

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

ALEX HONÓRIO BRASIL

MATEMÁTICA INTERVALAR E APLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2013

ALEX HONÓRIO BRASIL

MATEMÁTICA INTERVALAR E APLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientadora: Mari Sano, Dra.

CURITIBA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

- B823 Brasil, Alex Honório
Matemática intervalar e aplicações pedagógicas / Alex Honório Brasil. – 2013.
53 f. : il. ; 30 cm
- Orientadora: Mari Sano.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.
Bibliografia: f. 45.
1. Matemática – Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Aritmética – Estudo e ensino (Ensino médio). 3. Análise de intervalos (Matemática). 4. Tecnologia educacional. 5. Prática de ensino. 6. Matemática – Dissertações. I. Sano, Mari orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Título da Dissertação No. 004

“Matemática Intervalar e Aplicações Pedagógicas”

por

Alex Honório Brasil

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 30 de julho de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Mari Sano, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. José Carlos Corrêa Eidam, Dr.
(UFPR)

Profa. Olga Harumi Saito, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

Dedico este trabalho a todos os professores de matemática, por estarem contribuindo para a evolução da ciência e de mudar a realidade de nosso país através da educação.

AGRADECIMENTOS

- À minha família, por acreditar e me apoiar sempre.
- Aos meus estimados amigos Emilio Trevisan e Luiza Castanhel pelo apoio, pelas observações e comentários que muito me ajudaram neste trabalho.
- Aos meus colegas de PROFMAT 2011, por ter trilhado o mesmo caminho e juntos termos compartilhado muitos conhecimentos.
- A todos os meus amigos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que eu chegasse até aqui.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À minha orientadora, professora Dra Mari Sano, por todas as orientações prestadas e auxílio em todas as dificuldades que encontrei na produção deste trabalho.
- Aos professores do PROFMAT, pelos ensinamentos.

RESUMO

BRASIL, Alex Honório. MATEMÁTICA INTERVALAR E APLICAÇÕES PEDAGÓGICAS. 54 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

O ensino tradicional da matemática leva os estudantes a resolverem problemas a partir de algoritmos e fórmulas. Este trabalho apresenta a *matemática intervalar* como importante ferramenta pedagógica para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos estudantes. Neste sentido, um questionário sobre *matemática intervalar*, com exercícios que abordam diferentes áreas da matemática, foi aplicado a estudantes do ensino médio e feito uma análise dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Matemática intervalar, Aritmética de intervalos, Ferramenta pedagógica.

ABSTRACT

BRASIL, Alex Honório. INTERVAL MATHEMATICS AND PEDAGOGICAL APPLICATIONS. 54 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

The traditional teaching of mathematics leads students to solve problems from algorithms and formulas. This work present *interval mathematics* as an important educational tool for the development of thinking ability of students. In this direction, a problem set on *interval mathematics*, with exercises that address different areas of mathematics, was applied to high school students. The results are analyzed.

Keywords: Interval mathematics, Interval arithmetic, Pedagogical tool.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	10
2.1	ESTRUTURAS ALGÉBRICAS	10
2.1.1	ANÉIS	10
2.1.2	GRUPOS	12
2.2	ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS	14
2.2.1	MÉTRICA	14
2.2.2	SEQUÊNCIAS DE CAUCHY	15
2.2.3	ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS	15
2.3	NOÇÕES DE CÁLCULO EM DUAS VARIÁVEIS	16
2.3.1	LIMITES E CONTINUIDADE	16
2.3.2	DERIVADAS PARCIAIS	17
2.4	MÁXIMOS E MÍNIMOS	19
3	INTERVALOS	22
3.1	IGUALDADE DE INTERVALOS	22
3.2	ARITMÉTICA EM IR	23
3.3	PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DE IR	25
3.4	TOPOLOGIA DE IR	28
3.5	FUNÇÕES INTERVALARES	32
3.5.1	IMAGEM INTERVALAR DE UMA FUNÇÃO REAL	33
3.5.2	AVALIAÇÃO INTERVALAR	34
3.6	O MÉTODO DE NEWTON	34
3.6.1	MÉTODO DE NEWTON REAL	34
3.6.2	MÉTODO DE NEWTON INTERVALAR	37
4	APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA INTERVALAR	39
4.1	QUESTIONÁRIO E ANÁLISE DAS RESPOSTAS	40
4.1.1	QUESTIONÁRIO	40
4.1.2	ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS	42
5	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	46
	Anexo A – ALGUMAS SOLUÇÕES DO QUESTIONÁRIO APRESENTADAS PE-	
	LOS ALUNOS	47

1 INTRODUÇÃO

O uso dos intervalos na matemática não é recente. Arquimedes (287 a.C - 212 a.C) já fazia uso dos mesmos para estimar o valor de π . Através de uma sucessão de polígonos inscritos e circunscritos com números de lados crescente, Arquimedes conseguiu gerar uma sequência convergente de intervalos para estimar essa constante. Porém, os primeiros e mais influentes trabalhos sobre a teoria dos intervalos foram realizados pelo matemático R. E. Moore e seus assistentes, por volta de 1965. Desde então, estudos cada vez mais complexos sobre a matemática intervalar tem possibilitado o desenvolvimento de algoritmos numéricos para a Computação Científica.

A matemática intervalar tem aplicações em diversas áreas, entre elas: Geometria, Estatística, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais e Lógica Matemática. Este trabalho pretende apresentar a matemática intervalar como um recurso pedagógico para estimular o pensamento, a partir de exercícios que exijam dos estudantes o raciocínio para a resolução dos mesmos e não apenas a aplicação de fórmulas e algoritmos como eles estão acostumados.

Deste modo, começaremos fazendo um estudo sobre algumas estruturas algébricas, espaços métricos completos e noções de cálculo em duas variáveis que são assuntos preliminares para o desenvolvimento da matemática intervalar. Esses temas não são o foco principal deste trabalho, portanto serão feitas apenas as definições básicas, mostrando algumas propriedades e exemplos. No capítulo 3 são apresentados os conceitos fundamentais da matemática intervalar, definido o conjunto **IR** dos intervalos reais e suas correspondentes operações aritméticas e propriedades. Ainda nesse mesmo capítulo mostraremos alguns aspectos topológicos do conjunto **IR**, exploraremos o conceito de função intervalar, imagem intervalar, avaliação intervalar e alguns cuidados para transcrever versões intervalares de algoritmos reais que será mostrado usando o Método de Newton como modelo.

O último capítulo é dedicado a aplicação pedagógica da matemática intervalar. Nele, encontra-se uma lista de problemas e um questionário que foram aplicados aos estudantes e a análise dos resultados.

2 PRELIMINARES

Um estudo mais completo sobre a matemática intervalar exige alguns conhecimentos básicos sobre estruturas algébricas, espaços métricos completos e noções de cálculo em duas variáveis. Não será feito um estudo aprofundado desses temas, apenas o necessário para o desenvolvimento da matemática intervalar.

2.1 ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

As estruturas algébricas abordadas serão: anéis, corpos e grupos. Seguiremos a teoria de (GARCIA; LEQUAIN, 2003).

2.1.1 ANÉIS

Esta estrutura algébrica está definida da seguinte forma:

Definição 2.1. *Um anel $(A, +, \cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por “+” (chamada adição) e de uma operação denotada por “ \cdot ” (chamada multiplicação) que satisfazem as seguintes condições:*

A.1) *A adição é associativa, isto é,*

$$\forall x, y, z \in A, (x + y) + z = x + (y + z).$$

A.2) *Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,*

$$\exists 0 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 0 + x = x + 0 = x.$$

A.3) *Todo elemento de A possui um inverso com respeito à adição, isto é,*

$$\forall x \in A, \exists z \in A \text{ tal que } x + z = z + x = 0.$$

A.4) A adição é comutativa, isto é,

$$\forall x, y \in A, \quad x + y = y + x.$$

M) A multiplicação é associativa, isto é,

$$\forall x, y, z \in A, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

AM) A adição é distributiva em relação à multiplicação, isto é,

$$\forall x, y, z \in A, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

A multiplicação não necessita ser comutativa. Quando isso ocorrer, dizemos que A é um anel comutativo. Se A contém um elemento 1_A tal que $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$ para todo $a \in A$ então A é dito anel com unidade.

Observações:

a) O elemento neutro da adição em (A.2) é único. De fato, se 0 e $0'$ são dois elementos neutros para a adição, temos

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0' \quad \text{pois } 0' \text{ é elemento neutro} \\ &= 0' \quad \text{pois } 0 \text{ é elemento neutro.} \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se que o elemento neutro da multiplicação quando existe é único.

b) O elemento inverso com respeito à adição é único. De fato, para $x \in A$ vamos supor que y e y' são dois inversos de x com respeito à adição, temos

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \quad \text{por (A.2)} \\ &= y + (x + y') \quad \text{pois } y' \text{ é inverso de } x \\ &= (y + x) + y' \quad \text{por (A.1)} \\ &= 0 + y' \quad \text{pois } y \text{ é inverso de } x \\ &= y' \quad \text{por (A.2)}. \end{aligned}$$

Esse único inverso de x com respeito à adição será denotado por $-x$.

c) O elemento neutro da adição tem a seguinte propriedade:

$$0 \cdot x = 0, \quad \forall x \in A$$

De fato, basta observar que $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$.

Existe um tipo especial de anel chamado corpo.

Definição 2.2. Um anel comutativo com unidade $(K, +, \cdot)$ é chamado de corpo se todo elemento diferente de zero de K possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é,

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \exists y \in K \text{ tal que } x \cdot y = 1.$$

Observação: O elemento inverso da multiplicação é único. De fato, dado $x \in K$, $x \neq 0$, se y e y' são dois inversos de x com respeito à multiplicação, então: $y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot y') = (y \cdot x) \cdot y' = 1 \cdot y' = y'$.

Exemplo 2.3. Nos exemplos que seguem, “+” denota a adição usual em \mathbb{C} e “ \cdot ” denota a multiplicação usual em \mathbb{C} .

- a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis. No caso, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são exemplos de corpos.
- b) O anel dos inteiros de Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- c) Dados dois anéis $(A_1, \boxplus, \boxminus)$ e (A_2, \oplus, \odot) , podemos construir um novo anel da seguinte maneira: no conjunto $A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$, definimos:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 \boxplus b_1, a_2 \oplus b_2)$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 \boxminus b_1, a_2 \odot b_2).$$

Portanto $(A_1 \times A_2, +, \cdot)$ é um anel, chamado produto direto de A_1 com A_2 , onde o elemento neutro com respeito à adição é $(0_{A_1}, 0_{A_2})$ e o elemento neutro com respeito à multiplicação é $(1_{A_1}, 1_{A_2})$.

