



Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



**POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: UMA
ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DO ENSINO MÉDIO, COM ÊNFASE NO
MÉTODO DE PÓLYA.**

JONATHAS PERES DE MACEDO

Teresina

2021

JONATHAS PERES DE MACEDO

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENSINO MÉDIO, COM ÊNFASE NO
MÉTODO DE PÓLYA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão
Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI
como requisito parcial para obtenção do título
de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Dr. Pedro Antônio Soares Junior

Teresina

2021

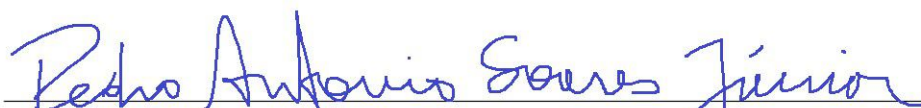
JONATHAS PERES DE MACEDO

**POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: UMA
ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DO ENSINO MÉDIO, COM ÊNFASE NO MÉTODO DE
POLYA.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em
Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA

Aprovado por:



Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Presidente e examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI



Prof. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares - Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí - UFPI



Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

TERESINA
Maio/2021

M141p Macedo, Jonathas Peres de.
Polinômios e equações algébricas: uma abordagem através da
resolução de problemas do ensino médio, com ênfase no método de
Pólya / Jonathas Peres de Macedo. – 2021.
110 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI,
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
2021.
“Orientador: Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior.”

1. Polinômios. 2. Equações algébricas. 3. Resolução de problemas.
4. Método de Pólya. I. Título.

CDD: 512.1

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

JONATHAS PERES DE MACEDO graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela UESPI, concluiu Especialização em Matemática nos níveis Fundamental, Médio e Superior, concluiu o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI. É professor efetivo da rede pública estadual do Piauí, da rede pública municipal de Beneditinos - PI e também trabalha como professor preparador no programa OBMEP na Escola.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho ao meu pai Cinéas Peres da Silva (*In Memoriam*), por me ajudar com os meus primeiros passos na estrada do conhecimento, ao meu irmão Roger Peres de Moura, por sempre me incentivar a buscar o meu aperfeiçoamento profissional, à minha esposa Luzia de Jesus Pereira e a minha filha Maria Fernanda Pereira de Macedo. Que este trabalho lhe venha a servir como inspiração para trilhar o caminho do conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida, por ter chegado até aqui e me abençoado com esta significativa conquista.

Ao meu pai Cinéas Peres da Silva (*In Memoriam*), por ter sido meu primeiro mestre, ajudando-me a iniciar minha longa jornada na estrada do conhecimento.

À minha mãe Miguelina Gomes de Macedo Peres, por nunca ter fraquejado nos duros desafios que teve que passar para me proporcionar uma boa educação.

À minha avó Antônia Gomes da Silva (*In Memoriam*), pela sua valiosa colaboração prestada durante a minha criação.

À minha irmã Aida Peres de Macedo, pelo companherismo e por sempre se fazer presente nos momentos mais importantes da minha vida.

Ao meu irmão Roger Peres de Moura, por sua valiosa contribuição ao longo do mestrado, sempre se dispondo a me ajudar nos momentos mais cruciais.

À minha esposa Luzia de Jesus Pereira e a minha filha Maria Fernanda Pereira de Macedo, por terem sido fortes e resilientes sempre que precisei estar ausente de casa ao longo do mestrado.

Ao meu primo Cleanto José Alves da Silva e sua esposa, Francineide da Costa Santos Alves, por todo apoio que me proporcionaram no início da minha trajetória docente na cidade de Beneditinos.

Aos meus amigos Ildemar da Conceição, Bruno Ribeiro de Mesquita e Luis Estevão de Sousa Vieira, valiosas amizades que adquiri ao longo da minha carreira como docente e discente.

Aos professores da UFPI, Newton Luis Santos e Jurandir de Oliveira Lopes.

Aos meus colegas de turma, em especial Andreina Pinheiro, Bruno Madeira, Israel Silva, Pedro Silas, José Lopes e Samuel Silva, por sempre se mostrarem solícitos em me ajudar a superar as dificuldades encontradas ao longo do curso.

Aos professores do PROFMAT, pelas valiosas lições que me ensinaram e pelo grande esforço que realizaram ao longo do mestrado para nos proporcionar um ensino e aprendizagem da melhor qualidade.

Ao meu orientador, Professor Dr. Pedro Antônio Soares Júnior, por suas valiosas orientações que ajudaram a tornar este trabalho possível.

À UESPI, pela oportunidade concedida.

“A Educação é o nosso
passaporte para o futuro,
pois o amanhã pertence
àqueles que se preparam
hoje.”

Malcom X

“Tudo aquilo que o homem
ignora não existe para ele.
Por isso, o universo de cada
um se resume no tamanho
do seu saber.

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho estudamos métodos de solução de problemas de polinômios e equações algébricas básicas. Apresentamos o método de Pólya, amplamente empregado na resolução de problemas matemáticos. Detalhamos cada etapa do método de Pólya para resolver problemas difíceis relacionados a polinômios e equações algébricas do ensino médio. Sempre começamos introduzindo as definições básicas, teoremas fundamentais e algoritmos clássicos, e então atacamos os problemas, primeiro os problemas fáceis, avançando gradualmente até chegar aos difíceis.

Palavras-chave: Polinômios; Equações Algébricas; Resolução de Problemas; Método de Pólya. .

ABSTRACT

In this work we study methods of solution for polynomials and basic algebraic equations problems. We bring forward the Pólya's method, widely employed in the resolution of mathematical problems. We detail each stage of the Pólya's method in order to solve hard problems related to polynomials and algebraic equations of high school level. We always start introducing the basic definitions, fundamental theorems and classical algorithms, and then we attack the problems, firstly easy problems so to reach the hard ones.

Keywords: Polynomials; Algebraic Equations; Problem solving; Pólya method.

Lista de Figuras

1	Disposição do algoritmo da divisão de Euclides	33
2	Disposição do dispositivo prático de Briot-Ruffini	37
3	Disposição do método da divisão de Horner	51
4	Recipientes com esferas	89
5	Paralelepípedo com cavidade cilíndrica	92
6	Semiesfera acoplada a um tronco de cone	94

Sumário

1	Introdução	14
2	Polinômios e Equações Algébrica	18
2.1	Noções básicas de Polinômios	18
2.1.1	Operações com Polinômios	20
2.1.2	Adição e Multiplicação de Polinômios	20
2.1.3	Divisão de Polinômios	26
2.1.4	Método de Descartes	31
2.1.5	Algoritmo da Divisão de Euclides	33
2.1.6	Dispositivo prático de Briot-Ruffini	37
2.1.7	Teorema do Resto	45
2.1.8	Teorema de D'Alembert	47
2.1.9	Método de Horner	50
2.2	Equações Algébricas	56
2.2.1	Relações de Girard	63
2.2.2	Fórmulas Resolutivas para Equações Algébricas no Ensino Básico	66
2.2.3	A fórmula resolutiva da equação polinomial do 2 ^o grau	67
2.2.4	Equações Biquadradas	69
3	Proposta Metodológica do Trabalho	72
3.1	Resolução de problemas na Matemática e o método de Pólya	73
3.2	As etapas do Método de Pólya	79
4	Sequência de Problemas	81
5	Considerações Finais	109

1 Introdução

Segundo Costa (2019), as principais dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem de Álgebra provém do fato de que os seus conteúdos muitas vezes não chegam a serem trabalhados com aplicações na resolução de problemas, nos mais variados contextos. Em particular, no caso dos polinômios e equações algébricas, o mesmo ainda destaca que, nos livros didáticos, esses dois conteúdos são trabalhados de forma direta, não se explorando de maneira eficaz as aplicabilidades na resolução de problemas matemáticos. Isso por vezes acaba por se refletir em resultados ruins não apenas no desempenho escolar, mas também em avaliações externas como o SAEB, por exemplo, que nos últimos anos vem apontando que uma considerável parte dos estudantes têm um índice de proficiência baixo na disciplina de Matemática (Fonte: INEP).

Levando em consideração essas dificuldades, objetivamos desenvolver este trabalho, que teve como problema de pesquisa: Quais as potencialidades do método de resolução de problemas de Pólya mediar e/ou ampliar o Ensino e Aprendizagem acerca de polinômios e equações algébricas no Ensino Médio? Teve como objetivo geral: Explorar a resolução de problemas a nível de Ensino Médio envolvendo Polinômios e Equações Algébricas, por intermédio do método de Pólya para resolução de problemas. E como objetivos específicos: (1) Realizar um estudo dirigido com potencialidades de mediar o ensino e aprendizagem de polinômios e equações algébricas, com ênfase em resolução de problemas; (2) Apresentar as naturezas de um problema matemático e os métodos de resolução empregados para solucioná-los; (3) Aplicar o método de Pólya na resolução de problemas de polinômios e equações algébricas, segundo as perspectivas deste estudo; (4) Analisar quais as potencialidades alcançadas através da resolução de problemas envolvendo polinômios e equações algébricas, por intermédio do método de Pólya.

Vale ressaltar ainda, de acordo com o currículo nacional, que o estudo da álgebra deve

se apresentar com a proposta de proporcionar ao estudante, a competência e habilidade de resolver situações problemas por meio da modelagem matemática. Segundo consta da BNCC (BRASIL, 2017, p. 271):

A álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

Nesse contexto, os polinômios e equações algébricas se destacam pela sua gama de aplicabilidades, que vão desde problemas que tratam de equações polinomiais de 1^o grau, equações polinomiais do 2^o grau até a aplicações em outras vertentes da Matemática, como Geometria, Proporcionalidade, dentre outras, se estendendo por outras áreas do conhecimento como a Física e a Química, por exemplo, criando a partir daí, de acordo com Gomes (2020), um elo de interdisciplinaridade entre essas áreas.

Com base no exposto no parágrafo anterior, para um bom entendimento e aplicação desses conceitos, recomendamos que eles sejam trabalhados sob uma perspectiva voltada para a resolução de problemas, que, segundo Zabala (1998), constituirão um conjunto de atividades ordenadas e articuladas que possibilitem professores e alunos um constante aperfeiçoamento das suas práticas pedagógica de ensino e aprendizagem.

