Mychelly Agnes Marcelo Henrique

Uma análise do ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático

Rondonópolis - MT

Maio de 2021

Mychelly Agnes Marcelo Henrique

Uma análise do ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, polo Rondonópolis, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Rondonópolis – UFR

Instituto de Ciências Exatas e Naturais – ICEN

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientador: Vinicius Souza Bittencourt

Rondonópolis - MT

Maio de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

H519a Henrique, Mychelly Agnes Marcelo.
Uma análise do ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático / Mychelly Agnes Marcelo Henrique. -- 2021
175 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Vinicius Souza Bittencourt.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Extas e Naturais, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Rondonópolis, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Frações equivalentes. 2. Teoria Antropológica do Didático. 3. Engenharia Didática de Segunda Geração. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS - UFR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT-UFR

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Uma análise do ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático

AUTORA: MESTRANDA MYCHELLY AGNES MARCELO HENRIQUE

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional em parceria com a Universidade Federal de Rondonópolis, PROFMAT-UFR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em 31 de maio de 2021.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor Vinicius Souza Bittencourt (Presidente Banca / Orientador)

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Rondonópolis

2. Doutor Marcos André de Jesus Delgado (Membro Interno)

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Rondonópolis

3. Doutor Luiz Marcio Santos Farias (Membro Externo)

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal da Bahia

4. Doutora Eunice Cândida Pereira Rodrigues (Suplente)

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Rondonópolis

5. Doutor Clayton Eduardo Lente da Silva (Suplente)

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Rondonópolis

6. Doutor Edmo Fernandes Carvalho (Suplente)

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal do Oeste da Bahia

Rondonópolis, **31 de maio de 2021**.

Documento assinado eletronicamente por **VINICIUS SOUZA BITTENCOURT**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 14/06/2021, às 19:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **LUIZ MARCIO SANTOS FARIAS**, **Usuário Externo**, em 14/06/2021, às 19:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Mychelly Agnes Marcelo Henrique**, **Usuário Externo**, em 14/06/2021, às 20:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANDRE DE JESUS DELGADO**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 14/06/2021, às 21:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3610225** e o código CRC **B88804FA**.

Agradecimentos

À Deus, pela dádiva da vida, por seu infinito amor, me permitindo realizar tantos sonhos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Vinicius Souza Bittencourt, por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa, por toda a paciência, competência, profissionalismo e contribuições valiosas dadas durante todo este processo.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Marcos André de Jesus Delgado e Prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias, por aceitarem participar e colaborar com esta dissertação.

A todos os professores do PROFMAT da Universidade Federal de Rondonópolis (UFR), que foram muito importantes na minha formação acadêmica.

Aos meus colegas, que durante esse período do curso, dividiram as mesmas expectativas e desafios, em especial a minha colega e amiga Lilian da Silva Gonçalves, que foi fundamental nesse processo, nunca medindo esforços para transferir seus conhecimentos.

Finalmente, a toda minha família, em especial ao meu marido Jackson, meu maior incentivador, que nunca me permitiu desanimar, sempre com palavras de ânimo e conforto, me fazendo acreditar que eu chegaria ao final desta etapa, e aos meus filhos amados Samuel, Isaque e Isabel, que, embora ainda pequenos, tiveram paciência e carinho, mesmo que nem sempre conseguissem entender minha ausência para a finalização deste meu projeto de vida.

Por fim, a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desta dissertação, minha sincera gratidão.

"Tudo tem o seu tempo determinado,
e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.
Há tempo de nascer, e tempo de morrer;
tempo de plantar, e tempo de colher."
(Bíblia Sagrada, Eclesiastes 3: 1, 2)

Resumo

Essa pesquisa tem como objetivo a elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática acerca do tema "números racionais", em particular do recorte "frações equivalentes", assim como o estudo matemático formal do mesmo. A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática de Segunda Geração, que serviu de guia aos passos da aplicação de uma sequência didática. Para sua análise, foram utilizadas como aporte a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria Antropológica do Didático. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do sexto ano, de quatro turmas do Ensino Fundamental, dentro do processo de pesquisa-formação de uma professora de escola pública da cidade de Rondonópolis-MT. Os dados foram recolhidos das respostas do questionário virtual ao final da realização da sequência didática e também por meio da análise das respostas das atividades dos alunos, enviadas por aplicativo de mensagens instantâneas. Constatou-se que os alunos compreendem o conceito de frações e são capazes de identificá-las através de sua representação geométrica, entretanto apresentam dificuldades de reconhecer tais objetos quando a representação geométrica não é apresentada. Verificou-se que a utilização de material concreto manipulável e ambiente computacional GeoGebra contribuem para o ensino remoto de forma positiva, auxiliando na aprendizagem do nosso objeto matemático de referência: frações equivalentes.

Palavras-chave: Frações equivalentes. Teoria Antropológica do Didático. Engenharia Didática de Segunda Geração.

Abstract

This research aims to develop, apply and analyze a didactic sequence on the theme "rational numbers", in particular the part "equivalent fractions", as well as the formal mathematical study of the same. The research methodology used was Second Generation Didactic Engineering, which served as a guide to the steps of applying a didactic sequence. For its analysis, the Theory of Didactic Situations and the Anthropological Theory of Didactics were used as input. The research subjects were sixth-grade students, from four classes of elementary school, within the research-training process of a public school teacher in the city of Rondonópolis-MT. The data were collected from the responses of the virtual questionnaire at the end of the didactic sequence and also through the analysis of the responses of the students' activities, sent by instant messaging application. It was found that students understand the concept of fractions and are able to identify them through their geometric representation, however they have difficulties in recognizing such objects when the geometric representation is not presented. It was found that the use of manipulable concrete material and GeoGebra computational environment contribute to remote teaching in a positive way, helping to learn our mathematical reference object: equivalent fractions.

Keywords: Equivalent fractions. Anthropological Theory of the Didactic. Didactic Engineering of Second Generation.

Résumé

Cette recherche vise à développer, appliquer et analyser une séquence didactique sur le sujet “nombres rationnels”, en particulier à partir du découpage de fractions équivalentes, ainsi que l’étude mathématique formelle du même. La méthodologie de recherche utilisée était l’ingénierie didactique de deuxième génération, que a servi de guide aux étapes d’application d’une séquence didactique. Pour son analyse, la Théorie des Situations Didactiques et la Théorie Anthropologique de la Didactique ont été utilisées comme intrants. Les sujets de recherche étaient des élèves de sixième année, de quatre classes d’école élémentaire, dans le cadre du processus de recherche-formation d’un enseignant d’une école publique de la ville de Rondonópolis-MT. Les données ont été collectées à partir des réponses du questionnaire virtuel à la fin de la séquence didactique et également à travers l’analyse des réponses des activités des étudiants, envoyées par l’application de messagerie instantanée. Il a été constaté que les élèves comprennent le concept de fractions et sont capables de les identifier grâce à leur représentation géométrique, mais ils ont des difficultés à reconnaître de tels objets lorsque la représentation géométrique n’est pas présentée. Il a été constaté que l’utilisation de matériaux concrets manipulables et l’environnement de calcul GeoGebra contribuent à l’enseignement à distance de manière positive, en aidant à apprendre notre objet de référence mathématique : les fractions équivalentes.

Mots-clés : Fractions équivalentes. Théorie Anthropologique du Didactique. Ingénierie Didactique de Deuxième Génération.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

AI&SD	Análise Institucional e Sequência Didática
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CONSED	Conselho Nacional de Secretários de Educação
DCN'S	Diretrizes Curriculares Nacionais
DE	Dispositivo Experimental
DI	Domínio de Integridade
DRC-MT	Documento de Referência Curricular para Mato Grosso
ED	Engenharia Didática
EJA	Educação de Jovens e Adultos
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PNE	Plano Nacional de Educação
PPP	Projeto Político-pedagógico
PTD	Plano de trabalho docente
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SD	Sequência Didática
SEDUC	Secretaria de Estado de Educação
TAD	Teoria Antropológica do didático
TD	Transposição Didática
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFR	Universidade Federal de Rondonópolis

Lista de símbolos

$\in$	Pertence (predicado binário).
$\cup$	União (de conjuntos).
$\cap$	Interseção (de conjuntos).
$\emptyset$	Conjunto vazio.
$\subset$	Inclusão de conjunto.
$\subsetneqq$	Inclusão própria de conjunto.
$\mathbf{A}^{\#}$	$\mathbf{A} \setminus \{0\}$, onde $\mathbf{A}$ é anel.
$\sim$	Relação de equivalência.
$\rightsquigarrow$	Mudança de notação.
$\leftrightsquigarrow$	Mudança de quadro ou mudança de notação.
$\hookrightarrow$	Imersão homomórfica.
$\implies$	Implicação lógica.
$\iff$	Equivalência lógica.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números Inteiros.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números Racionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números Complexos.
T	Tarefa (em uma praxeologia pontual).
τ	Técnica (em uma praxeologia pontual).
θ	Tecnologia (em uma praxeologia pontual).
Θ	Teoria (em uma praxeologia pontual).

Sumário

1 Preparação da pesquisa

Nesse capítulo apresentamos a Introdução com uma breve biografia, visando expor e situar o perfil da pesquisadora do estudo em questão. Destacamos nossa problemática, questões de pesquisa, objetivos e a estrutura do trabalho, em seguida a História, Contexto e Descrição da escola que fará parte deste estudo, e por fim uma breve análise do recorte frações equivalentes em alguns livros didáticos utilizados na escola em questão.

1.1 Introdução

Nascida no ano de 1986, na cidade de Curitiba[1], estado do Paraná, mas criada na cidade de Cascavel[2], também no estado do Paraná. Primogênita de uma família de duas irmãs, criada por seus pais, que sempre batalharam muito pelo sustento dos filhos. O pai trabalhava com animação de festa como palhaço e mágico, mais tarde foi viajar e morar com o circo, continua ainda no mesmo ramo. A mãe trabalhou como cabeleireira e manicure, a vida foi difícil e eles não tiveram oportunidade de continuar os estudos, mas sempre incentivaram os filhos a estudar. Cursou o Ensino Fundamental I em escola particular, foi bolsista e em troca sua mãe prestava serviços aos donos da escola, já no Ensino Fundamental II e Médio, estudou em escola pública.

Desde cedo, apaixonou-se pela matemática, ao concluir o Ensino Médio, iniciou Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, e começou a trabalhar no KUMON[3] como corretora das atividades de matemática, este foi um ano muito importante, de muito aprendizado. O KUMON tampou lacunas que haviam ficado durante sua vida escolar.

Levou mais tempo que o normal para concluir a graduação. Durante esse período, casou e teve dois filhos (depois foi abençoada com mais uma), trancou e voltou para concluir, na época a falta de professores de matemática em seu estado era grande e começou a lecionar como professora substituta do estado, enquanto ainda cursava a graduação, conheceu diferentes realidades: escolas bem localizadas, bem como de periferia e distritos, em todas elas os alunos nas diferentes séries tinham dificuldades em matemática básica, principalmente quando envolve o ensino de frações.

Ao concluir a graduação no ano de 2013, começou a lecionar em turmas de Educação

---

[1] O município de Curitiba abrange uma área de 435,036 Km², localizada na região Sul do Brasil, no leste do estado do Paraná e possui cerca de 1.948.626 habitantes. IBGE (2020b)

[2] O município de Cascavel abrange uma área de 2,100 km², situada na região oeste do Paraná, possui cerca de 332.333 habitantes. IBGE (2020a)

[3] Kumon é um método que, através de atividades de repetição, tem como objetivo ensinar não só a matemática, mas tornar o aluno autodidata.

de Jovens e Adultos (EJA) na Escola SESI[4]-PR, ainda na cidade de Cascavel, onde ficou até meados de 2018. E ainda em 2018 mudou-se para Rondonópolis para assumir o concurso, atuando na Rede Estadual do Mato Grosso, em turmas do 6° ano do Ensino Fundamental.

O tema escolhido para esse trabalho vai ao encontro de sua vivência docente, surgiu a partir de inquietações de práticas em sala de aula, como professora de matemática, e tem o intuito de oferecer alguns caminhos para o ensino de equivalência de frações, voltado para alunos do 6° ano do Ensino Fundamental, pois o ensino dos números racionais, na sua forma fracionária, percorre toda vida escolar – desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

De acordo com Magina e Campos (2008), em sua vida escolar os alunos podem apresentar habilidades ao manipular os números racionais mesmo sem ter uma noção clara de tal conceito.

> Pode ser constatado quando observamos o baixo desempenho atingido pelos alunos brasileiros frente a situações que envolvem o conceito de número racional, na sua representação fracionária, em questões bem próximas daquelas trabalhadas em sala de aula e apresentadas na maioria dos livros didáticos. Esse baixo rendimento pode ser também observado nos resultados oficiais, de avaliações bienais realizadas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (MAGINA; CAMPOS, 2008, p. 2).

Durante o período atuado em sala de aula, observou-se que o ensino de frações é algo abstrato e complexo para muitos alunos, a maioria deles cometem erros[5] pelo fato de não compreenderem o conceito de frações, isso ocorre principalmente durante a realização das operações entre frações, por esse motivo, e por trabalhar com alunos com esse perfil, escolhemos fazer uma pesquisa utilizando um recorte do ensino de frações, visto que a aprendizagem de frações equivalentes é fundamental para a compreensão dos demais assuntos relacionados ao estudo de números racionais como: operações de frações, números decimais e porcentagem.

A escola Odorico Leocádio da Rosa, que fará parte do objeto dessa pesquisa possui um bom acervo de jogos e materiais manipuláveis, que durante o ensino presencial é utilizado nas aulas, para o ensino de frações. Como experiência da própria pesquisadora que utilizava os discos, ábaco e dominó de frações, notou-se que ao inserir materiais manipuláveis durante suas aulas, não só no ensino de frações mas também no ensino de outros saberes, houve um despertar em alguns alunos que antes pareciam mais dispersos, e o conhecimento se tornou algo mais simples, muitos demonstraram interesse em participar e aprender.

[4] Serviço Social da Indústria (SESI), faz parte do chamado Sistema S, voltado para o treinamento profissional, assistência técnica, entre outros, é o conjunto de instituições corporativas da Indústria.

[5] A expressão "cometer erros", ao longo de todo este trabalho, representa principalmente o não cumprimento das expectativas institucionais sobre o objeto matemático tratado.

Para Schastai (2012), um dos principais motivos da dificuldade dos alunos no ensino de frações é o desinteresse pelo conteúdo, que está diretamente relacionado à abordagem utilizada pelo professor. A autora ressalta também que quando o conteúdo ensinado não tem significado, ele não é interessante para o aluno e nem para o professor, diante disso, buscamos estratégias que despertem a curiosidade e vontade de aprender nos estudantes.

1.1.1 Problemática

Fração, qual seu significado para uma criança? E para o professor de matemática? Seu primeiro contato durante a vida escolar com esse tema é com um professor de matemática? O livro didático utilizado no 4º Ano do Ensino Fundamental, de modo geral, as frações são modos de representar partes de um todo dividido em partes iguais. Será que é esse o primeiro contato de uma criança com o conceito de frações? Será que o modo como professor de matemática trabalha em sala de aula com esse tema tem sido eficiente? Por que quando o professor de matemática formaliza esse ensino acaba tendo entraves? Como gerar este despertar no aluno no ensino de frações?

Esses questionamentos nos motivam a buscar novas metodologias de aprendizado para este conteúdo, com o objetivo de alcançar resultados significativos na prática pedagógica em sala de aula.

Sandra Magina e Tânia Campos (2008) realizaram uma pesquisa com 70 professores não especialistas em matemática e 131 alunos de turmas de 3º e 4º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de conhecer a maneira como fração vem sendo ensinada e aprendida no 2º Ciclo[6], obter um prognóstico dos alunos e avaliar o conhecimento dos professores a respeito do objeto matemático frações. As autoras enfatizam que os professores, não especialistas destas turmas em questão, costumam utilizar situações de parte-todo como principal contexto para o ensino de frações. Os problemas aplicados para os alunos foram apresentados aos professores, eles então ofereceram estratégias de ensino e possíveis raciocínios de seus alunos, após análise os professores, em sua maioria, apresentaram confusão na representação de fração e razão, parecendo não haver clareza para eles sobre os diferentes significados da fração, levando os professores a apresentarem limitadas estratégias no ensino de frações, de forma geral também subestimaram o desempenho de seus alunos, estes em questão as autoras enfatizam que existe uma dificuldade crescente relacionada ao objeto matemático frações.

Não somente para os professores não especialistas, mas também para os professores de matemática, os significados de frações nem sempre é conhecido por todos, assunto este que depende da busca por conhecimento dos mesmos.

Os racionais não é um conceito fácil de aprendizagem para os alunos da educação

[6] 2º Ciclo compreende-se por turmas do 4º, 5º e 6º ano do Ensino Fundamental

básica, há muitas possibilidades de organização no ensino desse conteúdo e não há unanimidade dentro das pesquisas relacionadas a esse assunto. Estudos nacionais e internacionais documentam as dificuldades na aquisição deste domínio.

De acordo com, Santos, Cameschi e Hanna (2012), "os alunos brasileiros do sexto ano do ensino fundamental frequentemente não são capazes de resolver problemas que requerem o conceito de proporção e frações equivalentes".

Sylvain Martinez-Ibanez, em sua tese de doutorado analisou o desempenho dos alunos em matemática de onze países de três regiões diferentes (América do Norte, Europa Ocidental e Sudeste Asiático) em avaliações internacionais do TIMSS[7], o que corresponde a 6.383 estudantes, após uma pesquisa com parte destes, a saber 4.276 estudantes ingleses e americanos, concluiu-se que o domínio de frações está diretamente ligada ao desempenho dos alunos em matemática.

> Como resultado, uma melhor compreensão da noção de fração no ensino fundamental, deve permitir que os alunos mostrem maior facilidade no aprendizado de matemática no ensino médio e universidade (MARTINEZ-IBANEZ, 2018, p. 12).

Frações continua a representar um desafio para o professor, as metodologias de ensino utilizada por parte de alguns docentes, enfatiza a aplicação de tarefas e técnicas, sem a preocupação com a compreensão do objeto matemático de estudo. Para que o ensino não seja apenas uma exposição e reprodução de técnicas, é necessário que o professor tenha uma posição criativa. Uma sugestão é a utilização de tecnologias digitais[8], ou materiais concretos manipuláveis, de forma a contribuir com os ambientes de aprendizagem.

O trabalho com materiais concretos manipuláveis à mão livre é eficaz no processo de ensino, segundo Martinez-Ibanez (2018) o uso de suportes de concreto é um elemento central no ensino de frações, não apenas no início da aprendizagem, mas também, para o domínio das operações envolvendo frações.

Um software matemático como o GeoGebra[9], pode ser muito útil na construção do saber matemático, fácil de usar e torna o ensino mais atrativo, pode ser usado em diferentes níveis de ensino. Conhecido por muitos matemáticos ele auxilia na compreensão de diferentes conteúdos, permitindo no ensino de frações a visualização da representação geométrica de uma fração, bem como de suas frações equivalentes.

Closs (2015) adotou a engenharia didática em turma do sexto ano no ensino de frações utilizando o GeoGebra como recurso didático, com o objetivo de contribuir para o

[7] O *Trends in International Mathematics and Science Study* é uma avaliação internacional do desempenho dos alunos do 4º e do 8º ano de escolaridade em matemática e em ciências. Em matemática os domínios específicos de conteúdo avaliado são: Números, Formas Geométricas e Medida, e Apresentação de Dados, no 4º ano de escolaridade, e Números, Álgebra, Geometria e Dados e Probabilidade, no 8º ano.

[8] Recursos digitais ou recursos de mídias.

[9] Software gratuito de matemática que reúne geometria, cálculo, álgebra, gráficos e estatística.

ensino de frações, por meio do uso de mídias digitais, e tentar sanar as dificuldades de seus alunos ao operar frações e compreender o conceito de frações equivalentes. Utilizando o laboratório de informática de sua escola o autor apresentou uma atividade no GeoGebra, na qual os alunos manipularam utilizando círculos de frações no software, eles puderam visualizar os diferentes tipos de operação de frações. Após análise de sua Sequência Didática, o autor descreve que foi possível atingir o objetivo da pesquisa em partes, já que houve uma redução na dificuldade dos alunos no ensino do objeto matemático em questão.

De conformidade como que foi apresentado, escolhemos utilizar materiais concretos manipuláveis e o GeoGebra como recursos didáticos. Como frações é um tema bastante amplo na Educação Básica, escolhemos frações equivalentes como objeto matemático de referência[10] para nossa pesquisa, a escolha se deu principalmente pela importância que este tem, sendo geralmente pré-requisito para o domínio de operação de frações de denominadores diferentes.

Levando em consideração a importância de expandir a Didática Francesa, para contribuir com o professor na sua prática em sala de aula, optamos pela Teoria das Situações didáticas (TSD) e pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvidas por Guy Brousseau (1986) e Yves Chevallard (1991) respectivamente, que fundamentam nosso trabalho mediante a análise institucional dos objetos e sujeitos envolvidos. Utilizaremos a Engenharia Didática (de Segunda Geração) como metodologia de pesquisa.

1.1.1.1 Hipótese de pesquisa

No ensino de frações equivalentes temos diferentes tipos de tarefas e para cada tarefa uma variedade de técnicas, em qualquer atividade na matemática a compreensão de uma “técnica” é chamada de “tecnologia” no campo da TAD. Assim, diante disso, com uma metodologia de ensino voltada à utilização de tecnologia[11] referente ao aprendizado de frações equivalentes, para os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma Escola da Rede Estadual de Mato Grosso, elaboramos a seguinte hipótese de pesquisa:

Hipótese de pesquisa
A dificuldade dos alunos em assimilar o tema frações equivalentes é menor quando utiliza-se o ambiente computacional GeoGebra e materiais concretos manipuláveis, o uso destes se faz necessário no ensino do objeto matemático em questão. Aderindo este conhecimento, os alunos terão maior habilidade ao estudar os demais conteúdos relacionados ao tema frações.

[10] Este “objeto matemático de referência” é o objeto do saber escolhido, onde serão trabalhados as questões de pesquisa, de acordo com Henriques, Attie e Farias (2016)

[11] Tecnologia no campo da Teoria Antropológica do Didático

Com base nessa hipótese, em concordância com nossa problemática, apresentamos a seguir as questões de pesquisa para o desenvolvimento do nosso trabalho.

1.1.2 Questões de Pesquisa

Como mencionado anteriormente, o nosso estudo abrange as práticas dos alunos do 6° ano do Ensino Fundamental, com o objeto de estudo frações equivalentes, o processo será mediado pela utilização do ambiente computacional GeoGebra e atividades utilizando materiais concretos manipuláveis.

Para realizar esse estudo do objeto matemático de referência, denominado frações equivalentes, foi preciso conhecer a ecologia desse objeto, desenvolvido no 6º ano do Ensino Fundamental em uma instituição de referência. Além disso, utilizar-se-á a análise praxeológica para analisar as tarefas e técnicas utilizadas mediante as abordagens teóricas da TSD e da TAD. Com isso, formulamos nossa primeira questão de pesquisa:

1ª Pergunta
Quais são os principais tipos de abordagens no ensino de frações equivalentes dos livros didáticos, na instituição de referência? Como o ensino remoto afeta essas abordagens?

Analisar o recorte de frações equivalentes no local onde vive nosso objeto matemático de referência; de que maneira isso é abordado em alguns livros adotados na instituição de referência, bem como os objetos de conhecimento e habilidades a serem contemplados no Ensino Fundamental de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Documento de Referência Curricular para Mato Grosso (DRC-MT).

Foi levado em consideração a realidade dos estudantes da instituição de referência desta pesquisa, a saber, a escola que a pesquisadora leciona, falaremos a respeito disso mais adiante, portanto, se faz necessário um novo olhar, com aporte teórico da TSD e da TAD.

Além disso, observar as implicações do ensino remoto em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. Levando em consideração estas observações, pudemos escrever nossa próxima questão de pesquisa:

2ª Pergunta
O auxílio do software GeoGebra e materiais concretos manipuláveis, no estudo de frações equivalentes, oportuniza ao aluno se relacionar com uma quantidade maior de conceitos, tornando-o mais apto a responder outras questões relacionadas ao objeto matemático de referência?

Após a aplicação e análiese dos dispositivos experimentais desenvolvidos em nossa Sequência Didática, foi possível verificar os benefícios e os entraves em torno do software GeoGebra, bem como dos materiais concretos manipuláveis. Com o auxílio da metodologia da Engenharia Didática, entendemos como esses recursos podem auxiliar no ensino de frações equivalentes durante as aulas remotas.

Para traçarmos os objetivos a seguir, que guiaram o desenvolvimento de nosso estudo, se fez necessário analisar essas questões.

1.1.3 Objetivo Geral

Por muitas vezes os alunos não assimilam a matemática ensinada, é necessário então utilizar outros métodos que possam despertar o interesse dos mesmos, diante disso, e amparados nos documentos que norteiam a educação básica de ensino, nosso objetivo geral é dado a seguir:

Encontrar outros métodos de ensino-aprendizagem do objeto matemático escolhido, usando novos recursos que podem ser aplicados diante dessa nova modalidade de aulas remotas, além de analisar as práticas dos alunos no ensino de frações equivalentes diante desta essa nova realidade.

1.1.4 Objetivos Específicos

- Realizar um estudo matemático formal sobre a construção do conjunto numérico dos racionais e sobre as relações de equivalências;

- Trazer uma abordagem dos quadros teóricos da Didática Francesa;

- Realizar a análise Institucional acerca do objeto matemático de referência a partir dos documentos oficiais, e uma breve análise do recorte frações equivalentes em alguns livros didáticos;

- Elaborar e aplicar uma Sequência Didática em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola no município de Rondonópolis-MT, sob o aporte da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria Antropológica do Didático;

- Investigar as diferentes possibilidades do ensino de frações equivalentes nas aulas remotas, por meio de atividades elaboradas a partir do uso do GeoGebra e materiais concretos manipuláveis.

1.1.5 Estrutura do Trabalho de Dissertação

Apresentaremos a estrutura do nosso trabalho de dissertação, dividido em seis capítulos, sendo o primeiro reservado para a preparação da pesquisa, os próximos dois são os referenciais teóricos e metodológicos e os três últimos fazem parte dos resultados da pesquisa.

O primeiro capítulo, **Preparação da pesquisa**, está dividido em três seções, iniciando com a *Introdução*, que traz um breve relato da trajetória de vida acadêmica e profissional da educadora diretamente responsável pelo projeto, os desafios do ensino de frações, as principais razões para a escolha do tema "equivalência de frações", que são justificadas por meio de inquietações pessoais e a importância do tema no ensino da matemática, esta seção também versa sobre a problemática e as questões de pesquisa que serão respondidas no decorrer do trabalho, os objetivos e estrutura da dissertação. Na seção *História, Contexto e Descrição*, temos uma descrição e contextualização do município de Rondonópolis, estado do Mato Grosso, bem como a escola e os alunos protagonistas deste trabalho. A ultima seção deste capítulo, destina-se a apresentação de uma breve análise das *Frações Equivalentes em Alguns Livros Didáticos*, observando os tipos de abordagens do nosso objeto matemático de estudo, presentes em três livros didáticos utilizados na instituição de referência.

O capítulo dois, reservamos para uma breve introdução à teoria dos anéis, discutimos relações de equivalências, e fizemos uma **Construção formal do corpo dos racionais** e investigamos, do ponto de vista da epistemologia matemática, sobre o objeto equivalência de frações.

No terceiro capítulo, apresentamos os **Quadros Teóricos e Metodológicos** com uma breve discussão a respeito da Transposição Didática, os Obstáculos Epistemológicos, a Teoria das Situações Didáticas, o Contrato Didático, a Engenharia Didática e a Teoria Antropológica do Didático que fazem parte do *Quadro teórico da Didática Francesa*, nos dando suporte para o desenvolvimento de todo o trabalho. Em seguida apresentamos a *Metodologia da Pesquisa*: Engenharia Didática – Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD) – proposta por Henriques (2016), nesta seção apresentamos as 8 etapas a serem desenvolvidas de forma genérica.

O quarto capítulo, **Definições e análises preliminares**, reservamos para o desenvolvimento das quatro primeiras etapas desta pesquisa.

No quinto capítulo, **Organização e aplicação de uma SD**, encontra-se a aplicação da Sequência Didática, bem como sua análise *a priori* e *a posteriori*, com análise das dificuldades e resultados obtidos durante e depois das atividades realizadas pelos alunos.

Para finalizar, o sexto capítulo discorre sobre as **Considerações Finais**, na primeira seção: *Ensino de Frações no Contexto do Ensino Remoto*, relatamos sobre os entraves que tivemos durante a realização deste trabalho, e na última seção deste capítulo é apresentada a *Conclusão*, com percepções conclusivas acerca de toda a pequisa. Logo após, temos as **Referências**, **Apêndices** e **Anexos**.

1.2 História, Contexto e Descrição

Para auxiliar na compreensão das inúmeras dificuldades enfrentadas da aprendizagem de matemática, em especial no ensino de frações, vale descrever o ambiente em que se localizam os alunos.

1.2.1 A Escola

A unidade escolar (Escola Estadual Odorico Leocádio da Rosa) está localizada no bairro Novo Horizonte na cidade de Rondonópolis. Rondonópolis é uma cidade do estado do Mato Grosso, situada na região Centro-Oeste, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em censo realizado em 2020, sua população é composta por 236.042 habitantes. Sendo o terceiro município mais populoso do Mato Grosso, fica atrás apenas de Cuiabá e Várzea Grande, que está situada na região metropolitana da grande Cuiabá. Diante disso, podemos então dizer que Rondonópolis é a maior cidade do interior do Mato Grosso.

A escola em questão se destaca dentre as 34 escolas estaduais do município, pois nas últimas edições do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), a escola ficou classificada em 2° e 3° lugares respectivamente no município, sendo escolhida como a melhor escola da região Centro Oeste e uma das cinco finalistas da etapa nacional do Prêmio Gestão Escolar 2015, que é realizado anualmente desde 1998 pelo Conselho Nacional de Secretários de Educação (CONSED). Por esses e outros motivos, a procura por vaga na escola é muito grande e atende a comunidade em seu limite máximo, tendo assim uma procura por pais de todas as regiões da cidade, atendendo alunos de diferentes classes sociais.

Cabe estas informações pra compreender, que embora a participação dos alunos nas aulas online representem menos que 50% dos alunos matriculados, ainda assim, por ser uma escola estadual com bastante procura de vagas, é uma das poucas escolas que tiveram adesão mínima de alunos, que pudesse permitir uma aplicação e análise de uma sequência didática no ensino remoto.

1.2.2 Os Alunos

Neste ano, 2020, a pesquisadora ministrou aulas apenas para as turmas de 6° Ano do Ensino Fundamental, sendo assim, o estudo desta dissertação ocorreu nessas turmas de regência.

A Escola Estadual Odorico Leocádio da Rosa possui 36 turmas, sendo 18 no período matutino e 18 no período vespertino, atendendo alunos do 1° ao 9° Ano do Ensino Fundamental, com 4 turmas para cada ano de ensino. Os alunos das quatro turmas dos 6°s anos, protagonistas deste projeto educacional, estudam no período matutino. A faixa etária desdes estudantes varia de 11 a 12 anos. A carga horária prevista para o Ensino Fundamental é de 20 aulas por semana, com duração de 60 minutos por aula. A carga horária destinada para o componente curricular Matemática é de 5 aulas por semana.

1.2.3 Aulas Remotas

Com a chegada da pandemia Covid-19 em nosso país, em fevereiro de 2020, houve início do isolamento social, e as instituições tiveram suas atividades presenciais suspensas.

No Estado do Mato Grosso - MT, o Decreto 407, de 16 de março de 2020, conforme consta no **Apêndice**, determinou a suspensão das atividades escolares da rede pública estadual, municipal e de ensino superior, que seguiu até o fim do período letivo de 2020.

Dessa forma, as atividades passaram a ser desenvolvidas de maneira remota nas escolas estaduais, desde 03 de Agosto de 2020, de acordo com os orientativos, os alunos que têm acesso à internet terão contato com os professores via whatsapp e aulas online através da plataforma TEAMS, com redução de 60 para 30 minutos por aula. Já os alunos que não têm acesso, os responsáveis têm à disposição na escola, mensalmente, atividades de forma impressa, que devem devolver no mês seguinte ao retirar a nova apostila, para que seja lançado frequência e conceito.

No ano de 2021 houve continuidade das aulas remotas, mudando a plataforma para Classroom, nela os alunos realizam o envio das atividades, e o Google Meet, como aplicativo para videoconferência, nos demais processos de ensino continuou como no ano anterior.

1.3 Frações Equivalentes em Alguns Livros Didáticos

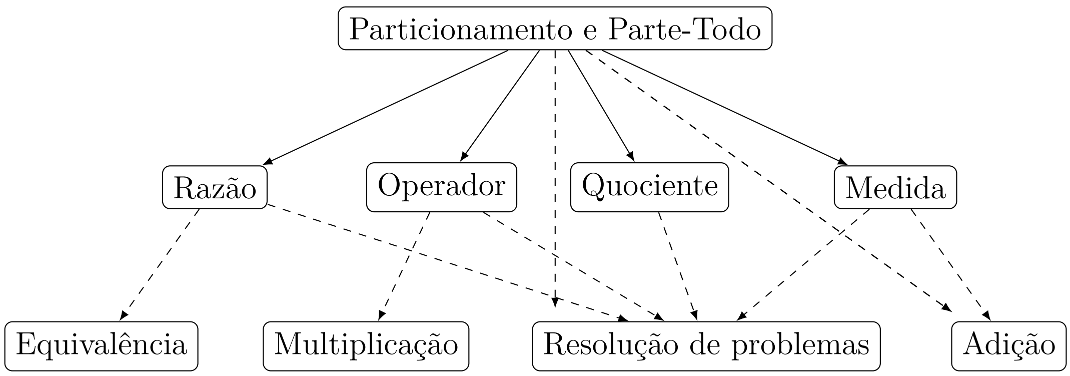
Para fazermos uma breve análise do recorte frações equivalentes em alguns livros didáticos é necessário entendermos sobre os diferentes significados que podemos atribuir ao conceito de frações. Sylvain Martinez-Ibanez, em seu trabalho de tese de doutorado em 2018, destaca que é muito divergente entre os pesquisadores o número de significados deste conhecimento, ela se baseia principalmente nos autores que iremos destacar, que segundo ela, são suficientes para esclarecer a noção de número racional.

Em nossa revisão de literatura, iremos abordar cinco destes significados, que são citados por Behr (1983), um a mais dos quatro identificados e desenvolvidos por Kieren

(1980), são eles: parte-todo, medida, quociente, razão (também chamada de proporção) e operador.

Behr (1983) propôs uma organização ligada a operações, equivalência de frações e resolução de problemas, conforme o diagrama abaixo na figura 1. Podemos ver que no topo está o significado parte-todo, ocupando a parte central de seu modelo teórico com suas partições, seguiremos em nossa análise dos livros didático esta organização.

Figura 1 – Esquema conceitual para instrução sobre números racionais.



Fonte: Adaptado de Behr et al. (1983, p. 11) tradução do autor

Pra Behr (1983), o significado parte-todo é o ponto de partida para o ensino dos demais significados, pode-se observar no diagrama que as setas sólidas e tracejadas sugerem as relações entre a construção dos números racionais e as operações. O significado razão é o mais natural ao conceito de equivalência, que é o nosso objeto matemático de estudo.

Significado Parte-todo

A fração como parte de um todo relaciona o todo de um objeto e um número de partes no qual ele foi dividido, esse todo pode ser representado por figuras na forma de pizzas, tortas, bolos, chocolates e conjuntos de elementos, representando o número acima do traço como o número de partes pintadas, e o número abaixo do traço como sendo o total de partes. Kieren (1980), destaca que:

> A interpretação parte-todo do número racional depende diretamente da capacidade de particionar uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos sem subpartes ou conjuntos de tamanhos iguais. Este subconjunto é fundamental para todas as interpretações posteriores (KIEREN, 1980 apud BEHR et al., 1983, p. 4).

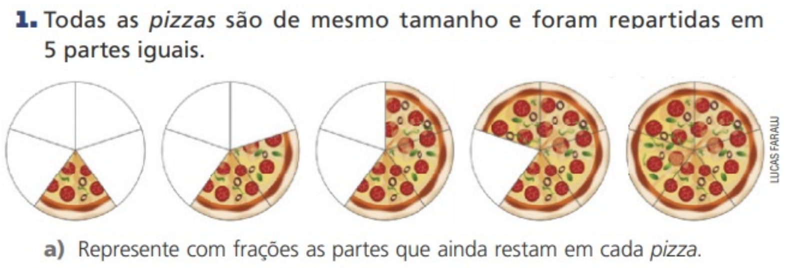
Este significado é o mais abordado não somente nos livros didáticos, mas pelos professores de matemática, bem como pelos professores não especialistas em matemática "como sendo o principal contexto de fração" como destaca Magina e Campos (2008).

Exemplo 1:

Dada uma torta cortada em 8 pedaços supostamente iguais, João comeu 3 destes pedaços. Notaremos isto da seguinte forma: João comeu $\frac{3}{8}$ desta torta.

Exemplo 2:

Figura 2 – Exemplo 1 do significado "parte-todo"



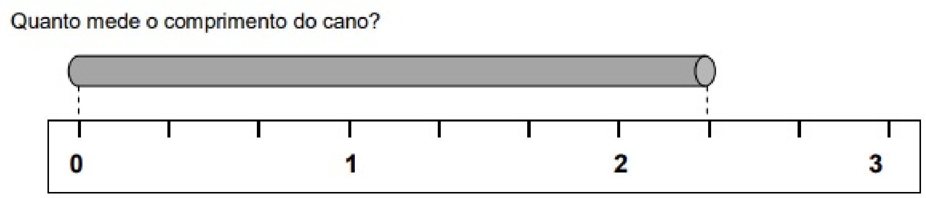
Fonte: *A Conquista da matemática*, de Júnior; Ruy; Castrucci (2018, p. 139)

Significado Medida

Neste significado a fração é usada para representar a medida de uma certa quantidade, ou seja, a quantidade é medida pela relação de duas variáveis. Para Behr et al. (1983, p. 10), "O significado medida aborda a questão de quanto há de uma quantidade em relação a uma unidade especificada dessa quantidade".

Exemplo 1:

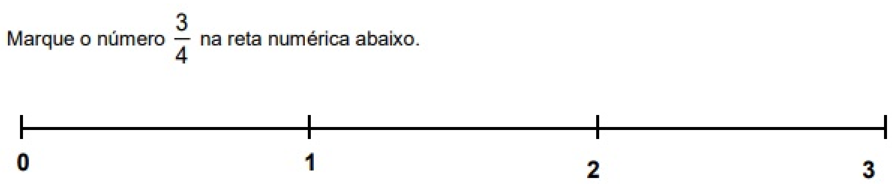
Figura 3 – Exemplo 1 do significado "medida"



Fonte: Lessa (2011, p. 28)

Exemplo 2:

Figura 4 – Exemplo 2 do significado "medida"



Fonte: Lessa (2011, p. 28)

Para Lessa (2011), esse significado também está associado ao ponto sobre uma reta numérica.

> Ao se medir o comprimento de determinado objeto utilizando uma unidade de medida específica - por exemplo, um pedaço de cordão, pode-se encontrar uma relação com a unidade que não corresponde a um inteiro, fazendo-se necessário subdividir o cordão em partes iguais para, então identificar o número conveniente de partes que são necessárias para ajustar a medida procurada. Neste processo os alunos trabalham com dois significados de número fracionário, como "medida" e "parte-todo" (LESSA, 2011, p .27).

Este significado é uma das opções como ponto de partida para o ensino de frações, algumas pesquisas apontam a importância do mesmo por fazer parte do cotiano do aluno, seja em receitas de bolos ou tortas, mesmo que embora seja tão pouco abordado nos livros didáticos atuais.

Significado Quociente

Corresponde a interpretação de $\frac{a}{b}$ como quociente, ou seja, a divido por b, por exemplo: se dividirmos 2 pizza igualmente entre 5 pessoas, podemos dizer que cada pessoa receberá $\frac{2}{5}$ de uma pizza, neste exemplo, temos duas variáveis, sendo a pizza a variável correspondente ao numerador e as pessoas a variável correspondente ao denominador.

Para Lessa (2011), este não é um significado de fácil compreensão para os alunos. No caso deste exemplo acima, a barra de notação $\frac{2}{5}$ assume a função de "dividir 2 por 5", que segundo a autora é muito diferente do significado de "dividir o todo em 5 partes e tomar 2".

Exemplo 1:

Quantas vezes $\frac{1}{8}$ de hora cabe em 2 horas?

Exemplo 2:

Quatro pizzas serão divididas entre amigos. Sabendo que cada amigo comeu $\frac{2}{5}$ de pizza, quantas pessoas haviam?

Exemplo 3:

São 4 doces e 3 crianças. Se os doces forem divididos igualmente pelas três crianças, quantos doces cada criança vai receber?

Significado Razão

Neste significado temos uma relação entre duas quantidades, segundo Sylvain Martinez-Ibanez, para vários autores o conceito de "parte-todo" são a base para a aprendizagem de frações, ela cita que o conceito de razão, por exemplo, nos dá uma noção de relação ao observar que $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$ tem a mesma proporção, significado fundamental para o nosso estudo de frações equivalentes.

> Razão é uma relação que transmite a noção de magnitude relativa; Portanto, é considerado mais corretamente como um índice comparativo do que como um número. O uso de proporções é uma ferramenta de resolução de problemas muito poderosa em uma variedade de situações e configurações de problemas que requerem comparações de magnitudes (BEHR et al., 1983, p. 6).

Exemplo 1:

Carlos vende carrinhos. Ele tem 7 carrinhos, sendo 2 vermelhos, 4 amarelos e 1 verde. Qual a fração que representa a quantidade de carrinhos amarelos que Carlos tem pra vender?

Exemplo 2:

No lançamento de um dado, há 6 possibilidades quanto à face que ficará voltada para cima. Qual a fração que representa a probabilidade de sair o número 3 com a face voltada pra cima?

Lessa (2011, p. 39) afirma que esse significado "dificilmente é trabalhado em turmas do 6º ano, sendo que sua abordagem, em geral, é realizada nas séries posteriores, seguidas dos estudos de proporção com grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais".

