UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DOUGLAS GONÇALVES MOÇATO

ESTRELA DE DAVID NO TRIÂNGULO DE PASCAL

CURITIBA

2021

DOUGLAS GONÇALVES MOÇATO

ESTRELA DE DAVID NO TRIÂNGULO DE PASCAL

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana.

CURITIBA

2021

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M587e Moçato, Douglas Gonçalves
Estrela de David no triângulo de Pascal [recurso eletrônico] / Douglas Gonçalves Moçato – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

1. Pascal, Triângulo de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Santana, Luiz Antonio Ribeiro de. III. Título.

CDD: 515.154

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **DOUGLAS GONCALVES MOCATO** intitulada: **ESTRELA DE DAVID NO TRIÂNGULO DE PASCAL**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 15 de Abril de 2021.

Assinatura Eletrônica
15/04/2021 15:37:25.0
LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
15/04/2021 15:33:29.0
ADRIANA LUIZA DO PRADO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
15/04/2021 15:53:46.0
CRISTIAN SCHMIDT
Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANA)

Este trabalho é dedicado àqueles que nunca se satisfazeram com o comum. Àqueles em que acreditam no conhecimento infinito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A Deus por me proporcionar paciência e ajuda espiritual em um ano desafiador;

Aos meus pais, Zenilda e Valdecir, e a minha irmã Débora pelo apoio direto e indireto em todas as minhas realizações e conquistas;

Ao meu orientador, Dr. Luiz Santana, por todo o ensinamento. Sem sua ajuda e seu conhecimento seriam impossível atingir um sonho tão desejado;

À minha esposa Ana e aos meus filhos, Kauan e Arthur, que sempre estiveram ao meu lado. A ajuda de vocês, me incentivando a nunca desistir, a paciência em meus momentos impacientes e a parceria em todas as dificuldades que passamos, em um ano atípico. Eu amo vocês;

À família Silemar, Claudionor e Vinícius, que me mostraram que era possível alcançar o que eu estimava impossível, incentivando quando muitos me mostravam que era mais fácil desistir.

Por fim, a todos os familiares e amigos que me acompanharam e me ajudaram a concretizar um desejo desde a adolescência: ser mestre na área das exatas.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a Estrela de Davi, descoberta na década de 70 por Hoggat e Hansell, a fim de aumentar o conhecimento e desempenho, na área de exatas, dos alunos que usufruírem deste artigo. Essa descoberta mostra o produto intercalado, três a três, dos números posicionados nas seis pontas da estrela, ao redor de um binomial, dentro do triângulo de Pascal. Veremos como é de fácil localização dentro do triângulo e o quão pouco explorado é tal conhecimento. Além disso serão apresentadas algumas propriedades no triângulo de Pascal como a Relação de Stifel, propriedade das colunas, propriedade das linhas e propriedade das diagonais. Com essas propriedades e utilizando cálculos matriciais, mostraremos a Estrela de David, que é o grande objetivo do nosso trabalho, e o máximo divisor comum existente entre esses seis números.

Palavras-chaves: Estrela de Davi, Triângulo de Pascal, Relação de Stifel.

ABSTRACT

This paper aims to present the Star of David, discovered in the 1970s by Hoggat and Hansell, in order to increase the knowledge and performance, in the area of exact sciences, of the students who take advantage of this article. This discovery shows the interleaved product, three by three, of the numbers positioned on the six points of the star, around a binomial, within Pascal's triangle. We will see how easy it is to locate within the triangle and how little such knowledge is exploited. Furthermore, some properties in Pascal's triangle will be presented such as Stifel's relation, column property, row property and diagonal property. With these properties and using matrix calculations, we will show the Star of David, which is the major objective of our work, and the maximum common divisor existing between these six numbers.

Key-words: Star of David, Pascal's Triangle, Stifel relation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este artigo apresentará a Estrela de David, dentro do triângulo de Pascal, com demonstrações e provas em forma de matrizes e cálculos binomiais. O objetivo geral dessa pesquisa é mostrar, através de cálculos e figuras, a estrela de seis pontas ao redor do binômio $\binom{n}{p}$ no triângulo de pascal. Teremos também, como objetivo específico, que enfatizar o máximo divisor comum (mdc) existente nas seis pontas da mesma estrela.

Ao início do trabalho, no capítulo de resultados preliminares, mostraremos o fatorial, as relações binomiais com seus teoremas e a propriedade complementar. Além disso apresentaremos também a relação de Stifel-Pascal, os teoremas: das colunas, das diagonais e das linhas, assim como as fórmulas de Euler e Lagrange. Em cada uma das apresentações o raciocínio será comprovado com aplicações e figuras ilustrativas, como também problemas utilizarão as ideias descritivas. Ao final desse capítulo de preliminares, teremos todas as ferramentas necessárias para o objetivo, tanto específico quanto geral, do trabalho.

No capítulo da Estrela de David, os autores da década de 70 que fundamentaram minha pesquisa serão mencionados, pois tal descoberta foi fascinante. Seguiremos mostrando suas afirmações e ilustrando todas elas para melhor visualização do leitor. Na sequência abordaremos o passo a passo do teorema da Estrela de David, com cálculos matriciais, combinatórios e binomiais. E desta forma provaremos a existência da inversa, na matriz, existente nos cálculos sugeridos.

No capítulo divisor comum, como objetivo específico, mostraremos o divisor comum existente nas seis pontas da Estrela de David. Depois faremos uma breve explicação sobre o máximo divisor comum e, novamente com cálculos matriciais, a existência dessa propriedade.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Vamos demonstrar, todos com exemplos de situações corriqueiras do dia a dia, motivadoras e de forma ficar mais visível as propriedades e os teoremas. Alguns conceitos matemáticos que auxiliarão nos cálculos matriciais que teremos ao fim do trabalho, na estrela de David e no máximo divisor comum. Algumas definições e propriedades são primordiais para se ter um raciocínio correto e claro ao demonstrar a Teorema da Estrela de David.

2.1 FATORIAL (!)

Segundo [Plínio] definimos o fatorial de um número natural n, com $n \geq 1$, como o produto dos números naturais consecutivos de n até 1. Representamos tal operação por $n!$ e o seu desenvolvimento por $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por convenção, para o caso $n = 0$ temos $0! = 1$.