Neste trabalho, apresentamos um estudo dos polinômios e equações algébricas, explorando suas propriedades, algoritmos operatórios e teoremas associados, os quais são necessários em resoluções de problemas sob a perspectiva do método de Pólya (1995), onde podemos explorar cada etapa da resolução de um problema, de acordo com essa perspectiva, desde a compreensão até sua solução final. No capítulo 2, na seção 2.1, estudamos os polinômios de variável complexa com coeficientes reais, suas operações e propriedades, bem como também os algoritmos práticos associados a cada operação. Abordamos alguns dos teoremas trabalhados à nível de Ensino Básico e algumas de

suas aplicações em resolução de problemas com esta temática, a fim de proporcionar aos educandos as seguintes competências e habilidades:

- (I) Definir polinômios de coeficientes reais na variável complexa;
- (II) Conhecer as operações com polinômios de variável complexa e suas propriedades;
- (III) Trabalhar os principais algoritmos operatórios das operações com polinômios;
- (IV) Conhecer os teoremas inerentes às operações com polinômios e suas aplicabilidades a nível de Ensino Básico;
- (V) Aprender a calcular o valor numérico de um polinômio;
- (VI) Conhecer e aplicar diferentes métodos e teoremas para realizar divisões de polinômios.

Na seção 2.2 estudamos as equações algébricas e suas propriedades, aplicando os conceitos, algoritmos e teoremas acerca de polinômios até então estudados. Abordamos alguns dos teoremas relacionados ao Ensino Básico, suas demonstrações e a aplicabilidade dos mesmos em resoluções de problemas que tratam esta temática, com o intuito de proporcionar aos educandos as seguintes competências e habilidades:

- (I) Definir o que vem a ser uma equação algébrica;
- (II) Utilizar os conhecimentos adquiridos sobre polinômios de variável complexa e aplicá-los às equações algébricas;
- (III) Enunciar e demonstrar teoremas inerentes às equações algébricas a nível de Ensino Básico;
- (IV) Estudar os principais métodos resolutivos de equações algébricas a nível de Ensino Básico;

- (V) Resolver uma equação algébrica no universo dos números complexos;
- (VI) Fazer relação entre as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau, por intermédio de conhecimentos previamente estudados.

No capítulo 3, tratamos o que vem a ser um problema matemático, quais os tipos de problemas matemáticos e a estratégia mais conveniente para resolvê-los, de acordo com o seu enquadramento. Apresentamos ao leitor o método de Pólya para resolução de problemas matemáticos. Nele, exploramos cada elemento constituinte de um problema proposto, quais questionamentos devem ser feitos antes de qualquer decisão, quais as decisões mais cabíveis a serem adotadas e quais os principais resultados a serem considerados ao fim de cada resolução.

No capítulo 4, trabalhamos a resolução de problemas que envolvem os polinômios e equações algébricas, com base no método de Pólya, onde, a cada resolução, são ponderadas todas as considerações mencionadas no capítulo 3 deste trabalho. Foram escolhidos para esta seção, problemas que já vieram a ser cobrados em vestibulares nacionais, problemas que são trabalhados no Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM - IMPA) e problemas encontrados no acervo de materiais do PROFMAT.

Por fim, no capítulo 5, destacamos as considerações finais, quais as perspectivas e potencialidades que podem ser alcançadas com a abordagem realizada neste trabalho.

2 Polinômios e Equações Algébrica

2.1 Noções básicas de Polinômios

Neste capítulo, usamos como principais referências bibliográficas Hefez ([12], 2018), Lima *et al* ([13], 2006) e Lima (2013). A abordagem teórica tratada neste trabalho fora feita tendo como base os polinômios e equações algébricas de variável complexa. Isto posto, faz-se necessário ao estudante que o mesmo detenha um conhecimento prévio acerca das definições, propriedades e teoremas dos números complexos. É possível que o leitor encontre estas informações em [4]. Ao longo do capítulo são realizadas resoluções de problemas preliminares como forma de exemplos, os quais em sua maioria, foram extraídos de provas de vestibulares e dos materiais de estudos do Portal da Matemática da OBMEP. Os mesmos serão tratados mais a frente como problemas correlatos, segundo a heurística de Pólya (1995).

Definição 2.1. Chamamos de polinômio em $\mathbb{R}[x]$ ou função polinomial de variável complexa, toda expressão algébrica do tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j,$$

onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_j \in \mathbb{R}$, para $0 \leq j \leq n$ e $x \in \mathbb{C}$.

As expressões $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 7$, $Q(x) = x - 3$ e $H(x) = 5$ são exemplos de polinômios em $\mathbb{R}[x]$.

Cada parcela $a_j x^j$ é chamada de termo do polinômio, onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinômio e x, x^2, \dots, x^n são ditas suas partes literais. O termo a_0 é chamado de *termo independente* do polinômio, uma vez que não possui parte literal. Quando um polinômio é constituído apenas por seu termo independente, diz-se que este polinômio é um polinômio constante.

Definição 2.2. Chamamos de grau de um polinômio o maior expoente a figurar nas partes literais do polinômio. Indicaremos o grau de um polinômio $P(x)$ por $gr(P)$.

O termo $a_n x^n$ é chamado de *termo principal*, pois ele é quem determina qual o grau que o polinômio possui, e o coeficiente a_n é dito *coeficiente líder*. Todo polinômio que possua os seus coeficientes

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$$

é dito nulo ou identicamente nulo. Não definimos grau para um polinômio nulo, o qual denotamos por $0(x)$.

Definição 2.3. Diz-se que dois polinômios são iguais quando ocorrer uma das seguintes situações;

(I) Ou ambos são identicamente nulos;

(II) Ou então quando possuem termos de mesmo grau com mesmo coeficiente. Ou seja, dados $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ dois polinômios de variável complexa com $gr(P) = gr(Q)$, tem-se que $a_i = b_i$, onde $0 \leq i \leq n$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Muitas vezes, na resolução de problemas, utilizamos a definição de igualdade entre polinômios quando precisamos comparar uma expressão dada com uma expressão obtida, como veremos mais a frente em algumas resoluções de problemas ao longo deste trabalho.

Definição 2.4. Considere o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e um número $c \in \mathbb{C}$. Chamamos de valor numérico de $P(x)$ em c o resultado obtido ao atribuírmos c a cada parte literal do polinômio $P(x)$, ou seja,

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0.$$

Exemplo 1. Seja $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 7$, determinar $P(-2)$.

Solução 1. Substituindo x por -2 no polinômio $P(x)$, temos;

$$\begin{aligned}P(-2) &= 5(-2)^3 + 2(-2)^2 - 6(-2) + 7 \\&= 5(-8) + 2 \cdot 4 + 12 + 7 \\&= -40 + 8 + 12 + 7 \\&= -13.\end{aligned}$$

Logo, temos $P(-2) = -13$.

Definição 2.5. Considere o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, chamamos de raiz de $P(x)$ os valores para os quais se tem $P(x) = 0$.

Um estudo mais aprofundado a respeito de raiz de polinômios será realizado mais a frente na seção 2.2 deste trabalho.

2.1.1 Operações com Polinômios

No conjunto dos polinômios de variável complexa e com coeficientes reais, definimos as operações de adição, multiplicação e divisão, as quais serão definidas a seguir.

2.1.2 Adição e Multiplicação de Polinômios

Definição 2.6. Sejam $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ e $Q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ dois polinômios em $\mathbb{R}[x]$. A operação de adição entre esses dois polinômios é definida como

$$P(x) + Q(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j, \text{ onde } c_j = a_j + b_j, \text{ para } 0 \leq j \leq n.$$

Em outras palavras, $P(x) + Q(x)$ é o polinômio cujos coeficientes são representados pelas adições dos coeficientes dos termos de mesmo grau de $P(x)$ e $Q(x)$. O resultado dessa operação é chamado de soma.

Propriedades da Adição

Os polinômios de variável complexas gozam das mesmas propriedades operatórias em relação à operação de adição de números reais, uma vez que todos os coeficientes dos polinômios a serem somados, são elementos de \mathbb{R} . Assim, dados os polinômios $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ temos as seguintes propriedades:

Propriedades 2.1. Adição:

[A1] *Associativa:* $[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$

[A2] *Comutativa:* $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

[A3] *Elemento Neutro:* Sejam $P(x)$ um polinômios em $\mathbb{R}[x]$. Existe um $Q(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) + Q(x) = P(x)$. Nessas condições, temos que $Q(x)$ corresponde ao polinômio $0(x)$.

[A4] *Simétrico aditivo:* Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, definimos $-P(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0$. Pela definição de adição de polinômios, vemos imediatamente que $P(x) + [-P(x)] = 0(x)$. Diz-se então que $-P(x)$ é o polinômio simétrico aditivo de $P(x)$.

Nas operação de adição podemos constatar que ela independe dos graus dos polinômios, resultando sempre num polinômio de grau menor ou igual ao polinômio de maior grau dentre os polinômios operados.

Definição 2.7. Dados os polinômios $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ e $Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ em $\mathbb{R}[x]$, define-se a multiplicação desses polinômios como:

$$P(x) \cdot Q(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j,$$

onde

$$c_0 = a_0 \cdot b_0$$

$$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0$$

$$c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0$$

...

$$c_j = a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \dots + a_j \cdot b_0 = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda \cdot b_\mu$$

...

$$c_{n+m} = a_n \cdot b_m.$$

O polinômio que obtemos como resultado da multiplicação $P(x) \cdot Q(x)$ é chamado de produto.

Exemplo 2. Determine o produto $P(x) \cdot Q(x)$ onde $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 10$ e $Q(x) = x^2 + 7x + 6$.

Solução 2. Pela definição de multiplicação de polinômios, temos:

$$\begin{aligned} (x^3 - 4x^2 + 6x + 10)(x^2 + 7x + 6) &= x^5 + 7x^4 + 6x^3 - 4x^4 - 28x^3 - 24x^2 + 6x^3 + 42x^2 \\ &+ 36x + 10x^2 + 70x + 60 \\ &= x^5 + (7 - 4)x^4 + (6 - 28 + 6)x^3 + (-24 + 42 + 10)x^2 \\ &+ (36 + 70)x - 60 \\ &= x^5 + 3x^4 - 16x^3 + 28x^2 + 106x + 60. \end{aligned}$$

Logo, o produto $P(x) \cdot Q(x) = x^5 + 3x^4 - 16x^3 + 28x^2 + 106x + 60$.