- d) Seja $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{R} ; sejam “+” a adição usual de matrizes e “ \cdot ” a multiplicação usual de matrizes. Então, $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um anel não-comutativo se $n \geq 2$.

2.1.2 GRUPOS

Vejamos os axiomas que definem um grupo:

Definição 2.4. Um conjunto G com uma operação

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

é um grupo se as condições seguintes são satisfeitas:

(i) A operação é associativa, isto é,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in G.$$

(ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \quad \forall a \in G.$$

(iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ tal que } a \cdot b = b \cdot a = e.$$

O grupo é abeliano ou comutativo se:

(iv) A operação é comutativa, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in G.$$

Observações:

1) O elemento neutro é único. De fato, se e, e' são elementos neutros de G , então

$$\begin{aligned} e &= e \cdot e' \quad \text{pois } e' \text{ é elemento neutro,} \\ &= e' \quad \text{pois } e \text{ é elemento neutro.} \end{aligned}$$

2) O elemento inverso é único. De fato, seja $a \in G$ e sejam $b, b' \in G$ dois elementos inversos de a , temos:

$$\begin{aligned} b &= b \cdot e = b \cdot (a \cdot b') \quad \text{pois } b' \text{ é inverso de } a, \\ &= (b \cdot a) \cdot b' = e \cdot b' = b' \quad \text{pois } b \text{ é inverso de } a. \end{aligned}$$

O único inverso de a será denotado por a^{-1} .

Se $(A, +, \cdot)$ é um anel, então $(A, +)$ é um grupo abeliano e se $(K, +, \cdot)$ é um corpo, então $(K, +)$ e $(K - \{0\}, \cdot)$ são grupos abelianos.

Exemplos de grupos:

- 1) $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano infinito e (\mathbb{Z}, \cdot) não é um grupo, pois não possui inverso em relação à multiplicação.
- 2) $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, são grupos (aditivos) abelianos. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ são grupos (multiplicativos) abelianos.

2.2 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Faremos as definições de métrica, espaços métricos e espaços métricos completos seguindo (LIPSCHUTZ, 1973).

2.2.1 MÉTRICA

Dado X um conjunto não vazio, chamamos de uma métrica em X a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, para todo $x, y, z \in X$, os seguintes axiomas:

- i) $d(x, y) \geq 0$;
- ii) $d(x, x) = 0$;
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemplos de métricas

- 1) Seja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = |x - y|$$

A função d é dita métrica usual de \mathbb{R} .

- 2) Seja $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$[d(x, y)]^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

A função d é chamada métrica usual de \mathbb{R}^2 .

3) Seja X um conjunto não-vazio e d uma função definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Então, d é uma métrica em X . Essa função distância d é, usualmente, chamada a métrica trivial em X .

Definição 2.5. A um conjunto X munido de uma métrica d , damos o nome de espaço métrico.

Notação: (X, d) .

2.2.2 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposição 2.6. Seja (X, d) um espaço métrico. Então toda sequência convergente em X é de Cauchy.

Demonstração:

Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $x \in X$ tais que $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n) = x$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe n_1 tal que se $n > n_1$ então $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $n_0 = n_1$. Se $n, m > n_0$ então

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \\ &= d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Observação: A recíproca não é verdadeira. Seja $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ com a métrica usual. A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $x_n = \frac{1}{n+1}$ é uma sequência em \mathbb{R} que é de Cauchy mas que não converge em \mathbb{R} .

2.2.3 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Definição 2.7. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que (X, d) é um espaço métrico completo se toda sequência de Cauchy em X converge para um ponto de X .

Exemplo 2.8. \mathbb{R} com a métrica usual é completo (toda sequência de Cauchy de números reais converge para um número real).

Pela observação $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com a métrica usual não é completo.

2.3 NOÇÕES DE CÁLCULO EM DUAS VARIÁVEIS

O objetivo desta seção é apresentar a definição e alguns teoremas de máximos e mínimos de funções de duas variáveis. No entanto, para uma boa compreensão faz-se necessário o conhecimento de algumas definições sobre essas funções, tais como: limites, continuidade e derivadas parciais.

2.3.1 LIMITES E CONTINUIDADE

Podemos definir o limite de uma função em duas variáveis segundo (STEWART, 2012), da seguinte maneira:

Definição 2.9. *Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) . Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L e escrevemos*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que se $(x, y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ então $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Observação: Se o limite existir, então ele é único.

Exemplos de limites:

- 1) Se $f(x, y) = k$ é uma função constante, então, para todo (a, b) em \mathbb{R}^2 ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k = k.$$

De fato, $|f(x, y) - k| = |k - k| = 0$; assim, dado $\varepsilon > 0$ e tomando-se um $\delta > 0$ qualquer,

$$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \implies |f(x, y) - k| < \varepsilon$$

- 2) Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Quando aproximamos de $(0, 0)$ ao longo do eixo x , ou seja, para $y = 0$, temos $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todo $x \neq 0$. Agora, quando aproximamos de $(0, 0)$ ao longo do eixo y , fazendo $x = 0$ temos $f(y, 0) = -y^2/y^2 = -1$ para todo $y \neq 0$. Portanto, como f tende a valores diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe.

Definição 2.10. Uma função f de duas variáveis é dita contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D .

Exemplos

1) A função $f(x, y) = k$ é contínua, pois

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = k = f(a, b)$$

para todo (a, b) em \mathbb{R}^2 .

2) A função $f(x, y) = x$ é contínua, pois

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a = f(a, b)$$

para todo (a, b) em \mathbb{R}^2 .

3) A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ não é contínua em $(0, 0)$, pois do exem-

plo (2) de limites temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

2.3.2 DERIVADAS PARCIAIS

Definição 2.11. Seja f uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Notação para as derivadas parciais: Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Exemplos

- 1) Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Solução:

A derivada de f em relação a x é:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

e, assim,

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16.$$

A derivada de f em relação a y é:

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

e, assim,

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8.$$

- 2) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Determine:

a) $f_x(x, y)$

b) $f_y(x, y)$

Solução:

- a) Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ temos

$$f_x(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

ou seja,

$$f_x(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em $(0, 0)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 = f_x(0, 0).$$

Assim, $f_x(x, y)$ é a função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} dada por

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

b) Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$f_y(x, y) = -\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em $(0, 0)$, f_y não existe.

Segue que $f_y(x, y)$ está definida em todo $(x, y) \neq (0, 0)$ mas não em $(0, 0)$ e é dada por

$$f_y(x, y) = -\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS

Nesta seção, definiremos os conceitos de máximos e mínimos absolutos e locais para funções de duas variáveis.

Definição 2.12. *Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e seja $(a, b) \in A \subset D_f$. Dizemos que $(a, b) \in D_f$ é ponto de máximo global ou máximo absoluto de f se, para todo $(x, y) \in D_f$,*

$$f(x, y) \leq f(a, b).$$

O número $f(a, b)$ é chamado máximo valor de f .

Dizemos que $(a, b) \in D_f$ é ponto de mínimo global ou mínimo absoluto de f , se para todo $(x, y) \in D_f$,

$$f(x, y) \geq f(a, b).$$

O número $f(a, b)$, neste caso, é o mínimo valor de f .

Os pontos de máximo e de mínimo de uma função f são denominados extremantes de f .

Exemplos

1) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$. Então $f(0, 0) = 3$ é o máximo valor

de f , pois dados dois números reais x e y quaisquer temos que

$$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 \leq 3 = f(0,0).$$

2) Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = x^2 + y^2 - 3$. Então $g(0,0) = -3$ é o mínimo valor de g , já que dados dois números reais x e y quaisquer, temos que

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 3 \geq -3 = g(0,0).$$

Em geral não é simples encontrar o máximo ou o mínimo de uma função, às vezes nem existem. O teorema a seguir dá as condições suficientes para a existência de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.

Teorema 2.13. *Seja K um subconjunto compacto em \mathbb{R}^2 . Se f for contínua em K , então f assume os seus valores máximo e mínimo em K .*

Demonstração:

(GUIDORIZZI, 2003).

□

Definição 2.14. *Uma função de duas variáveis tem um máximo local em (a,b) se $f(x,y) \leq f(a,b)$ quando (x,y) está próximo de (a,b) . O número $f(a,b)$ é chamado valor máximo local. Se $f(x,y) \geq f(a,b)$ quando (x,y) está próximo de (a,b) , então f tem um mínimo local em (a,b) e $f(a,b)$ é um valor mínimo local.*

Teorema 2.15. *Se uma função f tem um máximo ou um mínimo local em (a,b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$.*

Demonstração:

(GUIDORIZZI, 2003).

□

Um ponto (a,b) é dito ser um ponto crítico (ou ponto estacionário) de f se $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir.

Teorema 2.16. *(Teste da segunda derivada) Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro (a,b) , e suponha que $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$. Seja*

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$, então $f(a,b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$, então $f(a,b)$ é um máximo local.

(c) Se $D < 0$ então $f(a,b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Demonstração:

(GUIDORIZZI, 2003).

□

Observações:

- 1) No caso (c) o ponto (a,b) é chamado de ponto de sela de f .
- 2) Se $D = 0$, o teste não fornece informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a,b) , ou (a,b) pode ser um ponto de sela de f .
- 3) Para lembrar a fórmula de D , é útil escrevê-la como determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Exemplo 2.17. Seja $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$. Temos que

$$f_x = 2x + y - 2$$

$$f_y = x + 2y - 2.$$

Os pontos críticos de f são aqueles (x,y) que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

O único ponto crítico é $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Por outro lado, $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 1$ e $f_{yy}(x,y) = 2$. Portanto, $D = D(x,y) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$.

Como $f_{xx}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 2 > 0$ temos então um mínimo local em $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

3 INTERVALOS

Neste capítulo apresentaremos o conjunto **IR** dos intervalos de números reais assim como as operações aritméticas e propriedades deste conjunto. Abordaremos também algumas noções topológicas em **IR**, conceito de funções intervalares e algumas observações do Método de Newton intervalar.

Definição 3.1. *Seja \mathbb{R} o corpo dos números reais, cujos elementos serão representados por a, b, c, \dots . Um subconjunto A de \mathbb{R} será chamado de intervalo fechado quando*

$$A = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

Exemplo 3.2. *O intervalo $A = [1, 7]$ representa todos os números reais x tais que $1 \leq x \leq 7$.*

Definição 3.3. *Seja $\mathbf{IR} = \{A, B, C, \dots\}$ o conjunto formado por todos os intervalos. Um elemento x pertencente a \mathbb{R} será representado em **IR** na forma $[x, x]$ e será chamado de intervalo pontual. Portanto, $\mathbb{R} \subset \mathbf{IR}$.*

Definição 3.4. *Todo intervalo do tipo $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ formado por uma n -dupla ordenada será chamado de intervalo vetorial n -dimensional.*

Um intervalo vetorial bidimensional representa no plano um retângulo, conforme **Figura 1**.