Significado Operador

É a categoria que não considera a fração como uma quantidade, mas sim como um operador, responsável por uma transformação. Kieren (1980) define esse significado da seguinte forma:

> A categoria do número racional como operador impõe sobre um racional número $\frac{p}{q}$ uma interpretação algébrica; $\frac{p}{q}$ é pensado como uma função que transforma figuras geométricas em figuras geométricas semelhantes $\frac{p}{q}$ vezes maiores, ou como uma função que transforma um conjunto em outro conjunto com $\frac{p}{q}$ vezes com muitos elementos (KIEREN, 1980 apud BEHR et al., 1983, p .7).

Exemplo 1:

Pedro gastou $\frac{2}{5}$ de sua mesada de R$75,00. Qual valor restou de sua mesada?

Espera-se que o aluno resolva da seguinte maneira: $\frac{2}{5}$ de $75 = \frac{2 \times 75}{5} = 30$

Logo, restou de sua mesada o valor de R$ 45,00 (R$ 75,00 - R$30,00).

Exemplo 2:

Rebeca tem 30 ovos e vai usar $\frac{2}{15}$ deles para fazer uma torta. Quantos ovos ela vai usar?

Exemplo 3:

A quantidade de R$36,00 foi repartida entre 3 meninos, da seguinte maneira: Lucas recebeu $\frac{1}{4}$ do total, Marcos recebeu $\frac{1}{3}$ do que sobrou e Matheus ficou com o restante. Quanto Matheus recebeu?

Por fim, esse significado é utilizado ao calcular multiplicação de fração por um número natural, Valéria Espíndola Lessa após análise em dez livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental destaca que:

> O significado de número fracionário como operador multiplicativo é bastante trabalhado na escola, principalmente através de problemas matemáticos no 6º ano do EF. Geralmente, nos capítulos de livros didáticos, é chamado de "fração de uma quantidade" ou "fração de um número" (LESSA, 2011, p. 30).

1.3.1 Livros Didáticos Observados

Nesta seção faremos uma breve análise do recorte frações equivalentes, em três livro didáticos adotados na instituição de referência, dos anos de 2017 até 2021. Sendo eles: *Projeto Teláris* (DANTE, 2015), *Convergências* (CHAVANTE, 2015) e *A Conquista da Matemática* (JÚNIOR; RUY; CASTRUCCI, 2018).

Ao comparar os três livros, observamos que estes reservam de 3 a 5 páginas para o recorte, representando entre 1% e 2% da quantidade de páginas do livro, eles reservam uma quantidade diferente de exercícios para este assunto, o *Projeto Teláris* 14 exercícios, *Convergências* 4 exercícios, e *A Conquista da Matemática* 20 exercícios de fixação.

Ao abordar o assunto frações equivalentes os autores "definem" o tema de maneiras diferentes, no quadro 1 observamos as diferentes definições:

Foi possível observar também nos livros *Convergências* e *A Conquista da Matemática*, ao definirem o conceito de frações equivalentes, o assunto é abordado inicialmente

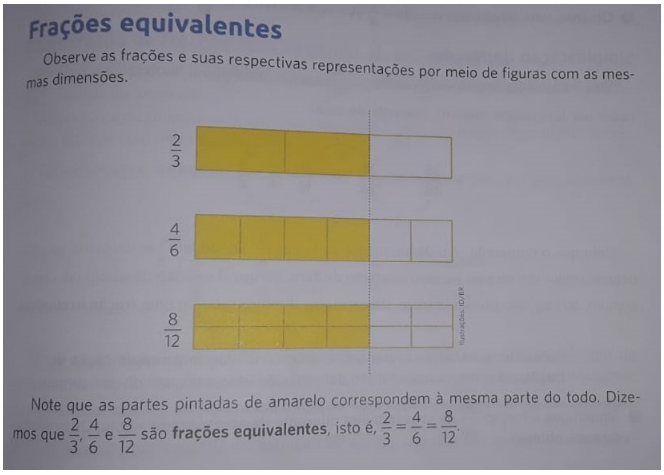
Quadro 1 – Diferentes definições de frações equivalentes nos Livros Didáticos

Definição de frações equivalentes	
Projeto Teláris	**Frações equivalentes têm o mesmo valor em relação à mesma unidade – equivalente: igual valor (p. 169).**
Convergências	**Ao multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma fração equivalente a fração inicial (p. 160).**
A Conquista da Matemática	**Duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas frações equivalentes (p. 142).**

Fonte: Livros didáticos supracitados

por meio do significado parte-todo ao apresentar figuras divididas em partes iguais, com um certo número de partes pintadas, apresentando a seguir figuras equivalentes conforme figuras 5 e 6. Já o livro *Projeto Teláris* abordando o mesmo significado juntamente com significado razão, introduz o tema utilizando uma situação problema conforme figura 7.

Figura 5 – Frações equivalentes abordagem - *Convergências*



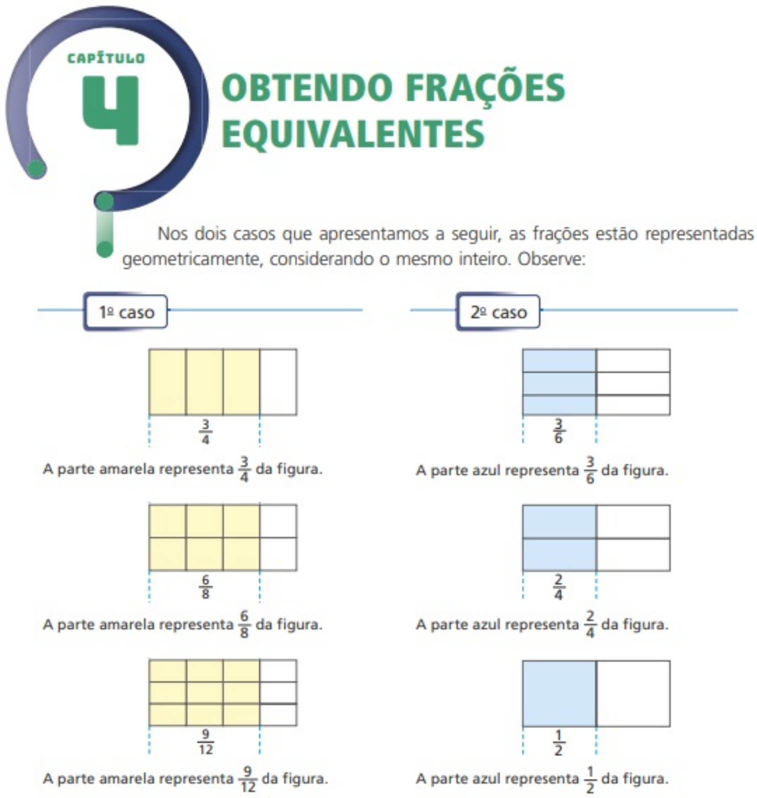
Fonte: Livro didático *Convergências*, de Chavante (2015, p. 159)

O significado razão que segundo Behr (1983) é o mais indicado na abordagem e estudo de equivalência de frações, sequer aparece nos livros analisados. Um dos motivos seja talvez pelo fato de fazer parte de uma das habilidades da BNCC nas séries posteriores.

Quando o tema é simplificação de frações, conforme figura 8, os livros *Convergências* e *A Conquista da Matemática* abordam somente a parte algébrica, sem nenhum exemplo por meio de representação geométrica ou situação problema. Já o livro *Projeto Teláris*, conforme figura 9, apresenta o tema por meio de uma situação problema deixando bem explícito o uso do significado razão.

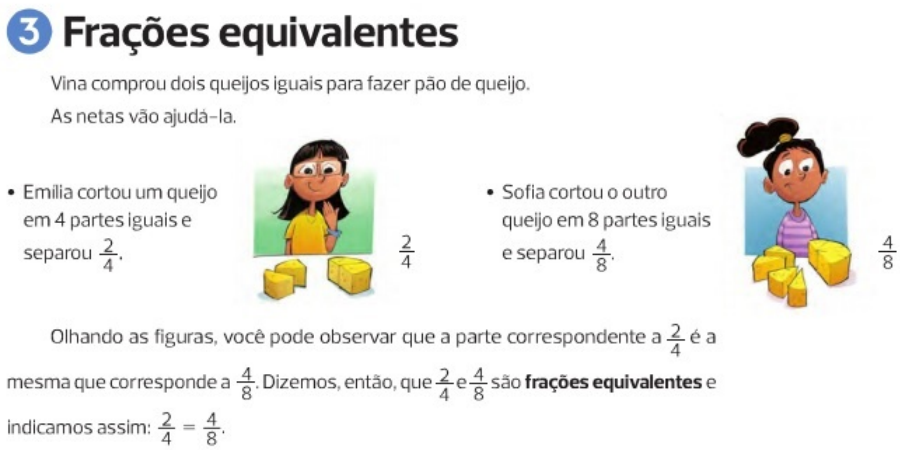
Os exercícios relacionados à equivalência de frações no livro *Projeto Teláris* é o

Figura 6 – Frações equivalentes abordagem - *A Conquista da Matemática*



Fonte: Livro didático *A Conquista da matemática*, de Júnior; Ruy; Castrucci (2018, p. 142)

Figura 7 – Frações equivalentes abordagem - *Projeto Teláris*

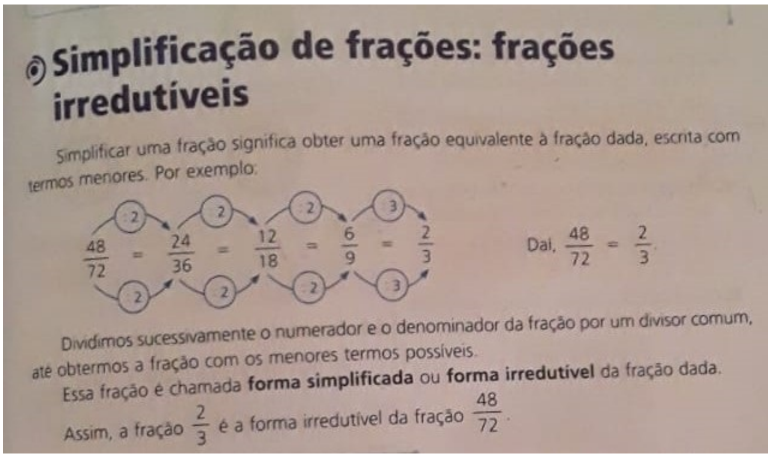


Fonte: Livro didático *Projeto Teláris*, de Dante (2015, p. 169)

mais completo com diferentes atividades, exercícios algébricos, situações problemas e exercícios de comparação de diferentes formas. O livro *A Conquista da Matemática*, aborda os mesmos tipos de atividades em uma quantidade menor, enquanto o livro *Convergências*, os exercícios são somente algébricos.

No geral os livros didáticos abordam o tema frações em poucas páginas, quando o assunto é operações de frações alguns nem sequer abordam multiplicação e divisão, não

Figura 8 – Simplificação de frações - *A Conquista da Matemática*



Simplificação de frações: frações irredutíveis

Simplificar uma fração significa obter uma fração equivalente à fração dada, escrita com termos menores. Por exemplo:

$$\frac{48}{72} \overset{:2}{=} \frac{24}{36} \overset{:2}{=} \frac{12}{18} \overset{:2}{=} \frac{6}{9} \overset{:3}{=} \frac{2}{3}$$

Daí, $\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$.

Dividimos sucessivamente o numerador e o denominador da fração por um divisor comum, até obtermos a fração com os menores termos possíveis.

Essa fração é chamada **forma simplificada** ou **forma irredutível** da fração dada.

Assim, a fração $\frac{2}{3}$ é a forma irredutível da fração $\frac{48}{72}$.

Fonte: Livro didático *A Conquista da matemática*, de Júnior; Ruy; Castrucci (2018, p. 160)

Figura 9 – Simplificação de frações - *Projeto Teláris*

Fonte: Livro didático *Projeto Teláris*, de Dante (2015, p. 172)

entraremos neste assunto por não fazer parte do objetivo desta pesquisa. Foi possível perceber que a abordagem do livro *Projeto Teláris* é muito diferente dos outros dois livros didáticos supracitados, não apenas no recorte de frações equivalentes, mas como em todos os demais temas do capítulo frações.

É necessário que os alunos tenham domínio de frações equivalentes, saibam identificar quando duas frações representam uma mesma quantidade de um todo, para que superem suas dificuldades quando o assunto é números racionais e melhorem seu desempenho em matemática. Novas metodologias podem dar suporte para construção deste saber, os materiais concretos manipuláveis e o GeoGebra podem contribuir com este processo de aprendizagem.

Parte I

REFERENCIAIS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

2 Uma Construção Formal dos Racionais

Neste capítulo será feita uma introdução às estruturas matemáticas relacionadas a este trabalho. Ao leitor menos familiarizado com noções básicas de Matemática, recomendamos a leitura de Halmos (2001). Ao longo deste texto, o pressuposto da pesquisadora é o de um leitor familiarizado com os *conjuntos numéricos usuais* (naturais, inteiros, racionais e reais), com a *representação decimal* e com a noção de *função*.

Como elemento inicial, consideraremos a noção ingênua de *conjunto*: uma coleção de elementos com determinada propriedade.

O conjunto dos naturais é uma formalização à ideias de *contagem* e carrega consigo o "embrião" da *ordem numérica*. Ele pode ser definido (axiomaticamente) da seguinte forma: (a) existe um elemento destacado no conjunto dos naturais, que será denominado de zero; (b) existe uma sucessão s, que é uma função injetora $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, em que qualquer natural é sucessor de outro natural **exceto** o zero; (c) nos naturais, é válido o *Princípio de Indução Finita*.

As propriedades (a), (b) e (c) mencionadas são uma simplificação dos *Axiomas de Peano* e uma formalização matemática ao conjunto dos naturais. A propriedade (a) basicamente diz que o conjunto dos naturais é não-vazio. A propriedade (b) induz a ordem usual nos naturais, impondo a condição de que o elemento destacado (zero) é o menor elemento deste conjunto. A propriedade (c) atende à necessidade de formalização das demonstrações verificáveis no conjunto dos naturais (não faremos grandes considerações acerca da indução nesta dissertação). Vamos denotar o conjunto dos naturais por $\mathbb{N}$. Desta forma,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

onde $0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$, posto que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \text{menor elemento} \\ 1 & = & \text{sucessor do } 0 \\ 2 & = & \text{sucessor do } 1 \\ 3 & = & \text{sucessor do } 2 \\ \vdots & & \text{(e assim sucessivamente).} \end{array}$$

Definição 2.1 (Operação)**.** Seja Y um conjunto. Uma **operação binária fechada** ou, simplesmente, **operação** é uma função $* : Y \times Y \to Y$.

Notação: $(Y, *)$ ou, simplesmente, Y, quando a operação $*$ já estiver clara no contexto.

Logo, uma operação se vale da seguinte noção intuitiva: escolhe-se dois elementos de um conjunto (podendo ser o mesmo elemento) e essa operação os "transformará" em um elemento do mesmo conjunto:

$$Y \times Y \ni (a, b) \longmapsto c \in Y.$$

Costuma-se escrever o elemento c da seguinte forma:

$$c \overset{\text{n.}}{=} a * b.$$

Destaca-se o uso de duas notações para representar as operações: a *aditiva* $(+)$, onde $+$ é comumente denominado de *adição*; e a *multiplicativa* $(\cdot)$, onde $\cdot$ é comumente chamada de multiplicação. Na notação algébrica multiplicativa, é comum suprimir o símbolo da multiplicação pela simples concatenação de símbolos, isto é,

$$ab = a \cdot b \ \text{ ou } \ ab = a * b.$$

Exemplo 2.1. A adição dos inteiros é formalmente definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longmapsto s^n(m). \end{aligned}$$

Em outras palavras, $n + m = s^n(m)$, ou seja, $n + m$ significa aplicar n vezes a sucessão ao número natural m. Por exemplo,

$$3 + 2 \overset{\text{d.}}{=} s^3(2) = (\underbrace{s \circ s \circ s}_{\text{3 vezes}})(2) = \underbrace{s(s(s}_{\text{3 vezes}}(2))) = s(s(3)) = s(4) = 5.$$

Alguns exemplos desta operação são dados a seguir.

$$\begin{array}{lll} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad\qquad}rcl} (2,3) & \longmapsto & 5 & (4,5) & \longmapsto & 9 \\ (3,3) & \longmapsto & 6 & (5,4) & \longmapsto & 9 \\ (0,1) & \longmapsto & 1 & (2,7) & \longmapsto & 9. \end{array}$$

Usando a notação usual de funções, teríamos a seguinte escrita para a operação de adição:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} (2,3) & \longmapsto & 5 \ \therefore \ 2+3=5, & (4,5) & \longmapsto & 9 \ \therefore \ 4+5=9, \\ (3,3) & \longmapsto & 6 \ \therefore \ 3+3=6, & (5,4) & \longmapsto & 9 \ \therefore \ 5+4=9, \\ (0,1) & \longmapsto & 1 \ \therefore \ 0+1=1, & (7,2) & \longmapsto & 9 \ \therefore \ 7+2=9. \end{array}$$

Por sua vez, a multiplicação sobre $\mathbb{N}$ é definida assim:

$$n \cdot m = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ parcelas}}.$$

Por exemplo, se n é um natural qualquer, então

$$n \cdot 0 = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n \text{ parcelas}} = 0.$$

Podemos convencionar, sem perda, que $0 \cdot n = \underbrace{\quad + \cdots + \quad}_{0 \text{ parcelas de } n} = \underbrace{\quad + \cdots + \quad}_{\text{não há parcelas}} = 0.$

Usando a notação usual de funções, teríamos a seguinte escrita para a operação de multiplicação:

$$\begin{array}{llll} (2,3) \longmapsto 6 \therefore 2 \cdot 3 = 6, & & & (4,5) \longmapsto 20 \therefore 4 \cdot 5 = 20, \\ (3,3) \longmapsto 9 \therefore 3 \cdot 3 = 9, & & & (5,4) \longmapsto 20 \therefore 5 \cdot 4 = 20, \\ (0,1) \longmapsto 0 \therefore 0 \cdot 1 = 0, & & & (7,2) \longmapsto 14 \therefore 7 \cdot 2 = 14. \end{array}$$

É possível demonstrar que operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ satisfazem as seguintes propriedades.

	Adição	
A1	$(a+b)+c = a+(b+c)$	associatividade
A2	$a+b = b+a$	comutatividade
A3	$0+a = a$	existência do neutro
LCA	$a+c = b+c \Longrightarrow a = b$	lei do cancelamento para a adição
	Multiplicação	
M1	$(ab)c = a(bc)$	associatividade
M2	$ab = ba$	comutatividade
M3	$1 \cdot a = a$	existência do neutro
LCM	$ac = bc,\ c \neq 0 \Longrightarrow\ a = b$	lei do cancelamento para a multiplicação
IM	$ab = 0 \Longrightarrow\ a = 0$ ou $b = 0$	integridade da multiplicação
	Distributividade	
D	$a(b+c) = ab + ac$	a multiplicação distribui a adição

As propriedades acima mencionadas também são conhecidas como *propriedades aritméticas* de $\mathbb{N}$.

Definição 2.2 (Oposto)**.** Seja $+ : Y \times Y \to Y$ uma operação aditiva. Dizemos que um elemento $a \in Y$ admite **oposto aditivo** ou, simplesmente, **oposto** se, e somente se, existe $b \in Y$ tal que $a + b = b + a = 0$, onde 0 é o neutro (aditivo) de $(Y, +)$.
Notação: $-a$ é o oposto de a.

Lema 1. *Em $\mathbb{N}$, o zero é o único elemento que possui oposto.*

Demonstração. Observe que o oposto do zero é o próprio zero, pois

$$0 + 0 = 0.$$

Caso contrário, isto é, dado $n > 0$, observe que $n + m \geq n$, logo

$$0 < n \leq n + m,$$

ou seja,

$$n > 0 \Longrightarrow n + m > 0.$$

Portanto, não existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n + m = 0$, isto é, um natural diferente de zero não admite oposto aditivo. □

É possível expandir (com as devidas formalizações) o conjunto dos naturais por atribuição de uma propriedade algébrica que ele não dispõe: a existência de *oposto aditivo* para qualquer elemento. Esta extensão de $\mathbb{N}$ é denominada **conjunto dos inteiros** e denotada por $\mathbb{Z}$. Em $\mathbb{Z}$ é possível definir duas operações, adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, advindas das operações em $\mathbb{N}$, tais que é possível recriar uma aritmética muito similar[1] a dos naturais, também chamada de *Aritmética dos Inteiros*, ou, simplesmente, a Aritmética.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

É possível demonstrar que as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$ satisfazem as seguintes propriedades.

	Adição	
A1	$(a + b) + c = a + (b + c)$	associatividade
A2	$a + b = b + a$	comutatividade
A3	$0 + a = a$	existência do neutro
A4	$\exists -a$, tal que $(-a) + a = 0 = a + (-a)$	existência do oposto
	Multiplicação	
M1	$(ab)c = a(bc)$	associatividade
M2	$ab = ba$	comutatividade
M3	$1 \cdot a = a$	existência do neutro
LCM	$ac = bc,\ c \neq 0 \Longrightarrow\ a = b$	lei do cancelamento para a multiplicação
IM	$ab = 0 \Longrightarrow\ a = 0$ ou $b = 0$	integridade da multiplicação
	Distributividade	
D	$a(b + c) = ab + ac$	a multiplicação distribui a adição

As propriedades aritméticas em $\mathbb{Z}$ introduzem uma estrutura matemática muito importante (e básica): os *anéis*.

[1] Em $\mathbb{Z}$ também é possível introduzir uma *ordem* a partir de outra propriedade: a *tricotomia*.

2.1 Definições e propriedades básicas

Considere definida sobre um conjunto $\mathbf{A}$ não vazio, as operações adição e multiplicação, que denotaremos por $(+)$ e $(\cdot)$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbf{A} \times \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ (a,b) & \longmapsto & a+b. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbf{A} \times \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ (a,b) & \longmapsto & ab. \end{array}$$

Definição 2.3 (Anel)**.** Seja $\mathbf{A}$ um conjunto não vazio. Considere sobre $\mathbf{A}$ duas operações denominadas *adição* e *multiplicação*, que denotaremos por $(+)$ e $(\cdot)$. Diremos que $\mathbf{A}$ é um **anel** se as seguintes propriedades são satisfeitas.

A1. *Associatividade da adição.* $(x+y)+z = x+(y+z)$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbf{A}$.

A2. *Existência do neutro aditivo.* $\exists\, 0 \in \mathbf{A}$ tal que $x + 0 = x = 0 + x$, para qualquer $x \in \mathbf{A}$.

A3. *Existência do oposto aditivo.* Para qualquer $x \in \mathbf{A}$, $\exists -x \in \mathbf{A}$ tal que $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

A4. *Comutatividade da adição.* $x + y = y + x$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{A}$.

A5. *Distributividade* à esquerda e à direita da multiplicação (em relação à adição). $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ e $(y+z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbf{A}$.

A6. *Associatividade da multiplicação.* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbf{A}$.

Notação: $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ é o anel cuja adição é $+$ e cuja multiplicação é $\cdot$. Quando a adição e a multiplicação estiverem claras no contexto, escreveremos apenas anel $\mathbf{A}$.

Um exemplo trivial de anel é o *anel nulo* ou *anel zero*, que é o anel conjunto unitário $\{0\}$, onde 0 é seu neutro aditivo. Não é difícil verificar que $\{0\}$ cumpre (trivialmente) todas as propriedades acima.

Lema 2. *Seja $\mathbf{A}$ um anel. Para qualquer $x \in \mathbf{A}$, $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.*

Demonstração. Como 0 é o neutro aditivo, em particular podemos escrever $0 = 0 + 0$. Desta forma,

$$\begin{array}{rcl} x \cdot 0 & = & x \cdot (0+0) \\ \overset{A5}{\Longrightarrow} x \cdot 0 & = & x \cdot 0 + x \cdot 0 \\ \overset{A3}{\Longrightarrow} -(x \cdot 0) + x \cdot 0 & = & -(x \cdot 0) + x \cdot 0 + x \cdot 0 \\ 0 & = & 0 \cdot x. \end{array}$$

De maneira análoga temos que $x \cdot 0 = 0$, logo, segue que $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$. $\square$

Ao longo deste trabalho, consideraremos que os anéis são **unitários**, isto é, anéis em que a multiplicação admite identidade multiplicativa: $\exists\, 1 \in \mathbf{A}$ tal que $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$, para qualquer $x \in \mathbf{A}$.

Exemplo 2.2 (Anel de matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$)**.** Considere o conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais:

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},\ x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sobre $M_2(\mathbb{R})$ considere as duas operações usuais definidas, adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$. Se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ são duas matrizes quaisquer em $M_2(\mathbb{R})$, define-se:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Com a adição (Equação 2.1) e a multiplicação (Equação 2.2) assim definidas, a estrutura $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um anel, comumente conhecido como **anel de matrizes** quadradas[2] de ordem 2.

Vamos destacar dois elementos importantes nesse anel: o seu zero (neutro aditivo) e a sua identidade (neutro multiplicativo). O zero matricial é a matriz que possui o zero real em todas as entradas, isto é, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. De fato,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}, \text{ para qualquer } \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

A identidade matricial, por sua vez, é a matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}, \text{ para qualquer } \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Exemplo 2.3. O conjunto $\mathbb{N}$ não é um anel, pois apenas o zero admite oposto aditivo. Conforme mencionado anteriormente, a partir de $\mathbb{N}$ é possível obter o conjunto $\mathbb{Z}$, dos

[2] Aqui fizemos matrizes 2×2 apenas para fins de exemplificação. A definição do conjunto de matrizes e das operações usuais é análoga admitindo que $n \geq 2$ um natural qualquer. Isto fornece o anel de *matrizes quadradas de ordem* n ou *matrizes* $n \times n$.

inteiros. A partir de $\mathbb{Z}$ é possível construir (será mostrado mais adiante) o conjunto dos racionais, $\mathbb{Q}$, e a partir de $\mathbb{Q}$ é possível construir o conjunto dos reais, $\mathbb{R}$. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ com as operações usuais são exemplos de anéis e vale a seguinte contingência:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Definição 2.4 (Anel comutativo)**.** Diremos que um anel $\mathbf{A}$ é **comutativo** quando sua multiplicação é comutativa, isto é, $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{A}$.

Exemplo 2.4. O anel de matrizes não é comutativo. Em $M_2(\mathbb{R})$ considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Observe que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

isto é, $AB \neq BA$.

Exemplo 2.5. Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são comutativos.

Definição 2.5 (Domínio de integridade)**.** Diremos que um anel comutativo $\mathbf{A}$ é um **domínio de integridade** (DI) ou **domínio integral** quando sua multiplicação não admite divisores de zero, isto é, $x \cdot y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Por equivalência lógica, podemos reescrever a condição da integridade multiplicativa através de sua contrapositiva: $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$.

Exemplo 2.6. O anel de matrizes, além de não ser comutativo, possui multiplicação que admite divisores de zero. Em $M_2(\mathbb{R})$, considere as matrizes não nulas: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Considerando a multiplicação usual de matrizes, temos

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos $A \neq 0$ e $B \neq 0$, mas $A \cdot B = 0$.

Exemplo 2.7. Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de domínios de integridade.

Definição 2.6 (Elemento inversível)**.** Um elemento x do anel $\mathbf{A}$ é dito **inversível** quando existe $y \in \mathbf{A}$ tal que $xy = yx = 1$, onde 1 é a identidade do anel. Neste caso, y é dito ser o **inverso multiplicativo** ou, simplesmente, o **inverso** de x.

Notação: x^{-1} denota o inverso do elemento x.

Lema 3. *Em qualquer anel unitário não nulo, o zero não é inversível.*

Demonstração. Suponha por absurdo que o zero seja inversível. Logo, existe y no anel tal que $0 \cdot y = 1$. Entretanto, $0 \cdot y = 0$, para qualquer y no anel. Desta forma, concluímos que $0 = 1$. Todo elemento x no anel pode ser escrito como $x = x \cdot 1$. Como $1 = 0$, segue que

$$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0,$$

isto é, qualquer que seja x no anel, tem-se $x = 0$. Portanto, trata-se do anel nulo, um absurdo. $\square$

Exemplo 2.8. Um resultado muito conhecido da Álgebra Linear afirma o seguinte: *uma matriz é inversível se, e somente se, seu determinante*[3] *é diferente de zero.*

Em $M_2(\mathbb{R})$ considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Note que $A \neq 0$, mas $\det A = 0$. Ou seja, A é uma matriz não nula e não inversível. Desta forma, temos $A \neq 0$ e A não é inversível.

Definição 2.7 (Corpo)**.** Um anel comutativo K será chamado de **corpo** quando qualquer elemento não nulo de K admite inverso multiplicativo.

O exemplo 2.8 nos mostra que o anel de matrizes não pode ser um corpo.

Exemplo 2.9. Os anéis $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de corpo.

Exemplo 2.10. O anel dos inteiros não é corpo, pois os únicos inversíveis em $\mathbb{Z}$ são o 1 e -1. De fato, $1 \cdot 1 = 1$, logo 1 é o seu próprio inverso. Analogamente $(-1) \cdot (-1) = 1$. Se o inteiro $k \notin \{-1, 1\}$, então k não é inversível.

Outro conceito relevante e que será usado mais adiante é o de *homomorfismo* de anéis. Sucintamente, um homomorfismo de anéis é uma função entre dois anéis que preserva as operações.

Definição 2.8 (Homomorfismo de anel)**.** Sejam $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ e $(\mathbf{A}', \boxplus, \boxdot)$ dois anéis, cujas identidades são 1 e 1', respectivamente.

Uma aplicação f: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ é dita um **homomorfismo de anéis** se satisfazer as seguintes condições:

H1. $f(x + y) = f(x) \boxplus f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{A}$.

[3] Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, o determinante de A, $\det A$, é a expressão $ad - bc$.

H2. $f(x \cdot y) = f(x) \boxdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{A}$.

H3. $f(1) = 1'$.

Observação. Quando estiver claro quais são as operações dos anéis $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$, escreveremos apenas $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(xy) = f(x)f(y)$ para expressar a preservação das operações de $\mathbf{A}$ no anel $\mathbf{A}'$.

Exemplo 2.11. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $\varphi(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tal φ é homomorfismo de anéis.

Observe que φ cumpre as três condições da Definição 2.8.

H1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

H2. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

H3. $\varphi(1) = 1'$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários. Ora,

$$\varphi(x+y) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\varphi(xy) = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \varphi(x)\varphi(y).$$

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{ a identidade de } M_2(\mathbb{R}).$$

Definição 2.9 (Isomorfismo)**.** Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ anéis. Dizemos que uma aplicação $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ é um isomorfismo de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{A}'$ se, e somente se, f é um homomorfismo de anéis bijetor.

Salvo o "nome" dos elementos e das operações em jogo, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ comportam-se como se fossem o mesmo anel.

Partiremos agora a um conceito muito importante na consolidação do estudo do objeto de referência desta dissertação: a *relação de equivalência*.

Se Y e Z são dois conjuntos (ambos são não vazios), o produto cartesiano $Y \times Z$ é o conjunto de todos os pares ordenados[4] (y, z):

$$Y \times Z = \{(y, z);\ y \in Y,\ z \in Z\}.$$

[4] A palavra *ordenado* faz-se necessária neste contexto, pois a ordem, de fato, importa. Em um par (a, b), o elemento a é chamado de *primeira coordenada* do par; o elemento b, por analogia, é dito ser a *segunda coordenada* do par.

Por sua vez, uma relação R é um subconjunto qualquer[5] do produto cartesiano $Y \times Z$. Se o par (y, z) está em R, então dizemos que o elemento y se relaciona com o elemento z e denotamos este fato como yRz, isto é:

$$(y, z) \in R \subset Y \times Z \iff yRz.$$

Se C é um conjunto não vazio, uma *relação R sobre C* é um subconjunto qualquer do cartesiano $C \times C$. Dois elementos $a, b \in C$ relacionados por R são denotados tal como no caso geral:

$$(a, b) \in R \subset C \times C \iff aRb.$$

Definição 2.10 (Relação de equivalência)**.** Seja X um conjunto não vazio. Uma relação $\sim$ sobre X é dita de **relação de equivalência** se, e somente se, forem satisfeitas as propriedades a seguir.

E1. Reflexividade: $x \sim x$, $\forall x \in X$.

E2. Simetria: $x \sim y$ se, e somente se, $y \sim x$, com $x, y \in X$.

E3. Transitividade: $\big(x \sim y\big)$ e $\big(y \sim z\big) \Longrightarrow \big(x \sim z\big)$, com $x, y, z \in X$.

A expressão $x \sim y$ é lida como "x é equivalente a y".

Em outras palavras, uma relação é de equivalência se, e somente se, é *reflexiva, simétrica* e *transitiva.*

Exemplo 2.12 (Igualdade)**.** A igualdade elemental no conjunto é o exemplo mais comum de relação de equivalência. Se X é um conjunto não vazio, e $x, y, z \in X$, então:

E1. $x = x$, $\forall x \in X$, ou seja, qualquer elemento é igual a si mesmo. Portanto, a igualdade é reflexiva.

E2. $x = y$ se, e somente se, $y = x$, com $x, y \in X$. Portanto, a igualdade é simétrica.

E3. Se $\big(x = y\big)$ e $\big(y = z\big)$ então $\big(x = z\big)$, com $x, y, z \in X$. Portanto, a igualdade é transitiva.

Por causa das trivialidades acima expostas, a igualdade entre elementos é dita ser a *relação de equivalência trivial.*

Exemplo 2.13. Seja $X = \{$micos-leões dourados$\}$ e $\sim$ a relação dada pelo sexo biológico (dicotomia macho $\times$ fêmea) sobre X: dados micos-leões dourados m e n, diremos que $m \sim n$ se, e somente se, m e n têm o mesmo sexo biológico.

[5] Geralmente, uma relação é definida como sendo um subconjunto não vazio do produto cartesiano.

Exemplo 2.14 (2-equivalência em $\mathbb{Z}$)**.** Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Diremos que x e y são inteiros 2-equivalentes se, e somente se, deixam o mesmo resto na divisão euclidiana por 2. Notação $x \sim_2 y$.

Exemplo 2.15 (3-equivalência em $\mathbb{Z}$)**.** Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Diremos que x e y são inteiros 3-equivalentes se, e somente se, deixam o mesmo resto na divisão euclidiana por 3. Notação $x \sim_3 y$.

Em cada exemplo anteriormente descrito, é evidente que a respectiva relação é reflexiva, simétrica e transitiva. Elas são úteis para podermos entender o conceito de classe de equivalência.

Definição 2.11 (Classe de equivalência)**.** Sejam X um conjunto não vazio e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Uma **classe de equivalência** é um subconjunto de X que agrega todos os elementos $\sim$-equivalentes.

Como X é não vazio, podemos destacar um elemento a em X e, via relação $\sim$, listar todos os elementos de X que são $\sim$-equivalentes com a:

$$\{x \in X;\ x \sim a\}.$$

Como $\sim$ é de equivalência, destacamos que $a \in \{x \in X;\ x \sim a\}$, portanto vamos identificar este conjunto por $[a]$:

$$[a] = \{x \in X;\ x \sim a\}.$$

O conjunto $[a]$ é dito ser a *classe de equivalência* do elemento a pela relação $\sim$. Neste caso, a é dito ser o *representante* da sua classe de equivalência.

Observação. $a' \in [a]$ se, e somente se, $a' \sim a$. Portanto, temos $[a] = [a']$, ou seja, a escolha do representante é arbitrária e não altera a composição da classe de equivalência. Essa definição faz sentido se $[a]$ é um subconjunto de X contendo dois ou mais elementos de X.

No caso da igualdade, como já era de se esperar (dada sua trivialidade), a classe de equivalência é um conjunto unitário: $[x] = \{x\}$.

No Exemplo 2.13, note que:

$$\{\text{micos-leões dour.}\} = \{\text{micos-leões dour. machos}\} \cup \{\text{micos-leões dour. fêmeas}\},$$

portanto, com respeito à relação de equivalência definida pelo sexo biológico, temos:

- A classe dos micos-leões dourados machos, que pode ser representada por qualquer macho da espécie. Seja M_0 um macho dessa espécie.

$$[M_0] = \{\text{machos}\} = \{\text{micos-leões dourados machos}\}.$$

- A classe dos micos-leões dourados fêmeas que pode ser representada por qualquer fêmea da espécie. Seja F_0 uma fêmea dessa espécie.

$$[F_0] = \{\text{fêmeas}\} = \{\text{micos-leões dourados fêmeas}\}.$$

Observe que $\{\text{micos-leões dourados}\} = [M_0] \cup [F_0]$ e $[M_0] \cap [F_0] = \emptyset$.

Na divisão euclidiana por 2, há apenas 2 possibilidades de resto, digamos r: ou $r = 0$ ou $r = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\text{inteiros que deixam resto 0 na divisão euclidiana por 2}\} \\ &\cup \{\text{inteiros que deixam resto 1 na divisão euclidiana por 2}\}. \end{aligned}$$

Estes conjuntos são bem conhecidos:

$$\begin{aligned} \{\text{inteiros que deixam resto 0 na divisão euclidiana por 2}\} &= \{\text{pares}\} \\ \{\text{inteiros que deixam resto 1 na divisão euclidiana por 2}\} &= \{\text{ímpares}\}. \end{aligned}$$

A paridade dos inteiros concluímos que pode ser ressignificada através da relação de equivalência do Exemplo 2.14:

$$\mathbb{Z} = \{\text{pares}\} \cup \{\text{ímpares}\}.$$

Ademais, note também que $\{\text{pares}\} \cap \{\text{ímpares}\} = \emptyset$.

$$\begin{aligned} 0 \in \{\text{inteiros que deixam resto 0 na divisão euclidiana por 2}\} &= \{\text{pares}\} \\ 1 \in \{\text{inteiros que deixam resto 1 na divisão euclidiana por 2}\} &= \{\text{ímpares}\}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos fazer $[0] = \{\text{pares}\}$ e $[1] = \{\text{ímpares}\}$. Desta forma, $\mathbb{Z} = [0] \cup [1]$ e $[0] \cap [1] = \emptyset$.

Consideremos o Exemplo 2.15. Podemos proceder de forma análoga: como na divisão euclidiana por 3 existem apenas 3 possibilidades de resto, a saber, ou $r = 0$, ou $r = 1$, ou $r = 2$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\text{inteiros que deixam resto 0 na divisão euclidiana por 3}\} \\ &\cup \{\text{inteiros que deixam resto 1 na divisão euclidiana por 3}\} \\ &\cup \{\text{inteiros que deixam resto 2 na divisão euclidiana por 3}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\in \{\text{inteiros que deixam resto 0 na divisão euclidiana por 3}\} \\ 1 &\in \{\text{inteiros que deixam resto 1 na divisão euclidiana por 3}\} \\ 2 &\in \{\text{inteiros que deixam resto 2 na divisão euclidiana por 3}\}. \end{aligned}$$

No Exemplo 2.15, podemos decompor o conjunto dos inteiros da seguinte forma: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$, e essas classes são duas-a-duas disjuntas, isto é, $[0] \cap [1] = \emptyset$, $[0] \cap [2] = \emptyset$ e $[1] \cap [2] = \emptyset$.

Estes exemplos também são úteis para mostrar a dinâmica da mudança de quadro em uma relação de equivalência. No Exemplo 2.15, a relação $\sim_3$ não consegue distinguir 0, 3 e 6, pois $\sim_3$ só considera as classes: como $[0] = [3] = [6]$, então, por $\sim_3$, não há distinção entre 0, 3 e 6. Portanto, uma relação de equivalência agrupa elementos distintos em uma mesma classe.

Definição 2.12 (Conjunto transversal)**.** Sejam X um conjunto não vazio e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Um conjunto $T \subset X$ é dito **transversal** com respeito a $\sim$ se, e somente se, as seguintes propriedades são verificadas:

- dados $t, s \in T$, $t \neq s \Longrightarrow t \not\sim s$;
- $[t] \neq \emptyset$, para todo $t \in T$;
- $\bigcup_{t \in T} [t] = X$.

Em outras palavras, um conjunto é transversal se, e somente se, ele contém exatamente um representante de cada classe de equivalência determinada pela relação $\sim$.

No Exemplo 2.13, conjunto $\{F_0, M_0\}$ é transversal para X. No Exemplo 2.14, o conjunto $\{0, 1\}$ é transversal para $\mathbb{Z}$.

Voltemos nossa atenção ao Exemplo 2.15. O conjunto $\{0, 1\}$ já não é transversal para $\mathbb{Z}$ neste caso, pois $[0] \cup [1] \subsetneqq \mathbb{Z}$. De fato, no caso de $\sim_3$, temos $[0] \cup [1] = \mathbb{Z} \setminus [2]$. O conjunto $\{-1, 0, 1, 2\}$ também não é transversal, pois $-1 \neq 2$, mas $-1 \sim_3 2$. Por sua vez, $\{0, 1, 2\}$ é um conjunto transversal. Estes exemplos são úteis para entendermos o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma relação de equivalência $\sim$ sobre X determina uma partição. Em outras palavras, cada elemento $x \in X$ determina uma classe de equivalência não vazia: $x \in X \Longrightarrow [x] \neq \emptyset$. A união das classes de equivalência por $\sim$ resulta em todo o conjunto X e tais classes são radicalmente distintas: ou se tem $[x] = [y]$ ou se tem $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Demonstração. Pode ser vista em Halmos (2001). □

Definição 2.13 (Conjunto quociente)**.** Sejam X um conjunto não vazio, $\sim$ uma relação de equivalência sobre X e $T \subset X$ um conjunto transversal. O conjunto das classes de equivalência indexadas por T,

$$\{[t],\ t \in T\},$$

é denominado **conjunto quociente** (pela relação $\sim$). Notação: $X/\sim$.

Podemos identificar o conjunto quociente nos exemplos anteriores.

a. No Exemplo 2.13, $X/\sim \; = \{[M_0], [F_0]\}$.

b. No Exemplo 2.14, $\mathbb{Z}/\sim_2 \; = \{[0], [1]\}$.

c. No Exemplo 2.15, $\mathbb{Z}/\sim_3 \; = \{[0], [1], [2]\}$.

É muito comum que se faça a identificação[6] $X/\sim \;\longleftrightarrow\; T$, isto é, identificar o conjunto das classes ao conjunto de representantes das classes, ou tratar uma classe a partir de um único representante.

a. No Exemplo 2.13, poderíamos escrever $X/\sim \; = \{M_0, F_0\}$.

b. No Exemplo 2.14, poderíamos escrever $\mathbb{Z}/\sim_2 \; = \{0, 1\}$.

c. No Exemplo 2.15, poderíamos escrever $\mathbb{Z}/\sim_3 \; = \{0, 1, 2\}$.