2.2 NÚMERO BINOMIAL E SEUS TEOREMAS

Vamos iniciar este capítulo com um exemplo cotidiano:

Exemplo 2.1 *Em uma sala há 10 pessoas, na qual pedem para escolher 6 ou 5 pessoas afim de se compor uma única comissão. Se a ordem das pessoas escolhidas não importar, quantas comissões poderão estar a disposição para tal situação?*

Para resolvermos com mais facilidade o exemplo citado, precisamos definir um número binomial. Sejam n e p dois números inteiros não negativos com $n \geq p$. Definimos número binomial de numerador n e denominador p e representamos o mesmo por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Ou seja, de uma maneira geral, dizemos que há n quantidades de objetos e queremos selecionar p objetos, sem levar em conta a ordem. Com isso, é notório que o conjuntos $\binom{n}{p}$ é um subconjunto de n contendo p elementos.

Dentro dos números binomiais, temos algumas particularidades que auxiliarão nos cálculos:

1.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1;$$

2.
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = 1;$$

3.
$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n;$$

4. Se $n < p$ ou p um inteiro menor que zero, definimos $\binom{n}{p} = 0$;

5. Propriedade das Combinações Complementares: Sejam n, p e q números inteiros não negativos, em que $n \geq p$ e $n \geq q$. Se $p + q = n$ dizemos que $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são combinações complementares. Com isso
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}.$$

Por fim, resolvendo tal situação motivadora no início do capítulo, utilizando o binomial.

- Para comissão de 5 pessoas das 10 disponíveis, temos
$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

- Para comissão de 6 pessoas das 10 disponíveis, temos
$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210.$$

Como, pelo principio aditivo, o termo $"ou"$ significa adição, conclui-se que temos um total de 462 comissões disponíveis para escolha.

2.2.1 Relação de Stifel-Pascal

Para resolvermos a situação motivadora anterior, com mais facilidade, podemos utilizar a relação Stifel-Pascal ou também conhecida como regra de Pascal. A relação de Stifel-Pascal é uma identidade binomial que, dado n e p como número inteiros não negativos, temos:
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

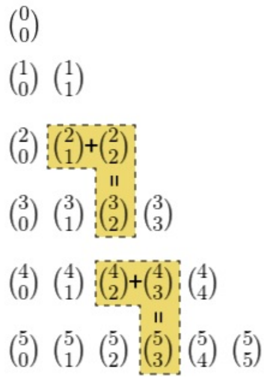

FIGURA 1 – Exemplificação da Lei de Stifel no triângulo de Pascal.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} \\
&= \frac{(p+1)}{(p+1)} \cdot \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} \cdot \frac{(n-p)}{(n-p)} \\
&= \frac{n! \cdot (p+1) + n!(n-p)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot [(n+1)-(p+1)]!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.2 *Situação motivadora anterior: "Em uma sala há 10 pessoas, na qual pedem para escolher 6 ou 5 pessoas afim de se compor uma única comissão. Se a ordem das pessoas escolhidas não importar, quantas comissões poderão estar a disposição para tal situação?"*

Resolução: Pela relação de Stifel-Pascal,

$$
\begin{aligned}
\binom{10}{5} + \binom{10}{6} &= \binom{11}{6} \\
&= \frac{11!}{6! \cdot (11-6)!} \\
&= \frac{11!}{6! \cdot 5!} = 462.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.3 *Determine m e p, sabendo que*

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{7}{3}.$$

Resolução: Pela Relação de Stifel-Pascal,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Então, temos que $m - 1 = 7$ e com isso $m = 8$. Pela mesma relação, deduzimos que $p = 3 + 1 = 4$.

2.2.2 Teorema das colunas

Segundo [KOSHY], a soma dos binomiais de uma coluna, com início no primeiro elemento, tem como resultado o binomial à direita na linha abaixo do último elemento que foi somado:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + ... + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Demonstração: Substituindo, na relação de Stifel-Pascal $m = p, p+1, p+2, \ldots, n$ temos que, como $\binom{p}{p+1} = 0$, as seguintes identidades:

$$\begin{gathered}
\binom{p}{p} + \binom{p}{p+1} = \binom{p+1}{p+1},\\
\binom{p+1}{p} + \binom{p+1}{p+1} = \binom{p+2}{p+1},\\
\binom{p+2}{p} + \binom{p+2}{p+1} = \binom{p+3}{p+1},\\
\vdots\\
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.
\end{gathered}$$

Somando as linhas e cancelando os termos semelhantes em membros diferentes temos:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exemplo 2.4 *Calcule a soma para n, m e k números inteiros não negativos.*

$$S = \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+2}{k} + \cdots + \binom{n+m}{k}.$$

Resolução: Usando a propriedade das colunas duas vezes e reescrevendo S de forma conveniente a se ter um S', tal que

$$S' = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k}.$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & \boxed{21} & 35 & \boxed{35} & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

FIGURA 2 – Exemplificação, no triângulo de Pascal, do teorema das colunas.

Faremos $S = S + (S' - S')$, logo a expressão ficará:

$$S = \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \cdots + \binom{n+m}{k} +$$

$$\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k}\right] -$$

$$\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k}\right].$$

Usando, $S = (S + S') - S'$

$$S = \left[\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \cdots + \binom{n+m}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} \right.$$
$$\left. + \binom{k+1}{k}\right] - \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k}.$$

Logo, pela propriedade das colunas, temos que a soma pedida é igual a

$$S = \binom{m+n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}.$$

Exemplo 2.5 *Calcule a soma dos n primeiros números inteiros positivos.*

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \cdots + \binom{n}{1}$$
$$= \binom{n+1}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Exemplo 2.6 *Calcule a soma*

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1).$$

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1).$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ os dois lados da equação temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) &= \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \cdots + \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \\ &= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Pelo teorema das colunas temos,

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3},$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) &= \binom{n+2}{3}, \\ &= \frac{(n+2)!}{(n+2-3)! \cdot 3!}, \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação por 2, temos,

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}.$$

2.2.3 Teorema das diagonais

Sejam n e p dois números inteiros não negativos. Então, segundo [KOSHY], o teorema das diagonais estabelece que a soma dos elementos situados na mesma diagonal, desde o elemento da 1ª coluna até o de uma coluna qualquer, é igual ao elemento imediatamente abaixo deste:

$$\binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \binom{p+3}{3} + \cdots + \binom{p+t}{t} = \binom{p+t+1}{t}.$$

Demonstração: Usando a propriedade complementar da combinatória, para todos n e p inteiros não negativos, temos:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

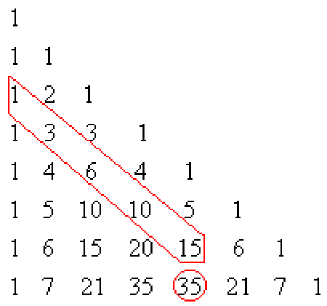

FIGURA 3 – Ilustração do teorema das diagonais direto no triângulo de Pascal.

