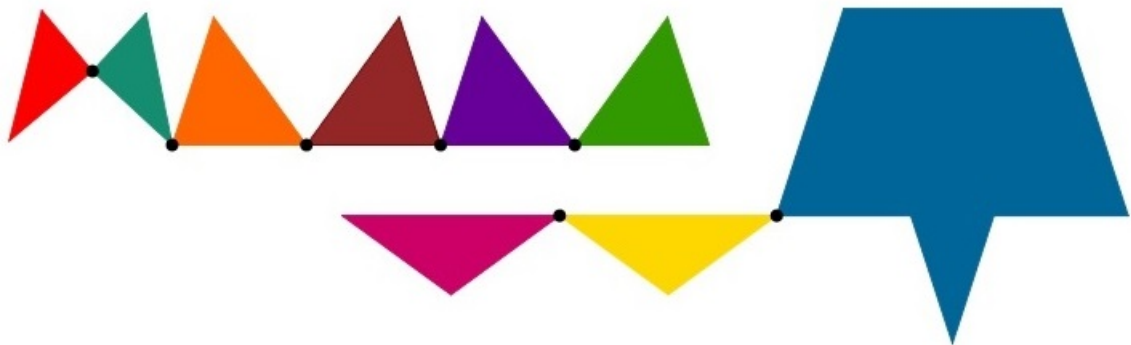
Figura 41: Dissecção de um pentágono regular em 9 peças



Fonte: Autor.

Na Figura 42 podemos observar as duas tiras articuladas, formadas pelas peças seccionadas do pentágono maior, a primeira tira é composta pelas 6 peças que formam o pentágono regular menor e a segunda tira é composta pelas 3 peças que formam o pentágono regular médio.

Figura 42: Peças articuladas do pentágono regular



Fonte: Autor.

Observe que se juntarmos o triângulo vermelho e o azul-esverdeado da primeira tira, formando outro triângulo, se segurarmos este novo triângulo e girarmos as demais peças no sentido horário, vamos obter o pentágono regular menor apresentado na Figura 43. Da mesma forma, se na segunda tira de peças segurarmos o polígono azul e girarmos as demais peças no sentido anti-horário vamos formar o pentágono médio que mostra a Figura 43. Portanto a área do pentágono regular maior, apresentado na Figura 43 é equivalente a soma da área dos outros dois pentágonos, já que é composto pelas 6 peças que formam o pentágono menor mais as 3 peças que compõe o pentágono médio. Comprovando assim que é válido a Generalização do Teorema de Pitágoras, conforme apresentado na Figura 40.

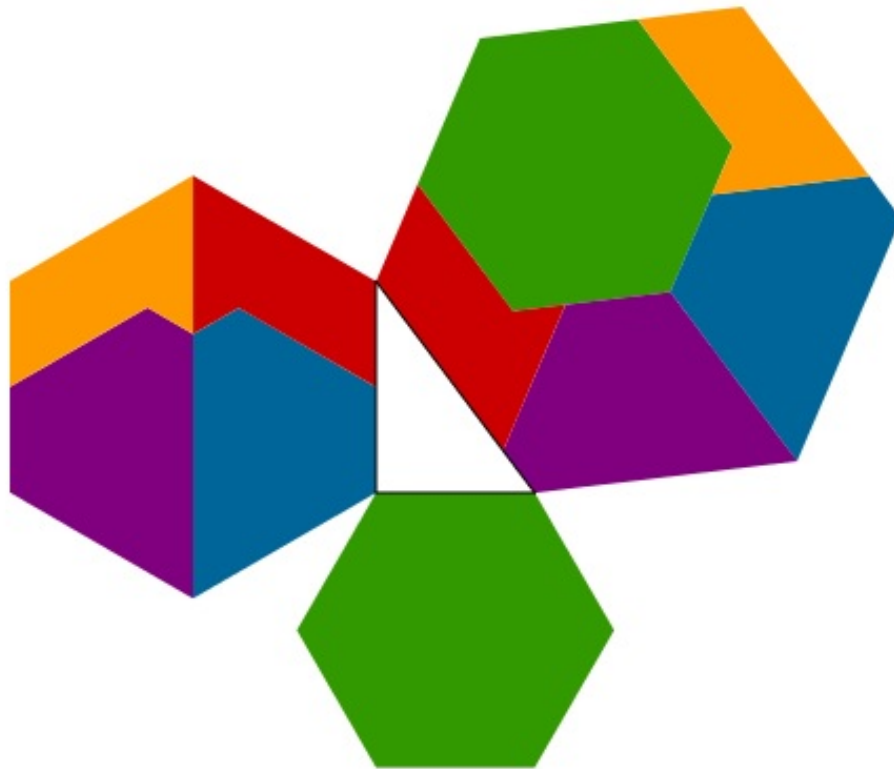
Figura 43: Composição dos pentágonos



Fonte: Autor.

No exemplo a seguir, podemos observar a validade da Generalização do Teorema de Pitágoras por hexágonos regulares construídos sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. É fácil perceber na Figura 44 que a área do hexágono construído sobre a hipotenusa é equivalente a soma das áreas dos outros dois hexágonos construídos sobre os catetos do mesmo triângulo retângulo, basta observarmos as peças que compõem cada hexágono.

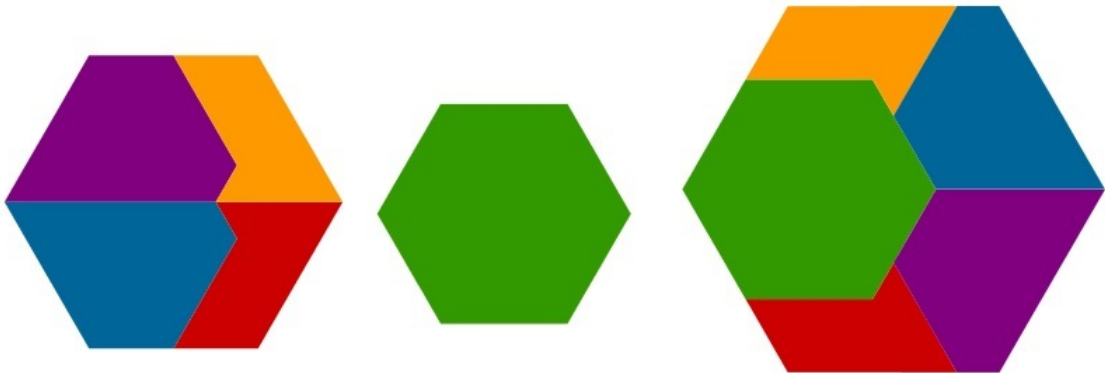
Figura 44: Demonstração do Teorema de Pitágoras por área de hexágonos



Fonte: Autor.

A composição dos hexágonos regulares apresentados na Figura 44 é o resultado de uma dissecção apresentada por James Schmerl, de dois hexágonos para um, em apenas cinco peças. Para obter tal dissecção, ele seccionou o hexágono médio em quatro peças e o hexágono pequeno deixou sem cortes, conforme mostra na Figura 45, depois para compor o hexágono regular maior foi trasladado o hexágono menor e rotacionado as peças do hexágono médio e organizadas de modo a compô-lo.

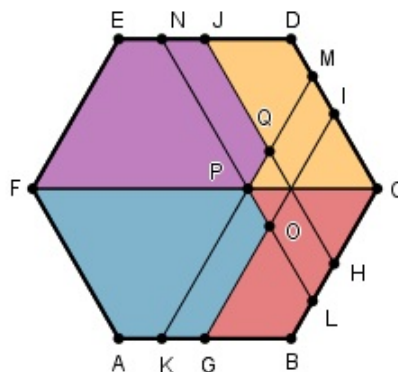
Figura 45: Dissecção de dois hexágonos para um



Fonte: Autor.

Para seccionar o hexágono regular médio, foi utilizado a técnica de dissecção racional. Para isso, trace o segmento \overline{CF} , depois marque o ponto médio dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DE} , respectivamente os pontos G , H , I e J . Em seguida marque o ponto médio dos segmentos \overline{AG} , \overline{BH} , \overline{ID} e \overline{JE} , respectivamente os pontos K , L , M e N . Depois, trace os segmentos de reta \overline{GI} e \overline{KM} , paralelos ao lado \overline{BC} , e os segmentos \overline{HJ} e \overline{LN} paralelos a ao lado \overline{CD} . Marque também o ponto O de intersecção entre os segmentos \overline{GI} e \overline{LN} , o ponto P de intersecção entre os segmentos \overline{KM} e \overline{LN} e o ponto Q de intersecção entre os segmentos \overline{KM} e \overline{HJ} . Assim, obtemos os polígonos $AGOPF$, $GBCPO$, $CDJQP$ e $PQJEF$ que compõem o hexágono regular médio, como mostra na Figura 46.

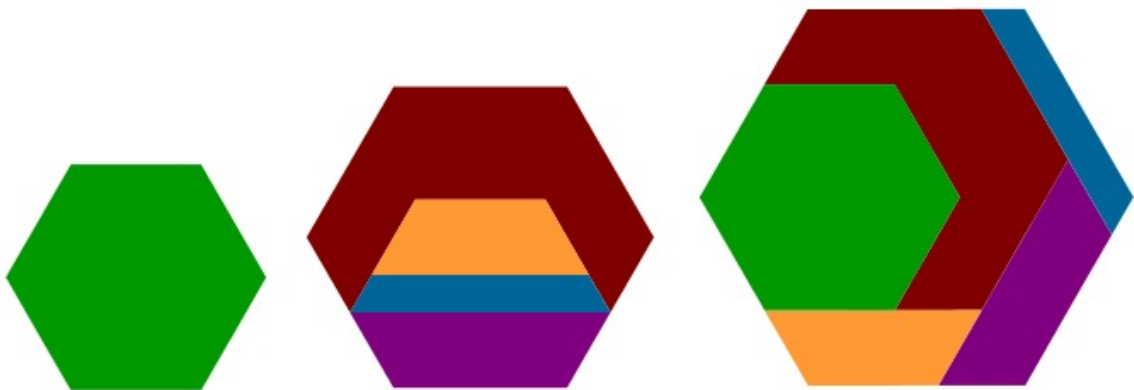
Figura 46: Dissecção do hexágono



Fonte: Autor.