Propriedades da Multiplicação:

Do mesmo modo que a operação de adição, temos que a operação de multiplicação de polinômios possui propriedades operatórias que remetem às propriedades da multiplicação de números reais. Com isso, dados quaisquer polinômios $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ em $\mathbb{R}[x]$, temos as seguintes propriedades:

Propriedades 2.2.

[M1] *Associativa:* $[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$

[M2] *Comutativa:* $P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$ [M3] *Elemento Neutro:* Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, existe um único polinômio $Q(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) \cdot Q(x) = P(x)$.

Note que nessas condições, vemos que $Q(x) = 1$. Assim, polinômio $Q(x) = 1$ é dito o elemento neutro da multiplicação de polinômios.

[D] *Distributiva:*

$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

Diferentemente da operação de adição de polinômios, nem todo polinômio possui simétrico multiplicativo. Assim, não se define inverso multiplicativo dentro do conjunto dos polinômios.

A operação de multiplicação de polinômios pode ser realizada por meio de um algoritmo prático, similar ao algoritmo de multiplicação dos números inteiros, onde utilizamos somente os coeficientes separados. Vejamos:

Exemplo 3. Considerando ainda os polinômios $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 10$ e $Q(x) = x^2 + 7x + 6$, vamos determinar o produto $P(x) \cdot Q(x)$.

Solução 3. (1) Primeiramente, escrevemos na primeira linha os coeficientes dos termos de um dos polinômios. Neste caso em particular, escreveremos os coeficientes de $P(x)$ na primeira linha:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad 6 \quad 10 \\ \times \quad \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

(2) Escrevemos os coeficientes do outro polinômio na segunda linha:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad 6 \quad 10 \\ \times \quad \underline{\hspace{1cm} 1 \quad 7 \quad 6} \end{array}$$

(3) Da esquerda para a direita, multiplicamos os coeficientes debaixo pelos de cima. Observe a primeira dessas multiplicações:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad 6 \quad 10 \\ \times \quad \underline{\hspace{1cm} 1 \quad 7 \quad 6} \\ 6 \quad -24 \quad 36 \quad 60 \end{array}$$

(4) Os resultados da segunda parte da multiplicação devem ser alinhados verticalmente com os termos de mesmo grau da multiplicação anterior:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad 6 \quad 10 \\ \times \quad \underline{\hspace{1cm} 1 \quad 7 \quad 6} \\ 6 \quad -24 \quad 36 \quad 60 \\ 7 \quad -28 \quad 42 \quad 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & 1 & a & b \\
 & & & & \times & 1 & a & b \\
 & & & & & \hline
 & & & & & b & ab & b^2 \\
 & & & & & a & a^2 & ab \\
 + & 1 & a & & & & & \\
 \hline
 & 1 & 2a & 2b+a^2 & 2ab & b^2 & &
 \end{array}$$

Com isso, temos então que $q(x)^2 = x^4 + 2ax^3 + (2b + a^2)x^2 + 2abx + b^2$. Comparando termo a termo os polinômios $p(x)$ e $q(x)^2$, temos o seguinte conjunto de igualdades:

$$\begin{cases}
 2a = -10 \\
 2b + a^2 = 37 \\
 2ab = -60 \\
 b^2 = 36
 \end{cases}$$

Daí, temos; Se $2a = -10$, então $a = -5$;

Se $a = -5$, então $2(-5)b = -60 \iff b = 6$.

Logo, a raiz quadrada do polinômio $p(x)$ será o polinômio $q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Dessa maneira, os problemas que usam as operações multiplicação de inteiros podem ser vistos, segundo as perspectivas de Pólya (1995), como problemas correlatos que nos auxiliam na resolução de problemas envolvendo esta operação polinomial.

2.1.3 Divisão de Polinômios

Quando tratamos das operações com polinômios, a divisão de polinômios recebe um destaque diferenciado por conta dos seus algoritmos operatórios, seus teoremas e suas aplicabilidades, as quais serão abordadas a seguir.

Definição 2.8. *Sejam $P(x)$ e $D(x)$ dois polinômios em $\mathbb{R}[x]$ de variável complexa,*

$D(x) \neq 0$ e $gr(P) > gr(D)$. Dividir $P(x)$ pelo polinômio $D(x)$ significa encontrar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que

$$(I) \quad P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x);$$

$$(II) \quad gr(R) < gr(D).$$

Os polinômios $P(x)$ e $D(x)$ são chamados respectivamente de dividendo e divisor da divisão de polinômios, enquanto que os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ são chamados respectivamente de quociente e resto da divisão de polinômios.

O maior valor possível para $gr(R)$ será $gr(D) - 1$, pois deve-se levar em conta que há a possibilidade de $R(x)$ ser nulo, fato que nos diz que a divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é exata. Quando isso acontece, diz-se que $P(x)$ é divisível por $D(x)$. Diferentemente das operações anteriores, na divisão de polinômios devemos levar em conta os graus dos polinômios a serem operados, pois do contrário, há a possibilidade da operação resultar numa expressão algébrica que não se enquadra na definição de polinômios de variável complexa. Como por definição temos que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e $gr(R) < gr(D)$, segue que:

$$gr(P) = gr(D) + gr(Q) \iff gr(Q) = gr(P) - gr(D).$$

Em outras palavras, o grau do quociente é igual ao grau do dividendo menos o grau do divisor. Este resultado será levado em conta ao abordarmos os algoritmos de divisão.

Teorema 2.1. *Sejam $P(x)$ e $D(x)$ polinômios em $\mathbb{R}[x] - \{0\}$. Se $D(x)$ tem coeficiente líder invertível e divide $P(x)$, então $gr(D) \leq gr(P)$.*

Demonstração: Como $D(x)$ divide $P(x)$ e ambos são não nulos, então existe $Q(x) \in \mathbb{R}[x] - \{0(x)\}$ tal que $P(x) = D(x) \cdot Q(x)$. Pela propriedade multiplicativa do grau,

temos:

$$\begin{aligned} \text{gr}(P) &= \text{gr}(D \cdot Q) \\ &= \text{gr}(D) + \text{gr}(Q) \geq \text{gr}(D). \end{aligned}$$

Teorema 2.2. (*existência e unicidade do quociente e do resto*): Considere os polinômios $P(x)$ e $D(x)$, existe um único polinômio $Q(x)$ e um único polinômio $R(x)$ tal que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Demonstração: Seja $D(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$, onde b_m tem inverso.

(*Prova da existência*) Se $P(x) = 0$, então tome $Q(x) = R(x) = 0$.

Suponhamos que $P(x) \neq 0$. Seja $n = \text{gr}(P)$ e escreva $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$.

Se $n < m$, então tome $Q(x) = 0$ e $R(x) = P(x)$.

Podemos supor $n \geq m$. A demonstração é por indução sobre $n = \text{gr}(P)$ (OBS: Ver Hefez [11]).

Se $n = 0$, então $0 = n \geq m = \text{gr}(D)$, logo $m = 0$, $P(x) = a_0 \neq 0$, $D(x) = b_0$, com $b_0^{-1} \in \mathbb{R}$.

Assim, $P(x) = a_0 b_0^{-1} D(x)$, com $Q(x) = a_0 b_0^{-1}$ e $R(x) = 0$.

Suponhamos o resultado válido para polinômios com grau menor do que $n = \text{gr}(P)$.

Vamos mostrar que vale $P(x)$.

Seja $P_1(x)$ o polinômio definido por $P_1(x) = P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x)$. O polinômio $a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x)$ tem grau n e coeficiente líder a_n . Logo, $\text{gr}(P_1) < \text{gr}(P)$. Por hipótese de indução, existem os polinômios $Q_1(x)$ e $R_1(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ tais que

$$P_1(x) = D(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x),$$

com $R_1(x) = 0$ ou $gr(R_1) < gr(D)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(x) &= P_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x) \\ &\stackrel{(1)}{=} [Q_1(x) \cdot D(x) + R_1(x)] + a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x) \\ &\stackrel{(2)}{=} [Q_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}] D(x) + R_1(x) \end{aligned}$$

Em (1), substituímos a expressão $P_1(x)$ e, em (2), usamos a comutatividade da adição e a distributiva.

Tomando $Q(x) = Q_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}$ e $R(x) = R_1(x)$.

(Prova da unicidade) Sejam $Q_1(x), Q_2(x), R_1(x), R_2(x)$ tais que

$$P(x) = Q_1(x) \cdot D(x) + R_1(x) \stackrel{(3)}{=} Q_2(x) \cdot D(x) + R_2(x), \text{ onde}$$

$$(4) \quad \begin{cases} R_1(x) = 0 & \text{ou} & gr(R_1) < gr(D) & e \\ R_2(x) = 0 & \text{ou} & gr(R_2) < gr(D). \end{cases}$$

De (3), segue-se que $[Q_1(x) - Q_2(x)]D(x) = R_2(x) - R_1(x)$.

Se $Q_1(x) \neq Q_2(x)$, então $Q_1(x) - Q_2(x) \neq 0$, assim, $R_2(x) - R_1(x)$ e, do Teorema 2.1, obtemos:

$$gr(\underbrace{D(x)}_{\text{divisor}}) \leq gr(R_2(x) - R_1(x)) \stackrel{(4)}{<} gr(D),$$

uma contradição. Portanto, $Q_1(x) = Q_2(x)$, logo $R_1(x) = R_2(x)$.

Levando-se em conta este teorema, vejamos então a seguir a resolução do seguinte problema.

Exemplo 5. (ITA) Um polinômio $P(x)$, dividido por $x - 1$ dá resto 3. O quociente dessa divisão é então dividido por $x - 2$, obtendo resto 2. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ será:

- a) $3x + 2$.
- b) $3x - 1$.
- c) $2x + 1$.
- d) $4 - x$.
- e) Nda.