3.1 IGUALDADE DE INTERVALOS

Dois intervalos $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ são iguais se, e somente se, são iguais seus extremos correspondentes, ou seja,

$$A = B \iff a_1 = b_1 \text{ e } a_2 = b_2.$$

Exemplo 3.5. *Os intervalos $A = [x, 1]$ e $B = [4, y]$ são iguais se, e somente se, $x = 4$ e $y = 1$.*

$$X = (A, B) \text{ onde } A = [a_1, a_2] \text{ e } B = [b_1, b_2]$$

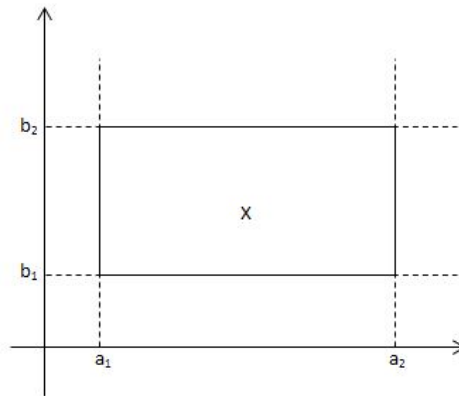


Figura 1: Intervalo bidimensional.

3.2 ARITMÉTICA EM \mathbb{R}

Seja $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ uma operação definida em \mathbb{R} . Esta operação $*$ é estendida para o conjunto \mathbf{IR} conforme a definição a seguir:

Definição 3.6. Se A e B são intervalos sobre \mathbb{R} , então para $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ e $0 \notin B$ para o caso da divisão temos:

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Teorema 3.7. Sejam A e B intervalos reais tais que $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Então são satisfeitas as seguintes propriedades:

- a) $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$
- b) $-A = [-a_2, -a_1]$
- c) $A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$
- d) Seja $M = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$, então $A \cdot B = [\min M, \max M]$
- e) Se $0 \notin B$, então $\frac{1}{B} = [\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}]$ e $\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$

Demonstração:

- a) Consideremos a função $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = f(x, y) = x + y$ sobre $A \times B$.

Temos que, $A \times B$ é compacto e como f é contínua, então pelo Teorema 2.13 f possui um mínimo e um máximo em $A \times B$ e, além disso, assume todos os valores entre esses extremos.

Como $f_x(x,y) = 1$ e $f_y(x,y) = 1$, então, pelo Teorema 2.15, f não possui extremo no interior de $A \times B$.

Para analisarmos os valores de f na fronteira de $A \times B$, dividiremos em quatro casos, cada um deles considerando um lado do retângulo da **Figura 1**.

Caso 1: Lado $L_1 = \{(a_1, y) | b_1 \leq y \leq b_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_1(y) = f(a_1, y) = a_1 + y$.

Caso 2: Lado $L_2 = \{(a_2, y) | b_1 \leq y \leq b_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_2(y) = f(a_2, y) = a_2 + y$.

Caso 3: Lado $L_3 = \{(x, b_1) | a_1 \leq x \leq a_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_3(x) = f(x, b_1) = x + b_1$.

Caso 4: Lado $L_4 = \{(x, b_2) | a_1 \leq x \leq a_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_4(x) = f(x, b_2) = x + b_2$.

Pela monotonicidade das funções $z = a_1 + y$, $z = a_2 + y$, $z = x + b_1$ e $z = x + b_2$, $x \in A$ e $y \in B$, os extremos se situam rigorosamente nas interseções, que pertencem ao conjunto $\{a_1 + b_1, a_1 + b_2, a_2 + b_1, a_2 + b_2\}$.

Portanto, o mínimo e o máximo de f em $A \times B$ são, respectivamente, $a_1 + b_1$ e $a_2 + b_2$.

b) Por definição, se $A = [a_1, a_2]$ então $a_1 \leq a_2$. Multiplicando os dois membros da desigualdade por (-1) temos que $-a_2 \leq -a_1$. Daí resulta que $-A = [-a_2, -a_1]$.

c) Seja $B = [b_1, b_2]$ então pelo item (b), $-B = [-b_2, -b_1]$. Assim, $A - B = A + (-B) = [a_1, a_2] + [-b_2, -b_1]$ e pelo item (a) segue que $A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$.

d) Analogamente como na demonstração do item (a) consideremos a função $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = f(x, y) = x \cdot y$ sobre $A \times B$.

Sendo que $A \times B$ é compacto e f é contínua, então f possui um mínimo e um máximo e, além disso, assume todos os valores entre esses extremos.

Um extremo no interior de $A \times B$ só pode ocorrer se $f_x(x, y) = y = 0$ e $f_y(x, y) = x = 0$.

Como

$$f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \cdot 0 - (1)^2 = -1 < 0,$$

então pelo teste da segunda derivada f não possui extremo no interior de $A \times B$.

Vamos agora analisar os valores de f sobre a fronteira de $A \times B$. Dividimos em quatro casos, cada um deles considerando um lado do retângulo da **Figura 1**.

Caso 1: Lado $L_1 = \{(a_1, y) | b_1 \leq y \leq b_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_1(y) = f(a_1, y) = a_1y$.

Caso 2: Lado $L_2 = \{(a_2, y) | b_1 \leq y \leq b_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_2(y) = f(a_2, y) = a_2y$.

Caso 3: Lado $L_3 = \{(x, b_1) | a_1 \leq x \leq a_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_3(x) = f(x, b_1) = xb_1$.

Caso 4: Lado $L_4 = \{(x, b_2) | a_1 \leq x \leq a_2\}$. Neste lado a função a ser estudada é $z = g_4(x) = f(x, b_2) = xb_2$.

Devido a monotonicidade das funções $z = a_1y$, $z = a_2y$, $z = xb_1$ e $z = xb_2$, $x \in A$ e $y \in B$, os extremos se situam rigorosamente nas interseções, que são: $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$.

e) Por definição, $B = [b_1, b_2]$ com $b_1 \leq b_2$ e $0 \notin B$. Assim, $b_1 \leq b_2$ implica $\frac{1}{b_1} \geq \frac{1}{b_2}$. Logo, $\frac{1}{B} = [\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}]$

Portanto, $\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B} = [a_1, a_2] \cdot [\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}]$, que pelo item (d) segue o resultado.

□

Exemplo 3.8. Sejam $A = [1, 5]$, $B = [-2, 1]$, $C = [-3, -1]$ e $D = [0, 2]$. Vamos calcular:

a) $A + B = [1, 5] + [-2, 1] = [-1, 6] = B + A$.

b) $A - C = A + (-C) = [1, 5] + [1, 3] = [2, 8]$.

c) $A \cdot D = [1, 5] \cdot [0, 2] = [0, 10]$.

d) $A \cdot (B + C) = [1, 5] \cdot ([-2, 1] + [-3, -1]) = [1, 5] \cdot [-5, 0] = [-25, 0]$.

e) $A \cdot B + A \cdot C = ([1, 5] \cdot [-2, 1]) + ([1, 5] \cdot [-3, -1]) = [-10, 5] + [-15, -1] = [-25, 4]$.

f) $\frac{A}{C} = A \cdot \frac{1}{C} = [1, 5] \cdot [-1, -\frac{1}{3}] = [-5, -\frac{1}{3}]$.

3.3 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DE \mathbf{IR}

Teorema 3.9. Sejam $A, B, C \in \mathbf{IR}$. Então valem:

1. a) $A + B = B + A$

Comutatividade

$$b) A \cdot B = B \cdot A$$

$$2. a) (A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{Associatividade}$$

$$b) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$3. a) \exists! \mathbf{0} = [0, 0] \in \mathbf{IR} \text{ e } A \in \mathbf{IR} \text{ tal que } A + \mathbf{0} = A$$

$$b) \exists! \mathbf{1} = [1, 1] \in \mathbf{IR} \text{ e } A \in \mathbf{IR} \text{ tal que } A \cdot \mathbf{1} = A$$

4. \mathbf{IR} não admite divisor de zero, isto é, $A \cdot B = \mathbf{0}$ se, e somente se, $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

5. Inexistência do elemento inverso.

Dado um elemento arbitrário $A = [a_1, a_2] \in \mathbf{IR}$ com $a_1 \neq a_2$, então esse elemento não possui inverso em relação a adição (+) e a multiplicação (\cdot).

$$6. a) 0 \in A - A$$

$$b) 1 \in A/A \text{ para } 0 \notin A$$

$$7. A \cdot (B + C) \subseteq AB + AC \quad \text{Subdistributividade}$$

$$a \cdot (B + C) = a \cdot B + a \cdot C \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$8. \text{ Sejam } A^{(j)}, B^{(j)} \in \mathbf{IR}, \text{ com } A^{(j)} \subseteq B^{(j)}, j = 1, 2.$$

Então, para $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ vale $A^{(1)} * A^{(2)} \subseteq B^{(1)} * B^{(2)}$ (propriedade de inclusão para subconjuntos).

Demonstração:

1 e 2. Para mostrar as propriedades (1) e (2), vamos considerar $*$ $\in \{+, \cdot\}$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Como a comutatividade é uma propriedade válida para os números reais então $A * B = \{a * b | a \in A, b \in B\} = \{b * a | b \in B, a \in A\} = B * A$.

A associatividade também é uma propriedade válida nos números reais, então $(A * B) * C = \{(a * b) * c | a \in A, b \in B, c \in C\} = \{a * (b * c) | a \in A, b \in B, c \in C\} = A * (B * C)$

3. Seja $A = [a_1, a_2] \in \mathbf{IR}$.

$$i) 0 \in \mathbb{R} \text{ se escreve em } \mathbf{IR} \text{ como } [0, 0]. \text{ Assim, } A + 0 = [a_1, a_2] + [0, 0] = [a_1 + 0, a_2 + 0] = [a_1, a_2] = A$$

ii) $1 \in \mathbb{R}$ se escreve em \mathbf{IR} como $[1, 1]$. Assim, $A \cdot 1 = [a_1, a_2] \cdot [1, 1] = [\min\{a_1 \cdot 1, a_2 \cdot 1\}, \max\{a_1 \cdot 1, a_2 \cdot 1\}] = [a_1, a_2] = A$.

