

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Lucas Schimith Zanon

**PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS: UMA EXPERIÊNCIA NO
LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA E NA FORMAÇÃO
CONTINUADA DE PROFESSORES**

Santa Maria, RS
2022

Lucas Schimith Zanon

**PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS: UMA EXPERIÊNCIA NO LIVRO
ABERTO DE MATEMÁTICA E NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE
PROFESSORES**

Dissertação do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional realizado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Carmen Vieira Mathias

Santa Maria
2022

Zanon, Lucas

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS: UMA EXPERIÊNCIA NO LIVRO
ABERTO DE MATEMÁTICA E NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE
PROFESSORES / Lucas Zanon.- 2022.

73 p.; 30 cm

Orientadora: Carmen Vieira Mathias

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2022

1. Projeção Cartográfica 2. Material Didático 3. BNCC
4. Relato de Experiência I. Vieira Mathias, Carmen II.
Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, LUCAS ZANON, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Lucas Schimith Zanon

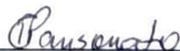
**PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS: UMA EXPERIÊNCIA NO LIVRO
ABERTO DE MATEMÁTICA E NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE
PROFESSORES**

Dissertação do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional realizado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

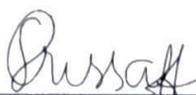
Aprovado em 31 de janeiro de 2022:



Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)



Claudia Candida Pansonato, Dra. (UFSM)



Lhaylla dos Santos Crissaff, Dra (UFF)

Santa Maria
2022

RESUMO

PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS: UMA EXPERIÊNCIA NO LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA E NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

AUTOR: Lucas Schimith Zanon
ORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias

Em 2018 foi divulgada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que visa determinar as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas durante cada etapa da educação básica. A BNCC trouxe uma habilidade voltada à compreensão das Projeções Cartográficas na disciplina de Matemática a ser cursada no Ensino Médio. Pensando em como as habilidades da BNCC podem ser trabalhadas em sala de aula, um grupo de professores, incluindo o autor dessa dissertação, vem redigindo um material didático, denominado Livro Aberto de Matemática (LAM), em que o tópico Projeções Cartográficas é abordado conforme preconiza a BNCC. Durante a redação do material, em vários momentos surgiram dúvidas de quanto o professor de matemática está preparado para lecionar esse tópico. Assim, a presente dissertação, tem por objetivo investigar os saberes dos professores de Matemática (e graduandos) sobre Projeções Cartográficas. Para cumprir tal objetivo, elaboramos e aplicamos uma Oficina realizada de forma remota, que possuiu atividades síncronas e assíncronas. Durante a Oficina, apresentamos o capítulo criado sobre Projeções Cartográficas, discutimos algumas atividades junto aos participantes e utilizamos como instrumento para coleta de dados questionários e gravações dos encontros síncronos. Por meio de uma análise qualitativa das respostas dos participantes aos questionários disponibilizados e interações realizadas durante a Oficina, concluímos que a maioria dos participantes não sente segurança para lecionar Projeções Cartográficas.

Palavras-chave: Projeções Cartográficas, Material Didático, BNCC, Relato de Experiência.

ABSTRACT

CARTOGRAPHIC PROJECTIONS: AN EXPERIENCE IN THE OPEN BOOK OF MATHEMATICS AND IN CONTINUING EDUCATION OF TEACHERS

AUTHOR: Lucas Schimith Zanon
ADVISOR: Carmen Vieira Mathias

In 2018, the National Curricular Common Base (NCCB) was released, which aims to determine the skills (general and specific), habilities and essential learning that must be developed during each stage of basic education. In this document, among the changes that occurred, a skill regarding understanding Cartographic Projections in the Mathematics subject to be studied in High School was added. Thinking about how the NCCB skills can be worked in the classroom, a group of teachers, including the author of this dissertation, has been writing a didactic material, called Livro Aberto de Matemática (LAM), in which the topic Cartographic Projections is approached, as recommended by the NCCB. Thus, this dissertation aims to investigate the knowledge of mathematics teachers (and undergraduates) about Cartographic Projections. To achieve this goal, we designed and implemented a workshop held remotely, which had synchronous and asynchronous activities. During the workshop, we presented the chapter created on Cartographic Projections, discussed some activities with the participants and used four questionnaires and the recordings of the synchronous meetings as an instrument for data collection. Through a qualitative analysis of the answers given in the first questionnaire available, most participants reported not feeling confident to teach Cartographic Projections.

Keywords: Cartographic Projections, Didactic Material, BNCC, Experience Report

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	7
2. MAPEAMENTO.....	10
3. SOBRE O MATERIAL DIDÁTICO DESENVOLVIDO.....	16
3.1. PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS	18
3.1.1. Projeção Cartográfica Cilíndrica Conforme de Mercator	19
3.1.2. Projeção Cartográfica Cilíndrica de Lambert.....	22
3.2. SOBRE O CAPÍTULO PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS NO LAM	24
4. METODOLOGIA	31
5. SOBRE A OFICINA.....	37
5.1. RELATOS DAS ATIVIDADES REALIZADAS NA OFICINA	40
5.1.1. Relato da primeira semana de atividades	41
5.1.2. Relatos da segunda semana de atividades	43
5.1.3. Relato da última semana de atividades	45
5.2. ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS.....	51
6. CONCLUSÕES.....	63
REFERÊNCIAS	66
APÊNDICE A – FORMULÁRIO DE INSCRIÇÃO.....	68
APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	69
APÊNDICE C – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO	70
APÊNDICE D – SEGUNDO QUESTIONÁRIO	71
APÊNDICE E – TERCEIRO QUESTIONÁRIO.....	72
APÊNDICE F – QUARTO QUESTIONÁRIO.....	73

1. INTRODUÇÃO

As Projeções Cartográficas são representações da superfície terrestre (considerando um modelo esférico) no plano, possibilitando assim a construção de um mapa. Já o mapa corresponde à representação aproximada da superfície terrestre em um plano utilizando as coordenadas geográficas. Segundo Carvalho e Araújo (2008) a Cartografia, ciência de criação de mapas, acompanhou “passo-a-passo” a história da humanidade, a historiografia, tanto a tradicional quanto as modernas. As representações cartográficas foram utilizadas em diferentes momentos e regiões do mundo por diversos povos. À medida que os ciclos de evolução da humanidade vêm sendo praticados, a Cartografia essencialmente tem sido realizada. Esse desejo e capacidade de representar o território conhecido têm mostrado, em geral, as especificidades das paisagens e rotina de cada povo, atividades básicas de seus fazeres sociais, como localização de pontos, a demarcação de espaços ou o traçado de rotas.

No sistema de ensino brasileiro este conteúdo era visto como uma responsabilidade exclusiva da disciplina de Geografia, contudo isto mudou em 2018, ao ser adicionado nas habilidades a serem ensinadas no Ensino Médio em Matemática. Esta atualização é decorrência da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que é um documento que visa determinar as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas durante cada etapa da educação básica.

De acordo com BNCC, inicialmente é recomendado abordar o tema Projeções Cartográficas no Ensino Fundamental na disciplina de Geografia, segundo consta nas habilidades “EF03GE06 - Identificar e interpretar imagens bidimensionais e tridimensionais em diferentes tipos de representação cartográfica” (BRASIL, 2018). Já no Ensino Médio, a BNCC apresenta na disciplina de Matemática, a habilidade EM13MAT509 - “Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em Cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital” (BRASIL, 2018). Podemos inferir, tendo em vista nossa formação, que tal alteração, causa uma necessidade de adaptação das(os) professoras(es) de Matemática, além da elaboração e adaptação de materiais didáticos que possam auxiliar no ensino das Projeções Cartográficas.

A partir das habilidades descritas na BNCC para o Ensino Médio, o projeto Livro Aberto de Matemática (LAM) procurou colaboradores que pudessem elaborar capítulos referentes a cada uma das habilidades, para serem utilizados como um livro didático, que poderá dar suporte aos professores para lecionar os conteúdos na disciplina de Matemática. E, no caso das Projeções Cartográficas, os profissionais responsáveis pela pesquisa sobre o conteúdo e escrita

do material didático foram o autor desta dissertação e sua orientadora. O LAM, de acordo com seu próprio site¹, é um projeto da Olimpíada Brasileira de Matemática do Ensino Público (OBMEP) e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), desenvolvido pela Associação Livro Aberto que possuiu financiamento da Fundação Itaú Social (até 2019) e tem a proposta de produzir recursos educacionais de licença aberta, visando conectar a pesquisa científica com a prática educadora. Atualmente o projeto conta com 41 colaboradores responsáveis por criar e revisar capítulos do livro didático, além de participar de um grupo de estudos, reforçando uma formação continuada de professores de Matemática.

Nesse contexto, nessa dissertação, a ideia inicial visava a aplicação do material elaborado para o ensino de Projeções Cartográficas, diretamente a alunos e alunas do Ensino Médio. Contudo, no início do ano de 2020 uma pandemia causada pelo novo Corona vírus (COVID – 19) começou, e segundo a Organização Mundial da Saúde não teria fim próximo. Adaptando a pesquisa a tal situação decidimos realizar uma Oficina para auxiliar os professores de Matemática com o conteúdo de Projeções Cartográficas. O que motivou essa alteração foi a dificuldade que tivemos para encontrar material que versasse sobre Projeções Cartográficas com enfoque matemático para o Ensino Médio, durante o período de pesquisa para criação do capítulo. Essa dificuldade gerou certa curiosidade em saber quão preparados os(as) professores(as) estarão para lecionar este assunto, quando a BNCC entrar em obrigatoriedade (isso deverá ocorrer em 2022). Desta forma, a presente dissertação tem por objetivo investigar os saberes dos professores de Matemática e graduandos sobre Projeções Cartográficas. Para que fosse possível realizar a pesquisa e divulgar o material elaborado, foi concebida uma Oficina cujo público alvo foram os(as) graduandos(as) do Curso de Matemática e as(os) os educadores que lecionam esta disciplina.

Tal Oficina foi planejada para ser realizada de forma remota, com atividades síncronas, utilizando de videochamadas através do *Google Meet* e atividades assíncronas, disponibilizadas em ambiente virtual de aprendizagem, entre os encontros *online*.

A presente dissertação é composta por seis capítulos. A presente introdução é considerada o primeiro capítulo. No capítulo 2, apresentamos um mapeamento realizado dentro do banco de dissertações do Programa de Mestrado Profissional de Matemática (PROFMAT), que possuiu o objetivo de localizar dissertações que viessem ao encontro do tema explorado da pesquisa. No terceiro capítulo apresentamos parte da pesquisa realizada para a elaboração do

¹ <https://umlivroaberto.org/>

capítulo presente no LAM começou no início de 2019 e uma breve apresentação do capítulo Projeções Cartográficas que foi publicado em 2020.

No Capítulo 4, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados no decorrer da pesquisa. Nele, foram apresentados o contexto do trabalho, os participantes da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados que foram utilizados e como a Oficina foi planejada. O relato da Oficina e as análises são apresentados no quinto capítulo. O Capítulo 6 encerra a dissertação em que são apresentadas as conclusões obtidas pelo autor no decorrer de toda a experiência.

2. MAPEAMENTO

Conforme Assai; Arrigo e Broietti (2018), mapear os temas e aspectos abordados por pesquisadores em diferentes tipos de produções científicas, como teses, dissertações e artigos constitui-se uma prática comum no ambiente acadêmico. Assim, foi realizada em meados de julho de 2021, uma busca por dissertações que versassem sobre o tema Projeções Cartográficas no banco de dissertações² do PROFMAT. Justifica-se a busca no referido espaço, visto que as dissertações produzidas possuem maiores aproximações com essa pesquisa.

Como o foco dessa investigação é as Projeções Cartográficas, a produção de um material didático e o debate com outros professores sobre o material, realizou-se a busca utilizando no campo título, do referido banco, as palavras-chaves “cartografia”, “geografia”, “globo” e “projeção”. Observa-se que devido a procura ser feita em dissertações do PROFMAT, as palavras “matemática” e “ensino” não foram adicionadas, apesar de fazerem parte do interesse de pesquisa.

Foram encontradas nessa pesquisa a soma de 25 dissertações, sendo seis ao buscar “cartografia”, sete ao pesquisar “geografia”, sete ao procurar “globo” e seis ao buscar “projeção”. Após exclusão de duas dissertações coincidentes e feita a leitura dos respectivos resumos, foram selecionadas 16 dissertações que de alguma forma se assemelham a presente pesquisa, seja pelo envolvimento de Projeções Cartográficas, ou por apresentar cálculos matemáticos referentes ao tema, ou criar material didático para ser utilizado no ensino básico.

Na sequência apresentamos o Quadro 1 que explicita as dissertações (D), autores(as), instituição de ensino em que a dissertação foi defendida, ano de conclusão e em qual estado brasileiro a pesquisa foi realizada. A ordem utilizada para dispor as dissertações no quadro, auxiliará a apresentação deste mapeamento.

Quadro 1 – Informações das dissertações analisadas

D	Autor	Título	Instituição	Ano de conclusão	Estado
1	Allanny Karla Barbosa Vasconcelos	Uma proposta de eletiva para um itinerário formativo: A geometria e cartografia da terra	Universidade Federal do Alagoas	2021	AL
2	Kim Carlos Santos	A matemática na cartografia e o uso de mapas no ensino de matemática na educação básica	Universidade Federal do Piauí	2018	PI

² <https://www.profmato-sbm.org.br/dissertacoes/>

3	Kênia Fiório Pizetta	Adaptação de métodos e instrumentos da topografia e da cartografia no ensino de matemática	Universidade Estadual do Norte Fluminense	2015	RJ
4	Marlon Mülhbauer	Cartografia: uma introdução aos conceitos de Geometria não euclidiana na educação básica	Universidade Tecnológica Federal do Paraná	2014	PR
5	Araken Jessé Da Silva Amaral	Geometria esférica e cartografia: uma proposta de estudo e atividades para o ensino médio	Universidade Federal Fluminense	2014	RJ
6	Luciane Heim	Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia	Universidade Federal Rural de Pernambuco	2013	PE
7	Adriana Marise Colombera Honda	Matemática e geografia: Uma interdisciplinaridade	Universidade Estadual de Londrina	2013	PR
8	José Adriano Fernandes Dos Santos	Matemática aplicada à geografia	Universidade Federal do Ceará	2016	CE
9	Francisco José Santos Uchôa	A geometria esférica e a distância entre dois pontos do globo na perspectiva do Geogebra	Universidade Federal do Ceará	2018	CE
10	André Luiz Mendes Santana	Trabalhando com geometria não-euclidiana, com ênfase para a geometria do globo terrestre na educação básica - Proposta de novas atividades	Universidade Federal da Bahia	2013	BA
11	Jéssica Correia De Souza	A matemática dos mapas conformes: Funções complexas aplicadas a Cartografia.	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro	2020	RJ
12	Carlos De Lima Macedo	Sobre a projeção de Mercator	Universidade Federal do Cariri	2018	CE
13	Antonio Edson Pereira Da Silva Filho	A trigonometria esférica e o globo terrestre	Universidade Federal do Ceará	2014	CE
14	Marco Tadeu Gonçalves	Cálculo de áreas via projeção equivalente de Lambert	Universidade Estadual Maringá	2016	PR
15	Edem Assunção Baima Neto	Projeção de Mercator	Universidade Federal do Piauí	2014	PI
16	Euderley De Castro Nunes	A esfera de Riemann: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio	Universidade Federal do Amazonas	2015	AM

Ao analisarmos o Quadro 01, percebemos que a região brasileira que mais produziu pesquisa, no PROFMAT, sobre este tema foi a Nordeste com 10 dissertações, em que estão presentes cinco estados, Alagoas com uma, Bahia com uma, Piauí e Pernambuco com duas e Ceará, como o estado com mais produções nessa busca, com quatro dissertações. Nas regiões Norte, Sudeste e Sul apenas um estado de cada região apareceu na busca, Amazonas (Norte) com uma, Paraná (Sul) apresentou duas e, por fim, três das 16 dissertações selecionadas foram produzidas no estado de Rio de Janeiro (Sudeste).

As dissertações analisadas foram divididas em dois grupos. O primeiro grupo (G1) é formado por dissertações que descrevem a criação e/ou aplicação de uma proposta didática no ensino básico. Tais propostas, de alguma forma abordam as Projeções Cartográficas, seja analisando os cálculos feitos durante o processo, seja usando o assunto para inserir o conteúdo matemático programado na escola.

O segundo grupo (G2) conta com pesquisas que aprofundaram o estudo dos cálculos necessários para realizar determinada Projeção Cartográfica, seja escolhendo duas ou mais para comparar seus processos de formação, ou fazendo um resgate histórico daquelas que constituem um mapa, ou uma tentativa de simplificar os cálculos, para que possa ser trabalhado no ensino básico. Observamos que visto essa separação, a D16 acabou sendo incluída nos dois grupos.

O grupo G1 é composto por 10 dissertações (D1 a D10) e o G2 por cinco dissertações (D11 a D15). A seguir será apresentado uma breve descrição de cada uma das pesquisas.

A primeira dissertação (D1) analisou um novo padrão de ensino (implantando a partir de 2018), com intuito de auxiliar os professores e alunos do Ensino Médio com a criação de um possível Itinerário Formativo. Tal itinerário mescla o ensino de Matemática e Geografia, utilizando de mapas e do globo terrestre para ensinar conteúdos como fuso horário, escalas, cálculos envolvendo longitude e latitude e geometria esférica.

A dissertação D2 apresenta uma pesquisa ampla que traz a aderência da Matemática e Projeções Cartográficas, apontando conteúdos matemáticos que são utilizados na confecção de um mapa. Também apresenta as Projeções Cartográficas mais conhecidas e utiliza topologia (estudo de propriedades objetos geométricos) para explicar projeções.

Tentando adaptar o conteúdo de topografia para o Ensino Médio, a D3 integra este tópico à cartografia. De maneira inovadora e artesanal foi criado um material didático que foi aplicado em três turmas do Ensino Médio. Este material explora a construção de Projeções Cartográficas com métodos da topografia e aproveita o contexto para explorar escalas e proporções.

A Geometria Esférica faz parte da geometria nomeada Não Euclidiana, e não faz parte do conteúdo proposto para o ensino básico brasileiro. Porém existem pesquisadores que acreditam ser possível trabalhar esse assunto sem grandes dificuldades caso fossem relacionadas com o globo terrestre. Esse é o caso das dissertações D4, D5, D6, D7, D9 e D10. Em particular as dissertações D4, D6 e D9 buscam ensinar a distância entre dois pontos da esfera ou as propriedades do triângulo esférico.

Os trabalhos D4, D7 e D9 aplicaram materiais didáticos em turmas do Ensino Médio, buscando apresentar a Geometria Esférica, usando a cartografia como contexto. Nesses trabalhos, foram feitos os cálculos de distância entre dois pontos do globo utilizando as coordenadas geográficas (longitude e latitude). Em particular, a conclusão de D7 explicita que o material, que realizou uma articulação entre Matemática e Geografia, auxiliou os alunos na compreensão de conteúdos envolvendo mapas e coordenadas.

O trabalho realizado em D5 apresenta apenas uma proposta, que não foi aplicada. Tal proposta didática foca em relacionar Geometria Esférica com cartografia. Mas diferentemente dos trabalhos relatados até o momento, D5 optou por realizar um levantamento histórico das principais Projeções Cartográficas. No mesmo intuito D6 voltou sua atenção para apresentar levantamentos dos estudos da Geometria Esférica feitos por Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Riemann.

Partindo da interdisciplinaridade entre a Matemática e Geografia, D8 explica através da matemática a projeção da superfície de uma esfera em um plano com foco na Projeção Cartográfica de Mercator, além de utilizar da Geometria Diferencial que basearam os estudos de Gauss.

