UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

NÚMEROS PERFEITOS

CALEBE LOPES BRANDÃO

FORTALEZA
2021

CALEBE LOPES BRANDÃO

NÚMEROS PERFEITOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia

FORTALEZA
2021

Ao Senhor Deus que é a razão da minha existência. Aos meus pais João e Eunice, minhas irmãs Evania e Euzivania e a minha esposa Vanessa.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é abordar as principais definições e teoremas conhecidos na busca de encontrar números perfeitos ímpares e/ou as tentativas que alguns matemáticos tem feito pra resolver esse mistério de sua existência ou da não existência dos mesmos. Para isso, relembramos a definição de números perfeitos que foi assim estabelecida desde a época dos pitagóricos, é apresentado o famoso teorema de Euclides, que traz uma condição necessária pra um número natural ser um perfeito par e no século XVIII foi demonstrada por Euler que somente a “fórmula de Euclides” expressa números perfeitos pares. A seguir tem-se a apresentação de alguns números relacionados que também apresentam características especiais que são os números práticos e perfeitos de ordem k, com k maior que 2. Na última parte é dedicada especificamente para números perfeitos ímpares (NPI), trazendo o teorema de Euler para NPIs, o teorema de Touchard e o índice de abundância como resultados gerais que norteiam o estudo de NPIs.

Palavras-chave: números perfeitos. Soma de divisores, teoremas de Euler, índice de abundância.

ABSTRACT

The main objective of this work is to approach the main definitions and theorems known in the search to find odd perfect numbers and / or the attempts that some mathematicians have made to solve this mystery of their existence or non-existence. For this, we recall the definition of perfect numbers that has been established since the time of the Pythagoreans, the famous Euclid's theorem is presented, which brings a necessary condition for a natural number to be a perfect pair and in the 18th century it was demonstrated by Euler that only "Euclid's formula" expresses even perfect numbers. The following is the presentation of some related numbers that also have special characteristics that are the practical and perfect numbers of order k, with k greater than 2. In the last part it is dedicated specifically to odd perfect numbers (OPN), bringing the theorem of Euler for OPNs, the Touchard theorem and the abundance index as general results that guide the study of OPNs.

Keywords: perfect numbers. Sum of divisors, Euler theorems, abundance index.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..7

1 NÚMEROS PERFEITOS 8
1.1 Introdução e definição de números perfeitos.......................................8
1.2 Números de Mersenne e sua relação com números perfeitos..................9
1.3 Um pouco de história dos números perfeitos pares...............................18
2 NÚMEROS MULTIPERFEITOS E NÚMEROS PRÁTICOS.............................21
2.1 Números multiperfeitos..21
2.2 Números práticos..23
2.3 Números relacionados...25
3 UMA ABORDAGEM SOBRE NÚMEROS PERFEITOS ÍMPARES.....................29
3.1 Introdução 29
3.2 Teorema de Euler para números perfeitos ímpares..............................29
3.3 Teorema de Touchard...31
3.4 O índice de abundância...33
3.5 Comparando os componentes de um número perfeito ímpar................ 36
3.6 Um pouco de história sobre os números perfeitos ímpares....................41
3.7 Conclusão 42
BIBLIOGRAFIA 43

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é abordar as principais definições e teoremas conhecidos na busca de encontrar números perfeitos ímpares e/ou as tentativas que alguns matemáticos tem feito pra resolver esse mistério de sua existência ou da não existência dos mesmos.

No capitulo 1, trazemos a definição de quando um número natural é perfeito, ou deficiente, ou abundante. Aparecem também os números de Mersenne e em particular os primos de Mersenne. A seguir o famoso teorema de Euclides-Euler que caracteriza todos os números perfeitos pares mostrando sua relação unívoca com os números de Mersenne. É introduzida a função $\sigma(n)$ que traz mais simplicidade e facilidade pra se verificar diversas propriedades sobre os números perfeitos pares e ímpares.

A seguir no capítulo 2, temos alguns outros números naturais com características especiais e similares aos números perfeitos, que são os números práticos, os números amigos, e a interessante generalização dos números perfeitos, que são os números perfeitos de ordem k, com $k \geq 2$, tendo como caso particular os perfeitos de ordem 2 que são estudados no capítulo 1. São apresentados diversas proposições sobre os números citados, tendo como principal resultado o teorema que diz que todo número perfeito de ordem k, possui no mínimo k fatores primos na sua decomposição.

No capitulo 3 é explorado os números perfeitos ímpares (NPI), trazendo dados computacionais exaustivos de limites inferiores para um possível número perfeito ímpar. Trazemos a demonstração do famoso teorema de Euler para NPIs, que diz que todo NPI se existir deve ter a forma $n = p^{\alpha}m^2$ com p primo e $p \equiv \alpha \equiv 1$ (mod 4); o teorema de Touchard, que expressa um NPI usando congruência, que estes devem ter ser $n \equiv 1$ (mod 12) ou $n \equiv 9$ (mod 36). Também apresentamos o índice de abundância para números perfeitos que é um recurso bastante utilizado pra encontrar propriedades ou classes de números que não podem ser um NPI.

1 - NÚMEROS PERFEITOS

1.1 INTRODUÇÃO E DEFINIÇÃO DE NÚMEROS PERFEITOS

Antigamente (por volta dos séculos V e VI. a.C) os pitagóricos acreditavam que "número" era o conceito fundamental do universo, eles então classificavam os números naturais de diversas formas de acordo com suas propriedades. Na busca de expressar a perfeição dos números naturais, os pitagóricos classificaram os números naturais em três grupos, de acordo com a soma de seus divisores próprios, o que na época denominavam "as partes do número". Divisores próprios de um número natural n são todos os divisores de n com exceção dele mesmo. Na linguagem atual essa classificação é a seguinte,

DEFINIÇÃO 1.1

Um número natural n > 1 é chamado de **número perfeito** quando for igual a soma de seus divisores próprios. Se essa soma for menor que n, ele é chamado de **número deficiente,** e se a soma for maior que n, ele é denominado **número abundante.**

O número 6 é perfeito pois seus divisores próprios são 1,2 e 3 sendo 1 + 2 + 3 = 6. Já os números 10 e 20 são, respectivamente, deficiente e abundante, pois os divisores próprios de 10 são 1, 2 e 5 cuja soma é 8 e os de 20 são 1, 2, 4, 5 e 10 onde a soma destes totaliza 22.

Um fato curioso é que embora existam muitos números deficientes e abundantes, os números perfeitos são bem raros. Até a época de Euclides (século III a.C) só se conheciam os quatro primeiros números perfeitos, são eles:

- 6 = 1 + 2 + 3
- 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14
- 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248
- 8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064

O quinto número perfeito (33.550.336) só foi descoberto no século XV e a partir desse números eles vão ficando cada vez maiores. Entretanto Euclides no seu IX volume da obra "Os Elementos" apresentou o seguinte resultado sobre números perfeitos escrito na linguagem atual, que todo número natural da forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ são números perfeitos, desde que o fator $(2^p - 1)$ seja primo.

1.2 – NÚMEROS DE MERSENNE E SUA RELAÇÃO COM NÚMEROS PERFEITOS

Vejamos um resultado importante sobre esse fator $2^p - 1$

PROPOSIÇÃO 1.2

Sejam *a* e *n* números naturais maiores do que 1. Se $a^n - 1$ é primo, então a = 2 e n é primo.

DEMONSTRAÇÃO.

Vamos supor inicialmente que $a^n - 1$ é primo. Se *a* > 2, *a* – 1 > 1 e *a* – 1$|a^n - 1$ e isso contradiz o fato de $a^n - 1$ ser primo. Portanto *a* = 2

Reciprocamente, suponhamos por absurdo que *n* não seja primo. Assim *n*= *rs* com *r* > 1 e *s* > 1. Entretanto $2^r - 1$ divide $(2^r)^s - 1 = 2^n - 1$, isso significa que $2^n - 1$ não é primo. Absurdo! Consequentemente *n* é primo. ∎

A recíproca da proposição 1.2 é falsa, ou seja, se p é primo não significa que $2^p - 1$ também seja primo. De fato, por exemplo, 11 é primo, no entanto $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ que claramente é um *número composto*.

DEFINIÇÃO 1.3

Os números da forma $M_p = 2^p - 1$, onde *p* é primo são denominados **números de Mersenne**. Os números de Mersenne que são primos, são chamados de **primos de Mersenne**.

Os números definidos acima são em homenagem ao matemático francês Marin Mersenne (1588 – 1648).

Em teoria dos números existe uma função bem conhecida, a função *σ(n)* que denota a soma de todos os divisores de um número natural *n. O*bserve que σ(1) = 1

Observando essa função podemos então dizer que um número natural *n* é um **número perfeito** quando σ(*n*) = 2*n*, ou n é um *número abundante* quando σ(*n*) > 2*n* e n é um *número deficiente* quando σ(*n*) < 2*n*.

EXEMPLO 1.4

Se $n \in \mathbb{N}$ então $\sigma(n) = n + 1$ se, e somente se, n é primo.

Resolução: De fato sendo $n \in \mathbb{N}$ seus únicos divisores são 1 e n se, e somente se, for um número primo. Isso equivale a $\sigma(n) = n + 1$.

Vejamos então como deduzir uma fórmula para $\sigma(n)$ em função da decomposição em fatores primos de um número natural $n > 1$. Todo número natural n tem uma escrita única em produto de fatores primos:

$$n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k}$$

E cada divisor d de n é da forma

$$d = {p_1}^{\beta_1}{p_2}^{\beta_2} \dots {p_i}^{\beta_i}$$

Onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ com $1 \leq i \leq k$.

A soma de todos os divisores de n então é o somatório

$$\sum {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k} \tag{1.1}$$

TEOREMA 1.5

Seja $n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k}$ a decomposição em fatores primos de um número natural n. Então

$$\sigma(n) = \frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\frac{{p_2}^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{{p_k}^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Pela discussão acima (1.1)

$$\sigma(n) = \sum {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k}$$

Esse somatório é exatamente igual a expansão

$$(1 + p_1 + \cdots + {p_1}^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + {p_k}^{\alpha_k})$$

Cada parêntese desses é a soma de termos de uma progressão geométrica. Segue então, a partir disso, a fórmula para $\sigma(n)$.