4. Sejam $A, B \in \mathbf{IR}$ tais que $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Temos que

$$A \cdot B = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}].$$

(\Leftarrow) Se $A = 0$, então $a_1 = a_2 = 0$. Como as extremidades do intervalo $A \cdot B$ só podem ser a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1 ou a_2b_2 . Então em qualquer um dos casos irá aparecer a_1 ou a_2 e podemos concluir que $A \cdot B = 0$.

De modo análogo prova-se que $A \cdot B = 0$ se $B = 0$.

(\Rightarrow) Suponhamos que $A \neq 0$. Então $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$. Por hipótese $A \cdot B = 0$, ou seja, $A \cdot B = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}] = [0, 0]$. Daí,

$$0 = \min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}$$

$$0 = \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}.$$

Logo, $a_1b_1 = a_1b_2 = a_2b_1 = a_2b_2 = 0$.

Se $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$, então $b_1 = b_2 = 0$. Portanto $B = 0$.

Supondo $B \neq 0$ e seguindo o mesmo raciocínio do caso $A \neq 0$, chegaremos a conclusão que $A = 0$.

Portanto, \mathbf{IR} não admite divisor de zero.

5. Suponhamos que existe um intervalo B tal que $A - B = 0$, ou seja $[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = 0$ então $a_1 - b_2 = 0$ e $a_2 - b_1 = 0$ e portanto, $a_1 = b_2$ e $a_2 = b_1$. O que é uma contradição, pois $b_1 = a_2, b_2 = a_1$ não satisfaz a definição de intervalo, já que estamos supondo $a_1 \neq a_2$.

6. Temos que:

i) Para $a \in A$, $0 = a - a \in \{x - y | x \in A, y \in A\}$. Então vale $0 \in A - A$.

ii) Para $a \in A$ e $a \neq 0$, $1 = \frac{a}{a} \in \{\frac{x}{y} | x \in A, y \in A \text{ e } 0 \notin A\}$. Então vale $1 \in \frac{A}{A}$.

7. Temos que:

i) $A \cdot (B + C) = \{a \cdot (b + c) | a \in A, b \in B, c \in C\} \subseteq \{ab + \tilde{a}c | a, \tilde{a} \in A, b \in B, c \in C\} = AB + AC$

ii) Sejam $B = [b_1, b_2]$ e $C = [c_1, c_2]$. Temos que $a \in \mathbb{R}$ se escreve em \mathbf{IR} como $[a, a]$. Logo

$$\begin{aligned} a \cdot (B + C) &= [a, a] \cdot ([b_1, b_2] + [c_1, c_2]) \\ &= [a, a] \cdot [b_1 + c_1, b_2 + c_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\min\{a \cdot (b_1 + c_1), a \cdot (b_2 + c_2)\}, \max\{a \cdot (b_1 + c_1), a \cdot (b_2 + c_2)\}] \\
&= [a \cdot (b_1 + c_1), a \cdot (b_2 + c_2)] \\
&= [ab_1 + ac_1, ab_2 + ac_2] \\
&= aB + aC \quad \forall a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

8. Por hipótese $A^{(1)} \subseteq B^{(1)}$ e $A^{(2)} \subseteq B^{(2)}$. Logo, $A^{(1)} * A^{(2)} = \{a * a' | a \in A^{(1)}, a' \in A^{(2)}\} \subseteq \{b * b' | b \in B^{(1)}, b' \in B^{(2)}\} = B^{(1)} * B^{(2)}$. Portanto, $A^{(1)} * A^{(2)} \subseteq B^{(1)} * B^{(2)}$.

□

Devemos observar que na propriedade subdistributividade vale o sinal da igualdade no caso em que os extremos dos intervalos são números reais positivos.

De acordo com o teorema anterior, temos que $(\mathbf{IR}, +, \cdot)$ não forma um Anel, nem sequer $(\mathbf{IR}, +)$ forma um grupo.

3.4 TOPOLOGIA DE \mathbf{IR}

O foco desta seção é estudar os aspectos topológicos do conjunto \mathbf{IR} .

Definição 3.10. *Sejam $A, B \in \mathbf{IR}$ tais que $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Definimos distância, valor absoluto, diâmetro e ponto médio da seguinte maneira:*

a) *Distância:*

$$d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

b) *Valor absoluto:*

$$|A| = d(A, [0, 0]) = \max\{|a_1|, |a_2|\}.$$

c) *Diâmetro:*

$$D(A) = a_2 - a_1 \geq 0.$$

d) *Ponto médio:*

$$\text{med}(A) = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Definição 3.11. *Se a interseção entre dois intervalos A e B não é vazia, então é um intervalo definido por $A \cap B = [\max\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}]$.*

Se $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \cup B$ é um intervalo dado por $A \cup B = [\min\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}]$.

A interseção de dois intervalos A e B é vazia se $a_1 > b_2$ ou $b_1 > a_2$.

Definição 3.12. Dado $x \in \mathbb{R}$, diz-se que $X \in \mathbf{IR}$ é uma inclusão intervalar de x se $x \in X$. Por exemplo, o intervalo $[3, 4]$ é uma inclusão intervalar para o número π .

A seguir algumas das propriedades de distância, valor absoluto e diâmetro.

Teorema 3.13. Sejam $A, B, C, D \in \mathbf{IR}$ e os conceitos de distância, valor absoluto e diâmetro de acordo com a definição 3.10. Então valem:

- a) A aplicação d define uma métrica em \mathbf{IR} .
- b) O espaço métrico (\mathbf{IR}, d) é completo.
- c) Toda sequência de intervalos $\{A^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $A^{(0)} \supseteq A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \dots$ converge para o intervalo:

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}.$$

- d) $A \subseteq B \rightarrow |A| \leq |B|$.
- e) $d(A+B, A+C) = d(B, C)$.
- f) $d(A+B, C+D) \leq d(A, C) + d(B, D)$.
- g) $A \subseteq B \rightarrow D(A) \leq D(B)$.
- h) $D(A \pm B) = D(A) + D(B)$.
- i) $A \subseteq B \implies 1/2(D(B) - D(A)) \leq d(A, B) \leq D(B) - D(A)$.

Demonstração:

- a) De fato, d define uma métrica em \mathbf{IR} , pois:

- i) Seja $A \in \mathbf{IR}$ tal que $A = [a_1, a_2]$. Assim, $d(A, A) = \max\{|a_1 - a_1|, |a_2 - a_2|\} = 0$
- ii) Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ com $A \neq B$. Temos que:

$$d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Logo, $a_1 - b_1 \neq 0$ ou $a_2 - b_2 \neq 0$. Portanto, $d(A, B) \neq 0$.

iii) Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Temos que, $d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$, como a_1, a_2, b_1, b_2 são reais, pela propriedade do módulo, $d(A, B) = \max\{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|\} = d(B, A)$

iv) Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ e $C = [c_1, c_2]$. Temos que:

$$d(A, C) = \max\{|a_1 - c_1|, |a_2 - c_2|\}$$

Se $d(A, C) = |a_1 - c_1|$ então $|a_1 - c_1| = |a_1 - b_1 + b_1 - c_1| \leq |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1| \leq \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} + \max\{|b_1 - c_1|, |b_2 - c_2|\} = d(A, B) + d(B, C)$.

De modo análogo, se $d(A, C) = |a_2 - c_2|$ então $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

b) Seja $\{A^{(k)}\}_{k \in \mathbb{R}}$ uma sequência de Cauchy de intervalos $A^{(k)} = [a_1^{(k)}, a_2^{(k)}]$.

Mostremos que as sequências $\{a_1^{(k)}\}$ e $\{a_2^{(k)}\}$ são sequências de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ provemos que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_1$ e $n, m > n_2$ então $|a_1^{(n)} - a_1^{(m)}| < \varepsilon$ e $|a_2^{(n)} - a_2^{(m)}| < \varepsilon$.

Como $\{A^{(k)}\}_{k \in \mathbb{R}}$ é uma sequência de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então $d(A^{(n)}, A^{(m)}) < \varepsilon$.

Seja $n_1 = n_0$. Se $n, m > n_1$, então

$$|a_1^{(n)} - a_1^{(m)}| \leq \max\{|a_1^{(n)} - a_1^{(m)}|, |a_2^{(n)} - a_2^{(m)}|\} = d(A^{(n)}, A^{(m)}) < \varepsilon.$$

Seja $n_2 = n_0$. Se $n, m > n_2$, então

$$|a_2^{(n)} - a_2^{(m)}| \leq \max\{|a_1^{(n)} - a_1^{(m)}|, |a_2^{(n)} - a_2^{(m)}|\} = d(A^{(n)}, A^{(m)}) < \varepsilon.$$

Portanto, $\{a_1^{(k)}\}$ e $\{a_2^{(k)}\}$ são sequências de Cauchy.

Sendo que \mathbb{R} com a métrica usual é um espaço métrico completo, tem-se que $\{a_1^{(k)}\}$ converge para um número real que chamamos de a_1 e $\{a_2^{(k)}\}$ converge para um número real que chamamos de a_2 .

Assim $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^{(k)}) = [a_1, a_2] = A$.

c) Considere as sequências:

$$a_1^{(0)} \leq a_1^{(1)} \leq a_1^{(2)} \leq \dots \leq a_1^{(n-1)} \leq a_1^{(n)} \leq a_2^{(n)} \leq a_2^{(n-1)} \leq \dots \leq a_2^{(2)} \leq a_2^{(1)} \leq a_2^{(0)}$$

É claro que a sequência de número reais $\{a_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é monótona não-decrescente e está limitada superiormente por $a_2^{(0)}$. Como toda sequência de números reais monótona e limitada é convergente, segue que a sequência $\{a_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para um número real que

chamamos de a_1 . De maneira análoga, a sequência $\{a_2^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é monótona não-crescente e limitada inferiormente por $a_1^{(0)}$. Portanto, converge para um número real que chamamos de a_2 . Assim, segue o resultado.

d) Se $A \subseteq B$ então $b_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2$. Portanto, $|A| = \max\{|a_1|, |a_2|\} \leq |B| = \max\{|b_1|, |b_2|\}$

e) Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ e $C = [c_1, c_2]$

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$A + C = [a_1 + c_1, a_2 + c_2]$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } d(A + B, A + C) &= \max\{|(a_1 + b_1) - (a_1 + c_1)| + |(a_2 + b_2) - (a_2 + c_2)|\} \\ &= \max\{|a_1 + b_1 - a_1 - c_1| + |a_2 + b_2 - a_2 - c_2|\} \\ &= \max\{|b_1 - c_1| + |b_2 - c_2|\} \\ &= d(B, C) \end{aligned}$$

f) Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ e $D = [d_1, d_2]$.