Solução 5. Como $(x - 1)(x - 2)$ possui grau 2, o resto dessa divisão terá grau no máximo igual a 1. Assim, seja $R(x) = ax + b$ o polinômio complexo que representará o resto da divisão. Daí, temos:

$$(I) P(x) = (x - 1)Q(x) + 3$$

$$(II) Q(x) = (x - 2)Q_0(x) + 2, \text{ para algum } Q_0(x).$$

Como $Q(x)$ é único, substituindo (II) em (I), teremos:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1) [(x - 2)Q_0(x) + 2] + 3 \\ &= (x - 1)(x - 2)Q_0(x) + 2x - 2 + 3 \\ &= (x - 1)(x - 2)Q_0(x) + 2x + 1. \end{aligned}$$

Portanto, o resto procurado é o polinômio $R(x) = 2x + 1$. Logo, a alternativa C é a resposta correta.

Para determinarmos os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ estudaremos os seguintes algoritmos: Método de Descartes e Algoritmo da divisão de Euclides, e estudaremos também os casos particulares de divisão polinomial, onde será aplicado o dispositivo prático de Briot-Ruffini e o método de Horner, bem como algumas de suas aplicabilidades.

2.1.4 Método de Descartes

O método de Descartes, também conhecido como método dos coeficientes a determinar, consiste em determinar os coeficientes de $Q(x)$ e $R(x)$, através de três argumentos que são:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x);$$

$$gr(D) = gr(P) - gr(Q) \text{ e}$$

$$gr(D) - 1 \text{ é o maior valor possível para } gr(R).$$

Exemplo 6. Vamos dividir o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ por

$$D(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Solução 6. Como $P(x)$ e $D(x)$ são polinômios de 4º e 2º grau, respectivamente, temos $Q(x) = ax^2 + bx + c$. E ainda, $gr(D) - 1 = 2 - 1 = 1$. Ou seja, $R(x)$ pode ser no máximo um polinômio de 1º grau. Assim, seja $R(x) = dx + e$. Temos então:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 3x + 2)(ax^2 + bx + c) + dx + e \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 2ax^2 + 2bx + 2c + dx + e \\ &= ax^4 + (b + 3a)x^3 + (c + 3b + 2a)x^2 + (3c + 2b + d)x + (2c + e). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes da expressão obtida com os coeficientes de $P(x)$ dados no problema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b + 3a = -2 \\ c + 3b + 2a = 2 \\ 3c + 2b + d = 5 \\ 2c + e = 1 \end{array} \right.$$

Como $a = 1$, resolvendo as demais equações podemos concluir que:

$$b + 3a = -2 \implies b = -5$$

$$c + 3b + 2a = 2 \implies c = 15$$

$$3c + 2b + d = 5 \implies d = -30$$

$$2c + e = 1 \implies e = -29$$

Logo, podemos concluir que $Q(x) = x^2 - 5x + 15$ e $R(x) = -30x - 29$.

Exemplo 7. (UFPI) Se o polinômio $x^5 - 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x + 1$ for divisível pelo polinômio $x^2 - 2x + 1$, então o valor de $a + b$ é:

- a) -2
- b) 1
- c) 0
- d) 1
- e) 2

Solução 7. Sejam $P(x) = x^5 - 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x + 1$ e $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. Por hipótese, temos que $P(x)$ é divisível por $Q(x)$, o que implica dizer que o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ corresponde ao polinômio nulo. Logo, existe $D(x) = cx^3 + dx^2 + ex + f$ tal que $P(x) = D(x) \cdot Q(x)$. Utilizando o método de Descartes, temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2x + 1)(cx^3 + dx^2 + ex + f) \\ &= cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 - 2cx^4 - 2dx^3 - 2ex^2 - 2fx + cx^3 + dx^2 + ex + f \\ &= cx^5 + (d - 2c)x^4 + (e - 2d + c)x^3 + (f - 2e + d)x^2 + (-2f + e)x + f. \end{aligned}$$

Comparando termo a termo os coeficientes de $P(x)$ com os coeficientes da expressão obtida, temos agora:

$$\begin{cases} c = 1 \\ d - 2c = -2 \\ e - 2d + c = a \\ f - 2e + d = b \\ -2f + e = -2 \\ f = 1 \end{cases}$$

Como $c = 1$ e $f = 1$, temos:

$$d - 2 \cdot 1 = -2 \implies d = 0$$

$$-2 \cdot 1 + e = -2 \implies e = 0$$

$$1 - 2 \cdot 0 + 0 = b \implies b = 1$$

$$0 - 2 \cdot 0 + 1 = a \implies a = 1$$

Temos então que $a = b = 1$, temos que $a + b = 2$, concluindo assim que a letra E é a resposta procurada.

2.1.5 Algoritmo da Divisão de Euclides

Também conhecido como *método da chave*, funciona de uma forma similar à divisão de números inteiros não-negativos. Nesse algoritmo, os polinômios são dispostos da seguinte maneira:

Figura 1: Disposição do algoritmo da divisão de Euclides

$$\begin{array}{r|l} \text{DIVIDENDO} & \text{DIVISOR} \\ \text{RESTO} & \text{QUOCIENTE} \end{array}$$

Fonte: Autor

Vejamos como se realizar uma divisão por meio deste algoritmo, por meio do seguinte exemplo.

Exemplo 8. Obtenha o quociente e o resto da divisão do polinômio

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 9 \text{ por } D(x) = x - 3.$$

Solução 8. Devemos realizar os seguintes passos:

(1) Escrevemos os polinômios dividendo e o divisor em seus respectivos lugares no algoritmo, conforme já ilustrado.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 9 & x - 3 \\ \hline & \end{array}$$

(2) Divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor. O resultado é colocado no espaço do algoritmo pré-estabelecido para o quociente. Este será o primeiro termo do polinômio que representará o quociente da divisão. Após isso, somaremos o dividendo com o oposto do produto entre o termo obtido pelos termos do divisor, obedecendo aos critérios da operação de adição.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 9 & x - 3 \\ -3x^4 + 9x^3 & \hline \hline 7x^3 + 5x^2 + 7x - 9 & 3x^3 \end{array}$$

(3) Repetimos este processo para o polinômio obtido.

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 9 & x - 3 \\
 \underline{-3x^4 + 9x^3} & 3x^3 + 7x^2 \\
 7x^3 + 5x^2 + 7x - 9 &
 \end{array}$$

Note que, à medida que esse processo é realizado, um polinômio de grau menor ao anterior aparecerá no espaço destinado ao dividendo. Este processo é repetido até que o polinômio seja reduzido a um polinômio de grau inferior ao do divisor ou a um polinômio nulo. Ao final, temos:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 9 & x - 3 \\
 \underline{-3x^4 + 9x^3} & 3x^3 + 7x^2 + 26x + 85 \\
 7x^3 + 5x^2 + 7x - 9 & \\
 \underline{-7x^3 + 21x^2} & \\
 26x^2 + 7x - 9 & \\
 \underline{-26x^2 + 78x} & \\
 85x - 9 & \\
 \underline{-85x + 255} & \\
 246 &
 \end{array}$$

Logo, o algoritmo nos diz que o quociente dessa divisão é o polinômio $Q(x) = 3x^3 + 7x^2 + 26x + 85$ e o resto é o polinômio $R(x) = 246$.

Esse mesmo processo pode ser realizado utilizando-se os coeficientes separados de suas respectivas partes literais. Veja:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & -2 & 5 & 7 & -9 \\
 -3 & 9 & & & \\
 \hline
 & 7 & 5 & 7 & -9 \\
 & -7 & 21 & & \\
 \hline
 & & 26 & 7 & -9 \\
 & & -26 & 78 & \\
 \hline
 & & & 85 & -9 \\
 & & & -85 & 255 \\
 \hline
 & & & & 246
 \end{array}$$

Exemplo 9. (UFPI) O resto da divisão de $4x^3 - 2x^2 + 1$ por $x^2 + x - 1$ é:

- a) $x - 1$
- b) $8x - 5$
- c) $x - 3$
- d) $x^2 + 1$
- e) $10x - 5$

Solução 9. Aplicando o método da chave com coeficientes separados para dividir o polinômio $4x^3 - 2x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 + x - 1$, temos:

$$\begin{array}{r|rrr}
 4 & -2 & 0 & 1 \\
 -4 & -4 & 4 & \\
 \hline
 & -6 & 4 & 1 \\
 & 6 & 6 & -6 \\
 \hline
 & & 10 & -5
 \end{array}$$

Com isso, o quociente da divisão é o polinômio $4x - 6$ e o resto da divisão é o polinômio $10x - 5$. Portanto, a resposta correta é a letra *E*.

Na divisão de números inteiros, o processo das divisões sucessivas do algoritmo da

divisão de Euclides faz com que obtenhamos no final um número de valor absoluto menor que o valor absoluto do divisor. Analogamente, ao se realizar este processo com polinômios, reduzimos o dividendo a um polinômio de grau menor ao polinômio divisor ou um polinômio nulo. Embora este algoritmo possua uma correlação com o algoritmo da divisão de números inteiros, nem sempre é recomendado utilizar problemas de divisão de números inteiros como problemas correlatos que auxiliam na resolução de problemas que envolvam a operação de divisão de polinômios, uma vez que para esta operação dispomos de algoritmos mais prático, os quais faremos um estudo a seguir.

2.1.6 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Trata-se de um algoritmo prático, que consiste em determinar os coeficientes do quociente e o resto da divisão de maneira mais rápida que os métodos já estudados. Para que este algoritmo seja utilizado é necessário que tenhamos o coeficiente principal do divisor igual 1. Inicialmente, vejamos a aplicação desse algoritmo numa divisão de um polinômio por um binômio do tipo $x - a$ ($a \in \mathbb{R}$). Neste caso, possui a seguinte estrutura:

Figura 2: Disposição do dispositivo prático de Briot-Ruffini

	Coeficientes do dividendo	
Valor de a		
	Quociente	Resto

Fonte: Autor

Assim, sejam os polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e $D(x) = x - \alpha$

o dividendo e o divisor, respectivamente, de uma divisão de polinômios. Dispondo os coeficientes desses dois polinômios no algoritmo, temos:

	a_n	a_{n-1}	\cdots	a_1	a_0
α					

Feito isso, realizamos as seguintes etapas;

(1) Reescrevemos o primeiro coeficiente do dividendo no espaço destinado ao quociente.