Frederickson (1997), propôs a criação de uma dissecção de dois hexágonos para um, em apenas 5 peças no qual fosse válida a relação $3^2 + 4^2 = 5^2$, para suas áreas, e mantendo um dos hexágonos sem cortes. No exemplo a seguir, apresentamos uma solução, que até onde sabemos, é totalmente nova.

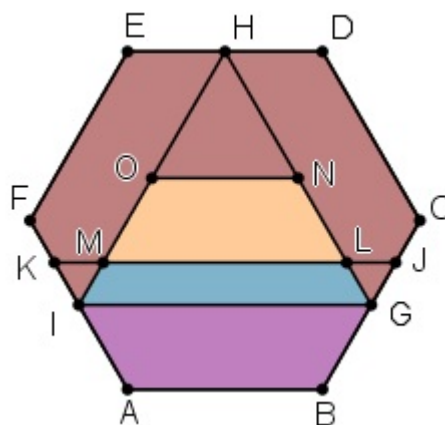
Figura 47: Dissecção de dois hexágonos para um em 5 peças



Fonte: Autor.

Perceba pela Figura 47, que o hexágono regular menor, de lado 3, não tem cortes e que o hexágono regular médio, de lado 4, é composto por 4 peças. Ao juntarmos e organizarmos estas peças por translação e rotação, obtemos o hexágono regular maior, de lado 5, composto por 5 peças como o solicitado no problema de Frederickson.

Figura 48: Dissecção do hexágono em 4 peças

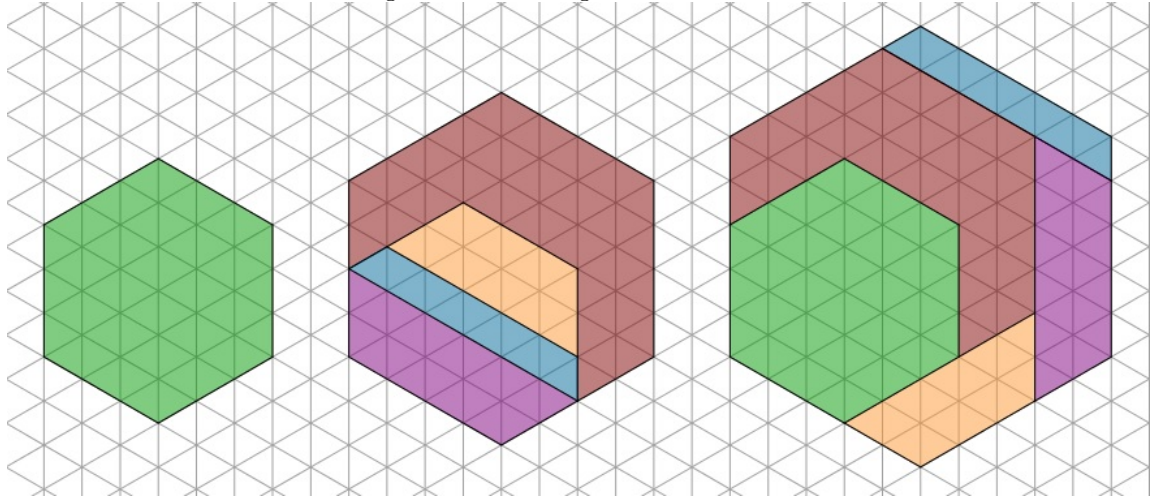


Fonte: Autor.

Na Figura 48, podemos observar que a dissecção do hexágono regular médio foi realizada utilizando a técnica de dissecção racional. Para isto foi tomado o ponto médio dos segmentos \overline{BC} , \overline{DE} e \overline{FA} , respectivamente os pontos G , H e I , em seguida foi traçado os segmentos \overline{GH} , \overline{HI} e \overline{IG} . Depois foi traçado o ponto médio dos segmentos \overline{GC} e \overline{FI} , respectivamente os pontos J e K e traçado o segmento \overline{JK} , que intersecta os segmentos \overline{GH} e \overline{HI} nos pontos L e M . Foi traçado também o ponto médio dos segmentos \overline{GH} e \overline{HI} ,

respectivamente os pontos N e O e traçado o segmento \overline{NO} . Obtendo assim, os polígonos $ABGI$, $GLMI$, $LNOM$ e $GCDEFION$, que compõem o hexágono regular médio.

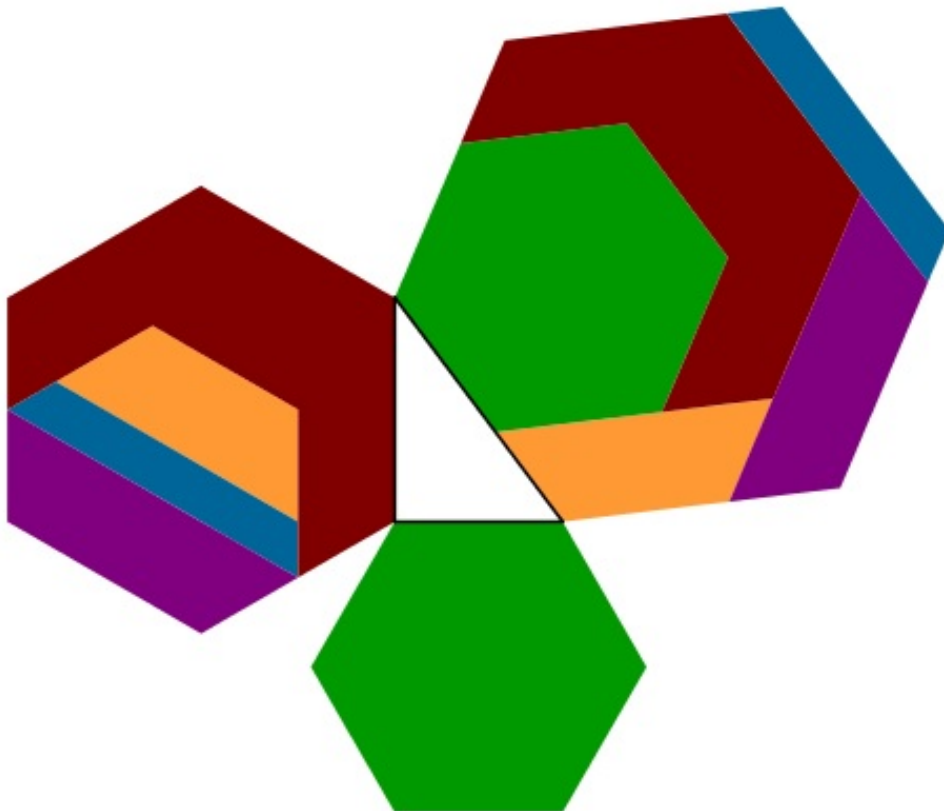
Figura 49: Hexágonos com malha



Fonte: Autor.

Na Figura 49 podemos observar, por meio da malha, a equivalência entre as áreas dos polígonos que compõem os hexágonos de lado 3 e 4 com os polígonos que compõem o hexágono de lado 5.

Figura 50: Demonstração da Generalização do Teorema de Pitágoras

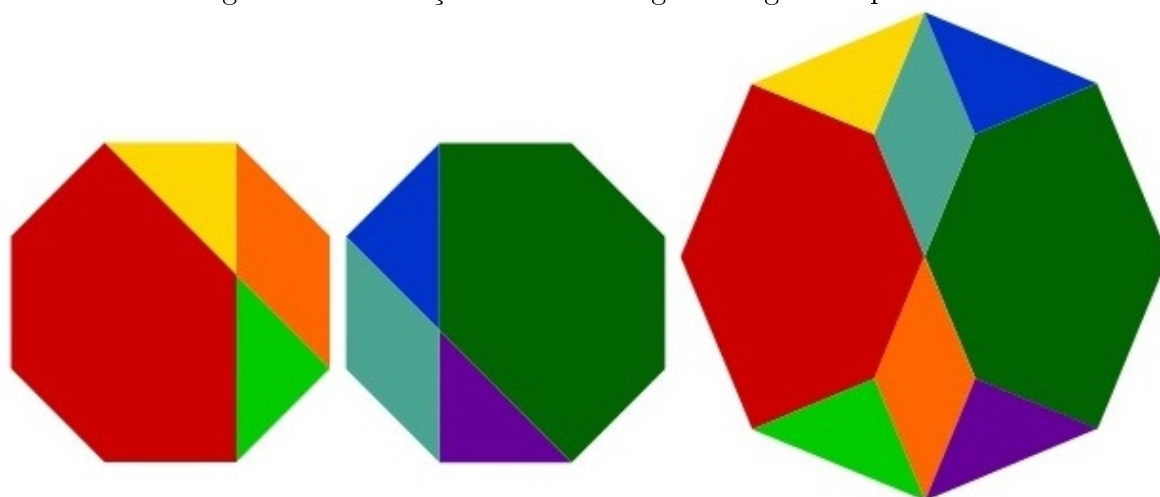


Fonte: Autor.

Como é possível perceber na Figura 47, a área do hexágono regular maior é equivalente a soma das áreas dos outros dois hexágonos regulares e pela Figura 50, podemos observar geometricamente a demonstração da Generalização do Teorema de Pitágoras com hexágonos regulares construídos sobre os lados de um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento 5 e catetos de comprimentos 4 e 3. Para comprovar geometricamente que vale a relação $3^2 + 4^2 = 5^2$, basta verificar que a área do hexágono construído sobre a hipotenusa é composto pelos polígonos que compõem o hexágono médio que foi construído sobre o cateto de medida 4 e pelo hexágono menor construído sobre o cateto de medida 3, logo a área do hexágono construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é equivalente a soma das áreas dos outros dois hexágonos construídos sobre os catetos do mesmo triângulo retângulo.

Em 1964 Harry Lindgren apresentou a dissecção de dois octógonos regulares iguais para um, em apenas 8 peças. A Figura 51 mostra os dois octógonos menores seccionados e o octógono maior composto pelas peças dos outros dois.