Segue imediatamente também desse resultado, o corolário a seguir onde mostra que a função $\sigma(n)$ é multiplicativa para números naturais primos entre si. ■

COROLÁRIO 1.6

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se mdc $mdc\ (m, n) = 1$, então

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\,\sigma(n)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que os números m e n tenham as respectivas decomposições em fatores primos e do fato deles serem relativamente primos temos,

$$m = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k} \quad \text{e} \quad n = {q_1}^{\beta_1}{q_2}^{\beta_2} \dots {q_l}^{\beta_l}$$

Onde cada p_i é diferente de qualquer q_j pelo fato de m e n serem relativamente primos. Portanto

$$mn = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}$$

E claramente então temos,

$$\sigma(mn) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{p_k+1} - 1}{p_k - 1} \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_l^{\beta_l+1} - 1}{q_l - 1} = \sigma(m)\sigma(n).$$

■

EXEMPLO 1.7

$$\sigma(6) = \sigma(2 \cdot 3) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot 4 = 12.$$

$$\sigma(360) = \sigma(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$$

Note que $\sigma(6) = 12 = 2 \cdot 6$ é um *número perfeito* e que $\sigma(360) = 1170 \neq 2 \cdot 360$ não é um *número perfeito*, na verdade é um *número abundante.*

Um fato curioso é que só se conhece números perfeitos pares. Ainda não se sabe sobre a existência ou não de números perfeitos ímpares.

Agora podemos enunciar e demonstrar o teorema que caracteriza todos os números perfeitos pares e que eles estão relacionados diretamente com os números de Mersenne definidos anteriormente (definição 1.3).

TEOREMA 1.8 (EUCLIDES-EULER)

Um número natural n é um número perfeito par se, e somente se, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, onde $2^p - 1$ é um primo de Mersenne.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos inicialmente que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Como $2^p - 1$ é um primo de Mersenne, então $p > 1$. Pelo fato de $(2^p - 1)$ ser ímpar, isso significa que $mdc(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$. Daí pelo teorema 1.5 , pelo corolário 1.6 e pelo exemplo 1.4 temos o seguinte

$$\sigma(n) = \sigma[2^{p-1}(2^p - 1)] = \sigma(2^{p-1})\, \sigma(2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2 - 1}\, 2^p = 2n$$

Segue-se então que n é um *número perfeito* par.

Reciprocamente, supondo agora que n é um *número perfeito* e par, então n pode ser escrito na forma $n = 2^{k-1}m$ com m sendo um natural ímpar. Como $mdc(2^{k-1}, m) = 1$, então aplicando novamente o teorema 1.5 e o corolário 1.6 temos

$$\sigma(n) = \sigma(2^{k-1}m) = \sigma(2^{k-1})\sigma(m) = (2^k - 1)\sigma(m)$$

Por outro lado $\sigma(n) = 2n = 2^k m$, o que implica

$$2^k m = (2^k - 1)\sigma(m) \tag{1.2}$$

Daí segue-se que $(2^k - 1) \mid 2^k m$, mas $mdc(2^k, m) = 1$, logo $(2^k - 1) \mid m$. Portanto, existe $b \in \mathbb{N}$ com $b < m$ tal que

$$m = b(2^k - 1) \tag{1.3}$$

Substituindo (1.3) em (1.2) fica

$$2^k(2^k - 1)b = (2^k - 1)\sigma(m)$$

simplificando, segue-se

$$\sigma(m) = 2^k b \tag{1.4}$$

Ora, pela igualdade (1.3), b é um divisor de m e mais $m = 2^k b - b \Rightarrow m + b = 2^k b$. Ou seja, $m + b = \sigma(m)$.

AFIRMAÇÃO: $b = 1$. De fato, se $b \neq 1$, então $\sigma(m) \geq 1 + b + m > b + m = \sigma(m)$ o que é um absurdo.

Portanto $\sigma(m) = m + 1$, o que mostra que m é primo (Exemplo 1.4). Disso e de (1.3), $m = 2^k - 1$ é então um primo de Mersenne e finalmente $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$.

■

A primeira parte da demonstração do teorema acima foi feita por Euclides na sua obra "Os Elementos" (no livro IX). A recíproca do mesmo foi feita por Leonhard Euler (1707-1783). Pelo fato de o número $2^p - 1$ ser um primo de Mersenne então p é primo (Proposição 1.2). Isso então reduz a existência de números perfeitos pares à quantidade de números primos de Mersenne, que é um problema em aberto, saber se é ou não infinita a quantidade desses números. Em outras palavras isso significa que o conjunto dos primos de Mersenne está em correspondência unívoca com o conjunto dos números pares que são perfeitos.

EXEMPLO 1.9.

(a) Nenhum número primo é um número perfeito.
(b) Nenhuma potência de primo é um número perfeito.
(c) Um quadrado perfeito não pode ser um número perfeito.

Resolução:

(a) Tomemos $n \in \mathbb{N}$ um número primo. Pelo Exemplo 1.4, $\sigma(n) = n + 1$. Sendo assim se n fosse perfeito teríamos $\sigma(n) = n + 1 = 2n \Rightarrow n = 1$. Absurdo!

(b) Considerando agora que fosse um número perfeito a potencia n^p, então

$$2n^p = \sigma(n^p) = 1 + n + n^2 + \cdots + n^p \Rightarrow n^p = 1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-1} = \frac{n^p}{p-1}$$

o que é um absurdo. Isso também mostra que toda potência de um primo é um *número deficiente.*

(c) Sendo n um número quadrado perfeito, então $\sigma(n)$ é ímpar (proposição 1.13) logo jamais pode ser perfeito, pois pra n ser perfeito devemos ter $\sigma(n) = 2n$ que é par.

EXEMPLO 1.10

(i) Mostre que os únicos dois números primos cujo produto é perfeito são 2 e 3

(ii) Seja $n \in \mathbb{N}$ um *número perfeito* ou um *número abundante*. Provar que todo múltiplo $mn, m \geq 2$ é *abundante*.

(iii) Prove que todo divisor de um número deficiente é deficiente.

Resolução:

(i) Tomemos dois primos distintos, digamos p e q cujo produto é perfeito. Vamos admitir que $p < q$, assim

$$\sigma(pq) = 1 + p + q + pq = 2pq \Rightarrow 1 + p + q = pq$$

Se $p = 2 \Rightarrow q = 3$,
Se $p > 2 \Rightarrow 1 + q = p(q-1) \geq 2q \Rightarrow 1 \geq q$. Absurdo, visto que q é primo. A recíproca é imediata.

(ii) Se n é um número perfeito então $\sigma(n) = 2n$. Assim o múltiplo mn contem todos os divisores de n e mais pelo menos os divisores $2n, 3n, \ldots, mn$. Daí $\sigma(mn) \geq 2n + 2n + 3n + \cdots + mn > 2mn$ mostrando então que é um *numero abundante.* Se n for *abundante* então $\sigma(n) > 2n$; e mais claramente $\sigma(mn) > 2n + 2n + 3n + \cdots + mn > 2mn$ comprovando que mn é um *número abundante.*

(iii) A demonstração se dar por redução ao absurdo. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ um número deficiente. Se tivesse um divisor d de n (e daí existe $c \in \mathbb{N}; cd = n$) que não fosse deficiente, então seria perfeito ou abundante. Mas daí pelo ítem anterior o múltiplo de d que é $cd = n$ também seria abundante. Absurdo!

A seguir vejamos uma proposição interessante que demonstra em que algarismos os números perfeitos pares sempre terminam e em relação a soma de seus algarismos.

PROPOSIÇÃO 1.11

Demonstre para todo número perfeito par os seguintes resultados

(a) Ele termina em 6 ou em 8.
(b) Se $n > 6$ é um número perfeito par, então a soma de seus algarismos é congruente a 1 (mod 9).
(c) n é um número perfeito par então $8n + 1$ é um quadrado perfeito.

DEMONSTRAÇÃO.

(a) Seja n um número perfeito par. Pelo teorema de Euclides-Euler $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ com p primo.

Se $p = 2$, então $n = 2^{2-1}(2^2 - 1) = 6$ e o resultado é verdadeiro.

Se $p > 2$, então p é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$. Vejamos,

(i) Se $p = 4k + 1$ implica

$$n = 2^{4k}(2^{4k+1} - 1) = 2^{4k} \cdot 2^{4k+1} - 2^{4k} = 16^k \cdot 16^k \cdot 2 - 16^k$$
$$= 2 \cdot 16^{2k} - 16^k.$$

Aplicando agora congruência segue que

$n = 2 \cdot 16^{2k} - 16^k \equiv 2 \cdot 6 - 6 \equiv 6$ (mod 10). Isto é, n termina em 6.

(ii) Se $p = 4k + 3$ implica

$$n = 2^{4k+2}(2^{4k+3} - 1) = 2^{8k+5} - 2^{4k+2} = 2^{4(2k+1)+1} - 4 \cdot 16^k$$
$$= 2 \cdot 16^{2k+1} - 4 \cdot 16^k$$

Aplicando congruência, temos

$n = 2 \cdot 16^{2k+1} - 4 \cdot 16^k \equiv 2 \cdot 6 - 4 \cdot 6 \equiv -12 \equiv 8$ (mod 10). Isto é, n termina em 8.

(b) Esse problema é equivalente a dizer que $n > 6$ é um número perfeito então $n \equiv 1$ (mod 9).

O número 6 é o caso em que $p = 2$ para a fórmula do teorema 1.5; para os primos maiores que 2 vamos usar o fato de que todos eles são, ou da forma $6k + 1$, ou da forma $6k + 5$.