D10 utilizou o termo “Geometria do Globo Terrestre” para descrever seu objetivo de ensino através de uma proposta didática. Assim como em D5 e D6, a proposta não foi implementada. No entanto, o pesquisador se dedicou a criar uma proposta inovadora para ensinar os conteúdos matemáticos que são aplicados para auxiliar o estudo de Geografia.

No grupo G2, elencamos as dissertações, que decorrente da leitura de seus respectivos resumos, apresentaram um objetivo voltado Matemática Aplicada envolvendo o assunto de Projeção Cartográfica. Segundo o site³ do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), a Matemática Aplicada é um ramo da Matemática no qual se estuda a aplicação de conhecimentos matemáticos a outros domínios. Segue a apresentação das dissertações que trouxeram em seus objetivos analisar parte dos cálculos

³ <https://aplicada.ime.ufg.br/p/24019-conheca-um-pouco-sobre-a-matematica-aplicada>

necessários para realizar alguma das Projeções Cartográficas conhecidas, são elas D11, D12, D13, D14 e D15.

Com ênfase em apresentar as construções de algumas projeções cartográficas, consideradas mais populares, D11 utilizou de análise complexa⁴ para realizar sua pesquisa.

D12 realizou uma associação entre a trigonometria esférica e o globo terrestre. Nesse trabalho, em um primeiro momento o pesquisador estuda diversos temas da Geometria Esférica, como o triângulo esférico e a fórmula de Girard. Por fim adota o globo como uma esfera para envolver os conceitos da geometria, com o objetivo de calcular distâncias e ângulos utilizando coordenadas geográficas.

Ao destrinchar duas propriedades da Projeção Cartográfica de Mercator (que será explorada nessa dissertação com maiores detalhes no próximo capítulo), D13 relata a conexão dessa projeção com a função exponencial e a relação com a curva de Tractrix. Nesse sentido, a dissertação apresenta conceitos matemáticos que são trabalhados no Ensino Superior de forma abstrata. Porém, ao mencionar as Projeções Cartográficas realiza uma aplicação destes conceitos, tornando-os práticos.

O físico matemático Leonhard Paul Euler demonstrou, no século XVIII, que a superfície de uma esfera não pode ser representada em um plano sem nenhuma distorção, deste modo não é possível criar uma projeção cartográfica sem deformações. Isso é uma consequência do Teorema *Egregium* (do latim “notável”) provado pelo matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (SATO, 2017). D14 buscou minimizar estas distorções analisando duas Projeções Cartográficas, a de Mercator e a Equivalente Lambert. Nesse trabalho, o autor elaborou uma rotina de cálculos para transformar as coordenadas geográficas da esfera para o plano cartográfico, em seguida calcular áreas dos polígonos resultantes do cruzamento das linhas de latitude e longitude para comparar com os polígonos formados na Projeção de Mercator. Assim, procura apresentar um intermédio entre a projeção que visa manter a forma dos continentes (Mercator) e a projeção que busca uma equivalência de áreas (Lambert).

D15 visou estudar a Matemática que explica a Projeção Cartográfica de Mercator, fazendo uma revisão histórica das Projeções Cartográficas e com os resultados de alguns cálculos complexos (termo usado pelo autor) tentar desenvolver uma fórmula que facilite o ensino do tema em turmas de Ensino Médio.

Por fim, D16 foi classificado nos dois grupos (G1 e G2) por apresentar uma pesquisa dos estudos desenvolvidos por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que

⁴ Ramo da Matemática que investiga as funções de números complexos (Fonte: Wikipédia)

demonstrou como projetar estereograficamente uma esfera num plano complexo, assim fazendo a relação com os números complexos para criar um material aplicável no Ensino Médio. Observamos que no ano de produção da D16 (2015) o conjunto dos números complexos era estudado no Ensino Médio.

A análise destas 16 dissertações mostra que as Projeções Cartográficas podem ser objeto de pesquisa em diversos âmbitos do ensino da Matemática, que vão desde os cálculos necessários para transformar as coordenadas a utilizar a Projeção Cartográfica como tema para ensinar outros conteúdos. Nesse mapeamento notamos um destaque a Geometria não Euclidiana, mais especificamente a Geometria Esférica. A Projeção Cartográfica, mesmo em dissertações mais atuais, não foi tratada como habilidade conforme cita a BNCC. O trabalho que mais se aproxima a isso foi D1, que abordou os Itinerários Formativos e que envolve o tema em questão, contudo o material elaborado não buscou ensinar as Projeções Cartográficas como habilidade Matemática.

Logo após a leitura dos 16 trabalhos é possível perceber que a presente pesquisa se diferencia, primeiramente por ter professoras, professores e estudantes de Matemática como público alvo, investigando o conhecimento prévio deles e delas e tentando auxiliar nas suas formações como profissionais da educação. Também apresenta o material didático, exposto no próximo capítulo, que visa ensinar as Projeções Cartográficas como conteúdo matemático, ao invés de usar como tema para abordar outros conteúdos.

3. SOBRE O MATERIAL DIDÁTICO DESENVOLVIDO

Nesta parte da dissertação apresentaremos o capítulo do LAM, denominado Projeções Cartográficas. O referido capítulo foi criado na primeira parte desta pesquisa. Porém, antes de iniciar a apresentação que contará com exemplos de atividades, explicações e exercícios presentes no material didático, existe a necessidade de descrever brevemente o projeto LAM.

O projeto LAM, segundo seu próprio site⁵, teve início em 2016 promovido pela OBMEP e o IMPA e financiado pela Fundação Itaú Social, contando com apoio de secretarias de educação e universidades federais. O LAM é uma produção que configura uma proposta pedagógica ancorada e acompanhada por pesquisa científica em Ensino de Matemática. O projeto tem compromisso com a formação continuada de professores. Em particular, pela composição característica da equipe (constituída por professores do ensino superior e ensino básico) destaca-se o potencial do projeto, para encarar um reconhecido desafio: aproximar o diálogo entre a realidade e as demandas próprias da prática docente e a formação acadêmica do professor.

O corpo de colaboradores atualmente conta com 42 professoras e professores, que realiza reuniões mensais para aprimoramento de didáticas, escritas e inovações. O LAM transmite uma didática prática, com intenção de envolver o aluno nos diversos assuntos abordados. Assim gerando materiais didáticos gratuitos, com excelência acadêmica, licença aberta e concebidos a partir de evidências científicas. Dentro destes materiais existem capítulos “vivos”, assim chamados por estarem em constante melhoria e avaliação de diversos professores, podendo também ser adaptados pelo educador que os utilizarem (com a devida referência). Durante este capítulo serão apresentados exemplos de atividades do capítulo do LAM intitulado Projeções Cartográficas, disponível no site¹ do projeto.

O projeto tem um modelo de estrutura já definido, o conteúdo deve ser iniciado com uma seção denominada “Explorando” que visa apresentar atividades diferenciadas para chamar atenção dos estudantes e provocar uma curiosidade do conteúdo que está sendo abordado. A seção Explorando permite que os autores abusem de sua criatividade para trazer atividades interessantes e desafiadoras, acreditamos que essa seja a parte mais atrativa dos capítulos para os estudantes. Além disso o LAM incentiva seus colaboradores a manter-se atualizados para que as atividades permaneçam interessantes, atrativas e adequadas ao público alvo. Com isso o capítulo de Projeções Cartográficas contém várias atividades que utilizam softwares e aplicativos, buscando além de diversificar opções, chamar o interesse dos alunos.

⁵ www.umlivroaberto.org

Em seguida a sessão nomeada “Organizando” busca explicar o conteúdo ou habilidade apresentada nas atividades do Explorando que o antecede, logo no Organizando não consta nenhuma atividade. Caso o autor ou a autora queira instigar alguma indagação pode utilizar uma janela com nome “Para refletir”. Também existem as janelas “Você sabia?” que contêm curiosidades do tema julgadas interessantes pela escritora ou pelo escritor e existe o espaço “Para saber mais” que é utilizado para aprofundar o conhecimento aos alunos e alunas que se sentirem instigados.

Por fim, o bloco Explorando/Organizando pode ser encerrado com o “Praticando”, espaço que a autora ou autor deve preencher com outras atividades dos temas ensinados durante o Explorando e Organizando. Os blocos Explorando/Organizando/Praticando podem se repetir várias vezes durante o capítulo. E, como ocorre na maioria dos livros didáticos, existem seções de exercícios, que podem vir ao final de cada capítulo ou cada bloco. Isto resume a estrutura feita para a versão do estudante, visto que cada capítulo possui duas versões, uma para os alunos e outra para os professores.

Na versão do professor, além do que é apresentado para o estudante, existe um espaço em que os autores conversam com o professor, explicando cada atividade através de “Objetivos específicos” e “Sugestões e discussões”. Esses bilhetes são necessários, visto que as atividades, em geral são de autoria dos próprios autores, e existe uma necessidade da atividade possuir um objetivo de aprendizagem e isto deve ser bem explicado, para que durante a aplicação, o professor consiga estimular a participação dos alunos sem fugir do objetivo central da atividade. E, como de costume, o desenvolvimento das soluções estarão presentes no final do capítulo.

No processo de elaboração, os autores inicialmente fazem um rascunho inicial, denominado Unidade Curricular, onde é desenhado o esqueleto do capítulo. Durante esse processo de elaboração, tanto da unidade curricular quanto do capítulo propriamente dito, os autores apresentam suas ideias aos demais colaboradores do projeto. Nessas apresentações, algumas dúvidas são esclarecidas e em geral existem sugestões para a melhoria das atividades. Após a conclusão da escrita do capítulo por parte dos autores, ele é encaminhado para duas pessoas do grupo LAM (ou de fora dele) que serão responsáveis por revisar o material elaborado. Após essa revisão, a coordenação do projeto marca uma reunião com os autores e revisores para debater as alterações que os autores precisam realizar o capítulo. Após realizadas as alterações e uma nova revisão, se tudo estiver de acordo com as propostas, o capítulo é publicado no site.

No que segue, apresentaremos duas subseções, a primeira apresenta um pequeno recorte das pesquisas realizadas pelos autores para escrever o capítulo Projeções Cartográficas e a

segunda apresenta um resumo do material didático criado (MATHIAS e ZANON, 2020). Optamos por apresentar um resumo, pois ambas as versões (do aluno e ou do professor) são muito extensas, o que inviabiliza a apresentação completa na dissertação. Assim, nosso objetivo é ilustrar com alguns exemplos, como ocorre a dinâmica ao utilizar o capítulo.

3.1. PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Uma premissa de senso comum, é que o educador conheça a Matemática que origina os conteúdos explicados aos alunos, mesmo que os alunos não venham a conhecer o mesmo. Mas, para além do consenso, pesquisas como Shulman (1986) afirmam que ao ensinar algum conteúdo, o professor precisa não apenas compreender que algo é assim, ele deve entender porque é assim, em que bases suas suposições devem ser firmadas, e sob quais circunstâncias suas justificativas podem ser enfraquecidas e até mesmo negadas. Tendo isto em mente, para elaborar o capítulo pertencente ao LAM, realizamos uma ampla pesquisa, principalmente sobre os conceitos matemáticos pertinentes ao tema Projeções Cartográficas. No que segue, apresentaremos um recorte dessa pesquisa, especificamente um exemplo dos conceitos requeridos para justificar o motivo de alguns cálculos não estarem expostos no material didático.

Uma Projeção Cartográfica não trata simplesmente da planificação da superfície de um corpo esférico, trata de uma técnica para representar a superfície da terra de forma que o uso do mapa resultante seja útil à humanidade. A cartografia (do grego *chartis* = mapa e *graphein* = escrita) é um conhecimento que existe na intersecção da ciência e arte. O aspecto artístico é visível, devido à associação estética, harmônica e simplista. Especialmente em mapas antigos, nos quais o cartógrafo (profissional dedicado a produção de mapas) responsável, preenchia os espaços dos oceanos com velhos barcos a vela (MATHIAS e ZANON, 2020). No âmbito científico a cartografia vem com intensão de comunicar e registrar descobertas territoriais, talvez não propositalmente, mas esses também se tornaram registros históricos. Historicamente a dúvida que instigava o estudo das Projeções Cartográficas resumia-se em determinar quais instrumentos e técnicas devem ser utilizados para que a realidade seja representada com maior exatidão (ANDERSON, LEINHARDT, 2002). Segundo os mesmos autores, a Astronomia e Matemática foram matérias fundamentais para evolução das Projeções Cartográficas ao longo dos anos, logo o cartógrafo necessita destas matérias para realizar seus estudos.

Na construção do capítulo sobre Projeções Cartográficas do LAM, à medida que os autores aprofundaram suas pesquisas, notaram que os cálculos que descrevem os eventos

ocorridos durante as Projeções Cartográficas (cilíndrica, cônica e plana) contêm conteúdos que não fazem parte do BNCC do Ensino Básico brasileiro. No que segue, amparados em Ghaderpour (2016) serão apresentados alguns conceitos e cálculos necessários para determinar as equações que definem duas projeções cilíndricas, denominadas Mercator e Lambert.

3.1.1. Projeção Cartográfica Cilíndrica Conforme de Mercator

Gerardus Mercator (1512-1594) foi um cartógrafo nascido em Flandres e que em 1569 criou uma representação do chamado “Novo Mundo” em seu mapa-múndi com um continente (América) separado dos demais já conhecidos (“descobertos”) Ásia, Europa e África. Esta projeção foi diversas vezes adaptada até chegar no mapa que conhecemos, contudo manteve-se o nome em homenagem a este cartógrafo (ROSA, AMARAL e MELO, 2020).

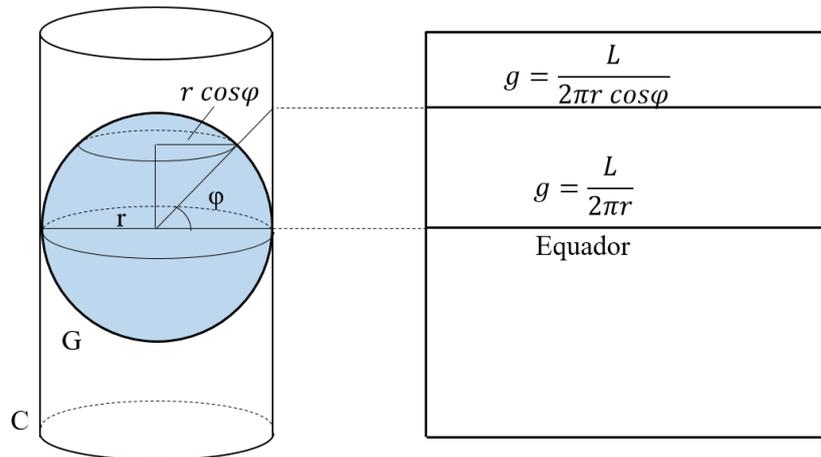
Para dar início aos cálculos que expressam a versão conhecida da Projeção de Mercator serão disponibilizados no Quadro 2 algumas definições necessárias para acompanhar com maior facilidade as explicações dadas ao decorrer dessa sessão.

Quadro 2 – Termos usados na sessão

Termo / Símbolo	Descrição
Meridiano	Os meridianos são linhas imaginárias que cortam a Terra do polo norte ao polo sul. Eles são círculos máximos que passam pelos polos e são perpendiculares ao Equador.
Latitude (φ)	A latitude de um lugar é a amplitude do ângulo entre o plano do Equador e o raio que passa por esse lugar.
Longitude (λ)	A longitude de um lugar é a amplitude do ângulo entre o plano do meridiano desse lugar e o semimeridiano de Greenwich
Indicatriz de Tissot	Suponha que um globo terrestre seja coberto por círculos iguais e distribuídos uniformemente sobre sua superfície. Quando realizadas as Projeções Cartográficas estes círculos sofrerão as mesmas distorções causadas à superfície terrestre. Com isso será possível observar com maior facilidade as direções ao longo da Projeção Cartográfica realizada. Este artifício matemático é chamado de Indicatriz de Tissot ou Elipse do Erro.

Consideremos G uma esfera de raio r , representando o globo terrestre, C um cilindro circular que tangencia G na circunferência que representa a linha Equador e L o valor numérico da intersecção do cilindro e a esfera e g expressa a escala, como ilustra a Figura 1.

Figura 1: Ilustração geométrica da construção realizada



Fonte: Adaptado de Ghaderpour (2014)

Nesse caso, a projeção de G sobre o cilindro, surge a partir de semirretas que se originam no centro de G e seguem no mesmo sentido e direção, de forma a ser representada em um ponto de C , para em seguida, desenrolar o cilindro em uma faixa vertical, em um plano denominado Projeção Cilíndrica (que a partir de agora denominaremos de mapa). Nitidamente, cada meridiano na esfera é mapeado em uma linha ortogonal ao Equador, e cada paralelo do Equador é mapeado em um círculo no cilindro e, portanto, em uma linha paralela ao Equador no mapa.

A escala do mapa ao longo do Equador é $g = L/(2\pi r)$, ou seja, essa é a proporção entre o tamanho dos objetos desenhados no mapa e o tamanho real do objeto que ele representa. Na latitude φ , o paralelo ao Equador é um círculo com circunferência que mede $2\pi r \cos(\varphi)$, então a escala do mapa nesta latitude é

$$g_h = \frac{L}{2\pi r \cos \varphi} = g \sec \varphi \quad (1)$$

Assumindo g_h como indicador da escala horizontal e também φ e λ são dados em radianos, e a origem no sistema de coordenadas cartesianas corresponde à intersecção do meridiano de Greenwich ($\lambda = 0$) e o Equador ($\varphi = 0$). Ou seja, λ representa a medida de longitude com $\lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e φ representa as medida de latitude $\varphi \in [-\pi; \pi]$.

Então, toda projeção cilíndrica é dada explicitamente pelas seguintes equações

$$x = \frac{L\lambda}{2\pi}; \quad y = f(\varphi).$$

Sendo $f(\varphi): R^2 \rightarrow R^2$, que varia de acordo com a projeção realizada.