Partindo de tal propriedade,

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p}$$
$$\binom{p+1}{1} = \binom{p+1}{p}$$
$$\binom{p+2}{2} = \binom{p+2}{p}$$
$$\vdots$$
$$\binom{p+k}{k} = \binom{p+k}{p},$$

somando as igualdades, temos:

$$\binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+k}{k} =$$

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+k}{p}.$$

Usando o teorema das colunas no segundo membro da igualdade acima, temos:

$$\binom{p+k+1}{p+1} = \binom{p+k+1}{k};$$

logo,

$$\binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+k}{k} = \binom{p+k+1}{k}.$$

Exemplo 2.7 *Calcule a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos.*

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Vamos partir da igualdade $i \cdot (i+1) = i^2 + i$, logo $i^2 = i \cdot (i+1) - i$. Aplicando o somatório, em ambos os membros, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} [i \cdot (i+1) - i].$$

Pela propriedade da adição em somatório,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) - \sum_{i=1}^{n} i.$$

Aplicando os resultado já obtidos e demonstrados nos exemplos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} - \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.8 *Calcule a soma dos cubos dos n primeiros inteiros positivos.*

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3.$$

Vamos partir da igualdade $i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = i^3 + 3 \cdot i^2 + 2 \cdot i$, logo $i^3 = i \cdot (i+1) \cdot (i+2) - 3 \cdot i^2 - 2 \cdot i$. Aplicando o somatório em ambos os membros, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} [i \cdot (i+1) \cdot (i+2)] - 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i.$$

Aplicando os resultados demonstrados nos exemplos anteriores:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4} - 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4} - \frac{2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{4} - \frac{4 \cdot n \cdot (n+1)}{4} \\ &= \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.\end{aligned}$$

Exemplo 2.9 *Calcule a soma dos cubos dos n primeiros números ímpares positivos.*

Resolução:

$$\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1)^3.$$

Para resolver esse exercício, precisamos lembrar da propriedade aditiva de um somatório:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=m}^{n}a_k+\sum_{k=m}^{n}b_k.$$

Utilizando esta propriedade, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1)^3 &= \sum_{i=1}^{n}(8\cdot i^3-12\cdot i^2+6\cdot i-1),\\ &= 8\cdot\sum_{i=1}^{n}i^3-12\cdot\sum_{i=1}^{n}i^2+6\cdot\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}1.\end{aligned}$$

Aplicando os resultados já demonstrados nos exemplos anteriores:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1)^3 &= 8\cdot\frac{[(n+1).n]^2}{2^2}-12\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+6\cdot\frac{(n+1).n}{2}-n,\\ &= 2\cdot[n^2+n]^2-2\cdot(n^2+n)\cdot(2\cdot n+1)+3\cdot(n^2+n)-n,\\ &= 2\cdot(n^4+2\cdot n^3+n^2)-2\cdot(2\cdot n^3+3\cdot n^2+n)+3\cdot n^2+3\cdot n-n,\\ &= 2\cdot n^4+4\cdot n^3+2\cdot n^2-4\cdot n^3-6\cdot n^2-2\cdot n+3\cdot n^2+2\cdot n,\\ &= 2\cdot n^4-n^2=n^2\cdot(2\cdot n^2-1).\end{aligned}$$

2.2.4 Teoremas das linhas

Considerando n um número inteiro não negativo, Segundo [HILLMAN], a soma dos elementos de qualquer linha n, no Triângulo de Pascal, é igual a uma potência 2^n, onde o expoente é o número da linha em que se quer somar. Então,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Usando $k=n$ e chamando de S_n a soma acima, vamos demonstrar tal teorema somando S_n com ele mesmo e utilizando a relação de Stifel-Pascal conforme segue:

$$\begin{aligned}(1)S_k &= \binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k},\\ (2)S_k &= \binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k}.\end{aligned}$$

$$1 = 2^0$$
$$1 + 1 = 2^1$$
$$1 + 2 + 1 = 2^2$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$$
$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$$
$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6$$

FIGURA 4 – Ilustração demonstrativa sobre o teorema das linhas no triângulo de Pascal.

Somando (1) com (2), considerando $S_k + S_k$ como $2 \cdot S_k$ e usando a relação de Stifel-Pascal, temos:

$$2 \cdot S_k = \binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \cdots + \binom{k}{k}.$$

Como,

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

e

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}.$$

Logo,

$$2S_k = \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = 2S_{k+1}.$$

Se k e n são números inteiros não negativos e $k < n$,

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \cdot S_1 \\ S_3 &= 2 \cdot S_2 \\ S_4 &= 2 \cdot S_3 \\ &\vdots \\ S_n &= 2 \cdot S_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades e fazendo os cancelamentos possíveis, temos:

$$S_n = 2^{n-1} \cdot S_1 = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^{n-1+1} = 2^n.$$

Agora vamos ver algumas aplicações do teorema demonstrado anteriormente.

Exemplo 2.10 *Calcule m, como m inteiro não negativo, sabendo que:*

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + \binom{m}{m-1} = 510.$$

Resolução:

$$\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\cdots+\binom{m}{m-1}=2^m-\binom{m}{0}-\binom{m}{m}=2^m-1-1=2^m-2,$$

logo

$$\begin{aligned}2^m-2&=510,\\2^m&=512,\\2^m&=2^9,\\m&=9.\end{aligned}$$

Exemplo 2.11 *Calcule a soma, para todo n inteiro não negativo:*

$$\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}.$$

Resolução: Vamos considerar p e n inteiros não negativos, logo

$$\begin{aligned}p\cdot\binom{n}{p}&=p\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!},\\&=n\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)}{(p-1)!},\\&=n\cdot\binom{n-1}{p-1}.\end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{p=1}^{n}p\cdot\binom{n}{p}=\sum_{p=1}^{n}n\cdot\binom{n-1}{p-1}=n\cdot\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}=n\cdot 2^{n-1}.$$

Exemplo 2.12 *Calcule a soma, para todo n inteiro não negativo.*

$$S_n=\binom{n}{0}+3\cdot\binom{n}{1}+5\cdot\binom{n}{2}+7\cdot\binom{n}{3}+\cdots+(2\cdot n+1)\cdot\binom{n}{n}.$$

Resolução:

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{n}{0} + 3 \cdot \binom{n}{1} + 5 \cdot \binom{n}{2} + 7 \cdot \binom{n}{3} + \cdots + (2 \cdot n + 1) \cdot \binom{n}{n}. \\ &= \sum_{p=0}^{n} (2 \cdot p + 1) \cdot \binom{n}{p} \\ &= \sum_{p=0}^{n} 2 \cdot p \cdot \binom{n}{p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \\ &= 2 \cdot \sum_{p=0}^{n} p \cdot \binom{n}{p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \\ &= 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ &= n \cdot 2^n + 2^n = 2^n \cdot (n+1). \end{aligned}$$

2.2.5 Fórmula de Euler

Para exemplificar a aplicação da fórmula de Euler, começaremos com um exemplo motivacional: "Considerando p, m e h números inteiros não negativos, quantas comissões de p pessoas podem ser formadas com m mulheres e h homens?"