(i) Para $p = 6k + 1$,

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{6k}(2^{6k+1} - 1) = 64^k(2 \cdot 64^k - 1)$$
$$= 2 \cdot 64^{2k} - 64^k$$

Assim $n = 2 \cdot 64^{2k} - 64^k \equiv 2 \cdot 1 - 1 \equiv 1$ (mod 9)

(ii) Para $p = 6k + 5$,

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{6k+4}(2^{6k+5} - 1) = 2^{6k} \cdot 2^{6k+9} - 2^{6k+4} =$$
$$= 2^3 \cdot 2^{6k} \cdot 2^{6k+6} - 2^{6k+4} = 8 \cdot 64^k \cdot 64^{k+1} - 16 \cdot 64^k)$$

Assim $n = 8 \cdot 64^{2k+1} - 16 \cdot 64^k \equiv 8 \cdot 1 - 16 \cdot 1 \equiv -8 \equiv 1$ (mod 9).

(c) Seja n um número perfeito par; sabemos que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ com $(2^p - 1)$ primo. Assim

$$8n+1 = 8\cdot 2^{p-1}(2^p-1)+1 = 2^{p+2}(2^p-1)+1 = 2^{2p+2}-2^{p+2}+1$$
$$= (2^{p+1})^2 - 2\cdot 2^{p+1}+1 = (2^{p+1}-1)^2$$

■

EXEMPLO 1.12.

Um número natural T_n é dito número triangular se pode ser representado na forma de um triangulo equilátero e um número natural h_n é chamado de número hexagonal se pode ser representado na forma de um hexágono regular. As fórmulas que indicam respectivamente o n-ésimo número triangular e hexagonal são

$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $h_n = n(2n-1)$.

(a) Prove que todo número perfeito par é um número triangular.
(b) Prove que todo número perfeito par é um número hexagonal.

Resolução:

(a) Seja $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ um número perfeito. Assim
$$n = \frac{2^p(2^p-1)}{2} = \frac{(2^p-1)(2^p-1+1)}{2}$$
o que caracteriza um número triangular.

(b) Seja $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ um número perfeito. Assim
$n = 2^{p-1}(2^p-1) = 2^{p-1}(2\cdot 2^{p-1}-1)$ o que caracteriza um número hexagonal.

Vamos agora encerrar essa seção trazendo mais algumas proposições com o destaque para números perfeitos pares.

PROPOSIÇÃO 1.13

$\sigma(n)$ é ímpar se, e somente se n for um quadrado perfeito ou duas vezes um quadrado perfeito.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $n \in \mathbb{N}$ um número quadrado perfeito, então sua decomposição em fatores primos é
$$n = {p_1}^{2\alpha_1}{p_2}^{2\alpha_2}\ldots{p_k}^{2\alpha_k} \quad \text{com } p_1 < p_2 < \cdots < p_k.$$
A quantidade de divisores de n é $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1)$ que claramente é um número ímpar. Assim,

(i) Se n é ímpar, todos os seus divisores são ímpares e dai $\sigma(n)$ é uma soma de parcelas composta de números ímpares e em quantidade ímpar. Portanto $\sigma(n)$ é ímpar.

(ii) Se n é par então $n = 2^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$ que possui $2\alpha_1(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1)$ divisores pares e $(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1)$ divisores ímpares. Isso garante que também nesse caso $\sigma(n)$ é ímpar.

Reciprocamente consideremos um número natural n tal que $\sigma(n)$ seja ímpar. A partir da decomposição em fatores primos de n e a fórmula com somatório para $\sigma(n)$ (vide teorema 1.5) temos,

$$\sigma(n) = \sum p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Que é equivalente a

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k})$$

Como $\sigma(n)$ é ímpar, então cada parêntese da expressão anterior contém um número ímpar. Para cada primo $p_i > 2$ isso só acontece se o expoente a_i for par. No caso do primo $p = 2$ é indiferente o seu expoente ser par ou ímpar. Se este for par então n é quadrado perfeito; se o expoente for ímpar, n é o dobro de um quadrado perfeito.

■

PROPOSIÇÃO 1.14

Mostre que a soma dos inversos dos divisores de um número perfeito é igual a 2.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $d_1, d_2, \cdots, d_r$ os divisores de n um número perfeito. Chamemos de x a soma pedida, queremos então calcular

$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{d_i}$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por n obtemos

$$nx = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{d_i}$$

Mas o segundo membro dessa igualdade é exatamente a soma de todos os divisores de n. Portanto

$$nx = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{d_i} = \sigma(n) = 2n \Rightarrow x = 2$$

■

PROPOSIÇÃO 1.15.

(a) O produto P dos divisores de número natural n é $n^{d(n)/2}$, onde $d(n)$ é o número de divisores de n.

(b) Para $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, um número perfeito par. Mostre que o produto dos divisores positivos de n é n^p.

DEMONSTRAÇÃO.

(a) Consideremos a decomposição em fatores primos de n

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Cada um de seus divisores é

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

Onde $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ com $1 \le i \le k$.

Pelo principio fundamental da contagem o número de divisores $d(n)$ de n é

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

É fácil ver que $d(n)$ é ímpar se, e somente se, n é um quadrado perfeito e $d(n)$ é par se, e somente se, n não é um quadrado perfeito.

Agora considerando o produto dos divisores, se $n = 1$, o resultado é óbvio. Para os demais casos vejamos:

(i) n é quadrado perfeito. Nesse caso, nesse caso $d(n)$ é ímpar. Sejam $d_1, d_2, \cdots, d_r$ os divisores de n. Os divisores $d_i < \sqrt{n}$ fazem par com apenas um divisor $\frac{n}{d_i} > \sqrt{n}$. Como n é quadrado perfeito $\sqrt{n}$ também é um divisor de n. Assim os divisores de n dividem-se em $\frac{d(n)-1}{2}$ pares $\left(d_i, \frac{n}{d_i}\right)$ e o divisor $\sqrt{n}$. Portando o produto

$$P = n^{[d(n)-1]/2} . n^{1/2} = n^{d(n)/2}.$$

(ii) n não é quadrado perfeito. Nesse caso $\sqrt{n}$ não é um divisor de n e para todo divisor $d_i < \sqrt{n}$ há um único divisor $\frac{n}{d_i} > \sqrt{n}$. Como $d(n)$ é par temos então $\frac{d(n)}{2}$ pares tais que o produto destes é $P = n^{d(n)/2}$.

(b) Pelo item anterior o número de divisores de $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ é

$$d(n) = [(p - 1) + 1)(1 + 1) = 2p$$

e daí

$$P = n^{d(n)/2} = n^{2p/2} = n^p.$$

■

PROPOSIÇÃO 1.16

Todo número perfeito par é igual a soma dos primeiros $2^{(p-1)/2}$ cubos ímpares. Onde $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ é esse número perfeito.

DEMONSTRAÇÃO.

Para provar esse resultado vamos utilizar a identidade

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Ou equivalentemente se escreve

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \qquad (1.5)$$

Agora então vejamos a soma dos primeiros $2^{(p-1)/2}$ cubos e usando a identidade (1.5) temos,

$$\begin{aligned}
&1^3 + 3^3 + \cdots + \left(2 \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^3 \\
&= 1^3 + 2^3 + \cdots + \left(2 \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^3 - \left[2^3 + 4^3 + \left(2 \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} - 2\right)^3\right] \\
&= \left(1 + 2 + 3 + \cdots + 2^{\frac{p+1}{2}} - 1\right)^2 - 2^3\left[1^3 + 2^3 + \cdots + \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^3\right] \\
&= \left[\frac{\left(1 + 2^{\frac{p+1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p+1}{2}} - 1\right)}{2}\right]^2 - 2^3\left[\frac{\left(1 + 2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)}{2}\right]^2 \\
&= \left[\left(\frac{\left(2^{\frac{p+1}{2}}\right)\left(2^{\frac{p+1}{2}} - 1\right)}{2}\right)\right]^2 - 2^3\left[\left(\frac{\left(2^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)}{2}\right)\right]^2 \\
&= 2^{p-1}\left(2^{\frac{p+1}{2}} - 1\right)^2 - 2\left[2^{p-1}\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^2\right] \\
&= 2^{p-1}\left[2^{p+1} - 2^{\frac{p+3}{2}} + 1 - 2\left(2^{p-1} - 2^{\frac{p+1}{2}} + 1\right)\right] \\
&= 2^{p-1}\left[2^{p+1} - 2^{\frac{p+3}{2}} + 1 - 2^p + 2^{\frac{p+3}{2}} - 2\right] = 2^{p-1}(2^{p+1} - 2^p - 1) = \\
&= 2^{p-1}(2^p - 1) = n
\end{aligned}$$

■

1.3 – UM POUCO DE HISTÓRIA DOS NÚMEROS PERFEITOS PARES.

René Descartes (1596-1650) em uma carta enviada a Mersenne em novembro de 1638, pensou que poderia provar que todos os números pares perfeitos do tipo de Euclides e que todos os números ímpares perfeitos devem ter a forma px^2 em que p é primo. Ele não viu nenhuma razão pela qual um número perfeito ímpar possa existir (Dickson 2005, p. 12).

Mersenne afirmou que $2^p - 1$ é primo se p for um primo. Um pouco depois da morte de Mersenne em 1652, J. Broecius observou que, embora Euclides tenha dado números perfeitos na “fórmula de Euclides” até então conhecidos, eram obtidos usando progressões geométricas, eles podem ser obtidos a partir de soma de termos de progressões aritméticas. Por exemplo

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 31$$

Jonhann Jacob Hainlin (1588-1660) afirmou que os únicos números perfeitos menores que 10^8 são 6, 28, 496, 8128, 130816, 2096128 e 33550336 e que todos os números perfeitos terminam alternadamente em 6 e 8. Em 1668 Samuel Tennulius (1635-1688) confirmou o que Jonhann Jacob disse, mas comprovou que $130816 = 256 \cdot 511$ e que $2096128 = 1024 \cdot 2047$ não são números perfeitos. Hoje também já se sabe que os números perfeitos não terminam alternadamente em 6 e 8 (o quinto e o sexto terminam em 6).

Jacques Ozanam (1640-1718) afirmou que há uma infinidade de números perfeitos e que todos são dados pela regra de Euclides, que deve ser aplicada apenas quando o fator ímpar é um primo (Dickson 2005, p. 15). Ou seja, ele já acreditava na recíproca da proposição de Euclides para números perfeitos pares.