Os exemplos considerados aqui trazem conjuntos transversais finitos e esta restrição foi feita para entendermos um pouco da dinâmica do objeto matemático "relação de equivalência". Salientamos que, no caso da construção dos racionais, o conjunto transversal da relação de equivalência associada é infinito.

2.2 A construção usual do corpo de frações

Relembremos que um anel $\mathbf{D}$ é dito ser um *domínio de integridade* (DI) ou *domínio integral* se não possui divisores de zero. Supondo que x e y são elementos genéricos de $\mathbf{D}$, a condição "não possuir divisores de zero" pode ser escrita em quaisquer das formas equivalentes abaixo:

$$\Big(xy = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0\Big).$$

Definição 2.14 (Relação usual para construir frações)**.** Seja $\mathbf{D}$ um domínio de integridade (DI) e definamos[7] $\mathbf{D}^{\#} = \mathbf{D} \setminus \{0\}$. Considere sobre $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#} = \{(a, b);\; a, b \in \mathbf{D},\; b \neq 0\}$ a

[6] Esta identificação é, prioritariamente, uma bijeção de conjuntos.

[7] Um questionamento natural, baseado nas notações mais comuns dos livros de Matemática para o Ensino Básico, é o não-uso do asterisco para denotar a retirada do elemento nulo, ou seja, se $\mathbf{A}$ é anel, então poderíamos denotar $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} \setminus \{0\}$, mas aqui usamos $\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{A} \setminus \{0\}$. Em Álgebra, a notação asterisco está comumente associada aos inversíveis (elementos que possuem inverso multiplicativo), isto é, se $\mathbf{A}$ é anel, então $\mathbf{A}^* = \{x \in \mathbf{A};\; \exists x^{-1} \in \mathbf{A}\} = \{\text{inversíveis de } \mathbf{A}\}$. Como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos, a notação asterisco coincide com os não nulos, isto é, $\mathbb{Q}^* = \{\text{inversíveis de } \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, e o análogo ocorre com $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Todavia, $\mathbb{Z}^* = \{\text{inversíveis de } \mathbb{Z}\} = \{-1, 1\} \neq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Uma sugestão deste trabalho é a realização de um percurso investigativo com respeito à dissonância das diversas notações matemáticas.

relação $\sim$ definida por

$$(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Teorema A. *A relação $\sim$ é de equivalência.*

Demonstração. Seguindo a Definição 2.14, seja $\mathbf{D}$ um DI e consideremos sobre $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#} = \{(a,b);\ a,b \in \mathbf{D},\ b \neq 0\}$ a relação discriminada. Vamos provar que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. O domínio $\mathbf{D}$ é, em particular, um anel comutativo; logo, $ab = ba$ para quaisquer $a,b \in \mathbf{D}$. Atentando-se[8] à relação $\sim$, obtemos

$$\Big(ab = ba\Big) \Longleftrightarrow \Big((a,b) \sim (a,b)\Big).$$

Portanto, $\sim$ é *reflexiva*: $(a,b) \sim (a,b)$, para quaisquer $a,b \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$.

2. Mais uma vez, a comutatividade de $\mathbf{D}$ será usada. Sejam $a,b,c,d \in \mathbf{D}$, com $b,d \neq 0$. Suponha $(a,b) \sim (c,d)$. A comutatividade de $\mathbf{D}$ nos assegura que $xy = yx$, para quaisquer $x,y \in \mathbf{D}$. Em particular, $ad = da$ e $bc = cb$.

$$\begin{aligned} (a,b) \sim (c,d) \ &\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \ ad = bc \\ &\overset{\text{comut.}}{\Longleftrightarrow} \ da = cb \\ &\overset{\text{ig.}}{\Longleftrightarrow} \ cb = da \ \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \ (c,d) \sim (a,b). \end{aligned}$$

Portanto, $\sim$ é uma relação *simétrica*, isto é, $(a,b) \sim (c,d)$ se, e somente se, $(c,d) \sim (a,b)$.

3. Sejam $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$ tais que $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$. Logo, são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} ad &= bc \\ cf &= de. \end{aligned}$$

Multiplicando à direita a primeira linha acima por f e multiplicando à esquerda a segunda linha acima por b, obtemos:

$$\begin{aligned} adf &= bcf \\ bcf &= bde. \end{aligned}$$

A igualdade, conforme já comentado, é uma relação de equivalência (é um caso particular). Utilizando a transitividade da igualdade:

$$\Big(adf = bcf\Big) \text{ e } \Big(bcf = bde\Big) \Longrightarrow adf = bde.$$

[8] Nessa demonstração, faz-se a manipulação algébrica com rigor posicional dos símbolos.

Desenvolvendo a equação resultante,

$$\begin{aligned}
adf &= bde \\
adf - bde &= 0 \\
\text{(assoc. + comut.)} & \\
\Longrightarrow \; daf - dbe &= 0 \\
d(af - be) &= 0 \\
\overset{d\neq 0}{\Longrightarrow} af - be &= 0 \\
af &= be \\
\overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} \quad (a,b) &\sim (e,f).
\end{aligned}$$

Pelo que concluímos a *transitividade* da relação $\sim$: $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$ implica em $(a,b) \sim (e,f)$.

$\square$

Definição 2.15 (Frações sobre um domínio)**.** O conjunto $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}/\sim$, isto é, $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$ particionado pela relação $\sim$ será denominado *conjunto das frações* sobre $\mathbf{D}$ e denotado por $F_{\mathbf{D}}$.

Mudança da notação. Um elemento (a,b) de $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$ doravante será escrito no formato de fração:

$$(a,b) \leftrightsquigarrow \frac{a}{b} \leftrightsquigarrow a/b.$$

O elemento a, na parte de cima da fração, será chamado de *numerador*, e o elemento b, na parte de baixo da fração, será chamado de *denominador*.

Observe que nada muda em termos da relação considerada: $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc$.

Observação. $F_{\mathbf{D}} = \{$classes de equivalência por $\sim$ contidas em $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}\}$. De outra forma,

$$F_{\mathbf{D}} = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right];\ a,b \in \mathbf{D},\ b \neq 0 \right\}.$$

Por sua vez, $\left[\frac{a}{b}\right]$ é um subconjunto de $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$ definido (via relação de equivalência) da seguinte forma:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{a}{b} \right\} = \left\{ x,y \in \mathbf{D},\ y \neq 0;\quad \underbrace{ay = bx}_{\text{igualdade em } \mathbf{D}} \right\}. \tag{2.3}$$

Mudança de quadro no domínio algébrico. A Equação 2.3 é um indicativo de como são obtidos os resultados e propriedades nesse tipo de formalismo: para as validações necessárias às frações em $F_{\mathbf{D}}$, recorre-se ao domínio $\mathbf{D}$ (a estrutura "original"). Através das propriedades de $\mathbf{D}$ e com a relação de equivalência $\sim$, alcança-se resultados em $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$. Por fim, considerando a partição em $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$ promovida por $\sim$, obtemos as propriedades em $F_{\mathbf{D}}$.

> Os objetos matemáticos ensinados hoje são, de forma geral, uma reorganização de um saber específico, para possibilitar o processo de ensino [...] procurando impor seus pontos de vista em função de seus interesses. Essa reorganização modela a atividade de uma pessoa diante de objetos do saber em instituições (BITTENCOURT; FARIAS; CARVALHO, 2021, p. 8).

Ademais, é também importante termos em mente uma consequências deste tipo de construção:

$$\left[\frac{a'}{b'}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] \iff \frac{a'}{b'} \in \left[\frac{a}{b}\right] \iff a'b = b'a.$$

As equivalências acima indicam que em F_D não mais é possível distinguir frações equivalentes (entre si) tal como em $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$, pois, do ponto de vista formal, frações equivalentes são um único elemento de $F_{\mathbf{D}}$. Vamos ilustrar esse fenômeno um pouco mais adiante.

Mudança de registro no domínio algébrico. O conjunto $F_{\mathbf{D}}$ consiste nas $\sim$-classes de equivalências em $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$, portanto um elemento em $F_{\mathbf{D}}$ já "traz consigo" todos os seus equivalentes (incluindo ele mesmo) em $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$.

Quadro 2 – Mudança de quadro no domínio algébrico

$$\frac{a}{b} \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#} \rightsquigarrow \left[\frac{a}{b}\right] \subset \mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#} \rightsquigarrow \frac{a}{b} \in F_{\mathbf{D}}$$

Fonte: Próprio autor

Quadro 3 – Mudança de registro no domínio algébrico

$$\underbrace{ab' = ba'}_{\text{em } \mathbf{D}} \iff \underbrace{\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}} \iff \underbrace{\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}} \iff \underbrace{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}}$$

Fonte: Próprio autor

Exemplo 2.16 (O conjunto dos racionais)**.** Fato bastante conhecido: $\mathbb{Z}$, o anel dos inteiros, é um DI. Portanto, a relação $\sim$ (Definição 2.14) é de equivalência sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$, lembrando que $\mathbb{Z}^{\#} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. O conjunto $F_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#} / \sim$, o conjunto das *frações sobre* $\mathbb{Z}$ ou *frações inteiras*, será denominado *conjunto dos racionais* e denotado por $\mathbb{Q}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é um dos exemplos mais conhecidos e será muito importante neste trabalho. Vamos analisar um caso particular em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$: as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$. É fácil ver que, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$, tais frações equivalentes pela relação $\sim$, pois $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$. Em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$ expressamos este fato da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Como $\sim$ é relação de equivalência, então ela particiona $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$ em classes (de equivalência). Escolhamos a fração $\frac{2}{4}$ como a representante da classe de todas as frações que lhe são equivalentes:

$$[2/4] = \left[\frac{2}{4}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{2}{4}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \cdots\right\}.$$

Em suma, a classe $[2/4]$ pode ser representada por quaisquer elementos do conjunto $\left\{\cdots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \cdots\right\}$.

Entretanto, a escolha do representante de uma classe arbitrária:

$$\left[\frac{2}{4}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{2}{4}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \cdots\right\} = \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{-3}{-6}\right] = \cdots.$$

Em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$, os subconjuntos $\left[\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{-3}{-6}\right]$, $\cdots$ coincidem, logo as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{-1}{-2}\right] = \left[\frac{-3}{-6}\right] = \left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{5}{10}\right] = \cdots$$

Podemos trazer mais exemplos[9] no contexto das classes de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$:

$[1] = [1/1] = \left[\frac{1}{1}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{1}{1}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-3}{-3}, \frac{-2}{-2}, \frac{-1}{-1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \cdots\right\};$

$[-1] = [-1/1] = \left[-\frac{1}{1}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{-1}{1}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-3}{3}, \frac{-2}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}, \frac{2}{-2}, \frac{3}{-3}, \cdots\right\};$

$[0] = [0/1] = \left[\frac{0}{1}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{0}{1}\right\} = \left\{\cdots, \frac{0}{-3}, \frac{0}{-2}, \frac{0}{-1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \cdots\right\};$

$[5/2] = \left[\frac{5}{2}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{5}{2}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-15}{-6}, \frac{-10}{-4}, \frac{-5}{-2}, \frac{5}{2}, \frac{10}{4}, \frac{15}{6}, \cdots\right\};$

$[10/4] = \left[\frac{10}{4}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{10}{4}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-15}{-6}, \frac{-10}{-4}, \frac{-5}{-2}, \frac{5}{2}, \frac{10}{4}, \frac{15}{6}, \cdots\right\} = [5/2];$

$[-5/2] = \left[-\frac{5}{2}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#};\ \frac{x}{y} \sim \frac{-5}{2}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-15}{6}, \frac{-10}{4}, \frac{-5}{2}, \frac{5}{-2}, \frac{10}{-4}, \frac{15}{-6}, \cdots\right\}.$

Por definição, $\mathbb{Q} = F_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}, \sim)$ é o conjunto das classes e aqui faremos a primeira mudança de registro no domínio algébrico: um vez que qualquer elemento de $\mathbb{Q}$ é uma $\sim$-classe em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$, deixamos de escrever o colchete representando a classe.

$$\mathbb{Q} \ni \frac{2}{4} \leftrightsquigarrow \left[\frac{2}{4}\right] \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}.$$

[9] Observe que fica evidente o uso da "regra do sinal" (em $\mathbb{Z}$) na obtenção das frações equivalentes. Também está sendo usada a identificação natural $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ (representação usual dos inteiros nos racionais) dada por $n \mapsto \frac{n}{1}$.

Em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{\#}$, como já indicamos, é possível escrever a seguinte equação (de conjuntos):

$$\left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}\right].$$

Com a devida identificação, em $\mathbb{Q}$ reescreveremos a mesma igualdade acima, mas sem o uso dos colchetes:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

As mudanças de registro mencionadas nos últimos parágrafos formalizam a equação $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e, portanto, validam a notação habitual dos livros didáticos de Matemática do Ensino Básico.

Retornemos ao caso geral[10]. Observe que construímos, de modo formal, o conjunto $F_{\mathbf{D}}$ das frações a partir do domínio $\mathbf{D}$. Este último já possui uma estrutura de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, além de não possuir divisores de zero. É possível dotar $F_{\mathbf{D}}$ de operações $+$ e $\cdot$ "herdadas" de $\mathbf{D}$? A resposta é positiva, como veremos a seguir.

Defina sobre o conjunto quociente $F_{\mathbf{D}}$ as aplicações $+$ e $\cdot$ como a seguir:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \tag{2.4}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{2.5}$$

Observação. Por construção, $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Como $\mathbf{D}$ é DI, note que $bd \neq 0$.

Gostaríamos de observar a noção de equivalência que já usada na definição da adição. Como $\frac{a}{b} \sim \frac{ad}{bd}$ e $\frac{c}{d} \sim \frac{bc}{bd}$, percebemos que há uma escolha em igualar os denominadores no algoritmo da adição.

Também, por construção, note[11] que $\frac{ad+bc}{bd} \in F_{\mathbf{D}}$ e $\frac{ac}{bd} \in F_{\mathbf{D}}$, portanto, temos uma estrutura de operação às aplicações acima:

$$+, \cdot : F_{\mathbf{D}} \times F_{\mathbf{D}} \longrightarrow F_{\mathbf{D}}.$$

Resta-nos demonstrar que tais aplicações estão bem definidas.

Proposição 1. *As aplicações $+, \cdot\ : F_{\mathbf{D}} \times F_{\mathbf{D}} \longrightarrow F_{\mathbf{D}}$ são, de fato, operações. Mais especificamente, as aplicações $+$ e $\cdot$ estão bem definidas, isto é, elas não dependem das escolhas dos representantes. Também, são fechadas sobre $F_{\mathbf{D}}$.*

[10] É importante que o leitor tenha em mente que a construção acima vale para qualquer domínio de integridade (DI), entretanto este trabalho está focado no DI dos inteiros ($\mathbb{Z}$) e no corpo de frações inteiras ($\mathbb{Q}$).

[11] Como a, b, c, d estão no anel $\mathbf{D}$, segue que: (i) $ad+bc \in \mathbf{D}$; (ii) $ac \in \mathbf{D}$; (iii) $bd \in \mathbf{D}$. Como já observado, $\mathbf{D}$ é um DI, logo $bd \neq 0$. Assim, temos $ad+bc, ac, bd \in \mathbf{D}$, com $bd \neq 0$.

Figura 10 – Mudança de registro na demonstração da adição

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{a}{b} & + & \dfrac{c}{d} & = & \dfrac{a'}{b'} & + & \dfrac{c'}{d'} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\left[\dfrac{a}{b}\right] & + & \left[\dfrac{c}{d}\right] & = & \left[\dfrac{a'}{b'}\right] & + & \left[\dfrac{c'}{d'}\right]
\end{array}$$

Fonte: Próprio autor

Demonstração. O fechamento dessas aplicações já foi elucidada no parágrafo anterior (e na nota de rodapé) e já vai ser admitida aqui. Vamos mostrar, portanto, que as aplicações "+" e "·" em $\mathbb{Q}$ estão bem definidas, isto é, faremos a mudança de registro (Quadro 3) e de quadro algébrico (Quadro 2), de forma que se $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]$ e $\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{c'}{d'}\right]$, então o resultado final, pelas respectivas aplicações, será o mesmo.

Sejam $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbf{D}$, com b, d, b' e d' não nulos, tais que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ em $F_{\mathbf{D}}$. Aplicando o Quadro 3 a este caso, as seguintes equivalências são válidas:

$$\underbrace{ab' = ba'}_{\text{em } \mathbf{D}} \iff \underbrace{\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}} \iff \underbrace{\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}} \iff \underbrace{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}}; \tag{2.6}$$

$$\underbrace{cd' = dc'}_{\text{em } \mathbf{D}} \iff \underbrace{\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}} \iff \underbrace{\left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{c'}{d'}\right]}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}} \iff \underbrace{\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \tag{2.7}$$

Pela definição da aplicação + (veja 2.4),

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ (em } F_{\mathbf{D}}) \Longrightarrow \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ad+bc}{bd}\right] \text{ (em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}).$$

Analogamente,

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \text{ (em } F_{\mathbf{D}}) \Longrightarrow \left[\frac{a'}{b'}\right] + \left[\frac{c'}{d'}\right] = \left[\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}\right] \text{ (em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}).$$

Das relações 2.6 e 2.7, segue que $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$, portanto a seguinte equação[12] é verdadeira em $\mathbf{D}$:

$$(ab')(dd') + (cd')(bb') = (a'b)(dd') + (c'd)(bb'). \tag{2.8}$$

[12] Esse é a "versão da heurística" em Matemática. Neste caso, admitimos a igualdade que desejamos provar, isto é, admitimos $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$ e chegamos a uma equação: a própria Equação 2.8. Fazemos o caminho inverso nas linhas deduzidas, organizamos os argumentos de forma adequada e, por fim, obtemos a demonstração.

Desenvolvendo a Equação 2.8 e utilizando as propriedades de $\mathbf{D}$ (a saber, associatividade, comutatividade, distributividade e inexistência de divisores de zero), obtemos as seguintes igualdades em $\mathbf{D}$:

$$\begin{aligned}(ab')(dd') + (cd')(bb') &= (a'b)(dd') + (c'd)(bb') \\ adb'd' + bcb'd' &= a'd'bd + b'c'bd \\ (ad + bc) \cdot (b'd') &= (a'd' + b'c') \cdot (bd).\end{aligned}$$

Em particular, concluímos que a última linha do desenvolvimento é uma igualdade em $\mathbf{D}$. De acordo com o Quadro 3, isso acontece se, e somente se, $\dfrac{ad+bc}{bd} = \dfrac{a'd'+b'c'}{b'd'}$ (em $F_{\mathbf{D}}$). Ademais,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \underbrace{\overset{2.4}{=}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \underbrace{\overset{2.4}{=}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}.$$

Portanto, mostramos que a aplicação $+$ não depende da escolha dos representantes (em $\mathbf{D}$), isto é,

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}\right) \text{ e } \left(\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}\right), \text{ em } F_{\mathbf{D}} \implies \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}, \text{ em } F_{\mathbf{D}}.$$

A boa definição da aplicação $\cdot$ segue em análogo. Das igualdades $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$, em $\mathbf{D}$, a igualdade seguinte também é válida (em $\mathbf{D}$):

$$(ab')(cd') = (a'b)(c'd). \tag{2.9}$$

Desenvolvendo a Equação 2.9 e utilizando as propriedades operatórias em $\mathbf{D}$:

$$\begin{aligned}(ab')(cd') &= (a'b)(c'd) \\ (ac)(b'd') &= (a'c')(bd).\end{aligned}$$

De acordo com o Quadro 3, a última linha é válida se, e somente se, $\dfrac{ac}{bd} = \dfrac{a'c'}{b'd'}$ (em $F_{\mathbf{D}}$). Detalhadamente,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \underbrace{\overset{2.5}{=}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'} \underbrace{\overset{2.5}{=}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}.$$

Portanto, mostramos que a aplicação $\cdot$ não depende da escolha dos representantes (em $\mathbf{D}$), isto é,

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}\right) \text{ e } \left(\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}\right), \text{ em } F_{\mathbf{D}} \implies \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}, \text{ em } F_{\mathbf{D}}.$$

Isso conclui a demonstração. $\square$

Em conformidade com a Proposição 1 com a nomenclatura matemática largamente conhecida, $+$ é uma operação sobre $F_{\mathbf{D}}$ denominada *adição* e $\cdot$ é uma operação sobre $F_{\mathbf{D}}$ denominada *multiplicação*.

Proposição 2. *A estrutura algébrica* $(F_{\mathbf{D}}, +, \cdot)$ *é um domínio de integridade.*

Demonstração. Esta demonstração pode ser vista em Gonçalves (1979). □

Apesar da demonstração não estar explicitada, é fácil entender sua razão de ser: as operações adição e multiplicação em $F_{\mathbf{D}}$ advém da adição e da multiplicação em $\mathbf{D}$. Como $\mathbf{D}$ é DI, $F_{\mathbf{D}}$ também o é. Mais adiante veremos que $F_{\mathbf{D}}$ supera as propriedades de um DI.

Cabe salientarmos, conforme o último resultado, que $F_{\mathbf{D}}$, por ser DI, admite elemento neutro (aditivo) 0, e elemento identidade (multiplicativa) 1. Como identificamos o zero e a identidade de $F_{\mathbf{D}}$ em $\mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$?

Os candidatos naturais seguem dos saberes compartilhados na educação básica.

$$\underbrace{1}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} = \underbrace{[1]}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}/\sim} \leftrightsquigarrow \underbrace{\left\{\frac{x}{x};\ x \in \mathbf{D},\ x \neq 0\right\}}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}}.$$

De fato, se $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$ é uma fração escolhida arbitrariamente, então

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{x} = \frac{ax}{\underbrace{bx}_{\neq 0}} \sim \frac{a}{b}.$$

Em $F_{\mathbf{D}}$ a multiplicação acima é expressa da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{x} = \frac{a}{b},$$

qualquer que seja $\frac{a}{b} \in F_{\mathbf{D}}$, qualquer que seja $x \neq 0 \in \mathbf{D}$.

Portanto, a classe das frações $\left\{\dfrac{x}{x},\ x \neq 0\right\}$ é a identidade (multiplicativa) de $F_{\mathbf{D}}$.

Também, $\underbrace{0}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} = \underbrace{[0]}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}/\sim} \leftrightsquigarrow \underbrace{\left\{\dfrac{0}{x};\ x \in \mathbf{D},\ x \neq 0\right\}}_{\text{em } \mathbf{D}\times\mathbf{D}^{\#}}.$

A demonstração é análoga: se $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}^{\#}$ é uma fração escolhida arbitrariamente, então:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{x} = \frac{a \cdot x + b \cdot 0}{\underbrace{bx}_{\neq 0}} = \frac{ax}{bx} \sim \frac{a}{b}.$$

Expressa-se a multiplicação acima, em $F_{\mathbf{D}}$, da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{x} = \frac{a}{b},$$

qualquer que seja $\frac{a}{b} \in F_{\mathbf{D}}$, qualquer que seja $x \neq 0 \in \mathbf{D}$. Pelo que concluímos que a classe das frações $\left\{\dfrac{0}{x},\ x \neq 0\right\}$ é o neutro (aditivo) de $F_{\mathbf{D}}$.

Observação. A última consideração afirma, em particular, que

$$\frac{a}{b} = 0 \text{ (em } F_{\mathbf{D}}) \iff a = 0 \text{ (em } \mathbf{D}).$$

Por contraposição lógica,

$$\frac{a}{b} \neq 0 \text{ (em } F_{\mathbf{D}}) \iff a \neq 0 \text{ (em } \mathbf{D}).$$

O oposto aditivo é definido por simples mobilização de sinal: se a/b está em $F_{\mathbf{D}}$, então o oposto aditivo de a/b é o elemento a seguir.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Não é difícil verificar que $\dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b} + \left(-\dfrac{a}{b}\right) = 0.$

Lema 4 (Mobilização de sinal)**.** *Os casos de equivalência abaixo são válidos:*

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{-b}.$

2. $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}.$

Demonstração. Segue imediatamente da definição de equivalência de frações (Definição 2.14 com a notação fracionária).

Teorema 2. *A estrutura algébrica* $(F_{\mathbf{D}}, +, \cdot)$ *é um corpo.*

Demonstração. Basta mostrarmos que qualquer elemento não nulo admite inverso multiplicativo. Seja a/b uma fração não nula em $F_{\mathbf{D}}$. Conforme observação feita antes do enunciado deste teorema, $a/b \neq 0$ (em $F_{\mathbf{D}}$) se, e somente se, $a \neq 0$ (em $\mathbf{D}$). Por definição, tem-se também $b \neq 0$ e daí segue que b/a é uma fração não nula em $F_{\mathbf{D}}$. Vamos mostrar que b/a é o inverso multiplicativo de a/b.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{\underbrace{ab}_{\neq 0}} = 1 \text{ (em } F_{\mathbf{D}}).$$

Portanto, para qualquer $a/b \neq 0$, existe $(a/b)^{-1} = b/a$ satisfazendo a propriedade operatória $a/b \cdot (a/b)^{-1} = (a/b)^{-1} \cdot a/b = 1.$ □

Definição 2.16 (Corpo de Frações sobre um DI)**.** Sejam $\mathbf{D}$ um domínio de integridade e $F_{\mathbf{D}}$ o conjunto de frações construído a partir de $\mathbf{D}$. Ao longo das construções acima, vimos que $F_{\mathbf{D}}$ é um corpo, recebendo o nome de **corpo de frações** do domínio $\mathbf{D}$.

Em $\mathbf{D}$, que é anel unitário, com respeito à sua identidade 1 sabemos que $1 \cdot x = x$, para qualquer $x \in \mathbf{D}$. Em particular, $1 \cdot 1 = 1$, isto é, 1 é seu próprio inverso multiplicativo. Com isso, multiplicar por 1 ou pelo inverso de 1 resulta no mesmo.

Seja 1 a identidade de $\mathbf{D}$. Em $F_{\mathbf{D}}$, considere o conjunto

$$\overline{\mathbf{D}} = \left\{ \frac{a}{1};\ a \in \mathbf{D} \right\}.$$

Proposição 3. *Os anéis* $\mathbf{D}$ *e* $\overline{\mathbf{D}}$ *são isomorfos.*

Demonstração. A aplicação $\phi : \mathbf{D} \to F_{\mathbf{D}}$ dada por $a \longmapsto \frac{a}{1}$ é homomorfismo de anéis.

$$\phi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

$$\phi(1) = \frac{1}{1} = \text{ a identidade em } \mathbb{Q}.$$

Mais ainda, trata-se de um homomorfismo injetor. Se $a, b \in \mathbf{D}$ são tais que $\phi(a) = \phi(b)$, então

$$\phi(a) = \phi(b) \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{a}{1} = \frac{b}{1}}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = 0}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{a-b}{1} = 0}_{\text{em } F_{\mathbf{D}}} \Longleftrightarrow \underbrace{a - b = 0}_{\text{em } \mathbf{D}} \Longleftrightarrow \underbrace{a = b}_{\text{em } \mathbf{D}}.$$

Portanto, mostramos a injetividade de ϕ. Sendo esta uma aplicação injetora, segue que é uma bijeção com sua imagem: $im(\phi) = \overline{\mathbf{D}}$. Logo, ϕ é um isomorfismo[13]. □

Logo temos $\mathbf{D} \cong \overline{\mathbf{D}} \subset F_{\mathbf{D}}$ e este isomorfismo nos permite dizer que $\mathbf{D}$ *está imerso*[14] em $F_{\mathbf{D}}$: existe uma cópia (por isomorfismo) de $\mathbf{D}$ contida em $F_{\mathbf{D}}$. Já pensando nesta identificação elemental via isomorfismo, escreveremos, com *abuso de notação*,

$$\mathbf{D} \ni a = \frac{a}{1} \in F_{\mathbf{D}}.$$

Esta identificação nos ajuda a entender o aspecto intuitivo mais difundido no Ensino Básico: "qualquer elemento não nulo é inversível", ou "o denominador precisa ser diferente de zero, pois não se pode dividir por zero" ou "o zero é o único elemento não inversível". Portanto, a construção do corpo de frações se resume ao seguinte objetivo: tornar todos os elementos não nulos inversíveis.

[13] Poderia ser usada uma versão dos *teoremas do isomorfismo*, mas issdizemoso requereria um texto mais aprofundado da Teoria de Anéis, que não é o foco desta dissertação.

[14] Tal imersão significa dizer que $\mathbf{D}$ é injetado homomorficamente no seu corpo de frações.

Nota. É possível generalizar ainda mais este resultado com a ideia de *localização*: se $\mathbf{A}$ é um anel comutativo e P é um ideal primo de $\mathbf{A}$, então é possível construir o *anel local* de $\mathbf{A}$ em P, comumente denotado por $\mathbf{A}_P$. O denominador de uma fração em $\mathbf{A}_P$ está no conjunto $\mathbf{A} \setminus P$, ou seja, os "inversíveis" numa localização serão os elementos "fora" do ideal primo P. Relacionando com a construção do corpo de frações, temos o seguinte resultado: "$\mathbf{D}$ *é um domínio de integridade se, e somente se,* $\mathbf{D}$ *é um anel comutativo unitário e* $\{0\}$ *é um ideal primo de* $\mathbf{D}$[15]". Em outras palavras, os elementos não nulos de $\mathbf{D}$ "tornam-se inversíveis" no corpo de frações porque $\{0\}$ é um ideal primo de $\mathbf{D}$.

Exemplo 2.17. Definimos anteriormente $F_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}$, que é o corpo de frações sobre $\mathbb{Z}$, também conhecido como *corpo dos racionais* ou *corpo das frações inteiras.*

Em $\mathbb{Q}$ são válidas todas as proposições vistas até agora. Em particular, temos a imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, o que é suficiente para os conjuntos numéricos necessários aos saberes do tema desta dissertação:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Exemplo 2.18. Seguindo a notação fracionária, temos:

- 2^{-1}, o inverso do inteiro $2 = \frac{2}{1}$ em $\mathbb{Q}$, pode ser representado como $\frac{1}{2}$.
- -2^{-1}, o inverso do inteiro $-2 = \frac{-2}{1}$ em $\mathbb{Q}$, pode ser representado como $\frac{1}{-2}$.
- E assim sucessivamente.

Uma vez construído (formalmente) o corpo de frações para qualquer domínio de integridade, vamos nos ater ao corpo $\mathbb{Q} = F_{\mathbb{Z}}$, que integra nosso objeto de estudo neste trabalho.

Exemplo 2.19. Considere as seguintes tarefas, em um sala de aula da disciplina Matemática na Educação Básica, e que serão resolvidos com a formalização aqui apresentada.

Tarefa 2.1. Calcular as somas de frações.

Subtarefa 2.1.1. Calcular $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$.

Resposta: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \dfrac{3+2}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Subtarefa 2.1.2. Calcular $\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{5}$.

Resposta: $\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{-7}{5} = \dfrac{1 \cdot 5 + 4 \cdot (-7)}{4 \cdot 5} = \dfrac{5-28}{20} = \dfrac{-23}{20} = -\dfrac{23}{20}$.

[15] Esse resultado pode ser visto em Gonçalves (1979).

Subtarefa 2.1.3. Calcular $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$.

Resposta: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1\cdot 6+3\cdot 1}{3\cdot 6}=\dfrac{6+3}{18}=\dfrac{9}{18}$.

As respostas às primeiras subtarefas não costumam causar estranhamento e, em geral, são consideradas as respostas finais. A Subtarefa 2.1.2 traz consigo a mobilização do sinal, uma particularidade da equivalência de frações:

$$-\frac{7}{5}=\frac{-7}{5}=\frac{7}{-5}.$$

Aqui segue uma primeira crítica: em geral, os livros didáticos não dão o destaque adequado sobre o uso de equivalência de frações nas operações. Isso, por vezes, é mitigado pela necessidade de se apresentar a noção de fração pelas suas operações como decorrentes das operações nos inteiros, sem absorção do conceito "fração" em si (BROUSSEAU; BROUSSEAU; WARFIELD, 2013).

A última resposta (Subtarefa 2.1.3), entretanto, costuma mobilizar a seguinte técnica: a *simplificação de frações*. A resposta final não costuma ser apresentada como no formato da simples aplicação do algoritmo da adição de frações (rever a Equação 2.4). Se percebe que existe um certo "fator comum" entre numerador e denominador, dividindo-se exatamente ambos por este termo.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 6+3\cdot 1}{3\cdot 6}=\frac{6+3}{18}=\frac{9}{18}=\frac{9}{18}\begin{array}{c}(\div 9)\\(\div 9)\end{array}=\frac{1}{2}.$$

Questão 2.1. No caso acima, por que a simplificação para na fração 1/2?

Obviamente, trata-se de uma pergunta retórica, porém não respondida nos livros didáticos analisados durante este trabalho.

É óbvio que $\frac{1}{2}=\frac{9}{18}$, pois $1\cdot 18=2\cdot 9$ (Definição 2.14), portanto temos um exemplo de como a equivalência de frações interfere na produção de uma resposta institucional adequada.

Representação fracionária simplificada. Qualquer fração não nula em $\mathbb{Q}$ pode ser representada atendendo os critérios a seguir:

S1. O denominador é estritamente maior que zero.

S2. Numerador e denominador são inteiros primos entre si.

Em outras palavras, se $\frac{a}{b}$ é uma fração não nula, então $\frac{a'}{b'}$ é sua *forma simplificada* se, e somente se:

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ (em $\mathbb{Q}$), ou $\dfrac{a}{b} \sim \dfrac{a'}{b'}$ (em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$);
- $b' > 0$, $b \in \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{mdc}(a', b') = 1$, ou seja, a e b são inteiros primos entre si.

Comentários sobre a representação simplificada. Observamos que a representação simplificada soa como a "representação canônica" de uma fração e, como tal, é desejável que uma representação canônica tenha caráter de unicidade.

◇ A condição S1 impede a mobilização do sinal "$-$" ao longo da fração, tendo em vista a busca pela unicidade ante as diversas formas equivalentes de representar uma fração, inclusive por mobilização de sinal.

◇ A condição S2 funciona como critério de parada à simplificação de frações. Portanto, é uma resposta à Questão 2.1.

Segue outra crítica dos livros didáticos, além das já citadas no capítulo anterior, o conceito "inteiros primos entre si" não é disponibilizado, sequer citado, nas técnicas de simplificação de fração, esta que por sua vez não é abordada em todos os livros.

Proposição 4 (Simplificação de frações)**.** *O conjunto*

$$T = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0,\ \mathrm{mdc}(a, b) = 1 \right\}$$

é transversal para $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}$ *com a relação de equivalência usual de frações.*

Demonstração. Segue imediatamente da Definição 2.12. □

Observe que se trata de um conjunto transversal infinito, conforme mencionado ao final da seção anterior.

Note que até aqui temos a construção algébrica dos racionais, mas existe também uma construção geométrica, que não abordaremos neste trabalho, essa construção é mais comum na escola, por fazer-se o uso do recurso da construção geométrica no ensino dos números racionais.

Este processo que passa o número racional da forma como o conhecemos na universidade chamado de saber cientifico, até o saber ensinado que é como levaremos este conhecimento ao aluno na sala de aula, é chamado de Transposição Didática. Neste processo ocorrem transformações e adaptações para que o objeto de ensino se torne apto a ser ensinado.

Ao adaptar o saber científico, algumas propriedades são suprimidas e outras simplificadas, quando o assunto é o ensino de frações para alunos do ensino fundamental, é natural nos livros didáticos e nas habilidades da BNCC que utilize-se recursos geométricos buscando tornar o conhecimento mais acessível, neste processo perde-se alguns aspectos algébricos importantes, que é o fato de ele ser domínio de integridade, ou seja, no processo algébrico um anel comutativo é domínio de integridade quando sua multiplicação não admite divisores de zero. Nesta transposição essa definição deixa de ter significado ao não ser considerada na apresentação geométrica.

Vale ressaltar, que na transposição didática no ensino de frações, algumas percas se verificam, mas em compensação temos um ganho de exposição, consequentemente um ganho didático, permitindo a visualização do objeto matemático, assim como a utilização de materiais didáticos como GeoGebra, materiais concretos manipuláveis entre outros.

Enfatizamos aqui a necessidade de uma maior compreensão formal do objeto matemático *fração* nas considerações epistemológicas do sujeito “professor de Matemática do Ensino Básico”, para que a transposição “universidade $\rightarrow$ sala de aula” deste saber, se dê com o menor estranhamento possível por parte dos docentes e também dos educandos.

3 Quadros teóricos e Metodológicos

Nesse capítulo dividido em duas seções, na primeira apresentamos o quadro teórico da Didática Francesa, repartido em subseções sendo elas: a Transposição Didática, a Teoria das Situações Didáticas (TSD), os Elementos da Engenharia Didática (ED) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD), com os principais conceitos e teóricos que fundamentam nossa pesquisa. A segunda seção discorre da apresentação da metodologia escolhida para o desenvolvimento deste trabalho.

3.1 Quadros teóricos da Didática Francesa

Apresentamos a seguir o quadro teórico escolhido para fazer parte de nossa pesquisa, Henriques e Serôdio (2013) entendem como sendo o quadro teórico:

> Entendemos por quadro teórico, como o referencial teórico de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que se pretende desenvolver (HENRIQUES; SERÔDIO, 2013, p. 2).

Sustentado na definição acima, em torno do objeto matemático de estudo escolhido, usaremos como base os principais conceitos e elementos que nos são necessários para a escrita dessa dissertação: do aporte teórico da TSD e da TAD; e como metodologia de pesquisa a ED.

3.1.1 A Transposição Didática

Este termo Transposição didática foi criado por Michel Verret em 1975 e difundido por Yves Chevallard em 1985, em seu livro *La Transposition Didactique*. Para Chevallard, um certo conteúdo passa por transformações e adaptações que o tornam apto para se tornar um objeto de ensino, transformando o saber científico em conhecimento a ser ensinado, isso acontece porque o objetivo da comunidade científica e da escola é diferente, então durante este processo é selecionado de que forma os saberes devem ser ensinados e quais devem entrar em sala de aula, e a este processo é dado o nome de Transposição Didática.

A Instituição nomeada de Noosfera, por Chevallard, formada por pesquisadores, professores, especialistas no assunto, Ministério da Educação, entre outros, é que irão definir de que forma os saberes devem ser ensinados. Gondino (2004) a esse respeito, esclarece:

> Quando queremos ensinar um certo conteúdo, tal como os números racionais, devemos adaptá-lo ao estado do conhecimentos dos alunos, com qual deve-se simplificá-lo e buscar exemplos específicos acessíveis aos alunos, restringir algumas propriedades, usar uma linguagem e símbolos mais simples do que os habitualmente empregados pelo matemático profissional (GODINO; BATANERO, 2004 apud VIEIRA, 2011, p. 12).

A Transposição Didática, para Chevallard, expressa o processo de transformação entre: saber sábio, o saber a ensinar e o saber ensinado (conhecimento), que é aquele que verdadeiramente acontece em sala de aula.

Para Pais (1999), as ideias de Transposição Didática e do saber ensinado estão intimamente interligada, quando ao pensar em transposição didática, reconhecemos a existência de um plano de aprendizado. Para compreender esse processo, é necessário destacar a diferença entre o saber e o conhecimento.

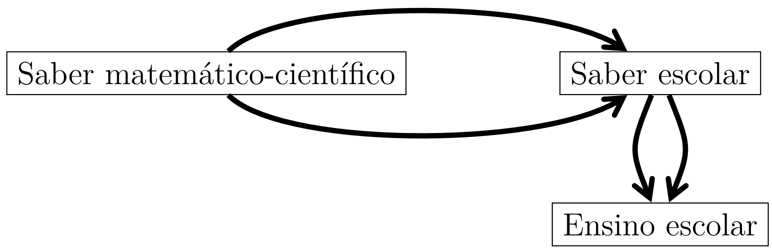
> O saber é quase sempre caracterizado por ser relativamente descontextualizado, despersonalizado e mais associado a um contexto histórico e cultural do que ao nível pessoal. Por outro lado, o conhecimento pode se referir mais ao contexto individual e subjetivo, revelando algum aspecto com o qual o sujeito tem uma experiência mais direta. Nessa concepção o conhecimento está mais associado ao caráter experimental e envolve uma dimensão na própria aprendizagem (PAIS et al., 1999, p. 16).

Todo saber ensinado na escola passa por uma transformação, que permite realizar as modificações necessárias ao ensinar um certo conteúdo, adaptando o saber científico de acordo com os conhecimentos dos alunos, ao simplificar e buscar exemplos, restringindo algumas propriedades e usando uma linguagem mais adequada, a fim de tornar acessível o conhecimento. Guy Brousseau afirma que toda aprendizagem teve uma influência da transposição, ela permite entender a mudança da origem de um conceito da matemática até a maneira de como ele é entregue nos livros didáticos.

> [...] Para não reduzir o seu ensino à mera exposição e reprodução das estratégias previamente apontadas como desejáveis, o professor necessita assumir uma posição criativa e ativa, isto é, “imaginar e propor aos estudantes situações que eles possam vivenciar e nas quais os conhecimentos aparecerão como uma solução optimal e descoberta nos problemas propostos” (BROUSSEAU, 1986 apud VIEIRA, 2011, p. 14).

Na figura 11, temos o processo de Transposição Didática desenvolvido por Brousseau, segundo ele, o pesquisador matemático tem um papel muito importante ao determinar as reflexões que são interessantes aos demais e se tornarão um novo saber, e as que serão suprimidas e descartadas, a este processo ele dá o nome de despersonalização e descontextualização. O docente tem um outro papel, o de realizar um movimento contrário, ele deve, ao preparar suas aulas, evidenciar o que percebe de mais relevante e transmitir o

Figura 11 – Transposição Didática



Fonte: Brousseau, (1986) apud Vieira, (2011) p. 11

conhecimento aos alunos de acordo com seu ponto de vista e convicções, e a este processo o autor dá-se o nome de recontextualização e repersonalização.

Desta maneira, qualquer ação didática do professor cria uma determinada Transposição Didática, de forma que o aluno alcance o conhecimento daquele saber, considerando os saberes já adquiridos previamente por ele, que de acordo com Vieira (2011), como todo processo, ela pode atuar de modo positivo no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes.

O processo de transposição didática no ensino de frações equivalentes faz com que o conceito de frações que conhecemos na universidade, sofra transformações para se tornar um saber ensinável, tornar o conhecimento acessível, de acordo com o conhecimento dos alunos.