As opções para tal motivação são:

- 0 mulher e p homens, ou
- 1 mulher e $p-1$ homens, ou
- $\ldots$
- p mulheres e $p - p = 0$ homem.

Para tal resolução, precisaremos dos princípios aditivo e multiplicativo.

- Princípio aditivo: Dado dois conjuntos, A e B com m e n elementos respectivamente, então se esses dois conjuntos tem seus eventos ligados pelos cognitivo ou, teremos $m + n$ elementos.
- Princípio Multiplicativo: Dado dois conjuntos, A e B com m e n elementos respectivamente. Se esses dois conjuntos tem seus eventos ligados, de tal forma a tomar m elementos de A e, uma vez escolhido o elemento, teremos vinculado a ele n elementos de B, então teremos $m \cdot n$ elementos .

Como o $"e"$ indica o princípio multiplicativo e $"ou"$ o princípio aditivo, no exemplo motivacional anterior, temos a seguinte identidade chamada de fórmula de Euler

[C.BACHX]: Considerando p , m e h números inteiros não negativos,

$$\binom{m}{0}\cdot\binom{h}{p}+\binom{m}{1}\cdot\binom{h}{p-1}+\binom{m}{2}\cdot\binom{h}{p-2}+\cdots+\binom{m}{p}\cdot\binom{h}{0}=\binom{m+h}{p}.$$

Vamos demonstrar a aplicação da fórmula no exemplo a seguir.

Exemplo 2.13 *Calcule o valor da soma abaixo:*

$$\binom{6}{0}\cdot\binom{10}{6}+\binom{6}{1}\cdot\binom{10}{5}+\binom{6}{2}\cdot\binom{10}{4}+\binom{6}{3}\cdot\binom{10}{3}+\binom{6}{4}\cdot\binom{10}{2}+\binom{6}{5}\cdot\binom{10}{1}+\binom{6}{6}\cdot\binom{10}{0}.$$

Resolução:

Pela fórmula de Euler com $m = 10$, e $h = p = 6$, temos que a soma acima vale

$$\binom{16}{6}=\frac{16!}{10!6!}=8008.$$

2.2.6 Fórmula de Lagrange

A fórmula de Lagrange é uma particularidade da fórmula de Euler. Quando igualamos o m ao p e ao h, considerando m, n e p números inteiros não negativos, obtemos a fórmula de Lagrange.

$$\binom{m}{0}^2+\binom{m}{1}^2+\binom{m}{2}^2+\binom{m}{3}^2+\cdots+\binom{m}{m}^2=\binom{2m}{m}.$$

Vamos mostrar sua aplicabilidade na resolução de alguns exemplos.

Exemplo 2.14 *Calcule:*

$$\binom{10}{0}^2+\binom{10}{1}^2+\binom{10}{2}^2+\binom{10}{3}^2+\binom{10}{4}^2+\cdots+\binom{10}{10}^2.$$

Resolução: Pela Fórmula de Lagrange, temos

$$\binom{10}{0}^2+\binom{10}{1}^2+\binom{10}{2}^2+\binom{10}{3}^2+\binom{10}{4}^2+\cdots+\binom{10}{10}^2=\binom{20}{10}.$$

Exemplo 2.15 *Calcule*

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}^2.$$

Resolução:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}^2=0\cdot\binom{n}{0}^2+1\cdot\binom{n}{1}^2+2\cdot\binom{n}{2}^2+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}^2.$$

Como é válida a relação da propriedade complementar binomial:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n}, \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1}, \\
\binom{n}{2} &= \binom{n}{n-2}, \\
&\vdots \\
\binom{n}{n} &= \binom{n}{0},
\end{aligned}$$

e somando S_n com ele próprio, ao utilizar as fórmulas das relações complementares acima, temos:

$$\begin{aligned}
2 \cdot S_n = (0+n) \cdot \binom{n}{0}^2 + (1+n-1) \cdot \binom{n}{1}^2 + (2+n-2) \cdot \binom{n}{2}^2 \\
+ \cdots + (n+n-n) \cdot \binom{n}{n}^2
\end{aligned}$$

Note que n é o termo comum em todas as parcelas. Portanto colocando o n em evidência e aplicando a fórmula de Lagrange, temos:

$$\begin{aligned}
2 \cdot S_n &= n \cdot \binom{2m}{m}, \\
S_n &= \frac{n}{2} \cdot \binom{2m}{m}.
\end{aligned}$$

3 TEOREMA DA ESTRELA DE DAVID

Encerramos esta dissertação com dois resultados que foram desenvolvidos na primeira metade dos anos 70, e que têm a ver com conjuntos de seis números localizados no triângulo aritmético. Uma característica interessante destes números é que eles se dispõem graficamente numa estrela de seis pontas ao redor do binomial $\binom{n}{k}$, conforme observado na Figura 5.

Em 1971, foi descoberta por Hoggat e Hansell [06] a propriedade a seguir no triângulo de aritmético: Dados quaisquer n e k números inteiros não negativos temos que a seguinte identidade é válida:

$$\binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k-1}. \tag{3.1}$$

Esta identidade pode ser provada por cálculo imediato de ambos os membros usando a definição de binomial, conforme segue: Por um lado, temos

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{n!}{(k+1)! \cdot [n-(k+1)]!} \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot [(n+1)-k]!} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot [(n-1)-(k-1)!]} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot k! \cdot (n+1-k)! \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

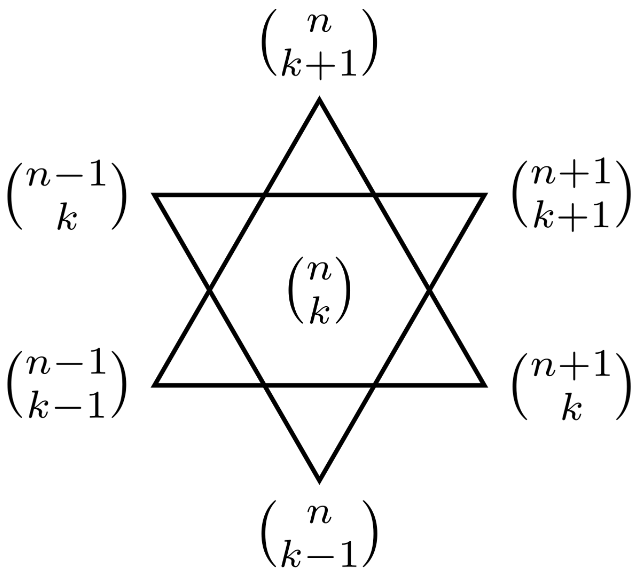

FIGURA 5 – Ilustração dos seis números do Triângulo Aritmético, sobre os quais os dois resultados deste capítulo são baseados.