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$C + D = [c_1 + d_1, c_2 + d_2]$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } d(A + B, C + D) &= \max\{|(a_1 + b_1) - (c_1 + d_1)| + |(a_2 + b_2) - (c_2 + d_2)|\} \\ &= \max\{|a_1 + b_1 - c_1 - d_1| + |a_2 + b_2 - c_2 - d_2|\} \\ &= \max\{|(a_1 - c_1) + (b_1 - d_1)|, |(a_2 - c_2) + (b_2 - d_2)|\}. \end{aligned}$$

Portanto, se $d(A + B, C + D) = |(a_1 - c_1) + (b_1 - d_1)|$ então temos que:

$$\begin{aligned} |(a_1 - c_1) + (b_1 - d_1)| &\leq |(a_1 - c_1)| + |(b_1 - d_1)| \\ &\leq \max\{|a_1 - c_1|, |a_2 - c_2| + \max\{|b_1 - d_1|, |b_2 - d_2|\}\} \\ &= d(A, C) + d(B, D), \end{aligned}$$

ou seja, $d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$.

De modo semelhante se $d(A + B, C + D) = |(a_2 - c_2) + (b_2 - d_2)|$ então $d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$.

g) Se $A \subseteq B$ então $b_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2$.

Como $D(A) = a_2 - a_1 \geq 0$ e $D(B) = b_2 - b_1 \geq 0$, segue que $D(A) \leq D(B)$.

h) Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Temos que:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$A - B = [a_1, a_2] + [-b_2, -b_1] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

$$\begin{aligned} D(A+B) &= a_2 + b_2 - (a_1 + b_1) \\ &= a_2 + b_2 - a_1 - b_1 \\ &= (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) \\ &= D(A) + D(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(A-B) &= a_2 - b_1 - (a_1 - b_2) \\ &= a_2 - b_1 - a_1 + b_2 \\ &= (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) \\ &= D(A) + D(B) \end{aligned}$$

i) Se $A \subseteq B$, então $b_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2$. Assim, $d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} = \max\{a_1 - b_1, b_2 - a_2\}$. Para $d(A, B) = a_1 - b_1$, temos que:

$$d(A, B) = a_1 - b_1 \leq a_1 - b_1 + b_2 - a_2 = b_2 - b_1 - (a_2 - a_1) = D(B) - D(A).$$

De maneira similar, se $d(A, B) = b_2 - a_2$, então $d(A, B) \leq D(B) - D(A)$.

Por outro lado, $d(A, B) = \max\{a_1 - b_1, b_2 - a_2\}$. Supondo que $d(A, B) = a_1 - b_1$, temos:
 $d(A, B) = a_1 - b_1 = \frac{a_1 - b_1}{2} + \frac{a_1 - b_1}{2} \geq \frac{a_1 - b_1}{2} + \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{a_1 - b_1 + b_2 - a_2}{2} = \frac{b_2 - b_1 - (a_2 - a_1)}{2} = \frac{1}{2}(D(B) - D(A))$.

Da mesma maneira, se $d(A, B) = b_2 - a_2$, então teremos $d(A, B) \geq \frac{1}{2}(D(B) - D(A))$.

□

3.5 FUNÇÕES INTERVALARES

Uma função real simples pode ser transformada em uma função intervalar a partir do conceito e das propriedades dos intervalos.

Exemplo 3.14. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ pode ser transformada na função $f_1(A, B, x) = A \cdot x + B$ na variável x com parâmetros de intervalos A e B . Para $A = [1, 2]$, $B = [4, 8]$ e $x = [3, 7]$ temos:

$$f_1(A, B, x) = [1, 2] \cdot [3, 7] + [4, 8] = [3, 14] + [4, 8] = [7, 22]$$

As raízes desta função podem ser encontradas, fazendo $f_1(A, B, x) = 0$, ou seja, $[1, 2] \cdot x + [4, 8] = 0$. Daí $[1, 2] \cdot x = [-8, -4]$ e portanto $x = [-8, -4]/[1, 2] = [-8, -2]$. Logo os zeros de $f_1(A, B, x)$ são possíveis em $[-8, -2]$.

3.5.1 IMAGEM INTERVALAR DE UMA FUNÇÃO REAL

Seja f uma função real contínua e $f(x)$ uma expressão funcional correspondente. Admitiremos que todas as expressões funcionais de f são compostas apenas por um número finito de operandos e operações, para os quais as operações intervalares estão definidas em 3.2.

A imagem intervalar de uma função real f de variável real x com $x \in A$, nem sempre pode ser determinada pela simples substituição de $f(x)$ por $f(A)$. De fato, para $f(x) = x \cdot x$ com $x \in A = [-3, 2]$ temos que: $f(x) = \{xx/x \in A\} = [0, 9]$ e $f(A) = A \cdot A = [-6, 9]$ que por sua vez contém o intervalo anterior.

Assim, a imagem intervalar da função f no intervalo A é definida da seguinte maneira:

$$I = \Gamma(f, A) = [\min f(x)|x \in A; \max f(x)|x \in A].$$

Observações:

- i) A imagem intervalar independe das diferentes expressões funcionais de f .
- ii) Se $X = [x, x]$ é um intervalo pontual, então $Y = f(X)$ também é um intervalo pontual, dado por $Y = [f(x), f(x)]$.
- iii) Se $A = [a, b]$ é um intervalo com $D(A) > 0$, então $\Gamma(f, A)$ é o intervalo de menor diâmetro que contém todos os valores reais de $f(A)$, quando $x \in A$.

Exemplo 3.15. Considere a função f dada pela expressão:

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

Esta função f pode ter diferentes expressões funcionais, tais como: $f(x) = x^2 - 2x$, $f_1(x) = x(x - 2)$ e $f_2(x) = (x - 1)^2 - 1$.

Assim para $x \in A = [0, 3]$ temos que:

$$I = \Gamma(f, A) = (x^2 - 2x; [0, 3]) = [\min\{x^2 - 2x|x \in [0, 3]\}; \max\{x^2 - 2x|x \in [0, 3]\}] = [-1, 3].$$

$$I = \Gamma(f_1, A) = (x(x - 2); [0, 3]) = [\min\{x(x - 2)|x \in [0, 3]\}; \max\{x(x - 2)|x \in [0, 3]\}] = [-1, 3].$$

$$I = \Gamma(f_2, A) = ((x - 1)^2 - 1; [0, 3]) = [\min\{(x - 1)^2 - 1|x \in [0, 3]\}; \max\{(x - 1)^2 - 1|x \in [0, 3]\}] = [-1, 3].$$

3.5.2 AVALIAÇÃO INTERVALAR

Considere f uma função real de variável real x , uma expressão funcional correspondente e um intervalo real $A \subseteq D_f$. Definimos *avaliação intervalar* (ou extensão intervalar) de f em A a função de valores intervalares F obtida pela substituição da variável real x pela variável intervalar A e todas as operações reais de f pelas operações intervalares, de acordo com 3.2.

Observações:

- i) Sendo A um intervalo pontual, ou seja, $A = [x, x]$ então $F(A) = f(x)$.
- ii) Ao contrário da *imagem intervalar*, a *avaliação intervalar* depende da expressão funcional correspondente.

Exemplo 3.16. *Seja a função f do exemplo anterior. Então temos:*

$$f(x) = x^2 - 2x \implies f([0, 3]) = ([0, 3])^2 - 2([0, 3]) = [-6, 9]$$

$$f_1(x) = x(x - 2) \implies f_1([0, 3]) = [0, 3]([0, 3] - 2) = [-6, 3]$$

$$f_2(x) = (x - 1)^2 - 1 \implies f_2([0, 3]) = ([0, 3] - 1)^2 - 1 = [-3, 3].$$

Observamos que na expressão funcional $f_2(x)$ a variável x aparece apenas uma vez e a avaliação intervalar tem diâmetro menor em relação a avaliação intervalar das outras expressões funcionais, o qual dará origem a conclusões mais precisas. No entanto, nem toda função pode ser reescrita desta forma, isto é, que a variável x apareça só uma vez.

3.6 O MÉTODO DE NEWTON

O Método de Newton é um algoritmo aproximativo, o qual instrui, passo a passo, como proceder para obter uma sequência de números $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tais que os valores $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ estão cada vez mais próximos d.

Assim, nesta seção será apresentado o Método de Newton real e em seguida mostraremos alguns aspectos deste método aplicado a funções intervalares.

3.6.1 MÉTODO DE NEWTON REAL

As soluções de uma equação da forma $f(x) = 0$ são chamadas de raízes da equação ou zeros da função. Se f for uma função polinomial de grau menor ou igual a quatro, existem

fórmulas para o cálculo dos zeros. Para funções com grau cinco ou mais, Niels Abel (1802 - 1829) afirma através de um teorema que não existe uma fórmula geral em termos de um número finito de operações com os coeficientes capaz de determinar os zeros de tais funções. Todavia, Isaac Newton inventou um processo numérico para aproximar soluções de equações envolvendo a derivada de f .

Considere a equação $f(x) = 0$, onde f é uma função derivável. O Método de Newton mostra como aproximar de uma raiz dessa equação, ou seja, de um número r tal que $f(r) = 0$. Observe o gráfico da **Figura 2** que mostra um esboço do gráfico $y = f(x)$. O número r é uma raiz de $f(x)$. Para obtermos uma aproximação de r escolhemos um número x_1 . A escolha deste número x_1 é feita através do esboço do gráfico de f e ele deve ser um valor razoavelmente próximo de r . Consideremos então a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$. Esta reta tangente T_1 que aparece na **Figura 2** intercepta o eixo x no ponto x_2 . Este número x_2 serve agora como uma aproximação melhor do que a de x_1 para r . Repetimos o processo com a reta tangente T_2 no ponto $(x_2, f(x_2))$. T_2 intercepta o eixo x em x_3 . Continuando com este processo chegaremos tão próximo de r quanto desejarmos.

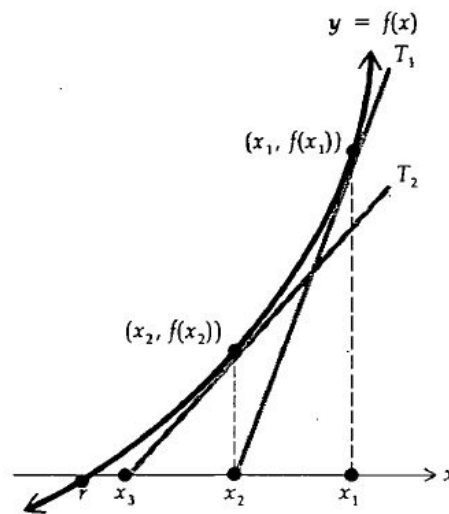


Figura 2: Esboço do gráfico de $y = f(x)$.