3.1.1.1 Obstáculos Epistemológicos

A noção de Obstáculo Epistemológico foi desenvolvida por Guy Brousseau, surgiu da necessidade de interpretar alguns erros cometidos pelos alunos, quando lhe são ensinados certos tópicos da matemática.

Para Brousseau, o obstáculo é um conjunto de dificuldades a um respectivo conhecimento, que quando surge é necessário uma série de rupturas, e este conhecimento se torna um obstáculo, pois existe uma resistência ao novo, em defesa do conhecimento já adquirido. O conjunto dos racionais pode ser considerado um exemplo de obstáculo epistemológico.

> Podemos considerar epistemológico um obstáculo como o conjunto dos números racionais, porque na história da Matemática ele também aparece como um obstáculo. Os gregos, até cinco séculos antes de Cristo, desenvolviam a Matemática sem aceitar a existência de segmentos incomensuráveis (KIKUCHI; TREVIZAN, 2010, p. 8).

Igliori (1999), também comenta em seu artigo: A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática, que esses obstáculos são encontrados durante a aprendizagem dos números racionais.

> A concepção dos racionais e dos decimais como razões, ou ainda como operadores lineares sobre $\mathbb{Q}$, constituem-se na história em grande obstáculo epistemológico para a conceituação dos números (IGLIORI, 1999, p. 105).

Para Vieira (2011), o saber do aluno não ocorre no momento em que ele passa a conhecer vinte teoremas ao invés de dez, eles podem não possuir certa maturidade que possibilitem a aquisição daquele saber naquele momento. Os erros cometidos pelos alunos fazem parte da construção do saber, para assim desenvolver a concretização da aprendizagem, sendo assim, alguns alunos vão sentir mais dificuldades em certos conceitos que outros, e isso faz parte de todo processo.

Sem vencer essas etapas, os alunos não conseguem alcançar a próximo degrau. O professor deve ser capaz de identificar esses obstáculos da aprendizagem do estudante, assim, para Guy Brousseau, os obstáculos epistemológicos:

> Caracterizam como inerentes ao próprio conhecimento. São percebidos nas dificuldades pelas quais os matemáticos passam para superá-los ao longo da história, como atestam as pesquisas em Epistemologia (BROUSSEAU, 1986 apud VIEIRA, 2011, p. 61).

No decorrer deste trabalho foi possível identificar estes obstáculos no ensino de frações equivalentes, em conversas informais nas salas dos professores é de comum acordo que frações é um desafio para o professor de matemática, e muitas barreiras precisam ser quebradas para que o aluno de fato construa este conhecimento.

3.1.2 Teoria das Situações Didáticas - TSD

Desenvolvida por Guy Brousseau, a Teoria das Situações Didáticas surgiu visando compreender as relações que acontecem entre os alunos, professores e os saberes, é um modelo teórico, que tem como objetivo efetivar o aprendizado, por meio de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, 1986 apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 163).

Para Guy Brousseau, a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais, que ocorrem durante as aulas entre alunos e professores, bem como a forma e condições com que o conhecimento matemático é aprendido, seria a chamada situação didática. Dentro do contexto escolar, o professor não tem o controle das variáveis que afetarão a situação, quando isso acontece, o conjunto dessas variáveis é chamado de situação adidática, que é representada pelo esforço individual do aluno.

> Quando o aprendiz tem dificuldades na resolução de uma situação adidática, o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática. Portanto, toda situação adidática pode tornar-se um tipo de situação didática (BROUSSEAU, 1986 apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 164).

Nesta teoria, o professor e o aluno são atores indispensáveis, bem como o meio em que a situação didática acontece, esse meio representa os diversos recursos que auxiliam o aluno a resolver os problemas apresentados.

Diferente dos métodos de ensino tradicionais, que priorizam memorização de fórmulas, regras e teoremas, nessa teoria é importante partir de situações-problemas que estimulem a criatividade e ofereçam condições para que o aluno produza conhecimento.

> Assim, a Teoria das Situações Didáticas é um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 163).

Logo, de acordo com Teixeira e Passos (2013), "A Teoria das Situações Didáticas apresenta novos desafios para a busca de mecanismos que propiciem a melhora nos processos de ensino aprendizagem em matemática".

3.1.2.1 O Contrato Didático

A ideia do Contrato Didático, desenvolvida por Guy Brousseau, é tida como uma lista de obrigações entre o aluno e o professor de maneira recíproca entre eles, semelhante a um contrato, mas específico aos conteúdos matemáticos, sendo as características dessa relação desenvolvidas pelo autor e apresentadas abaixo por Vieira (2011):

> - O professor é supostamente capaz de criar condições suficientes para a apropriação dos conhecimentos, e deve reconhecer tal apropriação quando a mesma se opera;
> - O aluno é supostamente capaz de satisfazer tais condições;
> - A relação didática deve continuar a "todo custo";
> - O professor assegura então as condições de aquisição anteriores e as condições novas fornecem ao estudante a possibilidade da aquisição desejada (VIEIRA, 2011, p. 33).

Esses acordos beneficiam a ambos, no qual o aluno se compromete a executar as atividades propostas, tendo o professor como mediador desse processo. Um exemplo de contrato didático é quando o professor explica para turma como será o desenvolvimento da atividade, como devem realizá-la, e destaca a importância da participação de todos. A quebra destes acordos pode ocorrer em diversas situações, e a chamamos de ruptura do contrato didático.

> A ruptura do contrato didático com o caso em que o aluno não mostra interesse na resolução do problema oferecido a ele pelo professor, ou quando não há envolvimento aceitável nas atividades propostas. Essa ruptura se evidencia porque o que se espera é o envolvimento do aluno nas atividades didáticas.
>
> Uma ruptura do contrato didático também ocorre quando é proposto um problema cuja resolução não é compatível com o nível intelectual e cognitivo do aluno, ou ainda quando há um desvio da função do professor como orientador das situações de aprendizagem, ficando impaciente e passando a aplicar punições aos alunos que não apresentam uma conduta esperada, pois este descontrole leva ao rompimento de uma ética pedagógica, que normalmente não é explicitada na formação do professor (PAIS, 2016 apud PORTO, 2019, p. 29).

Antes e durante a aplicação da sequência didática proposta nesta dissertação, esteve presente o contrato didático, neste processo o professor foi mediador e interviu sempre que julgou necessário, os alunos se comprometeram a executar as atividades propostas, participando, compartilhando seus conhecimentos e tirando suas dúvidas conforme elas forem surgindo. Rupturas do contrato didático também ocorreram, conforme relataremos no capítulo cinco.

3.1.3 Engenharia Didática

A Engenharia Didática (ED) é uma metodologia voltada para a educação matemática, que pode ser classificada como: 1º Geração (Clássica) ou de 2º Geração. A engenharia de primeira geração surgiu com os primeiros trabalhos nos anos 70, em uma época em que não era utilizado o referencial teórico, desta forma, o objetivo principal da pesquisa era a elaboração e o estudo de uma proposta de transposição didática, sem estudar o papel do professor.

> A primeira tendência da Engenharia Didática clássica, ou Engenharia de 1ª geração, cujo interesse maior se revelou pela modelização das atividades do estudante, seu progresso de aprendizagem e os elementos clássicos perspectivados no triângulo didático indicado por: estudante – professor – conhecimento (ALVES, 2018, p. 49).

Com o passar dos anos houve discussões pelos didatas da matemática, referente ao professor, e surgiu no início dos anos 80, na frança a Engenharia de segunda geração, através de Yves Chevallard e Guy Brousseau, e Michèle Artigue se destacou ao disseminar os conceitos desta metodologia no final da década.

A ED tem início a partir da necessidade de uma metodologia de investigação científica que envolva um plano de ensino, criação de materiais didáticos e experimentações em sala de aula.

Para Artigue (1988), a ED é comparável ao trabalho de um engenheiro que planeja, executa e fiscaliza a obra, a fim de obter um resultado. Ao pensar nessa metodologia, o professor faz este papel do engenheiro, planejando, observando, executando e analisando sua Sequência Didática, organizada em quatro etapas: análise preliminares, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação. Segundo a autora podem se distinguir dois níveis de pesquisa em Engenharia Didática: o da Microengenharia e o da Macroengenharia.

> A Microengenharia está relacionada às pesquisas que têm por objeto de estudo um assunto específico, são realizadas de forma local e analisam principalmente a complexidade dos acontecimentos de sala de aula. A Macroengenharia são aquelas pesquisas que possibilitam estabelecer a complexidade dos estudos da Microengenharia com a dos fenômenos ligados à duração nas relações de ensino e aprendizagem. Esses tipos de pesquisa são complementares e, portanto, indispensáveis (ARTIGUE, 1988 apud PORTO, 2019, 32).

Escolhemos a aplicação de uma Microengenharia por sua praticidade e eficiência, Michèle Artigue, argumenta que:

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, na composição, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa o modo de validação que lhe são associados: a comparação entre a análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou um pós-teste (ARTIGUE, 1988 apud VALIO, 2014, p. 32).

Este trabalho foi realizado com base em uma ED de segunda geração, onde descreveremos e analisaremos os resultados de toda a aplicação, tendo como relevante o papel do professor, buscando obter um resultado para o ensino de frações equivalentes em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental.

3.1.4 Teoria Antropológica do Didático - TAD

Iniciada pelo matemático francês Yves Chevallard a Teoria Antropológica do Didático (TAD) é uma evolução da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e surgiu com a finalidade de dar respostas a algumas questões que a TSD não respondia, na relação do indivíduo sobre os objetos do conhecimento, procurando compreender estas relações.

Para Chevallard, de acordo com Almouloud, Farias e Henriques (2018, p. 31), a TAD contempla três conceitos fundamentais. O primeiro deles é o objeto "o", que é qualquer entidade, material, pessoas, conceito matemático, qualquer sujeito da pesquisa. O segundo é o de relação pessoal de um indivíduo "x" a um objeto "o", denominado de R(x;o), se R(x;o) $\neq \emptyset$. A terceira é a noção de pessoa.

Chamado de universo cognitivo de x, quando um objeto "o" existe para uma pessoa "x".

$$UC(x) = \{(o,R(x;o)) \ / \ R(x;o) \neq \emptyset \}$$

A base da TAD admite que pode-se descrever toda atividade humana através de um modelo chamado de *praxeologia*, que tem origem grega, *práxis* que significa ação e *logos*, que significa ciência. Assim, praxeologia é a ciência que estuda a ação, ela serve para compreender a atividade matemática e as relações humanas, o autor estrutura a praxeologia com o seguinte conjunto: $[T/\tau/\theta/\Theta]$, sendo T os tipos de tarefas, contendo pelo menos uma subtarefa; τ tipo de técnica para a realização da tarefa T; θ tecnologia que justifica τ; Θ teoria para justificar θ.

Esse conjunto é separado em dois blocos distintos sendo o primeiro chamado de bloco prático-técnico $[T/\tau]$ saber-fazer, e o segundo bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ relacionado ao saber.

Kichow (2009) nos dá um exemplo desta praxeologia completa dentro dos racionais:

> Somar as frações $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, temos:
>
> t_1 (tarefa): $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$; T_1 (tipo de tarefa): somar duas frações de mesmo denominador; τ_1 (técnica): para somar duas frações de mesmo denominador, conservamos o denominador e somamos os numeradores ($\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3}$); θ (tecnologia associada a τ_1 – explicação, argumento racional, para validar a técnica numa instituição que pode ser um teorema, uma propriedade, um princípio, um conceito, etc.): Conceito de fração (tomar a unidade, dividi-la em partes iguais e tomar algumas dessas partes) e conceito de soma (para somar as parcelas todas devem ser de uma mesma grandeza, no exemplo citado acima todas as parcelas são "terços"). Uma tarefa pode usar mais de uma técnica e mais de uma tecnologia. Nesse exemplo, a Θ (teoria) é a da aritmética (KICHOW, 2009, p. 19).

Chevallard e Johsua (1991) afirmam que para que ocorra a construção do conhecimento algébrico, é necessário encontrar todas as praxeologias nas tarefas, assim, uma praxeologia precisa conter todos estes elementos para um saber ser ensinado.

A TAD contribuiu para o nosso trabalho na questão institucional e nas praxeologias pontuais, foi possível notar que a escolha do professor ao construir praxeologias na elaboração da sequência didática pode auxiliar na construção deste saber.

3.2 Metodologia de Pesquisa

Nesta seção apresentamos alguns elementos que iremos considerar em nosso trabalho, bem como a metodologia de nossa pesquisa. De acordo com o dicionário Aurélio, metodologia é o conjunto de regras ou normas estabelecidas para o desenvolvimento de uma pesquisa. Optamos pela metodologia de Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD), proposta por Henriques, Attie e Farias (2016), com sustentação na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Também fizemos a aplicação de uma Microengenharia, proposta por Michèle Artigue, desenvolvida dentro da Engenharia Didática (ED) de Segunda Geração. Trouxemos também elementos que integram o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), mas não desenvolvemos um PEP relativo ao nosso objeto matemático de referência devido a restrições que serão mencionadas adiante.

3.2.1 Elementos da Engenharia Didática

De acordo com Júnior, Carvalho e Farias (2019) as três funções didáticas que caracterizam um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) são: cronogênese, mesogênese e topogênese, cuja função é observar como realiza-se o processo entre os participantes da mesma.

- Cronogênese está relacionada a forma como o tempo é administrado no contexto didático, diz repeito a forma como o professor determina o tempo em que a aula e ou cada atividade deve ocorrer.

- Topogênese está relacionada a responsabilidade do professor e aluno, o professor define o papel de cada um nesse processo, determina as tarefas e a maneira como ela será realizada.

- Mesogênese está relacionada a ação do professor de produzir e executar a Sequência Didática (SD), que ocorre durante a interação professor/aluno.

A seguir as nove dialéticas identificadas por Yves Chevallard e que se encontram nos PEP, de acordo com Júnior, Carvalho e Farias (2019) são:

1ª Dialética – do estudo e da pesquisa

É a dialética que está no núcleo da PEP, de perguntas e respostas para a questão geratriz, que gera outras questões dentro do estudo e tem autonomia para decidir de que maneira e quando serão respondidas.

2ª Dialética – a do indivíduo e do coletivo

É o processo que consiste no estudo da questão geratriz, tanto na distribuição de tarefas como responsabilidades para chegar a resposta da questão inicial.

3ª Dialética – da análise (e a síntese) praxeológica e análise (e a síntese) didática

Nessa dialética a análise didática se faz necessária para compreensão da atividade matemática pelo conjunto praxeológico *[T/τ/θ/Θ]* onde:

- T: tipos de tarefas, contendo pelo menos uma subtarefa;
- τ: tipo de técnica para a realização da tarefa T;
- θ: tecnologia que justifica τ;
- Θ: teoria para justificar θ.

4ª Dialética – do tema e fora do tema

Nessa dialética, a entrada e saída do tema inicial para outras disciplinas ocorre na busca de elementos para encontrar a resposta da questão geratriz.

5ª Dialética – paraquedista / caçadores de trufas

Segundo o autor, essa dialética faz alusão à metáfora paraquedista-caçadores de trufas, do historiador Emmanuel Leroy-Ladurie, que se refere à visão que o professor tem mais ampla do problema proposto, enquanto o aluno muitas vezes não tem a mesma visão.

6ª Dialética – a das caixas pretas e das luzes

Destaca a importância de ter clareza do que é ou não relevante na busca de resposta pela questão geratriz.

7ª Dialética – da leitura e da escrita

É o processo que visa evitar que os alunos transcrevam respostas já existentes no texto, tentando assim conduzir o aluno a construir uma resposta autêntica para a questão geratriz, levando em consideração que não exitem respostas prontas e os problemas podem ter vários questionamentos e respostas válidas.

8ª Dialética - (da conjectura e da prova) mídias e meios

Essa dialética é fundamental para a aplicação da PEP, ela evita a cópia de respostas prontas, se refere ao saber construído durante a aplicação da SD. A mídia é qualquer sistema de representação e tem a intenção de informar a um determinado público, já o meio é desprovido de intencionalidade para uma resposta, de forma que novos questionamentos sejam elaborados.

9ª Dialética – da difusão e da recepção

É o processo de comunicação, que podemos ter o professor como difusor e o aluno como receptor, e ocorre o inverso também. Ela propicia que ocorra o entendimento mínimo pelo receptor em ambos os casos.

Algumas destas dialéticas fazem parte do nosso trabalho:

- Dialética do estudo e da pesquisa encontra-se presente no primeiro capítulo, na elaboração das questões de pesquisa.
- Dialética do indivíduo e do coletivo e a dialética da análise e da síntese, praxeológica e didática, presentes durante as etapas da nossa AI&SD, em várias etapas como: análise *a priori* e a *posteriori*, na elaboração das tarefas e técnicas.
- Dialética da leitura e da escrita, presente na elaboração das três sessões que contemplam no total seis atividades, evitando que o texto elaborado na questão um fornecesse respostas prontas, para que assim o aluno pudesse ser autêntico em sua resposta.

Durante a realização deste trabalho, foi possível observar que se faz presente parte das nove dialéticas, porém mesmo diante deste cenário, olhando as características metodológicas, não foi possível fazer um PEP, pois alguns elementos não seriam contemplados, sendo eles: a mesogênese e a dialética mídias e meios que ficou comprometida, já que em virtude deste novo processo de ensino remoto, houve a falta de interação dos alunos nas aulas remotas, muitos não estavam preparados para essa nova modalidade de ensino, problemas como falta de internet, equipamentos, entre outros, que trataremos mais adiante. Diante disso, optamos por outra metodologia.

3.2.2 Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD)

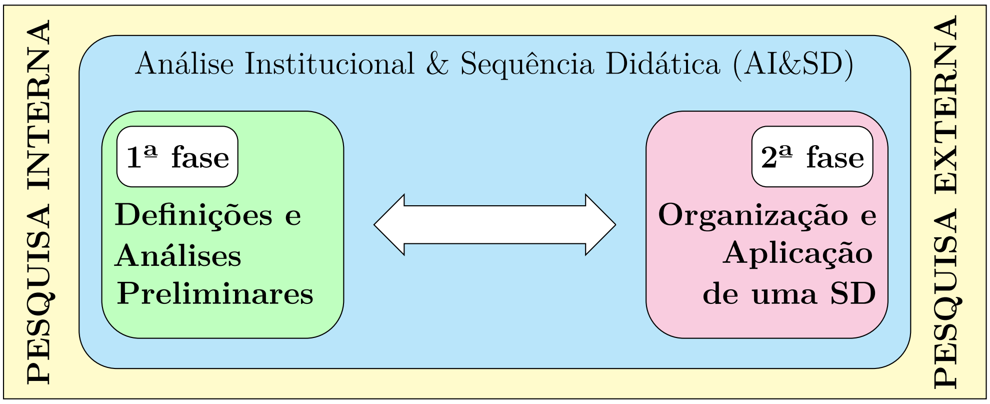
Sendo AI&SD a metodologia escolhida para o desenvolvimento deste trabalho, iremos descrever cada uma das oito etapas de forma genérica.

Henriques, Attie e Farias (2016) dividem o processo de pesquisa em duas fases: a primeira denominada de Definições e Análises Preliminares e a segunda de Organização, Análises e Aplicação de uma Sequência Didática, como pode ser observado na figura 12.

A primeira fase se refere à tomada de decisões iniciais, nesse momento diante de inquietações e problemática, o pesquisador escolhe seu tema de pesquisa, em seguida, surgem as questões de pesquisa em volta do objeto de saber escolhido, a partir dos objetivos traçados e da escolha do seu quadro teórico. Na segunda fase, é feito a escolha da instituição de referência, de acordo com o objeto do saber escolhido, em seguida, é realizada uma análise anterior e posterior à aplicação da Sequência Didática (SD).

Os autores trazem uma definição para Análise institucional;

Figura 12 – Fases da Análise Institucional e Sequência Didática.

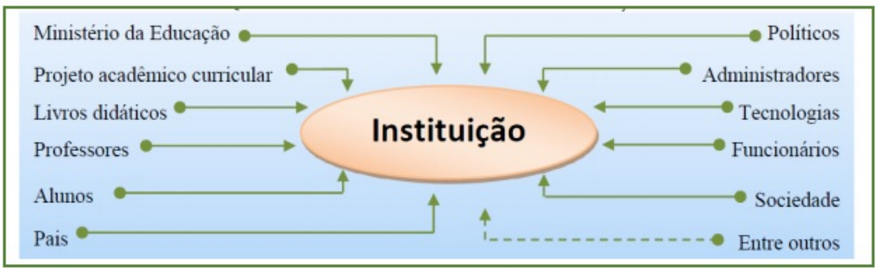


Fonte: Henriques, Attie e Farias (2016, p. 4)

> Análise Institucional é um estudo realizado em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais com objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou praxeologias desses objetos que intervém no processo ensino-aprendizagem (HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE, 2012, p. 1268).

Segue na figura 13 de acordo com Afonso Henriques, os elementos de uma instituição.

Figura 13 – Elementos constituintes de uma instituição.



Fonte: Henriques (2011, p. 3)

Para considerar uma pesquisa em Educação devemos escolher pelo menos um desses elementos, o autor diz ainda que a escolha destes elementos constituintes de uma instituição vai depender das escolhas feitas nos objetivos, problemática e questões de pesquisa.

Após o pesquisador escolher a instituição, deve-se estudar as relações institucionais e pessoais com os objetos de estudo conforme exposto abaixo, fundamentado na TAD, tendo em vista as dimensões ecológicas e praxeológicas, que examina as questões de pesquisa referente ao processo de ensino e aprendizagem dos estudantes e do objeto matemático em questão.

Estes conceitos ecológicos são utilizados na TAD com os termos habitat e nicho ecológico, como abordado por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012):

> O habitat é definido como o lugar de vida e o ambiente conceitual do objeto do saber. Trata-se, essencialmente, de objetos com os quais interage, mas também das situações de ensino nas quais aparecem as manipulações e experiências associadas. O nicho ecológico como sendo o lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou praxeologias dos objetos com as quais interage nas instituições (CHEVALLARD; JOHSUA, 1991 apud HENRIQUES; NAGAMINE; NAGAMINE, 2012, p. 1268, 1269).

Quanto as dimensões praxeológicas, Henriques, Attie e Farias (2016) destacam uma praxeologia completa constituída pelas seguintes noções:

Tarefa(T) $\leftrightsquigarrow$ Técnica(τ) $\leftrightsquigarrow$ Tecnologia(θ) $\leftrightsquigarrow$ Teoria (Θ)

Quando empregada e entendida de maneira correta, as quatro noções fornecem condições para a elaboração de uma SD. Para Afonso Henriques, ela é um elemento da ED, caracterizada por um esquema experimental de acordo com as realizações didáticas em sala de aula, ele apresenta a seguinte definição para SD:

> Definição 2: Uma sequência didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar [análise institucional] em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada situação, problema ou tarefa [tendo uma praxeologia completa] (HENRIQUES, 2011 apud HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2016, p. 4).

Para a aplicação da ED, o pesquisador faz uma análise *a priori* levando em conta os conhecimentos das competências e pré-requisitos do indivíduo, bem como o objeto matemático de referência envolvido na pesquisa. Diante disso, o pesquisador poderá confrontar o processo de análise didática com os resultados obtidos após a aplicação da SD. Essa metodologia possui dois grandes momentos, definidos por Henriques, Attie e Farias (2016) como Pesquisa Interna e Pesquisa Externa.

A pesquisa é a realização de uma sondagem pelo pesquisador, na pesquisa interna não há intervenção de sujeitos externos em busca de compreender melhor seu objeto de estudo, nesse momento é definido o quadro teórico, objetivos, metodologia, escolha dos elementos institucionais e resultados parciais. Já na pesquisa externa, há envolvimento dos sujeitos como público alvo, nesse momento acontece a aplicação do estudo desenvolvido na pesquisa interna. Cada uma das fases foi dividida em quatro etapas conforme detalhado nos quadros 4 e 5:

Quadro 4 – Análise Institucional e Sequência Didática (AI&SD): Fase I

Análise Institucional e Sequência Didática (AI&SD)	
Fase I: Definições e Análises Preliminares	
1ª Etapa	**Tomada de Decisões Iniciais** Definição do tema/assunto da pesquisa. Apresentação da problemática e/ou questões da pesquisa em torno do tema/assunto (objeto do saber de referência). Definição dos objetivos gerais e específicos, bem como do referencial teórico ou quadro teórico de base da pesquisa.
2ª Etapa	**Identificação das Instituições** Identificação de uma instituição que seja de: referência, aplicação ou referência e aplicação.
3ª Etapa	**Escolha de elementos Institucionais** Identificação e escolha dos elementos institucionais que se pretende analisar a partir daqueles apresentados na figura 1, eventualmente acrescidos de outros, com olhar no objeto de estudo ou do ensino visado, sem perca de vista ds etapas precedentes.
4ª Etapa	**Estudo e apresentação da Análise Institucional de Referência** Estudo de cada um dos elementos institucionais escolhidos na 3ª Etapa e apresentação de análises correspondentes com base nas definições dispostas na 1ª Etapa. Apresentação de considerações e reflexão sobre a implementação de possíveis propostas, soluções ou contribuições em torno da problemática nas instituições envolvidas na 2ª Etapa.

Fonte: Henriques, Attie e Farias (2016, p. 4)

Quadro 5 – Análise Institucional e Sequência Didática (AI&SD): Fase II

Análise Institucional e Sequência Didática (AI&SD)	
Fase II: Organização, análises e aplicação de uma Sequência Didática	
5ª Etapa	**Organização de uma SD** Organização de uma SD contendo ao menos uma sessão de aplicação de um dispositivo experimental, constituído de tipo de tarefas propostas na praxeologia dos objetos de estudo envolvidos na pesquisa ou construídos com base nessa praxeologia analisada na 4ª Etapa.
6ª Etapa	**Análise *a priori*** Realização e apresentação de análise matemática/didática de cada tarefa, proposta no dispositivo experimental, considerando os conhecimentos que se pretende investigar sobre o objeto em jogo, com referências na sua praxeologia.
7ª Etapa	**Aplicação da sequência** Negociação com os elementos da instituição de aplicação, descrição das suas condições e realização do experimento (aplicação) propriamente dito.
8ª Etapa	**Análise *a posteriori* e validação** Realização da análise das práticas efetivas dos sujeitos da pesquisa e validação.

Fonte: Henriques, Attie e Farias (2016, p. 4)

3.2.2.1 Descrevendo as etapas da AI&SD

Para proporcionar uma melhor compreensão, detalharemos cada uma de suas etapas, de acordo com o trabalho de Henriques, Attie e Farias (2016), sendo as quatro primeiras da Pesquisa Interna e as quatro últimas da Pesquisa Externa, em nossa dissertação realizaremos as oito etapas descritas a seguir:

1ª Etapa - Tomada de decisões

Nessa etapa, deve-se, com base nas discussões, tomar as decisões primárias de maneira que favoreça a escolha de um tema de pesquisa, de acordo com as problemáticas e inquietações do pesquisador a cerca do objeto do saber matemático escolhido, de modo que alcancem as questões de pesquisa. Nesse momento é importante definir os objetivos gerais, específicos e o quadro teórico da pesquisa.

2ª Etapa - Identificação das Instituições

A escolha de uma instituição é realizada em função do objeto matemático de estudo, o autor classifica as instituições a serem escolhidas para a pesquisa como:

> **Instituição de Referência** - instituição de realização da Pesquisa Interna. Esta instituição é tomada como fonte reveladora da epistemologia e organizações possíveis do objeto matemático de referência.
>
> **Instituição de Aplicação** - instituição de realização da Pesquisa Externa. Esta instituição é tomada como campo de coleta de dados relacionados às práticas efetivas de sujeitos envolvidos como público alvo.
>
> **Instituição de Referência e Aplicação** - instituição onde são realizadas ambas as Pesquisas (Interna e Externa) (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2016, p. 6).

3ª Etapa - Escolha de elementos Institucionais

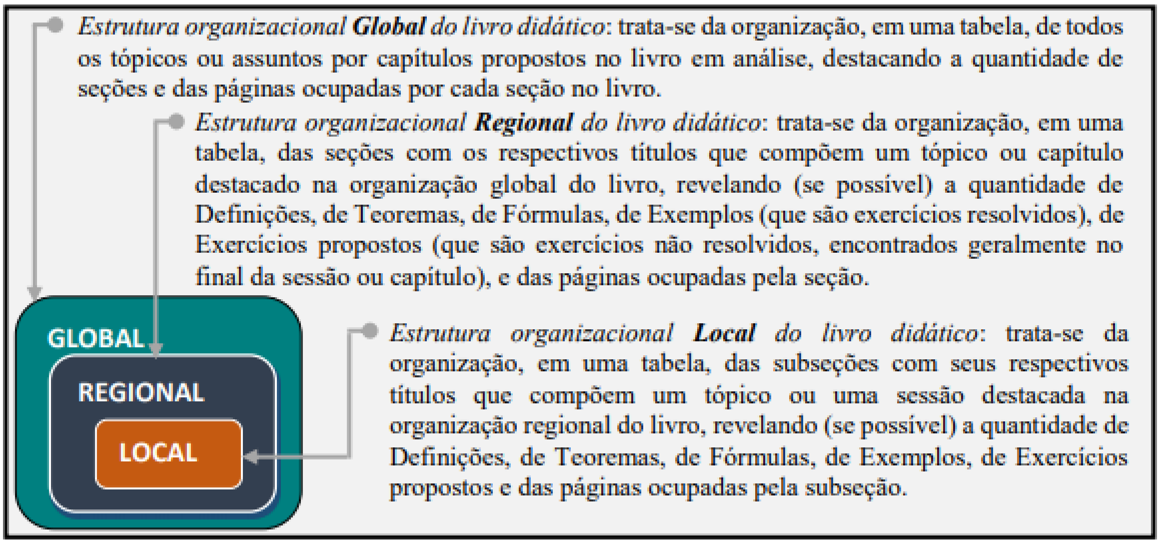
Segundo os autores (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2016), baseados na noosfera defendida por Yves Chevallard, nessa etapa deve-se escolher e tomar decisão na instituição de referência sobre os elementos institucionais do estudo, conforme apresentado na figura 13, ressaltam ainda que, para uma pesquisa em Educação, é importante que essa escolha englobe os documentos oficiais que norteiam a noosfera do objeto do saber, após a escolha, deve-se analisar o objeto de estudo na instituição de aplicação.

4ª Etapa - Estudo e apresentação da Análise Institucional

Nessa etapa deve-se realizar um estudo aprofundado e criterioso de cada um dos elementos institucionais escolhidos e apresentar uma análise descritiva. Em pesquisas educacionais é fundamental analisar nessa etapa: o Ministério da Educação nos parâmetros curriculares Nacionais; o Currículo; o Projeto Político Pedagógico; o livro didático; as tecnologias; o professor e o aluno.

Para a análise do livro didático, Henriques, Nagamine, Nagamine (2012) destaca três noções, sendo elas: global, regional e local, conforme figura 14, elas permitem ter uma visão geral dos objetos propostos no livro didático, dando uma visão geográfica do objeto do saber naquela instituição.

Figura 14 – Modelo de análise do livro didático



Fonte: Henriques; Nagamine; Naganime (2012)

5ª Etapa - Organização de uma SD

Ao organizar uma SD deve-se conter ao menos uma sessão, cada sessão constitui um Dispositivo Experimental (DE) contendo ao menos uma tarefa T, elaborada pelo pesquisador com base na praxeologia do objeto de estudo, na figura 15, o autor esquematiza essa informação:

Figura 15 – Descrição de uma Sequência Didática

Sessão I	→	Sessão II	→	...	→	Sessão P
T1		T1		...		T1
T2		T2		...		T2
⋮		⋮		⋮		⋮
Tk_1		Tk_2		...		Tk_P

Condições de realização e evolução de R(X, O)

Fonte: Henriques; Attie; Farias (2016)

De acordo com Henriques, Attie e Farias (2016, p. 9) "As condições de realização de uma SD, visando a evolução da relação pessoal indivíduo X (sujeito da pesquisa) com o objeto de estudo O, isto é, R (X, O), durante a aplicação de uma SD, devem permitir acompanhar a aprendizagem desses sujeitos [...]". O pesquisador deve, ainda nessa etapa, estruturar seus DE, contendo as devidas tarefas conforme modelo no quadro 6, onde cada tarefa proposta no dispositivo deve ser analisada previamente pelo pesquisador.

Quadro 6 – Modelo de um Dispositivo Experimental

IDENTIFICAÇÃO DA INSTITUIÇÃO DE REFERÊNCIA	
Dispositivo experimental para análise de práticas institucionais de alunos sobre o estudo de **O**	
Entrar aqui com um texto explicativo esclarecendo os participantes sobre os objetivos da pesquisa.	
Nome do professor da turma (Opcional):	
Nome do aluno (Opcional):	
SESSÃO I	
$\mathbf{T}_1$	Enunciado da tarefa ou situação-problema extraída ou elaborada pelo pesquisador com base na praxeologia de **O**.
$\mathbf{T}_2$	Enunciado da tarefa ou situação-problema extraída ou elaborada pelo pesquisador com base na praxeologia de **O**.
$\mathbf{T}_3$	Enunciado da tarefa ou situação-problema extraída ou elaborada pelo pesquisador com base na praxeologia de **O**.
$\mathbf{T}_4$	Enunciado da tarefa ou situação-problema extraída ou elaborada pelo pesquisador com base na praxeologia de **O**.

Fonte: Henriques, Attie e Farias (2016, p. 9)

6ª Etapa - Análise *a priori*

Quadro 7 – Organização de conhecimentos requeridos na análise *a priori* de uma tarefa

Enunciado da tarefa $\mathbf{T}_1$ no Quadro 6
Objetivo de $\mathbf{T}_1$ Apresentar os objetivos da tarefa e do pesquisador relativamente a aplicação da tarefa. **Análise *a priori* de $\mathbf{T}_1$** Apresentar a análise a priori considerando os conhecimentos institucionais correspondentes a praxeologia da tarefa; as estratégias de resolução; às técnicas necessárias para a realização da tarefa; as resoluções e as soluções possíveis, que sejam corretas ou incorretas, tendo, contudo, um procedimento lógico; destacar as variáveis didáticas correspondentes. **Resultados esperados** Apresentar e justificar a escolha das possíveis estratégias utilizadas pelo aluno/estudante. Discutir/apresentar o que se espera das práticas efetivas dos sujeitos envolvidos (alunos, estudantes, Professores, etc.). **Pré - requisitos e competências** Apresentar os pré-requisitos necessários e as competências que o sujeito deve mobilizar para solucionar a tarefa.
Repetir o processo de análise para cada tarefa

Fonte: Henriques, Attie e Farias (2016)

Após a construção do DE, deve-se fazer uma análise *a priori*, destacando o que o pesquisador pretende investigar em cada uma das tarefas, como os pré-requisitos dos sujeitos envolvidos, evidenciando as resoluções e estratégias em cada uma delas de acordo com a praxeologia do objeto investigado, essa metodologia diferencia das outras que visam apenas coletar dados para análises. Os autores apresentam no quadro 7 um esquema dos conhecimentos mínimos requeridos de uma tarefa na análise *a priori*.

7ª Etapa - Aplicação da sequência

Nessa etapa é realizada a aplicação na instituição escolhida, é vinculado a negociação entre o pesquisador e a instituição através de contatos e autorização, diante do acordo o pesquisador deve detalhar: o local, público, entraves, dados das produções dos alunos, entre outros.

8ª Etapa - Análise *a posteriori* e validação

Na nossa última etapa com os dados recolhidos e com o que foi proposto na análise *a priori*, o pesquisador deve elaborar critérios que ele utilizará para acompanhamento das produções efetivas dos alunos, o autor apresenta no quadro 8 os critérios para análise *a posteriori* de cada tarefa. A análise *a posteriori* deve permitir conclusões acerca do processo ensino-aprendizagem do objeto matemático escolhido.

Quadro 8 – Critérios para análise *a posteriori* da tarefa T

Enunciado da tarefa T1 no Quadro 6
Elaborar os critérios de análise de T1 Considerar os conhecimentos ou conceitos que se pretende ensinar ou que os sujeitos devem mobilizar na realização dessa tarefa; às técnicas necessárias na sua realização; as estratégias de resolução, corretas ou incorretas; as variáveis didáticas mobilizadas. **Interpretação quantitativa dos dados** Apresentação dos critérios destacados acima em uma tabela, considerando as práticas efetivas quantitativamente/porcentagem. **Análise descritiva das práticas dos sujeitos** Apresentar uma descrição das práticas efetivas dos sujeitos com base nos critérios considerados acima, comprovadas com recortes dos manuscritos destes sujeitos. O acesso virtual aos manuscritos pode ser efetivado por fotografias ou por escâner.
Repetir o processo de análise para cada tarefa

Fonte: Henriques, Attie e Farias (2016, p.12)

De acordo com o modelo proposto por Henriques, Attie e Farias (2016) descrito nestas oito etapas, faremos no próximo dois capítulos a aplicação de cada uma delas acerca do nosso objeto matemático escolhido: frações equivalentes, em nossa instituição de aplicação a Escola Odorico Leocádio da Rosa localizada em Rondonópolis - MT.

3.2.3 Narrativas Orais

Nas aulas de matemática o diálogo professor aluno também deve ser levado em consideração, a comunicação não deve ficar restrita a apresentação das atividades e conteúdos, com base no diálogo é possível dar suporte ao aluno e realizar as intervenções necessárias.

Deste modo algumas narrativas orais que ocorreram na aplicação da sequência didática foram consideradas neste trabalho, a fim de observar e analisar a compreensão dos alunos acerca do objeto matemático de referência, dando suporte para a continuação das demais atividades propostas.

Com base no quadro teórico e metodologia de pesquisa aqui apresentados, prosseguimos para a análise institucional acerca em torno do objeto matemático de estudo frações equivalentes.

Parte II

RESULTADOS

4 Definições e análises preliminares

Neste capítulo realizaremos a aplicação da Análise Institucional em torno do nosso objeto matemático de estudo: frações equivalentes, contendo as quatro primeira etapas, divididas em subseções.

Observaremos a ecologia deste saber, analisando as instituições do objeto em questão, bem como a praxeologia nos livros didáticos. Faremos um estudo acerca dos documentos que norteiam a educação, mais especificamente o estudo de frações, no 6º ano do Ensino Fundamental.

4.1 1ª Etapa - Tomada de decisões iniciais

De acordo com Henriques, Attie e Farias (2016), essa etapa deve estar presente em toda pesquisa acadêmica, com base nas discussões deve-se tomar as decisões primárias a fim de favorecer a escolha de um tema a partir de uma problemática.

Frações equivalentes foi o objeto matemático de referência escolhido para nossa pesquisa, pois durante o tempo da pesquisadora em sala de aula identificou-se por meio de avaliação diagnóstica e observação, que há dificuldades relacionadas a este conteúdo, "frações continuam a representar dificuldades para os alunos, apesar dos numerosos trabalhos publicados sobre esse assunto. Observamos essa dificuldade em nossa prática de professor de escola" Martinez-Ibanez (2018, p.3). Consideramos também a importância do mesmo no processo de aprendizagem, assim como sua aplicabilidade em diversos conteúdos importantes para a formação do aluno.

Roth e Costa (2016) ressaltam que:

> De modo geral, os professores do 6º ano esperam que o aluno chegue pronto, o que realmente não acontece, sendo necessária a utilização de atividades contextualizadas e materiais didáticos manipuláveis, para que favoreçam a compreensão das ideias matemáticas (ROTH; COSTA, 2016, p. 3).

Nota-se que uma das principais dificuldades dos alunos do Ensino Fundamental está ligado a identificação e comparação de frações. Foi escolhido trabalhar este tema no 6º ano do Ensino Fundamental, por se tratar de um dos objetivos de aprendizagem nessa etapa de ensino.

Os motivos do baixo desempenho por parte dos alunos, nos levam a discussão sobre hipóteses que poderiam provocá-los, como: a falta de qualidade do curso de graduação dos professores, que pode levar a falta de domínio do conteúdo ou até mesmo a apresentação dos conteúdos de forma limitada; a falta de conhecimento prévio dos alunos; dificuldades no rompimento das ideias construídas para as operações com os números inteiros, entre outros. "Levará tempo e trabalho para que esses alunos abandonem seus conceitos errados para construir conceitos matemáticos mais complexos do que aqueles estudados previamente com números inteiros."(MARTINEZ-IBANEZ, 2018, p.46)

4.2 2ª Etapa - Identificação de Instituições

Realizamos nessa etapa a escolha da Instituição de acordo com o objeto matemático de estudo escolhido. Para Henriques, Attie e Farias (2016) a Instituição deve ser escolhida, de modo que seja uma: Instituição de Referência, Instituição de Aplicação ou Instituição de Referência e Aplicação.

Escolhemos como Instituição de Referência e Aplicação, as aulas da disciplina de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental na Escola Estadual Odorico Leocádio da Rosa, Rondonópolis-MT; a disciplina é ofertada anualmente no período matutino, com carga horária anual de 200 horas, ou seja, 5 horas/aula semanais.

Por motivo da pandemia da Covid-19, as aulas acontecem de maneira não presencial com videoconferência pela plataforma TEAMS da Microsoft, com a carga horária de 5 aulas semanais de 30 minutos cada. Com essa nova modalidade contamos com a participação nas aulas remotas de cerca de 42% do total de alunos matriculados.

Para essa escolha destacamos que houve a tentativa de aplicação e análise da sequência didática por parte de outros professores da rede, porém diante da adaptação e insegurança destes professores nessa nova modalidade de aulas remotas, e a falta de número mínimo de alunos participantes das aulas online, não foi possível a realização deste.

4.3 3ª Etapa - Escolha de elementos Institucionais

Escolhemos nessa etapa, os elementos institucionais ligados à nossa Instituição de Referência: a disciplina de matemática na turma do 6º Ano do Ensino Fundamental.

Os elementos escolhidos nesta etapa do nosso trabalho são:

- Professor e o aluno;
- Documentos que norteiam a educação básica e dão subsídios para o trabalho docente: Lei nº 9.394/96 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 13.005/2014 - Plano Nacional de Educação (PNE), Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN'S), Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Documento de referência

curricular para o Mato Grosso (DRC-MT), Projeto Político-pedagógico (PPP), Plano de trabalho docente (PTD);

- Livro didático *A Conquista da Matemática* de Júnior, Ruy e Castrucci (2018) adotado na Instituição de Referência;
- Recursos didáticos, sendo eles modelos concretos manipuláveis e o ambiente computacional GeoGebra.