Podemos observar na Figura 1 que a Projeção Cilíndrica é dada por dada por:

$$x = \frac{L\lambda}{2\pi}; \quad y = r \tan\varphi.$$

Para um mapa de largura L , escolhe-se, sem perda de generalidade uma esfera de raio $r = L/(2\pi)$ para representar o globo terrestre. Em um globo, o comprimento do arco entre as latitudes de φ e φ_1 (em radianos) ao longo de um meridiano é:

$$2\pi r \frac{\varphi_1 - \varphi}{2\pi} = r(\varphi_1 - \varphi)$$

e a imagem no mapa tem o comprimento $f(\varphi_1) - f(\varphi)$. Portanto, o fator de escala geral deste arco ao longo do meridiano quando φ_1 fica cada vez mais perto de φ é dado por:

$$g_v = \frac{1}{r} f'(\varphi) = \frac{1}{R} \lim_{\varphi_1 \rightarrow \varphi} \frac{f(\varphi_1) - f(\varphi)}{\varphi_1 - \varphi}. \quad (2)$$

Sendo que g_v representa a escala vertical. O objetivo de Mercator era igualar a escala horizontal com a escala vertical na latitude φ , ou seja, $g_h = g_v$. Assim, a partir das equações (1) e (2), temos:

$$f'(\varphi) = \frac{L}{2\pi} \sec \varphi. \quad (3)$$

Na época, Mercator não foi capaz de resolver a equação (3) precisamente, visto que os logaritmos não haviam sido inventados. Contudo sabemos que a solução para tal equação é dada pela seguinte forma, usando $f(0) = 0$ teremos:

$$\int f'(x) = \int \frac{L}{2\pi} \sec(x).$$

Como L é constante,

$$f(x) = \frac{L}{2\pi} \int \sec(x)$$

E portanto,

$$f(x) = \frac{L}{2\pi} \cdot ((\ln|\sec(x) + \tan(x)|) + K)$$

Como definiu-se $f(0) = 0$, logo a constante $K = 0$. Assim obtemos

$$y = f(\varphi) = \frac{L}{2\pi} \ln|\sec \varphi + \tan \varphi|$$

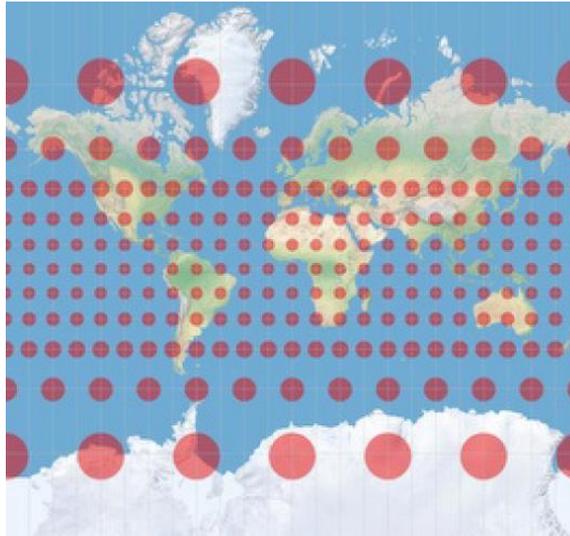
Assim, as equações para a Projeção Cilíndrica Conforme de Mercator são:

$$x = \frac{L\lambda}{2\pi}; \quad y = \frac{L}{2\pi} \ln|\sec \varphi + \tan \varphi|$$

Essa projeção denomina-se conforme pois preserva a forma dos continentes, exatamente porque foi escolhido igualar as escalas. Para expressar melhor as deformações causadas nesta projeção cartográfica, pode-se usar uma ferramenta conhecida como Indicatriz de Tissot (ou

elipses de erro). Segundo Firkowski e Sluter (2008) este instrumento matemático permite que sejam visualizados os valores de distorção de escala para um ponto qualquer e para qualquer direção a partir daquele ponto. Na Figura 2 nota-se a variação dos tamanhos e formatos de cada círculo, tornando visível que há uma maior distorção à medida que se aproxima dos polos.

Figura 2: Indicatrizes de Tissot da Projeção Cartográfica Conforme de Mercator



Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.30)

3.1.2. Projeção Cartográfica Cilíndrica de Lambert

Segundo Libault (1965), Jean-Henri Lambert, foi um cientista que nasceu na Suécia e trabalhou na Academia de Frederic II. Lambert foi um teórico da Cartografia e que não produziu mapas, a não ser o publicado depois de seu falecimento. As utilizações de seus estudos para produção de Projeções Cartográficas tinham como objetivo preservar as áreas de cada continente mesmo que isso levasse a uma distorção das formas.

Com a finalidade de explicitar as equações que definem a Projeção Cartográfica Cilíndrica de Lambert, assumiremos a escala horizontal e vertical inversamente proporcionais, de forma que o alongamento em uma direção corresponderá ao encolhimento na outra. Assim, a partir do produto das equações (1) e (2), obtemos $f'(\varphi) \cdot \sec \varphi = c$ ou

$$f'(\varphi) = c \cos \varphi \quad (4)$$

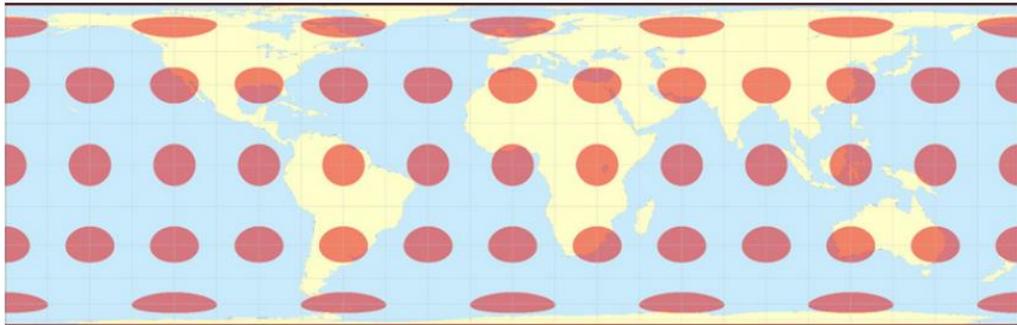
em que c é uma constante. Das equações (3) e (4), podemos escolher c de forma que para uma dada latitude, o mapa também preserve a forma naquela área. Por exemplo, caso $\varphi = 0$, então escolhemos $c = L/(2\pi)$ e, portanto, o mapa próximo ao Equador também será conforme, assim como ocorre na Projeção Cilíndrica Conforme de Mercator.

Assim, as equações à Projeção Cilíndrica de Lambert (conhecida também como Projeção Cilíndrica de Áreas Equivalentes) são:

$$x = \frac{L\lambda}{2\pi}; \quad y = \frac{L}{2\pi} \text{sen } \varphi$$

As indicatrizes de Tissot referentes à Projeção Cartográfica de Lambert, ilustram círculos de mesma área foram espalhadas uniformemente pelo globo terrestre, com isso ao realizar a projeção ficará mais visível as projeções decorrentes. Notemos que enquanto na Projeção Cilíndrica Conforme de Mercator os círculos aumentavam seus raios a medida que se aproximavam dos polos, porém sem grandes distorções em seus formatos. Já a Projeção Cilíndrica de Lambert tende a manter a mesma área das figuras, porém há uma distorção vertical nos círculos cortados pela linha do Equador e uma distorção horizontal nos círculos próximos dos polos.

Figura 3 – Indicatrizes de Tissot aplicada na Projeção Cartográfica de Lambert



Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.42)

Optamos por não colocar os cálculos acima explicitados no capítulo do LAM e utilizar de explicações mais visuais como as indicatrizes de Tissot, tornando o conteúdo mais próximo aos estudantes do Ensino Médio. Conforme Pontes:

[...] para a maioria das pessoas, e aparentemente para os responsáveis da Comissão da Reforma, a Matemática é essencialmente cálculo. Os matemáticos seriam pessoas que passam a vida a fazer contas. Esta ideia é profundamente errada. O cálculo corresponde apenas a uma das facetas da Matemática que está longe de ser a mais rica e importante. (PONTES, 1987, p.5).

Muitas vezes os autores do capítulo se perguntaram se faltava Matemática durante sua escrita. Contudo, notamos estar cometendo o equívoco comentado na citação anterior. O capítulo de Projeções Cartográficas não contém muitos cálculos, sua principal intenção é condicionar ao leitor a possibilidade de aprender e compreender as distorções das Projeções Cartográficas mais conhecidas, como exigido pela habilidade na qual o capítulo é baseado.

3.2. SOBRE O CAPÍTULO PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS NO LAM

O Capítulo de Projeções Cartográficas, elaborado no contexto do LAM possui como objetivo abordar a habilidade EM13MAT509: “Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. ”, conforme Brasil (2018, p.541).

Como comentado no início do presente capítulo, todas as atividades que estão contidas nas seções Explorando do LAM são as mais atrativas do capítulo, portanto na apresentação resumida nesta dissertação será dado um foco a essas atividades, o capítulo completo pode ser acessado pelo *link*⁶ disponível no site do LAM. Iniciando o capítulo há uma atividade que busca analisar a consciência do aluno perante o seu posicionamento em relação a Terra, as nuvens e as pessoas. Segue a Atividade 1 “o astronauta” (Figura 4).

Figura 4: Atividade 1 do capítulo

Objetivos Específicos

O astronauta

- Reconhecer sua posição na superfície terrestre.

Sugestões e discussões

O astronauta

- Conceitos abordados:** Posição de um corpo e o lugar do corpo no espaço.
- Organização em sala de aula:** Nesta atividade, que sugere-se ser feita de forma individual, o aluno deve ilustrar o que é solicitado. Após primeiro momento, sugere-se que os alunos organizem-se em duplas ou trios e comparem as ilustrações. A discussão em grupos contribuirá para a percepção de cada aluno sobre o seu lugar no espaço e os pontos de referência utilizados (astronautas, nuvens, lua, etc.).
- Dificuldades previstas:** Acredita-se que os alunos não terão dificuldades em realizar o desenho, visto que é algo simples e pode ser feito como um esquema. O que pode ocorrer é o aluno desenhar o planeta Terra como algo plano ou não desenhar a Terra.
- Sugestões gerais:** Para o desenvolvimento da tarefa recomenda-se que sejam entregues folhas de papel aos alunos, pois é interessante que os mesmos guardem seus desenhos para posterior discussão (ver o Organizando - O problema do cartógrafo 1).
- Material necessário:** Folhas de papel sulfite.
- Enriquecimento da discussão:** Acredita-se que a atividade pode oportunizar uma discussão sobre a relação existente entre diferentes disciplinas, visto que, conforme comentado anteriormente, o tema projeção cartográfica deve ter sido abordado no ensino fundamental na disciplina de geografia. Além disso, o professor pode questionar “como é o formato do nosso planeta?”ou “o que faz você pensar que a Terra é assim?”. Caso o aluno tenha feito um desenho diferente do esperado (conforme consta na resposta) solicite que ele desenhe pessoas em diferentes locais da sua representação da Terra. Caso tenha desenhado a Terra como algo plano, questione “o que aconteceria se saísse de casa e andasse na mesma direção?” Questione o aluno “por onde ele vai passar e onde ele vai chegar”.

Nota 1

O astronauta Atividade 1

a) Descreva em palavras a cena ilustrada na Figura 1.2.

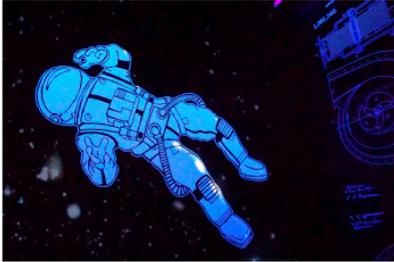


Figura 1.2: O astronauta.
Foto de Monica Garriga, no Unsplash

b) Faça um esboço que ilustre o que você descreveu.

c) Desenhe onde você está nesse esboço.

d) Sinalize onde estão as nuvens no seu esboço.

e) Organizem-se em grupos de três alunos e socializem suas respostas.

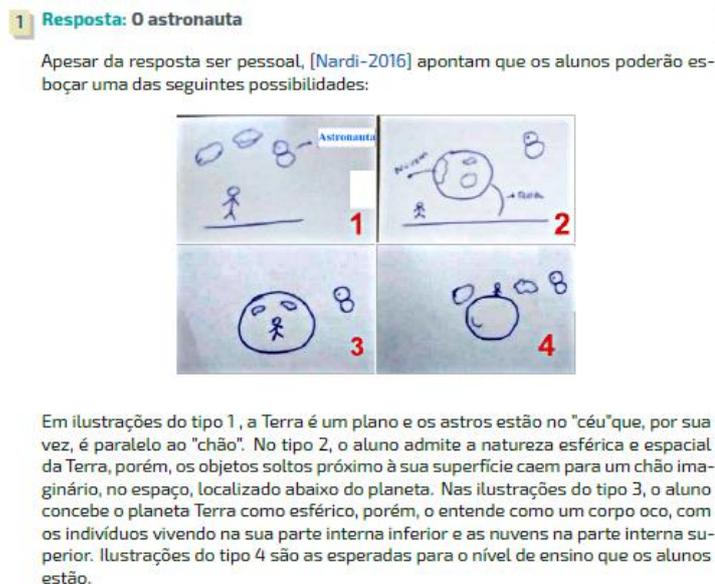
Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.2)

⁶ <https://github.com/livro-aberto/tex-design-development/raw/master/Cap%C3%ADtulos%20prontos%20-%20Aluno/Proje%C3%A7%C3%B5es%20Cartogr%C3%A1ficas.pdf>

À direita da Figura 4 consta a atividade que o aluno verá em seu livro. Como a Figura 4 tem origem na versão do professor, constam na esquerda os Objetivos Específicos e Sugestões e Discussões onde encontram-se as explicações e dicas de como o professor pode realizar a atividade em sala de aula.

Ainda na Figura 4 podemos notar que existe um retângulo escrito “Nota 1”. Ao clicar neste retângulo, o professor será encaminhado para as páginas finais do capítulo, em que são apresentadas as possíveis respostas dos alunos e como interpretar cada uma delas. Mesmo sendo uma pergunta descritiva e muito pessoal, Nardi (2016) apontou uma aproximação das possíveis respostas e que foram adaptadas para o contexto do LAM, como ilustra a Figura 5.

Figura 5: Conteúdo da nota 1



Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.71)

Assim, com essa atividade esperamos que o professor possa ter uma noção de como os alunos percebem sua localização no planeta Terra e por consequência o formato que o planeta possui.

Na sequência, apresentamos uma atividade que lamentavelmente ainda é necessária nos dias atuais, mesmo que pareça um debate antigo e já superado pela sociedade. No período em que o capítulo foi elaborado (ano de 2019), um movimento em defesa da Terra Plana tomou popularidade nas redes sociais e na *Internet* como um todo. Assim, pensamos que seria necessário incluir este tema em atividades no capítulo (Figura 6). Observamos que se o planeta Terra fosse plano, esse capítulo não seria necessário.

Figura 6: Parte 2 da atividade 2

Parte 2: Na sua opinião, qual das imagens ilustradas na Figura 1.5 melhor representa o formato do planeta Terra? Por quê?



Figura 1.5: Representações do planeta Terra

Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.4)

Ao planejar o capítulo, pensamos que depois de abordar o formato da Terra, os alunos precisariam compreender que todas projeções cartográficas apresentam algum tipo de deformidade (em área, formato ou ângulo). Assim, para dar uma ideia intuitiva desse fato, planejamos a Atividade 5 “Planificando o globo” (Figura 7).

Figura 7: Atividade 5

Planificando o globo

Atividade 5

Vamos simular a planificação da superfície do planeta Terra utilizando um balão. Para isso você vai precisar de uma tesoura (sem ponta), um balão e uma caneta esferográfica. Também é recomendado que você tenha um pedaço de papelão (com tamanho igual a metade de uma folha A4) e fita adesiva. Para realizar essa atividade, precisamos que você encha um pouco o balão, deixando-o mais próximo possível de uma esfera. Talvez necessite moldá-lo com as mãos. Quando atingir o formato desejado de um nó na “boca” do balão. Ao finalizar essa etapa da atividade deve ter em mãos um balão como o ilustrado na Figura 1.21.



Figura 1.21: Balão

Com a caneta esferográfica solte sua criatividade e desenhe sobre o balão, procure deixar imagens bem definidas para melhor observação, como ilustra a Figura 1.22.

Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.17)

Na referida atividade os alunos são orientados a desenhar em um balão que se aproxima de uma esfera e instruídos a esvazia-lo. Após, os alunos devem tentar planificar o balão com o mínimo de cortes possível. Assim, esperamos que em sala, os alunos possam apresentar

maneiras distintas de esticar o balão, com isso obtendo vários exemplos de que os formatos desenhados sempre serão distorcidos ou retalhados.

Esperamos, com essa atividade, que os alunos compreendam que as Projeções Cartográficas são úteis para dar uma visão geral do planeta que vivemos, porém sempre ocorrerá algum tipo de distorção. Após estabelecido os conceitos básicos, o conteúdo de Projeções Cartográficas é devidamente apresentado.

Como o capítulo é direcionado para o Ensino Médio, o foco ficou em torno das Projeções Cilíndricas, Cônicas e Azimutais (Planas), conforme orienta a BNCC. Para que os alunos possam ter uma percepção visual de como é criada uma Projeção Cartográfica, foram planejadas três atividades que tem um caráter experimental e utilizam uma garrafa pet, papel minimamente translúcido e lanterna.

A Figura 8, ilustra a atividade em que é fornecido um protocolo de como o aluno deverá realizar a simulação da Projeção Cartográfica Cilíndrica.

Figura 8: Instruções da Atividade 9

EXPLORANDO PROJEÇÕES CILÍNDRICAS

Projetando a esfera em uma superfície cilíndrica Atividade 9

Nessa atividade vamos simular uma projeção cartográfica do tipo cilíndrica. Para isso, serão necessários os seguintes materiais:

- Tesoura (com ponta)
- Lanterna (pode ser do celular)
- Garrafa PET transparente
- Fita adesiva
- Caneta esferográfica
- Papel vegetal (ou papel manteiga)
- Cola bastão

Na garrafa PET, faça 3 cortes como ilustra a Figura 1.44 (sendo o corte do bico é opcional).

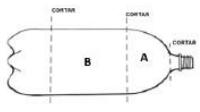


Figura 1.44: Cortes na garrafa.

Com a caneta esferográfica desenhe (preferencialmente na parte interna) da parte A (Figura 1.45). Procure deixar figuras bem definidas para futuras observações.



Figura 1.45: Desenhos na superfície da parte A da garrafa.

Forre a parte externa do cilindro (parte B da garrafa) com o papel vegetal (ou manteiga). Sugerimos que utilize um pouco de cola bastão e faça duas linhas verticais na parte B (de preferência em locais opostos) (Figura 1.46 - I). Lembre-se que posteriormente o papel deverá ser retirado. É possível também colar as extremidades do papel com fita adesiva (1.46 - B), mas esse processo pode danificar o papel.

1

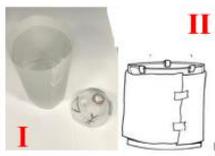


Figura 1.46: Formas de enrolar o cilindro.

Pegue a semiesfera (parte A da garrafa PET) e o cilindro (parte B da garrafa PET) e coloque a semiesfera com os desenhos como uma tampa do cilindro, conforme ilustra a Figura 1.47.

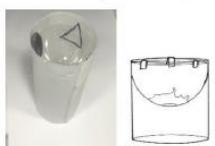


Figura 1.47: Posicionamento das superfícies.

Se for necessário, prenda as partes com ajuda de uma fita adesiva. Com o auxílio da lanterna, um aluno deve iluminar a parte A, de forma que a luz esteja no centro da semiesfera (Figura 1.48). Enquanto isso, os outros integrantes do grupo, deverão destacar utilizando a caneta esferográfica a sombra projetada dos desenhos da parte A sobre o papel que envolve a parte B.



Figura 1.48: Iluminando a superfície de projeção.

Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.35-36)

E, a Figura 9 ilustra os questionamentos a serem realizados aos alunos.

Figura 9: Questões a serem resolvidas pelos alunos

- a) Após destacar todas as sombras, modifique a semiesfera (parte A da garrafa PET) e observe o que ocorrerá com as sombras. Movimente o cilindro (coloque-o na vertical, na horizontal,...) e descreva o que ocorre com as sombras.
- b) Modifique a localização da lanterna. Aproxime-a da borda do cilindro, coloque-a mais afastada possível, ilumine parte da superfície esférica. O que ocorre?
- c) Conclua a atividade retirando o papel da parte B. Analise todos os desenhos feitos, um de cada vez, e discuta com o grupo se houve alguma distorção ao realiza a projeção. Se sim, quais foram e onde ocorreram com maior intensidade?

Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.37)

A partir dessa atividade, acreditamos que os alunos tenham a possibilidade de desenhar formas, figuras ou até mesmo escrever palavras e visualizar as distorções causadas pela posição do papel, do ângulo e da proximidade do ponto de luminosidade. Além disso, os alunos poderão comparar com as figuras desenhadas por seus colegas. Indicamos para o professor que sugira aos alunos que a projeção resultante seja guardada, para que os alunos possam fazer uma comparação com as demais projeções que serão simuladas até final do capítulo (projeção cônica e plana).

Nosso intuito é envolver os alunos, pois atividades desse tipo destoam do estilo de ensino padrão, ainda muito presente no nosso sistema educacional. A atividade pode ser realizada individualmente ou em grupos, porém há a recomendação de que a turma seja organizada em grupos, para instigar debates durante a construção e acelerar o processo de criação.