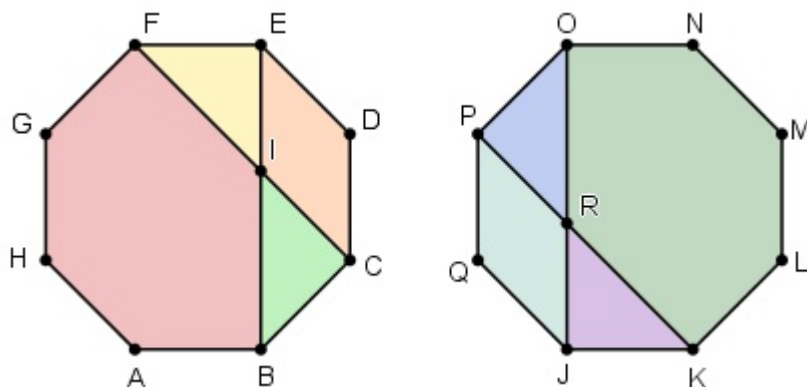
Figura 51: Dissecção de dois octógonos regulares para um



Fonte: Autor.

A dissecção apresentada na Figura 51, foi realizada pela técnica de dissecção racional e para obter as peças desta dissecção foram feitos cortes nos dois octógonos menores como mostra na Figura 52. Foram traçados segmentos de retas paralelos aos lados do octógono, que coincidem com as diagonais do mesmo. No primeiro octógono foi traçado os segmentos \overline{BE} e \overline{CF} e marcando o ponto I de intersecção dos dois segmentos, obtendo assim os polígonos BIC , $CDEI$, EIF e $FIBA$. No outro octógono, foi traçado os segmentos \overline{JO} e \overline{KP} e marcando o ponto R de intersecção dos dois segmentos, gerando assim, os polígonos JRK , $KLMNOR$, ROP e $PQJR$, formando desta forma os oito polígonos que compõem o octógono maior.

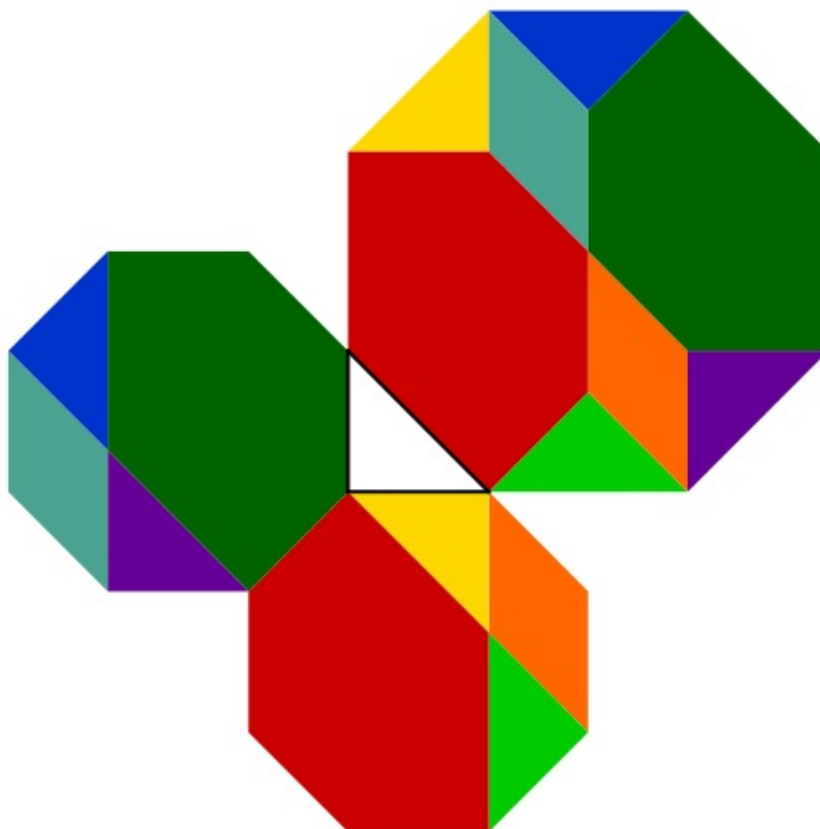
Figura 52: Dissecção de octógonos



Fonte: Autor.

Já na Figura 53, podemos observar que como os octógonos visto neste exemplo são figuras geométricas semelhantes, se os construirmos sobre os lados de um triângulo retângulo fica fácil perceber geometricamente a validade da Generalização do Teorema de Pitágoras, pois se analisarmos a imagem veremos que a área do octógono construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é equivalente a área dos dois octógonos construídos sobre os catetos do mesmo triângulo, uma vez peças que o compõem é soma das peças que compõem os dois octógonos menores.

Figura 53: Demonstração do Teorema de Pitágoras com octógonos



Fonte: Autor.

5 PROPOSTAS DE EXERCÍCIO

Neste capítulo serão apresentadas algumas propostas para trabalhar em sala de aula com dissecções matemáticas. A ideia dos problemas propostos aqui é que o leitor consiga movimentar e organizar todas as peças fornecidas pela dissecção para montar uma outra figura semelhante e de área equivalente.

Traremos inicialmente dissecções com peças em forma de *poliminós* e depois teremos problemas com peças semelhantes as apresentadas ao longo deste trabalho. Os poliminós são figuras planas formadas por quadrados congruentes agrupados de modo que pelo menos um quadrado permaneça conectado com todo o lado de outro quadrado e são classificados de acordo com a quantidade de quadrados que os compõe, no caso da figura ser composta por apenas um quadrado chamamos de monominó. Para obter as peças de poliminós utilizaremos aqui a técnica de dissecção racional. No exemplo, que veremos a seguir teremos peças de monominó e de tetraminós que possuem a forma das peças do famoso jogo eletrônico Tetris.

PROBLEMA 1

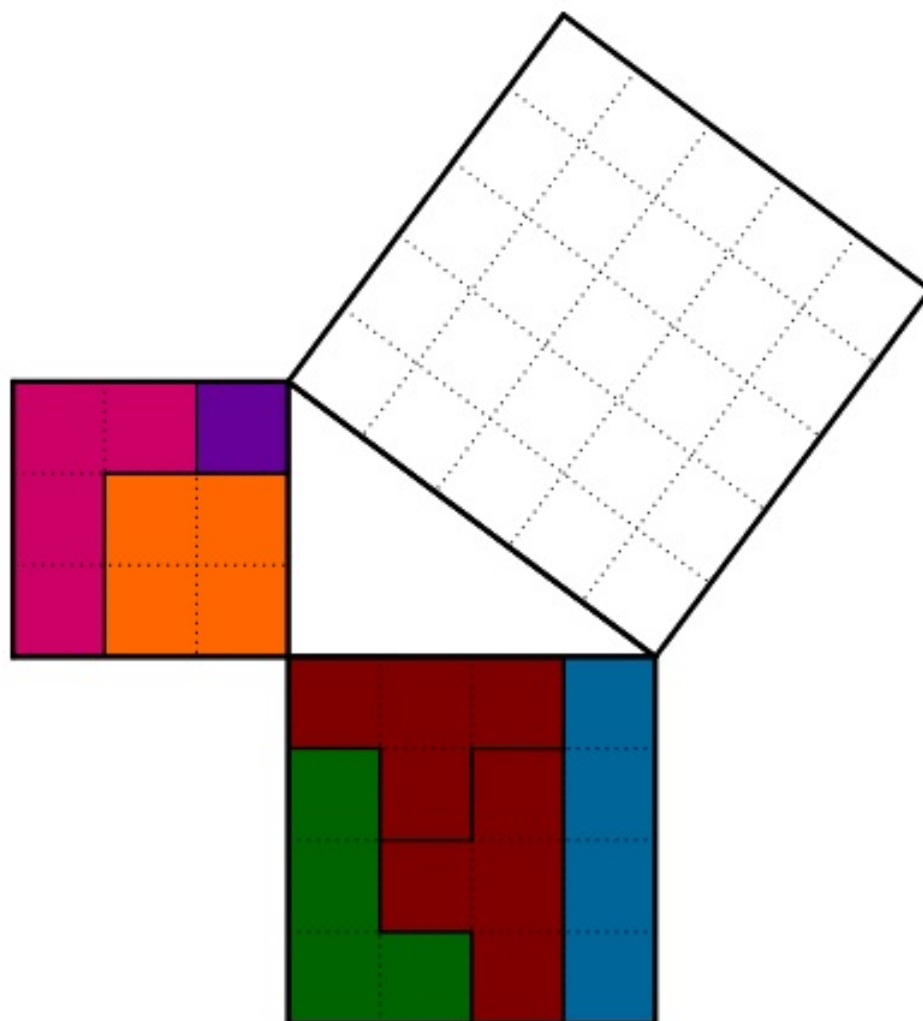
No problema a seguir, os dois quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo, foram seccionados conforme mostra a Figura 55, sendo o quadrado pequeno em 3 peças e o quadrado médio em 4 peças. Uma cópia destas 7 peças está disponível na Figura 54, a proposta aqui é movimentar todas as peças que estão soltas e organizá-las no quadro construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo de forma a preencher toda a sua área sem sobrepor nenhuma das peças ou deixar alguma peça saindo do quadrado. Mostrando assim, geometricamente, que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Figura 54: Peças da dissecção de quadrados



Fonte: Autor.

Figura 55: Dissecção de quadrados em Poliminós

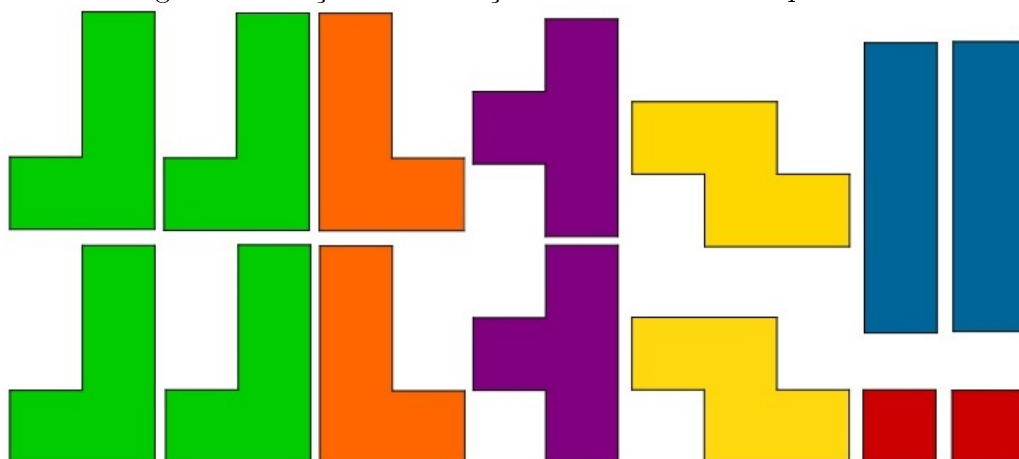


Fonte: Autor.