4.4 4ª Etapa - Estudo e apresentação da Análise Institucional de Referência

Realizaremos nesta etapa um estudo de cada um dos elementos institucionais escolhidos na 3ª Etapa e apresentaremos uma análise descritiva, levando em consideração as inquietações citadas na 1ª Etapa.

Iniciamos com o documento oficial da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), legislação que regulamenta todo o sistema educacional no Brasil, seja público ou privado da educação básica ao ensino superior, conforme a legislação vigente, é responsabilidade do professor zelar pela aprendizagem do aluno, e ter como objetivo desenvolver no aluno a capacidade de aprender.

> Art. 13º. Os docentes incumbir-se-ão de: III - zelar pela aprendizagem dos alunos;
>
> Art. 32º. O ensino fundamental terá por objetivo a formação do cidadão, mediante: I - o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo; III - o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem (LDB, 2012).

O Plano Nacional de Educação (PNE) que estabelece 20 metas a serem atingidas num intervalo de 10 anos, sendo o último em vigor até 2024, tem como objetivo na meta 7: "Fomentar a qualidade da educação básica em todas as etapas e modalidades, com melhoria do fluxo escolar e da aprendizagem de modo a atingir certas médias nacionais para o Ideb" PNE (2014).

As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNs), documento responsável por desenvolver normas obrigatórias para a educação básica, que orientam o planejamento curricular de todo o sistema de ensino, garante como obrigatório o ensino da disciplina de matemática em todo o currículo nacional.

> "Art. 14 O currículo da base nacional comum do Ensino Fundamental deve abranger, obrigatoriamente, conforme a LDB, o estudo da Língua Portuguesa e da Matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente a do Brasil, bem como o ensino da Arte, a Educação Física e o Ensino Religioso" (DCN, 2014).

O Documento de Referência Curricular para Mato Grosso (DRC-MT), foi desenvolvido à luz da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e este por sua vez foi elaborado no que diz a DCNs, os três por sua vez, se complementam e um não exclui o outro, e são igualmente essenciais. Na BNCC e DRC-MT encontramos as habilidades e conhecimentos que devem ser consolidados nas diferentes etapas de ensino, de acordo com nossas inquietações citadas na 1ª Etapa. A seguir um levantamento da abordagem números racionais no Ensino Fundamental de acordo com a BNCC e o DRC-MT, relacionado nos quadros 9 e 10.

Quadro 9 – Conhecimentos e habilidades do Ensino Fundamental I conforme a BNCC e DRC-MT.

Objetos de conhecimento e habilidades do Ensino Fundamental I
4º Ano
Números racionais: frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$). (EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5º Ano
Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica. Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência. Cálculo de porcentagens e representação fracionária. Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita. Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais. (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. (EF05MA04) Identificar frações equivalentes. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Fonte: BNCC (2017)

A BNCC sofreu algumas mudanças, e no ano de 2018 saiu uma nova versão, em seguida as DRC-MT também mudaram. Neste momento ainda estamos vivendo uma fase

Quadro 10 – Conhecimentos e habilidades do Ensino Fundamental II conforme a BNCC e DRC-MT.

Objetos de conhecimento e habilidades do Ensino Fundamental II
6º Ano
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações. (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
7º Ano
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações. (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

Fonte: BNCC (2017)

de mudança pois a BNCC está em fase de consolidação.

Na Educação Básica utilizamos a BNCC como norte para a preparação do plano de trabalho docente e para o planejamento das aula, de acordo com os quadros 9 e 10, podemos observar que o conteúdo de frações é abordado a partir do 4º ano até o 7º ano do Ensino Fundamental e noção de equivalência bem como identificação de frações equivalentes é um objeto do conhecimento do 5º e 6º ano.

O significado parte-todo é objeto do conhecimento do 5º e 6º ano, significado quociente faz parte das habilidades da BNCC no 6º ano, e por fim significado razão e operador no 7º ano, o que causa um certo estranhamento já que o significado razão seria o mais natural ao conceito de equivalência, ou seja, de acordo com a BNCC os significados parte-todo e quociente seria o mais adequado para a construção deste saber, nota-se também que o significado medida não foi abordado. Observação que vai de encontro ao trabalho de dissertação de Lessa (2011), que fez uma análise em dez livros didáticos no recorte de frações, e o significado medida é abordado com apenas um exemplo em dois destes livros e uma pequena abordagem em um terceiro, assim segundo a autora:

> Os significados menos abordados ”quociente“ e “medida”, provem de questões cotidianas da sociedade, como a necessidade de medições e a divisão. No entanto, estas são desconsideradas ou pouco valorizadas pelos livros didáticos (LESSA, 2011, p. 52).

O livro *A Conquista da Matemática* de Júnior, Ruy e Castrucci (2018), é o material didático escolhido pela Escola Odorico no ano de 2020. Observe na tabela 1, os dados dos conteúdos abordado no livro citado até números racionais. As unidades que ficaram de fora são: ângulos, polígonos e grandezas. Leia nas colunas abreviadas por: Pág., Ex. e At. como sendo: número de páginas, quantidade de exemplos (atividades resolvidas) e quantidade de atividades respectivamente.

No livro didático em questão observamos que o conteúdo de frações é brevemente abordado, 7 páginas são reservadas para abordagem e exercícios de frações equivalentes, contando com 10 exemplos e 19 exercícios, os conceitos de fração própria, imprópria e imprópria aparente, bem como multiplicação e divisão não aparecem no livro e nem são citados.

Segundo Lopes (2008), o conjunto dos números racionais é abordado de maneira muito rápida nos livros didáticos.

> Analisando livros publicados a partir do movimento da Matemática Moderna, observei uma preocupação dos autores em abordar, tão rapidamente quanto possível, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Por outro lado nos livros dos anos 1930, tão logo apresentavam as frações impróprias, orientavam os alunos a transformá-las em frações mistas, tão raras nos livros didáticos atuais, apesar de mais intuitivas (LOPES, 2008, p. 8).

Carvalho, Santos e Attie (2016), fizeram uma análise dos tipos de argumentações em livros didáticos, relativo aos conteúdos de frações e potências. Após avaliarem seis livros didáticos, entre eles, o livro *A Conquista da Matemática*, chegaram a algumas considerações, entre elas:

> Infelizmente, como pudemos apontar neste trabalho, ainda vemos, mesmo em livros didáticos recomendados oficialmente, a preponderância de argumentações explicativas, que privilegiam a resolução de exercícios, em um sentido mecânico, como se aprender e fazer matemática pudesse prescindir do pensamento criativo (CARVALHO; SANTOS; ATTIE, 2016, p. 6).

Como sabemos o livro didático não é o único recurso que deve ser adotado pelo professor, de fato ele serve de suporte para as aulas e auxilia o aluno durante e após as

Tabela 1 – Sumário do livro Júnior, Ruy e Castrucci (2018).

Título da Seção	Pág.	Ex.	At.
Unidade 1 - Sistemas de Numeração.			
Sistema de numeração Egípcia, Babilônica e Romana.	5	5	6
Nosso sistema de numeração.	15	5	51
Unidade 2 - Cálculos com números naturais.			
Adição.	4	5	6
Subtração.	8	3	18
Multiplicação.	6	11	15
Divisão.	5	8	19
Potenciação.	7	6	21
Expressões numéricas.	6	15	32
Retomando o que aprendeu.	4	0	4
Unidade 3 - Figuras geométricas.			
Ponto, reta e plano.	4	3	3
A reta.	8	9	20
Figuras geométricas.	2	3	5
Sólidos geométricos.	7	4	21
Retomando o que aprendeu.	2	0	7
Unidade 4 - Múltiplos e divisores.			
Noção de divisibilidade.	6	3	13
Critérios de divisibilidade.	6	27	7
Divisores e múltiplos de um número natural.	8	7	5
Números primos.	10	9	26
Retomando o que aprendeu.	2	0	12
Unidade 5 - A forma fracionária dos números racionais.			
A ideia da fração.	7	7	10
Problemas envolvendo frações.	2	3	10
Comparando frações.	3	3	4
Obtendo frações equivalentes.	7	10	19
Adição e subtração de frações.	8	7	16
A forma mista.	4	7	14
As frações e a porcentagem.	2	9	10
Probabilidade.	4	3	8
Retomando o que aprendeu.	2	0	12
Unidade 6 - A forma decimal dos números racionais.			
Representação decimal.	6	14	11
Adição e subtração com números na forma decimal.	2	2	10
Multiplicação com números na forma decimal.	5	12	24
Divisão com números na forma decimal.	5	9	19
Os números na forma decimal e o cálculo de porcentagens.	2	4	7
Retomando o que aprendeu.	6	0	14

Fonte: Júnior, Ruy e Castrucci (2018)

aulas. Um destaque maior para os números racionais nos livros didáticos do 6ºs anos poderia contribuir de maneira positiva.

Outro elemento institucional constituinte do nosso trabalho são os modelos concretos manipuláveis, nos quais utilizaremos: o flanelógrafo e o encarte do aluno ilustrados nas figuras 16 e 17. Destacamos a importância da utilização destes materiais nas aulas de matemática, conforme citado por Brito (2019):

> O emprego de materiais concretos manipuláveis no ensino da Matemática é uma alternativa didática que contribui para a realização de intervenções do professor na sala de aula, independentemente do nível de ensino em que está inserido. Sua utilização, surge como uma proposta pedagógica para tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e proveitosas. Esses recursos, além de despertar o interesse dos alunos/estudantes, fazem com que eles tenham uma maior interação com o objeto matemático estudado (BRITO, 2019, p. 189).

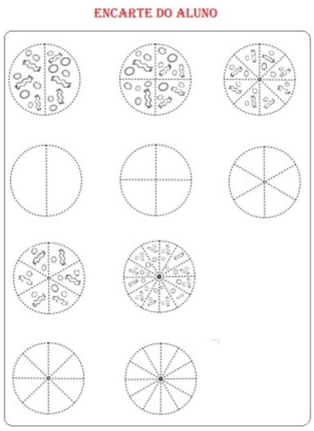
Figura 16 – Flanelógrafo completo

Fonte: Materiais da pesquisa

O Flanelógrafo é um quadro verde, feito todo de feltro e é composto por 9 discos de frações, onde possibilitam a representação das seguintes frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{12}$, assim como suas composições até completar um inteiro. Em nosso trabalho ele é utilizado pelo professor para ilustrar o que é pedido em cada atividade, enquanto o encarte faz parte da apostila elaborada para os alunos utilizarem nas aulas, ele é utilizado pelo aluno na realização das atividades propostas.

Nosso último elemento institucional escolhido é o GeoGebra, "[...]que surgiu a partir da tese de doutorado, no ano de 2001, de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria" (ARAUJO, 2008 apud BRITO, 2019, p. 162). Ele permite criar atividades, bem como oferece um acervo com atividades elaboradas, simulações, exercícios entre outros, gratuitos e disponíveis para acesso de todos. Utilizaremos em nosso

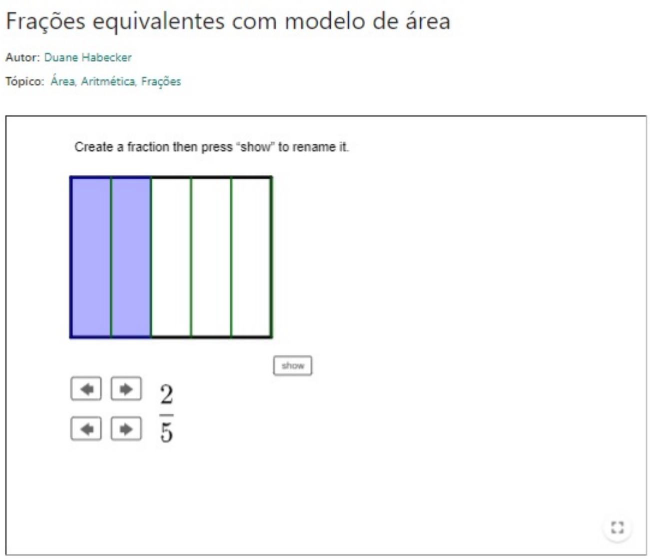
Figura 17 – Modelo do encarte do aluno



Fonte: Produção do Autor

trabalho: frações equivalentes com modelo de área, de Duane Habecker ilustrado na figura 18 e disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1Iup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs>

Figura 18 – Modelo da atividade no GeoGebra



Fonte: www.geogebra.org

Destacamos aqui o quanto o GeoGebra como recurso digital agrega no estudo das frações equivalentes. Com o auxílio deste, é possível que os alunos manipulem e visualizem as mudanças que ocorrem na figura, durante a mudança de numerador e denominador de uma fração qualquer. Ao fixarmos uma fração e determinarmos algumas de suas equivalências, é possível observar que a área correspondente da figura permanece a mesma.

Com base na nossa pesquisa interna em torno do nosso objeto matemático de estudo, temos que ele faz parte da habilidade proposta pela BNCC no 6º ano do Ensino

Fundamental, os significados que devem ser abordados nesta etapa bem como os que são abordados no livro didático não vão de encontro com o nosso estudo acerca do mais adequado para o ensino de frações equivalentes. Partiremos agora, no próximo capítulo, para a apresentação da nossa sequência didática, aplicação, análise e validação da nossa pesquisa.

5 Organização e aplicação de uma SD

Neste capítulo, faremos a segunda fase da nossa Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD), contendo a organização da Sequência Didática (SD), bem como a análise *a priori*, que será elaborada após as análises e considerações feitas na 1ª fase, levando em consideração os objetivos e questões de pesquisa do 1º capítulo. Em seguida a aplicação desta SD, a análise *a posteriori* e validação.

5.1 5ª Etapa - Organização de uma Sequência Didática

Nossa SD está organizada em três sessões, para aplicação de três Dispositivos Experimentais (DE). As sessões abrangem o estudo de frações equivalentes e foram propostas para ocorrer em 3 aulas de 30 minutos cada. Nos quadros 11, 12 e 13 estão os DE com as tarefas que serão desenvolvidas nos ambientes propostos: modelos concretos manipuláveis e GeoGebra.

Cada DE é composto de um conjunto de tarefas T_m, com subtarefas associadas S_n, em que m, n são indexadores naturais.

5.1.1 Dispositivos Experimentais

Cada um dos DE que foram aplicados, ocorreram em uma aula de 30 minutos. Os alunos receberam uma apostila com um total de 5 páginas, que apresentaremos na 7ª Etapa e encontra-se disponível no **Apêndice**. As aulas ocorreram de maneira remota na plataforma TEAMS da Microsoft.

Quadro 11 – Dispositivo Experimental com Material Concreto Manipulável 1

ESCOLA ESTADUAL ODORICO LEOCÁDIO DA ROSA	
Dispositivo experimental para análise de práticas dos alunos do 6º ano, sobre noção de frações equivalentes, com a utilização de modelos concretos manipuláveis.	
Tendo como objetivo instigar o aluno a partir de uma situação problema, a compreender que duas frações são equivalentes quando representam a mesma quantidade.	
Docente: *Mychelly A. M. Henrique*	
Nome do aluno:	
SESSÃO I	
$\mathbf{T_1}$	Fazer uso da apostila, leitura e interpretação da situação problema.
$\mathbf{T_2}$	Fazer o uso do flanelógrafo com os discos de frações em feltro.
$\mathbf{T_3}$	Fazer uso do encarte do aluno para representar as três frações abordadas na situação problema inicial (recortar, pintar e colar).

Fonte: Produção do Autor

A seguir, detalharemos individualmente cada dispositivo experimental.

O primeiro DE reúne os conhecimentos relativo ao conceito de frações, bem como suas representações, permitindo ao aluno com o auxílio do encarte disponível na apostila, manipular e representar cada uma das frações apresentadas. No quadro 11 está identificado cada uma das tarefas desenvolvidas.

Quadro 12 – Dispositivo Experimental com Material Concreto Manipulável 2

ESCOLA ESTADUAL ODORICO LEOCÁDIO DA ROSA	
Dispositivo experimental para análise de práticas dos alunos do 6º ano, sobre encontrar frações equivalentes, com a utilização de modelos concretos manipuláveis.	
Tendo como objetivo instigar o aluno a partir de uma situação problema, a encontrar frações equivalentes no sentido intuitivo.	
Docente: *Mychelly A. M. Henrique*	
Nome do aluno:	
SESSÃO II	
$\mathbf{T_1}$	Fazer uso da apostila, leitura e interpretação da situação problema e representar cada uma das situações com o auxílio do flanelógrafo.
$\mathbf{T_2}$	Responder as três perguntas relacionadas a situação problema inicial.
$\mathbf{T_3}$	Fazer uso do encarte do aluno para representar frações equivalentes (recortar, pintar e colar).

Fonte: Produção do Autor

O segundo DE permite que os alunos expressem sua interpretação da situação problema proposta e identifiquem frações equivalentes, com o auxílio do encarte, os alunos poderão encontrar frações equivalentes através da sobreposição das peças. No quadro 12 está descrita cada uma das tarefas desenvolvidas.

Quadro 13 – Dispositivo Experimental no GeoGebra

ESCOLA ESTADUAL ODORICO LEOCÁDIO DA ROSA	
Dispositivo experimental para análise de práticas dos alunos do 6º ano, sobre conceitos relacionados ao estudo de frações equivalentes, utilizando o ambiente computacional GeoGebra.	
Tendo como objetivo compreender as similaridades na representação geométrica das frações equivalentes.	
Docente: *Mychelly A. M. Henrique*	
Nome do aluno:	
SESSÃO III	
$\mathbf{T_1}$	Fazer uso do link a seguir no GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1Iup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs>.
$\mathbf{T_2}$	Discutir sobre as mudanças que ocorreram na figura, ao mostrar as representações geométricas das frações: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{10}$.
$\mathbf{T_3}$	Discutir sobre as mudanças que ocorreram na representação geométrica, durante a multiplicação da fração escolhida pelas frações: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{5}{5}$.
$\mathbf{T_4}$	Definir frações equivalentes.

Fonte: Produção do Autor

No terceiro e último DE, temos a representação geométrica do estudo de frações e frações equivalentes, proporcionando ao aluno uma investigação ao manusear as frações e multiplicações com o auxílio do GeoGebra, contando com a representação geométrica a todo momento. No quadro 13 está identificado cada uma das tarefas desenvolvidas.

5.1.2 Questionário

Após a aplicação de cada um dos dispositivos apresentados, foi proposto aos alunos que respondessem um questionário no Google Forms, como forma de identificar os conhecimentos adquiridos sobre nosso objeto matemático escolhido. No quadro 14 temos o conhecimento investigado em cada uma das questões elaboradas, que apresentaremos neste capítulo e estão disponíveis no **Apêndice**.

Identificaremos por Q_r, o conjunto de questões do Google Forms, em que r é um índice natural.

Quadro 14 – Questionário no Google Forms

	CONHECIMENTOS AVALIADOS
Q_1	Identificar a fração representada pela parte pintada de uma figura.
Q_2	Encontrar a figura que representa a fração indicada.
Q_3	Encontrar duas figuras cuja sua representação geométrica indique frações equivalentes.
Q_4	Encontrar duas frações equivalentes, sem o auxílio de suas representações geométricas.
Q_5	Encontrar uma fração equivalente, a partir da identificação da fração representada pela figura.

Fonte: Produção do Autor

As questões foram elaboradas com grau de dificuldade crescente. A expectativa era que os alunos conseguissem responder corretamente, em especial as duas primeiras questões, que abordam conceitos já estudados, destacando que o conceito de frações faz parte das habilidades da BNCC desde o 4º ano e frações equivalentes a partir do 5º ano do Ensino Fundamental.

5.2 6ª Etapa - Análise *a Priori*

Nesta etapa faremos uma análise, destacando o que se pretende investigar em cada sessão, isto nos possibilita estudar as condições para a realização de cada uma das tarefas e subtarefas. Abordaremos também as dialéticas envolvidas neste processo.

No quadros 15, 16, 17, temos os objetivos, análise *a priori*, resultados esperados e pré-requisitos para a realização das tarefas e subtarefas de cada uma das sessões.

A TAD e a TSD deram suporte em toda a aplicação da nossa sequência didática, a TAD na questão institucional e nas praxeologias pontuais, como daremos de exemplo a seguir na primeira atividade desenvolvida na primeira sessão, assim como nas demais atividades ela também esteve presente.

Nas questões 1 e 2 da apostila, temos bem definido a dialética da leitura e da escrita, já que ao construir a situação problema houve um cuidado para evitar que a resposta da questão estivesse descrita no texto, tentando dessa maneira conduzir o aluno a construção de uma resposta válida. A TSD dá suporte neste quesito já que nesta teoria prioriza-se que se parta de situações problema que ofereça condições para que o aluno produza conhecimento, optamos pela TSD nesta pesquisa principalmente pelo interesse em levar em consideração o contrato didático, que destacaremos mais adiante.

Quadro 15 – Tarefas e subtarefas do DE com Material Concreto Manipulável 1

SESSÃO I
T_1 Fazer uso da apostila, leitura e interpretação da situação problema.
S_1 Debater, na língua materna, a interpretação da situação problema proposta.
S_2 Levantar questionamentos de quem tinha razão de acordo com as frases ditas no problema.
T_2 Fazer uso do flanelógrafo com os discos de frações em feltro.
S_1 Mostrar aos alunos a representação da quantidade de pizza consumida por cada amigo, utilizando como auxílio o flanelógrafo.
T_3 Fazer uso do encarte do aluno para representar as três frações abordadas na situação problema inicial (recortar, pintar e colar).
S_1 Propor aos alunos responderem a questão 1, representando as frações demonstradas na T_2 utilizando o encarte do aluno.
Objetivo de T_1 e T_2 Analisar e compreender os conhecimentos dos alunos do 6º ano do ensino fundamental sobre frações, bem como a representação de cada fração dada e a comparação entre elas, sem especificar o conceito de frações equivalentes neste primeiro momento. **Objetivo de T_3** Analisar se os alunos conseguem representar corretamente as diferentes frações: $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ e $\frac{1}{4}$. **Análise *a priori* de T_1, T_2 e T_3** O ensino de frações tem início no 4º ano do ensino fundamental na educação básica, logo espera-se que todos os alunos consigam responder estes questionamentos e representar as figuras de maneira correta. **Resultados esperados** Espera-se que os alunos consigam responder que César e Paula comeram a mesma quantidade. **Pré - requisitos e competências** Para a realização destas tarefas é necessário que os alunos conheçam os conceitos de frações, bem como suas representações, conceito esse que foi trabalhado nos dois anos anteriores ao da aplicação deste trabalho. Assim, o aluno deve ter adquirido o saber matemático sobre frações como: $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{12}$.

Fonte: Produção do autor

Durante a realização de cada uma das três sessões, na qual os alunos responderam as seis questões propostas da apostila, é abordado a dialética da análise (e a síntese) praxeológica e análise (e a síntese) didática, em que ao realizar as tarefas e subtarefas propostas T, temos as técnicas τ (maneira de realizar cada tarefa), estando cada técnica ligada com uma tecnologia θ, que representa uma definição que justifica a técnica utilizada,

Quadro 16 – Tarefas e subtarefas do DE com Material Concreto Manipulável 2

SESSÃO II
T_1 Fazer uso da apostila, leitura e interpretação da situação problema e representar cada uma das situações com o auxílio do flanelógrafo.
S_1 Mostrar aos alunos a representação da quantidade de pizza consumida por cada amigo, utilizando como auxílio o flanelógrafo.
S_2 Debater novamente, na língua materna, a interpretação da situação problema proposta.
T_2 Responder as três perguntas relacionadas a situação problema inicial.
S_1 Levantar questionamentos quanto a quem comeu mais? Quem comeu menos? Entre os amigos Carla e César quem qual deles comeu mais?
S_2 Sem dar as respostas da S_1, apenas ouvindo a participação dos alunos, pedir que eles respondam a questão 2, de acordo com a conclusão que eles chegaram após a realização da atividade 1.
T_3 Fazer uso do encarte do aluno para representar frações equivalentes (recortar, pintar e colar).
S_1 Pedir aos alunos que representem frações equivalentes, tomando como exemplo as frações de pizza consumidas por César e Carla ($\frac{3}{12}$ e $\frac{1}{4}$), com o auxílio do encarte do aluno eles devem recortar e sobrepor as frações a fim de encontrar frações que representam a mesma quantidade.
Objetivo de T_1 Observar a participação dos alunos, tentando analisar quais são os conhecimentos já consolidados sobre o conceito de frações. **Objetivo de T_2** Analisar o conhecimento dos alunos sobre frações a partir uma situação real, observar se são capazes de identificar frações equivalentes de um mesmo inteiro representado, sem definir o conceito de frações equivalentes. **Objetivo de T_3** Identificar a capacidade dos alunos de encontrar outras frações equivalentes a partir de um material manipulável. **Análise *a priori* de T_1, T_2 e T_3** Frações equivalentes é um conceito abordado no 5º ano do ensino fundamental na educação básica, assim espera-se que a maioria consiga responder corretamente as questões 2 e 3, já que com o auxílio do flanelógrafo é possível mostrar aos alunos as equivalências ao sobrepor os discos de frações. **Resultados esperados** Espera-se que os alunos concluam que César e Carla comeram a mesma quantidade, bem como não tenham dificuldades de realizar a questão 3, já que com o auxílio do encarte do aluno eles podem sobrepor as frações. **Pré - requisitos e competências** Para a realização destas tarefas é necessário que os alunos conheçam os conceitos de frações, saibam identificar o numerador e denominador de uma fração, conceito esse que foi trabalhado com a turma antes da realização deste trabalho.

Fonte: Produção do autor

e por fim a teoria Θ que justifica a tecnologia. Formando assim o conjunto praxeológico $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

Como exemplo, vamos utilizar a T_3 da Sessão II (Quadro 16), que diz: fazer uso do encarte do aluno para representar frações equivalentes (recortar, pintar e colar).

Quadro 17 – Tarefas e subtarefas do DE no GeoGebra

SESSÃO III
T_1 Fazer uso do link a seguir no GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1Iup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs>.
S_1 Acessar o software GeoGebra, utilizando o link da T_1.
T_2 Discutir sobre as mudanças que ocorreram na figura, ao mostrar as representações geométricas das frações: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{10}$.
S_1 Utilizar o mouse para mostrar as frações da T_2 e observar o que acontece para cada caso.
S_2 Levantar questionamentos quanto ao que ocorre na figura ao realizar as mudanças de numerador e denominador conforme T_2.
S_3 Propor aos alunos que acessem o link da T_1 e reproduzam a T_2, e com base na discussão da S_2 e a manipulação no GeoGebra respondam a questão 4.
S_4 Realizar a escolha de uma fração para realização da T_3.
T_3 Discutir sobre as mudanças que ocorreram na representação geométrica, durante a multiplicação da fração escolhida pelas frações: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{5}{5}$
S_1 Mostrar a representação geométrica das multiplicações da fração escolhida pelas frações da T_3.
S_2 Propor aos alunos que reproduzam S_1, utilizando o link da T_1, e respondam a questão 5.
T_4 Definir frações equivalentes.
S_1 Propor aos alunos que com base nas atividades realizadas, respondam com suas palavras a questão 6.
Objetivo de T_1, T_2 e T_3 Oportunizar ao aluno utilizando o GeoGebra, visualizar as diferentes mudanças que ocorrem na representação geométrica de uma fração, ao realizar as mudanças de numerador e denominador, bem como ao realizar a multiplicação de uma fração por outra fração que contém um mesmo número natural no numerador e no denominador. **Objetivo de T_4** Analisar o conhecimento adquirido pelo aluno acerca do objeto matemático de estudo. **Análise *a priori* de T_1, T_2, T_3 e T_4** Como as aulas serão na modalidade remota, acredita-se que alguns alunos possam ter dificuldades de acesso ao Geogebra, já que precisam estar como ouvintes na realização da manipulação do mesmo. **Resultados esperados** Espera-se que os alunos consigam responder corretamente a questão 4, talvez tenham dificuldades na questão 5 e 6, já que para muitos pode ser um conceito novo, pouco abordado nos anos anteriores. **Pré - requisitos e competências** Para a realização destas tarefas é necessário que os alunos conheçam os conceitos de frações, saibam identificar o numerador e denominador de uma fração, conceito esse que foi trabalhado com a turma antes da realização deste trabalho.

Fonte: Produção do autor

Para a execução dessa tarefa T, podemos utilizar por exemplo a técnica τ que indica a determinação das frações equivalentes, realizando recortes nas frações disponíveis no encarte do aluno e sobrepondo elas a fim de encontrar recortes idênticos. Técnica que é justificada pela tecnologia θ, na qual frações equivalentes são frações que representam a mesma quantidade de um inteiro, e a teoria Θ, que justifica a utilização desta tecnologia que é o estudo dos conceitos de frações, assim conseguimos uma praxeologia completa para essa tarefa.

Cabe destacar que no momento em que descrevemos a análise *a priori*, os resultados esperados, os pré-requisitos e competências em cada uma das três sessões, estamos estabelecendo um contrato didático, que também esteve presente durante todas as etapas, principalmente no momento que antecede a aplicação da SD, em que a pesquisadora explicou aos alunos a importância da participação deles nas aulas e no envio atividades.

A dialética paraquedista/caçadores de trufas que está definida no capítulo 6, está presente em todas as questões da apostila já que os alunos tem uma visão mais limitada ao realizar as atividades, de acordo com o conhecimento que ele carrega. Enquanto o professor consegue ter uma visão mais ampla e indicar ao aluno, mais de um caminho para a resolução de certas questões.

As dialéticas: mídias e meios, da difusão e da recepção, estiveram presentes em todas as três sessões, durante a resolução das 06 questões propostas, porém esse processo de comunicação não foi bem sucedido, já que a interação de professor aluno não ocorre a todo momento durante as aulas remotas, processo este que trataremos mais adiante. Por fim, após descrito toda a análise *a priori* partiremos para a próxima etapa deste trabalho.

5.3 7ª Etapa - Aplicação da Sequência Didática

Essa etapa faz parte da pesquisa externa, relataremos agora a aplicação de cada um dos Dispositivos Experimentais (DE) que foram descritos na etapa anterior, totalizando 10 tarefas, com a utilização do material concreto e o ambiente computacional GeoGebra.

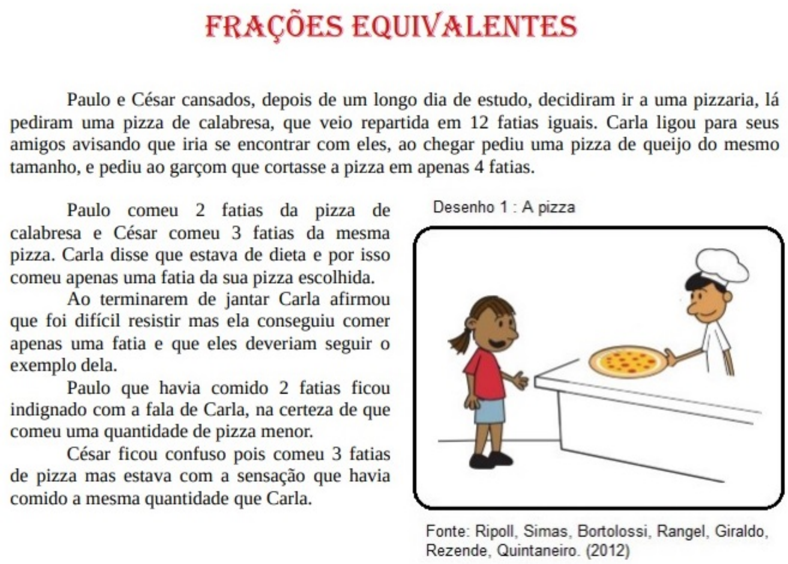
A Instituição de Aplicação desta Sequência Didática (SD) é mesma Instituição de Referência, ou seja, as aulas de matemática de quatro turmas do Ensino Fundamental, da Escola Estadual Odorico Leocádio da Rosa, no município de Rondonópolis - MT, totalizando 126 alunos matriculados, isto é, com a participação total de 53 alunos que assistem as aulas online na plataforma TEAMS da Microsoft.

Antes de darmos início a aplicação desta SD, é necessário destacar que os alunos receberam uma apostila com cinco páginas, disponível no **Apêndice**, nas três primeiras páginas temos três exercícios que fazem parte da primeira e segunda sessão desta pesquisa, nela temos atividades para o desenvolvimento com o uso do material concreto manipulável, em uma destas páginas está o encarte do aluno que utilizamos para pintura, recorte e colagem durante as aulas. As duas últimas páginas reservamos para a última sessão com a utilização do GeoGebra e desenvolvimento de três atividades. A escola disponibilizou esta apostila de maneira impressa para todos os alunos, alguns foram até escola buscar, outros pediram o material em pdf para imprimir em casa e oito alunos participaram sem material impresso, sugeri a estes que copiassem no caderno e fizessem os discos de frações do encarte do aluno no formato de retângulos para facilitar a construção do mesmo. A seguir descreveremos como ocorreu a aplicação de cada uma das sessões.

Primeira Sessão

A 1ª sessão teve duração de uma aula de 30 minutos, iniciou-se a aula estabelecendo com os alunos um contrato didático, pontuando a necessidade da participação deles nas aulas, na entrega das atividades e que se manifestassem sempre que houvesse dúvidas, de posse deste contrato que foi realizado oralmente com toda a turma, demos prosseguimento ao que foi planejado. Nesta aula assim como nas outras, a pesquisadora realizou o compartilhamento de tela com a exposição da apostila, no início da aula foi realizado a leitura da situação problema ilustrada na figura 19, e discutido a respeito, porém, poucos alunos se manifestaram e tiveram a percepção logo na primeira abordagem que o tamanho da fatia da pizza de Carla era maior, então, com o uso do flanelógrafo a pesquisadora realizou a ilustração da fatia consumida por cada um dos três amigos, conforme figura 20, neste momento mais alunos começaram a se manifestar e dizer que compreenderam o problema, ao questionar se alguém ficou com dúvidas, obteve-se silêncio como resposta. Destacamos neste momento uma das rupturas do contrato didático, vale ressaltar que os alunos não ligam a câmera na hora da aula o que não permite a observação facial, da qual a pesquisadora como professora está acostumada a realizar durante as aulas, antes de seguir a diante nas atividades.

Figura 19 – Situação Problema


FRAÇÕES EQUIVALENTES

Paulo e César cansados, depois de um longo dia de estudo, decidiram ir a uma pizzaria, lá pediram uma pizza de calabresa, que veio repartida em 12 fatias iguais. Carla ligou para seus amigos avisando que iria se encontrar com eles, ao chegar pediu uma pizza de queijo do mesmo tamanho, e pediu ao garçom que cortasse a pizza em apenas 4 fatias.

Paulo comeu 2 fatias da pizza de calabresa e César comeu 3 fatias da mesma pizza. Carla disse que estava de dieta e por isso comeu apenas uma fatia da sua pizza escolhida.

Ao terminarem de jantar Carla afirmou que foi difícil resistir mas ela conseguiu comer apenas uma fatia e que eles deveriam seguir o exemplo dela.

Paulo que havia comido 2 fatias ficou indignado com a fala de Carla, na certeza de que comeu uma quantidade de pizza menor.

César ficou confuso pois comeu 3 fatias de pizza mas estava com a sensação que havia comido a mesma quantidade que Carla.

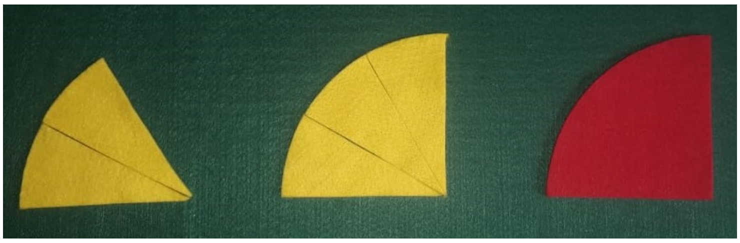
Desenho 1 : A pizza

Fonte: Ripoll, Simas, Bortolossi, Rangel, Giraldo, Rezende, Quintaneiro. (2012)

Fonte: Produção do Autor

Diante disso, não é possível dizer se todos os alunos compreenderam a atividade, pois assistem a aula sem ligar a câmera, assunto que já foi discutido pelo corpo docente da

Figura 20 – Flanelógrafo: fração da pizza consumida



Fonte: Materiais da pesquisa

escola desde o começo das aulas remotas, e após diversas tentativas ficou decidido deixar os participantes escolherem ligar ou não.

Em seguida a pesquisadora pediu que os alunos recortassem a fatia consumida por cada amigo utilizando o encarte do aluno conforme figura 17, para a realização da questão 1 da apostila ilustrado na figura 21.

Figura 21 – Questão 1 modelo

01. No espaço ao abaixo, pinte e recorte a porção da pizza que cada um dos três amigos comeu.

Paulo	César	Carla
Fração da pizza: ___	Fração da pizza: ___	Fração da pizza: ___

Fonte: Produção do Autor

Surgiram algumas perguntas como: se deveriam pintar, qual o modelo de pizza utilizar já que no encarte havia dois modelos, foi permitido que eles ficassem a vontade na escolha do modelo do disco, quanto a pintar ficou livre a escolha também, visto que nem todos tinham o material escolar necessário. Havia uma expectativa que os alunos tivessem uma experiência razoável com os números racionais e conseguissem obter nesta atividade, por ser uma habilidade supostamente já trabalhada nos dois últimos anos. A maioria dos alunos não terminaram a atividade durante a aula e ficou para concluírem como tarefa de casa. Nesta primeira sessão 47 alunos estavam presentes.

Segunda Sessão

A 2ª sessão teve duração de uma aula de 30 minutos, que iniciou com a releitura da situação problema, visto que neste dia 24 alunos estavam presentes, dos quais 2 não haviam participado da sessão anterior, quase metade do número total de alunos participantes da primeira sessão, no geral os alunos destas turmas não tinham uma regularidade na participação das aulas, destacamos aí outra ruptura no contrato didático. Esperava-se que os alunos neste momento já tivessem bem definido em relação a quantidade consumida por cada um dos 3 amigos, o que não ocorreu, por isso foi preciso fazer uma nova explanação, em seguida houve discussão a respeito das perguntas da questão 2, conforme ilustrado na figura 22.

Figura 22 – Questão 2 modelo

02. Analisando as representações acima responda:

a) Quem comeu menos?____

b) A afirmação de César estava correta, ao dizer que ele e Carla comeram a mesma quantidade?

____

c) O que podemos dizer em relação a fração da pizza que Carla e César comeram?

____

Fonte: Produção do Autor

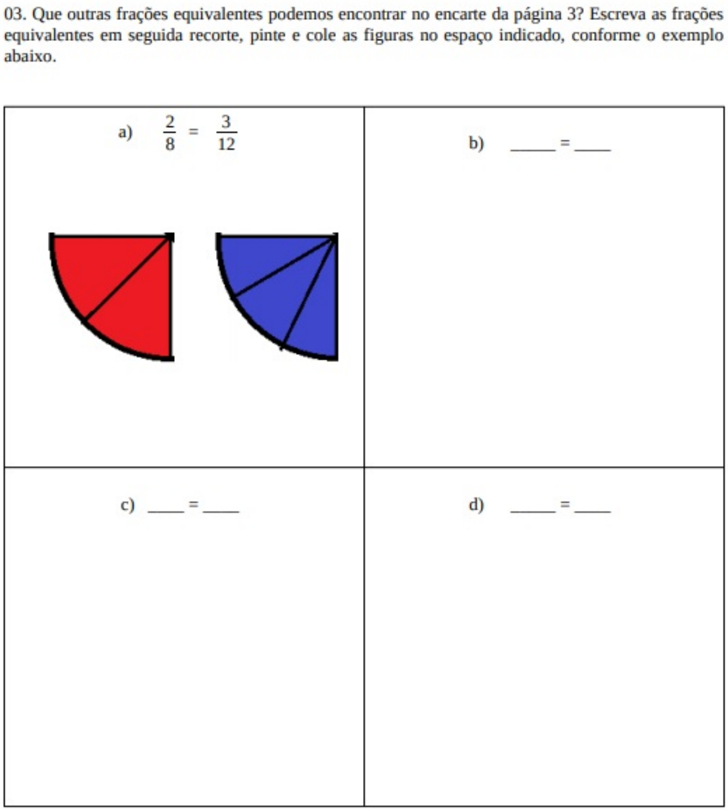
No item a) perguntava após analisar as representações da atividade anterior quem comeu menos, nesse momento alguns responderam Paulo, não tantos quanto gostaríamos, questionando os alunos se fizeram ou não a atividade da sessão anterior, obteve-se poucas respostas positivas. Após nova ilustração com o flanelógrafo, notou-se que quanto mais questionados, mais alunos se manifestavam e compreendiam a questão.

No item b) perguntava se a afirmação de César estava correta, ao dizer que ele e Carla comeram a mesma quantidade, nesse momento os alunos que participavam oralmente responderam que sim. No item c) O que podemos dizer em relação a fração da pizza que Carla e César comeram? Poucos alunos se manifestaram dizendo que eles consumiram a mesma quantidade, nesse momento foi possível introduzir aos alunos o conceito de frações equivalentes. Neste dia, observou-se que muitos alunos estavam apenas conectados sem estarem efetivamente assistindo ao aula, pois ao realizar perguntas chamando certos alunos pelo nome obteve-se silêncio como resposta. Esta ruptura do contrato didático ocorreu nas três sessões, vamos discorrer sobre isso no próximo capítulo.

Após terminarem a questão 2, demos continuidade e realizamos a leitura da questão 3, conforme ilustrado na figura 23, nesta atividade os alunos deveriam encontrar outras frações equivalentes através de sobreposição das peças, utilizando o encarte disponível conforme o exemplo dado na questão.

Com o auxílio do flanelógrafo ilustrado nas figuras 24 e 25. Foi possível ilustrar que ao dispor as peças lado a lado ou sobrepondo-as, ambas ocupam a mesma área do disco de frações.