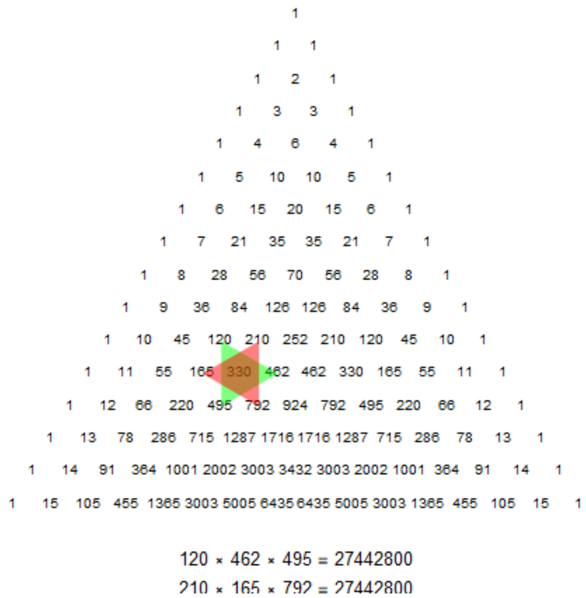

FIGURA 6 – Verificação do Teorema de Hoggat-Hansell para os números 120, 462, 495 e 210, 165, 792. Convém notar que os produtos $120 \cdot 462 \cdot 495 = 210 \cdot 165 \cdot 792$ são iguais. Também temos que $\mathrm{mdc}(120, 462, 495) = \mathrm{mdc}(210, 165, 792) = 3$ pelo Teorema da Estrela de David.

Por outro lado, ao desenvolvermos o segundo membro de (3.1), temos

$$\begin{aligned}
&\binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k-1} \\
&= \frac{(n-1)!}{k! \cdot [(n-1)-k]!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot [(n+1)-(k+1)]!} \cdot \frac{n!}{(k-1)! \cdot [n-(k-1)!]} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot k! \cdot (n+1-k)! \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Comparando os resultados obtidos nas passagens (3.2) e (3.3), o resultado segue. Uma outra propriedade que diz respeito aos mesmos números binomiais que aparecem na identidade (3.1) é o dito Teorema da Estrela de David: Dados n e k dois números inteiros e não negativos, temos que

$$\mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}, \binom{n-1}{k-1}\right\} = \mathrm{mdc}\left\{\binom{n-1}{k}, \binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k-1}\right\}. \tag{3.4}$$

Antes de apresentarmos a demonstração correspondente, apresentamos aqui um breve histórico deste resultado: A identidade (3.1) foi descoberta em 1972 por H. Gould, sendo provada logo depois por Singmaster. Houve diversas provas do mesmo resultado, dentre as quais uma que vamos nos basear, devida a Hitomatu *et al.*

O motivo da escolha desta demonstração em detrimento daquela inicialmente apresentada por Singmaster é devido ao fato de que a última é mais elementar. Sua simplicidade decorre do fato de que a matriz que exibiremos a seguir possui propriedades interessantes, a saber:

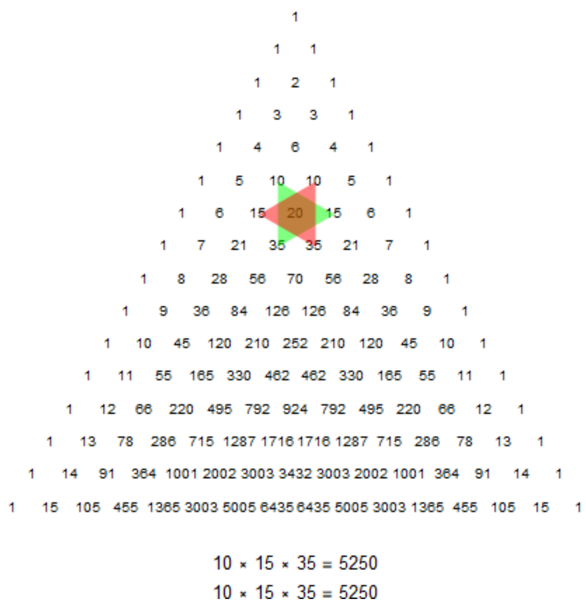

FIGURA 7 – Verificação do Teorema de Hoggat-Hansell para os números 10, 15, 35 e 10, 35, 15. Convém notar que os produtos $10 \cdot 15 \cdot 35 = 10 \cdot 35 \cdot 15$ são iguais. Também temos que $\mathrm{mdc}(10, 15, 35) = \mathrm{mdc}(10, 35, 15) = 5$ pelo Teorema da Estrela de David.

No que segue, dados n e k inteiros não negativos quaisquer, definimos a matriz A abaixo:

$$A := \begin{bmatrix} k+1 & k-n-1 & -n-1 \\ -k & n-k+1 & n \\ k+1 & k-n & -n \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Observamos que esta matriz possui coeficientes inteiros que dependem das constantes n e k. Notamos também que a sua matriz inversa correspondente também possui coeficientes inteiros dependentes dos mesmos n e k, conforme segue:

$$A^{-1} := \begin{bmatrix} -n & -k & n-k+1 \\ n & k+1 & k-n \\ -n-1 & -k-1 & n-k+1 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Antes de tudo, vamos verificar se há inversa, já que H. Gould diz ser válido tal propriedade. A definição de matriz inversa é: Seja uma matriz A quadrada de ordem n. Nomeamos matriz inversa A^{-1} se o produto de A pela sua inversa for igual a Identidade I de mesma ordem, ou seja $A.A^{-1} = I$. Verificando se há inversa na Matriz A de sugerido por H. Gould:

$$\begin{bmatrix} k+1 & k-n-1 & -n-1 \\ -k & n-k+1 & n \\ k+1 & k-n & -n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -n & -k & n-k+1 \\ n & k+1 & k-n \\ -n-1 & -k-1 & n-k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz

$$\begin{bmatrix} -n & -k & n-k+1 \\ n & k+1 & k-n \\ -n-1 & -k-1 & n-k+1 \end{bmatrix}$$

é a inversa da matriz

$$\begin{bmatrix} k+1 & k-n-1 & -n-1 \\ -k & n-k+1 & n \\ k+1 & k-n & -n \end{bmatrix}.$$

Com a afirmação de que de fato (3.1) é a matriz inversa de (3.5) seguimos:

- Produto da linha 1 de A com coluna 1 de A^{-1}:

$$\begin{aligned} &(k+1)\cdot(-n) + (k-n-1)\cdot n + (-n-1)\cdot(-n-1) \\ &= -k\cdot n - n + k\cdot n - n^2 - n + n^2 + n + n + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Produto da linha 1 de A com coluna 2 de A^{-1}:

$$\begin{aligned} &(k+1)\cdot(-k) + (k-n-1)\cdot(k+1) + (-n-1)\cdot(-k-1) \\ &= -k^2 - k + k^2 + k - k\cdot n - n - k - 1 + k\cdot n + n + k + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Produto da linha 1 de A com coluna 3 de A^{-1}:

$$\begin{aligned} &(k+1)\cdot(n-k+1) + (k-n-1)\cdot(k-n) + (-n-1)\cdot(n-k+1) \\ &= k\cdot n - k^2 + k + n - k + 1 + k^2 - k\cdot n - k\cdot n + n^2 \\ &\quad - k + n - n^2 + k\cdot n - n - n + k - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Produto da linha 2 de A com coluna 1 de A^{-1}:

$$\begin{aligned} &-k\cdot(-n) + (n-k+1)\cdot n + n\cdot(-n-1) \\ &= k\cdot n + n^2 - k\cdot n + n - n^2 - n \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Produto da linha 2 de A com coluna 2 de A^{-1}:

$$\begin{aligned} &-k.(-k) + (n-k+1)\cdot(k+1) + n\cdot(-k-1) \\ &= k^2 + k\cdot n - k^2 + k + n - k + 1 - k\cdot n - n \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Produto da linha 2 de A com coluna 3 de A^{-1}:

$$\begin{aligned}
& -k\cdot(n-k+1)+(n-k+1)\cdot(k-n)+n\cdot(n-k+1)\\
& = -k\cdot n+k^2-k+k\cdot n-n^2-k^2+k\cdot n+k-n+n^2-k\cdot n+n\\
& = 0.
\end{aligned}$$

- Produto da linha 3 de A com coluna 1 de A^{-1}:

$$\begin{aligned}
& (k+1)\cdot(-n)+(k-n)\cdot n+(-n)\cdot(-n-1)\\
& = -k\cdot n-n+k\cdot n-n^2+n^2+n\\
& = 0.
\end{aligned}$$

- Produto da linha 3 de A com coluna 2 de A^{-1}:

$$\begin{aligned}
& (k+1)\cdot(-k)+(k-n)\cdot(k+1)+(-n)\cdot(-k-1)\\
& = -k^2-k+k^2+k-k\cdot n-n+k\cdot n+n\\
& = 0.
\end{aligned}$$

- Produto da Linha 3 de A com coluna 3 de A^{-1}:

$$\begin{aligned}
& (k+1)\cdot(n-k+1)+(k-n)\cdot(k-n)+(-n)\cdot(n-k+1)\\
& = k\cdot n-k^2+k+n-k+1+k^2-k\cdot n-k\cdot n+n^2-n^2+k\cdot n-n\\
& = 1.
\end{aligned}$$

Outra propriedade interessante da matriz A é uma identidade matricial que relaciona os seis binomiais da Estrela de David, conforme segue:

$$\begin{bmatrix} \binom{n-1}{k-1} \\ \binom{n}{k+1} \\ \binom{n+1}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 & k-n-1 & -n-1 \\ -k & n-k+1 & n \\ k+1 & k-n & -n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \binom{n+1}{k+1} \\ \binom{n}{k-1} \\ \binom{n-1}{k} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

A prova deste fato vem dos cálculos a seguir: Nomeando a matriz 3×3 como A e a matriz produto 3×1 de B, temos

$$\begin{bmatrix} \binom{n-1}{k-1} \\ \binom{n}{k+1} \\ \binom{n+1}{k} \end{bmatrix} = A\cdot B.$$

Agora vamos provar a demonstração matricial, lembrando que as entradas das matrizes são números inteiros.

1. Linha 1 de A com coluna 1 de B:

$$(k+1)\cdot\binom{n+1}{k+1}+(k-n-1)\cdot\binom{n}{k-1}+(-n-1)\cdot\binom{n-1}{k}$$

$$=(k+1)\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1-k-1)!\cdot(k+1)!}+(k-n-1)\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}+$$

$$(-n-1)\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\cdot k!}$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(n+1)!\cdot(n-k+1)+(k-n-1)\cdot n!\cdot(k+1)\cdot k}{(n-k+1)!\cdot(k+1)!}$$

$$+\frac{(-n-1)\cdot(n-1)!\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(k+1)}{(n-k+1)!\cdot(k+1)!}$$

$$=\frac{(k+1)\cdot n!\cdot(n-k+1)^2}{(n-k+1)!\cdot(k+1)!}$$

$$+\frac{(-n-1)\cdot(n-1)!\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(k+1)}{(n-k+1)!\cdot(k+1)!}$$

$$=\frac{n!\cdot(n-k+1)}{(n-k)!\cdot k!}+\frac{(-n-1)\cdot(n-1)!\cdot(n-k)}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot[n\cdot(n-k+1)-(n+1)\cdot(n-k)]}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot k}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n-1}{k-1}.$$

2. Linha 2 de A com coluna 1 de B

$$-k\cdot\binom{n+1}{k+1}+(n-k+1)\cdot\binom{n}{k-1}+n\cdot\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k+1},$$

$$\frac{-k\cdot(n+1)!}{(n+1-k-1)!\cdot(k+1)!}+\frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}+\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1-k)!\cdot k!}=$$

$$=\frac{-k\cdot(n+1)\cdot n!}{(n-k)\cdot(n-k-1)!\cdot(k+1)!}$$

$$+\frac{k\cdot(k+1)}{k\cdot(k+1)}\cdot\frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!\cdot(k+1)!}$$

$$+\frac{k+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{(n-k-1)!\cdot k\cdot(k-1)!}$$

$$=\frac{-k\cdot(n+1)\cdot n!}{(n-k)\cdot(n-k-1)!\cdot(k+1)!}+\frac{k\cdot(k+1)\cdot(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!\cdot(k+1)!}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{(k+1)\cdot n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}\\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}\cdot\left[\frac{-k\cdot(n+1)}{n-k}+\frac{k\cdot(k+1)}{n-k}+k+1\right]\\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}\cdot\left[\frac{-k\cdot n-k+k^2+k+k\cdot n+n-k^2-k}{n-k}\right]\\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}\cdot\frac{n-k}{n-k}\\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!} = \binom{n}{k+1}.
\end{aligned}
$$