Fonte: (LEITHOLD, 1994)

As equações das retas tangentes a partir de x_1 foram utilizadas para determinar as aproximações sucessivas x_2, x_3, \dots de r . A reta tangente T_1 no ponto $(x_1, f(x_1))$ tem inclinação $f'(x_1)$. Logo, uma equação de T_1 é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Como T_1 intercepta o eixo x em x_2 , fazendo $x = x_2$ e $y = 0$ na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} 0 - f(x_1) &= f'(x_1)(x_2 - x_1) \\ \implies x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ se } f'(x_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Com esse valor de x_2 , uma equação de T_2 é:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

E fazendo na equação acima $x = x_3$ e $y = 0$, teremos:

$$\begin{aligned} 0 - f(x_2) &= f'(x_2)(x_3 - x_2). \\ \implies x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ se } f'(x_2) \neq 0. \end{aligned}$$

Continuando através desse processo, obtemos a fórmula geral para a aproximação x_{n+1} em termos da aproximação precedente x_n dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ se } f'(x_n) \neq 0.$$

Chamamos de operador Newtoniano a expressão $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Observações:

- i) Se $f'(x_n) = 0$, então a reta tangente será horizontal e portanto a menos que ela seja o próprio eixo x ela não interceptará tal eixo. Dessa forma o Método de Newton não é aplicável se $f'(x_n) = 0$ para algum x_n .
- ii) O valor de x_{n+1} não é necessariamente uma aproximação de r melhor do que x_n . Por exemplo, se x_1 não estiver suficientemente próximo de r , então $|f'(x_1)|$ pode ser tão pequeno que torna a reta tangente T_1 aproximadamente horizontal. Assim, x_2 que é a interseção de T_2 com o eixo x pode ser mais distante de r do que x_1 .

Observe no exemplo a seguir a eficiência do Método de Newton aplicado a uma equação cuja solução é conhecida.

Exemplo 3.17. Considere a equação $x^2 - 9 = 0$. Temos que:

$$f(x) = x^2 - 9 \implies f'(x) = 2x.$$

Pela fórmula geral para a aproximação x_{n+1} em termos da aproximação precedente x_n , obtemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n}$$

Com o auxílio de uma calculadora e utilizando $x_1 = 4$ como valor próximo da raiz de $f(x)$, temos:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 9}{2x_1} \implies x_2 = 4 - \frac{16 - 9}{8} \implies x_2 = 3,125,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 9}{2x_2} \implies x_3 = 3,125 - \frac{(3,125)^2 - 9}{2(3,125)} \implies x_3 = 3,0025,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 9}{2x_3} \implies x_4 = 3,0025 - \frac{(3,0025)^2 - 9}{2(3,0025)} \implies x_4 = 3,0000,$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4^2 - 9}{2x_4} \implies x_5 = 3,0000 - \frac{(3,0000)^2 - 9}{2(3,0000)} \implies x_5 = 3,0000.$$

Assim, a raiz positiva da equação $x^2 - 9 = 0$ será 3,0000, até a quarta casa decimal.

Agora um exemplo da aplicação do Método de Newton a uma equação de grau cinco.

Exemplo 3.18. Considere a equação $x^5 - 5x^2 + 1 = 0$. Fazendo $f(x) = x^5 - 5x^2 + 1$, temos que $f'(x) = 5x^4 - 10x$. Observe que $f(1) = -3$ é negativo e $f(2) = 13$ é positivo, logo deve haver uma raiz real de f entre 1 e 2. Admitindo $x_1 = 2$ como ponto de partida, obtemos sucessivamente

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{13}{60} = 1,783,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,783 - \frac{3,124}{32,703} = 1,687,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1,687 - \frac{0,434}{23,627} = 1,667.$$

3.6.2 MÉTODO DE NEWTON INTERVALAR

Nesta seção usaremos o Método de Newton como exemplo para destacar as dificuldades e alguns cuidados que se deve ter ao transformar algoritmos reais em versões intervalares, seguindo (MESQUITA, 2002).

Com a mesma finalidade do método real, através da versão intervalar do Método de Newton é possível construir uma sequência convergente de intervalos, cujo limite será um intervalo que contém a raiz real da função dada. A eficiência deste método é de tal modo que, se considerarmos um intervalo inicial que não contenha a raiz real, então, numa dada interação,

obtém-se um intervalo vazio como resultado. Caso contrário, se o intervalo inicial contém a raiz real da equação $f(x) = 0$ e, considerando que a sequência intervalar que se obtém é de intervalos encaixados, então obtém-se como limite o intervalo de menor diâmetro possível, que ainda contém a raiz desejada. Na prática esta é a vantagem do Método de Newton Intervalar.

As dificuldades e os cuidados que se deve ter estão exatamente em como definir o Método de Newton Intervalar, pois se pensarmos em definir este método através da extensão intervalar obtida a partir do operador real newtoniano, ou seja,

$$N(X) = X - \frac{F(X)}{F'(X)},$$

onde $F(X)$ e $F'(X)$ são extensões intervalares para as funções reais $f(x)$ e $f'(x)$, veremos que desta forma o método será sempre divergente, além do mais nenhum tratamento é feito a fim de se evitar divisões por zero.

A ideia é construir uma sequência de intervalos encaixados

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq \dots \supseteq [x^*, x^*] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cujos diâmetros vão diminuindo a medida que o valor de n aumenta até obtermos um intervalo pontual que contém a raiz x^* . Em (CLAUDIO; MARINS, 1989) é descrito passo a passo a construção do Método de Newton Intervalar convergente. Não iremos mostrar aqui esta construção por fugir de nossos objetivos.

4 APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA INTERVALAR

Em geral as metodologias utilizadas no ensino-aprendizagem da matemática tem levado os estudantes a pensarem que a matemática é sem importância e cujo entendimento é para poucos. Isso nos leva a concluir que tais metodologias possuem falhas, pois muitas vezes não conseguem mostrar a real importância dessa matéria no cotidiano e sua grande aplicação nas demais áreas.

Desta forma, o ensino da matemática não consegue atingir um dos objetivos básicos da matemática para o ensino médio que, de acordo com os PCNs (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000) é o de desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo.

Ademais, o avanço da tecnologia e o fácil acesso a ela, tem levado o aluno a crer que o ensino da matemática é algo dispensável pois acredita que problemas podem ser resolvidos com o uso de calculadoras e computadores. O uso desses recursos tecnológicos é de grande valor para o ensino-aprendizagem da matemática, porém quando são utilizados da maneira correta e não simplesmente como algo que irá revelar de maneira fácil a solução dos problemas matemáticos, pois os mesmos, dependem de raciocínio e estratégias.

Em matemática, os alunos estão acostumados a decorar algoritmos e fórmulas e não a pensar. A matemática intervalar aplicada a problemas em conteúdos do ensino médio apresenta situações que leva os estudantes a criarem estratégias para resolução dos mesmos que vão além de uma simples aplicação de fórmula. Portanto, problemas envolvendo matemática intervalar induzem os alunos a pensar retirando-os de sua zona de conforto.

Para verificar alguns fatos citados acima e também para mostrar como a matemática intervalar pode ser aplicada, alguns problemas e um questionário foram elaborados e aplicados para os alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública na cidade de Curitiba. Estes problemas foram feitos em duas versões, uma em aritmética simples, nos quais os estudantes estão acostumados, e outra usando a aritmética de intervalos.

Devido ao objetivo do questionário que é o de avaliar a capacidade de raciocínio, algu-

mas ferramentas foram disponibilizadas aos alunos para entendimento e resolução dos problemas, tais como: calculadoras, fórmulas e revisão de alguns conteúdos.

4.1 QUESTIONÁRIO E ANÁLISE DAS RESPOSTAS

O questionário a seguir foi elaborado de tal maneira a capacitar o aluno a construir um conhecimento de percepção sobre a ineficiência de métodos decorativos para resolução de alguns problemas e conseqüentemente levá-los a refletir e criar estratégias lógicas para solucioná-los.

4.1.1 QUESTIONÁRIO

1) Uma fábrica produz certa quantidade de peças por dia e destas, algumas saem com defeito. Qual a quantidade de peças sem defeito que esta fábrica produzirá por dia se ela:

- a) produz 1000 peças por dia e destas 70 saem com defeito?
- b) produz de 1000 a 1200 peças por dia e destas em torno de 50 a 100 saem com defeito?

2) Um banco faz a seguinte proposta a seus clientes: multiplicar de 2 a 3 vezes o dinheiro que eles tem no banco (se uma conta está em cheque especial a dívida também se multiplica).

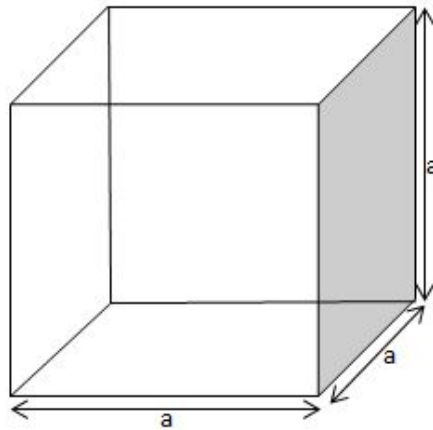
Maria e João são clientes desse banco e cada um possui duas contas no mesmo. Maria tem certeza que em uma das contas ela possui 100 reais e na outra um saldo negativo de -60 reais e que seus valores serão multiplicados por 2, se ela aceitar a proposta. João acha que em uma das contas tem entre 500 e 1000 reais e na outra em torno de -50 a -10 reais e sabe apenas que seus valores serão multiplicados de 2 a 3 vezes.

Para ter certeza de aceitar ou não a proposta do banco, Maria e João fizeram os cálculos de duas maneiras:

1. Somaram os possíveis valores das duas contas e logo calcularam o possível aumento.
2. Calcularam o possível aumento de uma e depois o endividamento da outra e finalmente somaram os valores.

Quais os resultados obtidos em (1) e em (2) por Maria e João?

3) Suponha que uma loja de materiais de construção vende tanques cúbicos para armazenamento de água, onde a medida das arestas pode ser de 2 a 5 metros.