Ele também será o coeficiente do termo principal do quociente:

	a_n	a_{n-1}	\cdots	a_1	a_0
α	— —				
	q_{n-1}				

(2) Feito isso, multiplica-se o primeiro coeficiente pelo valor de α e o colocamos alinhado verticalmente ao segundo coeficiente do dividendo, conforme mostra a figura abaixo. Após isso, somamos o segundo coeficiente do dividendo com o resultado da multiplicação recém realizada. O resultado representa o segundo coeficiente do quociente:

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
α	—	$\alpha \cdot q_{n-1}$			
	q_{n-1}	q_{n-2}			

(3) Repetimos sucessivamente este mesmo processo para encontrar todos os demais coeficientes do quociente:

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
α	—	$\alpha \cdot q_{n-1}$	\dots	$\alpha \cdot q_1$	
	q_{n-1}	q_{n-2}	\dots	q_0	

(4) Por fim, o último resultado desse processo corresponde ao resto da divisão do polinômio $P(x)$ pelo polinômio $D(x)$.

Portanto, o quociente e o resto dessa divisão serão, respectivamente, os polinômios $Q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \dots + q_1x + q_0$ e $R(x) = r$, onde $q_{n-1} = a_n$, $q_{n-2} = a_{n-1} + \alpha \cdot q_{n-1}$, \dots , $q_0 = a_1 + \alpha \cdot q_1$ e $r = a_0 + \alpha \cdot q_0$.

A seguir iremos demonstrar a validade do dispositivo de Briot-Ruffini.

Prova: Sejam os polinômios $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ e $D(x) = x - a$. O quociente $Q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_1x + q_0$ e o resto $R(x)$ é tal que $gr(R) = 0$. Pela definição de divisão de polinômios, temos:

$$\begin{aligned}
P(x) &= D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\
\iff a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 &= (x - a)(q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0) + r \\
&= q_{n-1} x^n + \dots + q_1 x^2 + q_0 x - (a \cdot q_{n-1} x^{n-1} + \dots + a \cdot q_1 x + a \cdot q_0) + r \\
&= q_{n-1} x^n + (q_{n-2} - a q_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (q_0 - a q_1) x + (-a q_0 + r).
\end{aligned}$$

Por igualdade de polinômios, temos agora:

$$\begin{aligned}
a_n &= q_{n-1} \\
a_{n-1} &= q_{n-2} - a q_{n-1} \iff q_{n-2} = a_{n-1} + a q_{n-1} \\
&\dots \\
a_1 &= q_0 - a q_1 \iff q_0 = a_1 + a q_1 \\
a_0 &= r - a q_0 \iff r = a_0 + a q_0.
\end{aligned}$$

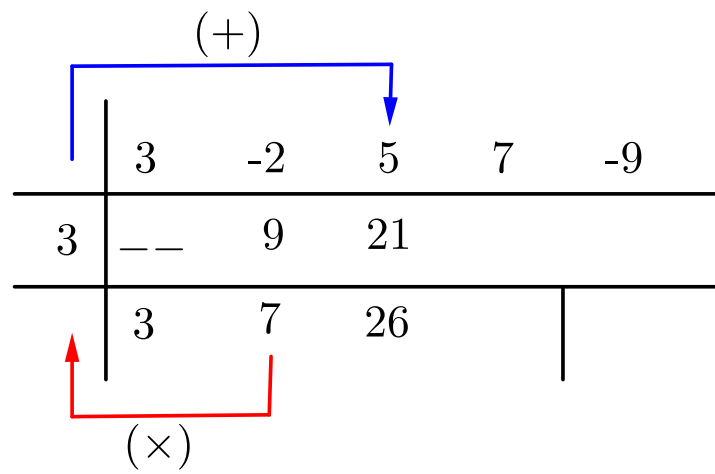
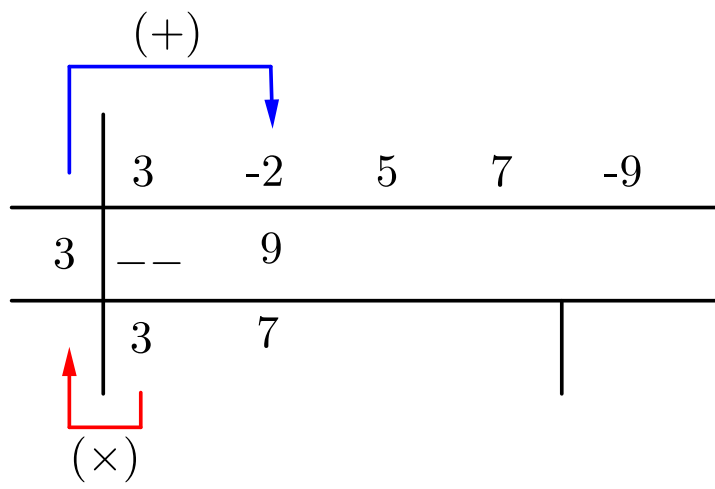
Logo, pelas igualdades obtidas acima, temos a validade do nosso algoritmo.

Vamos obter o quociente e o resto da divisão do polinômio

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 9$$

por $D(x) = x - 3$ conforme a descrição dos passos desse dispositivo.

	3	-2	5	7	-9
3	---				
3					



		(+)				
		3	-2	5	7	-9
3	--	9	21	78		
	3	7	26	85		
		(×)				

		3	-2	5	7	-9
3	---	9	21	78	255	
	3	7	26	85	246	

Com isso, chegamos a conclusão de que o quociente dessa divisão é o polinômio $Q(x) = 3x^3 + 7x^2 + 26x + 85$ e o resto é o polinômio constante $R(x) = 246$.

O dispositivo de Briot-Ruffini torna-se mais prático do que o método da chave para divisões por binômios do tipo $x - a$, pois podemos perceber que diferentemente do método da chave, o dispositivo de Briot-Ruffini exige poucos processos e menos operações. Assim, é de interesse nosso encontrarmos uma forma de generalizá-lo para as demais divisões por binômio. Para isso, considere um binômio do tipo $D(x) = ax + b$. Temos que:

$$\begin{aligned}
P(x) &= D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\
&= (ax + b)Q(x) + R(x) \\
&= a(x + b/a)Q(x) + R(x) \\
&= (x + b/a)Q(x) \cdot a + R(x).
\end{aligned}$$

Fazendo $Q_0(x) = Q(x) \cdot a$, temos que

$$P(x) = [x - (-b/a)] \cdot Q_0(x) + R(x).$$

Dessa forma, por intermédio de um divisor auxiliar $D_0 = x + b/a$, encontramos um quociente auxiliar $Q_0(x)$, que é a vezes o quociente $Q(x)$ da divisão, e o resto $R(x)$ da divisão, que não sofreu nenhuma alteração após este processo de manipulação algébrica.

Essa alteração nos permite utilizarmos o dispositivo de Briot-Ruffini para dividirmos um polinômio $P(x)$ de grau maior ou igual a 1 por qualquer binômio do tipo $ax + b$. Dessa forma, segundo Pólya (1995), utilizamos a divisão por um binômio do tipo $x - a$ como problema correlato.

Vejamos um exemplo a seguir.

Exemplo 10. Vamos dividir o polinômio $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ pelo binômio $D(x) = 2x - 4$.

Solução 10. Como o coeficiente do termo principal de $D(x)$ é igual a 2, podemos escrever utilizar $D_0 = x - 2$ como divisor auxiliar. Desta maneira, vamos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para realizarmos a divisão de $P(x)$ por $D_0(x)$. Temos então:

	3	-2	5	-7	4
2	--	6	8	26	38
	3	4	13	19	42

Com isso, temos que $Q_0 = 3x^3 + 4x^2 + 13x + 19$ e $R(x) = 42$. Como $Q_0(x) = 2 \cdot Q(x)$, temos que $Q(x) = \frac{3x^3}{2} + 2x^2 + \frac{13x}{2} + \frac{19}{2}$ e $R(x) = 42$, finalizando assim a divisão pedida.

Podemos constatar que, mesmo no caso de uma divisão de um polinômio por um binômio do tipo $ax + b$, o dispositivo de Briot-Ruffini continua sendo mais prático que o método de Descartes e o método da chave, pois como ainda aponta Dierings (2014), continua a exigir menos processos e operações aritméticas.

Vejamos no exemplo a seguir uma outra situação onde utilizaremos o dispositivo de Briot-Ruffini na resolução.

Exemplo 11. (UFPI) O resto da divisão de $kx^2 + x - 1$ por $x + 2k$ é:

- a) $2k - 1$
- b) $k - 1$
- c) $4k^2 - 4k - 1$
- d) $k^3 - k - 1$
- e) $4k^3 - 2k - 1$

Solução 11. Note que $x + 2k = x - (-2k)$. Assim, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

	k	1	-1
-2k	--	-2k ²	-2k+4k ²
	k	1-2k ²	4k ² -2k-1

Logo, temos a alternativa E como resposta.

2.1.7 Teorema do Resto

Teorema 2.3. (*Teorema do Resto*) Seja $P(x)$ um polinômio não identicamente nulo. O valor numérico de um número $a \in \mathbb{C}$ corresponde ao resto da divisão de $P(x)$ pelo binômio $x - a$.

Demonstração: Pela definição de divisão de polinômios, temos que $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$. Como o divisor é polinômio de grau 1, teremos que $R(x)$ é um polinômio constante. Assim, aplicando o valor de a em $P(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
 P(a) &= (a - a) \cdot Q(a) + R(a) \\
 &= 0 \cdot Q(a) + R(a) \\
 &= 0 + R(a).
 \end{aligned}$$

Logo, $P(a) = c$, onde $c = R(a)$. Reciprocamente, temos que o resto da divisão de $P(x)$ pelo binômio $x - a$ corresponde ao valor numérico de $P(x)$ para $x = a$, onde $a \in \mathbb{C}$.

Usando o teorema do resto como argumento, podemos utilizar os algoritmos de divisão para calcularmos valores numéricos de um polinômio para um determinado valor.