O capítulo ainda enfatiza o uso de tecnologias (para as escolas que dispõem de computadores ou para turmas em que os alunos tenham acesso a dispositivos móveis), com o *software GeoGebra* sendo muito utilizado no decorrer das páginas. O uso desse e outros aplicativos se mostram vantajosos pela velocidade de cada experiência feita pelos estudantes, permitindo tentarem de diferentes formas e quantas vezes julgarem necessário (no espaço de tempo disponível).

Para exemplificar a diversidade de tais atividades (realizadas com o auxílio das tecnologias), apresentamos a Atividade 15 (Figura 10), na qual os alunos são instruídos a navegar por um site que permite visualizar diversos tipos de projeções.

Figura 10: Atividade 15

Projeções Cartográficas Dinâmicas

Atividade 15

No site <https://gevian.github.io/GITTA-MP/basic.html> é possível visualizar as projeções cilíndricas, cônicas e planas, modificando alguns parâmetros como ilustra a Figura 1.88

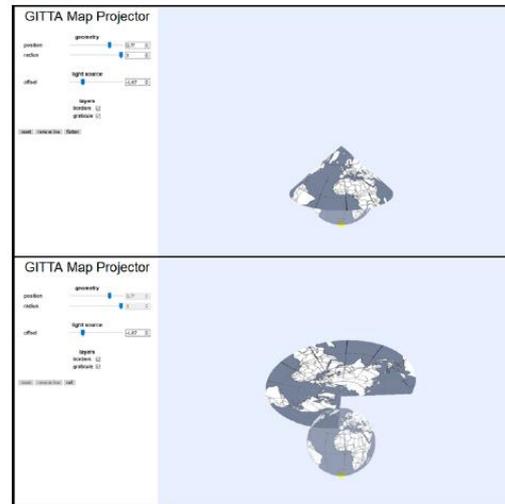


Figura 1.88: Aplicativo Gitta Map Projection

Modifique os parâmetros posição e luminosidade. O que ocorre? E ao clicar em *flat*, o que podemos observar?

Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.35)

Outra atividade que utiliza de um aplicativo é uma que foi criada quando um dos autores buscava determinar a menor distância entre dois pontos na superfície terrestre e deparou-se com um equívoco em um site. Decidimos aproveitar a oportunidade para criar uma atividade que além de levantar o debate sobre o formato do planeta e a interpretação das Projeções Cartográficas, também poderá proporcionar a discussão de cuidados ao serem tomados ao procurar informações *online*. A Figura 11 ilustra o enunciado da referida atividade, juntamente com os objetivos e sugestões.

Figura 11: Atividade 2

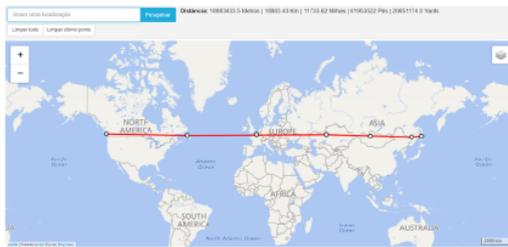


Figura 1.3: Rota 1

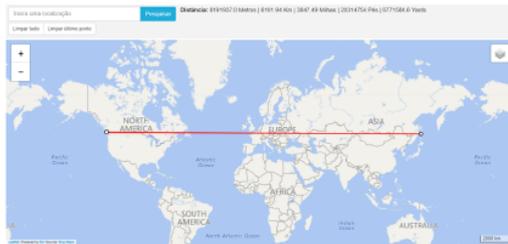


Figura 1.4: Rota 2

A primeira rota traçada no aplicativo, possui comprimento aproximado de 18.883 km (dezoito mil, oitocentos e oitenta e três quilômetros), já a segunda rota tem um comprimento aproximado de 6.192 km (seis mil, cento e noventa e dois quilômetros).

- A origem e o destino final das rotas dos dois mapas são iguais ou próximos? Justifique por que a distância entre estes dois pontos é tão distinta.
- Seria possível chegar no destino final por outra rota (justificando a diferença de medidas)? Se sim, qual seria essa rota alternativa?
- Mesmo sendo origem e destino final da rota diferentes, você acha que a primeira é cerca de três vezes maior? Justifique sua resposta.
- A representação está equivocada? Se sim, como seria a correta?

Fonte: Mathias e Zanon (2020, p.3)

Primeiramente, percebemos na Figura 11 que os trajetos exibidos (linhas vermelhas) da Rota 1 e 2 são muito similares, por consequência a distância apontada deveria ser parecida também. Contudo, a Rota 1 aponta aproximadamente dezoito mil quilômetros e a Rota 2 cerca de seis mil quilômetros.

Notemos também que ambas rotas têm como ponto inicial e final o extremo Oeste canadense e o extremo Leste russo, respectivamente. A diferença é que a primeira rota tem pontos no leste canadense, o oeste europeu, e o leste e centro asiático. Esperamos que esse fato cause estranhamento aos alunos e concluam que no caso da Rota 2 seria mais viável atravessar o Oceano Pacífico para obter a menor trajetória. Por fim, o professor poderá mostrar a imagem do *Google Maps* ilustrando a Rota 2 através do Oceano Pacífico, com os mesmos seis mil quilômetros apontados, concluindo que o equívoco do site está na representação da trajetória.

Na próxima seção apresentamos o percurso metodológico realizado na construção dessa dissertação.

Objetivos Específicos

Qual o verdadeiro formato da Terra?

- Reconhecer que o formato do planeta Terra é tridimensional.
- Reconhecer que as figuras (mapas) apresentadas são representações no plano de parte da superfície terrestre.

Sugestões e discussões

Qual o verdadeiro formato da Terra?

- **Conceitos abordados:** Rotas, formas planas e formas espaciais.
- **Organização em sala de aula:** Pode ser feito individual ou em dupla.
- **Material necessário:** Lápis e papel.
- **Enriquecimento da discussão:** Pretende-se que essa atividade proporcione ao aluno pensar sobre o formato da superfície terrestre. Na **Parte 1**, sugerimos que o professor enfatize que as distâncias das rotas estão corretas, e permita que a turma debata sobre qual seria o trajeto ideal para a segunda rota, de forma que ela seja tão curta quanto à primeira. Esta atividade exibe uma pequena falha no aplicativo utilizado. Assim, queremos mostrar ao aluno que os extremos laterais do mapa na realidade estão conectados. Na **Parte 2**, é importante que seja realizado um debate em torno das respostas dos alunos, pois ter uma ideia clara do formato do planeta irá auxiliar no entendimento das projeções cartográficas.

Resposta: Qual o verdadeiro formato da Terra?

Parte 1: Visto que na primeira rota é obrigatório passar pela Europa, o trajeto se torna muito maior do que ele se ele apenas atravessasse o pacífico e chegasse ao destino (Nogliki) pelo caminho mais curto. Porém, alguma falha na programação do aplicativo impede de fazer a representação correta, que seria aproximadamente esta:

6.145 km
Distância de Vancouver até Nogliki



Parte 2: Resposta pessoal

4. METODOLOGIA

Quanto aos procedimentos técnicos, a presente pesquisa pode ser classificada como um estudo de caso que segundo Yin (2010) é como uma pesquisa baseada na experiência, que investiga elementos contemporâneos dentro do cotidiano. Esse tipo de pesquisa é utilizado especialmente quando os limites entre o fenômeno e contexto são pouco evidentes, buscando explorar, relatar e explicar o evento ou fornecer uma compreensão profunda do acontecimento (YIN, 2010).

Assim, para realizar a análise das respostas obtidas nas quatro enquetes realizadas durante a Oficina, utilizamos uma metodologia de pesquisa qualitativa. De acordo com Gil (1999). O uso dessa abordagem possibilita o aprofundamento da investigação do fenômeno estudado e seus desdobramentos, por intermédio da valorização máxima do contato direto, buscando o que é comum, mas permanecendo atento à individualidade e aos significados múltiplos de cada participante.

A presente pesquisa vem sendo pensada desde o momento em que o autor começou a participar do grupo de colaboradores do LAM, em meados de 2018. Sendo assim, pode-se dizer que o presente trabalho foi realizado em três momentos distintos. Primeiramente fora realizado um embasamento teórico sobre o conteúdo (Projeções Cartográficas), por meio de livros, dissertações e artigos dedicados ao tema. O segundo momento foi a elaboração do capítulo, que é parte do LAM e um dos principais instrumentos utilizados durante o terceiro momento, denominado nessa dissertação de Oficina.

Originalmente tínhamos como objetivo realizar as investigações propostas na pesquisa diretamente com alunos do Ensino Médio. Ou seja, aplicar o material didático em uma turma, do referido nível de ensino e relatar o impacto do emprego do material perante os alunos. Porém ao percebermos que a pandemia⁷ causada pelo novo Coronavírus (COVID – 19) inviabilizaria o processo, iniciamos a busca por alternativas que dessem continuidade à pesquisa. A primeira ideia foi aplicar o material aos alunos de Ensino Médio mesmo sem aulas presenciais. Contudo, o relato de colegas professores e experiência pessoal do autor (como professor estadual) foi que nesse período houve uma queda no índice de retorno dos discentes com as atividades realizadas em aulas remotas, o que excluiu a possibilidade de manter a aplicação para esses alunos.

Entretanto, durante as disciplinas cursadas no PROFMAT e a participação no grupo de colaboradores do LAM, o autor desse trabalho percebeu que os debates com outros profissionais

⁷ A pandemia teve início em março de 2020 e trouxe a necessidade de interromper os encontros presenciais nas escolas.

que atuam como professores de Matemática são enriquecedores. Com isso, foi decidido um novo público-alvo e conseqüente alteração nos objetivos da pesquisa.

Nesse contexto, elaboramos uma Oficina em que convidamos professores de Matemática e graduandos dessa área (cursando licenciatura ou bacharelado em Matemática). O intuito da Oficina foi apresentar aos participantes o capítulo Projeções Cartográficas do LAM e a partir das interações realizadas, investigar os saberes desses profissionais sobre projeções cartográficas. Também usamos o espaço para perceber se os participantes se sentem preparados para ensinar tal conteúdo e aproveitamos para debater possíveis estratégias de ensino, visto que o material nunca havia sido aplicado.

Devido aos protocolos de segurança impostos pela pandemia, a Oficina ocorreu de forma totalmente remota, via o ambiente *Moodle*. Esse cenário contribuiu positivamente para a pesquisa, pois possibilitou alcançar um público de diversas regiões do Brasil. Essa diversidade agregou maior riqueza aos debates realizados na Oficina, devido à larga extensão do Brasil e a gigantesca diferença cultural existente, tornando esse espaço um promotor de crescimento profissional e pessoal para todos participantes (inclusive de seus organizadores). No que segue, descreveremos em detalhes o planejamento da Oficina.

Visando a qualificação de educadores e futuros professores para a habilidade “EM13MAT509: investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em Cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.” (BRASIL, 2018, p.541), a Oficina pretende apresentar uma abordagem para o ensino do tema Projeções Cartográficas na disciplina de Matemática do Ensino Médio. Observamos que esse é um conteúdo que era comumente ensinado na disciplina de Geografia, e que em geral não é abordado em cursos de Matemática Licenciatura Plena (como por exemplo na Universidade Federal de Santa Maria). Também salientamos que existe um pequeno número de pesquisas nesta área, e não existem muitos relatos de experiências sobre métodos de ensino abordando esse conteúdo, na disciplina de Matemática, como argumentado na segunda sessão (mapeamento) desta dissertação. Assim, a Oficina foi planejada para ser totalmente remota, contando com três encontros síncronos de duas horas e três atividades assíncronas.

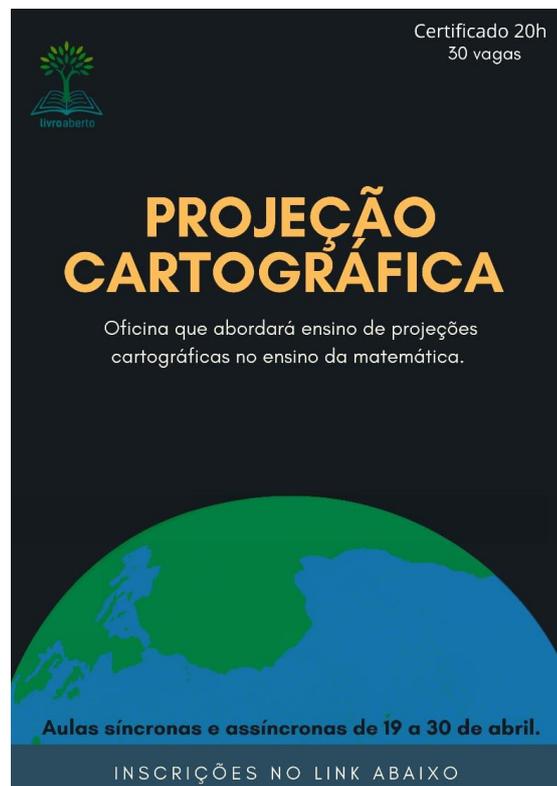
Devido à incerteza de quão atrativo seria a Oficina e quantas pessoas poderiam se interessar, foram planejadas estratégias tanto para evitar a falta de participantes quanto um número excessivo de inscrições. Para que não faltasse público, decidimos aceitar professores tanto de Matemática quanto de áreas similares, como Física, Estatística e graduandos dessas mesmas áreas e também alunos de graduação das áreas citadas. Também estabeleceu-se uma ordem de preferência, caso o número de inscritos fosse superior a 30 pessoas. O número de 30

participantes foi idealizado julgando que seria difícil suprir uma atenção individualizada se excedesse tal número. Priorizamos, então, os professores e professoras de Matemática da rede pública, utilizando a seguinte ordem de preferência:

- Professores de Matemática do ensino básico da rede pública;
- Professores de Matemática de ensino básico da rede privada;
- Professores do ensino superior de Matemática ou graduações similares;
- Pós-graduandos do PROFMAT
- Pós-graduandos de outros programas que envolvesse Matemática ou similares;
- Graduandos de Matemática licenciatura
- Graduandos de Matemática bacharel ou áreas afins.
- Critério de desempate ordem de inscrição.

As inscrições para a Oficina ocorreram no período de 08 de abril a 15 de abril de 2021. O link de inscrição foi disponibilizado através das redes sociais (*Facebook, Instagram e WhatsApp*). O link continha o formulário disponibilizado no Apêndice A, cujo objetivo foi coletar informações pessoais de cada participante e solicitar autorização para o uso de dados para a pesquisa. (Conforme Apêndice B). A Figura 12 ilustra a propaganda realizada nas redes sociais.

Figura 12: Cartaz propaganda da Oficina



As atividades planejadas para ocorrer de forma assíncrona foram escolhidas de maneira que provocassem opiniões divergentes entre participantes, para instigar nos encontros síncronos alterações de estratégias de ensino entre professoras e professores sobre o conteúdo de Projeções Cartográficas baseando os argumentos em suas distintas experiências de aprendizagem, ensino e vida.

A Oficina foi planejada para ocorrer entre os dias 19 e 30 de abril de 2021, com as atividades síncronas agendadas nas terças-feiras ou quintas-feiras (dependendo da disponibilidade dos participantes) com horário de início às 17h e duração de até duas horas. Foram planejadas seis atividades, sendo três assíncronas e três síncronas. As atividades foram pensadas para serem realizadas de forma intercalada, com intuito de manter a adesão dos participantes. No que segue, descrevemos o planejamento das atividades.

Na primeira atividade (A1) os participantes deverão responder um questionário (Apêndice C) registrando quais são suas opiniões sobre Projeções Cartográficas, sobre opções de material didático e em relação a confiança em ministrar este conteúdo no Ensino Médio antes do início da Oficina. Na sequência, terão acesso ao capítulo de Projeções Cartográficas, na versão do professor. Por fim, será disponibilizado um segundo questionário (Apêndice D) similar ao primeiro, de forma que possamos perceber o quanto apenas a leitura do Capítulo pode alterar a confiança dos participantes em trabalhar o conteúdo. Esse questionário também possui espaço para os participantes expressarem suas impressões, sugestões e questionamentos sobre o Capítulo.

Depois do tempo separado para leitura do Capítulo e resposta dos questionários uma videochamada será marcada na terça-feira ou quinta-feira mais próxima, das 17:00 às 19:00 (horário informado no momento de inscrição). Todos participantes serão convidados para a segunda atividade (A2), que ocorrerá via *Google Meet* e nela será apresentado o Capítulo, onde o ministrante contará em mais detalhes, as inspirações e ideias de algumas atividades, buscando trazer alguns temas sugeridos pelos participantes no segundo questionário (ou caso necessário, trazido pelo ministrante da Oficina).

Na terceira atividade (A3), os participantes serão convidados a fazer uma das atividades disponibilizadas no LAM que são consideradas as mais interativas e interessantes pelos autores do Capítulo (atividades 9,10 e 11). Para esse momento, o grupo de participantes será dividido em 3 subgrupos, para que cada um deles necessite realizar apenas uma das três propostas, visto que são muito semelhantes. A ideia de trazer essas atividades é que são de ordem prática e acreditamos que é importante que os professores experimentem, antes de

efetivamente aplicar o material didático em sala de aula. Em seguida os participantes deverão responder o terceiro questionário (Apêndice E) com o objetivo de descrever suas opiniões sobre a viabilidade de realizar as atividades propostas e testadas, em sala de aula.

A atividade quatro (A4) deverá ser realizada na forma síncrona, via videochamada, com o objetivo de debater a realização das atividades pelos subgrupos. Decidimos realizar esse momento síncrono, visto que, em geral, é mais fácil entender e perceber as percepções ao realizar um diálogo do que apenas lendo as respostas dadas em um questionário. Também acreditamos que esse será um espaço que poderá possibilitar debates sobre as atividades, relatos de possíveis dificuldades e permitirá que os participantes deem sugestões de complementá-las, para que sejam mais funcionais em sala de aula.

Conforme Pizetta (2015, p. 7) “a aprendizagem significativa ocorre quando o aprendiz consegue relacionar os seus conhecimentos prévios existentes em sua estrutura cognitiva a uma nova ideia”. Baseado nesse pensamento a última atividade assíncrona (A5) exigirá criatividade dos participantes, visto que esses deverão escolher uma das atividades, entender seu(s) objetivo(s) e adaptar (ou criar) uma nova atividade que possua o(s) mesmo(s) objetivo(s) da atividade escolhida.

Por fim a Oficina será encerrada com um último encontro síncrono, via *Google Meet* no qual será disponibilizado um tempo para que os participantes exponham suas ideias da última atividade. A diferença geográfica, cultural e, por consequência, estilo de educação, deve propiciar a diversidade na execução da A5, deverá tornar a sexta atividade (A6) interessante para todos presentes na reunião. A Oficina será oficialmente encerrada no momento que disponibilizarmos o quarto questionário (Apêndice F).

O Quadro 3 apresenta um resumo as seis atividades a serem desenvolvidas.

Quadro 3 – Resumo das Atividades da Oficina

Atividade/Formato	Descrição	Objetivo
A1 - assíncrono	Antes da leitura do capítulo os participantes deverão responder o primeiro questionário (apêndice C). Após a disponibilização do capítulo, os participantes terão uma semana para realizar a leitura e responder outro questionário (Apêndices D).	Levantar as primeiras opiniões dos participantes sobre o capítulo e seus sentimentos pré-Oficina sobre como ensinar do conteúdo.
A2 - síncrono	No segundo questionário disponibilizado em A1, é oportunizado um espaço para os participantes sugerirem pautas para uma roda de debates. No encontro, o capítulo será apresentado e as pautas e sugestões de	Debater as dificuldades previstas.

	debates serão encaixadas pelo mediador, autor dessa dissertação.	
A3- assíncrono	Cada participante deverá realizar uma das atividades propostas, dentro do prazo de uma semana. Após, deverão enviar fotos ou vídeos do processo e responder um questionário (Apêndice E).	Perceber o entendimento dos participantes na realização das tarefas.
A4 - síncrono	Será sugerido aos participantes que se sentiram seguros para que relatem como realizaram a atividade e em seguida será realizada uma roda de conversa sobre a viabilidade de aplicação destas atividades em sala de aula.	Explicar as impressões obtidas durante a realização da atividade 3 e opinar sobre a viabilidade de aplicação em sala de aula.
A5- assíncrono	Os participantes deverão ter um período de 10 dias para escolher uma das atividades do capítulo, ler seus objetivos e criar uma nova atividade que contemple o mesmo objetivo.	Identificar a habilidade dos participantes de criar novas atividades ou adaptar uma já existente.
A6 - síncrono	Na última reunião será disponibilizado um espaço para que os participantes compartilhem e dialoguem sobre as atividades criadas, finalizando com o quarto questionário (Apêndice F).	Compartilhar as atividades criadas e encerrar a Oficina.