3. Linha 3 de A com coluna 1 de B

$$
(k+1)\cdot\binom{n+1}{k+1}+(k-n)\cdot\binom{n}{k-1}-n\cdot\binom{n-1}{k}=\binom{n+1}{k},
$$

$$
\begin{aligned}
&(k+1)\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1-k-1)!\cdot(k+1)!}+(k-n)\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}\\
&\quad-n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\cdot k!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot k!}+(k-n)\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}-\frac{n!}{(n-k-1)!\cdot k!}\\
&= \frac{(n-k+1)}{(n-k+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot k!}+\frac{k\cdot(n+1)}{k\cdot(n+1)}\cdot\frac{(k-n)\cdot n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}\\
&-\frac{(n+1)}{(n+1)}\cdot\frac{n!}{(n-k-1)!\cdot k!}\cdot\frac{(n-k)}{(n-k)}\cdot\frac{(n-k+1)}{(n-k+1)}\\
&= \frac{(n-k+1)\cdot(n+1)!}{(n-k+1)\cdot k!}+\frac{k\cdot(n+1)!\cdot(k-n)}{(n+1)\cdot(n-k+1)!\cdot k!}\\
&\quad-\frac{(n+1)!\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)}{(n-k+1)!\cdot k!\cdot(n+1)}\\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\cdot k!}\cdot\left[n-k+1+\frac{k\cdot(k-n)}{n+1}-\frac{(n-k)\cdot(n-k+1)}{n+1}\right]\\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\cdot k!}\\
&\quad\cdot\left[\frac{n^2-k\cdot n+n+n-k+1+k^2-k\cdot n-n^2+k\cdot n-n+k\cdot n-k^2+k}{n+1}\right]\\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\cdot k!}\cdot\left(\frac{n+1}{n+1}\right)=\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}
$$

3.1 DIVISOR COMUM NA ESTRELA DE DAVID

O objetivo final deste trabalho é mostrar que os divisores comuns de 3 números binomiais $\binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n+1}{k}$ são sempre iguais aos divisores comuns de outros 3 binomiais $\binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{k-1}$ e $\binom{n-1}{k}$, desde que esses 6 binomiais estejam localizados numa estrutura de estrela de David no triângulo aritmético. Com isso conseguiremos afirmar que o Teorema da Estrela de David é um corolário desta afirmação.

Antes de mostrarmos tal relação, vamos fazer uma breve explicação do máximo divisor comum, mdc, apenas para números inteiros não negativos. Lembrando que o mdc é um conceito válido para qualquer número inteiro.

O conceito de máximo divisor comum é que entre dois ou mais números inteiros, existe uma quantidade de divisores comuns. Essa quantidade é finita e menor ou igual a quantidade de divisores de cada um dos números analisados separadamente. Vamos exemplificar tal conceito.

Exemplo 3.1 *Quais são os divisores comum e o mdc entre* 12 *e* 30 *?*

Sabemos que:

$$12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 1 \cdot 12,$$

ou seja, seus divisores são $1, 2, 3, 4, 6$ e 12;

$$30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6,$$

ou seja, seus divisores são $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ e 30.

Analisando os dois casos simultaneamente, podemos afirmar que os divisores, em comum, são $1, 2, 3$ e 6 e que o mdc (máximo divisor comum) de 12 e 30 é 6.

De forma genérica, vamos considerar os números m, n, p inteiros não negativos, afirmando-se que k é um divisor comum de m,n e p. Logo, existem a, b e c números inteiros tais que:

$$m = k \cdot a,$$
$$n = k \cdot b,$$

e

$$p = k \cdot c.$$

Portanto, o maior número inteiro não negativo k divisor comum de m, n e p é o máximo divisor comum deles, ou $k = \mathrm{mdc}(m,n,p)$.

Agora, se k é um divisor comum de $\binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n+1}{k}$, mostraremos utilizando notação matricial, a relação de k ser também um divisor comum de $\binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{k-1}$ e $\binom{n-1}{k}$. Resumidamente, vamos efetuar o produto matricial de um vetor $B = (b_{jk})_{n\times p}$ cuja as três componentes são $\binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{k-1}$ e $\binom{n-1}{k}$ com a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ discutida em (3.5) no inicio do capítulo estrela de David.

Dadas duas matrizes A e B, pela propriedade da multiplicação de matrizes, teremos:

$$A \cdot B = C$$

onde $C = (c_{ik})_{m\times p}$. Se $x \in M = (x_j)_{n\times 1}$, sendo M uma matriz coluna, então $A \cdot x = (d_k)_{m\times 1}$. Dado d um número real, podemos associar as matrizes A e B da seguinte forma:

$$A \cdot (d \cdot B) = (d \cdot A) \cdot B = d \cdot (A \cdot B).$$

Agora vamos verificar na matriz, apresentada na subseção anterior, a veracidade do mdc nos binomiais. Considerando a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} \binom{n+1}{k+1} \\ \binom{n}{k-1} \\ \binom{n-1}{k} \end{bmatrix}.$$

Suponha que k, inteiro não negativo, seja um divisor comum entre os binomiais nas entradas da matriz B, existem números inteiros não negativos a, b e c de tal forma que as identidades abaixo valem

$$B = \begin{bmatrix} \binom{n+1}{k+1} \\ \binom{n}{k-1} \\ \binom{n-1}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cdot a \\ k\cdot b \\ k\cdot c \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Então, com as matrizes A (3.5) e B, tal que

$$A = \begin{bmatrix} k+1 & k-n-1 & -n-1 \\ -k & n-k+1 & n \\ k+1 & k-n & -n \end{bmatrix},$$

e a Matriz

$$B = \begin{bmatrix} \binom{n+1}{k+1} \\ \binom{n}{k-1} \\ \binom{n-1}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cdot a \\ k\cdot b \\ k\cdot c \end{bmatrix},$$

temos que, utilizando a propriedade associativa e considerando x, y e z também números inteiros não negativos,

$$A \cdot B = A \cdot \begin{bmatrix} k \cdot a \\ k \cdot b \\ k \cdot c \end{bmatrix} = A \cdot k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = k \cdot A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \\ k \cdot z \end{bmatrix}.$$

Como no capítulo estrela de David, na demonstração 3.7, mostramos que

$$A.B = \begin{bmatrix} \binom{n+1}{k} \\ \binom{n-1}{k+1} \\ \binom{n}{k+1} \end{bmatrix}$$

pode-se concluir que

$$\begin{bmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \\ k \cdot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{n+1}{k} \\ \binom{n-1}{k+1} \\ \binom{n}{k+1} \end{bmatrix}.$$

Agora se nos perguntarmos: a recíproca é verdadeira? Como é válida a inversa da matriz A, tal que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -n & -k & n-k+1 \\ n & k+1 & k-n \\ -n-1 & -k-1 & n-k+1 \end{bmatrix},$$

e pelo que foi discutido no capítulo estrela de David (3.6), a matriz A^{-1} é a inversa da matriz A (3.5) e tem também seus coeficientes inteiros, tal como a matriz A possui. Portanto, com o raciocínio inteiramente similar ao que foi feito anteriormente, pode-se mostrar que qualquer divisor comum de $\binom{n+1}{k}$, $\binom{n-1}{k+1}$ e $\binom{n}{k+1}$ é divisor comum dos elementos que estão na matriz B. Com isso conclui-se que os divisores de $\binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{k-1}$ e $\binom{n-1}{k}$ são os mesmo divisores de $\binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n+1}{k}$.