Vejamos um exemplo dessa situação, onde utilizaremos o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Exemplo 12. Seja $P(x) = 8x^7 - 25x^6 + 17x^5 - 40x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 35x + 16$, calcular $P(3)$.

Solução 12. Por definição, temos que $P(x) = (x - 3) \cdot Q(x) + R(x)$, para algum $Q(x)$. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos agora:

	8	-25	17	-40	8	4	-35	16	2
3	--	24	-3	42	-6	6	30	-15	3
	8	-1	14	2	2	10	-5	1	5

Como $R(x) = 5$, pelo teorema do resto, temos que $P(3) = 5$.

De acordo com o trabalho de Dierings (2014), constatamos que o dispositivo de Briot-Ruffini também é eficiente para se calcular valores numéricos de polinômios, pois continua exigindo que se faça menos operações aritméticas se comparado ao processo usual para se calcular valores numéricos.

Nessa perspectiva, vamos solucionar o problema proposto a seguir.

Exemplo 13. (MACKENZIE - Adaptado) Um polinômio $P(x)$ dividido por $x - 1$, deixa resto 2 e, dividido por $x + 1$, dá resto 3. Qual é o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x + 1)$?

Solução 13. Pela definição de divisão de polinômios, temos que grau de $P(x)$ maior ou igual 2, e ainda, que o grau do resto procurado terá grau no máximo igual a 1, uma vez que $(x - 1)(x + 1)$ é um polinômio de grau 2. Pelo teorema do resto, temos ainda

que $P(1) = 2$ e que $P(-1) = 3$. Daí, seja $R(x) = ax + b$ o polinômio que representa o resto da divisão procurada no problema. Com isso, segue-se que:

$$P(1) = (1 - 1)(1 + 1)Q_1(x) + a \cdot 1 + b = 2$$

$$a + b = 2.$$

$$P(-1) = (-1 - 1)(-1 + 1)Q_2(x) + a \cdot (-1) + b = 3$$

$$-a + b = 3.$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas igualdades obtidas, encontramos $b = \frac{5}{2}$ e $a = -\frac{1}{2}$. Assim, temos então que $R(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

2.1.8 Teorema de D'Alembert

Como corolário do teorema do resto, temos o teorema de D'Alembert, que nos diz que:

Teorema 2.4. *Um polinômio de variável complexa $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$.*

Demonstração: Como por hipótese $P(x)$ é divisível por $x - a$, temos por definição que se trata de uma divisão exata. Assim, o resto dessa divisão é o polinômio identicamente nulo. Pelo teorema do resto, temos que $P(a) = 0$. Reciprocamente, se a é raiz de $P(x)$, então $P(a) = 0$. Como $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$, segue-se que:

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x - a) \cdot Q(x) + R(x) \\
P(a) &= (a - a) \cdot Q(x) + R(x) = 0 \\
&= 0 \cdot Q(x) + R(x) = 0 \\
&= 0 + R(x) = 0 \\
&= R(x) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - a$.

A seguir, vejamos alguns problemas resolvidos onde podemos utilizar os teoremas do resto e de D'Alembert.

Exemplo 14. (EsSA-2008) Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^n + 5x - 30$ por $Q(x) = x - 2$ é igual a 44, então n é igual a:

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 6.

Solução 14. Pelo teorema do resto, temos que se o resto da divisão por $P(x)$ pelo binômio $Q(x) = x - 2$ é igual a 44. Então, $P(2) = 44$. Daí, temos:

$$2(2)^n + 5 \cdot 2 - 30 = 44$$

$$2^{n+1} + 10 - 30 = 44$$

$$2^{n+1} - 20 = 44$$

$$2^{n+1} = 64$$

$$2^{n+1} = 2^6$$

$$n + 1 = 6$$

$$n = 5.$$

Por tanto, temos a alternativa D como resposta correta.

Exemplo 15. (Portal da Matemática - OBMEP) Qual o valor de m para que $P(x) = 2x^3 - 3x + m$ seja divisível por $D(x) = x - 3$?

a) -45 .

b) -40 .

c) -35 .

d) -30 .

e) -25 .

Solução 15. Se $P(x)$ é divisível por $D(x)$, então o resto da divisão entre eles é o polinômio identicamente nulo. Assim, pelo teorema de D'Alembert, temos que $P(3) = 0$. Segue daí que:

	2	0	-3	m
3	--	6	18	45
	2	6	15	m+45

Daí, temos que $m + 45 = 0$. Logo, $m = -45$, resposta que se encontra na alternativa A.

Na resolução dos dois problemas pudemos explorar as duas vertentes desses dois teoremas, entretanto, na solução do primeiro problema torna-se inviável o uso do dispositivo de Briot-Ruffini, uma vez que não se conhecia o grau do dividendo, não poderíamos enumerar seus coeficientes no referido algoritmo. Vejamos a seguir um outro algoritmo prático para se efetuar a divisão de polinômios.

2.1.9 Método de Horner

Trata-se de um método prático que, em outras palavras, generaliza o método de Briot-Ruffini. Do mesmo modo que o dispositivo de Briot-Ruffini vem a ser prático para se realizar divisões de polinômios de grau maior ou igual a 1 por binômios do tipo $x - a$, o método de Horner também vem a ser prático para realizar divisões de polinômios quaisquer, salvaguardando os critérios desta operação de polinômios e o fato de o coeficiente do termo principal do polinômio divisor ser igual a 1, assim como no caso da divisão por binômios já estudado anteriormente.

Dessa forma, o método de Horner possui a seguinte disposição:

Figura 3: Disposição do método da divisão de Horner



Fonte: Autor

Quanto ao funcionamento do algoritmo, Andrade (1997, p. 15) descreve os seguintes passos:

- (1) Escrevemos na 1ª linha do diagrama os coeficientes do dividendo, seguindo a ordem decrescente das potências de x . Coeficientes nulos também devem ser considerados;
- (2) Na 1ª coluna, escrevemos os coeficientes com sinais trocados, com exceção do coeficiente unitário do seu termo principal, de cima para baixo na direção vertical, considerando a ordem decrescente das potências de x ;
- (3) Escrevemos o 1º elemento da 1ª linha e 1ª coluna na última linha da 1ª coluna. Deixando vagos os espaços correspondentes aos elementos situados abaixo da diagonal que se inicia no elemento da 1ª linha e 1ª coluna;
- (4) Os elementos da última linha são escritos da esquerda para a direita. Para cada elemento λ escrito na última linha, calculamos os produtos de k pelos elementos da 1ª coluna e distribuímos esses produtos no diagrama segundo uma diagonal iniciada na 2ª linha e coluna imediatamente à direita de λ , "descendo" para a 4ª linha e 3ª colunas à direita de λ ;

- (5) Assim que for escrita a diagonal mencionada no item anterior, somamos os elementos escritos na coluna logo à direita de k , escrevendo a soma na última linha da mesma coluna;
- (6) Repetimos (4) e (5) seguidamente, até escrevermos o elemento da última linha e última coluna do diagrama. Devem ser deixados vagos os espaços correspondentes aos elementos da 2ª e 3ª linhas situados acima da diagonal iniciada na última coluna da penúltima linha.

Como o grau do quociente é igual ao grau do dividendo menos o grau do divisor, se o dividendo possui grau m e o divisor possui grau n , temos que os $m - n + 1$ -ésimos termos da última linha serão os coeficientes do quociente, e os demais serão os coeficientes do resto, obedecendo a ordem das potências de x da esquerda para a direita.

Vejamos a seguir exemplos de divisão de polinômios aplicando este procedimento.

Exemplo 16. Dividir o polinômio $P(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 2$ por $D(x) = x^4 + 2x - 1$.

Solução 16. Seguindo os passos acima citados do algoritmo, temos:

- (1) Primeiramente, da esquerda para a direita, colocamos os coeficientes 1, 1, 3, 1, 4 e 2, respectivamente nesta ordem, no espaço do algoritmo destinado ao dividendo:

1	1	3	1	4	2	

- (2) Assim como no dispositivo de Briot - Ruffini, no método de Horner o coeficiente

líder do divisor também não participa do algoritmo. Dessa forma, colocamos de cima para baixo, os coeficientes 0, -2 e 1 alinhados verticalmente no espaço destinado ao divisor:

	1	1	3	1	4	2
0						
-2						
1						

(3) Em sequência, efetuamos todas as demais passagens do algoritmo:

	1	1	3	1	4	2
0	--					
-2	--					
1	--					
	1					

(4)

	1	1	3	1	4	2
0	--	0				
-2	--	--	-2			
1	--	--	--	1		
	1	1				

(5)

	1	1	3	1	4	2
0	--	0	0			
-2	--	--	-2	-2		
1	--	--	--	1	1	
	1	1	1			

(6)

	1	1	3	1	4	2
0	--	0	0	0	--	--
-2	--	--	-2	-2	-2	--
1	--	--	--	1	1	1
	1	1	1	0	3	3

Logo, temos como quociente e resto os polinômios $D(x) = x^2 + x + 1$ e $R(x) = 3x + 3$, respectivamente.

Exemplo 17. Use o método de Horner para realizar a divisão do polinômio

$$P(x) = 4x^7 + 6x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 18x^2 + 40x + 8$$

pelo polinômio $D(x) = 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 1$.

Solução 17. Como $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e o coeficiente do termo principal de $D(x)$ vale 2, utilizaremos o polinômio $D_0(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ para executarmos o algoritmo. Assim, temos então:

	4	6	0	2	3	18	40	8
1	--	4	10	14	14	--	--	--
1	--	--	4	10	14	14	--	--
-3	--	--	--	-12	-30	-42	-42	--
1/2	--	--	--	--	2	5	7	7
	4	10	14	14	3	-5	5	15

Como $D_0(x) = \frac{1}{2} \cdot D(x)$, temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= D_0(x) \cdot Q_0(x) + R(x) \\ &= \frac{1}{2}D(x) \cdot Q_0(x) + R(x) \\ &= D(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_0(x) + R(x). \end{aligned}$$

Note que $Q(x) = \frac{1}{2} \cdot Q_0(x)$. Logo, $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7$ e $R(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x + 15$.