- a) Qual o volume de um tanque cúbico cuja aresta tem medida igual a 3 metros?
- b) Se um cliente precisa de um tanque com capacidade de $20m^3$, essa loja possui o tanque que ele precisa? Justifique sua resposta.
- 4) Determine:
- a) $\text{sen}\alpha$, quando α é um ângulo de:
- 1) 30°
 - 2) 60°
 - 3) 150°
- b) Entre que valores estará o seno de um ângulo α , quando α está compreendido entre:
- 1) 30° e 60° ?
 - 2) 30° e 150° ?
- 5) O Índice de Massa Corporal (IMC) é determinado pela divisão da massa do indivíduo pelo quadrado de sua altura, onde a massa está em quilogramas e altura em metros, ou seja,
- $$IMC = \frac{\text{massa}}{\text{altura} \cdot \text{altura}}$$
- João pesa $65kg$ e tem altura $1,70m$.
- a) Qual o Índice de Massa Corporal de João?
- b) Supondo que a balança utilizada por João para determinar seu peso tem um possível erro de $5kg$ para mais ou para menos e a fita métrica que ele também utilizou tem um possível erro de $5cm$ para mais ou para menos, entre que valores estará determinado o seu Índice de Massa Corporal?

4.1.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

O objetivo principal do problema (1) apesar da simplicidade do mesmo é o de apresentar aos alunos a matemática intervalar e a partir dele começar a construir conhecimentos e estratégias para resolução dos exercícios posteriores.

A resposta do item (a) foi unânime entre os alunos. Alguns até questionaram se o que estava pedindo era realmente só aquilo. Quanto ao item (b) alguns já se sentiram desconfortáveis sobre o que responder. Sugerir aos mesmos que determinassem um valor mínimo e um valor máximo possível para as peças sem defeito e esta seria a resposta. Boa parte dos alunos rapidamente subtrairam o mínimo das peças produzidas (1000) pelo mínimo das peças com defeito (50) e subtrairam o máximo das peças produzidas (1200) pelo máximo das peças com defeito (100) chegando assim a um resultado falso. Porém, uma outra parte dos alunos perceberam que o valor mínimo possível para as peças sem defeito não era 1000 menos 50 e nem o máximo possível de peças sem defeito não era 1200 menos 100, e rapidamente chegaram ao resultado correto.

O problema (2) teve como propósito mostrar que a distributividade não é válida para aritmética de intervalos. Porém não foi esse o resultado obtido. Para os cálculos de Maria que envolvia aritmética simples quase todos os alunos fizeram exatamente como o enunciado descrevia e chegaram às mesmas conclusões. Já para os cálculos de João que envolvia aritmética de intervalos de uma maneira mais complexa, pois além das operações de adição e subtração neste problema era preciso também a multiplicação, no geral ninguém conseguiu chegar ao resultado desejado, embora a grande maioria deles tenham tentado resolver mas de maneira equivocada.

O problema (3) é uma aplicação simples da matemática intervalar à geometria espacial. A finalidade deste problema foi de verificar como os alunos aplicam os dados retirados de um problema a uma fórmula e como interpretam os valores obtidos. Para a resolução do item (a) a fórmula do volume do cubo foi disponibilizada no quadro para que o desconhecimento da mesma não interferisse nos objetivos que estavam sendo propostos. Com a medida da aresta sendo um número inteiro, pela simples aplicação da fórmula o resultado saiu fácil e de maneira correta para todos os alunos. Já no item (b), poucos conseguiram responder corretamente. A maioria deles buscaram através da fórmula um número racional que elevado ao cubo desse exatamente $20m^3$, e como isso não foi possível, concluíram que a loja não disponibilizava o tanque desejado, ou seja, poucos utilizaram o raciocínio lógico dedutivo para concluir que se a loja oferece tanques cúbicos com arestas que medem desde 2 metros a 5 metros, o volume desses tanques vão de $8m^3$ a $125m^3$.

O problema (4), em particular o item (b) tem um exemplo de aplicação da matemática intervalar na trigonometria. Para este problema foi disponibilizado aos alunos o círculo trigonométrico com os respectivos arcos notáveis com os valores da função seno e cosseno. Dessa forma o que estava sendo pedido no item (a) já estava disponível no quadro. Para o item (b) o objetivo foi de verificar a interpretação que os alunos dão para os valores do seno de um ângulo que está compreendido entre dois ângulos no círculo trigonométrico. Aqui novamente, o raciocínio teria levado a um valor máximo e um valor mínimo possível como resultado, porém quase todos os alunos não fizeram isso. O que fizeram foi determinar o intervalo definido exatamente pelos valores dos senos dos respectivos arcos das extremidades, sendo que no item (2) da (b) esses valores coincidiam.

O problema (5) foi elaborado de maneira que o conhecimento supostamente adquirido nos problemas anteriores auxiliasse na resolução do mesmo. O item (a) por ser um problema de aritmética simples e sendo disponível o uso de calculadoras, o resultado correto foi obtido pela grande maioria dos alunos. Já no item (b) bem poucos conseguiram chegar a conclusão correta. Boa parte tentou resolver cometendo o mesmo erro do problema (1), ou seja, usando o valor mínimo da massa com o valor mínimo da altura seguido pelo valor máximo da massa com o valor máximo da altura determinando um intervalo de valores “falso” para o que estava sendo pedido.

Após a aplicação dos problemas, as perguntas do questionário a seguir foram feitas aos alunos:

Responda:

- a) Para a resolução dos problemas, em qual dos itens, (a) ou (b), você teve maior dificuldade? Descreva algumas dessas dificuldades.
- b) O que é mais comum em situações reais, problemas do tipo (a) ou do tipo (b)? Por quê?
- c) Os problemas do tipo (a) são chamados “problemas de aritmética simples” e os do tipo (b) “problemas de aritmética de intervalos”. Que diferença fez isso para seu aprendizado?

Em geral os alunos responderam que a maior dificuldade estava relacionada em resolver os itens (b), pois de acordo com eles esse tipo de situação exige mais concentração e muito raciocínio além do desconforto de não ter como resposta um valor exato diferentemente do que eles estão acostumados como por exemplo, os itens (a).

Quanto a identificação da matemática intervalar em situações reais, para os alunos que refletiram sobre o questionário muitos descreveram a possibilidade da margem de erro em

diversas situações a que estão submetidos no cotidiano.

O objetivo do item (c) foi de que os alunos pudessem relatar se o fato dos problemas serem inicialmente apresentados em aritmética simples e em seguida em aritmética de intervalos ajudou-os a entender melhor o problema e em seguida interpretar com maior facilidade os valores obtidos. Muitos relataram a dificuldade em usar o pensamento lógico para solucionar o problema porque não costumam ser submetidos a esse tipo de situação.

No anexo, algumas das soluções apresentadas pelos alunos justificando esta análise.

5 CONCLUSÃO

A matemática intervalar concentra a maior parte das aplicações na computação numérica, pois através desta teoria é possível colocar limites sobre erros de arredondamento e erros de medição em cálculo matemático e assim desenvolver métodos numéricos que produzam resultados mais precisos. Neste trabalho foi dada uma nova aplicação a esta parte da matemática: ferramenta pedagógica para o ensino médio. Mostramos que esta ferramenta pode ser utilizada para abordar problemas em diversas áreas da matemática, afim de levar os estudantes a raciocinarem para conseguirem chegar à solução, ampliando os horizontes e observando que a matemática não é apenas aplicação de fórmulas e algoritmos.

Através da lista de problemas e o questionário aplicado, colocamos em prática este modelo metodológico. Os resultados obtidos foram satisfatórios. Para os problemas em aritmética simples os estudantes buscaram chegar às soluções através de métodos convencionais, os quais induziram-os a utilizar a capacidade de raciocínio de forma menos elaborada. Porém, na aplicação de problemas em aritmética de intervalos, para sua resolução, quando ocorreu, os mesmos utilizaram-se de métodos que estimularam sua capacidade de raciocínio com maior intensidade que no caso anterior.

Desta forma, a matemática intervalar mostrou-se eficiente como ferramenta pedagógica capaz de instigar o pensamento e a reflexão.

REFERÊNCIAS

CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico Computacional: teoria e prática**. São Paulo: Atlas, 1989.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. [S.l.]: Projeto Euclides, 2003.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA Ltda, 1994.

LIPSCHUTZ, S. **Topologia Geral: resumo da teoria, 650 problemas resolvidos, 391 problemas propostos, tradução de Alfredo Alves de Farias**. Brasília: McGraw-Hill do Brasil, 1973.

MESQUITA, M. P. **Matemática Intervalar: Princípios e Ferramenta C - XSC**. Minas Gerais: UFLA, 2002. Disponível em: <www.bcc.ufla.br/monografias/2002/Matemática_intervalar_princípios_e_ferramentas_C_XSC.pdf>. Acesso em: 29 de janeiro de 2013.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO ESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 12 de abril de 2013.

STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

ANEXO A – ALGUMAS SOLUÇÕES DO QUESTIONÁRIO APRESENTADAS PELOS ALUNOS

•Para a questão 01:

1) Uma fábrica produz certa quantidade de peças por dia e destas, algumas saem com defeito. Qual a quantidade de peças sem defeito que esta fábrica produzirá por dia se ela:

a) produz 1000 peças por dia e destas 70 saem com defeito?

R. 930. Subtração do total de peças menos as que estão com defeito.

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 70 \\ \hline 930 \end{array}$$

b) produz de 1000 a 1200 peças por dia e destas em torno de 50 a 100 saem com defeito?

MIN	MÁX
1000 - 50	1200 - 100
R. 950	R. 1100

b) produz de 1000 a 1200 peças por dia e destas em torno de 50 a 100 saem com defeito?

$$[1000, 1200] - [50, 100] = [950, 1100]$$

b) produz de 1000 a 1200 peças por dia e destas em torno de 50 a 100 saem com defeito?

$\frac{1000}{100}$	$\frac{1200}{100}$
$\frac{900}{800}$	$\frac{1150}{1150}$
900 MIN	1150 MÁX

• Para a questão 02:

2) Um banco faz a seguinte proposta a seus clientes: multiplicar de 2 a 3 vezes o dinheiro que eles tem no banco (se uma conta está em cheque especial a dívida também se multiplica).

Maria e João são clientes desse banco e cada um possui duas contas no mesmo. Maria tem certeza que em uma das contas ela possui 100 reais e na outra um saldo negativo de -60 reais e que seus valores serão multiplicados por 2, se ela aceitar a proposta. João acha que em uma das contas tem entre 500 e 1000 reais e na outra em torno de -50 a -10 reais e sabe apenas que seus valores serão multiplicados de 2 a 3 vezes.