Até o século XIX só se conheciam 12 números perfeitos. Depois que foi desenvolvido os computadores então possibilitou a descoberta de novos primos de Mersenne e consequentemente de números perfeitos. Na década de 1950 a 1960 foram descobertos mais 6 números, sendo 5 deles só em 1952 e o outro em 1957.

Em 1996 quando já se conheciam 34 números perfeitos, foi criado o **GIMPS** (**G**reat **I**nternet **M**ersenne **P**rime **S**earch) um grupo de pesquisa que busca descobrir primos de Mersenne. O GIMIS utiliza um software especial instalado em microcomputadores dedicado pra essa missão. Desde então esse grupo já descobriu mais 17 novos números primos de Mersenne e isso nos mostra então que já sabemos da existência de 51 números perfeitos pares. A descoberta do 51° primo de Mersene aconteceu no dia 7 de dezembro de 2018 e confirmada no dia 21 do mesmo mês depois de novas verificações. Abaixo segue uma tabela com a descoberta dos primos de Mersenne que o GIMPS já realizou e que por sua vez são os maiores primos já descobertos.

ordem	Data ou confirmação da descoberta	Primo M_q	Quantidade de algarismos
35º	13 de novembro de 1996	$M_{1398269}$	420.921
36°	24 de agosto de 1997	$M_{2976221}$	895.932
37º	27 de janeiro de 1998	$M_{3021377}$	909.526
38º	1 de junho de 1999	$M_{6972593}$	2.098.960
39º	14 de novembro de 2001	$M_{13466917}$	4.053.946
40º	17 de novembro de 2003	$M_{20996011}$	6.320.430
41º	15 de maio de 2004	$M_{24036583}$	7.235.733
42º	18 de fevereiro de 2005	$M_{25964951}$	7.816.230
43º	15 de dezembro de 2005	$M_{30402457}$	9.152.052
44º	4 de setembro 2006	$M_{32582657}$	9.808.358
45º	6 de setembro de 2008	$M_{37156667}$	11.185.272
46º	12 de abril de 2009	$M_{42643801}$	12.837.064
47º	23 de agosto de 2008	$M_{43112609}$	12.978.189
48º	25 de janeiro de 2013	$M_{57885161}$	17.425.170
49º	7 de janeiro de 2016	$M_{74207281}$	22.338.618
50º	3 de janeiro de 2018	$M_{77232917}$	23.249.425
51º	21 de dezembro de 2018	$M_{82589933}$	24.862.048

2 – NÚMEROS MULTIPERFEITOS E NÚMEROS PRÁTICOS

Nesse capitulo vamos estabelecer uma generalização dos números perfeitos e conhecer algumas propriedades. Vamos definir números práticos no conjunto $\mathbb{N}$, e também alguns outros números naturais com características ou propriedades especiais.

2.1 – NÚMEROS MULTIPERFEITOS.

Nessa seção vamos generalizar a definição de números perfeitos e conhecer algumas proposições que relacionam os mesmos entre si.

DEFINIÇÃO 2.1.

Um número natural n é chamado de *número perfeito de ordem* k, ou um *número* k*-perfeito*, quando $\sigma(n) = kn$, onde $k \geq 2$.

Observe que pela definição 2.1. os *números perfeitos* que já conhecemos são os *números perfeitos de ordem 2* ou um *número 2-perfeito.*

EXEMPLO 2.2.

O numero 120 é um número perfeito de ordem 3 e o 30240 é um número perfeito de ordem 4.

Resolução. De fato,

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \Rightarrow \sigma(120) = \frac{2^4-1}{2-1}\frac{3^2-1}{3-1}\frac{5^2-1}{5-1} = 15 \cdot 4 \cdot 6 = 360 = 3 \cdot 120$$

e

$$\begin{aligned} 30240 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \Rightarrow \sigma(30240) &= \frac{2^6-1}{2-1}\frac{3^4-1}{3-1}\frac{5^2-1}{5-1}\frac{7^2-1}{7-1} \\ &= 63 \cdot 40 \cdot 6 \cdot 8 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 4 \cdot 30240. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.3.

Nenhum número primo é um *número perfeito de ordem k*. Idem para as potências de um primo.

Resolução. Para todo número primo p, tem-se que $\sigma(p) = 1 + p < kp,\ k \geq 2.$

Da mesma forma para a potência p^m se for um *número perfeito de ordem k*, tem-se

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n = kp^n \Rightarrow 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} = (k-1)p^n$$
$$\Rightarrow \frac{p^n - 1}{p - 1} = (k-1)p^n.$$

O que é um absurdo, já que $\frac{p^n-1}{p-1} < p^n \leq (k-1)p^n$.

Vejamos alguns exemplos que relacionam os números multiperfeitos.

EXEMPLO 2.4.

(a) Se n é um *número 3-perfeito* e não é múltiplo de 3, prove que $3n$ é um *número 4-perfeito*.
(b) Se $3n$ é um *número 4k-perfeito* e n não é divisível por 3, então n é um *número 3k-perfeito*.
(c) Se n é um *número 5-perfeito* e não é múltiplo de 5, mostre que $5n$ é um *número 6-perfeito.*

Resolução. (a) Como n é um número 3-perfeito, segue que $\sigma(n) = 3n$. Pelo fato de 3 não ser divisor de n temos que $\sigma(3n) = \sigma(3) \cdot \sigma(n) = (1+3) \cdot 3n = 4 \cdot 3n$ mostrando que $3n$ é um número perfeito de ordem 4; (b) Pelo enunciado segue que $\sigma(3n) = 4k(3n)$. Por outro lado $\sigma(3n) = \sigma(3)\sigma(n) = 4\sigma(n)$. Portanto $4k(3n) = 4\sigma(n)$, o que implica $\sigma(n) = 3k(n)$ o que equivale a dizer que n é um número 3k-perfeito; (c) A demonstração é análoga a do item (a), basta ver que como n é um número 5-perfeito, segue que $\sigma(n) = 5n$. Pelo fato de 5 não ser divisor de n temos que $\sigma(5n) = \sigma(5) \cdot \sigma(n) = (1+5) \cdot 5n = 6 \cdot 5n$ mostrando que $5n$ é um número perfeito de ordem 6.

O exemplo acima pode ser generalizado, ver a proposição 2.17.

A seguir vamos demonstrar o principal resultado dessa seção.

TEOREMA 2.5.

Todo número perfeito de ordem k possui no mínimo k fatores primos distintos na sua decomposição.

Demonstração:

Seja $n \in \mathbb{N}$ um *número perfeito de ordem k*, tomemos sua decomposição em fatores primos $n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_l}^{\alpha_l}$. Por outro lado $\sigma(n) = kn$, daí temos a igualdade

$$\frac{{p_1}^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{{p_l}^{\alpha_l+1} - 1}{p_l - 1} = k{p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_l}^{\alpha_l}$$

Dividindo ambos os membros por n obtemos

$$\frac{p_1 - (p_1{}^{\alpha_1})^{-1}}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_l - (p_l{}^{\alpha_l})^{-1}}{p_l - 1} = k$$

Desconsiderando os termos negativos nos numeradores da igualdade acima tem-se a desigualdade

$$\frac{p_1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_l}{p_l - 1} > k \qquad (2.1)$$

Observe que os fatores $\frac{p_i}{p_i - 1}$ termos da desigualdade acima são os termos da sequencia estritamente decrescente (2/1, 3/2, 5/4, 7/6, ...) obtida considerando a ordem crescente dos números primos. Mas a desigualdade (2.1) só é verificada se $l \geq k$. (2.2)

■

Vejamos uma verificação de (2.2). De fato

$$\underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}}_{2\ fatores} = \frac{3}{1} > 2$$

$$\underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}}_{3\ fatores} = \frac{15}{4} > 3$$

$$\underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6}}_{4\ fatores} = \frac{35}{8} > 4$$

$$\underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12}}_{6\ fatores} = \frac{1001}{192} > 5$$

Os exemplos acima demonstram os seguintes corolários do teorema 2.5.

COROLÁRIO 2.6.

Os *números perfeitos de ordem 2,3 e 4* possuem respectivamente, no mínimo 2,3 e 4 fatores primos distintos na sua decomposição.

COROLÁRIO 2.7.

Todo número perfeito de ordem k, com k > 4 possui mais do que k fatores primos na sua decomposição em fatores primos distintos.

2.2- NÚMEROS PRÁTICOS

Nessa seção vamos definir números práticos e conhecer algumas de suas propriedades.

DEFINIÇÃO 2.8.

Um número natural n chama-se um *número prático* se , para todo $k \leq n, k$ for uma soma de divisores próprios e distintos de n.

EXEMPLO 2.9.

Os números 4 e 12 são práticos.

De fato $d(4) = \{1,2,4\}$ e além desses divisores 3 = 1 + 2. Para o número 12, vemos que $d(12) = \{1,2,3,4,6,12\}$ e além desses divisores, temos 5 = 2 + 3; 7 = 3 + 4; 8 = 2 + 6; 9 = 3 + 6; 10 = 4 + 6; 11 = 2 + 3 + 6.

Vamos agora apresentar uma proposição que relaciona *números perfeitos* e *números práticos.*

PROPOSIÇÃO 2.10.

Todo número perfeito par é um número prático.

Demonstração:

Seja $n \in \mathbb{N}$ um *número perfeito* par. Sabemos que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ sendo $p, (2^p - 1)$ números primos. Os divisores próprios de n é a união dos dois conjuntos de números naturais

A $= \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{p-1}\}$ e B = $\{(2^p - 1), 2(2^p - 1), 2^2(2^p - 1), \dots 2^{p-2}(2^p - 1)\}$

Vamos mostrar como se obter para todo $k \leq n$, uma soma de divisores próprios que resulte em k. Analisemos em três casos:

(i) Se $1 \leq k \leq 2^{p-1}$, então $k \in$ A ou k é uma soma de elementos de A (é só verificar a escrita de k na base 2 pra se ter exatamente as potências de 2 que devem ser somadas para dar k).