Dessa forma, como os divisores comuns desses seis binomiais, que estão na estrutura das pontas da estrela estrela de David dentro do triângulo de Pascal, são os mesmos, o maior divisor comum também será igual. Então

$$\mathrm{mdc}\left\{\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}\right\} = \mathrm{mdc}\left\{\binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k-1}, \binom{n-1}{k}\right\}.$$

Por fim, após ostentado de tais demonstrações, apresento-lhes o Teorema da Estrela de David como um corolário desta afirmação, representados, junto aos seu mdc, nas figuras 6,7 e 8.

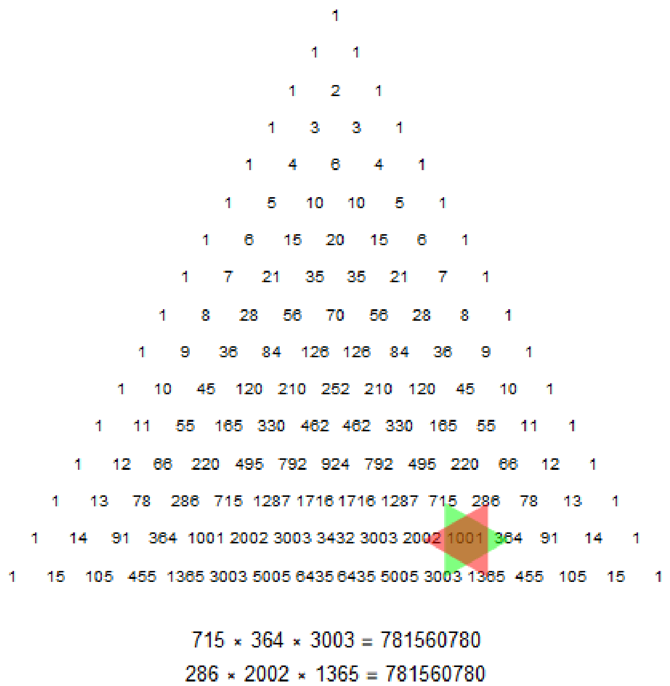

FIGURA 8 – Verificação do Teorema de Hoggat-Hansell para os números 715, 364, 3003 e 286, 2002, 1365. Convém notar que os produtos $715 \cdot 364 \cdot 3003 = 286 \cdot 2002 \cdot 1365$ são iguais. Também temos que $\mathrm{mdc}(715, 364, 3003) = \mathrm{mdc}(286, 2002, 1365) = 13$ pelo Teorema da Estrela de David.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse artigo vimos as principais relações e propriedades binomiais existentes dentro do Triângulo de Pascal. Revisamos nosso conhecimento já existente no capítulo preliminar e com exercícios, mostramos alguns exemplos no qual se fez necessário na utilização de tais recursos.

Ao trabalhar no triângulo de Pascal, percebe-se uma propriedade nomeada Estrela de Davi. Analisarmos tal propriedade na estrela de seis pontas, fizemos a demonstração e sua prova através de matrizes e cálculos binomiais. Mostramos com figuras ilustrativas a existência da estrela dentro do triângulo de Pascal. Calculamos a sua inversa atingindo assim nosso objetivo geral nessa leitura.

No capítulo máximo divisor comum, encontramos a existência dessa propriedade nos números alternados das seis pontas da estrutura estrela. Com cálculos matriciais e conhecimento de tal propriedades, atingimos nosso objetivo específico enriquecendo o conhecimento do leitor e apresentando a estrela como corolário.

Com isso, pode-se concluir que há inúmeras propriedades dentro do Triângulo de Pascal, como a Estrela de David. Demonstramos algumas bem conhecidas e uma pouco relacionada nas situações diárias. Ainda há muitas relações e propriedades a serem descobertas em um triângulo de Pascal, o que desafia cada vez mais as mentes ávidas da matemática.

REFERÊNCIAS

01-LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. [S.l.]: SBM, 2016. v. 2.

02-MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta**. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2015.

03-KOSHY, Thomas. Fibonacci, Lucas, and PellNumbers, and Pascal's Triangle. **Applied Probability Trust**, p. 125–132, 2011.

04-SINGMASTER, David. **Notes on Bonimial Coeficients IV**. 1. ed. [S.l.]: The Fibonacci Quarterly, 1973. v. 11, p. 282–284.

05-HILLMAN, Abraham P.; JR., Verner Emil Hoggatt. Exponents of Primes in Generalized Binomial Coefficients. **Journal für die reine und Angewandte Mathematik**, p. 262–263, 375–380, 1973.

06-HILLMAN, Abraham P.; JR., Verner Emil Hoggatt. **A Proof of Gould's Pascal Hexagon Conjecture**. 5. ed. [S.l.]: The Fibonacci Quarterly, 1973. v. 10, p. 565–568, 598.

07-GOULD, Henry Wadsworth. **A Greatest Common Divisor Property of Binomial Coefficients**. 5. ed. [S.l.]: The Fibonacci Quarterly, 1972. v. 10, p. 579–584, 628.

08-HITOTUMATU, Sin; SATO, Diahachiro. Star of David Theorem. **Summer Research Institute of the Canadian Mathematical Congress**, 1974.

09-OLEVEIRA SANTOS, José Plínio de; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 1. ed. [S.l.]: Ciência Moderna, 2008.

10-C. BACHX, Arago de; POPPE, Luiz M. B.; TAVARES, Raymundo N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. 1. ed. [S.l.]: Companhia Editora Nacional, 1975.

11-FREIRE, Benedito Tadeu V. Análise Combinatória. **Universidade Federal do Rio Grande do Norte**, 2001.

12-DCODE - THE ULTIMATE TOOLKIT TO SOLVES EVERY GAMES/ RIDDLES/ GEOCACHING/ CTF. **The Best GCD (Greatest Common Divisor**. [S.l.: s.n.], 20 fev. 2021. Disponível em: https://www.dcode.fr/gcd.