Fonte: autor

A próxima seção contém um relato, em ordem cronológica, desde o início da Oficina descrevendo os acontecimentos, as dificuldades enfrentadas e decisões tomadas pelo autor até a conclusão de todas as atividades. Contando com detalhes as aplicações de cada atividade deste planejamento, assim como seus resultados, debates que ocorreram, reflexões do autor e adaptações feitas visando o melhor aproveitamento a quem participou.

5. SOBRE A OFICINA

Para que uma pessoa pudesse realizar a inscrição na Oficina, foram solicitados apenas dois pré-requisitos: que o candidato fosse graduando(a) do curso de Matemática (Licenciatura ou Bacharelado), ou professor(a) de Matemática ou área afim. Também solicitamos que houvesse a disponibilidade semanal para realizar atividades assíncronas e horários livres nas terças-feiras das 17:00 as 19:00, para se fazer presente nos encontros síncronos.

Ao término do período de inscrições, 40 pessoas registraram interesse em participar da Oficina. Como poderiam haver desistências durante a Oficina, e devido à facilidade de comunicação proporcionada pelos aplicativos, decidimos aceitar todas inscrições realizadas, apesar do limite pré-estabelecido de 30 participantes. Como explicado na sessão anterior, a pandemia alterou os objetivos e os percursos metodológicos da pesquisa, contudo trouxe uma opção que já era possível, porém não havia sido cogitada, a de fazer a Oficina de forma *online*. Não existem argumentos para palpar quantas inscrições seriam realizadas caso a Oficina fosse feita de forma presencial, mas, por outro lado, é visível que realizá-la de forma remota, proporcionou um alcance maior e mais diversificado de participantes.

O Brasil é um país de tamanho continental, com diversas culturas e realidades dentro do vasto território. Durante as reuniões com o grupo de pesquisa do LAM percebeu-se que uma dificuldade decorrente dos autores e autoras dos capítulos é certificar-se que seu material possa ser trabalhado em todas as escolas. Esta é uma das principais razões para o LAM ser descrito como um “livro vivo” para que cada professor possa adaptá-lo à realidade de seus alunos. Quando foi decidido que a pesquisa traria uma Oficina no formato remoto, percebemos uma oportunidade de escutar professores e professoras de diversas partes do país. Com auxílio das colaboradoras e colaboradores do LAM na divulgação, as inscrições conseguiram alcançar 10 estados brasileiros e também um participante estrangeiro, do Uruguai. O Quadro 4 apresenta número de participantes por estado.

Quadro 4 – Número de participantes por estado

Estado brasileiro	Número de inscritos ou inscritas
Rio Grande do Sul	13
Rio de Janeiro	10
Mato Grosso	5
São Paulo	4
Minas Gerais	1
Paráiba	1
Amazonas	1

Pará	1
Paraná	1
Alagoas	1

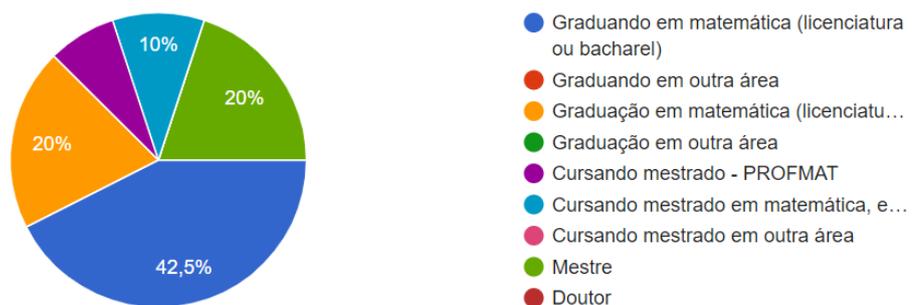
Fonte: Dados da pesquisa

Decorrente da pesquisa ter sido realizada na cidade de Santa Maria, a maioria dos participantes foi do Rio Grande do Sul (13 participantes), com um inscrito do estado do Paraná somou 14 participantes da região sul do país. A região Sudeste com maior número de participantes, onde 10 participantes são fluminenses, quatro outros participantes paulistas e com apenas um de Minas Gerais. A região Centro-Oeste teve 5 participantes, todos do Mato Grosso. E as regiões Norte e Nordeste com apenas dois participantes um da Paraíba um de Alagoas (Nordeste) e um do Amazonas e outro do Pará (Norte), por fim um participante uruguaio, que faz com que a pesquisa tenha tido um alcance internacional.

Além da diversidade decorrente da localização geográfica há também uma significativa variedade em relação à idade e à escolaridade, isso pode proporcionar uma riqueza aos debates, por conta das atualizações no sistema educacional no decorrer dos anos. Os participantes foram graduandos de 6º semestre até professores mestres. A Gráfico 1 ilustra o nível de escolaridade dos participantes.

Gráfico 1: número de participantes por grau de escolaridade

40 respostas

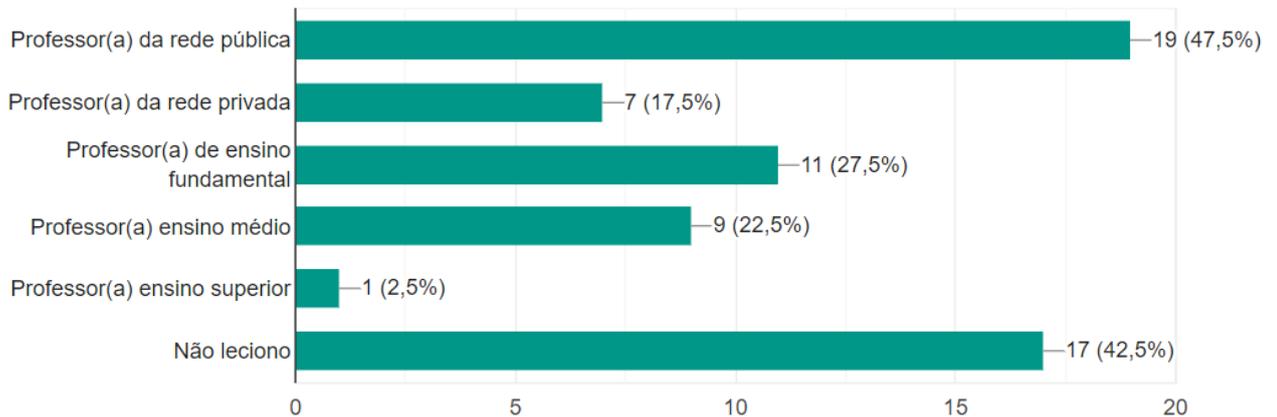


Fonte: Dados da pesquisa

Os inscritos foram assim distribuídos: dezessete graduandos, oito graduados sendo quatro em Matemática (licenciatura ou bacharelado) e quatro em outras áreas, sete mestrandos, sendo três do programa PROFMAT e quatro em outros programas e por fim oito pessoas já mestres. Por ser uma pesquisa com objetivo de debater dados empíricos, a experiência em sala de aula também é motivo a ser considerado. Nesse sentido, dezenove inscritos lecionam em rede pública, sete em rede privada, onze no ensino fundamental, nove no ensino médio, um no

ensino superior (lembrando que é comum professores lecionarem em mais de uma escola). Observamos que os graduandos relataram não estar lecionando. O Gráfico 2 representa esses dados.

Gráfico 2: Número de participantes por área de atuação.



Fonte: Dados da pesquisa

No planejamento da Oficina, o público alvo eram os professores atuantes, principalmente na rede pública. Felizmente a maior parte do grupo declarou lecionar nestas categorias. Contudo as diferenças entre os inscritos enriquecem os debates relacionados a ensino e aprendizagem.

No que segue, relataremos os eventos da Oficina em ordem cronológica, dando ênfase ao que acreditamos ser mais relevante à pesquisa. Por questão de confidencialidade, os participantes serão identificados pela letra P seguido de um número inteiro.

Observamos que um dos problemas da Oficina ser realizada de maneira remota, foi a adesão dos participantes. Conforme descrito no início desta sessão, houve 40 inscrições na Oficina, contudo apenas oito participantes realizaram todas as atividades propostas. Assim, decidimos apresentar os dados dos participantes que foram ativos nas Oficinas, a ponto de serem citados nos relatos que seguem. O gráfico 3 apresenta o número de resposta de cada questionário (*Google Forms*) disponibilizado, iniciando pela inscrição até o questionário de avaliação.

Gráfico 3: Número de participantes ao decorrer das atividades



Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que houve uma queda gradual dos participantes. Logo não foi possível vincular as desistências a uma atividade específica. Além disso, os encontros ocorreram semanalmente e a cada encontro um novo questionário foi lançado e o número de participantes nas videochamadas se assemelha ao de respostas nos questionários.

5.1. RELATOS DAS ATIVIDADES REALIZADAS NA OFICINA

No dia 19 de Abril de 2021 encerraram a inscrições e os participantes foram adicionados em uma classe do *Moodle* da UFSM e num grupo de *WhatsApp*, para receber as notificações de atividades e acessá-las.

Devido a pequenos contratemplos ocorridos no *Moodle*, principalmente com a identidade do participante estrangeiro, o planejamento inicial atrasou três dias e tornou o grupo do *WhatsApp* o principal meio de comunicação. Tal grupo foi nomeado de “Oficina Projeções” e foi criado no dia 25 de abril. Nessa mesma data o capítulo de Projeções Cartográficas do LAM foi enviado em formato PDF⁸ e disponibilizado o *link* para a leitura *online*. Também foi enviado o primeiro questionário (Apêndice A). Os participantes foram orientados, via *WhatsApp* a postar as atividades no *Moodle*, ou se ainda estivessem sem acesso, poderiam mandar para o e-mail pessoal do autor dessa dissertação, ou por mensagem direta via o mesmo aplicativo.

⁸*Portable Document Format* (mais conhecido como PDF) formato multimídia que exibe e compartilha documentos com segurança, independentemente de *software*, hardware ou sistema operacional.

O primeiro encontro remoto, via *Google Meet* foi marcado para o dia 27/04/2021. O objetivo desse encontro foi debater os pontos fortes e fracos do capítulo. Porém, devido ao atraso em disponibilizar o capítulo, os participantes tiveram apenas dois dias para realizar a leitura. Como houve pouca interação no grupo de *WhatsApp* durante estes dois dias, concluímos que poucos participantes teriam tentado ler, fazendo com que os objetivos do primeiro encontro remoto fossem adaptados.

Com isso, a primeira atividade foi remodelada e o encontro virtual foi realizado com a finalidade de conhecer os participantes e apresentar a proposta da Oficina verbalmente. Eliminamos a opção de adiar o encontro (para dar tempo hábil de os participantes concluírem a leitura do capítulo), pois esta atividade passou a ter como objetivo manter o engajamento dos participantes, conhecê-los melhor e introduzir as atividades planejadas.

5.1.1. Relato da primeira semana de atividades

No 27 de abril de 2021, às 17 horas (horário de Brasília) iniciamos o primeiro encontro remoto (videochamada) do grupo. Conforme exposto anteriormente, esperávamos que ocorressem desistências durante a Oficina, o que de fato aconteceu. Já no primeiro encontro 28 participantes compareceram e 3 justificaram sua ausência.

Os ministrantes (ou autor dessa dissertação e sua orientadora) iniciaram as apresentações transitando suas locuções para explicar o projeto LAM, sua proposta de ensino e os objetivos da Oficina. Durante as falas referentes ao projeto, o site⁹ foi apresentado e serviu de guia para mostrar aspectos relevantes do projeto. Por muito os ministrantes eram as únicas vozes ouvidas, mesmo questionando frequentemente sobre dúvidas, poucos se prontificavam a falar. Ao perguntar se alguém havia lido o capítulo, apenas quatro participantes relataram ler o capítulo de forma breve.

Devido à extensão do capítulo, o grupo decidiu que a melhor alternativa era marcar a próxima reunião para uma semana a partir daquela data (dia 04 de maio de 2021). Os ministrantes enfatizaram a importância da leitura do capítulo por parte dos participantes e indicaram algumas das atividades, para embasar suas opiniões perante as perguntas do segundo questionário. Depois disso, os participantes foram convidados, um a um, para ligarem as câmeras e se apresentarem brevemente, relatando nome, grau de ensino, atual ocupação, o porquê de se inscrever na Oficina e o que esperava da mesma.

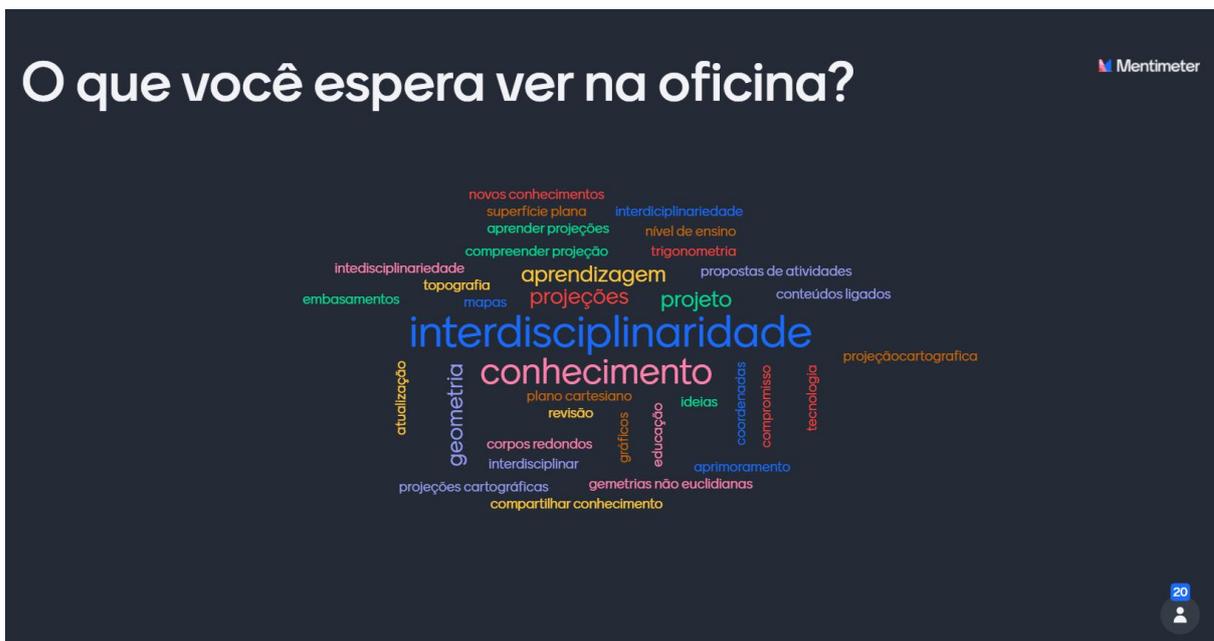
⁹ <https://umlivroaberto.org/>

Vários participantes declararam estar entusiasmados com a ideia da interdisciplinaridade com a Geografia e que pouco ou nada haviam visto sobre Projeções Cartográficas em aulas de Matemática. Os ministrantes decidiram apenas ouvir os participantes, apesar de saberem que a Oficina não trataria do tema de forma interdisciplinar.

Para finalizar o primeiro encontro, uma “nuvem de palavras” foi criada através do site *Mentimeter*¹⁰. Nesse site é possível criar apresentações interativas que se atualizam em tempo real, o site gera um *link* que é compartilhado. No caso da nuvem de palavras, à medida que as respostas são enviadas, o site vai montando com as respostas, algo similar a uma nuvem, e o tamanho das palavras são diretamente proporcionais à quantidade de vezes que elas aparecem nas respostas. No caso da Oficina, cada participante deveria colocar três palavras, ao responder à seguinte pergunta “o que você espera ver na Oficina? ”.

A Figura 13 ilustra o resultado da nuvem de palavras criado pelos participantes do primeiro encontro da Oficina.

Figura 13: Nuvem de palavras criada na Oficina



Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a nuvem de palavras, observamos que o título da Oficina pode ter deixado um equívoco quanto a ideia de interdisciplinaridade, pois mesmo que o tema Projeções Cartográficas possua uma ligação explícita com a disciplina de Geografia, o capítulo

¹⁰ <https://www.mentimeter.com/pt-BR>

apresentado trata de uma habilidade na Matemática. Logo o assunto pode ser abordado tanto com interdisciplinaridade quanto apenas nas aulas da Matemática.

Ao término do primeiro encontro remoto, os ministrantes tiveram a impressão de que os participantes pareciam comunicativos, empolgados com a ideia de estudar sobre o tema, visto que essa é uma área que poucos tiveram contato durante a vida acadêmica.

No espaço entre os encontros remotos, solicitamos aos participantes para que respondessem o questionário 2 (Apêndice D). Esse questionário conta com uma pergunta descritiva que tem como objetivo coletar sugestões de temas que deverão ser debatidos no segundo encontro. Com base nessas sugestões, os ministrantes elaboraram uma apresentação geral do capítulo. O Quadro 5 apresenta algum dos assuntos sugeridos.

Quadro 5: assuntos sugeridos pelos participantes e ministrantes

Responsável pela sugestão	Sugestão (simplificada)
P2	Como argumentar com um(a) aluna(o) que acredita que a Terra é plana?
P1	Trigonometria esférica
P14	Qual seriam os principais temas (mais objetivos)?
P8	É possível utilizar o capítulo no ensino remoto?
P14	Quanto tempo para abordar o conteúdo em sala de aula?
P5, P13	Como mostrar que não há projeção perfeita?
P6	Quantidade de Matemática no capítulo
Ministrantes	Qual o melhor momento no Ensino Médio para o capítulo ser desenvolvido?

Fonte: Dados da pesquisa

5.1.2. Relatos da segunda semana de atividades

No dia 5 de maio de 2021, os ministrantes iniciaram o encontro remoto e 19 participantes estavam presentes. Logo no início foi anunciado o cuidado para não confundir o capítulo ou a Oficina com material interdisciplinar. Obviamente foi alertado que se algum professor quiser utilizar do material para criar uma atividade junto com o professor de Geografia, é altamente recomendável, contudo o capítulo aborda uma habilidade Matemática, tornando um material direcionado a disciplina de Matemática.

No decorrer da Oficina, o arquivo do capítulo foi compartilhado pelos ministrantes na tela, para que todos os participantes pudessem acompanhar o tema dos debates. O primeiro assunto a ganhar um embate interessante foi “como argumentar com alunos que acreditam que a Terra é plana? ”. O participante P1 argumentou que pode ser utilizada a Geometria Esférica

para ilustrar que dado um triângulo com vértices em 3 cidades distintas, a soma de seus ângulos internos supera 180° . Mostrando que não é plana. O participante P2 disse que os professores da disciplina de Física rejeitam esta discussão, por não ter base lógica nos argumentos feitos por quem defende a Terra plana. P1 também ressaltou a utilização de astronomia, com exemplo da Ursa Maior que pode estar dentro de um intervalo latitudinal. A participante P11 contribuiu com sua experiência materna, dizendo que seu filho aprendeu sobre mapas antes de aprender sobre o globo terrestre.