PROBLEMA 2

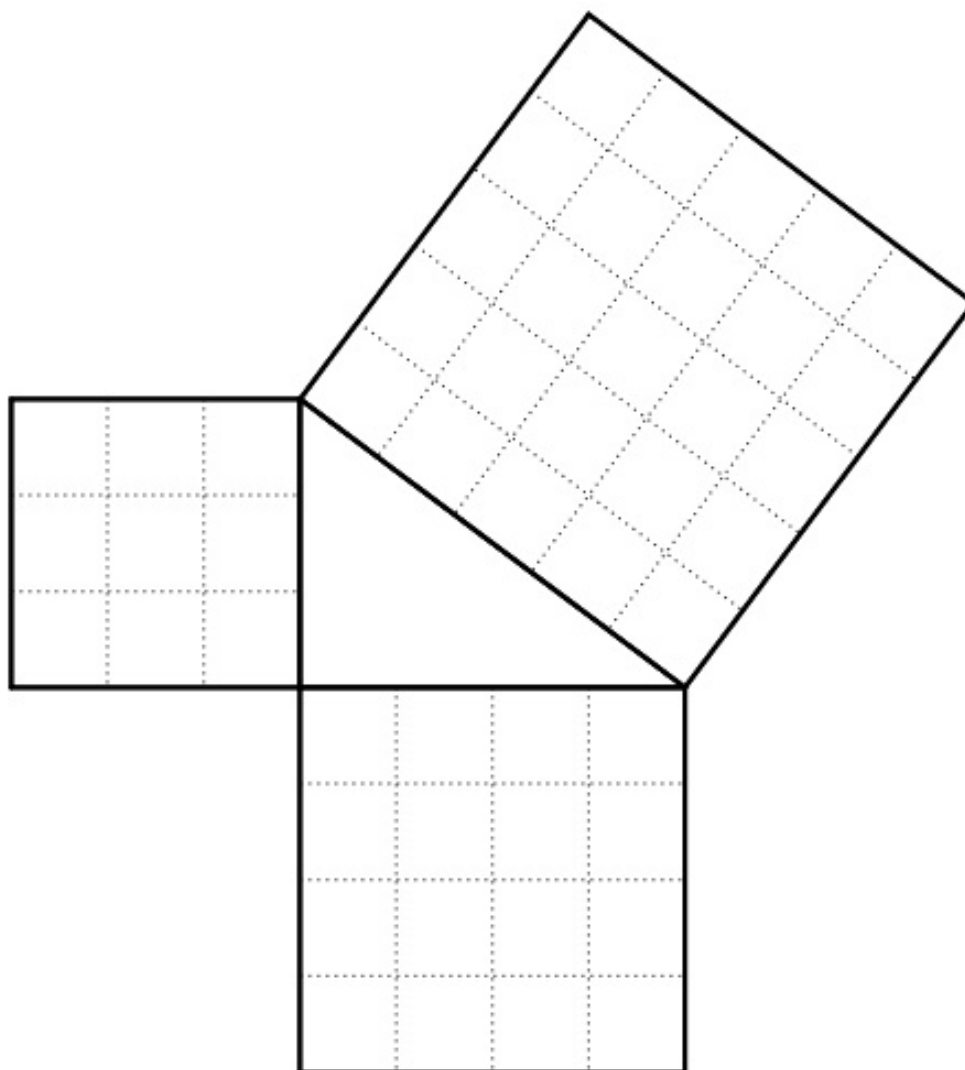
Neste problema temos mais uma dissecção utilizando Poliminós, a proposta é que o leitor utilize todas as peças apresentadas na Figura 56 para completar totalmente a área dos três quadrados construídos sobre os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo apresentado na Figura 57. Como na proposta anterior, as peças que compõem o quadrado construído sobre a hipotenusa é a soma das peças que compõem os outros dois quadrados construídos sobre os catetos. Para facilitar a diversão na montagem deste quebra-cabeça vai uma dica, o quadrado menor foi seccionado em 3 peças e o quadrado médio foi seccionado em 4 peças. Monte o quebra-cabeça da Figura 57 e verifique geometricamente a validade do Teorema de Pitágoras.

Figura 56: Peças da dissecção em Poliminós de quadrados



Fonte: Autor.

Figura 57: Quebra-cabeça de Poliminós



Fonte: Autor.

PROBLEMA 3

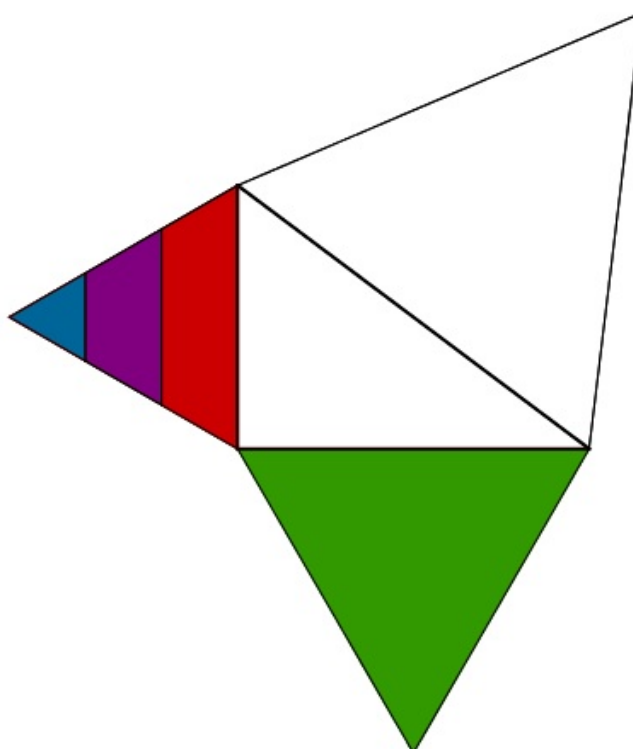
Nesta proposta de atividade, temos uma dissecção apresentada em 1930 por Harry Bradley, de dois triângulos regulares para um, feita em 4 peças e que vale a relação $3^2 + 4^2 = 5^2$, no qual o triângulo de lado 4 permanece sem cortes. A dissecção foi feita utilizando a técnica de dissecção racional. A proposta aqui é que o leitor utilize as peças da Figura 58, que corresponde as peças dos triângulos de lados 3 e 4, para completar a área do triângulo de lado 5 apresentado na Figura 59, as peças podem ser transladadas e ou rotacionadas. Existem pelo menos duas soluções diferentes para este problema, além da que foi fornecida por Harry Bradley.

Figura 58: Peças da dissecção de dois triângulos para um



Fonte: Autor.

Figura 59: Quebra-cabeça com triângulos

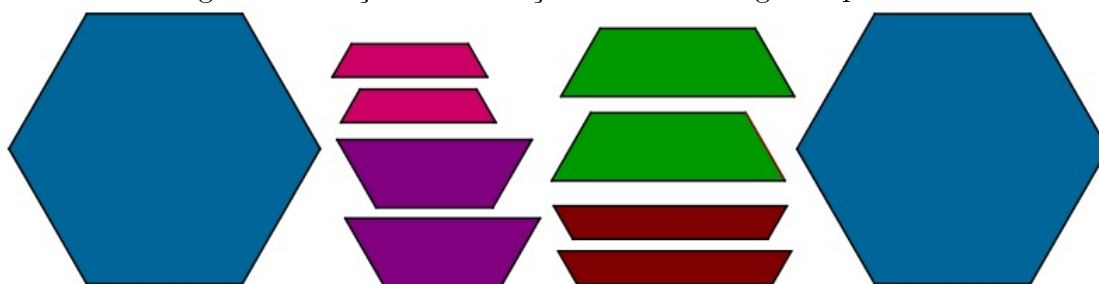


Fonte: Autor.

PROBLEMA 4

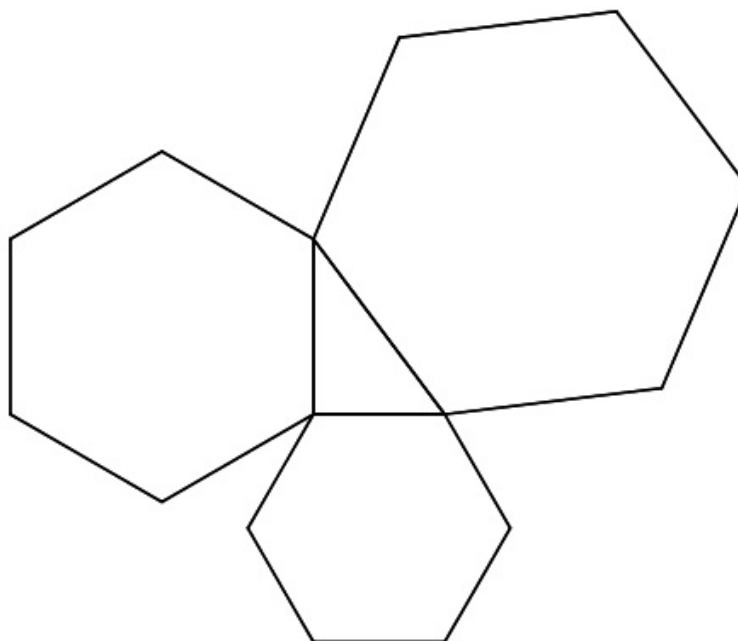
A proposta a seguir é uma dissecção feita por James Schmerl em 1973 onde é válida a relação $3^2 + 4^2 = 5^2$, de dois hexágonos regulares para um em 5 peças e no qual o hexágono regular de lado 4 não tem cortes. A técnica utilizada nesta dissecção foi a racional. A ideia neste problema é que o leitor utilize todas as peças da Figura 60 para montar o quebra-cabeça da Figura 61, que contém três hexágonos regulares construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, as peças podem ser transladadas ou rotacionadas de forma a organizá-las e preencher totalmente a área dos três hexágonos, lembrando que o hexágono de lado 5 é composto pela soma das peças dos outros dois hexágonos. Feito isso, será possível verificar geometricamente que a área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa tem área equivalente a soma das áreas dos hexágonos construídos sobre os catetos.

Figura 60: Peças da dissecção de dois hexágonos para um



Fonte: Autor.