(ii) Se $2^{p-1} < k < n$, então pela divisão de Euclides, dividindo k por $(2^p - 1)$ segue que

$$k = (2^p - 1)q + r, \text{ com } 0 \leq r < 2^p - 1$$

Observe que $q < 2^{p-1}$. Pelo caso acima vemos então que $q \in$ A ou q é uma soma de elementos de A. Acrescentando a isso, o resto r também é uma soma de elementos de A. De fato os elementos de A ou a soma de elementos de A produzem todos os números ate $(2^p - 1)$, basta analisar novamente esses números escritos na base 2. Assim escrevemos

$$k = (2^p - 1)(2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_j}) + (2^{t_1} + 2^{t_2} + \cdots + 2^{t_l}) \qquad (2.3)$$

onde cada expoente $s_i \leq p-1$ e cada expoente $t_i \leq p-1$. Expandindo então essa expressão (2.3) temos que o produto dos dois primeiros parênteses são formados por divisores de n pertencentes a B e o segundo parêntese formado por divisores de n pertencentes a A.

(iii) Se $k = n$, o resultado é óbvio. ■

EXEMPLO 2.11.

O único número pratico ímpar é o 1.

Resolução. É imediato ver que 1 é um número prático. Se existisse um número pratico ímpar $n > 2$, então 2 deveria ser um divisor de n ou uma soma de dois divisores distintos de n e isso é impossível.

Esses números da definição 2.8. receberam o nome de “números práticos” a partir de 1948 e é devido ao matemático A. K. Srinivasan mas já eram conhecidos alguns números práticos por Fibonacci (c 1170 – c 1250) pra representar números racionais como soma de frações egípcias onde os denominadores são números práticos.

2.3 – NÚMEROS RELACIONADOS

DEFINIÇÃO 2.12.

Um número natural n é dito *número menos deficiente* se a soma de seus divisores próprios for igual ao seu antecessor. Equivalentemente, um número natural n é *menos deficiente* se $\sigma(n) = 2n - 1$ ou ainda $\sigma(n) - n = n - 1$

EXEMPLO 2.13.

Os números 8 e 32 são *números menos deficientes* pois a soma dos divisores próprios de 8 é $1 + 2 + 4 = 7$ e a soma dos divisores próprios de 32 é $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.

DEFINIÇÃO 2.14.

Dizemos que dois números naturais são *números amigos* se cada um deles é igual a soma dos divisores próprios do outro.

EXEMPLO 2.15.

Os números 220 e 284 são números amigos, pois $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ e $284 = 2^2 \cdot 71$. A soma dos divisores próprios de 220 é

$$\sigma(220) - 220 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1}\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\frac{11^2 - 1}{11 - 1} - 220 = 7 \cdot 6 \cdot 12 - 220 = 284$$

e

$$\sigma(284) - 284 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1}\frac{71^2 - 1}{71 - 1} = 7 \cdot 72 - 284 = 220$$

Vejamos agora mais alguns exemplos e proposições pra complementar o que foi estudado anteriormente nesse capítulo.

EXEMPLO 2.16

Seja $n \in \mathbb{N}$ um *número perfeito de ordem 3* . Se 3 divide n, mas 5 e 9 não dividem n, mostre que $45n$ é um *número perfeito de ordem 4*.

Resolução.

Pelo enunciado vemos que $\sigma(n) = 3n$ e $n = 3k$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e 3 não divide k. Assim

$$\sigma(n) = \sigma(3k) = \sigma(3)\sigma(k) = 4\sigma(k)$$

A partir disso temos

$$\begin{aligned}\sigma(45n) = \sigma(3^3 \cdot 5 \cdot k) = \sigma(3^3)\sigma(5)\sigma(k) = 40 \cdot 6 \cdot \sigma(k) = 60[4\sigma(k)] \\ = 60 \cdot \sigma(n) = 60 \cdot 3n = 180n = 4 \cdot 45n\end{aligned}$$

O que significa dizer que $45n$ é um *número 4-perfeito.*

A proposição a seguir é uma generalização dos itens (a) e (c) do exemplo 2.4.

PROPOSIÇÃO 2.17.

(a) Considere um numero natural n que seja *perfeito de ordem* p, com p primo. Se p não dividir n, então pn é um *número perfeito de ordem* $p + 1$.

(b) Sejam $n, k, p \in \mathbb{N}$ com p primo. Se pn é um número perfeito de ordem $(p + 1)k$ e n não é divisível por p, então n é um *número perfeito de ordem* pk.

DEMONSTRAÇÂO.

(a) Como n é um *número perfeito de ordem* p, segue que $\sigma(n) = pn$. Pelo fato de p não ser divisor de n temos que

$$\sigma(pn) = \sigma(p) \cdot \sigma(n) = (1 + p) \cdot pn$$

mostrando que pn é um *número perfeito de ordem* $p + 1$.

(b) Pelo enunciado segue que $\sigma(pn) = (p + 1) \cdot k \cdot (pn)$. Por outro lado

$$\sigma(pn) = \sigma(p) \cdot \sigma(n) = (p + 1) \cdot \sigma(n).$$

Portanto

$$(p + 1) \cdot k \cdot (pn) = (p + 1) \cdot \sigma(n) \Rightarrow \sigma(n) = (kp) \cdot n$$

o que equivale a dizer que n é um número pk – perfeito.

■

EXEMPLO 2.18

Mostre que todas as potências de 2 são

(a) *Números menos deficientes.*

(b) *Números práticos*

Resolução:

(a) Tomemos $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, é fácil ver que

$$\sigma(2^k) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^k - 1$$

Que pela definição 2.12. é um *número menos deficiente.*

(b) A solução é a mesma apresentada na proposição 2.10. o número $n = 2^k$ tem os divisores $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$. Portanto além desses divisores os demais números $1 < m < 2^k$ são tais que m é uma soma de divisores próprios de n; pra isso basta verificar a escrita de m na base 2 pra se ter exatamente as potências de 2 que devem ser somadas para dar m.

EXEMPLO 2.19

Mostre que dos *números deficientes* os únicos que podem ser *números práticos* são os *menos deficientes.*

Resolução:

É uma consequência imediata da definição de números práticos. Sendo $n \in \mathbb{N}$ um *número prático* então todos os números naturais menores que n devem ser uma soma de divisores próprios de n. Isso garante que, de 1 até $n - 1$ vai haver tal soma de divisores distintos de n. Em símbolos $\sigma(n) \geq 2n - 1$.

EXEMPLO 2.20.

Sejam m, n um par de *números amigos.* Demonstre os seguintes resultados:

(a) $\sigma(m) = m + n = \sigma(n)$.

(b) Se $m > n$, então m é um *número deficiente* e n é *um número abundante.*

(c) Se m é par e n é ímpar, então n é um quadrado perfeito.

Resolução:

(a) O resultado segue diretamente da definição de números amigos. Assim em símbolos podemos escrever a definição 2.14.

$$\sigma(m) - m = n \quad \text{e} \quad \sigma(n) - n = m$$

O que é equivalente a

$$\sigma(m) - \sigma(n) - m + n = n - m \Rightarrow \sigma(m) = \sigma(n).\text{ E de}$$

$$\sigma(n) - n = m \Rightarrow \sigma(n) = m + n.$$

Portanto temos o resultado verificado.

(b) Partindo do fato $m > n$ e com o resultado do item anterior segue

$$\sigma(m) = m + n < 2m \quad \text{e} \quad \sigma(n) = m + n > 2n$$

Isso demonstra que m é deficiente e n é abundante.

(c) Denotemos $d(m)$ o conjunto dos divisores de m e da mesma forma $d(n)$ o conjunto dos divisores de n. Como n é ímpar segue que todos os seus divisores também são ímpares. Mas pelos fatos de m ser par e ser a soma dos elementos do conjunto $d(n) - \{n\}$, implica que a quantidade de elementos de $d(n) - \{n\}$é par. Isso por sua vez, implica que o número de divisores em $d(n)$ é ímpar. Isso equivale a dizer que n é um quadrado perfeito.

PROPOSIÇÃO 2.21

A soma dos inversos dos divisores de um *número perfeito de ordem* k é igual a k.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $d_1, d_2, \cdots, d_r$ os divisores de n um número perfeito de ordem k . Chamemos de x a soma pedida, queremos então calcular

$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{d_i}$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por n obtemos

$$nx = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{d_i}$$

Mas o segundo membro dessa igualdade é exatamente a soma de todos os divisores de n. Portanto

$$nx = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{d_i} = \sigma(n) = kn \Rightarrow x = k$$

■

3 – UMA ABORDAGEM SOBRE OS NÚMEROS PERFEITOS ÍMPARES

3.1 – INTRODUÇÃO

Já vimos que até hoje não se descobriu nenhum número perfeito que seja ímpar, também não se provou ainda se eles de fato existem ou não. A partir dessa busca da demonstração da inexistência de números perfeitos ímpares ou de um exemplo que mostre que existe ao menos um é que tem motivado muitos matemáticos ao longo desses últimos séculos. Embora ainda permaneça o mistério sobre a existência desses números alguns matemáticos descobriram várias características que um número ímpar perfeito deve ter. Curiosamente o próprio Euler conseguiu provar um famoso teorema que apresenta a forma de um número perfeito ímpar, que os tais, se existem, devem ser da forma $n = p^{\alpha}m^2$ sendo p primo e p, α ambos da forma $4k + 1$. Portanto podemos dizer que boa parte do interesse daqueles que estudam esses números se dá pelo desafio de dar uma resposta a esse problema. Hoje com o grande desenvolvimento dos computadores através de cálculos exaustivos já se foi comprovado que nenhum número ímpar menor que 10^{1500} é perfeito. Na tabela abaixo vemos um resumo de tentativas computacionais na busca de algum perfeito ímpar.

Autor	Limite
Kanold (1957)	10^{20}
Tuckerman (1973)	10^{36}
Hagis (1973)	10^{50}
Brent e Cohen (1989)	10^{160}
Brent et al. (1991)	10^{300}
Ochem e Rao (2012)	10^{1500}

Veremos a seguir alguns resultados necessários para provarmos o teorema de Euler citado acima.

3.2 – TEOREMA DE EULER PARA NÚMEROS PERFEITOS ÍMPARES.