Dando sequência aos debates, foi apresentada a atividade do balão (vide sessão 3). Nesse momento foi questionado se a atividade era suficiente para convencer que as projeções sempre teriam distorções. O participante P4 contou que fez uma atividade semelhante com a casca de laranja e ficou convencido que deverão haver distorções.

Nenhum participante disse ter tido dificuldade em realizar a tarefa. O participante P12 sugeriu inverter a ideia, primeiro desenhando no balão vazio e depois enchendo-o para mostrar as deformações. Os ministrantes explicaram que não é possível concluir que a distorção é inevitável, baseado no processo inverso, pois o balão antes de ser inflado não estaria planejado e o que causa as distorções na atividade é a tentativa de planejar o balão, não o desinflar dele. Por fim P2 disse que outra possibilidade seria os alunos passarem um tempo manipulando os *softwares* sugeridos no capítulo, pois assim veriam incontáveis tipos de mapas, o que tornaria mais fácil convencê-los das distorções.

O último debate que criou engajamento foi sobre o capítulo ter ou não Matemática suficiente, sendo que dois participantes apontaram isso nos questionários anteriores. Nesse caso, o participante P6 falou que muitos assuntos que são ensinados na disciplina de Matemática não contêm cálculos. O participante citou o caso de propriedades da geometria, como retas paralelas e concorrentes. Ainda nesse contexto, P2 argumentou que nas habilidades da BNCC, normalmente o foco é na aplicação do conteúdo presente à realidade do aluno, e não apenas à resolução de exercícios.

Os demais assuntos presentes no Quadro 5 foram levantados, porém, trouxeram poucos comentários. Por exemplo, o debate sobre o tempo de aplicação do material, como nunca foi aplicado, os participantes relataram que é muito difícil supor com que velocidade os alunos iriam realizar cada atividade.

Para encerrar o encontro, foi solicitado que os participantes resolvessem a atividade 4. Para tanto, a turma foi dividida em três grupos, para que cada grupo pegasse uma das atividades de projeção com a garrafa PET (atividades 9,10 e 11 do capítulo de Projeções Cartográficas do LAM). Os participantes tiveram uma semana para realizá-la e deveriam apresentar no 3º e

último encontro, a ser realizado em uma semana a contar daquele dia, ou seja, o encontro final ficou marcado para o dia 11 de maio de 2021, às 17h.

5.1.3. Relato da última semana de atividades

Conforme combinado, na data programada aconteceu o terceiro encontro remoto, via o *Google Meet*, em que cerca de 12 participantes juntaram-se aos ministrantes para realizar o encerramento da Oficina. Após os cumprimentos iniciais, foi questionado se os participantes tiveram dificuldades ao realizar a atividade destinada para semana corrente. A participante P11 relatou não ter conseguido realizar a tarefa e solicitou o auxílio dos ministrantes para terminar a atividade. Esse auxílio foi realizado no momento da Oficina em que P11 ligou a câmera e mostrou os passos feitos, ou seja, a PET recortada, os desenhos no local indicado e o cone feito com papel vegetal. Contudo, a dúvida se encontrava ao posicionar a lanterna e notar que não havia grandes distorções na projeção, como ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Demonstrando a dificuldade em iluminar o cone



Fonte: Dados da pesquisa

Os ministrantes asseguraram que não ocorreu nenhum equívoco em sua projeção, porém salientaram que as maiores distorções na Projeção Cartográfica do tipo Cônica estarão presentes nos limites superiores e inferiores. Devido aos desenhos (feitos no papel vegetal por parte da participante) serem próximos do meio do cone, as distorções eram menores. Os ministrantes também mostraram à P11 como haviam realizado a atividade, deixando um celular com a lâmpada ligada abaixo do cone como ilustra a Figura 15.

Figura 15 – Iluminação cone para realizar a atividade 11 do Capítulo de Projeções Cartográficas



Fonte: Mathias e Zanon (2020, p. 58)

Além disso, as Projeções Cartográficas do tipo cônicas preservam com mais fidelidade os ângulos (Mathias e Zanon, 2020), tornando as distorções do desenho menores, comparadas as outras projeções.

Com objetivo de não encerrar o debate, os ministrantes sugeriram que P11 movesse a lanterna para observar o que aconteceria com sua projeção. A participante fez o sugerido e com isso P11 finalizou sua participação e desligou a câmera, relatando ter adorado a atividade e estar ansiosa para aplicar em uma sala de aula.

Dando continuidade, os ministrantes solicitaram para que algum participante com uma projeção distinta a P11 desse seu depoimento. Na sequência P12 abriu a câmera e apresentou sua resolução, referente a Projeção Cartográfica Plana (Figura 16).

Figura 16 – Atividade realizada pelo participante P12

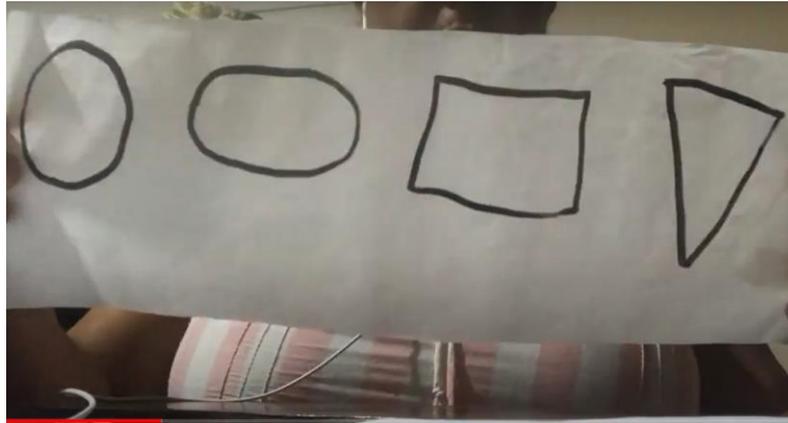


Fonte: Dados da pesquisa

O participante relatou ter tido facilidade e que essa será uma ótima atividade, pois cada aluno poderá fazer o desenho de sua preferência, e em turma haveria vários exemplos de como a projeção se comporta. O participante P6, que fez a atividade referente a mesma projeção, abriu seu microfone para complementar a fala de P12, expressando sua curiosidade de como seus desenhos ficariam em outras projeções. Para encerrar, o ministrante acrescentou que em sua experiência, realizando a simulação das três projeções cartográficas, o que percebeu de mais interessante foi a comparação final com os três resultados.

Nos relatos, faltou apenas a Projeção Cartográfica Cilíndrica. Nesse sentido, os ministrantes requisitaram alguém disposto a relatar sua experiência referente a essa projeção e os participantes P1 e P7 se voluntariaram. Dada a palavra para P7, ela comunicou ter algumas dificuldades durante a realização da atividade, P7 disse que mesmo utilizando um papel manteiga as sombras de seus desenhos não apareciam. Ela acredita que a razão do ocorrido foi utilizar uma garrafa de cor verde, porque ao tentar com uma PET transparente conseguiu realizar a Projeção Cartográfica (Figura 17).

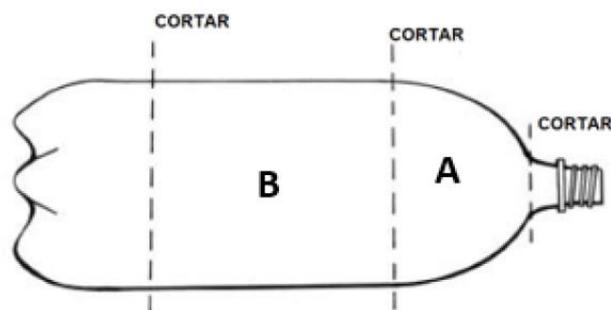
Figura 17 – Atividade realizada por P12



Fonte: Dados da pesquisa

O participante P1 relatou ter conseguido fazer a atividade e que realizou testes com alguns tipos de garrafas PET, os ministrantes acreditam que uma determinada marca de refrigerante possui uma PET de 3 litros ideal para a atividade, porque seu formato é muito similar a figura presente nas instruções da atividade (Figura 18). O participante P1 complementou a sua fala dizendo “Achei a atividade muito interessante, você fica ali movendo a lanterna e observa as projeções se alterando. Achei muito divertido!”.

Figura 18 – Silhueta da garrafa sugerida



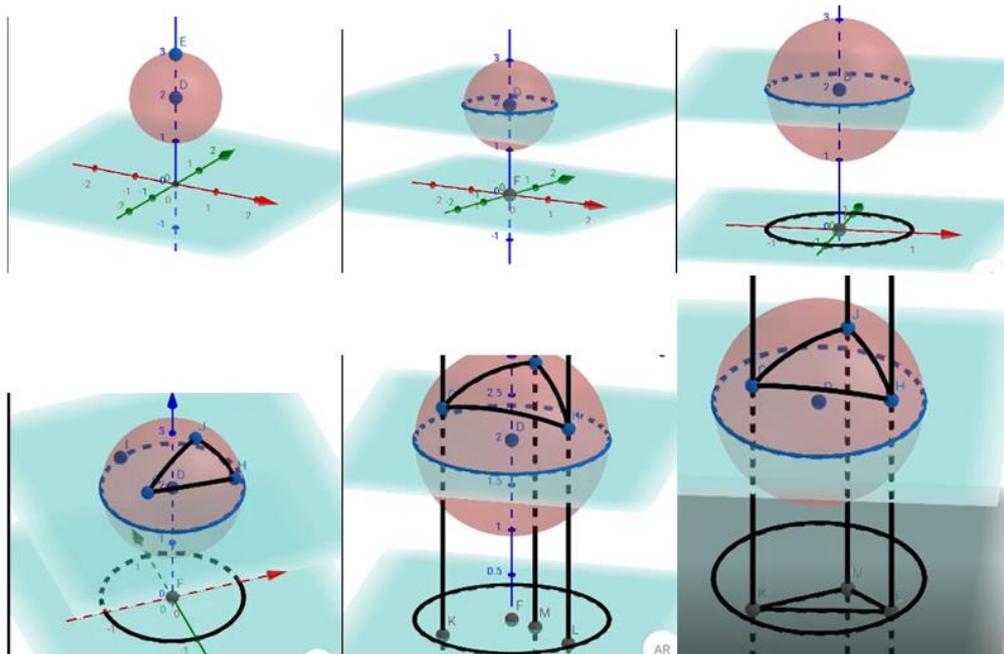
Fonte: Capítulo Projeções Cartográficas do LAM (pg. 35, 2020)

Para encerrar, os ministrantes apresentaram a atividade final, que devido aos atrasos no planejamento, se tornou opcional para os participantes. Essa atividade consistia em escolher uma atividade do capítulo, verificar os objetivos e estruturar uma atividade diferente da proposta, mas que preservasse os objetivos. Para tal trabalho os participantes tinham um prazo máximo de 10 dias (até 23:59 do dia 21 de maio de 2021, pelo horário de Brasília) para postar a atividade no *Moodle*.

Acreditamos que por ser uma atividade optativa poucos se inspiraram para criar e enviar, apenas dois participantes a fizeram. A participante P8 não indicou qual foi a atividade base para sua adaptação, mas independente disso, criou uma atividade com o objetivo de investigar as dificuldades dos alunos referentes ao conceito de latitude e longitude, além de reforçar os conhecimentos deste tema. Nesse sentido, P8 destacou que a atividade deveria ser aplicada após o ensino de longitude e latitude. A atividade planejada por P8 consiste em utilizar um globo terrestre para localizar coordenadas geográficas fornecidas pela(o) professor(a) (a participante apenas relatou sua ideia, não forneceu o enunciado nem exemplo de aplicação).

O participante P1 procurou adaptar a atividade 10 (Projetando a esfera no plano) da projeção plana com a garrafa pet com o aplicativo do *GeoGebra 3D*. A Figura 19 ilustra parte do processo da atividade. Vale ressaltar que o participante não entregou a atividade por escrito, apenas um vídeo realizando-a através do aplicativo pelo *smartphone*.

Figura 19 - Atividade desenvolvida por P1



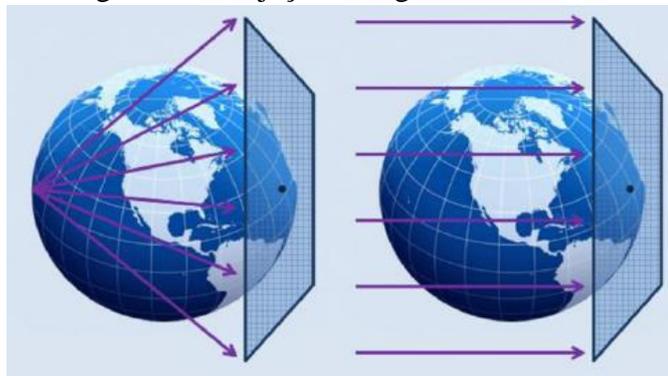
Fonte: Dados da pesquisa

Resumidamente no aplicativo o participante P1 criou uma esfera com centro em um ponto do eixo z (eixo em azul) de raio qualquer, dois planos (α e β) paralelos. Os planos foram criados de modo que um dos planos (α) divida a esfera em duas partes iguais e o outro (β) não tenha intersecção com a esfera. Em seguida foi utilizada a intersecção entre a esfera e o plano α para criar um círculo de mesmo tamanho em β com centro também no eixo z. Depois foi utilizada a metade da esfera localizada do lado oposto ao plano β para formar figuras, foi então

criada uma reta paralela ao eixo z em cada ponto feito na esfera. Por fim, foram marcados os pontos de intersecção destas retas com o plano β e estes foram unidos utilizando segmentos de reta.

Acreditamos que esta atividade tem pontos positivos, primeiramente a viabilidade de ser realizado em um *smartphone*, o que facilita o acesso da maioria dos adolescentes que estão cursando o Ensino Médio. Segundo, por abordar um tipo de projeção plana distinto do que a atividade original traz. De acordo com Mathias e Zanon (2020), na atividade 10 a Projeção Plana utilizada é do tipo Esferográfica, pois o centro de projeção (luz da lanterna) se localiza num ponto da esfera no extremo oposto ao ponto que tangencia o plano (projeção da esquerda na Figura 20). Enquanto que a projeção realizada no exercício proposto por P1 representa uma Projeção Plana do tipo Ortográfica, que não tem um foco de projeção, pois cada ponto da superfície da esfera é projetado em direção ao plano com um vetor ortogonal ao plano (projeção da direita na Figura 20). A Figura 20 ilustra uma comparação dos dois tipos de projeções azimutais.

Figura 18 – Projeção Esferográfica e Projeção Ortogonal



Fonte: Capítulo Projeções Cartográficas do LAM (pg. 52, 2020)

Como mencionado no início desta sessão segue o Quadro 6 comparando as atividades da forma que foram planejadas com o que foi realizado no decorrer da Oficina.

Quadro 6 – Alterações do planejamento

(continua)

Atividade	Planejado	Executado
A1	Assíncrono - Disponibilizado o capítulo, os participantes terão uma semana para realizar a leitura e responder os questionários (Anexos B e C).	Síncrono - Foi realizada um videochamada com todos participantes, onde cada um pôde se apresentar brevemente e fazer uma nuvem de ideias sobre as expectativas da Oficina.

Quadro 6 – Alterações do planejamento

(continuação)

A2	Síncrono - No segundo questionário disponibilizado em A1, é oportunizado um espaço para os participantes sugerirem pautas para roda de debates. No encontro, o capítulo será apresentado e as pautas e sugestões de debates serão encaixadas pelo mediador, autor dessa dissertação.	Assíncrono - Disponibilizado o capítulo, os participantes tiveram uma semana para realizar a leitura e responder os questionários com suas opiniões e sugestão para debates.
A3	Assíncrono - Cada participante deverá realizar uma das atividades propostas, dentro do prazo de uma semana. Após deverão enviar fotos ou vídeos do processo e responder um questionário.	Síncrono – Roda de debates por videochamada com os debates propostos na atividade 2, foi organizada uma apresentação geral do capítulo de forma que abordasse os temas sugeridos, mais alguns que eram do interesse dos organizadores.
A4	Síncrono - Será sugerido aos participantes que se sentiram seguros para que relatem como realizaram a atividade e em seguida será realizada uma roda de conversa sobre a viabilidade de aplicação destas atividades em sala de aula.	Assíncrono - Cada participante foi designado a realizar uma das atividades com a garrafa PET (atividade 9, 10 ou 11), tendo período de uma semana e responder um questionário com suas opiniões.
A5	Assíncrono - Os participantes deverão ter um período de 10 dias para escolher uma das atividades do capítulo, ler seus objetivos e criar uma nova atividade que contemple o mesmo objetivo.	Síncrono - Numa última videochamada os participantes que se sentiram seguros relataram e mostraram os resultados da atividade anterior, junto a isso foram incentivados debates sobre a viabilidade destas atividades em sala de aula.
A6	Síncrono- Na última reunião será disponibilizado um espaço para que os participantes compartilhem e dialoguem sobre as atividades criadas.	Assíncrono – (Atividade opcional) Os participantes tiveram um período de 10 dias corridos para escolher uma das atividades do capítulo, ler seu objetivo e criar uma nova abordagem para atingir o mesmo objetivo.

Fonte: Autor

5.2. ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

Ao início da Oficina era esperada uma análise quantitativa das respostas dos participantes, contudo seria injusto comparar porcentagens visto que o primeiro questionário teve 28 respostas e o último apenas 10.

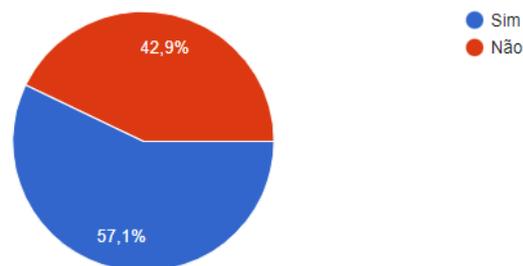
Pensando nisso, no que segue serão apontadas análises quantitativas que julgamos relevantes para esta pesquisa.

No primeiro questionário, tivemos 28 respostas, essas foram dadas previamente ao primeiro encontro e a leitura do capítulo do LAM. Observamos que quase metade dos profissionais e estudantes da área (que responderam à enquete) não estão atualizados quanto aos conteúdos presentes na BNCC que foi lançada em 2018. Ressaltamos que a enquete foi realizada em meados de 2021 e a atualização no currículo do Ensino Médio torna-se obrigatória no ano subsequente (2022). Das 28 respostas, 42,9% (12 participantes) admitem não estarem cientes da inovação referente a Projeções Cartográficas no ensino básico, como ilustra o gráfico 4.

Gráfico 4 - Resumo de respostas sobre conhecimento da BNCC questionário 1

Você sabia que na última atualização da BNCC (2018) foi incluído nas habilidades de matemática do Ensino Médio o conteúdo de projeções cartográficas?

28 respostas

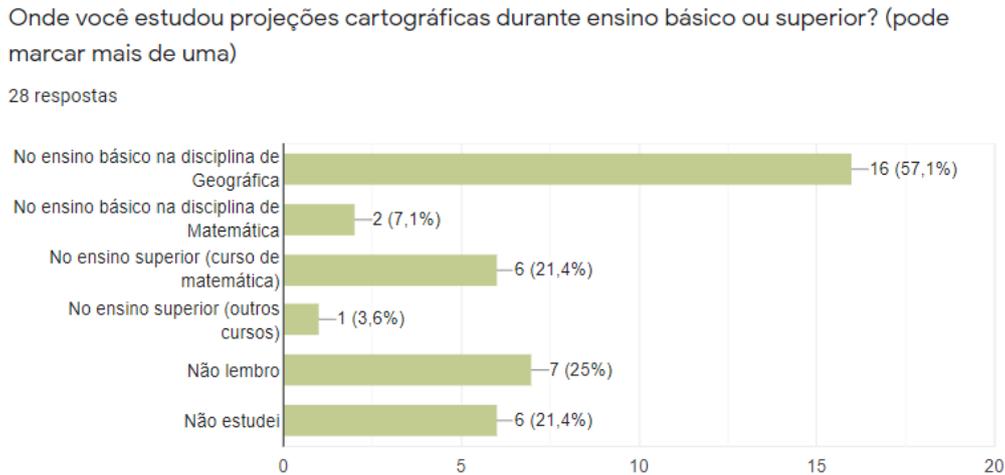


Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de 16 respondentes saberem da atualização, apenas duas destas pessoas acreditam estar preparadas para lecionar o conteúdo.