Figura 61: Quebra-cabeça com hexágonos



Fonte: Autor.

PROBLEMA 5

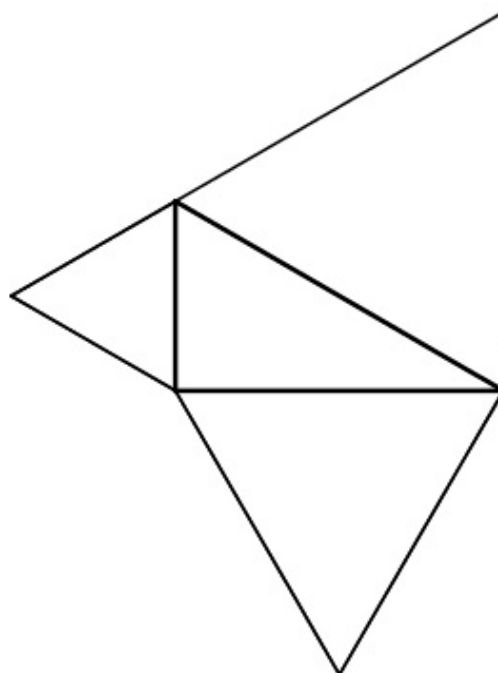
O problema a seguir é mais uma dissecção de dois triângulos regulares para um feito em apenas 4 peças. Trata-se de uma solução apresentada na referência[5], para um problema proposto no Capítulo 5 do mesmo. A secção dos dois triângulos menores, em duas peças cada um, foi feita pela técnica racional. Assim como nos problemas anteriores, a ideia é que o leitor utilize as peças obtidas, que estão expostas na Figura 62 para montar o quebra-cabeça da Figura 63, que tem dois triângulos regulares construídos sobre os catetos do triângulo retângulo e um triângulo regular construído sobre a hipotenusa. Lembre-se que todas as peças devem ser utilizadas e que os triângulos menores foram divididos em duas peças cada, logo o triângulo que está sobre a hipotenusa será composto por 4 peças. Com isso, será possível verificar a validade da Generalização do Teorema de Pitágoras.

Figura 62: Peças da dissecção de triângulos



Fonte: Autor.

Figura 63: Quebra-cabeça de triângulos em 4 peças



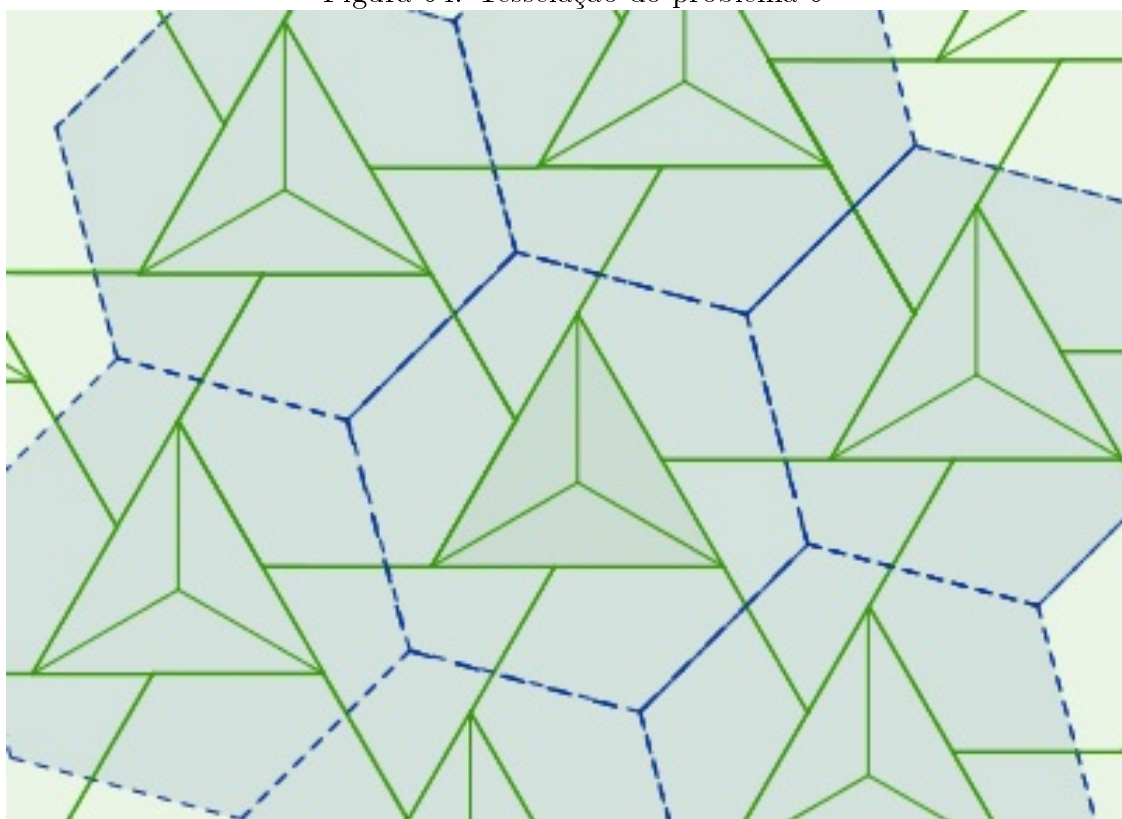
Fonte: Autor.

PROBLEMA 6

Nesta proposta trabalharemos uma dissecção com 9 peças, então talvez o grau de dificuldade para montar este quebra-cabeça seja um pouco maior. Veremos uma dissecção de dois hexágonos regulares de mesmo tamanho para um, apresentada por Harry Lindgren em 1964, feita pela técnica de sobreposição de tesselação.

As tesselações utilizadas foram uma composta por triângulos e hexágonos, no caso os hexágonos de tamanhos menores e a segunda tesselação foi composta somente pelo hexágono de tamanho maior, como podemos ver na Figura 64.

Figura 64: Tesselação do problema 6

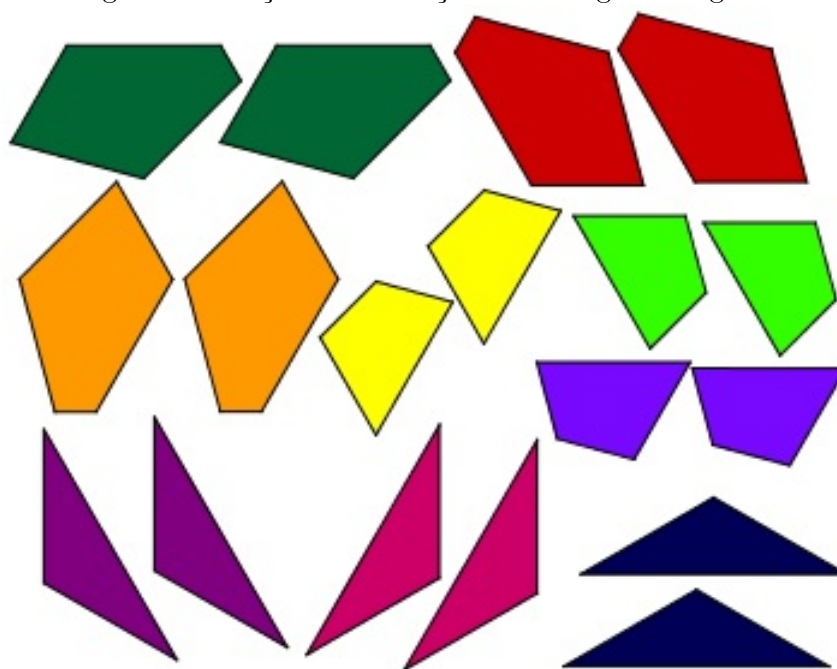


Fonte: Autor.

A ideia neste exemplo é que o leitor utilize todas as peças apresentadas na Figura 65 para montar o quebra-cabeça da Figura 66, que possui dois hexágonos regulares idênticos construídos sobre os catetos do triângulo retângulo e um hexágono regular construído sobre a hipotenusa do mesmo.

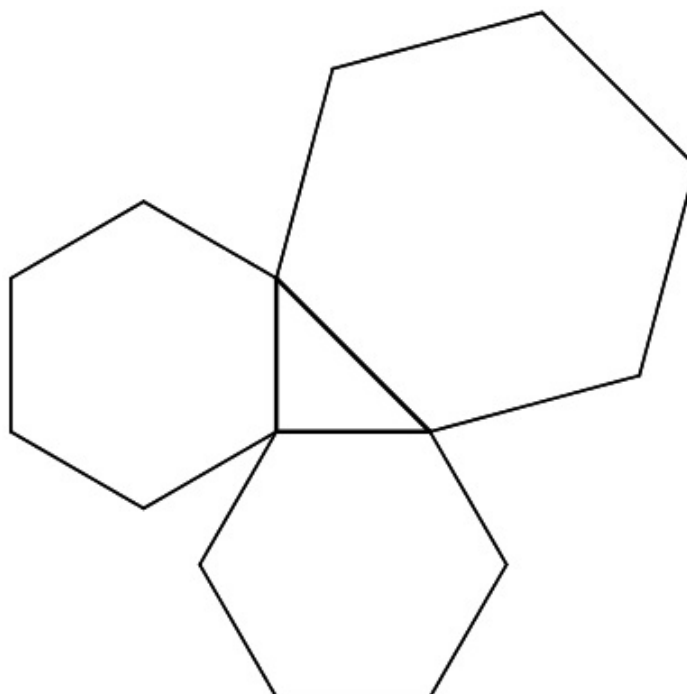
Vai uma dica, um dos hexágonos menores foi seccionado em 3 peças e o outro em 6 peças, lembrando também que o hexágono maior é composto pelas 9 peças que compõe os outros dois. Ao montar a o quebra-cabeça como solicitado, o leitor pode comprovar que a área do hexágono construído sobre a hipotenusa é equivalente a soma das áreas dos dois hexágonos construídos sobre os catetos.

Figura 65: Peças da dissecção de hexágonos regulares



Fonte: Autor.

Figura 66: Quebra-cabeça de hexágonos em 9 peças



Fonte: Autor.

A proposta a seguir é trabalhar a construção de uma dissecção, seguindo o passo a passo de como obter suas peças e quem sabe até ter ideias para criar suas próprias dissecções. Para isso vamos utilizar o software GeoGebra, aqui é importante que o lei-

tor tenha um pouco de conhecimento de como funciona este software e saiba utilizar as ferramentas disponíveis para trabalhar na janela de visualização 2D.