Podemos perceber que com este método, é possível realizar operações de divisão de uma maneira mais prática, se compará-lo ao método de Descartes e/ou o algoritmo da divisão de Euclides, pois com passos descritos no algoritmo, não há necessidade de realizar operações de potências entre as partes literais e a quantidade de operações aritméticas é bem menor, se comparada a quantidade de operações que seriam realizadas caso essas divisões fossem feitas através de um desses outros dois métodos.

2.2 Equações Algébricas

Definição 2.9. *Chamamos de equação algébrica toda equação do tipo $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ de variável complexa.*

Vimos no capítulo anterior que a raiz de um polinômio $P(x)$ é todo e qualquer valor para os quais se tem $P(x) = 0$. Assim, podemos dizer que se um número complexo k é uma raiz de $P(x)$, dizemos então que k é uma solução da equação $P(x) = 0$, ou apenas dizemos que k é uma raiz da equação algébrica. Para um estudo mais aprofundado a respeito das equações algébricas, iniciaremos utilizando o seguinte resultado:

Teorema 2.5. *Toda equação algébrica possui pelo menos uma raiz complexa.*

Este resultado que é conhecido como **Teorema Fundamental da Álgebra**, foi demonstrado por Gauss (1777 - 1855) no ano de 1798. A nível de Ensino Médio, não estudamos a demonstração desse resultado. Portanto, realizaremos os nossos estudos apenas utilizando a sua validade, para construirmos as demonstrações dos próximos resultados a serem expostos neste capítulo. Vejamos as demonstrações dos teoremas a seguir, os quais possuem como lema o Teorema Fundamental da Álgebra, onde relacionamos as raízes complexas de um uma equação algébrica com a sua forma fatorada. A respeito do grau de uma equação algébrica, temos o teorema a seguir.

Teorema 2.6. *Seja $P(x) = 0$ uma equação algébrica, onde $P(x) \neq 0$ com $\text{gr}[P(x)] = n$. Então, a equação $P(x) = 0$ possui no máximo n raízes complexas.*

Demonstração: Sejam a_1, a_2, \dots, a_k raízes distintas do polinômio $P(x)$. Se a_1 é uma raiz de $P(x)$, pelo teorema de D'Alembert, temos que $P(x) = (x - a_1)Q_1(x)$, para algum $Q_1(x)$. Como a_2 também é uma raiz de $P(x)$ e $a_2 \neq a_1$, para que $P(a_2) = 0$, devemos ter que $Q_1(a_2) = 0$. Aplicando novamente o teorema de D'Alembert, teremos $Q_1(x) = (x - a_2)Q_2(x)$, para algum $Q_2(x)$. Daí, temos $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)Q_2(x)$. Repetindo este processo para todas as demais raízes, teremos que

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_k)Q_k(x),$$

de tal modo que $\text{gr}[Q_k(x)] \geq 0$, pela definição de divisão de polinômios. Daí, como $\text{gr}[P(x)] = n$ por hipótese, temos agora:

$$\text{gr}[P(x)] = k + \text{gr}[Q_k(x)] \iff n = k + \text{gr}[Q_k(x)].$$

Logo, como $\text{gr}[Q_k(x)] \geq 0$, temos que:

se $\text{gr}[Q_k(x)] = 0$, então $n = k$;

se $\text{gr}[Q_k(x)] > 0$, então $k < n$.

Portanto, $k \leq n$.

Teorema 2.7. *Também conhecido como **Teorema da Decomposição**, este teorema nos diz que todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ pode ser fatorado na forma $P(x) = c(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$, onde c é um número complexo e a_1, a_2, \dots, a_n são as raízes complexas do polinômio $P(x)$, não necessariamente distintas. Além disso, essa fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração: Faremos a demonstração em duas partes.

(1) Pelo teorema fundamental da Álgebra, se $\text{gr}[P(x)] = n$, então existe $a_1 \in \mathbb{C}$ tal que $P(a_1) = 0$. Pelo teorema de D'Alembert, teremos $P(x) = (x - a_1)Q_1(x)$, para algum $Q_1(x)$. Note que $\text{gr}[Q_1(x)] = n - 1$. Logo, pelo teorema fundamental da Álgebra, temos que $Q_1(x)$ possui pelo menos uma raiz complexa. Daí, seja $a_2 \in \mathbb{C}$ uma raiz de $Q_1(x)$. Ainda pelo teorema de D'Alembert, teremos $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)Q_2(x)$, para algum $Q_2(x)$. Procedendo desta mesma forma por n vezes, iremos ter

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)Q_n(x).$$

Como $Q_n(x)$ possui grau 0, fazendo $c = Q_n(x)$, temos agora

$$P(x) = c(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n).$$

(2) Seja $P(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$. Suponhamos que $P(x)$ também possa ser escrito na forma fatorada sob a forma $P(x) = c'(x - b_1)(x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$, com $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Então,

$$c(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) = c'(x - b_1)(x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n).$$

O termo principal do primeiro membro da igualdade é igual ao termo principal do segundo membro desta mesma igualdade. Logo, concluímos que $c = c'$. Agora, aplicando a raiz a_1 em ambos os membros da igualdade, temos que:

$$\begin{aligned} c(a_1 - a_1)(a_1 - a_2) \cdot \dots \cdot (a_1 - a_n) &= c'(a_1 - b_1)(a_1 - b_2) \cdot \dots \cdot (a_1 - b_n) \\ 0 &= c'(a_1 - b_2)(a_1 - b_2) \cdot \dots \cdot (a_1 - b_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Note que, como $c'(a_1 - b_1)(a_1 - b_2) \cdot \dots \cdot (a_1 - b_n) = 0$, devemos ter que a_1 deve ser igual a um dos números b_1, b_2, \dots, b_n . Sem perda de generalidade, vamos supor que $a_1 = b_1$. Com isso, iremos ter que:

$$c(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) = c(x - a_1)(x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$$

$$\iff c(x - a_1) \cdot [(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) - (x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n)] = 0.$$

A igualdade nos diz que para todo $x \in \mathbb{C}$, ela sempre será igual a 0. Tomemos em particular o caso $x \neq a_1$. Neste caso, $(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) - (x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$ deverá ser igual a 0, para infinitos valores de x . Em outras palavras,

$$(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) - (x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$$

possui infinitas raízes, ou seja, é o polinômio identicamente nulo. Daí, $(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) = (x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$.

Seguindo-se dessa mesma forma, se atribuírmos algum dos valores a_2, \dots, a_n , à igualdade obtida, eliminaríamos um dos fatores $(x - b_2) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$, pois daí teríamos $a_i = b_j$, para algum índice i e algum índice j . Portanto, as decomposições serão idênticas.

Outro teorema importante a respeito das equações algébricas é o **Teorema das raízes racionais**, cujo seu resultado nos será de utilidade no processo de resolução de equações algébricas com coeficientes inteiros. Enunciá-lo-emos a seguir.

Teorema 2.8. (Teorema das Raízes Racionais) *Seja*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

um polinômio com coeficientes inteiros. Se a fração irredutível $\frac{a}{b}$, é raiz da equação $P(x) = 0$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, então a é divisor de a_0 e b é divisor de a_n .

Demonstração: Aplicando $\frac{a}{b}$ ao polinômio $P(x)$, temos:

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = a_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{a}{b}\right) + a_0.$$

Multiplicando a expressão acima por $\frac{1}{b^n}$, temos agora:

$$\begin{aligned} a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \dots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n &= 0 \\ \iff a_n a^n &= -(a_{n-1} a^{n-1} b + \dots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n) \\ \iff a_n a^n &= b[-(a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a b^{n-2} + a_0 b^{n-1})] \\ \iff a_n a^n &= b \cdot k_1. \end{aligned}$$

Onde $k_1 = -(a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a b^{n-2} + a_0 b^{n-1})$. Note que $a_n a^n$ é um múltiplo de b e com isso, temos que $b \mid a_n a^n$. Como por hipótese a e b são primos entre si, temos que $b \nmid a^n$. Logo, $b \mid a_n$. Como $a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \dots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n = 0$, temos ainda que:

$$\begin{aligned} a_0 b^n &= -(a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \dots + a_1 a b^{n-1}) \\ &= a[-(a_n a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-1} b + \dots + a_1 b^{n-1})] \\ &= a \cdot k_2. \end{aligned}$$

Onde $k_2 = -(a_n a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-1} b + \dots + a_1 b^{n-1})$. Como por hipótese a e b são primos entre si, temos $a \nmid b^n$. Logo, $a \mid a_0$ encerrando assim a nossa demonstração.

Utilizando os resultados construídos nas demonstrações desses teoremas, iremos resolver o seguinte exemplo.

Exemplo 18. (PROFMAT - ENQ 2016.1): Encontre todas as raízes do polinômio $P(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3$.

Solução 18. Encontrar as raízes de $P(x)$ significa encontrar as soluções da equação $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3 = 0$. Assim, pelo teorema anterior, temos que as possíveis raízes racionais da equação serão $-1, 1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -3$ e 3 . Calculando os valores numéricos desses números, constatamos que $P(-1) = 0$ e $P(\frac{1}{2}) = 0$.

Logo, pelo teorema da decomposição, teremos;

	2	2	-7	-3	3
-1	--	-2	1	6	-3
	2	-1	-6	3	0

Temos que $P(x) = (x + 1)(2x^3 - x^2 - 6x + 3)$.

	2	-1	-6	3
1/2	--	1	0	-3
	2	0	-6	0

Temos agora $P(x) = (x + 1)(x - \frac{1}{2})(2x^2 - 6)$. As outras duas raízes procuradas são as soluções da equação $2x^2 - 6 = 0$. Daí, temos então que:

$$\begin{aligned}
 & 2x^2 - 6 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 = 6 \\
 \Leftrightarrow & x^2 = 3 \\
 \Leftrightarrow & x = \pm\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Portanto, as raízes de $P(x)$ são -1 , $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

Um outro teorema de relevância quando estamos estudando as raízes de uma equação algébrica de coeficientes reais, é o **Teorema das raízes conjugadas**, que diz respeito às raízes complexas dessas equações. Vejamos.