Nessa seção vamos demonstrar o interessante teorema de Euler para números perfeitos ímpares (a partir de agora vamos denominar “NPI”). Inicialmente vamos usar o resultado auxiliar

LEMA 3.1.

Se n é um NPI, então n deve ter apenas um primo com expoente ímpar na sua decomposição.

DEMONSTRAÇÃO.

Vamos supor que na decomposição em fatores primos de $n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k}$ não tenha primos com expoente ímpar ou possua mais de um primo cumprindo essa condição e vamos chegar a um absurdo. Portanto, eis os dois casos:

(i) n não tem nenhum primo com expoente ímpar então n é um quadrado perfeito. Assim pela proposição 1.13 temos que $\sigma(n)$ é ímpar. Isso é um absurdo pois é $\sigma(n) = 2n$ é par, visto que n é NPI.

(ii) n possui mais de um primo com expoente ímpar. Sem perca de generalidade, suponhamos que p_i e p_j são dois primos distintos com expoentes ímpares α_i, α_j respectivamente. Assim $\sigma(n) = \sigma(\prod {p_k}^{\alpha_k}) = \sigma({p_i}^{\alpha_i})\sigma({p_j}^{\alpha_j})\sigma(\prod {p_k}^{\alpha_k})$ onde $k \neq i, j$. Assim $\sigma({p_i}^{\alpha_i})$ e $\sigma({p_j}^{\alpha_j})$ são ambos números pares. Isso implica que $\sigma(n)$ é divisível por 4 e isso contradiz o fato de que $\sigma(n) = 2n$.

■

Agora vamos denotar p^α esse único fator primo com seu expoente ímpar de um NPI. Esse primo p é também chamado de **fator especial** do NPI. A seguir vem o principal teorema dessa seção.

TEOREMA 3.2. (teorema de Euler para perfeitos ímpares)

Se n é um NPI então $n = p^\alpha m^2$ com p primo e $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$. Em outras palavras $n = p^\alpha {p_1}^{2\beta_1}{p_2}^{2\beta_2} \dots {p_k}^{2\beta_k}$ com p primo e $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$ e $p \neq p_i$.

Demonstração.

Seja n um NPI, temos que $\sigma(n) = 2n$. Pelo Lema 3.1.

$$n = p^\alpha {p_1}^{2\beta_1}{p_2}^{2\beta_2} \dots {p_k}^{2\beta_k}$$

onde p e cada p_i são primos ímpares distintos e α é ímpar.

Agora resta mostrar que $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$.

Inicialmente pelo fato de p ser ímpar significa que $p \equiv 1 \pmod 4$ ou $p \equiv 3 \pmod 4$. Se $p \equiv 3 \pmod 4$ é o mesmo que $p \equiv -1 \pmod 4$ que implica $p + 1$ é divisível por 4. Por outro lado $p + 1 | \sigma(p^\alpha)$ pois $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{\alpha-1} + p^\alpha = (p+1)(1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{\alpha-1})$ (3.1)

Como

$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha \Rightarrow$

$$\sigma(p^\alpha) \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1) \equiv 0 \pmod 4. \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) segue que

$$p + 1|\sigma(p^\alpha)|\ \sigma(n) = 2n$$

O que é um absurdo, pois vimos no lema 3.1. que $\sigma(n)$ não pode ser divisível por 4. Assim $p \equiv 1$ (mod 4).

Supondo agora que $\alpha \equiv 3$ (mod 4), temos que $\alpha + 1 \equiv 0$ (mod 4). Analisando novamente $\sigma(p^\alpha)$ e o fato de $p \equiv 1$ (mod 4) temos,

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha \equiv 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = \alpha + 1 \equiv 0 \pmod 4$$

e novamente pelo lema 3.1. isso é um absurdo. Logo $\alpha \equiv 1$ (mod 4) e a demonstração está concluída. ■

3.3 – TEOREMA DE TOUCHARD

Nessa seção iremos caracterizar os números ímpares perfeitos usando congruência.

LEMA 3.3.

Se $n \equiv 5$ (mod 6) então n não é NPI. Equivalentemente, Se $n \in \mathbb{N}$ é da forma $6k - 1$, então n não é um NPI.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $n = 6k - 1$ um número natural. É fácil ver que $n \equiv -1$ (mod 3), notemos também que se d é um divisor de n, então escrevemos $n = d \cdot \frac{n}{d}$ o que implica que $n = d \cdot \frac{n}{d} \equiv -1$ (mod 3). Daí temos dois casos a considerar

(i) $d \equiv -1$ (mod 3) e $\frac{n}{d} \equiv 1$ (mod 3)

(ii) $d \equiv 1$ (mod 3) e $\frac{n}{d} \equiv -1$ (mod 3)

Em ambos os casos temos $d + \frac{n}{d} \equiv 0$ (mod 3). Portanto

$$\sigma(n) = \sum_{d|n, d<\sqrt{n}} d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod 3$$

Assim $2n = 2(6k - 1) = 12k - 2 \equiv 1 \pmod 3$ e isso mostra que n não pode ser NPI.

TEOREMA 3.4. (Teorema de Touchard) Todo NPI deve ter a forma $12k + 1$ ou $36k + 9$.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que n seja um NPI. Pelo lema 3.3. n não é da forma $6k - 1$, logo n é da forma $6k + 1$ ou $6k + 3$. Pelo teorema de Euler para NPI, $n \equiv 1 \pmod 4$. Daí, desses dois resultados, temos os casos

(i) $n \equiv 1 \pmod 4$ e $n \equiv 1 \pmod 6$ e isso implica que n é da forma $12k + 1$.

(ii) $n \equiv 1 \pmod 4$ e $n \equiv 3 \pmod 6$. Isso implica que n é da forma $12k + 9$. Daí, se 3 não divide k temos que
$\sigma(n) = \sigma(12k + 9) = \sigma[3(4k + 3)] = \sigma(3)\sigma(4k + 3) = 4\sigma(4k + 3)$.

Isso implica que $\sigma(n)$ é um múltiplo de 4, ou seja, $\sigma(n) \equiv 0 \pmod 4$. Portanto n não pode ser NPI. Logo 3 divide k e segue que n é da forma $36k + 9$

■

O teorema acima nos diz, de forma mais simples, a forma que um número perfeito ímpar se existir deve ter. Agora vejamos um resultado também interessante pra uma categoria de números naturais que não pode ser um NPI.

PROPOSIÇÃO 3.5.

Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n \equiv 2$ (mod 3) então n não é um número perfeito.

DEMONSTRAÇÃO:

Se n é um número ímpar então pelo Lema 3.3. n não pode ser um número perfeito, pois todo número da forma $3k + 2$ que for ímpar é também da forma $6k - 1$.

Suponhamos agora que n é um número par e perfeito, assim pelo teorema de Euclides-Euler $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ para algum p primo. Se $p = 2$, então $n = 6$ e sabemos que tal número é divisível por 3. Quando $p \geq 3$ e, observando o fato de p ser ímpar, implica que

$$2^{p-1} \equiv (-1)^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod 3)} \quad \text{e} \quad 2^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \equiv 2 \text{ (mod 3)}$$

Portanto $2^p - 1 \equiv 1$ (mod 3) e isso implica que

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \text{ (mod 3)}$$

Isso mostra que sendo n um número perfeito par, então $n \equiv 0$ (mod 3) quando $n = 6$ ou $n \equiv 1$ (mod 3) para todos os demais números perfeitos. Concluímos então que nenhum número $n \equiv 2$ (mod 3) é um número perfeito. ■

3.4 – O ÍNDICE DE ABUNDÂNCIA

Um outro recurso que pode ser estudado em relação aos NPI e que foi objeto de estudo de alguns matemáticos é o chamado índice de abundância ou razão de abundância, que se mostrou bastante interessante na busca de novos resultados relacionados a números perfeitos ímpares.

DEFINIÇÃO 3.6

Seja n um número natural. O índice de abundância ou razão de abundância $I(n)$ é o quociente $I(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$.

Partindo então dessa definição vemos, por exemplo, que

$$I(28) = \frac{\sigma(28)}{28} = \frac{56}{28} = 2$$

onde sabemos que 28 é um número perfeito par e exemplificando respectivamente pra um número deficiente e abundante

$$I(64) = \frac{\sigma(64)}{64} = \frac{127}{64} \qquad \text{e} \qquad I(96) = \frac{\sigma(96)}{96} = \frac{252}{96}$$

De acordo com a definição 3.6. é fácil perceber que todo número natural é *perfeito* quando seu índice de abundância é 2; *deficiente* quando o índice de abundância for menor do que 2 e *abundante* quando esse índice for maior que 2.

EXEMPLO 3.7

Todo número $n = 3 \cdot 2^k, k \geq 2$ é abundante.

Resolução.

$$I(n) = \frac{\sigma(3 \cdot 2^k)}{3 \cdot 2^k} = \frac{\frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1}}{3 \cdot 2^k} = \frac{4(2^{k+1} - 1)}{3 \cdot 2^k} = \frac{2 \cdot (4 - \frac{1}{2^{k-1}})}{3} > 2$$

EXEMPLO 3.8

Sejam $2 < p < q$ números primos. Então para todos $a, b \in \mathbb{N}$ o número $n = p^a q^b$ é *deficiente*

Resolução.

$$\sigma(n) = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} < \frac{p^{a+1}}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1}}{q - 1} = p^a q^b \frac{pq}{(p-1)\cdot(q-1)}$$

Portanto

$$I(n) < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \leq \frac{3}{3-1} \cdot \frac{5}{5-1} = \frac{15}{8} < 2$$

Vejamos a seguir alguns resultados derivados da definição do índice de abundância.

PROPOSIÇÃO 3.9

Seja n natural então $I(n) = \sum_{d/n} \frac{1}{d}$

DEMONSTRAÇÃO.

Esse resultado é direto, pois $I(n) = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{d/n} d = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \frac{n}{d} = \sum_{n/d} \frac{1}{d}$.

∎

PROPOSIÇÃO 3.10.

Sejam os naturais m, n, se $m|n$ então $I(m) \leq I(n)$ com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $m = n$.