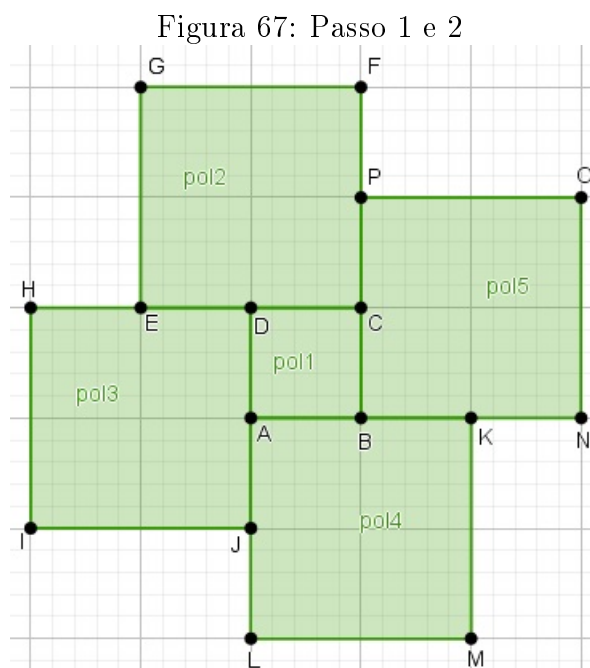
PROBLEMA 7

O problema que utilizaremos aqui para trabalhar no software GeoGebra, será a famosa demonstração do Teorema de Pitágoras apresentada por Henry Perigal em 1873, esta dissecção inclusive foi gravada em sua lápide. Ele fez esta dissecção pela técnica de sobreposição de tesselação, na qual uma é composta por quadrados de mesmo tamanho e a outra é composta por dois quadrados de tamanhos diferentes. Esta secção corta o quadrado de tamanho médio em 4 polígonos congruentes que quando sobrepostos ao quadrado grande a partir dos vértices deixa um espaço no centro equivalente ao quadrado menor.

A ideia desta proposta é que o leitor acompanhe o passo a passo da construção das duas tesselações e como fazer a sobreposição para obter as peças da dissecção, usando as ferramentas do software GeoGebra para que assim, consiga construir as peças deste exemplo bem como de outras dissecções que foram apresentadas ao longo desse trabalho.

Para construção da tesselação de dois quadrados de tamanhos diferentes siga os passos:

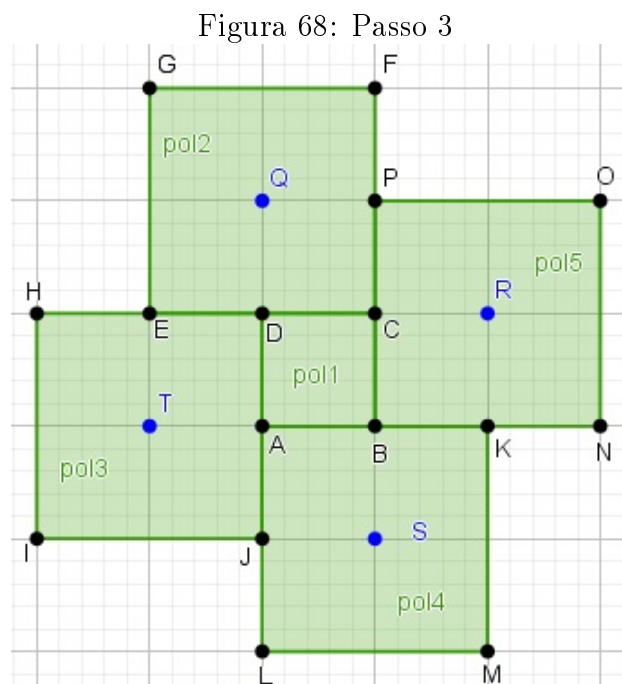
1. Selecione a ferramenta *Polígono regular* e construa o quadrado de lado menor.
2. Em seguida construa em volta do quadrado menor, quadrados iguais de tamanho maior, como mostra a Figura 67.



Fonte: Autor.

Agora para construção da segunda tesselação, o leitor pode optar por já construí-la sobre a primeira ou fazê-la a parte e arrastar para fazer a sobreposição. Caso opte por fazer pela primeira ideia, siga os seguintes passos:

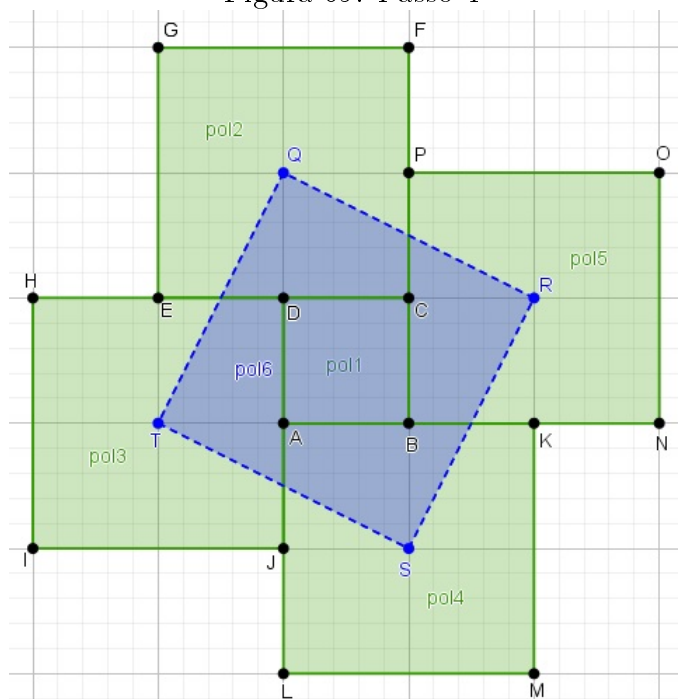
3. Utilize a ferramenta *Ponto Médio ou Centro* e marque o centro dos quadrados de tamanho maior que foram desenhados na primeira tesselação, como mostra a Figura 68.



Fonte: Autor.

4. Usando a ferramenta *Polígono regular* construa o quadrado de lado igual a distância entre dois centros, como ilustrado na Figura 69. Com esta sobreposição já ficará destacada as peças desta secção.

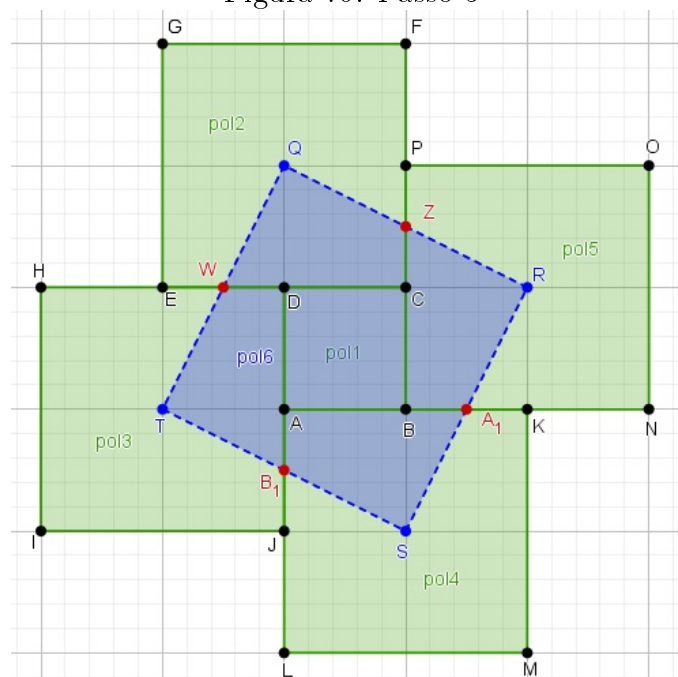
Figura 69: Passo 4



Fonte: Autor.

- Com a ferramenta *Interseção de dois objetos*, marque os pontos de interseção entre os lados do quadrado da segunda tesselação e os lados dos quadrados da primeira, conforme destacado de vermelho na Figura 70.

Figura 70: Passo 5



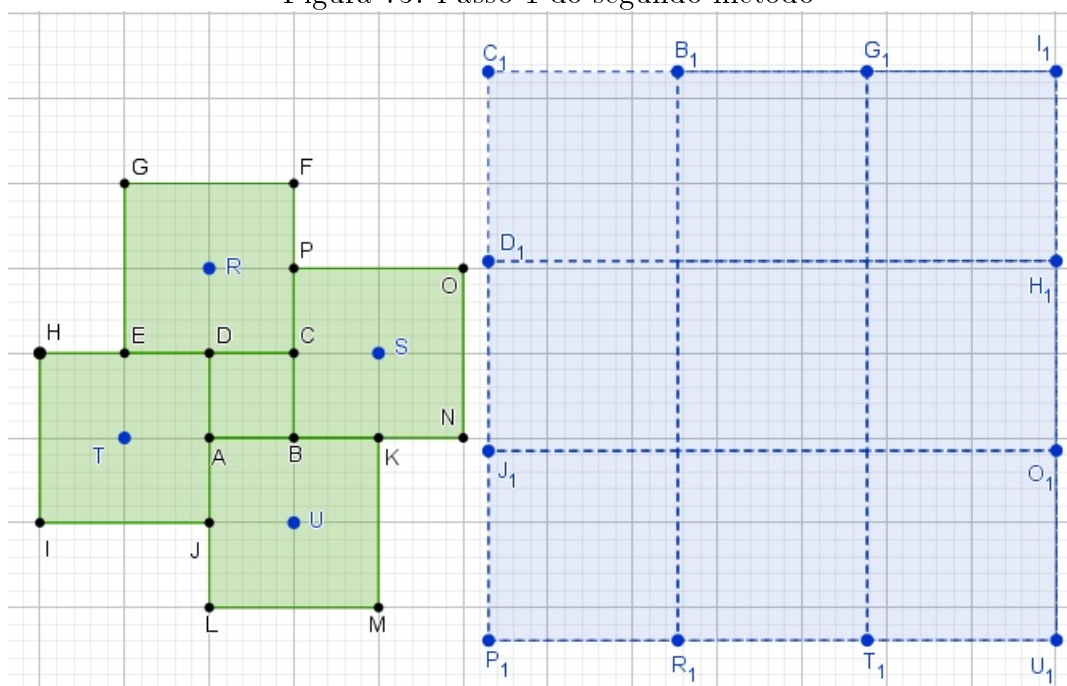
Fonte: Autor.