Baseado nestes dados, acreditamos que existem motivos plausíveis para desenvolver oportunidades para que profissionais e futuros profissionais se atualizem sobre as habilidades presentes na BNCC. Necessidade ainda mais evidente ao notar que 13 das 28 pessoas relatam não ter aprendido ou não lembrarem de ter estudado sobre Projeções Cartográficas (Gráfico 5).

Gráfico 5 - Resumo de respostas sobre onde os participantes estudaram Projeções Cartográficas



Fonte: Dados da pesquisa

Ao terminar uma graduação em Licenciatura em Matemática, acreditamos estar preparados para lecionar no ensino básico. Contudo, pelos relatos do estudante P7 durante a Oficina, a BNCC foi lançada durante sua graduação. Porém, como ele já terminou as disciplinas direcionadas à licenciatura, não houve menção a abordagens ou propostas de ensino sobre Projeções Cartográficas. Assim, fica um questionamento: de quem é tal responsabilidade?

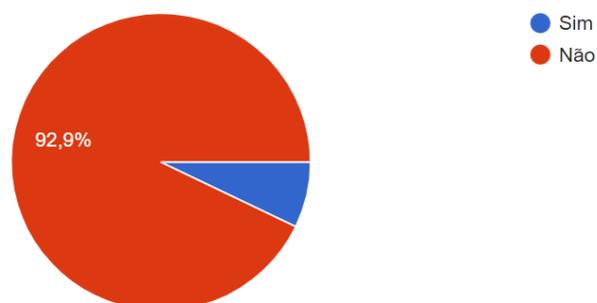
Ou seja, as habilidades que são adicionadas a BNCC não necessariamente serão apresentadas aos formados e prontos para entrar na sala de aula. Estas atualizações, aparentemente, são unicamente do interesse do aluno da graduação que esteja disposto a buscar por vontade própria. A partir da graduação, parte do trabalho de um professor é manter-se atualizado. Para isso é importante saber buscar conteúdos, atividades e metodologias que possam ser aproveitadas em sala de aula.

Segundo os 28 participantes que responderam ao questionário, apenas dois deles sentem-se aptos para lecionar a habilidade que a Oficina aborda. Lembrando que a atualização foi publicada em 2018 e esta Oficina foi aplicada em meados de 2021. Ou seja, houve uma lacuna de dois anos para que os graduandos ou professores se atualizassem (mesmo que ainda não seja obrigatório aplicação em sala). O Gráfico 6 ilustra, que em 92,2% de 28 respostas (26) os participantes relatam não se sentirem preparados para lecionar esta habilidade.

Gráfico 6 - Resumo de respostas sobre conseguir lecionar Projeções Cartográficas

Acredita que está preparadx para lecionar esse conteúdo atualmente?

28 respostas



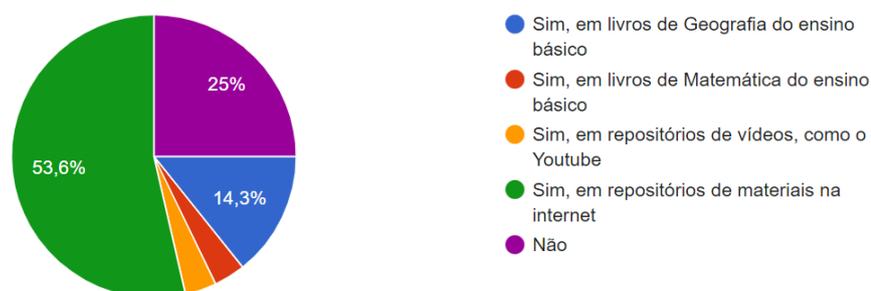
Fonte: Dados da pesquisa

Além disso, antes da aplicação desta Oficina, sete dos respondentes não tinham ideia de onde buscar material didático para auxiliá-los a ensinar este conteúdo. O Gráfico 7 ilustra uma alta variedade nas respostas,

Gráfico 7: Resumo de respostas sobre onde encontrar materiais questionário 1

Saberia onde encontrar material e atividades?

28 respostas



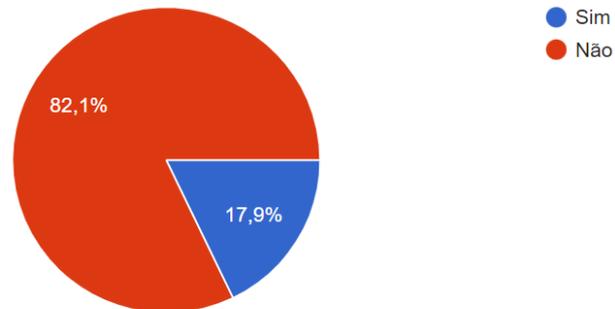
Fonte: Dados da pesquisa

Contrastando com a pergunta referente a lecionar o conteúdo, cinco participantes afirmam conseguir criar uma atividade envolvendo o assunto abordado na Oficina. Mesmo assim, como ilustra o Gráfico 8, 82,1% não acredita conseguir elaborar uma atividade.

Gráfico 8 - Resumo de respostas sobre criar atividade

Consegue criar uma atividade envolvendo o assunto?

28 respostas



Fonte: Dados da pesquisa

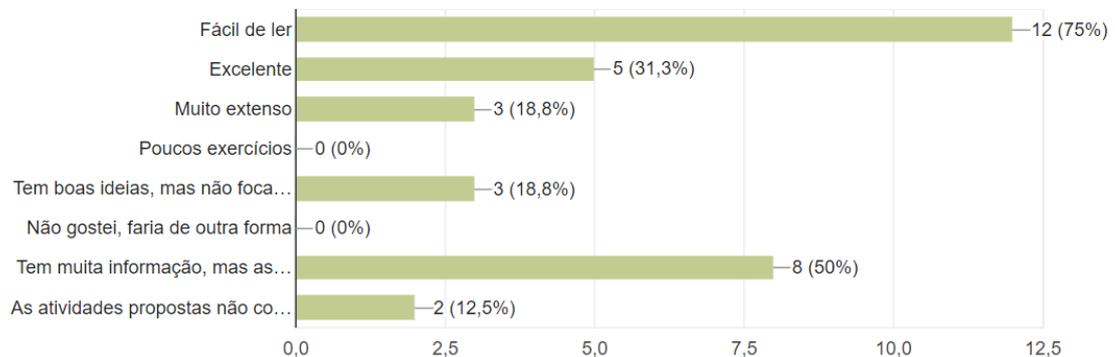
Assim, encerrando a apresentação das respostas às questões do primeiro questionário, vale lembrar que estas três últimas perguntas estão presentes no primeiro, segundo e quarto questionários. Será o instrumento mais preciso para analisar as alterações nas visões dos participantes.

Conforme mencionado anteriormente, no segundo questionário, o qual apresentaremos uma análise das respostas a partir daqui, apenas 16 participantes responderam. O objetivo do segundo questionário foi recolher as opiniões dos participantes após a leitura do capítulo. O Gráfico 9 ilustra as opiniões dos participantes sobre o capítulo.

Gráfico 9: Resumo de respostas sobre opinião do capítulo

Qual sua opinião sobre o capítulo? (pode marcar mais de uma)

16 respostas



Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 7 constam as respostas dadas ao questionamento realizado. Observamos que as alternativas de respostas foram criadas pelos ministrantes. Nesta questão os participantes

poderiam marcar mais de uma alternativa, logo a soma das marcações em cada alternativa ultrapassa o número de respondentes.

Quadro 7 – alternativas do gráfico 9

<input type="radio"/> Fácil de ler
<input type="radio"/> Excelente
<input type="radio"/> Muito extenso
<input type="radio"/> Poucos exercícios
<input type="radio"/> Tem boas ideias, mas não foca no conteúdo matemático
<input type="radio"/> Não gostei, faria de outra forma
<input type="radio"/> Tem muita informação, mas as atividades são bem pensadas
<input type="radio"/> As atividades propostas não condizem com a realidade da minha escola/região

Fonte: autor

No planejamento e concepção do capítulo, buscamos utilizar uma linguagem acessível e as 12 respostas expressando “fácil de ler” indicam o sucesso neste quesito e para satisfação dos autores, a resposta “Excelente” foi marcada por cinco dos respondentes e nenhuma pessoa marcou não ter gostado.

É muito importante para o processo de aprendizagem reconhecer e aceitar críticas ao trabalho realizado. As três pessoas que marcaram “muito extenso” não estão erradas, visto que o conteúdo é previsto para aproximadamente duas semanas e o capítulo (versão do aluno) possui aproximadamente 60 páginas, e isso é realmente amplo. Com uma ideia similar a alternativa “Tem muita informação, mas as ideias são boas” com oito marcações também contribuem com a crítica do tamanho do capítulo. Observamos que essas opções foram colocadas como opções de resposta, pois durante a elaboração do capítulo houve alguns debates nas reuniões do grupo do LAM sobre o tamanho de alguns capítulos, incluindo esse.

Durante a Oficina, os ministrantes conversaram sobre a extensão do capítulo, isso ocorreu pois buscamos alternativas de atividades, para que os professores tivessem opções de escolha. Nessa questão, observamos que 3 respondentes optaram pela opção “Tem boas ideias, mas não foca no conteúdo matemático”. Sobre esse fato, em muitos momentos, expressamos essa preocupação e ela foi compartilhada com os demais colaboradores do LAM. Mas, como citado em Pontes (1987), acreditamos que a ausência de números e cálculos não torna o conteúdo “não matemático”. A Matemática é uma área muito ampla, na qual os cálculos compõem apenas parte dela. É preciso além de calcular, compreender as propriedades Matemáticas e este capítulo foi fortemente baseado nisto.

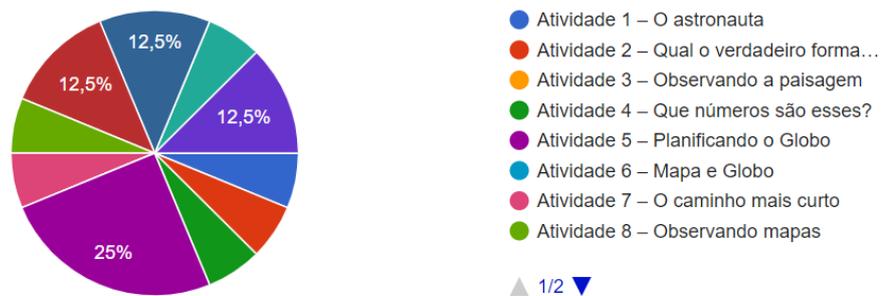
Outra pergunta presente no questionário 2 dizia respeito às atividades presentes no Capítulo. Acreditamos importante colocar essa pergunta, pois um dos critérios para recomendar um possível novo autor para colaborar com o LAM é a capacidade criativa deste, pois é

incentivado que as atividades sejam atrativas, inovadoras e, por consequência, ainda pouco usuais. Assim, concluímos como um ponto positivo, que das 16 atividades presentes no capítulo, a que obteve um maior índice de preferência, teve apenas quatro indicações. Ou seja, podemos entender que as atividades estão diversificadas a ponto de, dependendo da personalidade e metodologia de ensino do professor, haver uma atividade favorita. O Gráfico 10 ilustra a diversidade de opiniões, quanto a escolha de uma atividade, por conta dos participantes.

Gráfico 10 - Resumo de respostas sobre atividade mais chamativa questionário 2

Qual atividade te chamou mais atenção?

16 respostas



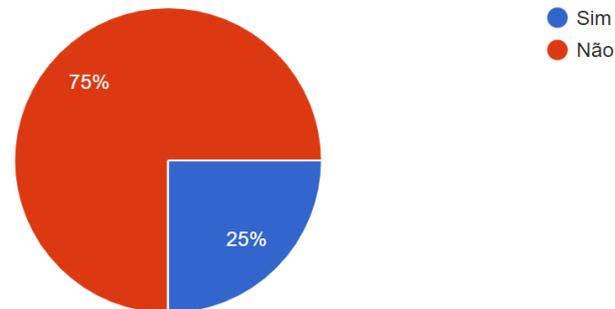
Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que mesmo com números de respostas distintos entre o primeiro e segundo questionário é possível afirmar que houve um aumento no número de participantes que se sente confiante para lecionar o conteúdo após a leitura do capítulo, visto que duas pessoas afirmavam estar preparadas e no segundo questionário como ilustra o Gráfico 11, quatro participantes sentem-se aptos depois da leitura.

Gráfico 11 - Resumo de respostas sobre conseguir lecionar o conteúdo de Projeções Cartográficas após a leitura do capítulo,

Acredita que está preparadx para lecionar esse conteúdo atualmente?

16 respostas



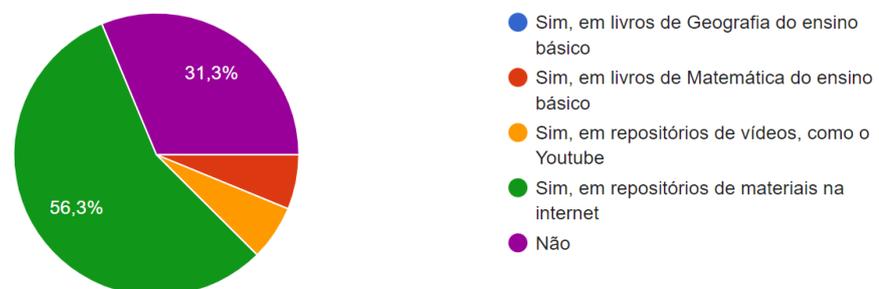
Fonte: Dados da pesquisa

Não conseguimos ter uma conclusão precisa sobre as respostas à pergunta relativa a onde encontrar material, visíveis no Gráfico 12. Porém, observamos que os participantes P2 e P3 mudaram suas respostas de buscar em livros de Geografia para buscar *online* (acreditamos que com busca *online* os participantes referem-se ao capítulo que pode ser encontrado *online*).

Gráfico 12 – Resumo de respostas sobre onde encontrar materiais após a leitura do capítulo

Saberia onde encontrar material e atividades?

16 respostas



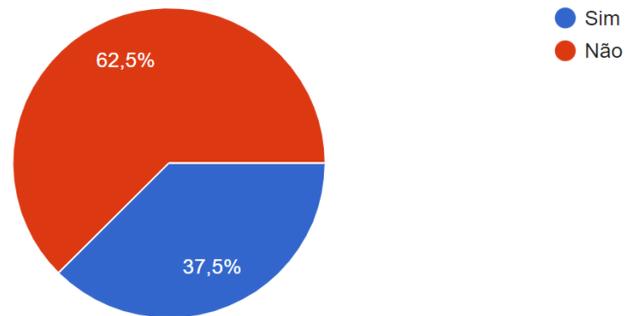
Fonte: Dados da pesquisa

Já quanto à questão referente a criar atividades, mesmo com menor número de respostas comparado ao primeiro questionário, a alternativa “sim” passou de quatro marcações para seis, trazendo relações positivas com o capítulo e o aprendizado dos participantes. Como pode ser visto no Gráfico 13, ainda há dez participantes que não sentem-se prontos para criar uma atividade.

Gráfico 13 - Resumo de respostas sobre criar uma atividade dadas no questionário 2

Consegue criar uma atividade envolvendo o assunto?

16 respostas



Fonte: Dados da pesquisa

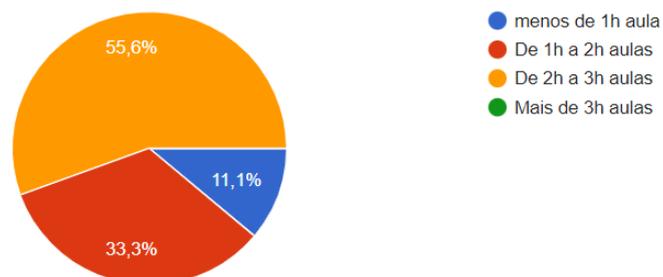
No terceiro questionário buscou-se investigar a qualidade das atividades as atividades 9, 10 e 11, apresentadas no material, utilizando a garrafa PET. Um dos receios enquanto estávamos elaborando o capítulo era se as atividades eram de fácil compreensão, principalmente as, que são feitas com as garrafas PET, visto que são atividades com materiais manipulativos e que possuem um roteiro a ser seguido. Contudo, todos os participantes afirmaram que conseguiram realizar as atividades a partir das instruções dadas.

Outro dado importante, que conseguimos levantar no questionário 3, foi referente ao tempo necessário para realizar a atividade. Essa pergunta se justifica pois com o pouco tempo para cumprir o conteúdo, e sendo três atividades com materiais manipulativos, solicitamos aos participantes que estimassem um tempo provável. O Gráfico 14 ilustra as respostas dos participantes.

Gráfico 14 - Resumo das respostas sobre tempo para realizar as atividades

Quantas hora/aula julga necessário para tal atividade?

9 respostas



Fonte: Dados da pesquisa

Como nenhum participante marcou mais de três horas, e no debate realizado no último encontro remoto eles relataram que a parte mais trabalhosa da atividade envolveu cortar a garrafa e realizar os desenhos, a segunda e terceira atividade poderão ser realizadas com tempo menor.

Nossa ideia era fazer uma comparação direta das respostas do último questionário com o primeiro e segundo com intenção de verificar a evolução da turma. Devido ao nível de desistência já apontado anteriormente, a pesquisa focou em dados qualitativos, e nesse caso não conseguimos comparar as porcentagens. Dessa forma, analisamos as respostas de cada um dos dez participantes remanescentes nas enquetes que haviam as três perguntas mais relevantes.

Para isso, ao invés de utilizar gráficos para representar as respostas dadas no último questionário, analisamos as respostas dadas por cada um destes dez participantes, conforme ilustra o Quadro 7.

Quadro 7 - Resumo das respostas dadas

Participante	Sente-se preparado para lecionar o conteúdo?			Onde buscaria material para lecionar? ¹¹			Considera-se capaz de criar uma atividade deste conteúdo?		
	Q1	Q2	Q4	Q1	Q2	Q4	Q1	Q2	Q4
P1	Não	Não	Sim	I	N	I	Não	Não	Sim
P2	Não	Sim	Sim	G	I	I	Sim	Sim	Sim
P3	Não	Não	Sim	G	I	I	Não	Não	Sim
P4	-	Não	Sim	-	-	G	-	Sim	Sim
P5	Não	Não	Sim	I	I	I	Não	Não	Sim
P6	Não	Não	Não	I	I	I	Não	Não	Não
P7	Não	Sim	Sim	I	Y	I	Não	Não	Não
P8	Não	Não	Não	I	I	I	Não	Sim	Sim
P9	Sim	-	Sim	I	-	I	Sim	-	Sim
P10	Não	Não	Sim	I	I	I	Sim	Sim	Sim

Fonte: Dados da pesquisa

Com relação à segurança em lecionar o conteúdo, no primeiro momento, antes de ser apresentado o capítulo, apenas P9 relatou sentir-se apto para lecionar, deduzimos que a participante P4 apesar de não responder o primeiro questionário, teria respondido não, pois mesmo após a leitura do capítulo (segundo questionário) a resposta foi “não”. Assim pode ser visto que a leitura do capítulo trouxe segurança para os participantes P2 e P7 para lecionar. O restante só obteve essa confiança após o término da Oficina, com exceção de P6 e P8 que marcaram em todos questionários não se sentirem preparados.