DEMONSTRAÇÃO.

Considerando o caso em que $m < n$, é imediato $n = km$, com $k \geq 2$. Daí

$I(n) = \sum_{d/n} \frac{1}{d} > \sum_{d/m} \frac{1}{d} = I(m)$

Para $m = n$ o resultado é óbvio.

∎

CORROLÁRIO 3.11.

Se o mdc $(n, \sigma(n)) = 1$ então a única solução de $I(x) = I(n)$ é $x = n$.

DEMONSTRAÇÃO.

A equação $I(x) = I(n)$ é equivalente a $n \cdot \sigma(x) = x \cdot \sigma(n)$. Como n e $\sigma(n)$ são coprimos, então $n|x$ isso então implica, pela proposição 3.10. que a igualdade em questão verifica-se apenas quando $n = x$.

■

Após esse resultados mais diretos uma pergunta oportuna e natural é "o índice de abundância pode assumir valores cada vez maiores do que 2?". A proposição a seguir responde essa questão.

PROPOSIÇÃO 3.12.

O índice de abundância assume valores arbitrariamente grandes.

DEMONSTRAÇÃO.

Dado um número natural *n*, vamos considerar o número $n!$, pela proposição 3.7.

$$I(n!) = \sum_{d/n!} \frac{1}{d} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

O segundo membro dessa desigualdade é a série harmônica, que sabemos ser divergente. Portanto vemos que o índice de abundância pode ser tão grande quanto quisermos.

■

PROPOSIÇÃO 3.13.

Para as potências de um número primo *p* verifica-se que

$$1 < I(p^{\alpha}) < \frac{p}{p-1}$$

DEMONSTRAÇÃO.

A primeira desigualdade é imediata pois $\sigma(p^{\alpha}) > p^{\alpha}$. Para a segunda desigualdade vejamos que

$$I(p^{\alpha}) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^{\alpha}(p-1)} < \frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}(p-1)} = \frac{p}{p-1}$$

■

A proposição 3.13. é interessante, pois responde a outra pergunta natural que é "O índice de abundância pode ser tão próximo de 1 quanto se queira?". Vemos acima que a resposta é afirmativa, visto que o quociente $\frac{p}{p-1}$ se aproxima cada vez mais de 1 pela direita pra primos arbitrariamente grandes.

Embora a proposição 3.12. demonstre que o índice de abundância possa assumir valores arbitrariamente grandes, nem todo número racional maior do que 1 é índice de abundância de algum número natural. Isso foi o que Paul A. Weiner provou no ano de 2000.

TEOREMA 3.14. (WEINER – 2000)

Se o mdc $(m,n) = 1$ e $n < m < \sigma(n)$ então $\frac{m}{n}$ não é índice de abundância de nenhum número natural

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que $\frac{m}{n}$ é índice de abundância de um certo k natural. Assim tem-se

$$\frac{\sigma(k)}{k} = \frac{m}{n} \Rightarrow km = n\sigma(k)$$

Isso implica que $n|km$ que, por sua vez, implica $n|k$ pois mdc $(m,n) = 1$. Mas pela proposição 3.10. isso implica que

$$I(n) < I(k) \Longrightarrow \frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(k)}{k} = \frac{m}{n}$$

O que implica que $\sigma(n) < m$ e temos então uma contradição!

■

3.5 – COMPARANDO OS COMPONENTES DE UM NÚMERO PERFEITO ÍMPAR

Lembrando que o Teorema de Euler para NPI (Teorema 3.2.) nos diz que todo NPI deve ser da forma $n = p^{\alpha}m^2$. Nessa seção queremos fazer um comparativo entre esses dois componentes do NPI. O termo p^{α} é o fator de Euler do NPI e o primo p é o fator especial.

Na proposição 3.13. já vimos o limite para o índice de abundância do fator de Euler de um NPI. Nessa seção vamos ver

i) Uma desigualdade que relaciona o índice de abundancia do fator de Euler com o índice de abundância do termo m^2.

ii) Um interessante fato, que é o quociente $\frac{\sigma(m^2)}{p^{\alpha}}$ ser inteiro.

iii) Um limite inferior para $\frac{\sigma(m^2)}{p^\alpha}$.

EXEMPLO 3.15.

Seja $n = p^\alpha m^2$ um NPI com fator especial p. Verifica-se as seguintes desigualdades

$$1 < \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{5}{4} < \frac{8}{5} < \frac{\sigma(m^2)}{m^2} < 2$$

Resolução.

A primeira desigualdade é óbvia e foi verificada na proposição 3.11. Pra segunda desigualdade, observemos que o fator especial $p \equiv 1$ (mod 4), isso quer dizer que $p \geq 5$. Novamente pela proposição 3.11. $\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{p}{p-1}$ e isso mostra que $\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{5}{4}$. A terceira desigualdade é imediata. Para a quarta e a quinta desigualdades é só observamos que $I(n) = 2$, ou seja, $\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} \cdot \frac{\sigma(m^2)}{m^2} = 2$ e as desigualdades são verificadas.

EXEMPLO 3.16.

O quociente $\frac{\sigma(m^2)}{p^\alpha}$ é inteiro.

Resolução.

É fácil ver que mdc$\left(p^\propto, \sigma(p^\alpha)\right) = 1$. Daí da igualdade $\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} \cdot \frac{\sigma(m^2)}{m^2} = 2$ implica que $\frac{\sigma(p^\alpha) \cdot \sigma(m^2)}{p^\alpha} = 2m^2$ e como p não divide $\sigma(p^\alpha)$ segue que $\frac{\sigma(m^2)}{p^\alpha}$ é inteiro. Pelo problema 1.1 podemos afirmar que o quociente $\frac{\sigma(m^2)}{p^\alpha}$ é ímpar.

Em 1975 em [3] foi provado que nenhum NPI $n = p^{\alpha}m^2$ possui a propriedade $\sigma(m^2) = p^{\alpha}$ e $\sigma(p^{\alpha}) = 2m^2$. E de posse desse resultado vejamos um limite para $\frac{\sigma(m^2)}{p^{\alpha}}$

LEMA 3.17.

Seja $n = p^{\alpha}m^2$ um NPI. Demonstrar que $p^{\alpha} < \frac{2}{3}m^2$.

DEMONSTRAÇÃO.

Do Exemplo 3.13 vemos que $\sigma(m^2) < 2m^2$. Acrescentando a isso, pelo exemplo 3.14 e do fato de que $\sigma(m^2)$ não ser igual a p^{α}, tem-se que $\frac{\sigma(m^2)}{p^{\alpha}} \geq 3$. Daí

$$\sigma(m^2) \geq 3p^{\alpha} \Longrightarrow p^{\alpha} \leq \frac{\sigma(m^2)}{3} \Longrightarrow p^{\alpha} < \frac{2}{3}m^2$$

■

PROPOSIÇÃO 3.18.

Seja $n = p^{\alpha}m^2$ um número perfeito ímpar. Então $m > \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 10^{750}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Do lema anterior sabemos que $p^{\alpha} < \frac{2}{3}m^2$ e usando o fato comprovado até hoje que $n > 10^{1500}$, temos

$$p^{\alpha}m^2 > 10^{1500} \Longrightarrow m^2 > \frac{3}{2}10^{1500} \quad \text{ou então} \quad m > \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 10^{750}.$$

■

PROPOSIÇÃO 3.19

Não existe um par de números naturais consecutivos onde ambos são números perfeitos.

DEMONSTRAÇÃO.

A proposição 3.5. vimos que nenhum número natural $n \equiv 2$ (mod 3) pode ser perfeito. Sendo assim, suponhamos inicialmente que *n* seja um NPI e vejamos que $n + 1$ e também $n - 1$ não podem ser um perfeito par.

De fato sendo *n* um NPI então, pelo teorema de Euler para NPI, $n \equiv 1$ (mod 4). Isso quer dizer que $n + 1 \equiv 2$ (mod 4), logo $2|n + 1$ mas $4 \nmid n + 1$. Ora, pra que $n + 1$ seja um perfeito par, deve ser da forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ e o único número par perfeito que satisfaz essas duas condições de divisibilidade mencionadas é o número 6, quando $p = 2$, ou seja, $n + 1 = 6$ e $n = 5$. Mas isso contradiz a hipótese de que n é um NPI, já que o número 5 não é perfeito. Na sequencia, para o caso de $n - 1$, também se verifica que ele não pode ser um número perfeito par, pois $n - 1 \equiv 0$ (mod 4). Assim, $n - 1 = 2^{p-1}(2^p - 1)$ e facilmente se ver que $p \geq 3$. Daí, usando congruência, vemos que $n - 1 \equiv 1$ (mod 3). Mas isso implica que $n \equiv 2$ (mod 3) o que contradiz a proposição 3.5. Portanto $n - 1$ também não é um número perfeito.

Agora suponhamos que n seja um número perfeito par e vamos provar também que $n + 1$ e $n - 1$ não podem ser um NPI. Para isso seja $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ um úmero perfeito par, onde p e $(2^p - 1)$ são primos. Se $p = 2$, então claramente, $n = 6$ e $n - 1 = 5$ e $n + 1 = 7$ que não são NPI. Quando $p \geq 3$, implica que $n \equiv 0$ (mod 4), e daí temos $n - 1 \equiv 3$ (mod 4) o que jamais pode ser um NPI pelo que vimos do Teorema de Euler para NPI. Acrescentado a isso, vimos que todo par perfeito n $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ com $p \geq 3$ é tal que $n \equiv 1$ (mod 3), o que implica que $n + 1 \equiv 2$ (mod 3) que não pode ser um NPI como visto na proposição 3.5.

■

PROPOSIÇÃO 3.20.

Um NPI é uma soma de dois quadrados.

DEMONSTRAÇÃO.