Figura 23 – Questão 3 modelo



03. Que outras frações equivalentes podemos encontrar no encarte da página 3? Escreva as frações equivalentes em seguida recorte, pinte e cole as figuras no espaço indicado, conforme o exemplo abaixo.

a) $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

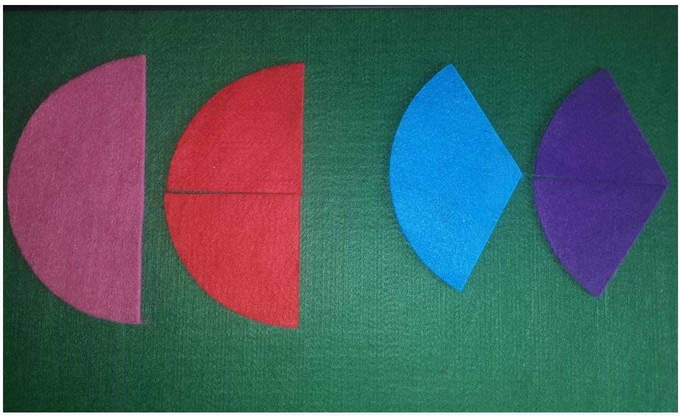
b) ____ = ____

c) ____ = ____

d) ____ = ____

Fonte: Produção do Autor

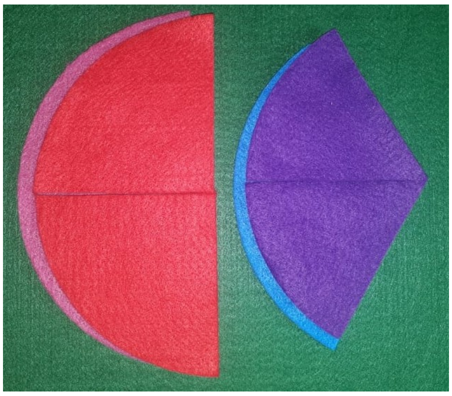
Figura 24 – Flanelógrafo: equivalência



Fonte: Materiais da pesquisa

O primeiro exemplo ilustrado no flanelógrafo foram a representação das frações equivalentes: $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, a pesquisadora questionou se alguém poderia dar um exemplo de uma situação real que envolvesse estas frações, um aluno comentou que comer metade de uma pizza era o mesmo que dividir em quatro partes e comer duas, em seguida outro aluno repetiu o exemplo usando o chocolate. Logo depois, foi ilustrado o segundo exemplo: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, este foi escolhido estrategicamente, pois no encarte do aluno não tem essa opção e gostaríamos que os alunos procurassem frações equivalentes e evitassem reproduzir o exemplo dado,

Figura 25 – Flanelógrafo: equivalência com sobreposição



Fonte: Materiais da pesquisa

diante da pouca interatividade a pesquisadora recortou juntamente com os alunos o encarte do aluno para retomar a explicação e detalhar como deveria ser feito a atividade, aos poucos alguns se manifestaram positivamente alegando que estavam conseguindo realizar o que foi proposto. Novamente os alunos ficaram com a atividade para terminar de tarefa de casa.

Terceira Sessão

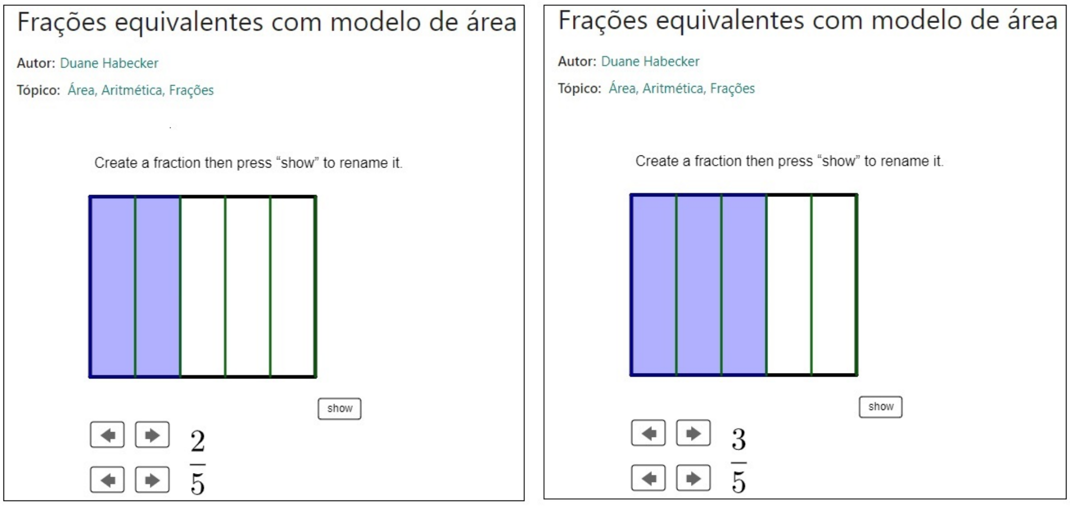
Na 3ª e ultima sessão, 41 alunos estavam presentes, dos quais 18 não participaram da segunda sessão e 4 participavam pela primeira vez, a duração foi também de 30 minutos. A pesquisadora iniciou a aula falando sobre o GeoGebra, um software de matemática que combina conceitos de geometria e álgebra, gratuito e para todos os níveis de ensino.

Closs (2015) em seu artigo "Ensino de frações: Uma proposta com o uso do GeoGebra", sugere o uso do GeoGebra como recursos tecnológicos nas aulas de matemática, especialmente no ensino de frações, segundo ele isso "Pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática, tornando-a uma atividade experimental mais completa, sem, no entanto, prejudicar o desenvolvimento do pensamento".

> Com referência a frações equivalentes, simplificação, adição e subtração de frações, os livros didáticos apresentam figuras estáticas, esquemas e desenhos que os alunos terão de interpretar com o auxílio do professor, porém tais figuras não podem ser manipuladas, o que pode gerar equívocos na interpretação por parte dos alunos (CLOSS, 2015, p. 1).

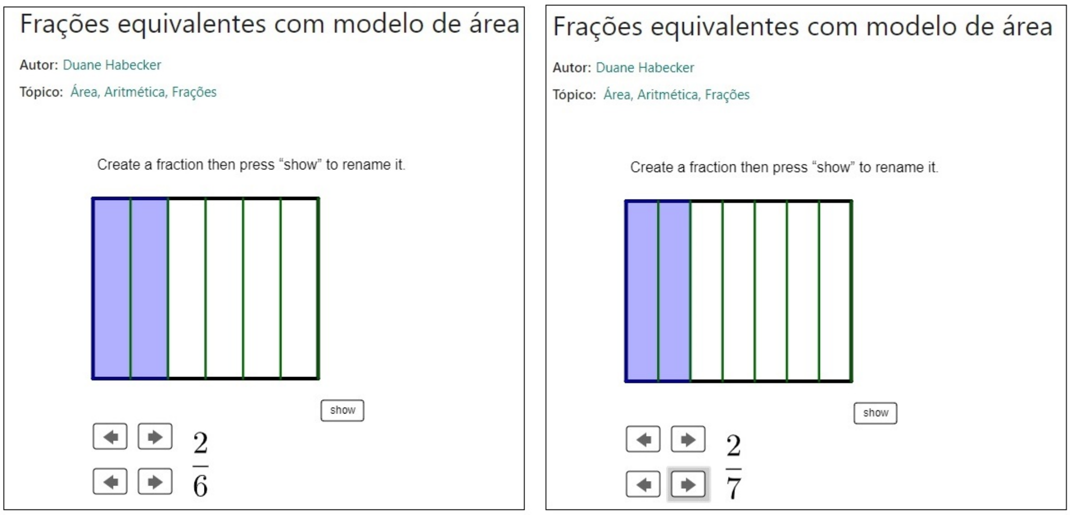
Dessa forma com o link aberto <https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1Iup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs> deu-se início a aplicação deste DE, assim como nas aulas anteriores a tela foi compartilhada durante a sessão, este link estava disponível na apostila e no chat da aula. Algumas representações geométricas foram ilustradas sendo elas: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{2}{7}$, conforme figuras: 26 e 27.

Figura 26 – Exposição de frações no GeoGebra parte 1



Fonte: https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1lup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs

Figura 27 – Exposição de frações no GeoGebra parte 2

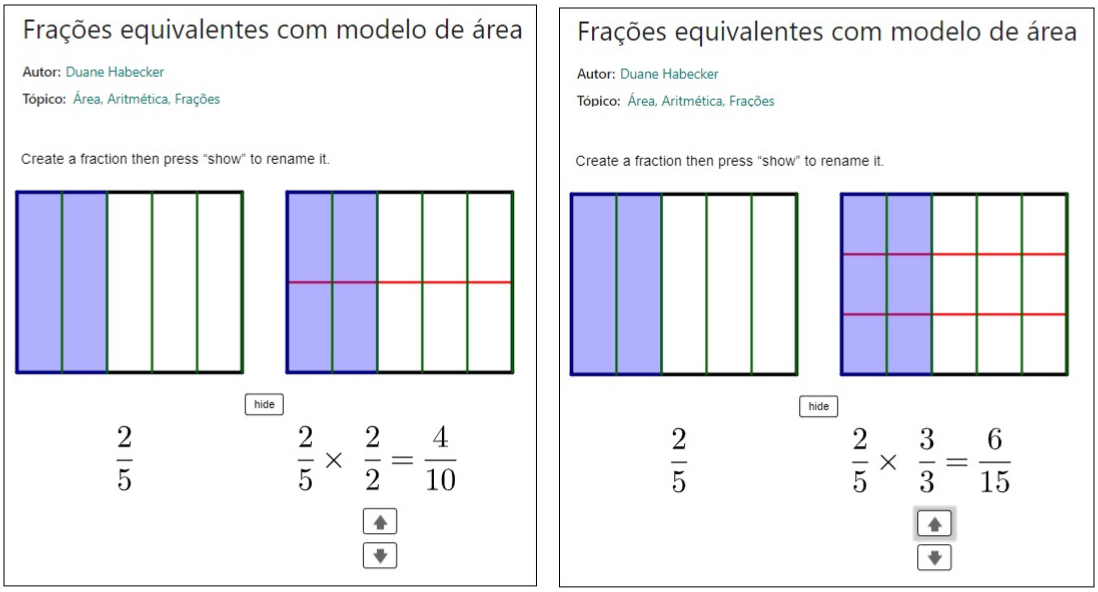


Fonte: https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1lup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs

Discutiu-se a respeito sobre o que acontece quando realiza-se uma mudança no numerador e denominador de uma fração. Surgiram algumas respostas como: o número de partes aumentou, está aumentando o número de quadradinhos pintado. Em seguida a pesquisadora escolheu a fração $\frac{2}{5}$ no GeoGebra, e para obter frações equivalentes, foi realizada a multiplicação do numerador e o denominador da fração escolhida por um mesmo número natural. Como por exemplo $\frac{2}{5} \times \frac{2}{2}$ ou ainda $\frac{2}{5} \times \frac{3}{3}$, ilustrado na figura 28.

Levantou-se novamente a discussão de qual mudança ocorreu na figura, após a pesquisadora insistir para obter resposta, poucos responderam: aumentou os quadradinhos, agora tem mais quadradinhos pintados. A seguir foi solicitado que abrissem o GeoGebra através do link enviado, por meio do computador ou celular. A maioria dos alunos

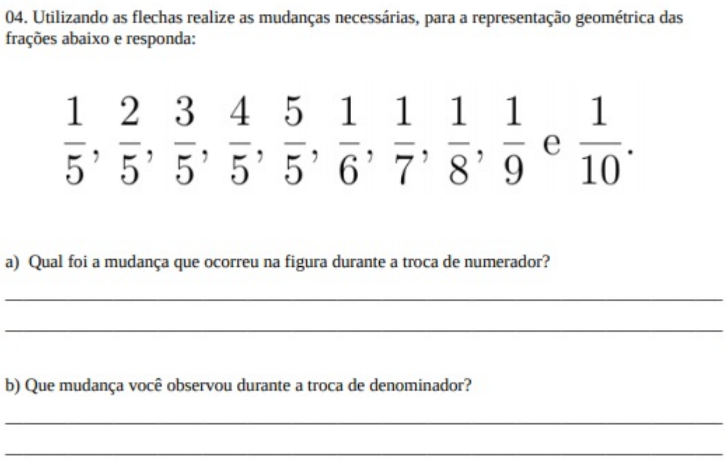
Figura 28 – Exposição de frações equivalentes no GeoGebra



Fonte: https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1Iup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs

aparentemente conseguiram acessar, por ser uma atividade que não exigia muita habilidade os alunos que conseguiram acessar o link acharam fácil a manipulação, alguns tiveram dificuldades e receberam o link no privado pelo aplicativo Whatsapp, em seguida foi realizado a leitura dos exercícios 4, 5 e 6 ilustrado nas figuras: 29, 30 e 31. Conforme solicitado, os alunos deveriam realizar as atividades com o auxílio do GeoGebra e responder os questionamentos em sua língua materna.

Figura 29 – Questão 4 modelo


04. Utilizando as flechas realize as mudanças necessárias, para a representação geométrica das frações abaixo e responda:

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ e } \frac{1}{10}.$$

a) Qual foi a mudança que ocorreu na figura durante a troca de numerador?

____

____

b) Que mudança você observou durante a troca de denominador?

____

____

Fonte: Produção do Autor

Houve pouca manifestação ao serem questionados se estavam entendendo, foi realizado novamente todo o passo a passo com os alunos, no geral nesse dia eles estavam menos participativos que nos dias anteriores.

Figura 30 – Questão 5 modelo

05. Utilizando as flechas multiplique a fração escolhida por um mesmo número natural por exemplo:

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \text{ e } \frac{5}{5}.$$

a) Qual mudança você observou que ocorreu durante a multiplicação?

____

____

Fonte: Produção do Autor

Figura 31 – Questão 6 modelo

06. De acordo com o que estudamos, como você responderia a pergunta: O que são frações equivalentes?

____

____

____

____

Fonte: Produção do Autor

Ao finalizar as três sessões foi aplicado um questionário do Google Forms, com questões de acordo com o conteúdo estudado, na qual constituíram os instrumentos para a coleta de dados a fim de observar se houve aprendizado. O link do questionário foi enviado pelo chat e novamente pelo aplicativo Whatsapp, para os alunos que estavam com dificuldades de acesso.

Os entraves referentes a aplicação desta SD, por serem muitos, escolhemos separar uma seção do capítulo seis para essa abordagem de maneira detalhada.

Ao final da aplicação da SD, os alunos foram enviando as atividades pelo aplicativo Whatsapp, mesmo após serem cobrados diversas vezes nas aulas seguintes e individualmente, não recebemos as atividades de todos os participantes, como já vinha sendo de costume neste momento de aulas remotas.

5.4 8ª Etapa - Análise *a Posteriori* e Validação

Nessa etapa apresentamos nossa análise *a posteriori*, referente as práticas dos alunos da nossa Instituição de Aplicação, que é a mesma Instituição de Referência, e como já falamos na etapa anterior com a participação total de 53 alunos, consideraremos esse número para representar 100% da turma nas análises a seguir, dos quais apenas 24 entregaram as atividades, novamente ressaltamos outra quebra de contrato didático por parte dos alunos.

Iniciaremos com a análise dos DE aplicados, analisando as respostas enviada pelos alunos das atividades desenvolvidas em cada uma das sessões, em seguida uma análise de cada uma das questões respondidas pelo Google Forms, tomamos o cuidamos em preservar a identidade de cada aluno e, por isso, todas as atividades e avaliações foram identificados pela letra A (aluno) e um número. Dessa forma os 24 alunos que entregaram as atividades, foram identificados de A1 a A24.

Os alunos realizaram as atividades individualmente com o auxílio da professora durante aulas, não é possível dizer se tiveram auxílio de algum responsável, alguns mandaram mensagens por meio do aplicativo Whatsapp com dúvidas e tiveram suas dúvidas respondidas. Já sabemos que existe um obstáculo epistemológico no ensino dos racionais, os alunos de certa forma são resistentes ao novo, os equívocos e confusões fazem parte da construção deste saber. Faremos então nesse momento uma análise quantitativa, porém levando em consideração os aspectos qualitativos, indicaremos por C_k, com k indexador natural, os critérios para análise de cada questão.

Diante disso separamos em 3 partes esta subseção para melhor entendimento de nossa análise, sendo elas: DE com Material Concreto Manipulável, DE no GeoGebra e Questionário.

5.4.1 DE com Material Concreto Manipulável

Na análise *a posteriori*, referente aos DE com materiais concretos manipuláveis, referente ao nosso objeto matemático de escolhido, observaremos a participação e as diferentes respostas enviadas, avaliaremos as duas primeiras sessões levando em consideração as três primeiras questões da apostila que foram entregues pelos alunos, que fazem parte deste DE.

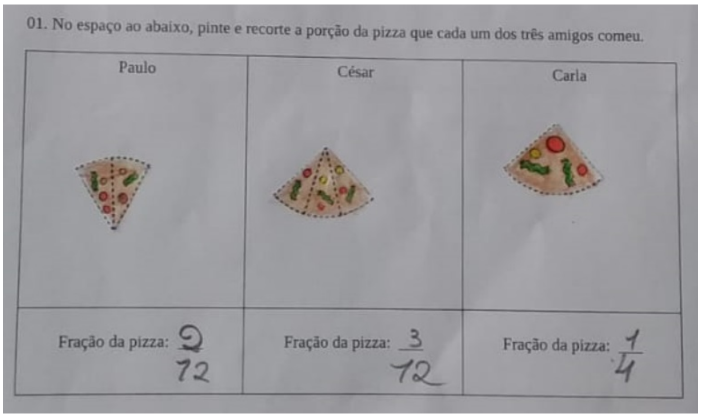
1º DE para análise de práticas dos alunos do 6º ano, sobre noção de frações equivalentes, com a utilização de modelos concretos manipuláveis.

Conforme apresentamos anteriormente, neste DE temos a primeira sessão dividida em três tarefas T_1, T_2 e T_3, totalizando quatro subtarefas, sendo a última com o seguinte enunciado: propor aos alunos responderem a questão 1, representando as frações já demonstradas, utilizando o encarte do aluno.

Nesta 1ª sessão 47 alunos participaram, o que representa aproximadamente 88% de presença, foi o dia que teve o maior número de participantes, destes apenas 21 alunos enviaram a atividade e outros 3 que não participaram de nenhuma sessão também enviaram. O envio foi por fotos por meio do aplicativo Whatsapp, por esse motivo, as imagem ilustradas a seguir não estão alinhadas, algumas atividades foram enviadas incompletas, com a imagem desfocada ou ilegível.

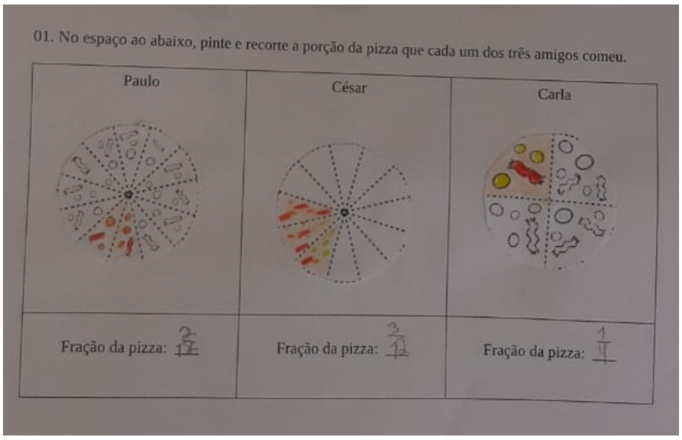
A questão 1 pedia aos alunos para pintar e recortar a porção da pizza que cada um dos três amigos comeu, ou seja, esse item refere-se a como representar uma fração indicada através de uma figura com partes pintadas, os alunos A12 e A22 são exemplos de respostas corretas, conforme ilustra as figuras figuras 32 e 33.

Figura 32 – Questão 1 - Protocolo do aluno A12



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 33 – Questão 1 - Protocolo do aluno A22

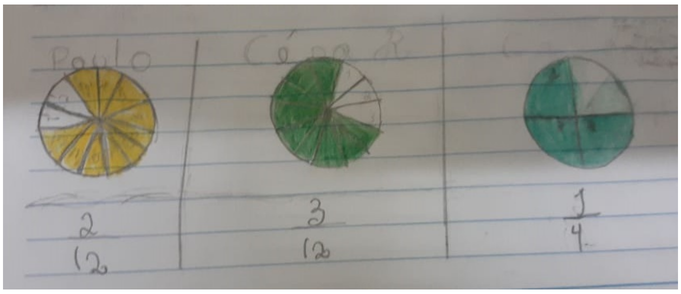


Fonte: Acervo da Pesquisa

Das respostas incorretas observamos uma confusão ao representar o numerador e o denominador da fração. O aluno A23 embora escreva o denominador de maneira correta, representou o numerador da fração como sendo a parte em branco de sua representação, conforme figura 34, nesta situação é importante destacar que é um aluno que não participou de nenhuma das sessões e pode ter cometido um equívoco ao pensar que a parte consumida da pizza é a parte em branco da figura, o que nos leva a refletir e tomar cuidado com a ideia do certo e errado.

Respostas como a citada também foi encontradas por Barreto (2017) em sua dissertação "Análise de erros cometidos por alunos do 6º Ano na resolução de problemas envolvendo operações com frações".

Figura 34 – Questão 1 - Protocolo do aluno A23



Fonte: Acervo da Pesquisa

> Notamos que 34,5% dos alunos pesquisados não sabem representar uma fração indicada por uma figura com partes pintadas. Esses alunos se confundem ao representar o numerador e o denominador da fração (BARRETO, 2017, p. 45).

Percebemos que os alunos, no geral, sabem que uma fração é representada com uma parte pintada e um todo, porém alguns não distinguem corretamente o numerador e denominador.

No quadro 18, temos os critérios avaliados nesta seção, os usaremos para a análise quantitativa a seguir.

Quadro 18 – Sessão I - Critérios para análise da questão 1

C_1	Os alunos conseguem representar corretamente as três frações, utilizando o encarte do aluno ou representando através de desenhos.
C_2	Os alunos conseguem representar corretamente uma ou duas das frações, utilizando o encarte do aluno ou representando através de desenhos.
C_3	Os alunos não conseguem representar corretamente nenhuma das três frações, utilizando o encarte do aluno ou representando através de desenhos.

Fonte: Dados da Pesquisa

Na tabela 2 temos uma análise das atividades recebidas, para melhor compreensão dos dados utilizaremos porcentagem, arredondando para o inteiro mais próximo. A coluna em destaque de vermelho nestas e nas demais tabelas, é o critério na qual os alunos concluem com exito a questão proposta. De acordo com a tabela podemos concluir que a maior parte dos alunos sabem representar uma fração através de uma figura, conforme prevíamos na análise *a priori*.

Tabela 2 – Sessão I - Dados relativos as práticas dos alunos na questão 1

Critérios	C_1	C_2	C_3
Número de alunos	17	1	6
Porcentagem	71%	4%	25%

Fonte: Dados da Pesquisa

Confrontando os dados colhidos com a análise *a priori* temos que os objetivos foram atingidos, em sua maioria os alunos foram capazes de representar corretamente as três frações, alcançando o resultado esperado para essa sessão.

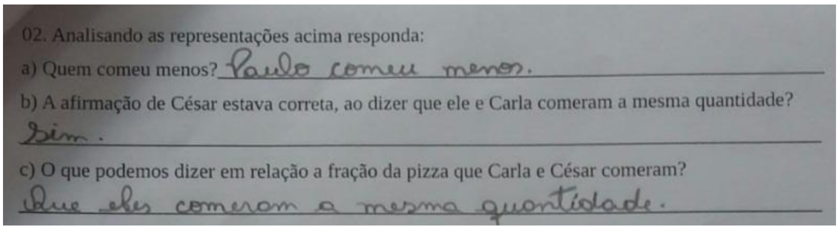
2º DE para análise de práticas dos alunos do 6º ano, sobre encontrar frações equivalentes, com a utilização de modelos concretos manipuláveis.

Conforme apresentado anteriormente, esse DE representa a segunda sessão dividida em tarefas T_1, T_2 e T_3, totalizando cinco subtarefas, sendo T_2 e T_3 com os seguintes enunciados: responder as três perguntas relacionadas a situação problema inicial e fazer uso do encarte do aluno para representar frações equivalentes.

Na segunda sessão 24 alunos estavam presentes dos quais 2 não haviam participado da sessão anterior, o que representa cerca de 55% de presença, destes, apenas 11 enviaram a atividade e outros 13 que não participaram neste dia também enviaram, estas rupturas no contrato didático prejudicaram nossa análise.

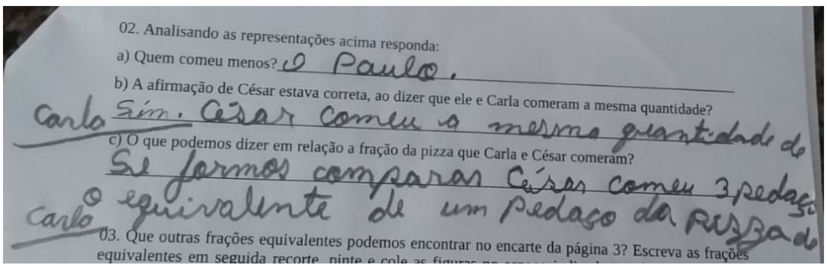
Na questão 2 os alunos deveriam responder de acordo com a ilustração que fizeram na questão 1, os itens são: quem comeu menos? A afirmação de César estava correta, ao dizer que ele e Carla comeram a mesma quantidade? O que podemos dizer em relação a fração da pizza que Carla e César comeram? Os alunos A04 e A12 são exemplos de respostas corretas da atividade proposta, conforme as figuras 35 e 36.

Figura 35 – Questão 2 - Protocolo do aluno A04


02. Analisando as representações acima responda:
a) Quem comeu menos? Paulo comeu menos.
b) A afirmação de César estava correta, ao dizer que ele e Carla comeram a mesma quantidade?
Sim.
c) O que podemos dizer em relação a fração da pizza que Carla e César comeram?
Que eles comeram a mesma quantidade.

Fonte: Acervo da Pesquisa

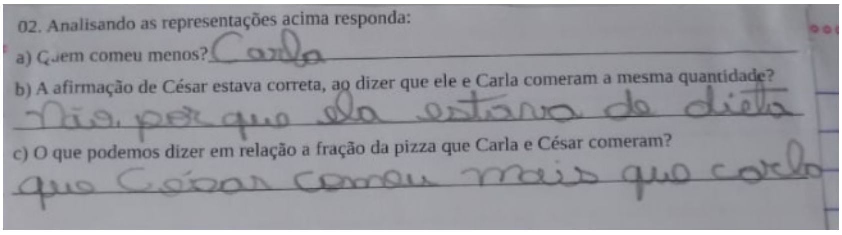
Figura 36 – Questão 2 - Protocolo do aluno A12


02. Analisando as representações acima responda:
a) Quem comeu menos? O Paulo.
b) A afirmação de César estava correta, ao dizer que ele e Carla comeram a mesma quantidade?
Carla Sim. César comeu a mesma quantidade de
c) O que podemos dizer em relação a fração da pizza que Carla e César comeram?
Se formos comparar César comeu 3 pedaços o equivalente de um pedaço da pizza de Carla
03. Que outras frações equivalentes podemos encontrar no encarte da página 3? Escreva as frações equivalentes em seguida recorte, pinte e cole as figuras

Fonte: Acervo da Pesquisa

O aluno A11 conforme ilustrado na figura 37, respondeu incorretamente os três itens, este aluno em específico representou de maneira incorreta a questão anterior ao tentar desenhar as três frações sem utilizar o encarte disponível, então, ao ilustrar as frações, dividiu as fatias de cada pizza em tamanhos diferentes, logo ao comparar as fatias interpretou erroneamente.

Figura 37 – Questão 2 - Protocolo do aluno A11


02. Analisando as representações acima responda:
a) Quem comeu menos? Carla
b) A afirmação de César estava correta, ao dizer que ele e Carla comeram a mesma quantidade?
Não, porque ela estava de dieta
c) O que podemos dizer em relação a fração da pizza que Carla e César comeram?
que César comeu mais que carla

Fonte: Acervo da Pesquisa

Teve também casos de alunos que responderam incorretamente, mesmo representando as frações de maneira correta na questão 1, uma das hipóteses é que o aluno não tenha interpretado as perguntas ou até mesmo as ilustrações corretamente.

No quadro 19 temos os critérios avaliados na questão 2, os usaremos para a análise quantitativa a seguir.

Quadro 19 – Sessão II - Critérios para análise da questão 2

C_1	Os alunos respondem corretamente os três itens.
C_2	Os alunos conseguem responder corretamente os dois primeiros itens, comparando corretamente as frações ilustradas, porém sem conseguir concluir que os amigos César e Carla comeram a mesma quantidade.
C_3	Os alunos não conseguem responder corretamente nenhum dos três itens.

Fonte: Dados da Pesquisa

Na tabela 3 temos a análise dos critérios, achamos necessário uma segunda tabela com um levantamento da porcentagem de alunos que estava presente em cada sessão e que atenderam cada um dos critérios citados.

Tabela 3 – Sessão II - Dados relativos as práticas dos alunos na questão 2

Critérios	**C_1**	**C_2**	**C_3**
Número de alunos	10	4	10
Porcentagem	42%	16%	42%

Fonte: Dados da Pesquisa

Comparando os dados das tabelas 3 e 4, foi possível observar que dos alunos que responderam corretamente a questão 2, todos participaram da primeira sessão, e responderam corretamente a questão 1, possivelmente sendo este o principal motivo para se ter exito na questão citada.

Dos alunos que atendem o critério 3, temos que, mais da metade deles estavam presentes na sessão I, que foi quando realizamos a primeira atividade, porém destes alunos,

Tabela 4 – Frequência dos alunos em cada sessão de acordo com os critérios avaliados na questão 2

Critérios	C_1	C_2	C_3
Participaram da sessão I	100%	100%	70%
Participaram da sessão II	50%	75%	30%

Fonte: Dados da Pesquisa

20% apenas responderam corretamente a questão 1, logo se estes alunos não conseguiram representar com o encarte do aluno as frações que cada um consumiu, não espera-se que respondam corretamente a questão 2.

Sendo assim, concluímos que muitos alunos, embora tenham visualizado no flanelógrafo como deveria ser representado cada uma das frações, não obtiveram exito ao resolver a situação problema. Não é possível saber se estavam presentes de fato ou não, já que como relatamos as câmeras permanecem desligadas. Quando este conteúdo é trabalhado nas aulas presenciais, também temos parte dos alunos com dificuldades de ilustrar uma fração, bem como interpretar textos simples, em nossa análise *a priori* esperávamos um número maior de acertos na realização desta atividade.

Na terceira questão os alunos deveriam encontrar frações equivalentes a partir de um exemplo dado, pedia para pintar e recortar as fatias de pizza que representasse a mesma quantidade, ou seja, nesta questão eles deveriam utilizar a sobreposição para encontrar as equivalências. Temos a ilustração de uma resposta correta, dada pelo aluno A7 conforme figura 38.

O aluno A10 teve dificuldades de representar as frações na sua forma geométrica, representando o numerador de maneira correta porém a figura dividida em um número de partes qualquer, logo não conseguiu comparar frações de maneira correta conforme ilustrado na figura 39.

No quadro 20 temos os critérios avaliados na questão 3, que usaremos para uma análise quantitativa mais abaixo.

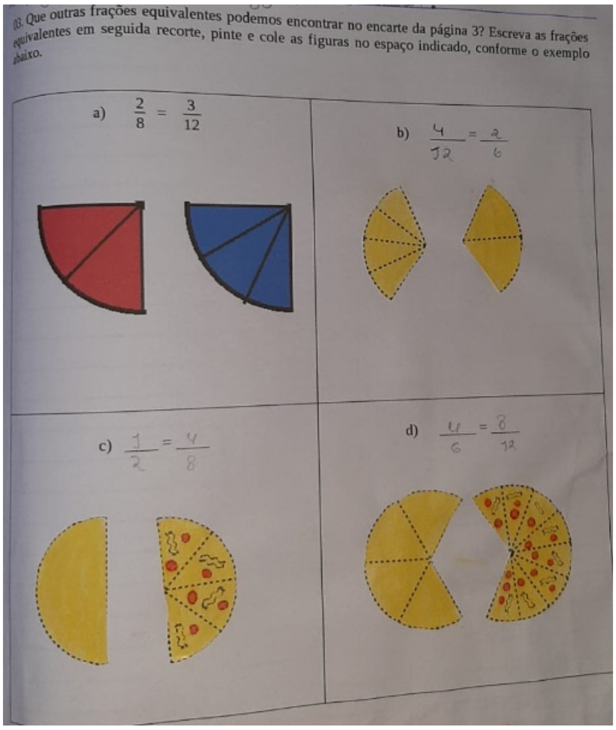
Quadro 20 – Sessão II - Critérios para análise da questão 3

C_1	Os alunos respondem corretamente os três item.
C_2	Os alunos conseguem responder corretamente um ou dois itens, representando corretamente as frações equivalentes destes.
C_3	Os alunos não conseguem representar duas frações equivalentes, mesmo com o auxílio do encarte do aluno.

Fonte: Dados da Pesquisa

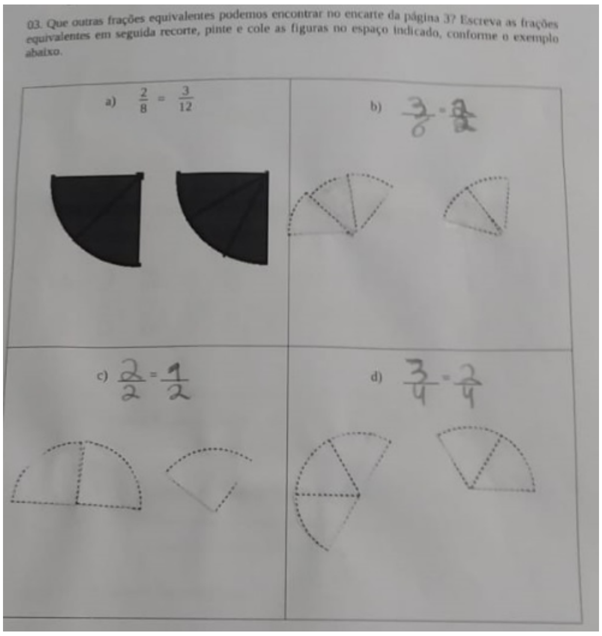
Na tabela 5 temos a análise dos critérios, novamente utilizaremos uma segunda tabela, para realizar um comparativo dos alunos que atendem cada critério de acordo com

Figura 38 – Questão 3 - Protocolo do aluno A07



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 39 – Questão 3 - Protocolo do aluno A10



Fonte: Acervo da Pesquisa

a participação em cada uma das sessões.

Comparando as tabelas 5 e 6, destacamos que embora a maioria dos alunos que entregaram esta atividade tenham participado da sessão I e cerca de metade deles da sessão II, poucos conseguiram encontrar frações equivalentes. Dos que responderam corretamente

Tabela 5 – Sessão II - Dados relativos as práticas dos alunos na questão 3

Critérios	C_1	C_2	C_3
Número de alunos	7	8	9
Porcentagem	29%	34%	37%

Fonte: Dados da Pesquisa

Tabela 6 – Frequência dos alunos em cada sessão de acordo com os critérios avaliados na questão 3

Critérios	C_1	C_2	C_3
Participaram da sessão I	100%	100%	67%
Participaram da sessão II	42%	50%	45%

Fonte: Dados da Pesquisa

os três itens apenas um deles não havia respondido corretamente as duas questões anteriores.

Dos alunos que atendem o critério 3, destacamos que mais da metade entregou esta atividade em branco e menos da metade deles havia respondido corretamente as questões anteriores. Observamos também que estes alunos tem uma porcentagem baixa de participação nas aulas, este talvez seja um dos motivos pelo qual não conseguiram realizar esta atividade.

Dos alunos que atentem o critério 2, temos que mais da metade responderam corretamente 2 itens enquanto o restante apenas 1. Destes alunos, a maioria deles utilizaram o mesmo exemplo que utilizei com o auxílio do flanelógrafo, então não podemos considerar que ter respondido corretamente significa que sabem identificar frações equivalentes a partir de sua representação geométrica.

Confrontando os dados colhidos com a análise *a priori* temos que os objetivos não foram completamente alcançados, boa parte dos alunos tiveram dificuldades em ilustrar frações equivalentes e responder corretamente os questionamentos da situação problema proposta não alcançando o resultado esperado para essa sessão.

Por fim, percebe-se após análise, que alguns alunos que participaram desta sessão não compreendem o conceito de frações, logo não conseguem entender a relação de equivalência, porém durante as aulas remotas não foi possível perceber essa dificuldade dos alunos durante a aplicação da SD, isso fez com que a pesquisadora avançasse nas atividades propostas sem a intervenção necessária, portanto, muitos alunos não conseguiram construir o saber matemático de referência do nosso estudo, e observaremos nas próximas questões que o número de alunos que responderam incorretamente ou deixaram de enviar as próximas atividades aumentou.

5.4.2 DE no GeoGebra

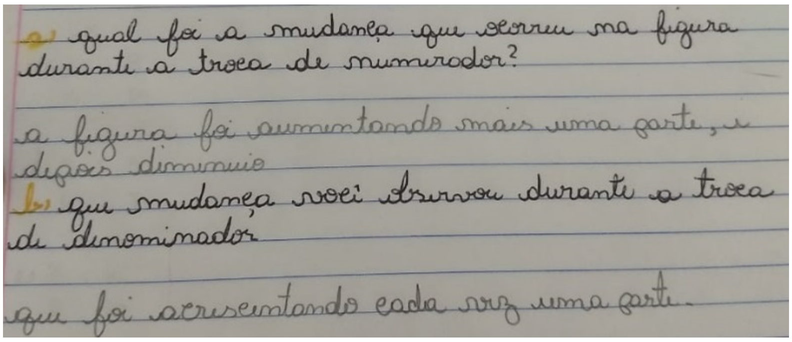
3º DE para análise de práticas dos alunos do 6º ano, sobre conceitos relacionados ao estudo de frações equivalentes.

Conforme já apresentado, esse DE que envolve a utilização do GeoGebra, representa a terceira sessão dividida em tarefas T_1, T_2, T_3 e T_4 totalizando oito subtarefas, que tem como proposta a realização das questões 4, 5 e 6 da apostila.

Nesta última sessão 41 alunos estavam presentes, o que representa cerca de 77% de presença, destes, apenas 19 enviaram as atividades e outros 5 que não participaram neste dia também enviaram.

Na questão 4 após aprenderem como fazer uso do ambiente computacional GeoGebra, por ser uma atividade que não exigia muita habilidade por parte dos alunos, uma breve explicação foi suficiente. Conforme descrevemos na etapa 5, para a realização da atividade era preciso utilizar as flechinhas e fazer as seguintes alterações da representação geométrica no GeoGebra: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, em seguida responder qual foi a mudança que ocorreu na figura durante a troca de numerador e denominador. Já havía sido discutido minutos antes da realização desta atividade a resposta de cada item, bastava eles escreverem em sua língua materna. Temos exemplos de alunos que responderam corretamente como o A09 e A08, conforme as figuras 40 e 41.

Figura 40 – Questão 4 - Protocolo do aluno A09


a) qual foi a mudança que ocorreu na figura durante a troca de numerador?

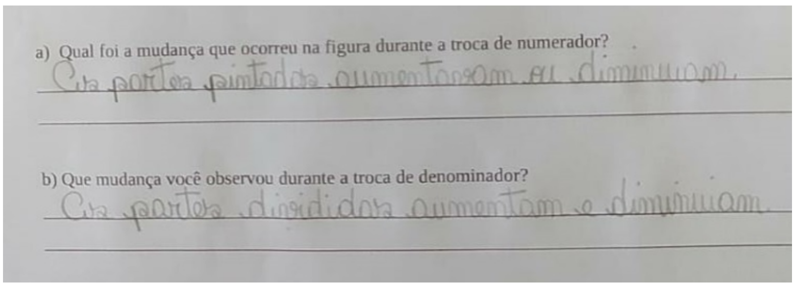
a figura foi aumentando mais uma parte, e depois diminuio

b) que mudança você observou durante a troca de denominador

que foi acrescentando cada vez uma parte.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 41 – Questão 4 - Protocolo do aluno A08


a) Qual foi a mudança que ocorreu na figura durante a troca de numerador?

As partes pintadas aumentaram ou diminuiam.

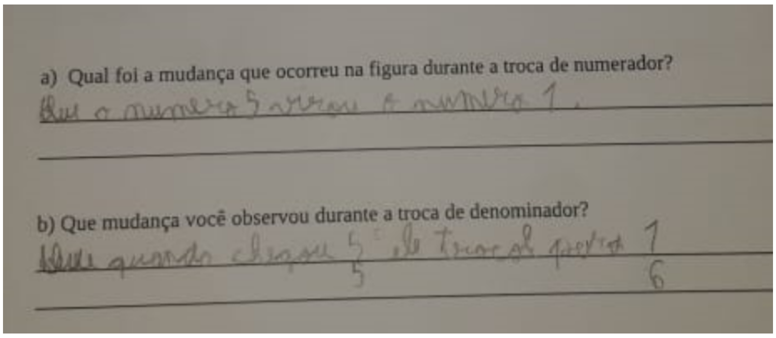
b) Que mudança você observou durante a troca de denominador?

As partes divididas aumentam e diminuiam.

Fonte: Acervo da Pesquisa

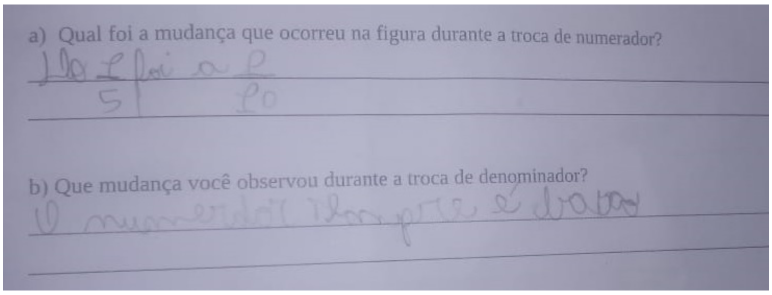
Das respostas incorretas, destacamos as enviadas pelos alunos A15, A18 e A11 conforme ilustra as figuras 42, 43 e 44. Destes, temos que um deles participou das três sessões enquanto os outros dois participaram da primeira e da última sessão. Observa-se que eles não compreenderam o conceito de frações, o fato da frequência escolar estar diretamente relacionada a entrega das atividades, este pode ser um dos motivos que levaram os alunos a responderem de qualquer jeito, não é a primeira vez que isso ocorre, novamente a ruptura do contrato didático se destaca nesta e nas demais atividades desta sessão, abordaremos sobre isso no próximo capítulo.