Perceba que o quadrado construído sobre a primeira tesselação, possui no centro o quadrado de tamanho menor e em volta quatro polígonos congruentes, que compõem as peças desta dissecção. Note, que se organizarmos os quatro polígonos congruentes formaremos o quadrado de tamanho médio, e estes junto ao quadrado pequeno completam o quadrado de tamanho maior, que tem lado igual ao comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo que possui catetos de comprimento iguais aos lados dos quadrados da primeira tesselação.

Caso o leitor opte por construir a segunda tesselação pela segunda ideia, pode fazê-lo seguindo os seguintes passos:

1. Usando a ferramenta *Polígono regular* construa quadrados iguais, um ao lado do outro, cujo comprimento do lado seja igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo que tem catetos de comprimento iguais aos lados dos quadrados da primeira tesselação.

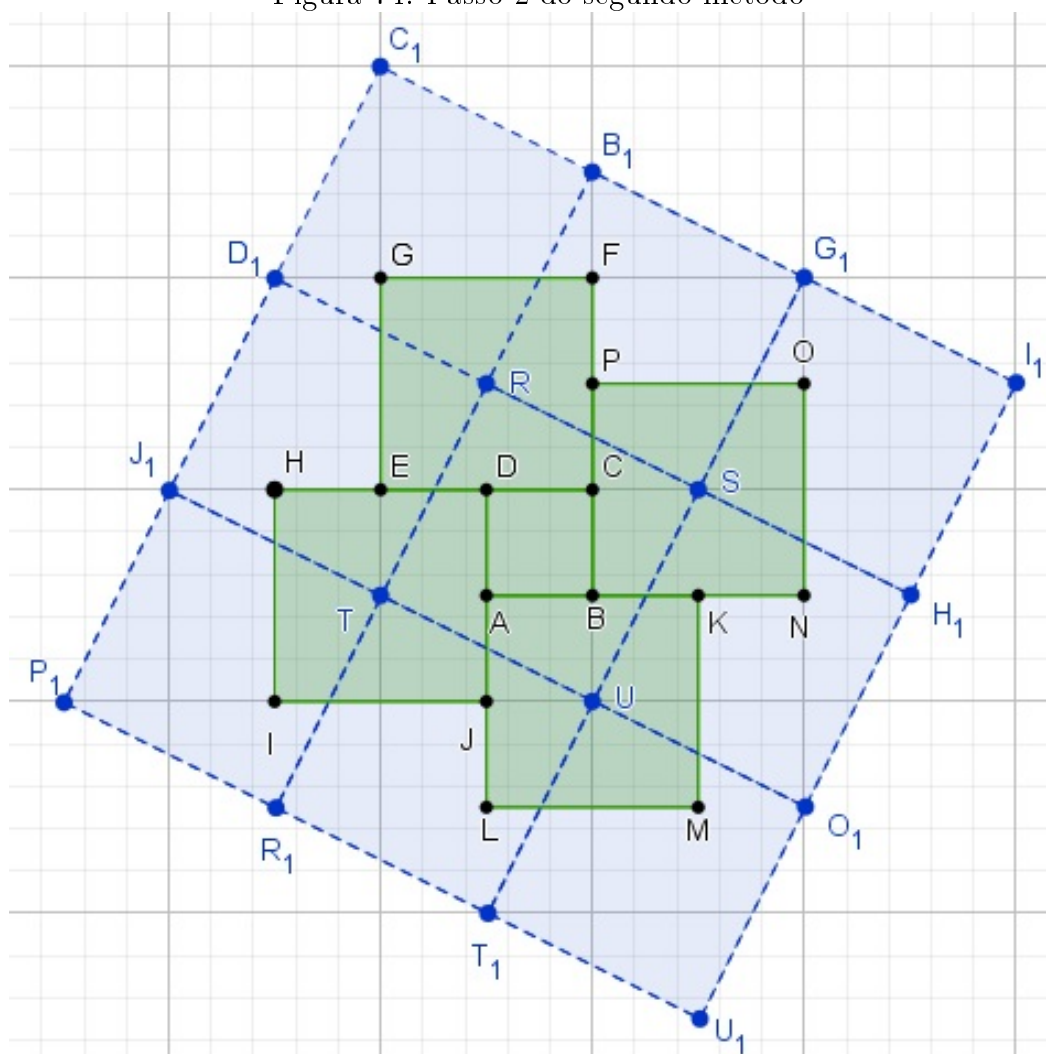
Figura 73: Passo 1 do segundo método



Fonte: Autor.

2. Em seguida utilize a ferramenta *Mover* e arraste a tesselação até sobrepor a primeira de modo que os vértices do quadrado da segunda tesselação coincida com o centro do quadrado de maior tamanho da primeira tesselação, como mostra na Figura 74, assim ficaram destacadas as peças da secção. Para obter as peças, de modo que possa ser movimentadas sem deformar basta seguir o processo 6 e 7 descritos anteriormente.

Figura 74: Passo 2 do segundo método



Fonte: Autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância de se trabalhar provas e demonstrações no ensino de matemática é algo incontestável, uma vez que a sua prática leva o aluno a compreender que esta ciência não se resume a resolução de problemas por meio de aplicação de fórmulas que muitas vezes nem fazem sentido para eles.

Porém este processo nem sempre é fácil, principalmente nas séries iniciais, onde os alunos ainda se encontram em fase de desenvolvimento cognitivo e precisam ser instigados a pensar e aperfeiçoar o raciocínio. Então, cabe ao professor buscar meios atrativos e de fácil compreensão para trabalhar estas demonstrações, que dependendo da metodologia utilizada podem parecer muito abstratas para eles.

Pensando nestas problemáticas, este trabalho almeja contribuir com a construção de um material didático que possa auxiliar e estimular os professores da Educação Básica neste processo de ensino e aprendizagem. Por isso trouxe uma breve contextualização do Teorema de Pitágoras, que é um dos teoremas mais conhecido na matemática, e algumas ideias para trabalhar com a demonstração do mesmo, bem como da equivalência entre áreas de figuras planas, de forma interativa, lúdica e que possibilita uma maior interação do aluno com este processo, uma vez que através do material proposto ele pode manusear e construir sua demonstração de forma prática.

REFERÊNCIAS

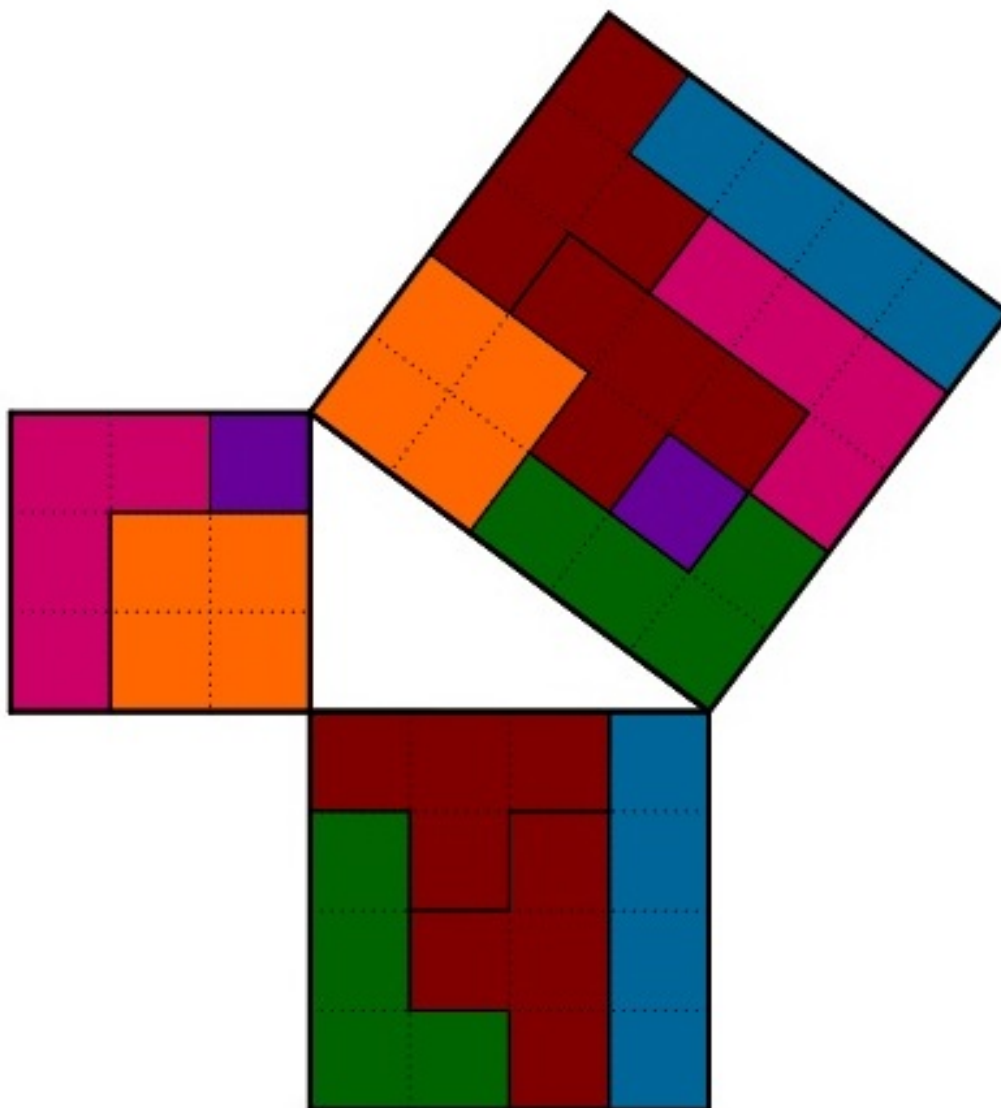
- [1] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- [2] DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática**. Tradução: João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.
- [3] DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. vol.9. 7ª edição. São Paulo: Atual Editora, 2005.
- [4] EVES, H. W. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª edição São Paulo: Editora da UNICAMP, 2011.
- [5] FREDERICKSON, G. N. **Dissections: Plane and Fancy**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [6] FREDERICKSON, G. N. **Ernest Irving Freese's Geometric transformations: the man, the manuscript, the magnificent dissections!**. New Jersey : World Scientific, 2017.
- [7] LIMA, E.L **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [8] LINDGREN, H. **Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them**. New York: Dover Publications, 1972.
- [9] NETO, A. C. M. **Geometria**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [10] OS dois grandes do charadismo e afins. **Almanaque pridie kalendas apresenta**. Disponível em: <https://www.calendario.cnt.br/charadas/CHARADAS.htm>. Acesso em: 12 jul. 2020.
- [11] STEWART, I. **Mania de Matemática: Diversão e jogos de lógica e Matemática**. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. 1ª edição. Rio de Janeiro: Zahar, 2005.