No estudo de resíduos quadrados é demonstrado que todo número primo da forma $4k + 1$ é uma soma de quadrados e também um resultado bem fácil de verificar é que dois números inteiros que são soma de dois quadrados, seu produto é também uma soma de dois quadrados. Como um NPI $n = p^\alpha m^2$ possui fator especial p da forma $4k + 1$, dos fatos mencionados acima, implica que p^α é da forma $4k + 1$. Portanto sendo $p^\alpha = a^2 + b^2$ com $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$n = p^{\alpha}m^2 = (a^2 + b^2)m^2 = (am)^2 + (bm)^2$$

■

Pra encerrar essa seção, vejamos agora um exemplo que comprova que alguns cubos perfeitos não podem ser números perfeitos ímpares. Mas inicialmente vejamos dois lemas que pra ajudar a comprovar o resultado mencionado.

LEMA 3.21.

$\sigma(p^{6t}) \equiv 1$ (mod 3) para todo primo p e t natural.

DEMONSTRAÇÃO.

Aqui basta usarmos o fato de que qualquer número inteiro é congruente a 0,1 ou 2 módulo 3 e que $\sigma(p^t) = 1 + p + \cdots + p^t$.

Se $p \equiv 0$ (mod 3): $\sigma(p^{6t}) = 1 + p + \cdots + p^{6t} \equiv 1 + 0 + \cdots + 0 \equiv 1$ (mod 3).

Se $p \equiv 1$ (mod 3): $\sigma(p^{6t}) \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv 6t + 1 \equiv 1$ (mod 3).

Se $p \equiv 2$ (mod 3): $\sigma(p^{6t}) = \frac{p^{6t+1}-1}{p-1} \equiv \frac{-1-1}{2-1} \equiv -2 \equiv 1$ (mod 3).

■

LEMA 3.22.

$\sigma(p^{3t}) \equiv 0$ (mod 3) para todo t natural ímpar e $p \equiv 2$ (mod 3).

DEMONSTRAÇÃO.

$\sigma(p^{3t}) = \frac{p^{3t+1}-1}{p-1} \equiv \frac{1-1}{2-1} \equiv 0$ (mod 3)

■

EXEMPLO 3.23.

Se n é um cubo perfeito ímpar tal que $3 \nmid n$ e p é um primo da decomposição de n tal que $p \equiv 1$ (mod 3), então n não é um NPI.

Resolução.

Suponhamos que n é um NPI, então $n = t^3$ para algum $t \in \mathbb{N}$. Por outro lado, usando a caracterização de n pelo teorema de Euler para NPI, temos

$$\sigma(n) = \sigma(p^{3\alpha}m^6) = \sigma(p^{3\alpha}p_1^{6\alpha_1}p_2^{6\alpha_2}\cdots p_k^{6\alpha_k})$$

Pelo Lema 3.21. cada potência ${p_i}^{6\alpha_i} \equiv 1$ (mod 3). Assim,

$\sigma(n) \equiv \sigma(p^{3\alpha})\sigma({p_1}^{6\alpha_1})\sigma({p_2}^{6\alpha_2}) \cdots \sigma({p_k}^{6\alpha_k}) \equiv \sigma(p^{3\alpha})$ (mod 3). Vejamos,

Se $p \equiv 2$ (mod 3) então pelo Lema 3.22. $\sigma(n) \equiv \sigma(p^{3\alpha}) \equiv 0$ (mod 3). Absurdo! Pois contradiz o fato de que $3 \nmid n$.

Se $p \equiv 1$ (mod 3) então $\sigma(n) \equiv \sigma(p^{3\alpha}) \equiv 3\alpha + 1 \equiv 1$ (mod 3). Daí $\sigma(n) = 2n \equiv 1$ (mod 3) e isso implica que $n \equiv 2$ (mod 3). Entretanto $n = p^{3\alpha}p_1^{6\alpha_1}p_2^{6\alpha_2} \cdots p_k^{6\alpha_k}$ e como $p \equiv 1$ (mod 3) resta que o produto de todas as potências $p_i^{6\alpha_i}$ é congruente a 2 módulo 3. Isso é um absurdo! Pois nenhum quadrado perfeito é congruente a 2 módulo 3 finalizando então a resolução.

3.6 – UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE OS NÚMEROS PERFEITOS ÍMPARES.

Nessa seção vamos elencar algumas descobertas sobre os NPI que foram frutos da curiosidade e tentativas de vários matemáticos buscando conhecer propriedades ou restrições à existência de um NPI. Esse registros são retiradas principalmente de [6], [8] e [19].

Em 1832 foi provado por Benjamin Peirce que todo NPI deve ter ao menos 4 fatores primos distintos na sua decomposição. Em 1888, James Joseph Sylvester, que ao que parece não conhecia esse resultado, comprovou o mesmo. Sylvester acreditava na não-existência de NPI e em suas pesquisas ele buscou provar isso ou pelo menos abrir uma discussão pra que outros tentassem comprovar. Ainda em 1888, Sylvester provou que um NPI deve ter ao menos 5 fatores primos distintos se ele existir. A Prova de que existem ao menos seis fatores primos distintos pra decomposição de um NPI veio em 1925 por Gradstein. Na década de 1970 Robbins e Carl Pomerance descobriram independentemente que a quantidade mínima de fatores distintos é sete. E. Z. Chein demonstrou em 1979 que um NPI tem ao menos oito fatores distintos na sua decomposição. Hagis provou o mesmo resultado em 1980 de forma independente. Nesse mesmo contexto em 2006 Nielsen provou que um NPI de forma geral deve ter ao menos 9 fatores primos distintos.

Sylvestrer demonstrou também em 1888 que um NPI não é divisível por 105 e se o NPI for divisível por 3 ele deve ter ao menos oito fatores distintos. Nielsen em 2006 provou que devem ser ao menos 12 fatores.

Considerando os expoentes dos fatores primos de um NPI,

$$n = p^{\alpha} {p_1}^{2\beta_1} {p_2}^{2\beta_2} \dots {p_k}^{2\beta_k}$$

em 1937 Steuerwald provou que nem todos os β_i's devem ser iguais a 1. Kanold em 1941 descobriu que nem todos os β_i's devem ser iguais a 2 e nem que um deles seja 2 enquanto todos os outros são 1. Em 1972 Hagis e McDaniel demonstraram que nem todos os β_i's não podem ser iguais a 3. Em 2003, Iannucci e Sorli verificaram restrições dos β_i's , que se 3 não divide um NPI se, para todo i, $\beta_i \equiv 1$ (mod 3) ou $\beta_i \equiv$ 2 (mod 5).

Em relação ao índice de abundancia, acrescentando ao que já foi visto nesse capitulo, Laatsch demonstrou em 1986 [12] o interessante resultado, que o conjunto dos números racionais que são índice de abundância de algum natural é denso no intervalo $(1, \infty)$! E denominando números racionais maiores do que 1, de "fora da lei da abundancia" um número que não pertence ao conjunto do que são índice de abundância, também já demonstrado o curioso resultado que o conjunto desses números fora da lei é denso no intervalo $(1, \infty)$! Essa descoberta foi feita por Weiner no ano de 2000.

3.7 - CONCLUSÃO

Existem mais definições que permitem estudar propriedades dos NPIs, como pode ser visto em [6], apesar de que continua o grande mistério da existência deles ou da sua não existência. Entretanto se um dia alguém desvendar esse problema, sabemos que haverá muitos colaboradores.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALENCAR FILHO, Edgar de. (1981) *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo, Nobel.

[2] CARNEIRO, Emanuel, CAMPOS, Onofre e PAIVA, Max. (2014) *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 nível médio.* Rio de Janeiro: SBM.

[3] DANDAPAT, G. G. HUNSUCKER, john l. and POMERANCE, Carl. (1975) *Some New Results on Odd Perfect Numbers.* Pacific Journal of Mathematics. Vol 57, 359-364.

[4] DICKSON, Leonard Eugene.(1919) *History of the theory of numbers*. Washington, Carnegie Institution of Washington. Disponível no site https://archive.org/details/historyoftheoryo01dick/page/18/mode/2up

[5] DRIS,Jose Arnaldo B. (2007) *On the Components of an Odd Perfect Number*. 9th Science and Technology Congress, De La Salle University, Manila.

[6] DRIS,Jose Arnaldo B. (2008) *Solving the Odd Perfect Number Problem: Some Old and New Approaches.* De La Salle University – Manila.

[7] GARCIA, Arturo. (2016) *On Perfect Numbers.* Saint Mary's College of California.

[8] GIMBEL, Steven. JAROMA, John H. (2003) *Sylvester: Ushering in the modern era of research on odd perfect numbers*. Disponível no site http://emis.impa.br/EMIS/journals/INTEGERS/papers/d16/d16.pdf

[9] HEFEZ, Abramo. (2016) *Aritmética* – coleção PROFMAT. 2ª ed, Rio de Janeiro: SBM.

[10] HEFEZ, Abramo. (2016) *Exercícios resolvidos de Aritmética* – coleção PROFMAT. 1ª ed, Rio de Janeiro: SBM.

[11] HONSBERGER, Ross (1973) Mathematical Gems: from elementary combinatorics, number theory, and geometry. Nº 1. The Mathematical Association of America.

[12] LAATSCH, Richard. (1986) *Measuring the Abundancy of Integers*. Mathematics Magazine, vol 59, 84–92.

[13] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. (2013) *Tópicos de Matemática Elementar: teoria dos números*. Vol 5, 2ª ed, Rio de Janeiro: SBM.

[14] PEARLMAN, Jonathan. (2005) *Necessary Conditions For the Non-existence of Odd Perfect Numbers.* Disponivel no site http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.449.1227&rep=rep1&type=pdf

[15] STARNI, Paolo. (1991) *On the Euler's Factor of an Odd Perfect Number*. Journal of Number Theory vol 37, 366 369.

[16] Clube de Matemática da OBMEP: http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-numeros-perfeitos/numeros-especiais-numeros-perfeitos-problemas/. Acesso dia 26/03/2020.

[17] Enciclopédia Wikipedia article "*perfect number*" : https://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_number acesso em março e abril de 2020.

[18] Enciclopédia Wikipedia article *"Multiply perfect number"*: https://en.wikipedia.org/wiki/Multiply_perfect_number. acesso em 15/04/2020.

[19] Site Wolfram MathWorld article *"Odd Perfect Number":* https://mathworld.wolfram.com/OddPerfectNumber.html . Acesso em 05/05/2020.