Figura 42 – Questão 4 - Protocolo do aluno A15



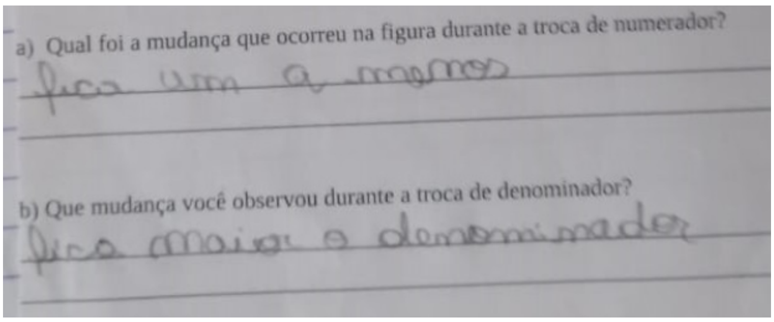
Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 43 – Questão 4 - Protocolo do aluno A18



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 44 – Questão 4 - Protocolo do aluno A11



Fonte: Acervo da Pesquisa

No quadro 21 ,temos os critérios avaliados na questão 4, os usaremos para a análise quantitativa mais adiante.

Quadro 21 – Sessão III - Critérios para análise da questão 4

C_1	Os alunos respondem corretamente os dois itens.
C_2	Os alunos conseguem responder corretamente um dos itens.
C_3	Os alunos não conseguem responder corretamente nenhum dos dois itens.

Fonte: Dados da Pesquisa

Na tabela 7 temos a análise dos critérios. Assim como na sessão anterior, achamos necessário uma segunda tabela com um levantamento da porcentagem de alunos que estava presente em cada uma das sessões de acordo com número de alunos que representa cada um dos critérios citados.

Tabela 7 – Sessão III - Dados relativos as práticas dos alunos na questão 4

Critérios	**C_1**	**C_2**	**C_3**
Número de alunos	3	0	21
Porcentagem	12%	0%	88%

Fonte: Dados da Pesquisa

Tabela 8 – Frequência dos alunos em cada sessão de acordo com os critérios avaliados na questão 4

Critérios	**C_1**	**C_2**	**C_3**
Participaram da sessão I	100%	0%	85%
Participaram da sessão II	66%	0%	42%
Participaram da sessão III	100%	0%	76%

Fonte: Dados da Pesquisa

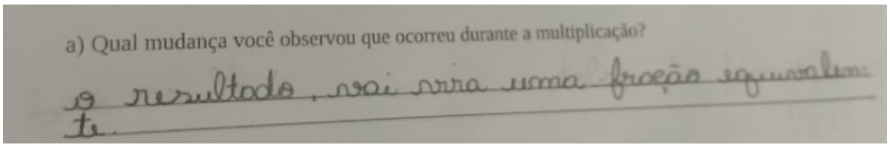
Comparando os dados da tabela 7 e da tabela 8, podemos observar que pouquíssimos alunos responderam corretamente esta questão, inclusive dos alunos que não conseguiram responder a questão, a maioria estava presente em pelo menos duas sessões. Nesta questão as atividades enviadas vieram quase todas em branco ou com respostas aleatórias.

Após análise, identificamos que muitos não compreenderam a atividade, ou não participaram efetivamente da proposta, foram questionados algumas vezes durante a aplicação desta sessão se compreenderam e a resposta foi sim, porém ao receber as atividades observamos o contrário, entretanto, durante a sessão não houve questionamentos.

Na questão 5 ainda com o auxílio do ambiente computacional GeoGebra, os alunos deveriam utilizando as flechas multiplicar a fração escolhida por um mesmo número natural no numerador e no denominador, por exemplo: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$ e em seguida responder qual foi a mudança que ocorreu na figura durante a multiplicação. Temos exemplos de alunos que responderam corretamente como A09 e A20, conforme figuras 45 e 46.

Os alunos A10 e A15 nas figuras 47 e 48 não compreenderam ou não realizaram a atividade no GeoGebra e responderam incorretamente, lembrando que conforme relatado

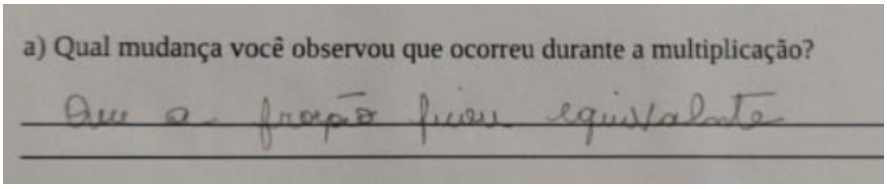
Figura 45 – Questão 5 - Protocolo do aluno A09


a) Qual mudança você observou que ocorreu durante a multiplicação?

o resultado vai sera uma fração equivalente.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 46 – Questão 5 - Protocolo do aluno A20

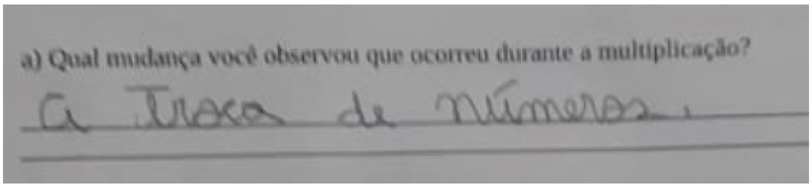

a) Qual mudança você observou que ocorreu durante a multiplicação?

Que a fração ficou equivalente

Fonte: Acervo da Pesquisa

na etapa 5, a atividade foi realizada no Geogebra primeiramente em tela compartilhada com os alunos, e foi discutido a resposta desta questão, bastava apenas eles escreverem em sua língua materna.

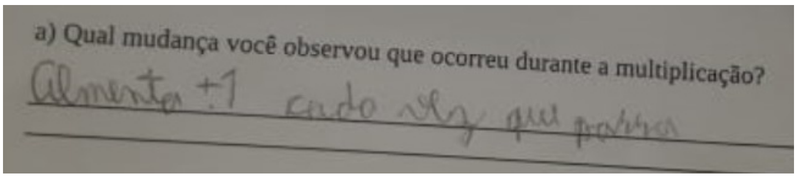
Figura 47 – Questão 5 - Protocolo do aluno A10


a) Qual mudança você observou que ocorreu durante a multiplicação?

A Troca de números.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 48 – Questão 5 - Protocolo do aluno A15


a) Qual mudança você observou que ocorreu durante a multiplicação?

Aumenta +1 cada vez que passa

Fonte: Acervo da Pesquisa

No quadro 22, temos os critérios avaliados na questão 5, os usaremos para a análise quantitativa mais adiante.

Quadro 22 – Sessão III - Critérios para análise da questão 5

C_1	Os alunos conseguem identificar que a nova fração continua representando a mesma quantidade.
C_2	Os alunos não conseguem responder corretamente a questão.

Fonte: Dados da Pesquisa

Na tabela 9 temos a análise dos critérios desta questão, faremos novamente uma tabela com o levantamento dos alunos presentes em cada sessão.

Tabela 9 – Sessão III - Dados relativos as práticas dos alunos na questão 5

Critérios	C_1	C_2
Número de alunos	5	19
Porcentagem	21%	79%

Fonte: Dados da Pesquisa

Tabela 10 – Frequência dos alunos em cada sessão de acordo com os critérios avaliados na questão 5

Critérios	C_1	C_2
Participaram da sessão I	100%	78%
Participaram da sessão II	60%	42%
Participaram da sessão III	80%	78%

Fonte: Dados da Pesquisa

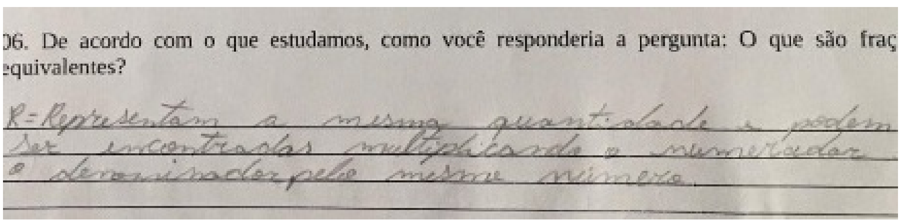
Comparando os dados das tabelas 9 e 10, observamos que os alunos que atendem o critério 2, participaram da maioria das sessões, não sendo este o motivo pelo qual não obtiveram sucesso nesta questão, destes alunos, mais da metade não enviaram a resposta desta questão ou deixaram em branco, das respostas incorretas a maioria escreveu de maneira aleatória, escrevendo números ou frases sem sentido.

Concluímos, que a maioria dos alunos não devem ter realizado a atividade no GeoGebra conforme foi proposto, além disso, é provável que não estavam efetivamente presentes na aula, visto que a resposta da questão foi dada de maneira oral no momento da apresentação da questão.

Na questão 6, a última da nossa sequência didática, os alunos deveriam responder em sua língua materna o que são frações equivalentes.

Os alunos A01, A08 e A21 responderam de maneira correta, cada um com suas palavras, conforme ilustrado nas figuras: 49, 50 e 51.

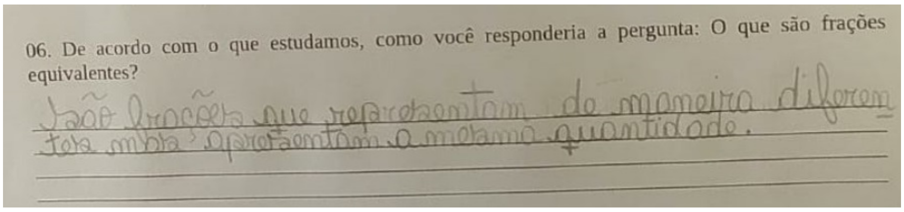
Figura 49 – Questão 6 - Protocolo do aluno A01


)6. De acordo com o que estudamos, como você responderia a pergunta: O que são fraç
equivalentes?

R= Representam a mesma quantidade e podem ser encontradas multiplicando o numerador e denominador pelo mesmo número.

Fonte: Acervo da Pesquisa

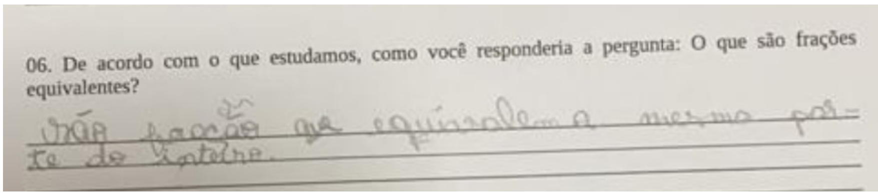
Figura 50 – Questão 6 - Protocolo do aluno A08


06. De acordo com o que estudamos, como você responderia a pergunta: O que são frações equivalentes?

São frações que representam de maneira diferente mas representam a mesma quantidade.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 51 – Questão 6 - Protocolo do aluno A21

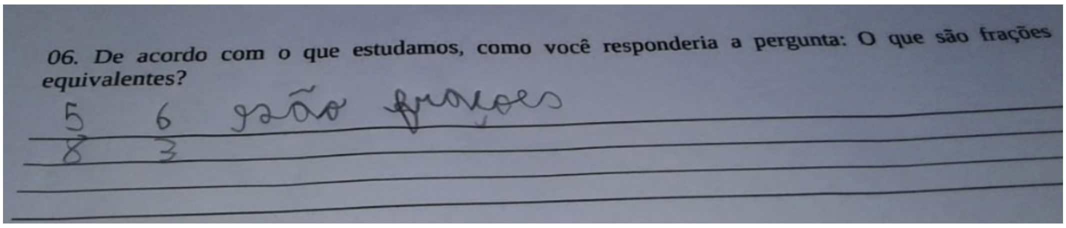

06. De acordo com o que estudamos, como você responderia a pergunta: O que são frações equivalentes?

São frações que equivalem a mesma parte do inteiro.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Das respostas incorretas, novamente foram respostas sem sentido e aleatórias, conforme ilustra a figura 52, resposta dada pelo aluno A06. A maioria dos alunos entregaram essa questão em branco ou não enviaram.

Figura 52 – Questão 6 - Protocolo do aluno A06


06. De acordo com o que estudamos, como você responderia a pergunta: O que são frações equivalentes?

$\frac{5}{8}$ $\frac{6}{3}$ são frações

Fonte: Acervo da Pesquisa

No quadro 23, temos os critérios avaliados na questão 6, estes critérios serão usados para análise quantitativa a seguir.

Quadro 23 – Sessão III - Critérios para análise da questão 6

C_1	Os alunos conseguem definir com duas palavras o que são frações equivalentes.
C_2	Os alunos não conseguem responder corretamente a questão.

Fonte: Dados da Pesquisa

Na tabela 11 temos a análise dos critérios desta questão, faremos novamente uma tabela com o levantamento dos alunos presentes em cada sessão.

Comparando os dados das tabelas 11 e 12, podemos observar que tanto os alunos que responderam corretamente ou incorretamente esta questão, assistiram boa parte das aulas, logo este não é o principal motivo de apenas 37% dos alunos conseguirem

Tabela 11 – Sessão III - Dados relativos as práticas dos alunos na questão 6

Critérios	C_1	C_2
Número de alunos	9	15
Porcentagem	37%	62%

Fonte: Dados da Pesquisa

Tabela 12 – Frequência dos alunos em cada sessão de acordo com os critérios avaliados na questão 6

Critérios	C_1	C_2
Participaram da sessão I	100%	80%
Participaram da sessão II	56%	40%
Participaram da sessão III	88%	78%

Fonte: Dados da Pesquisa

definir frações equivalentes, novamente ressaltamos a hipótese dos alunos estarem apenas conectados na plataforma, sem estarem efetivamente presentes na aula.

Confrontando os dados colhidos com a análise *a priori*, temos que os objetivo de oportunizar aos alunos visualizar a representação geométrica de algumas frações, bem como de parte de suas frações equivalentes foi alcançado, embora não atingimos o objetivo da construção deste conhecimento com o auxílio do GeoGebra como esperávamos, o resultado esperado para esta sessão não foi alcançado já que poucos tiveram exito na realização das atividades propostas.

5.4.3 Questionário

Conforme já relatado na Etapa 5, após finalizarmos as 3 sessões, os alunos receberam um link com um questionário no Google Forms, com questões relacionadas aos conteúdos trabalhados.

Com as informações recolhidas do questionário, fizemos a análise dos erros cometidos durante a resolução das questões pelos alunos, essa análise auxilia o professor a estudar estratégias, para tentar sanar as dificuldades apresentadas pelos estudantes que geraram tais erros.

Segundo Brousseau, Brousseau e Warfield (2013) o objetivo de avaliar os alunos é prever se eles são capazes, juntos ou individualmente, de assumir o resto do currículo.

Dos 53 que participaram dessa pesquisa apenas 29 responderam, 4 alunos enviaram o questionário mais de uma vez na tentativa de mudar o resultado obtido, foi considerada para análise apenas a primeira resposta enviada.

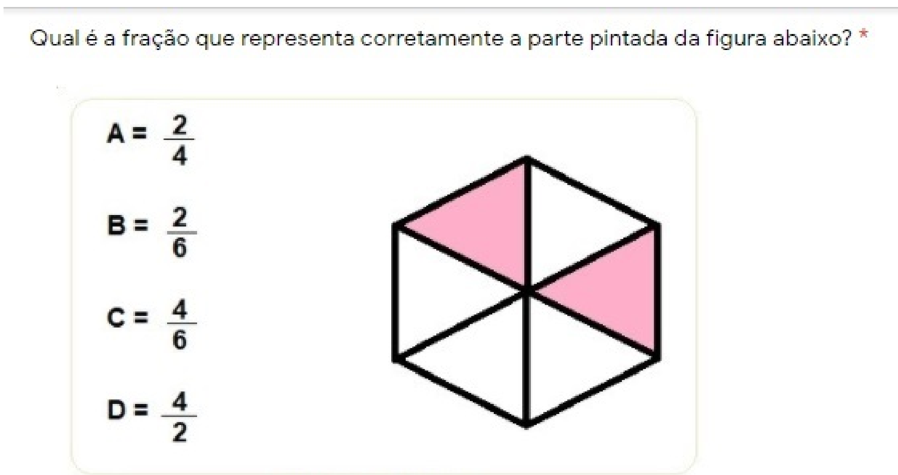
Dos alunos que responderam o questionário, apenas 15 deles enviaram as atividades propostas durante as aulas, sendo que 40% deles não participaram da sessão II e 6% não participaram das sessões II e III, e por fim 54% participaram de todas as sessões.

Os outros 14 alunos que responderam o questionário mas não enviaram as atividades da SD, temos que 50% deles não participaram de uma das três sessões, e a outra metade dos alunos participaram de todas as sessões, embora não sabemos se estavam efetivamente presentes na aula.

Primeira questão

O questionário disponível no link <https://forms.gle/PnrChsTpW4Tdtmjn7> é composto de cinco questões de múltipla escolha, na figura 53 está a primeira questão, cujo o objetivo era saber se todos os alunos reconheciam a representação geométrica de uma fração qualquer, visto que esse conhecimento é fundamental para a resolução das demais questões.

Figura 53 – Primeira questão do Google Forms



Fonte: Imagem do Autor.

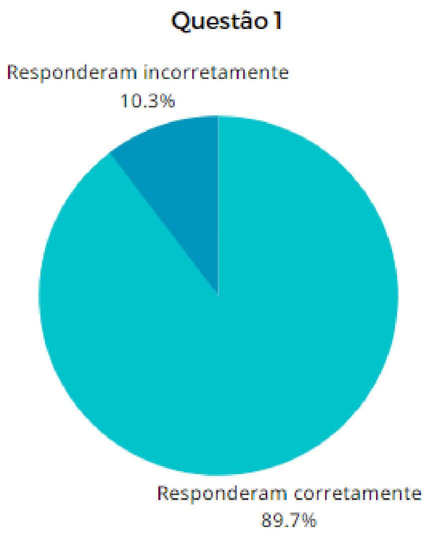
Inicialmente foram analisados os erros e acertos de cada questão. Conforme figura 54, apenas três alunos responderam incorretamente marcando a primeira alternativa, considerando o numerador como sendo a quantidade de partes pintada e o denominador como quantidade de partes da figura em branco, erro comum em turmas do 6º Ano do Ensino Fundamental. Cabe ressaltar que estes três alunos fazem parte do grupo dos que não realizaram as atividades propostas.

De acordo com Lopes (2008), "Um dos obstáculos na aprendizagem de frações é também a notação, que não é tão trivial a associação de dois números inteiros separados por um tracinho", esses e outros obstáculos interferem na resposta dos alunos.

Segunda questão

A segunda questão representada na figura 55, cujo o objetivo também era saber se

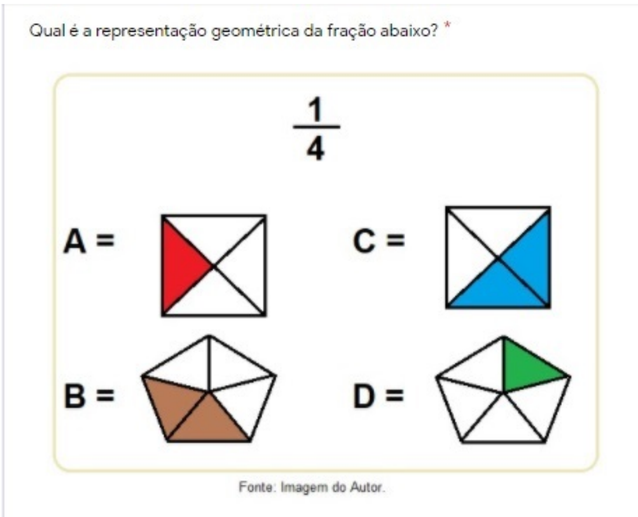
Figura 54 – Desempenho dos alunos na primeira questão do Google Forms



Fonte: Produção do Autor

todos os alunos reconheciam a representação geométrica a partir de uma fração dada, teve 100% de acerto.

Figura 55 – Segunda questão do Google Forms



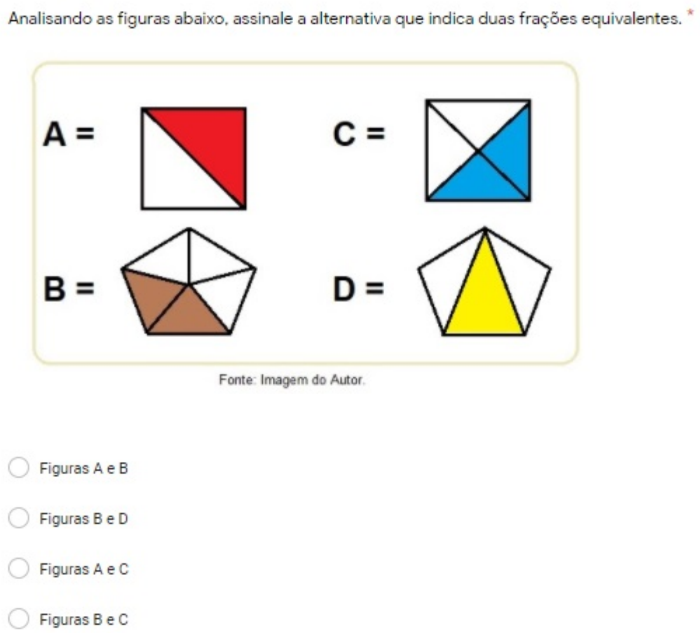
Roth e Costa (2016) em seu artigo "Frações e análise de erros: uma nova perspectiva para a sala de aula", aplicou algumas atividades sobre conceito de frações para alunos do 6º ano, e concluiu que poucos alunos apresentam dificuldades ao representar uma figura a partir de uma fração dada, demostrando que entenderam esse conceito.

Conforme observado tanto nas atividades enviadas pelos alunos, após a realização dos DE, tanto quanto pelas respostas enviadas pelo Google Forms, concluímos que a maioria dos alunos sabem representar uma fração, conceito este fundamental para o estudo do nosso objeto matemático escolhido.

Terceira questão

Na terceira questão ilustrada na figura 56, com o objetivo de avaliar se os alunos eram capazes de identificar frações equivalentes a partir de figuras dadas, achamos necessário desta questão em diante, realizar uma tabela com as alternativas respondida pelos alunos, destacando de vermelho a resposta correta, a fim de ter uma visão mais ampla dos erros cometidos.

Figura 56 – Terceira questão do Google Forms



Fonte: Produção do Autor

Tabela 13 – Respostas dos alunos na questão 3

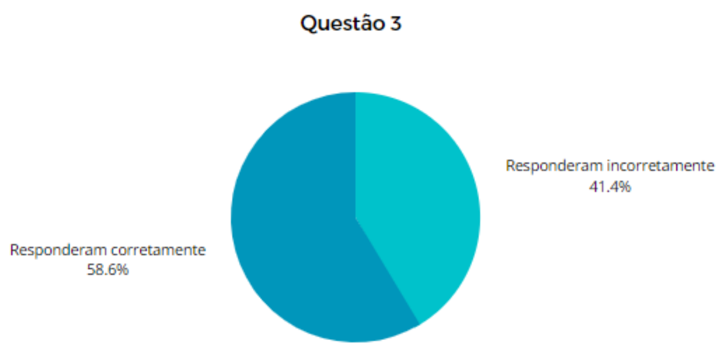
Alternativa marcada	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**
Número de alunos	4	2	17	6
Porcentagem	14%	8%	58%	20%

Fonte: Dados da Pesquisa

Um pouco mais da metade dos alunos responderam corretamente, conforme ilustrado no gráfico da figura 57, observa-se na tabela 13 que dos erros cometidos, a alternativa d) foi a mais enviada, uma das hipóteses é que tenham comparado o número de partes pintada das figuras.

Vale destacar que dos 12 alunos que erraram essa questão, apenas metade deles realizaram as atividades propostas durante a aplicação desta SD, destes, apenas 3 partici-

Figura 57 – Desempenho dos alunos na terceira questão do Google Forms



Fonte: Produção do Autor

param de todas as sessões.

Quarta questão

Na quarta questão ilustrada na figura 58, o objetivo era avaliar se os alunos conseguem identificar frações equivalentes, sem o uso de sua representação geométrica, apenas multiplicando ou dividindo o numerador e denominador por um mesmo número natural.

Tabela 14 – Respostas dos alunos na questão 4

Alternativa marcada	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**
Número de alunos	9	6	11	3
Porcentagem	31%	20%	38%	11%

Fonte: Dados da Pesquisa

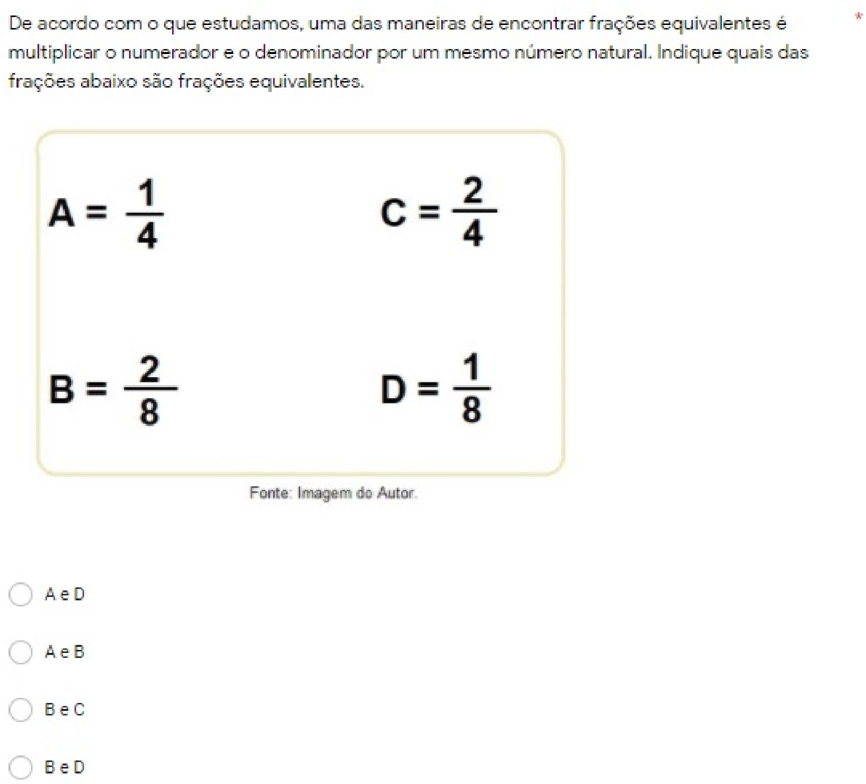
Conforme ilustra a figura 59, poucos alunos responderam corretamente esta questão. Analisando a tabela 14, observamos que as alternativas a) e c) foram as mais marcadas, ou seja, segundo eles $\frac{2}{4}$ e $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ são frações equivalentes, observe que em ambos os casos houve a mesma mudança no denominador, concluindo assim, que os alunos não são capazes de identificar frações equivalentes sem sua representação geométrica.

Vale ressaltar que dos 23 alunos que erraram essa questão, apenas 11 deles enviaram as atividades propostas em aula, dos alunos que enviaram as atividades 8 deles participaram de todas as sessões.

Quinta questão

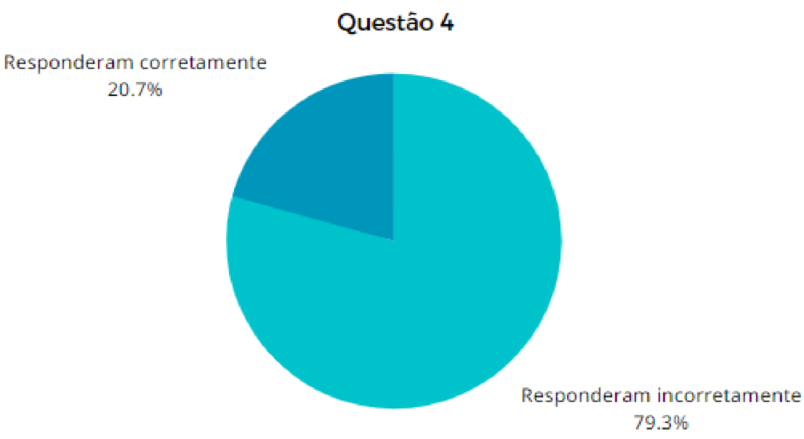
Na quinta e última questão ilustrada na figura 60, cujo o objetivo era avaliar duas habilidades dos alunos, sendo elas: identificar a fração correspondente a partir de uma

Figura 58 – Quarta questão do Google Forms



Fonte: Produção do Autor

Figura 59 – Desempenho dos alunos na quarta questão do Google Forms

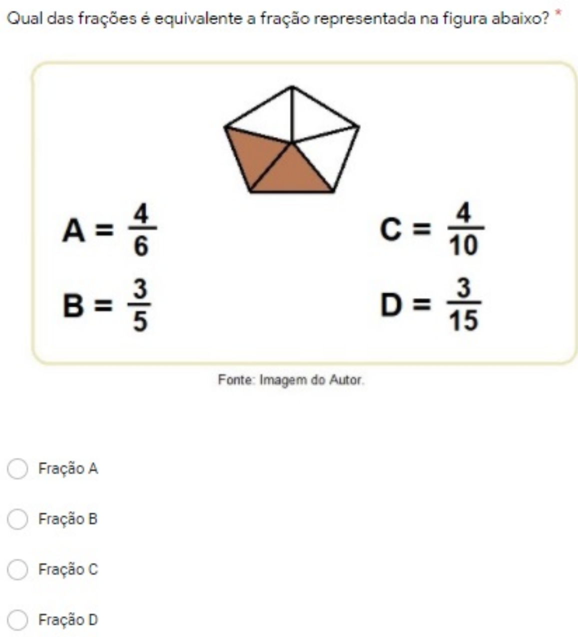


Fonte: Produção do Autor

figura dada, encontrar sua fração equivalente.

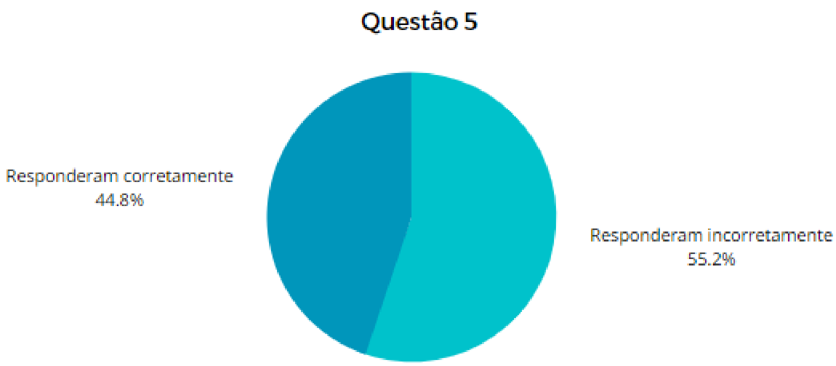
Conforme ilustra a figura 61, menos da metade dos alunos responderam corretamente. De acordo com a tabela 15, dos erros cometidos a alternativa b) foi a mais

Figura 60 – Quinta questão do Google Forms



Fonte: Produção do Autor

Figura 61 – Desempenho dos alunos na quinta questão do Google Forms



Fonte: Produção do Autor

marcada, uma das hipóteses é que os alunos não tenham compreendido que precisavam passar por duas etapas para resolver corretamente a questão, então, marcaram $\frac{3}{5}$ como resposta correta, erro idêntico ao encontrado na questão 1, representando o numerador da fração como as partes em branco da figura, e o denominador como o total de partes em que a figura foi repartida.

Vale ressaltar que dos 16 alunos que erraram essa questão, apenas 6 deles enviaram as atividades propostas em aula, destes, apenas 3 participaram de todas as sessões. Já esperávamos que parte dos alunos teriam dificuldades em resolver essa questão, já que ele

Tabela 15 – Respostas dos alunos na questão 5

Alternativa marcada	a)	b)	c)	d)
Número de alunos	2	11	13	3
Porcentagem	7%	38%	44%	11%

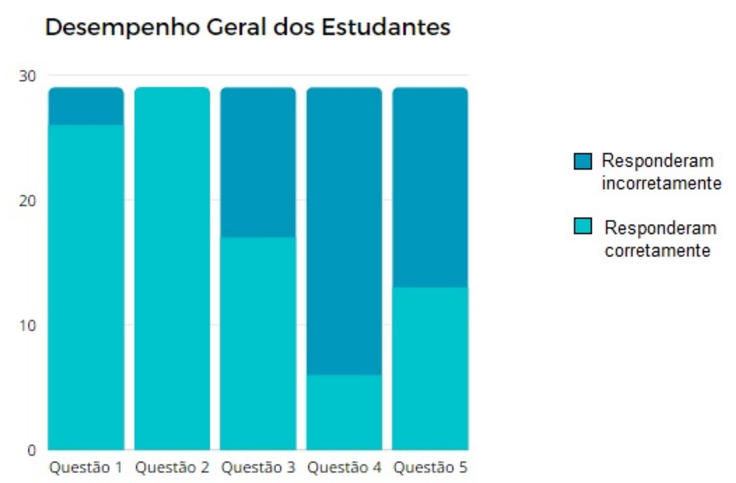
Fonte: Dados da Pesquisa

combina uma variedade de habilidades, requer que o aluno visualize a fração através de sua representação geométrica e em seguida encontre uma fração equivalente, conforme dito anteriormente.

Desempenho geral dos estudantes

Vejamos na figura 62, o gráfico com o resultado dos participantes na resolução do questionário. Considerando o questionário como tendo peso 2 cada acerto, a nota média obtida foi de aproximadamente 6,2.

Figura 62 – Desempenho Geral dos Estudantes



Fonte: Acervo da pesquisa

Verificando os resultados de desempenho dos alunos, notamos que as atividades desenvolvidas em aula bem como a quantidade de aulas para a a aplicação da sequência didática, foram insuficientes para a construção do saber do nosso objeto de matemática de referência. Os motivos vão desde não saber se o fato de o aluno estar conectado na aula signifique que está presente naquele momento, até a dificuldade dos alunos participantes, ao realizarem as atividades propostas, muitas vezes sem o auxílio direto do professor.

Analisar os erros dos alunos, pode dar suporte para o professor estudar estratégias para entrar com as intervenções necessárias, para que ocorra o aprendizado daquele saber.

Estes resultados mostram que os alunos participantes dessa pesquisa compreendem o conceito de fração mas têm dificuldades de expressar na língua materna o que são frações equivalentes e identificá-las, principalmente quando a representação geométrica das frações não estão presentes na atividade.

6 Considerações Finais

Este capítulo versa sobre os diversos entraves que nos deparamos durante a aplicação e análise da nossa sequência didática, em seguida a conclusão a cerca deste trabalho de dissertação com nossas considerações.

6.1 O Ensino de Frações no Contexto do Ensino Remoto

De repente, sem aviso prévio, escolas fechadas, um ano letivo incerto, cheio de incertezas, angustias e desafios. Começando pelo professor que precisa se sujeitar a inúmeras variáveis: novos materiais e recursos didáticos, dominar ferramentas e plataformas, adaptar os espaços de suas residências transformando-os em sala de aula. Mas como fazer tal alteração no modelo educacional sem uma capacitação correta dos profissionais, sem que cause impactos negativos?

Quanto aos alunos, eles necessitam de acesso a internet, computadores, tablets, celulares, entretanto, essa condição não abrange a maioria dos estudantes, devido à questão sócio-econômica destes, gerando assim desigualdades significativas. De acordo com ALVES (2018).

> Analisando esse contexto, pode imaginar um grande desafio para os docentes atuais em participarem de um processo de mudança tão grande, no qual de um lado, uma grande parcela dos alunos nasce e cresce em contato constante com o meio digital, através de seus tablets e smartphones por exemplo, e do outro lado, docentes que já se atentavam com suas diversas atividades, agora tendo que repensar novas possibilidades mediante a conjuntura das novas tecnologias. E não falamos apenas do esforço em conhecer o uso de um novo dispositivo, ou ambiente virtual, aplicativo etc., mas, sim, pensarmos em como colocar isso em prática e de maneira com que o processo de ensino aprendizagem alcance seus objetivos. (ALVES, 2018, p. 27).

Devido a pandemia da Covid-19 que ocorreu no período de construção desse trabalho, surgiram então obstáculos e inquietações de como manipular materiais concretos durante as aulas remotas, ou seja, oportunizar ao aluno manipular material concreto de que forma? Como avaliar a aprendizagem? Sem ter a certeza de que mesmo estando conectado, se o aluno permanece ou não presente durante a aula? Essas e outras questões estiveram presentes no decorrer de toda esta pesquisa.

Em busca de soluções para possibilitar as instituições de ensino ofertar aulas aos estudantes do país, as aulas remotas foram a solução possível, não sei dizer se a melhor, se correta, difícil dizer o impacto que isso terá no futuro.

Cabe ressaltar que para lecionar no estado do mato grosso, é necessário que o professor seja licenciado na área de sua atuação, pensamos durante nossa pesquisa em desenvolver a SD por meio de outros professores da rede, para que a SD bem como prática dos professores pudesse ser avaliada, porém houve dificuldade de encontrar professores que se sentissem a vontade para participar, e quando havia professores dispostos, barrava no quesito aulas remotas, visto que a maior parte das escolas não tinham um número mínimo de alunos participantes das aulas online. Por estes motivos, a aplicação ocorreu somente nas turmas da pesquisadora diretamente responsável por esta pesquisa.

Desde o início das aulas remotas nos deparamos com diversas situações: teve casos de responsáveis comunicarem a escola que seus filhos não participariam mais das aulas online, pois o mesmo passava o período da aula conectado, entretanto, jogando no celular, e os pais não conseguiam monitorar pois passavam o dia trabalhando. Em outra situação uma mãe se dirigiu diretamente a gestora da escola, com a mesma reclamação, porém exigindo que o professor fiscalizasse e que todos os alunos mantivessem as câmeras ligadas durante as aulas, houve uma tentativa por parte de todo o corpo docente, porém frustada, pois ao solicitar que todos ligassem a câmera, ouvia-se várias desculpas e motivos condizentes como: câmera estragada, ao ligar a câmera a imagem fica travando e o som chega com atraso, alguns diziam que simplesmente não queriam ligar, teve inclusive alunos que confessaram que assistiam as aulas deitados na cama, outros sentiam vergonha de ficar em frente a câmera e até mesmo mostrar onde moravam.

De fato uma quantidade significativa de alunos usam dados móveis e não tem acesso a internet de banda larga, se todos ligarem a câmera trava o som, e terão dificuldades de interagir durante a aula. Se a família não tem autoridade suficiente sobre os filhos, não conseguem monitorar ou acompanhar, fica difícil passar essa responsabilidade ao professor.

Possíveis soluções seria o responsável fazer o monitoramento do filho, monitorar o uso do celular, hoje existem aplicativos que auxiliam nesse papel, poderia haver uma capacitação para as famílias e estudantes, assim o responsável mesmo não estando presente teria controle sobre o acesso e participação do aluno.

Durante as aulas remotas além da baixa participação dos alunos, visto que nas quatro turma temos no total 126 alunos matriculados e apenas 42% destes participando das aulas através da plataforma. Existe ainda a dificuldade de interação durante as aulas, alguns alunos não se mostram dispostos a participar. Em alguns momentos o silêncio é a única resposta, pois mesmo que o microfone não esteja funcionando, que é uma possibilidade, temos o chat e eles podem responder por lá, mesmo assim, por muitas vezes não houve esse retorno. Quais seriam os fatores da pouca ou não participação dos alunos durante as aulas remotas?

Seguem listados alguns questionamentos deste trabalho, que podem servir de norte para pesquisas futuras:

- Se o fato do aluno se sentir avaliado de alguma maneira, seja pelos colegas ou pelo professor, que vai dizer se ele está apto ou não para aquela competência;
- Se o fator preponderante é a matemática, por ser um tema novo, visto que muitos tem medo do novo, de um novo conceito;
- Se o fato do processo de discussão de um novo tema como por exemplo frações equivalentes, se isso inibe o aluno de alguma forma;
- Se o aluno se inibe pelo fato de estar diante de um computador e ter de interagir com um artefato eletrônico ou ao fazer uso da tecnologia digital;
- Se o aluno tem dificuldades com o uso da tecnologia que vai permitir essa interação com o professor;
- Se o aluno se distrai com facilidade diante dos diversos aplicativos e jogos que geram curiosidade e com fácil acesso.

Outro ponto que vale destacar é que existe uma lacuna entre o conteúdo disponibilizado pelo professor e a entrega das atividades por parte dos alunos. Conforme orientação da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso SEDUC - MT, as frequências dos alunos não seriam lançadas conforme a participação das aulas, mas sim, de acordo com o realização das atividades propostas, este talvez seja o motivo dos casos de atividades realizadas de qualquer forma, com respostas aleatórias ou feito por outras pessoas da família, como foi o caso de uma mãe que disse que a filha estava viajando e para que ela não ficasse com faltas ela fez sua tarefa. Algumas hipóteses para estes e outros exemplos é o fato do responsável não querer que o aluno seja penalizado com o lançamento das faltas, ou a falta de acesso às tecnologias, ou ainda pela falta de interesse e incentivo por parte da família.

Cabe destacar que durante as aulas presenciais era o professor que fazia essa vigilância, se estavam ou não prestando atenção na aula, e chamava a atenção do aluno quando necessário, e ainda acompanhava se estavam ou não realizando as atividades, a responsabilidade da família ficava em fiscalizar a realização apenas das tarefas de casa e agora passou para o responsável fazer essa fiscalização e acompanhamento, entretanto temos pais que não conseguem devido a carga de trabalho entre outros motivos, ou até mesmo não estão dispostos a cumprirem com esse papel.

De fato, se torna cada vez mais claro que durante o ensino remoto, o processo de terceirização da educação está ficando mais acentuado para o professor. Durante este período de aulas remotas a não participação da família na vida escolar do aluno se tornou mais evidente e a ausência deste suporte ao aluno gerou um impacto ainda maior em seu aprendizado.

6.2 Conclusão

Quando iniciamos nosso trabalho, tínhamos a intenção de buscar novas metodologias de ensino para a construção do conhecimento do nosso objeto matemático de referência: frações equivalentes. No entanto, por conta da pandemia, neste momento de distanciamento social, que mudou o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, houve a necessidade de repensar em novas metodologias que se encaixassem nesta nova realidade, então, a aplicação de uma Engenharia Didática (ED) pareceu mais coerente diante deste novo cenário. A Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD), fundamentaram este trabalho e deram o aporte necessário para esta pesquisa.

A análise de alguns livros didáticos, assim como a pesquisa interna das habilidades a serem alcançadas na educação básica de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nos permitiu compreender os diferentes significados de frações e como eles podem contribuir se utilizados corretamente, de acordo com o objetivo a ser alcançado dentro dos números racionais.