APÊNDICE

Apresentaremos aqui as soluções das propostas de exercícios expostas no Capítulo 5. Para cada exemplo dado traremos uma solução, mas isso não significa que o problema apresentado possui apenas a solução que mostraremos aqui.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

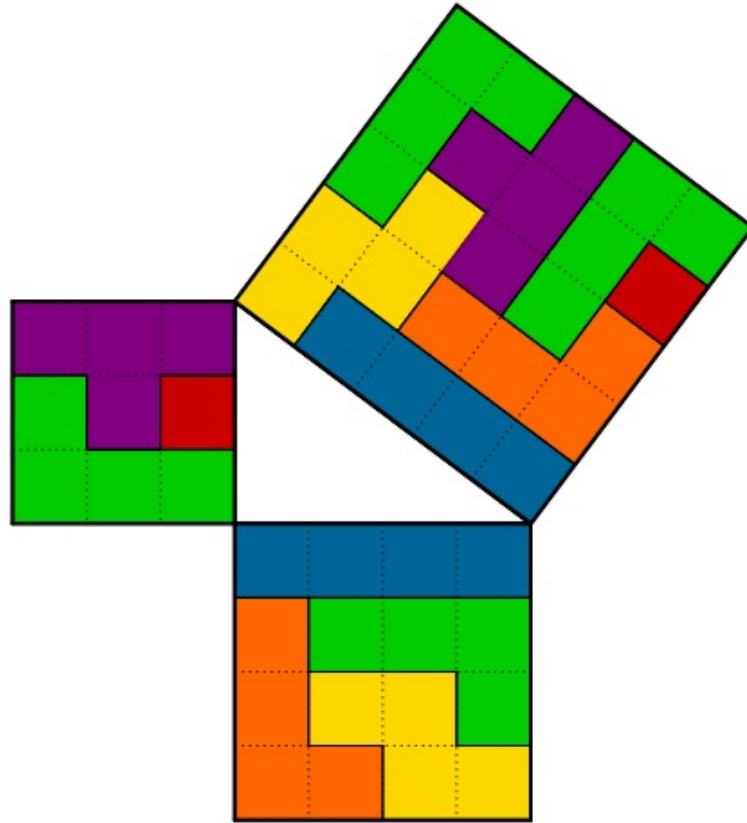
Figura 75: Solução do Problema 1



Fonte: Autor.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

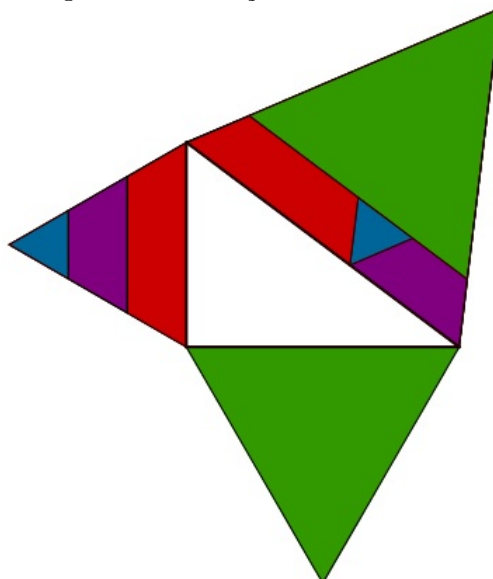
Figura 76: Solução do Problema 2



Fonte: Autor.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

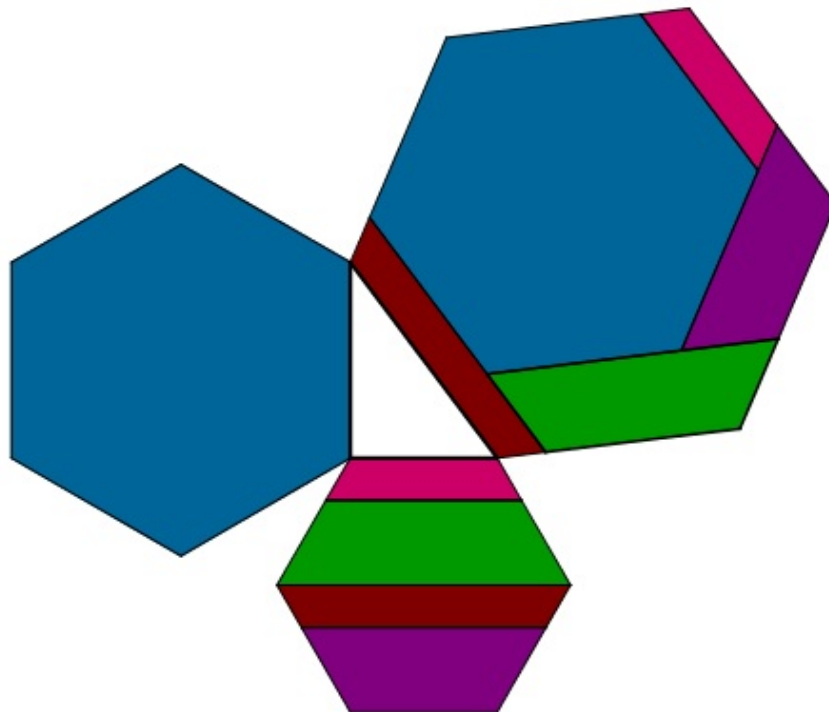
Figura 77: Solução do Problema 3



Fonte: Autor.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

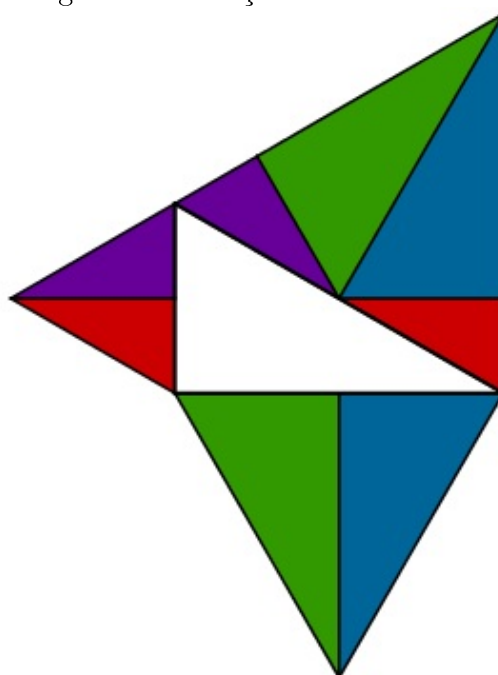
Figura 78: Solução do Problema 4



Fonte: Autor.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

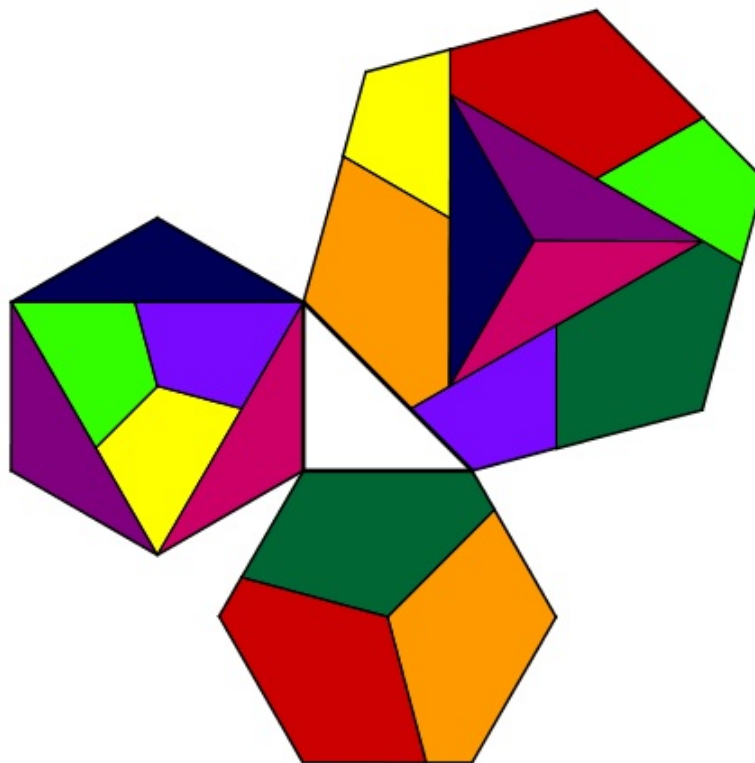
Figura 79: Solução do Problema 5



Fonte: Autor.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

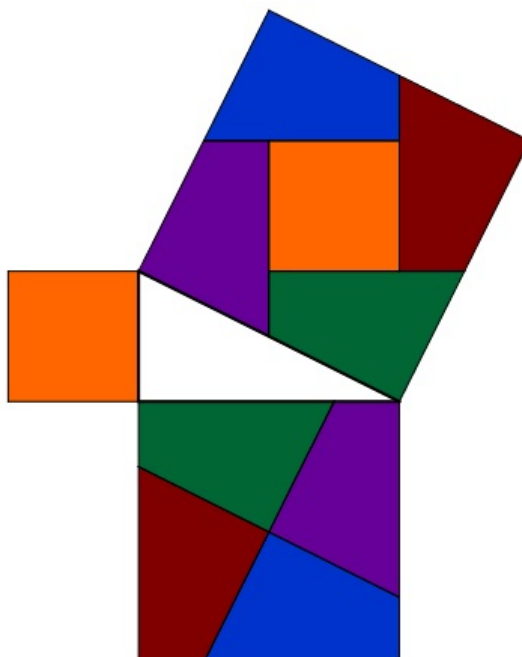
Figura 80: Solução do Problema 6



Fonte: Autor.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 7

Figura 81: Solução do Problema 7



Fonte: Autor.