Sobre onde arranjar material e atividades houve algumas mudanças mais complexas, dos dez participantes analisados. Nesse sentido, dois relataram procurar material em livros de Geografia, e acreditamos que P4 não saberia onde encontrar, baseados na sua resposta do segundo questionário. Observamos que P1 mudou sua resposta de *Internet* e no segundo questionário relatou não saber onde buscar e P7 alterou de *Internet* para vídeos no *Youtube*. Acreditamos que após a leitura do capítulo o participante passou a ter uma noção mais completa do conteúdo abordado e isto trouxe algumas inseguranças das suas impressões anteriores à leitura do material fazendo-os trocarem suas fontes de busca por material. Por fim, notamos que todos os participantes, com exceção de P4, ao final da Oficina acreditam que podem encontrar atividades *online*. P4 buscaria atividade em livros de Geografia mesmo após a Oficina.

¹¹ Legenda: G – Livro de Geografia, N- Não sabe onde buscar I – *Internet* e Y – *Youtube*

Na última coluna temos as respostas referentes à pergunta sobre a possibilidade de criar atividades que abordassem este conteúdo. Aqueles que começaram a Oficina acreditando conseguir criar uma atividade, mantiveram a mesma opinião até o final. O participante P8 começou acreditar ser capaz de criar uma atividade após a leitura do capítulo, infelizmente não sabemos dizer se P4 estava sentindo-se segura antes da leitura ou não. Já os participantes P1, P3 e P5 só passaram a acreditar na possibilidade de criar alguma atividade com esta habilidade ao final da Oficina. Já P6 e P7 mantiveram suas respostas negativas com relação a questão independente da leitura do capítulo ou a conclusão do conteúdo.

Ressaltamos nossa curiosidade aos participantes P7 e P8, pois acreditamos que a criação de atividades tem uma ligação direta com o domínio do conteúdo. Contudo, P7 sente-se capaz de lecionar, mas não de criar uma atividade. E P8 ao contrário, sente despreparado para lecionar, porém conseguiria criar uma atividade.

Assim encerramos as análises perante as respostas dos participantes da Oficina de Projeções Cartográficas realizado no período de 25 de Abril a 21 de Maio de 2021. A seguir apresentamos as conclusões obtidas pelo autor perante o trabalho de escrever um capítulo de livro que versa sobre uma habilidade da BNCC, estruturar uma Oficina para outros profissionais da área e aplicar esta mesma Oficina.

6. CONCLUSÕES

Essa dissertação teve por objetivo investigar os saberes dos professores de Matemática (e graduandos) sobre Projeções Cartográficas. Durante as etapas que constituíram a pesquisa, muitos aprendizados foram possíveis, além dos esperados pelos objetivos traçados no início desta dissertação. Algo muito importante foi a experiência em escrever um material didático, visto que por si só já é uma tarefa árdua. Porém, desenvolver um capítulo completo abordando um tema novo para os professores de Matemática foi uma experiência inenarrável. Antes de escrever o material propriamente dito, precisamos elaborar um roteiro, chamado de unidade temática, isso implicou em fazer buscas sobre materiais correlatos em língua portuguesa e em outros idiomas. Essas buscas abriram nossos horizontes acerca do que é possível quando o foco é ensinar Projeções Cartográficas no Ensino Médio. Além disso, durante a escrita do capítulo, participamos de forma ativa de um grupo colaborativo que conta com a participação de diversos professores e professoras de várias regiões brasileiras, e lecionam em diferentes níveis de ensino. Essa diversidade trouxe muita riqueza aos debates, assim como já tínhamos observado nas aulas presenciais realizadas durante o mestrado do PROFMAT na UFSM.

No decorrer da Oficina, nos deparamos com um resultado não pensado quando a concebemos. Esse resultado, apesar de previsível, foram as melhorias que podem ser feitas no capítulo após sua exposição para os participantes da Oficina. Os diferentes olhares que as pessoas trazem devido às suas realidades e situações passadas durante a vida, podem trazer melhorias ao material criado que não haviam sido vistos pelo autor e ou apontadas pelo revisor. Como visto na análise dos questionários três pessoas disseram que o capítulo tinha boas ideias, mas não se aplicavam na realidade delas.

Após a finalização de todas as etapas desta dissertação, podemos afirmar que de alguma maneira auxiliamos na formação de professores(as) de Matemática especificamente sobre conteúdo de Projeção Cartográficas. Também conseguimos apresentar aos profissionais (ou futuros profissionais) da área uma opção de material em que possam retirar atividades, descritas como criativas e interativas. Tendo visto que 28 participantes responderam o questionário dois (após a leitura do capítulo) e 19 estavam presentes no segundo encontro, no qual foi explicado com mais detalhes as atividades e dúvidas trazidas no questionário, é possível dizer que o capítulo produzido é uma boa opção de material, caso venham a lecionar este conteúdo.

Observamos que todas as etapas da pesquisa foram realizadas em uma sequência de dois anos atípicos, devido a pandemia do COVID-19 que apesar das etapas terem ocorrido

completamente de forma remota é inevitável que a situação interfira no desempenho da mesma. Principalmente pelos abalos psicológicos que a pandemia pode causar ao ser humano.

Quanto ao objetivo da pesquisa, percebemos que ele foi parcialmente cumprido, pois apesar do número significativo de inscritos na Oficina, houve uma grande desistência. Mas, apesar disso, percebemos uma indicação de que não há domínio sobre esta parte do conteúdo, ou seja os saberes desses profissionais são limitados e todos(as) que participaram da Oficina relataram que é interessante que a mesma seja ofertada novamente.

Uma alteração pensada para o capítulo foi a adição da palavra “incolor” nos materiais necessários ao falar da garrafa PET nas atividades 9, 10 e 11 do capítulo devido à dificuldade relatada por uma participante, durante sua tentativa em realizar a atividade com uma PET de cor verde. Além disso, durante a Oficina não houve sugestões de outras alterações no capítulo.

Acreditamos que uma parte muito importante na conclusão de um relato de experiência, principalmente ao ministrar uma Oficina são as autocríticas que podemos fazer, nesse sentido observamos:

- a forte evasão dos participantes. Esse é um problema que precisa ser resolvido e nesse sentido, para uma próxima edição precisamos pensar em atividades mais interativas, visto que os participantes se mostraram animados quando relataram a tentativa de realizar as atividades se colocando no lugar dos alunos;

- antes do início da situação pandêmica não haviam sido debatidos as opções de abordagem remota. Contudo, como foi argumentado no capítulo 5, a diversidade e distância que a Oficina atingiu sendo realizada dessa forma, foi impressionante. Assim, para uma próxima edição, acreditamos que esse formato deve ser mantido.

- a investigação realizada através dos questionários e encontros *online* no decorrer da Oficina poderia ter sido feita de forma mais minuciosa. Ou seja, poderíamos ter marcado encontros remotos individualmente com os participantes, ou com grupos menores, para obter maiores detalhes sobre as respostas dadas nos questionários. Como, por exemplo, as indicações de que o capítulo não condizia com a realidade do(a) participante. Poderíamos ter convidado estes participantes para debater como o capítulo poderia ser moldado para sua realidade e o que tornava o capítulo não inclusivo.

Por fim, a pesquisa realizada no âmbito dessa dissertação foi de uma valia enorme para o autor, pois trouxe muitas reflexões e aprendizados, mesmo que através de equívocos. Acreditamos que a Oficina pode ser revisada e reformulada para uma nova aplicação, e essas alterações poderão refletir mais aprendizado aos participantes e maiores contribuições para melhorias do capítulo. Observamos que essas alterações são esperadas, pois como dito, todos

os capítulos do LAM seguem sendo adaptados e reformulados à medida que necessário. Outra possibilidade, é aproveitar os resultados oriundos desta experiência como subsidio para criar outras Oficinas, no intuito de divulgar os demais capítulos presentes no LAM, inclusive o capítulo de mesma autoria, que versa sobre Ladrilhamentos.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, K. C.; LEINHARDT, G. Maps as representations: Expert novice comparison of projection understanding. **Cognition and Instruction**, v. 20, n. 3, p. 283-321, 2002.
- ASSAI, N. D. ARRIGO, V.; BROIETTI, F. C. D. Uma proposta de mapeamento em periódicos nacionais da área de ensino de ciências. **REPPE-Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino**, v. 2, n. 1, p. 150-166, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CARVALHO, E. A. ARAÚJO, P. C. **História da Cartografia**. Pernambuco 2008
- FIRKOWSKI, H. SLUTER, C. R. **Cartografia Geral e Projeções Cartográficas - Curso de Especialização em Geotecnologias – DGEOM – UFPR- 2008**
- GHADERPOUR, E. Some equal-area, conformal and conventional map projections: A tutorial review. **Journal of Applied Geodesy**, v. 10, n. 3, p. 197-209, 2016.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5a ed. São Paulo: Atlas, 1999.
- LIBAULT, A. Tendências atuais da Cartografia. **Boletim Paulista De Geografia**. São Paulo, 1967.
- MATHIAS, C. V. ZANON, L. S. Projeções Cartográficas. **Livro Aberto de Matemática**. 2020. Disponível em: <https://docs.google.com/viewer?url=https://github.com/livro-aberto/text-design-development/raw/master/Cap%C3%ADtulos%20prontos%20-%20Professor/Proje%C3%A7%C3%B5es%20Cartogr%C3%A1ficas%20-%20Professor.pdf>. Acesso em 12 de dez.de 2021.
- NARDI, R.; CARVALHO, A.M.P. **Um estudo sobre a evolução das noções de estudantes sobre espaço, forma e força gravitacional do planeta Terra**. Investigações em ensino de ciências, v. 1, n. 2, p. 132-144, 2016.
- PIZETTA, K. F. **Adaptação de métodos e instrumentos de topografia e da cartografia no ensino da matemática**. Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytazes 2015.
- PONTES, J. P. A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a veem como simples disciplina de serviço. **Educação e Matemática**. N.4. Lisboa 1987.
- ROSA, D. F. C. AMARAL, R. G. MELO, J. J. P. **A construção histórica do conceito de américa latina: desvendando uma identidade** 2020.
- SATO, E. A.; **Será que você sabe ler o mapa-múndi? Eu não sei!** Disponível em: <https://www.blogs.unicamp.br/tortaprimordial/2017/11/16/sera-que-voce-sabe-ler-o-mapa-mundi/> 2017.
- SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

YIN RK. **Estudo de caso: planejamento e métodos.** 4a ed. Porto Alegre (RS): Bookman; 2010.

APÊNDICE A – FORMULÁRIO DE INSCRIÇÃO

Nome completo:
E-mail:
CPF:
<p>Escolaridade:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> Graduando em Matemática (licenciatura ou bacharel) <input type="radio"/> Graduando em outra área <input type="radio"/> Graduação em Matemática (licenciatura ou bacharel) <input type="radio"/> Graduação em outra área <input type="radio"/> Cursando mestrado – PROFMAT <input type="radio"/> Cursando mestrado em Matemática, educação Matemática, ou ensino da Matemática <input type="radio"/> Cursando mestrado em outra área <input type="radio"/> Mestre <input type="radio"/> Doutor
<p>Leciono como:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="radio"/> Professor(a) da rede pública <input type="radio"/> Professor(a) da rede privada <input type="radio"/> Professor(a) de ensino fundamental <input type="radio"/> Professor(a) ensino médio <input type="radio"/> Professor(a) ensino superior <input type="radio"/> Não leciono
Telefone (<i>Whatapp</i>):

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado para participar da “Oficina de experiências matemáticas: Projeções Cartográficas” que tem como objetivo divulgar o material didático sobre projeções Cartográficas, criado no âmbito do projeto Livro aberto de Matemática.

Sua participação, para fins de pesquisa, será tratada de forma anônima e confidencial, isto é, em nenhum momento ou fase do estudo será divulgado o seu nome. Quando for necessário exemplificar determinada situação, sua privacidade será assegurada, uma vez que seu nome será substituído por outra forma, sem ter sua identificação. Os dados coletados serão utilizados apenas nesta pesquisa e os resultados divulgados em trabalhos, revistas e/ou eventos acadêmico-científicos.

Sua participação é voluntária, isto é, a qualquer momento você pode recusar-se a responder qualquer pergunta ou desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua participação na pesquisa consistirá, apenas, em ceder suas respostas as perguntas do fóruns e/ou das rodas de conversa. As rodas de conversa serão gravadas para posterior transcrição. Sua desistência e/ou recusa em participar não trarão prejuízos em sua relação com os pesquisadores e/ou com a instituição na qual trabalham.

Esta pesquisa não traz nenhum benefício imediato para você, mas, ao participar da Oficina, você receberá um certificado e você contribui para o conhecimento acadêmico-científico na área do ensino da matemática. Com os seus relatos e sua experiência de trabalho, você contribui para maior conhecimento e reflexões sobre o processo de trabalho no qual está inserido e sobre suas relações com o conteúdo projeções cartográficas, que poderão vir auxiliar à pesquisa e ao trabalho profissional nesta área. Você não terá nenhum custo, como também não terá quaisquer compensações financeiras com sua participação nesta pesquisa. Não haverá riscos de qualquer natureza relacionados à sua participação, sendo que você pode interromper a entrevista, bem como recusar a continuar a participar, em qualquer momento, como já mencionado.

Você receberá uma cópia deste termo, no qual consta o e-mail dos pesquisadores, podendo tirar as suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou em qualquer momento. Desde já agradecemos a sua participação e colaboração!

Carmen Vieira Mathias (Docente UFSM/ Pesquisadora responsável)

E-mail: carmen@ufsm.br

Lucas Zanon (Mestrando do PROFMAT/UFSM)

E-mail: lucaszanon7@hotmail.com

APÊNDICE C – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

Nome:
<p>Você sabia que na última atualização da BNCC (2018) foi incluído nas habilidades de Matemática do Ensino Médio o conteúdo de projeções cartográficas?</p> <p><input type="radio"/> Sim</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Se sim, como ficou sabendo?</p> <p><input type="radio"/> Costumo ler as atualizações</p> <p><input type="radio"/> Grupo de estudo</p> <p><input type="radio"/> Amigxs/colegas</p>
<p>Onde você estudou o conteúdo de Projeções Cartográficas?</p> <p><input type="radio"/> No ensino básico na disciplina de Geográfica</p> <p><input type="radio"/> No ensino básico na disciplina de Matemática</p> <p><input type="radio"/> No ensino superior (curso de Matemática)</p> <p><input type="radio"/> No ensino superior (outros cursos)</p> <p><input type="radio"/> Não lembro</p> <p><input type="radio"/> Não estudei</p>
<p>Acredita que está preparadx para lecionar esse conteúdo atualmente?</p> <p><input type="radio"/> Sim</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Saberia onde encontrar material e atividades?</p> <p><input type="radio"/> Sim, em livros de Geografia do ensino básico</p> <p><input type="radio"/> Sim, em livros de Matemática do ensino básico</p> <p><input type="radio"/> Sim, em repositórios de vídeos, como o <i>Youtube</i></p> <p><input type="radio"/> Sim, em repositórios de materiais na internet</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Consegue criar uma atividade envolvendo o assunto?</p> <p><input type="radio"/> Sim</p> <p><input type="radio"/> Não</p>

APÊNDICE D – SEGUNDO QUESTIONÁRIO

Nome:	
Qual sua opinião sobre o capítulo? (Pode marcar mais de uma)	
<input type="radio"/> Fácil de ler <input type="radio"/> Excelente <input type="radio"/> Muito extenso <input type="radio"/> Poucos exercícios <input type="radio"/> Tem boas ideias, mas não foca no conteúdo matemático <input type="radio"/> Não gostei, faria de outra forma <input type="radio"/> Tem muita informação, mas as atividades são bem pensadas <input type="radio"/> As atividades propostas não condizem com a realidade da minha escola/região	
Teria alguma dúvida ou sugestão?	
Qual atividade te chamou mais atenção?	
<input type="radio"/> Atividade 1 – O astronauta <input type="radio"/> Atividade 2 – Qual o verdadeiro formato do planeta <input type="radio"/> Atividade 3 – Observando a paisagem <input type="radio"/> Atividade 4 – Que números são esses? <input type="radio"/> Atividade 5 – Planificando o Globo <input type="radio"/> Atividade 6 – Mapa e Globo <input type="radio"/> Atividade 7 – O caminho mais curto <input type="radio"/> Atividade 8 – Observando mapas <input type="radio"/> Atividade 9 – Projetando a esfera em uma superfície cilíndrica <input type="radio"/> Atividade 10 – Projetando a esfera no plano	<input type="radio"/> Atividade 11 – Projetando a esfera em uma superfície cônica <input type="radio"/> Atividade 12 – Sobre mapas e localizações <input type="radio"/> Atividade 13 – Sobre coordenadas geográficas <input type="radio"/> Atividade 14 – Comparando projeções cartográficas <input type="radio"/> Atividade 15 – Projeções cartográficas dinâmicas <input type="radio"/> Atividade 16 – Comparando as projeções cartográficas com o globo
Acredita que está preparadx para lecionar esse conteúdo atualmente?	
<input type="radio"/> Sim <input type="radio"/> Não	
Saberia onde encontrar material e atividades?	
<input type="radio"/> Sim, em livros de Geografia do ensino básico <input type="radio"/> Sim, em livros de Matemática do ensino básico <input type="radio"/> Sim, em repositórios de vídeos, como o <i>Youtube</i> <input type="radio"/> Sim, em repositórios de materiais na internet <input type="radio"/> Não	
Consegue criar uma atividade envolvendo o assunto?	
<input type="radio"/> Sim <input type="radio"/> Não	
Deixe sua sugestão de pauta para roda de debates da próxima aula (04/05/2021):	

APÊNDICE E – TERCEIRO QUESTIONÁRIO

Nome:
Qual atividade realizou? <input type="radio"/> Atividade 9 – Cilíndrica <input type="radio"/> Atividade 10 – Plana <input type="radio"/> Atividade 11 – Cônica
Conseguiu realizar? <input type="radio"/> Sim, apenas lendo <input type="radio"/> Sim, mas precisei pesquisar sobre <input type="radio"/> Não consegui fazer
Acredita que seria possível realizar está atividade em sala de aula? <input type="radio"/> Sim <input type="radio"/> Não
Justifique a resposta anterior:
Foi possível notar distorções? <input type="radio"/> Sim <input type="radio"/> Não
Quais você notou?
Quantas hora/aula julga necessário para tal atividade? <input type="radio"/> Menos de 1h aula <input type="radio"/> De 1h a 2h aulas <input type="radio"/> De 2h a 3h aulas <input type="radio"/> Mais de 3h aulas

APÊNDICE F – QUARTO QUESTIONÁRIO

Nome:
<p>Acredita que está preparadx para lecionar esse conteúdo atualmente?</p> <p><input type="radio"/> Sim</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Saberia onde encontrar material e atividades?</p> <p><input type="radio"/> Sim, em livros de Geografia do ensino básico</p> <p><input type="radio"/> Sim, em livros de Matemática do ensino básico</p> <p><input type="radio"/> Sim, em repositórios de vídeos, como o <i>Youtube</i></p> <p><input type="radio"/> Sim, em repositórios de materiais na internet</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Consegue criar uma atividade envolvendo o assunto?</p> <p><input type="radio"/> Sim</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Acredita que é necessário os professorxs aprenderem sobre esse conteúdo numa formação continuada?</p> <p><input type="radio"/> Sim</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Justifique a resposta anterior:</p>
<p>Acredita que seria relevante ter esse conteúdo na formação de professores de Matemática?</p> <p><input type="radio"/> Sim</p> <p><input type="radio"/> Não</p>
<p>Justifique a resposta anterior:</p>