Por meio da Análise Institucional e Sequência Didática, fizemos a análise *a priori* das tarefas de cada um dos dispositivos experimentais desenvolvidos e aplicados em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, com a utilização das tecnologias: GeoGebra e materiais concretos manipuláveis, que foram adaptados para o ensino remoto. Após a aplicação desta Sequência Didática (SD), realizamos a análise *a posteriori*, levando em consideração os objetivos e resultados esperados na análise *a priori*, com fins de validação da pesquisa.

O estudo matemático formal sobre a construção do conjunto numérico dos racionais e sobre as relações de equivalência, bem como o estudo da ecologia deste saber nos livros didáticos, assim como compreender que os números racionais passa por um processo de transposição didática, para chegar ao saber ensinado para os alunos da Educação Básica, foram indispensáveis neste processo.

Referente aos recursos tecnológicos utilizados nesse estudo, ressalta-se que o material concreto foi essencial para a construção do saber do objeto matemático de estudo, enquanto o uso do GeoGebra se mostrou parcialmente eficaz, visto que muitos alunos não fizeram uso deste conforme foi proposto. Supostamente a falta de motivação, maturidade e interesse, por parte dos alunos, durante as aulas remotas, se tornou mais evidente. Parte dos alunos estavam apenas conectados na plataforma, sem estarem presentes de fato na aula, e a ausência das câmeras ligadas só aumentou o número desses alunos ausentes de participação. Quanto aos alunos que estavam de fato presentes, constatou-se que inserir o uso de tecnologias durante as aulas de matemática na educação básica pode proporcionar benefícios para a construção do conceito de frações equivalentes.

Durante a realização da SD não foi possível realizar as intervenções que julgamos necessárias neste processo, que só pode ser constatada após a devolutiva do material por parte dos alunos. Durante o processo de análise *a posteriori*, foi realizado o levantamento dos dados de cada uma das questões realizadas pelos estudantes, bem como o questionário respondido por eles.

Percebemos, após a análise dos dados, que a representação geométrica de fato contribuiu para a construção do conhecimento do nosso objeto de referência. O GeoGebra permitiu que a visualização da transformação de uma fração em outra fração equivalente a esta, contribuísse de forma positiva durante a explanação da aula, embora, a maioria dos alunos, não fizeram uso deste recurso conforme proposto na realização das atividades. O material concreto manipulável foi um instrumento útil permitindo o manuseio de algo que ainda é abstrato para muitos alunos.

Constatamos que o número de alunos online não representa a quantidade de alunos presentes, e que a participação dos mesmos foi bem inferior ao que se esperava. A grande maioria dos alunos estavam apenas conectados, o que afetou diretamente a construção deste saber. Ao observarmos a análise do questionário, verificamos que a maioria dos alunos compreendem o conceito de frações e sabem como a representar geometricamente, entretanto, no quesito de encontrar frações equivalentes, a representação geométrica se faz necessária, já que com sua ausência a grande maioria não obteve êxito.

Diante disso, pode-se contatar que o trabalho realizado seguindo os princípios da ED, fundamentado na TAD e TSD, contribuiu para atingir os objetivos de melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem dos alunos. entendendo que a ED, ao ser aplicada em sala de aula auxilia no processo da construção do saber, a TAD nos ajudou a compreender a atividade matemática e as relações humanas, enquanto a TSD nos auxiliou na compreensão dos obstáculos epistemológicos existentes, a importância de realizar um contrato didático e compreender que podem existir rupturas durante este processo.

Desta maneira, o objetivo geral foi alcançado, encontramos outros métodos de aprendizagem do conceito de frações equivalentes, podendo utilizar recursos que podem ser aplicados diante desta nova modalidade de aulas remotas.

Verificamos que a hipótese de pesquisa é plausível, já que com base nos resultados coletados durante a experimentação, observa-se que o uso do ambiente computacional GeoGebra e materiais concretos manipuláveis contribuem de forma positiva no ensino do nosso objeto matemático de referência, ao permitir a visualização da representação geométrica do nosso objeto matemático de estudo.

As questões de pesquisa foram respondidas ao longo deste trabalho, identificando que dos diferentes significados de frações, o significado parte-todo é o mais abordado, tanto nos livros didáticos como na BNCC. E que o GeoGebra e os materiais concretos manipuláveis podem sim oportunizar ao aluno se relacionar com uma quantidade maior de conceitos, mesmo nas aulas online.

Desta forma, é preciso rever as metodologias de ensino no contexto das aulas remotas. Verificou-se que é possível construir o conhecimento do aluno diante desta realidade, e é necessário, sim, repensar em uma maneira de atingir um número maior de alunos em prol de uma educação de qualidade, em especial os alunos que não tiveram acesso às aulas, atendidos somente por material apostilado.

Mediante o exposto, ressalto que o tempo de aplicação e a quantidade de tarefas e atividades foram insuficientes, proponho uma mudança na SD em trabalhos futuros, repensando em uma SD com a inserção de outros significados, como por exemplo, o significado medida, tão pouco abordado nos livros didáticos atuais, e com um número maior de tarefas e atividades.

Por fim, espera-se que este trabalho possa também ajudar a nortear um trabalho de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) no ensino remoto ou até mesmo a análise do objeto frações equivalentes a luz de outras teorias, por exemplo a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) ou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Esta última talvez seja mais favorável em razão dos registros de imagens que se faz em uma tela.

Sendo assim, é notório que esta pesquisa poderá contribuir, significativamente, para novas trajetórias acerca do estudo de frações equivalentes e das teorias e metodologias aqui apresentadas, conforme proposto no programa do PROFMAT que visa uma aplicação direta na sala de aula de Matemática na educação básica, buscando contribuir para o enriquecimento do ensino desta disciplina.

Referências

A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Ed.). *A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos*. Curitiba: Editora CRV, 2018. p. 31–32. Citado na página 83.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática de formação (edf): sobre o ensino dos números (generalizados) de catalan (ngc) didactical engineering: about the teaching of generalized catalan numbers. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 20, n. 2, 2018. Citado na página 82.

ALVES, L. M. Gamificação na educação: aplicando metodologias de jogos no ambiente educacional. *Joinvile: Clube dos Autores*, 2018. Citado na página 147.

ARAUJO, L. d. Geogebra, um bom software livre. *Revista do Professor de Matemática*, n. 67, 2008. Citado na página 106.

ARTIGUE, M. Engenharia didática in: Brun, j.(org.). *Didática das matemáticas*, p. 193–217, 1988. Citado na página 83.

BARRETO, J. R. *Análise de erros cometidos por alunos do 6° ano na resolução de problemas envolvendo operações com frações*. 82 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 125 e 126.

BEHR, M. J. et al. Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, v. 91, p. 91–125, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 42.

BITTENCOURT, V. S.; FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F. Inter-relações entre domínios matemáticos: a integração do nag em um modelo praxeológico alternativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 35, n. 69, p. 529–548, 2021. Citado na página 65.

BNCC. Brasil. base nacional comum curricular. *Mistério da Educação Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica*, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 102 e 103.

BRITO, C. E. *Estudo do centro de massa em cálculo diferencial e integral: uma abordagem didática envolvendo recursos tecnológicos*. 610 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2019. Citado na página 106.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 78, 80 e 81.

BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N.; WARFIELD, V. *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*. Nova York: Springer, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 138.

CARVALHO, L. O.; SANTOS, T. F.; ATTIE, J. P. Processos de argumentação no ensino fundamental: Frações e potências. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Citado na página 104.

CHAVANTE, E. R. *Convergências: matemática, 6º ano: anos finais: ensino fundamental*. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2015. Citado na página 43.

CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M.-A. *La transposition didactique. Du savoir savant au savant enseigné*. Grenoble: La Pensée sauvage, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 84 e 89.

CLOSS, E. J. Ensino de frações: uma proposta com o uso do geogebra. *LUME Repositório Digital Universidade Federal do Rio Grande do Sul*, p. 26, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 120.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris: matemática: ensino fundamental 2*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015. Citado na página 43.

DCN. Brasil. resolução n. 2, de 7 abril de 1998. institui as diretrizes curriculares nacionais para o ensino fundamental. *Ministério da Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. Câmara da Educação Básica. Diário Oficial da União. Brasília*, 2014. Citado na página 101.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. *Didáctica de las matemáticas para maestros*. [S.l.]: Proyecto Edumat-Maestros, 2004. Citado na página 78.

GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides). Citado 2 vezes nas páginas 70 e 73.

HALMOS, P. R. *Teoria ingênua dos conjuntos*. São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 61.

HENRIQUES, A. Reflexões sobre análises institucionais e seqüências didáticas: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. *Artigo elaborado junto ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas DCET -UESC, destinado ao processo de progressão de carreira do Magistério Superior (de Adjunto a Titular)*, 2011. Citado na página 89.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J.; FARIAS, L. Análise institucional & sequência didática como metodologia de pesquisa. *Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, I*, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 33, 89, 91, 92 e 94.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões sobre análise institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 26, n. 44, p. 1261–1288, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.

HENRIQUES, A.; SERÔDIO, R. Intervenção de tecnologias e noções de registros de representação no estudo de integrais múltiplas na licenciatura em matemática. *Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM)*, 2013. Citado na página 77.

IBGE. *Panorama da Cidade de Cascavel-PR*. Rio de Janeiro: Centro de Documentação e Disseminação de Informações. Fundação Intituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2020. Acesso em: 10 março 2021. Citado na página 29.

IBGE. *Panorama da Cidade de Curitiba-PR*. Rio de Janeiro: Centro de Documentação e Disseminação de Informações. Fundação Intituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2020. Acesso em: 10 março 2021. Citado na página 29.

IGLIORI, S. B. C. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática. *Educação Matemática: uma introdução*, EDUC São Paulo, p. 99–113, 1999. Citado na página 80.

JÚNIOR, G.; RUY, J.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais*. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 43, 101 e 104.

JÚNIOR, J. V. do N.; CARVALHO, E. F.; FARIAS, L. M. S. As três dimensões do percurso de estudo e pesquisa: teórica, metodológica de pesquisa e dispositivo didático the three dimensions of the study and research route: theoretical, methodological research and didactic device. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 21, n. 5, 2019. Citado na página 85.

KICHOW, I. V. *Procedimentos didáticos relativos ao ensino de números racionais em nível de sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. UFMS, 2009. Citado na página 84.

KIEREN, T. E. *Five faces of mathematical knowledge building*. [S.l.]: University of Alberta, Department of Secondary Education, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 42.

KIKUCHI, L. M.; TREVIZAN, W. A. Obstáculos epistemológicos na aprendizagem de grandezas e medidas na escola básica. *XIV EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática). Resumos. Campo Grande: Ed. UFMS*, 2010. Citado na página 79.

LDB. Brasil. lei 9394/96–lei de diretrizes e bases da educação nacional. *Disponível em www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.html*, 2012. Citado na página 101.

LESSA, V. E. *A compreensão do conceito de número fracionário: uma sequência didática para o significado medida*. 167 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 41, 42, 43 e 104.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 21, n. 31, p. 22, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 139.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 21, n. 31, p. 23–40, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 39.

MARTINEZ-IBANEZ, S. *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction: une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS*. 1043 p. Tese (Doutorado) — Université Sorbonne Paris Cité, Paris, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 32, 99 e 100.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. Citado na página 82.

PAIS, L. C. et al. Transposição didática. *Educação matemática: uma (nova) introdução*, v. 3, p. 11–48, 1999. Citado na página 78.

PNE. Brasil. lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. aprova o plano nacional de educação e dá outras providências. *Brasília: Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, 2014. Citado na página 101.

PORTO, F. M. *Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis*. 105 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 83.

ROTH, E.; COSTA, J. R. Frações e análise de erros: uma nova perspectiva para a sala de aula. *O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 99 e 140.

SANTOS, A. C. G. dos; CAMESCHI, C. E.; HANNA, E. S. Ensino de frações baseado no paradigma de equivalência de estímulos. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento*, v. 5, n. 1, 2012. Citado na página 32.

SCHASTAI, M. B. *Pró-letramento em matemática: problematizando a construção do conceito de frações: uma contribuição para a formação de professores*. 204 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012. Citado na página 31.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. *Zetetike*, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.

VALIO, D. T. d. C. Frações: estratégias lúdicas no ensino da matemática. Repositório Institucional Universidade Federal de São Carlos, 2014. Citado na página 83.

VIEIRA, F. R. A. *Didática da Matemática*. Fortaleza: UAB/IFCE, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 78, 79, 80 e 81.

Apêndices

APÊNDICE A – Conteúdos específicos da dissertação

A.1 Apostila com atividades desenvolvidas durantes as aulas

Figura 63 – Apostila - Atividade 1

FRAÇÕES EQUIVALENTES

Paulo e César cansados, depois de um longo dia de estudo, decidiram ir a uma pizzaria, lá pediram uma pizza de calabresa, que veio repartida em 12 fatias iguais. Carla ligou para seus amigos avisando que iria se encontrar com eles, ao chegar pediu uma pizza de queijo do mesmo tamanho, e pediu ao garçom que cortasse a pizza em apenas 4 fatias.

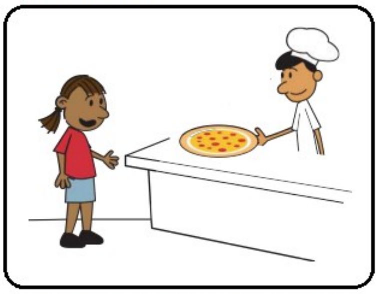
Paulo comeu 2 fatias da pizza de calabresa e César comeu 3 fatias da mesma pizza. Carla disse que estava de dieta e por isso comeu apenas uma fatia da sua pizza escolhida.

Ao terminarem de jantar Carla afirmou que foi difícil resistir mas ela conseguiu comer apenas uma fatia e que eles deveriam seguir o exemplo dela.

Paulo que havia comido 2 fatias ficou indignado com a fala de Carla, na certeza de que comeu uma quantidade de pizza menor.

César ficou confuso pois comeu 3 fatias de pizza mas estava com a sensação que havia comido a mesma quantidade que Carla.

Desenho 1 : A pizza



Fonte: Ripoll, Simas, Bortolossi, Rangel, Giraldo, Rezende, Quintaneiro. (2012)

Utilizando o círculo de frações (*O encarte está na página 3*), vamos ajudar os três amigos a resolverem a situação.

01. No espaço ao abaixo, pinte e recorte a porção da pizza que cada um dos três amigos comeu.

Paulo	César	Carla
Fração da pizza: ___	Fração da pizza: ___	Fração da pizza: ___

1

Fonte:Produção do Autor.

Figura 64 – Apostila - Atividades 2 e 3

02. Analisando as representações acima responda:

a) Quem comeu menos?____

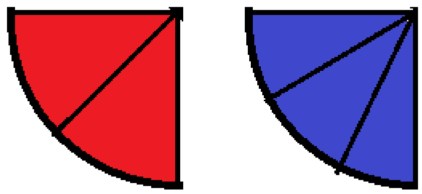
b) A afirmação de César estava correta, ao dizer que ele e Carla comeram a mesma quantidade?

____

c) O que podemos dizer em relação a fração da pizza que Carla e César comeram?

____

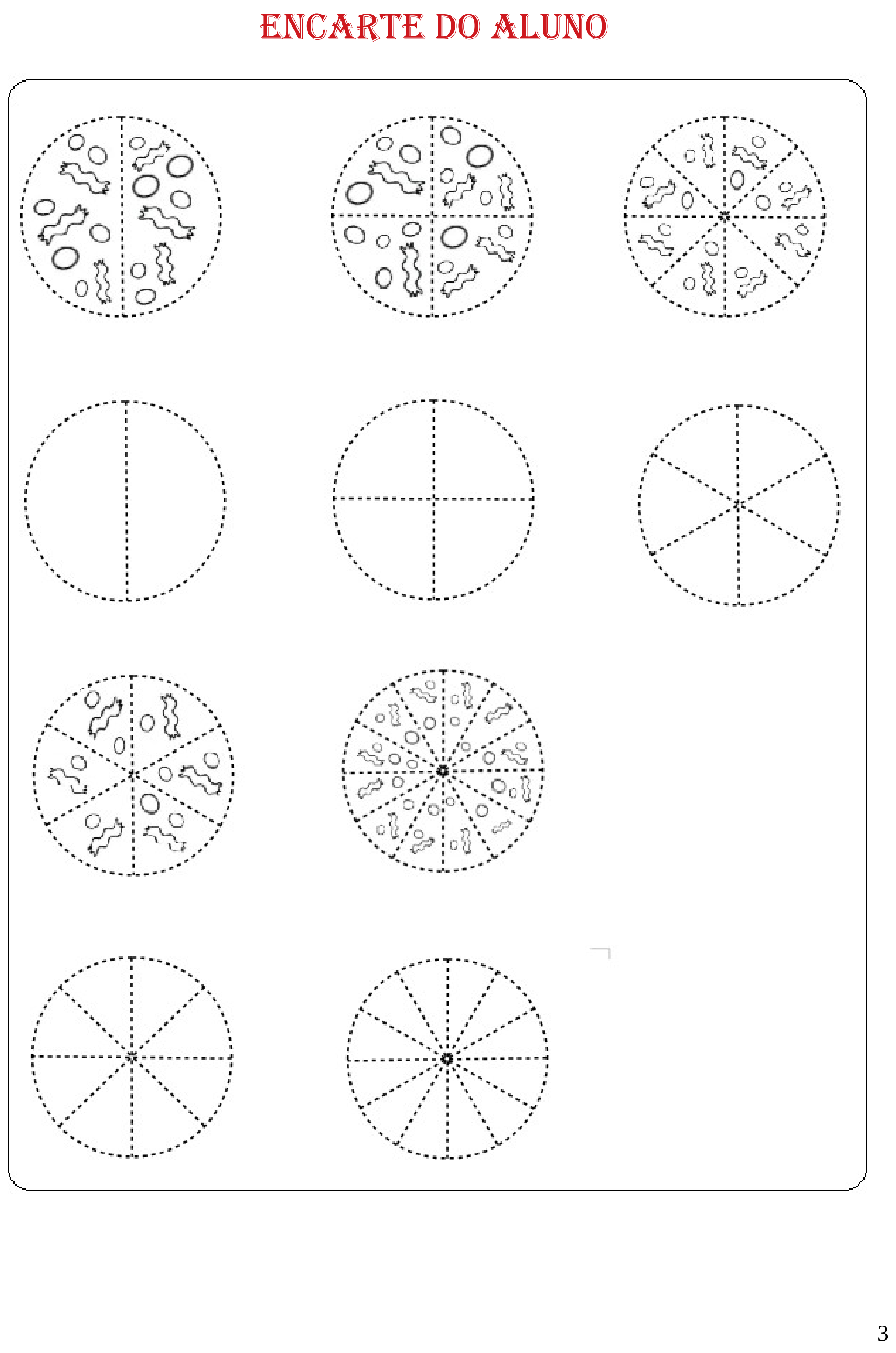
03. Que outras frações equivalentes podemos encontrar no encarte da página 3? Escreva as frações equivalentes em seguida recorte, pinte e cole as figuras no espaço indicado, conforme o exemplo abaixo.

a) $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ 	b) ____ = ____
c) ____ = ____	d) ____ = ____

2

Fonte:Produção do Autor.

Figura 65 – Apostila - Encarte do aluno

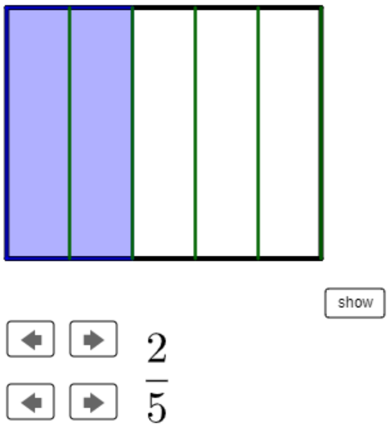


Fonte:Produção do Autor.

Figura 66 – Apostila - Atividade 4

FRAÇÕES EQUIVALENTES NO GEOGEBRA

Acesse o link abaixo.
https://www.geogebra.org/m/gupxhjbq?fbclid=IwAR1Iup_j_LjODjOCC_905c-Lr4VrWz7vNxtX4ocLiCqi4lCitNGrNRw-mOs



04. Utilizando as flechas realize as mudanças necessárias, para a representação geométrica das frações abaixo e responda:

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ e } \frac{1}{10}.$$

a) Qual foi a mudança que ocorreu na figura durante a troca de numerador?

____

____

b) Que mudança você observou durante a troca de denominador?

____

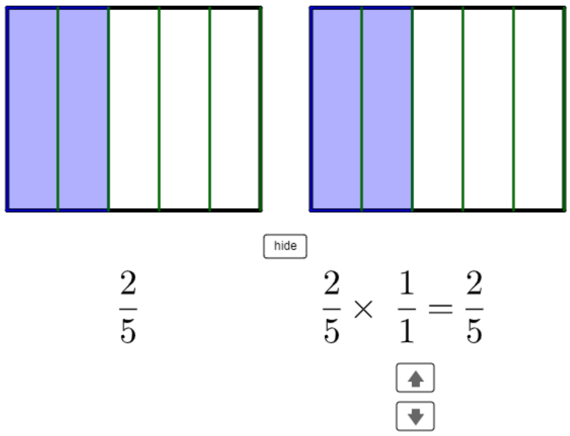
____

Em seguida escolha uma fração e clique em : show

4

Fonte: Produção do Autor.

Figura 67 – Apostila - Atividades 5 e 6



05. Utilizando as flechas multiplique a fração escolhida por um mesmo número natural por exemplo:

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \text{ e } \frac{5}{5}.$$

a) Qual mudança você observou que ocorreu durante a multiplicação?

____

____

06. De acordo com o que estudamos, como você responderia a pergunta: O que são frações equivalentes?

____

____

____

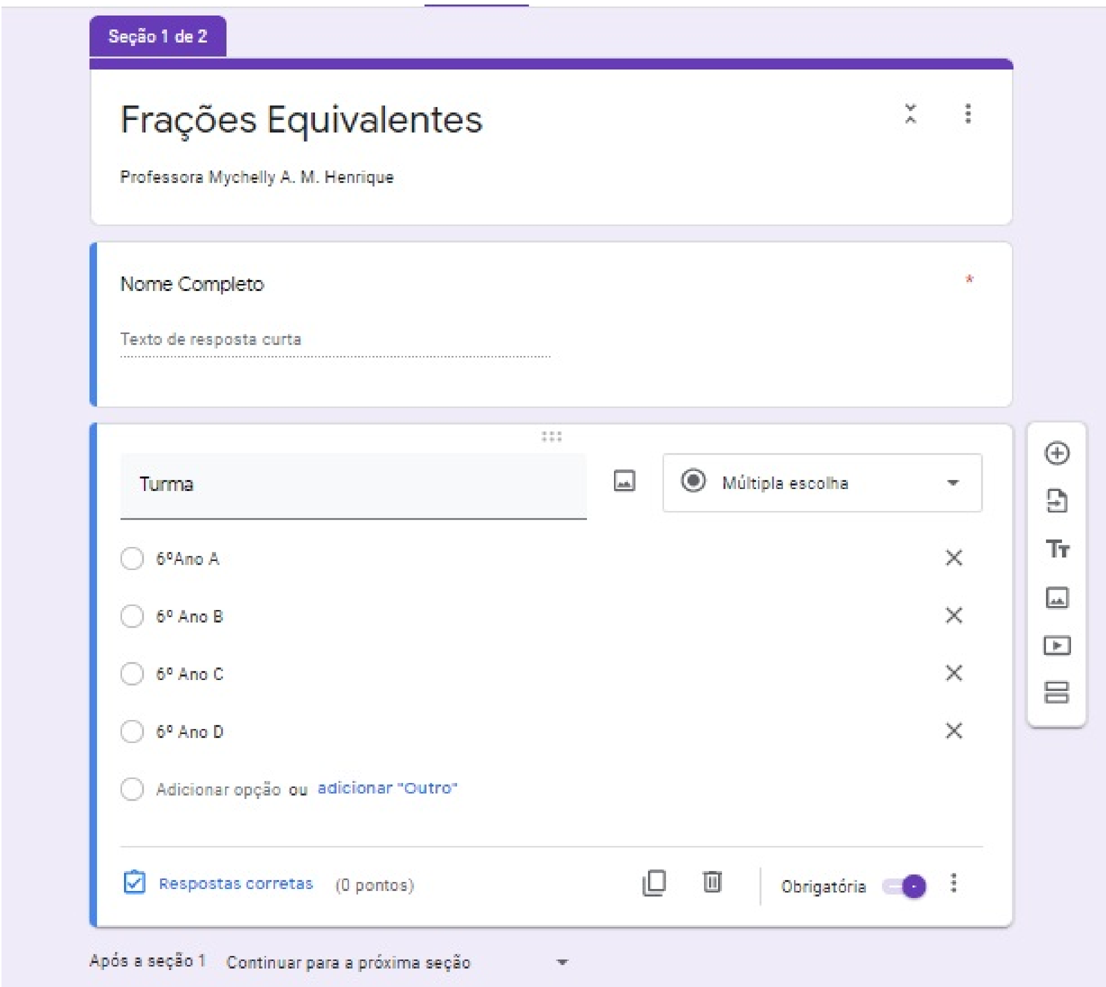
____

5

Fonte: Produção do Autor.

A.2 Questionário do Google Forms

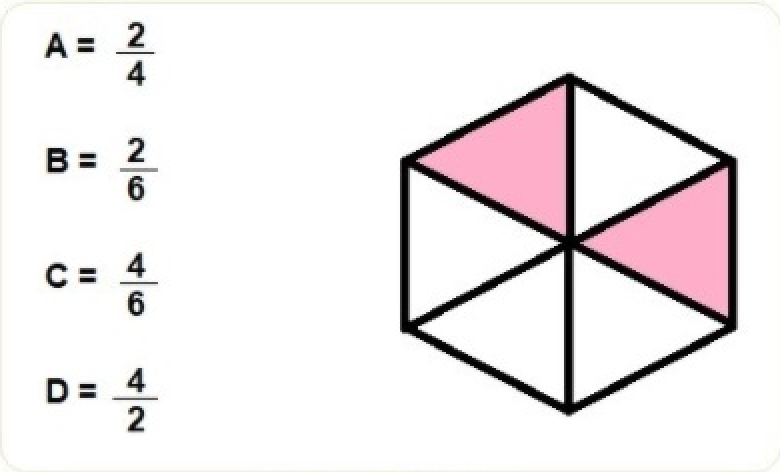
Figura 68 – Formulário - Identificação



Fonte: Produção do Autor.

Figura 69 – Formulário - Questão 1

Qual é a fração que representa corretamente a parte pintada da figura abaixo? *



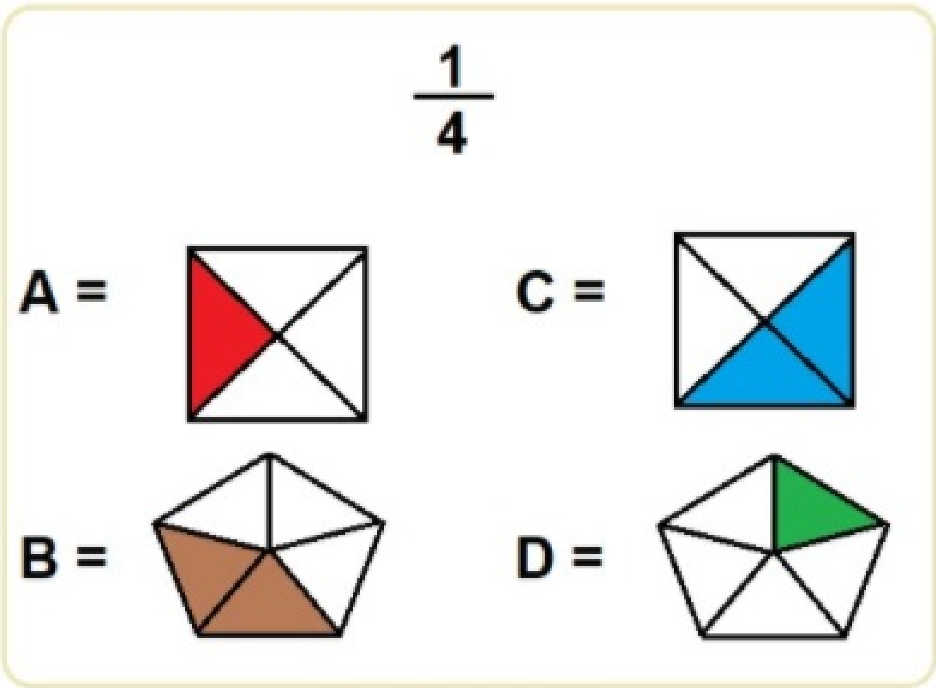
Fonte: Imagem do Autor.

- ○ A
- ○ B
- ○ C
- ○ D

Fonte: Produção do Autor.

Figura 70 – Formulário - Questão 2

Qual é a representação geométrica da fração abaixo? *



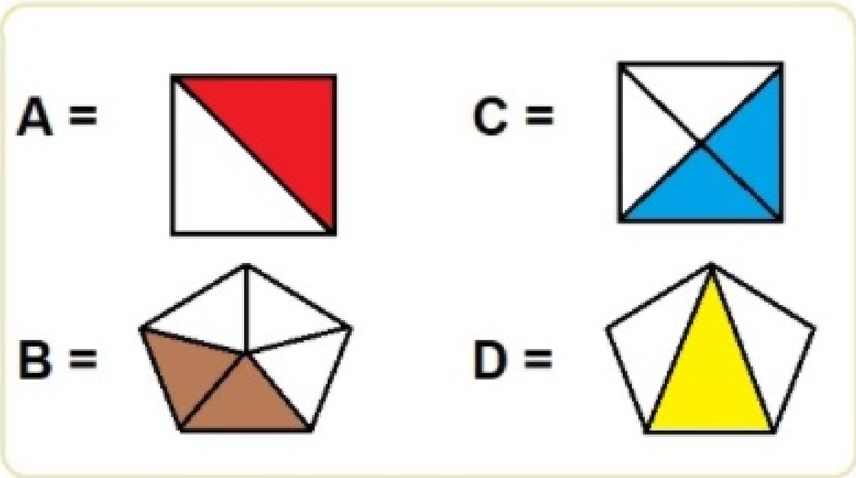
Fonte: Imagem do Autor.

- A
- B
- C
- D

Fonte: Produção do Autor.

Figura 71 – Formulário - Questão 3

Analisando as figuras abaixo, assinale a alternativa que indica duas frações equivalentes. *



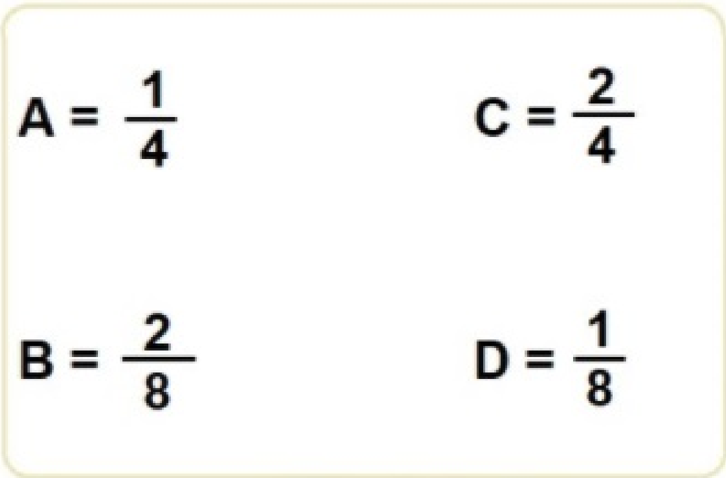
Fonte: Imagem do Autor.

- ○ Figuras A e B
- ○ Figuras B e D
- ○ Figuras A e C
- ○ Figuras B e C

Fonte: Produção do Autor.

Figura 72 – Formulário - Questão 4

De acordo com o que estudamos, uma das maneiras de encontrar frações equivalentes é multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número natural. Indique quais das frações abaixo são frações equivalentes. *



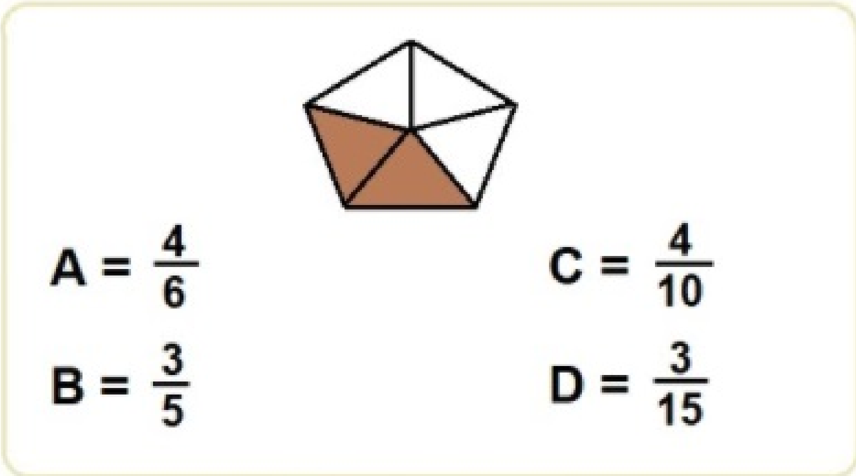
Fonte: Imagem do Autor.

- A e D
- A e B
- B e C
- B e D

Fonte: Produção do Autor.

Figura 73 – Formulário - Questão 5

Qual das frações é equivalente a fração representada na figura abaixo? *



Fonte: Imagem do Autor.

- Fração A
- Fração B
- Fração C
- Fração D

Fonte: Produção do Autor.

Anexos

ANEXO A – Documentos Suplementares

A.1 Decreto 407, de 16 de março de 2020

Figura 74 – Decreto 407, de 16 de março de 2020, do Governo do Estado de Mato Grosso

16 de Março de 2020 Diário Oficial Nº 27.711 Página 3

§ 2º Em sendo necessária a contratação temporária de pessoal para as unidades da Secretaria de Estado de Saúde, poderá ser adotado processo simplificado de contratação, nos termos do Decreto nº 406, de 16 de março de 2020.

Art. 5º Em caso de descumprimento das medidas previstas neste Decreto, as autoridades competentes devem apurar as eventuais práticas de infração administrativa prevista no artigo 10, inciso VII, da Lei Federal nº 6.437, de 20 de agosto de 1977, no artigo 65 da Lei Estadual nº 7.110, de 10 de fevereiro de 1999, bem como informar aos órgãos competentes eventuais práticas de ilícitos cíveis e criminais.

CAPÍTULO II
DA ADOÇÃO DE MEDIDAS TEMPORÁRIAS E EMERGENCIAIS DE PREVENÇÃO DE CONTÁGIO PELO CORONAVÍRUS

Art. 6º Durante a vigência deste Decreto ficam suspensos os eventos em ambientes fechados promovidos pela Administração Pública Estadual com mais de **200 (duzentas)** pessoas, incluída a programação dos equipamentos culturais públicos, tais como congressos, conferências, palestras e congêneres.

Art. 7º Durante a vigência deste Decreto, ficam suspensas as concessões de afastamentos aos profissionais vinculados às Secretarias de Estado de Saúde e de Segurança Pública, incluídos os afastamentos já deferidos, cuja fruição não se tenha iniciado.

Art. 8º No âmbito do setor privado do Estado de Mato Grosso, fica recomendada a suspensão de eventos em ambientes fechados com mais de 2**00 (duzentas)** pessoas.

Parágrafo único. Em caso de opção pela realização do evento, o organizador deverá observar a Portaria nº 1.139, de 10 de junho de 2013, do Ministério da Saúde, no que for cabível.

CAPÍTULO III
DA ADOÇÃO DE MEDIDAS TEMPORÁRIAS DE PREVENÇÃO DE CONTÁGIO PELO CORONAVÍRUS AOS SERVIDORES NO ÂMBITO DO PODER EXECUTIVO ESTADUAL

Art. 9º Fica(m) suspenso(as):

I - as atividades de capacitação, de treinamento ou de eventos coletivos realizados pelos órgãos ou entidades da administração pública estadual direta e indireta que impliquem a aglomeração de pessoas;
II - a participação de servidores ou de empregados em eventos internacionais e interestaduais, salvo com autorização expressa do Gabinete de Situação;
III - as atividades escolares da rede pública estadual, municipal e de ensino superior, no período de 23/03/2020 a 05/04/2020, a título de antecipação do recesso.

Parágrafo único. As visitas às unidades penais e socioeducativas sofrerão restrições mediante atos normativos expedidos pela Secretaria de Estado de Segurança Pública.

Art. 10 O servidor com suspeita de contaminação pelo novo coronavírus, conforme protocolo estabelecido pela autoridade sanitária, deverá comunicar o fato à chefia imediata e encaminhar as informações ao endereço eletrônico 'covid19@seplag.mt.gov.br'.

§ 1º Durante o período de vigência deste decreto, poderá ser instituído sistema de teletrabalho e revezamento da jornada de trabalho para os servidores com suspeita de contaminação por coronavírus, respeitada a carga horária correspondente aos respectivos cargos.

§ 2º A implantação do teletrabalho e do revezamento da jornada de trabalho mencionada no *caput* deste artigo será avaliada e regulamentada conforme norma complementar de cada órgão ou entidade, após validação pelo Gabinete de Situação.

Art. 11 O servidor que não apresentar sintomas (assintomático) e tiver retornado de viagens de localidades com casos comprovados de coronavírus, bem como aquele que tenha tido contato direto com casos confirmados, desempenhará suas atividades por meio de teletrabalho durante 14 (quatorze) dias, contados da data de retorno da viagem ou do contato, devendo comunicar o fato imediatamente à chefia imediata e encaminhar as informações ao endereço eletrônico 'covid19@seplag.mt.gov.br'.

Art. 12 Os gestores dos contratos de prestação de serviço deverão notificar as empresas contratadas para que, sob pena de responsabilização contratual em caso de omissão que resulte em prejuízo à Administração Pública:

I - adotem todos os meios necessários para o cumprimento das determinações constantes deste Decreto; e
II - conscientizem seus funcionários quanto aos riscos do coronavírus e quanto à necessidade de reportarem a ocorrência de sintomas de febre ou sintomas respiratórios, de retorno de viagem ou que tenham contato ou convívio direto com casos confirmados, prováveis ou suspeitos.

CAPÍTULO IV
DISPOSIÇÕES GERAIS

Art. 13 Os processos referentes aos assuntos relacionados ao enfrentamento do coronavírus de que trata este Decreto tramitarão em regime de urgência e prioridade em todos os órgãos e entidades do Estado de Mato Grosso.

Art. 14 Para a operacionalização da Lei Federal nº 13.979, de 6 de fevereiro de 2020, que estabelece as medidas para enfrentamento da emergência de saúde pública decorrente do coronavírus, deverá ser observada a regulamentação do Ministério da Saúde, realizada por meio da Portaria nº 356, de 11 de março de 2020.

Parágrafo único. As exceções à operacionalização prevista na norma de que trata o *caput* deste artigo deverá ser avaliada e autorizada pelo Secretário de Estado de Saúde.

Art. 15 O Gabinete de Situação poderá determinar outras medidas preventivas que entenderem pertinentes e necessárias de acordo com especial situação vivenciada.

Art. 16 Este Decreto entrará em vigor a partir de sua publicação.

Palácio Paiaguás, em Cuiabá, 16 de março de 2020, 199º da Independência e 132º da República.

MAURO MENDES
Governador do Estado

MAURO CARVALHO JUNIOR
Secretário-Chefe da Casa Civil

GILBERTO GOMES DE FIGUEIREDO
Secretário de Estado de Saúde

BASILIO BEZERRA GUIMARÃES DOS SANTOS
Secretário de Estado de Planejamento e Gestão

FRANCISCO DE ASSIS DA SILVA LOPES
Procurador-Geral do Estado

ROGÉRIO LUIZ GALLO
Secretário de Estado de Fazenda

MARIONEIDE ANGELICA KLIEMASCHEWSK
Secretária de Estado de Educação

ALEXANDRE BUSTAMANTE DOS SANTOS
Secretário de Estado de Segurança Pública

GOVERNO DO ESTADO DE MATO GROSSO Secretaria de Estado de Planejamento e Gestão - SEPLAG - Imprensa Oficial - IOMAT

Fonte: IOMAT

A.2 Termos

Figura 75 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você, pai/responsável pelo menor ...., está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa **O ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático**, desenvolvida por **Mychelly Agnes Marcelo Henrique**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada por **Dr. Vinicius Souza Bittencourt**, a quem poderei contatar / consultar a qualquer momento que julgar necessário através do e-mail vinicius.ufr@gmail.com.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é contribuir para propor mudanças, na realidade do processo de ensino e de aprendizagem do ensino de frações equivalentes.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações por mim oferecidas estão submetidos às normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos, da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP) do Conselho Nacional de Saúde, do Ministério da Saúde.

A colaboração se fará de forma anônima, por meio de preenchimento de questionários, atividades enviadas e participação durante as aulas, para investigação quantitativa e qualitativa, posteriormente guardados como meio digital. O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo(a) pesquisador(a) e/ou seu(s) orientador(es) / coordenador(es). Fui ainda informado(a) de que posso me retirar desse(a) estudo / pesquisa / programa a qualquer momento, sem prejuízo para meu acompanhamento ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Rondonópolis, ____ de _________________ de _____

Assinatura do(a) responsável: ______________

Fonte: Produção do Autor

Figura 76 – Termo de Anuência de Instituição

ESCOLA ESTADUAL ODORICO LEOCÁDIO DA ROSA
Rua Rio Grande do Sul, 2640 B. Novo Horizonte
CEP-78.705-362 Rondonópolis MT
E-mail: roo.ee.odoricol.rosa@seduc.mt.gov.br

TERMO DE ANUÊNCIA DE INSTITUIÇÃO

Declaro que esta instituição tem conhecimento do Projeto de Pesquisa intitulado "**O ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático**", cujo objetivo é contribuir e propor novas metodologias no ensino de frações equivalentes, em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, e, portanto, autoriza a sua realização pela pesquisadora **Mychelly Agnes Marcelo Henrique**, com base nas diretrizes e resoluções emitidas pelo sistema CEP-CONEP, bem como na Lei 13.709/18 (LGPD).

Nome da instituição: **Escola Estadual Odorico Leocádio da Rosa**

Nome completo do responsável legal pela instituição: **Cristiane Freitas Pereira da Silva**

Cargo: **Diretora da Escola**

Rondonópolis, ____ de __________________ de 2021

Assinatura do responsável da instituição: ____

Fonte: Produção do Autor