Para ter certeza de aceitar ou não a proposta do banco, Maria e João fizeram os cálculos de duas maneiras:

1. Primeiro somaram os possíveis valores das duas contas e logo calcularam o possível aumento.
2. Calcularam o possível aumento de uma e depois o endividamento da outra e finalmente somaram os valores.

Quais os resultados obtidos em (1) e em (2) por Maria e João?

Handwritten calculations for Maria:

Maria

$$\begin{cases} 1. 100 \text{ reais} \\ 2. -60 \text{ reais} \end{cases} \times 2$$

$$100 - 60 = 40 \times 2 = 80$$

$$\begin{array}{r} 2. 100 \cdot 2 = 200 \\ 60 \cdot 2 = 120 \\ \hline 80 \end{array}$$

Handwritten calculations for João:

João

MAX

$$\begin{array}{r} 1000 \cdot 2 = 2000 \\ - 3 = 3000 \\ 50 \cdot 2 = 100 \\ 50 \cdot 3 = 150 \end{array}$$

MIN

$$\begin{array}{r} 500 \times 2 = 1000 \\ \cdot 3 = 1500 \\ 10 \cdot 2 = 20 \\ \cdot 3 = 30 \\ 1000 - 20 = 980 \\ - 30 = 950 \end{array}$$

Final calculations for João:

$$\begin{array}{r} 2000 - 100 = 1900 \\ 2000 - 150 = 1850 \end{array}$$

2) Um banco faz a seguinte proposta a seus clientes: multiplicar de 2 a 3 vezes o dinheiro que eles tem no banco (se uma conta está em cheque especial a dívida também se multiplica).

Maria e João são clientes desse banco e cada um possui duas contas no mesmo. Maria tem certeza que em uma das contas ela possui 100 reais e na outra um saldo negativo de -60 reais e que seus valores serão multiplicados por 2, se ela aceitar a proposta. João acha que em uma das contas tem entre 500 e 1000 reais e na outra em torno de -50 a -10 reais e sabe apenas que seus valores serão multiplicados de 2 a 3 vezes.

Para ter certeza de aceitar ou não a proposta do banco, Maria e João fizeram os cálculos de duas maneiras:

1. Primeiro somaram os possíveis valores das duas contas e logo calcularam o possível aumento.
2. Calcularam o possível aumento de uma e depois o endividamento da outra e finalmente somaram os valores.

Quais os resultados obtidos em (1) e em (2) por Maria e João?

Handwritten calculations for Maria:

Maria 100 - 60

$$\begin{array}{r} 2 \times 100 - 60 = 200 - 120 = 80 \\ 100 - 60 = 40 \quad 2 \times 40 = 80 \end{array}$$

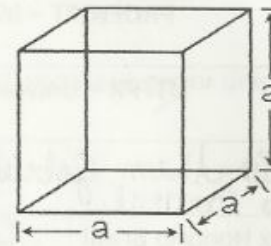
Handwritten calculations for João:

João 500, 1000

$$\begin{array}{r} 2 \times 500 + 1000 = 50 \cdot 2 + 1000 = 100 + 1000 \\ 100 - 20 \\ \hline = 2800 \end{array}$$

•Para a questão 03:

3) Suponha que uma loja de materiais de construção vende tanques cúbicos para armazenamento de água, onde a medida das arestas pode ser de 2 a 5 metros.



a) Qual o volume de um tanque cúbico cuja aresta tem medida igual a 3 metros?

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$27 \text{ m}^3$$

b) Se, um cliente precisa de um tanque com capacidade de 20 m^3 , essa loja possui o tanque que ele precisa? Justifique sua resposta.

1) Não, pois não há raiz cúbica para vinte (20), portanto a loja não tem o tanque com esta capacidade.

2) Ou, é até possível, mas é difícil calibrar a máquina em $4,4721359$.

b) Se, um cliente precisa de um tanque com capacidade de 20 m^3 , essa loja possui o tanque que ele precisa? Justifique sua resposta.

Não. Por $2,7 \times 2,7 \times 2,7 = 19,683$ e

$$2,8 \times 2,8 \times 2,8 = 21,952$$

portanto ou o valor é menor ou maior, mas não da dimensão necessária.

b) Se, um cliente precisa de um tanque com capacidade de 20 m^3 , essa loja possui o tanque que ele precisa? Justifique sua resposta.

Sim, porque ele vende de 8 a 125 m^3

b) Se, um cliente precisa de um tanque com capacidade de 20 m^3 , essa loja possui o tanque que ele precisa? Justifique sua resposta.

Sim. Porque 20 m^3 está entre 8 m^3 e 125 m^3

•Para a questão 04:

4) Determine:

a) $\sin \alpha$, quando α é um ângulo de:

1) 30° 0,5
 $\frac{1}{2}$ = \nearrow

2) 60° 0,8
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ \nearrow

3) 150° 0,5
 $\frac{1}{2}$ \nearrow

b) Entre que valores estará o seno de um ângulo α , quando α está compreendido entre:

1) 30° e 60° ?

entre 0,5 e 0,8

2) 30° e 150° ?

entre 0,5 e 1

b) Entre que valores estará o seno de um ângulo α , quando α está compreendido entre:

1) 30° e 60° ? $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) 30° e 150° ? $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) Entre que valores estará o seno de um ângulo α , quando α está compreendido entre:

1) 30° e 60° ?

Pode esperar
 que o seno
 seja entre
 30° e 60°
 ou seja entre
 $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) 30° e 150° ?

Pode se compreender
 que o valor será
 entre $30^\circ = \frac{1}{2}$ e
 $150^\circ = \frac{1}{2}$ ou seja será
 o mesmo valor
 compreendido
 nesse ângulo;

• Para a questão 05:

5) O Índice de Massa Corporal (IMC) é determinado pela divisão da massa do indivíduo pelo quadrado de sua altura, onde a massa está em quilogramas e altura em metros, ou seja,

$$IMC = \frac{\text{massa}}{\text{altura} \cdot \text{altura}}$$

João pesa 65 kg e tem altura 1,70 m.

a) Qual o Índice de Massa Corporal de João?

$$IMC = \frac{65}{1,70 \cdot 1,70} \quad IMC = \frac{65}{2,89} \quad \boxed{IMC = 22,4}$$

b) Supondo que a balança utilizada por João para determinar seu peso tem um possível erro de 5kg para mais ou para menos e a fita métrica que ele também utilizou tem um possível erro de 5cm para mais ou para menos, entre que valores estará determinado o seu Índice de Massa Corporal?

$$IMC = \frac{70}{1,65 \cdot 1,65} \quad IMC = \frac{70}{2,72} \quad \boxed{IMC = 25,7} \quad \text{R. Está determinado entre } 19,6 \text{ e } 25,7.$$

$$IMC = \frac{60}{1,75 \cdot 1,75} \quad IMC = \frac{60}{3,06} \quad \boxed{IMC = 19,6}$$

b) Supondo que a balança utilizada por João para determinar seu peso tem um possível erro de 5kg para mais ou para menos e a fita métrica que ele também utilizou tem um possível erro de 5cm para mais ou para menos, entre que valores estará determinado o seu Índice de Massa Corporal?

$$\begin{array}{l} IMC = \frac{60}{1,65 \cdot 1,65} \\ IMC = \frac{60}{2,72} \\ IMC = 22,05 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} IMC = \frac{70}{1,75 \cdot 1,75} \\ IMC = \frac{70}{3,06} \\ IMC = 22,87 \end{array} \right. \quad \text{entre } 22,05 \text{ e } 22,87$$

•Para as perguntas em relação ao questionário:

•Para a letra a:

a) Para a resolução dos problemas, em qual dos itens, (a) ou (b), você teve maior dificuldade?
Descreva algumas dessas dificuldades.

No item (B) pois as contas são mais complexas, e exigem pensar e analisar melhor o problema.

a) Para a resolução dos problemas, em qual dos itens, (a) ou (b), você teve maior dificuldade?
Descreva algumas dessas dificuldades.

na (b), pois tivemos que raciocinar, usar uma lógica de um modo que não usamos normalmente.

a) Para a resolução dos problemas, em qual dos itens, (a) ou (b), você teve maior dificuldade?
Descreva algumas dessas dificuldades.

Um pouco de cada, como não sei se está certo pois não sei se resolvi a conta do mesmo jeito ou errado

a) Para a resolução dos problemas, em qual dos itens, (a) ou (b), você teve maior dificuldade?
Descreva algumas dessas dificuldades.

Na letra b, por que sempre pedia para calcular e achar o "entre a e b" e assim os cálculos ficavam com mais dificuldades.

•Para a letra b:

b) O que é mais comum em situações reais, problemas do tipo (a) ou do tipo (b)? Por quê?

Do tipo (b), porque normalmente não temos valores exatos como do tipo (a), mas sim valores entre outros ex: 500 e 1000 ou de 20 a 100.

b) O que é mais comum em situações reais, problemas do tipo (a) ou do tipo (b)? Por quê?

as duas, mas a (a) são mais comuns, principalmente na conta de dinheiro, contas mais simples são mais comuns.

b) O que é mais comum em situações reais, problemas do tipo (a) ou do tipo (b)? Por quê?

Mais problemas do tipo B pois temos números que não são redondos ou exatos.

b) O que é mais comum em situações reais, problemas do tipo (a) ou do tipo (b)? Por quê?

b, pois normalmente só temos uma média dos números

●Para a letra c:

c) Os problemas do tipo (a) são chamados "problemas de aritmética simples" e os de tipo (b) "problemas de aritmética de intervalos". Que diferença fez isso para seu aprendizado?

no desmembramento de exercícios, sem contar que ajuda mais a entender os "problemas" de dia a dia.

c) Os problemas do tipo (a) são chamados "problemas de aritmética simples" e os de tipo (b) "problemas de aritmética de intervalos". Que diferença fez isso para seu aprendizado?

Saber matemática para mim é saber resolver problemas NÃO decorar contínuas, por isso saber resolver um problema só com lógica.

c) Os problemas do tipo (a) são chamados "problemas de aritmética simples" e os de tipo (b) "problemas de aritmética de intervalos". Que diferença fez isso para seu aprendizado?

Faz nos pensarmos mais, porque ficar só nas contas de + e - são muito fáceis precisamos fazer coisas com mais dificuldade para adquirir coisas novas.

c) Os problemas do tipo (a) são chamados "problemas de aritmética simples" e os de tipo (b) "problemas de aritmética intervalar". Que diferença fez isso para seu aprendizado?

Os problemas do tipo b deveriam ser ensinados aos alunos desde pequenos, pois são muito úteis.