Teorema 2.9. *Teorema das raízes conjugadas: Seja*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

uma equação algébrica de coeficientes reais. Se um número complexo z é raiz dessa equação, então o seu conjugado \bar{z} também é raiz da mesma equação.

Demonstração: Consideremos o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

e sendo \bar{z} o conjugado do número complexo z , utilizando as propriedades dos números complexos, temos:

$$\begin{aligned} P(z) &= 0 \\ \iff a z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 &= 0 \\ \iff \overline{a z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} &= \bar{0} \\ \iff \bar{a}_n \cdot \bar{z}^n + \bar{a}_{n-1} \cdot \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \cdot \bar{z} + \bar{a}_0 &= 0 \\ \iff a_n \cdot \bar{z}^n + a_{n-1} \cdot \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \bar{z} + a_0 &= 0 \\ \iff a_n \cdot \bar{z}^n + a_{n-1} \cdot \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \bar{z} + a_0 &= 0 \\ \iff P(\bar{z}) &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que \bar{z} também é raiz da equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Todos os teoremas referentes às equações algébricas mencionados e/ou demonstrados aqui são ferramentas importantes para encontrarmos as soluções de exercícios que têm a resolução de uma equação algébrica como sua principal problemática.

2.2.1 Relações de Girard

A partir do teorema da decomposição, podemos estabelecer relações entre as raízes de uma equação algébrica e os seus coeficientes. Estas relações são conhecidas como as Relações de Girard. Utilizando a definição de igualdade de polinômios, vejamos como essas relações são estabelecidas para equações algébricas de grau maior ou igual a 2.

(1) Sejam r_1 e r_2 as raízes de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Pelo teorema da decomposição, temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2$$

Comparando membro a membro os termos da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Interpretando esses resultados, temos que a soma das duas raízes da equação é igual $-\frac{b}{a}$ e o produto das duas raízes da equação é igual a $\frac{c}{a}$.

(2) Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes de uma equação do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Pelo mesmo argumento do item (1), temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

\iff

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

\iff

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Comparando membro a membro os termos da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 &= \frac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

(3) Agora, vejamos o que acontece com uma equação do tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, considerando r_1, r_2, r_3 e r_4 suas raízes. Temos então:

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) \\ \iff x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} &= (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) \\ \iff x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} &= x^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 + (r_1r_2 + r_1r_3 + \dots + r_3r_4)x^2 \\ &\quad - (r_1r_2r_3 + \dots + r_2r_3r_4)x + (r_1r_2r_3r_4) \end{aligned}$$

Comparando membro a membro os termos da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \dots + r_3r_4 &= \frac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + \dots + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 &= -\frac{d}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 &= \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

Observando o que ocorre nesses três casos, é possível estabelecermos as relações para uma equação algébrica de grau n . Assim, considerando uma equação algébrica $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ e r_1, r_2, \dots, r_n suas raízes, temos as seguintes

relações:

$$\begin{aligned}r_1 + r_2 + \cdots + r_n &= -(a_{n-1}/a_n) \\r_1r_2 + \cdots + r_{n-1}r_n &= (a_{n-2}/a_n) \\r_1r_2r_3 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n &= -(a_{n-3}/a_n) \\&\dots \\r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n &= (-1)^n(a_0/a_n).\end{aligned}$$

Note que a última relação independe da incógnita x . Por esse motivo,

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n(a_0/a_n)$$

quando a equação algébrica possui grau par e $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots \cdot r_n = -(a_0/a_n)$ quando a equação algébrica possui grau ímpar, uma que o sinal está condicionado aos sinais das raízes da equação.

Vejamos a seguir um exemplo onde podemos aplicar as relações de Girard.

Exemplo 19. (PAPMEM) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

Calcule:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Solução 19. Pelas relações de Girard já estabelecidas, temos que:

- $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$
- $x_1x_2x_3 = 2$.

A partir daí, temos agora:

a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} &= \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} \\ &= \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

b) Primeiramente, note que $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 4^2 = 16$. Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ 16 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot 5 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 10 &= 16 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 6.\end{aligned}$$

As relações de Girard possuem eficiência em problemas que relacionam coeficientes de uma equação algébrica com suas raízes. No entanto, não se constituem como algoritmos para a obtenção de raízes de uma equação algébrica, a menos que alguma informação sobre uma ou mais raízes sejam fornecidas. Dessa forma, além dos teoremas até aqui abordados, é do nosso interesse fazermos uma abordagem a respeito de algoritmos para obtenção das raízes de uma equação algébrica, onde é possível a esses valores através de expressões fechadas que representam teoremas e/ou procedimentos matemáticos de resolução para equações.

2.2.2 Fórmulas Resolutivas para Equações Algébricas no Ensino Básico

O teorema fundamental da Álgebra nos garante que toda equação algébrica possui ao menos uma raiz complexa, independentemente do seu grau. Com isso, iniciou-se a busca por algoritmos que nos permitam chegar aos valores dessas raízes, através de uma expressão fechada, onde muitas vezes se atribui os valores fornecidos ou que estejam relacionados aos coeficientes da equação.

No caso das equações algébricas do 1º grau, se temos $ax + b = 0$, então $x = -\frac{b}{a}$. Entretanto, à medida que se eleva o grau de uma equação algébrica, maior se torna o grau de dificuldade na elaboração de um método capaz de fornecer essas raízes. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), o estudo da fórmula resolutive da equação polinomial do 2º grau e suas aplicações é feito tanto a nível de Ensino Fundamental quanto a nível de Ensino Médio. Fórmula esta que é obtida através do processo de completamento de quadrados.

Vejamos então a sua demonstração.

2.2.3 A fórmula resolutive da equação polinomial do 2º grau

Demonstração: Seja $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação polinomial do 2º grau. Temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Adicionando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros da igualdade obtida, temos;

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemplo 20. (Lima *et al.* [15]) Duas torneiras juntas enchem um tanque em 12 horas. Uma delas sozinha levaria 10 horas mais do que a outra para enchê-lo. Quantas horas leva cada uma das torneiras para encher esse tanque?

Solução 20. Uma das torneiras enche o tanque em x horas e a outra em $x + 10$ horas. Em uma hora as duas torneiras juntas enchem $\frac{1}{12}$ do tanque, sendo $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x+10}$, respectivamente, as frações do volume do tanque que representam a contribuição de cada uma nesse período. Logo, temos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x^2 - 14x - 120 = 0.$$

Agora, aplicando a fórmula resolvente da equação polinomial do 2º grau, temos então:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{2} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{676}}{2} \\ &= \frac{14 \pm 26}{2}. \end{aligned}$$

Logo, temos 20 e -6 como raízes da equação. Como x não pode ser negativo, temos que $x = 20$. Portanto, uma das torneiras enche o tanque em 20 horas e a outra em 30 horas.

Com a fórmula resolutive das equações polinomiais do 2º grau podemos resumir a quantidade de passagens para se chegar aos valores das raízes, sintetizando todas as passagens necessárias numa única expressão fechada. No Ensino Fundamental estudamos as equações polinomiais de 2º grau na variável real. Assim, quando tínhamos o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, dizia-se que a equação não possuía soluções, uma vez que no conjunto dos números reais não existe raiz quadrada para números negativos. No entanto, o teorema fundamental da Álgebra nos garante que todas as equações algébricas possuem ao menos uma raiz complexa. Assim, considerando x_1 e x_2 as raízes de uma equação polinomial do 2º grau, pelo teorema fundamental da Álgebra, temos agora que $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Esta fórmula resolutive nos permite chegar aos valores das raízes aplicando diretamente os valores dos coeficientes da equação fornecidos através dos dados do problema. Mas, por vezes, há necessidade de se utilizar uma *incógnita auxiliar* num dado problema, para que então seja aplicada a fórmula resolutive em questão. Faremos uma abordagem sobre do uso de incógnitas auxiliares no próximo capítulo. Esse procedimento é largamente utilizado para se solucionar, por exemplo, *equações biquadradas*.

2.2.4 Equações Biquadradas

Definição 2.10. Chamamos de equação biquadrada toda equação polinomial do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com a, b e c reais. Trata-se de uma equação algébrica de 4º grau, onde as partes literais possuem coeficientes pares. Dessa maneira, ao fazermos uso de uma incógnita auxiliar, teremos uma equação do 2º grau, cujo processo de resolução já

nos é conhecido.

Vejam os a resolução do seguinte problema a respeito de equações biquadradas.

Exemplo 21. (ETAM) Um aluno determinou corretamente as raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 da equação biquadrada $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$. Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, o produto $x_3 \cdot x_4$ é igual a:

- a) 4.
- b) 3.
- c) 2.
- d) 1.

Solução 21. Primeiramente, note que $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0 \iff 4(x^2)^2 - 17x^2 + 4 = 0$. Substituindo x^2 pela incógnita auxiliar y , temos a equação $4y^2 - 17y + 4 = 0$. Daí, pela fórmula resolvente da equação polinomial do 2º grau, temos então;

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} \\ &= \frac{17 \pm 15}{8}. \end{aligned}$$

Temos que $y = 4$ ou $y = \frac{1}{4}$. Daí, temos duas situações:

Se $y = 4$, então $x^2 = 4$, o que implica que $x = \pm 2$;

Se $y = \frac{1}{4}$, então $x^2 = \frac{1}{4}$, o que implica que $x = \pm \frac{1}{2}$.

Como x_3 e x_4 representam as duas maiores raízes da equação biquadrada, temos então que $x_3 \cdot x_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, resposta que se encontra na alternativa *d*.

Com os tópicos trabalhados ao longo dessa abordagem teórica acerca de polinômios e equações algébricas, bem como também os exemplos onde se podem ser empregados

cada um deles, é possível se explorar mais a fundo a resolução de problemas inerentes a esses dois conteúdos, onde dentro desse contexto, analisaremos o papel que cada um deles exercerá dentro do método de resolução de problemas de Pólya, os quais faremos um estudo no próximo capítulo.

3 Proposta Metodológica do Trabalho

A metodologia deste trabalho consistiu numa pesquisa qualitativa de natureza bibliográfica, onde consultamos as obras de Hefez ([12], 2018), Lima *et al* ([13], 2006) e Lima ([14], 2013), que usamos como principais referências ao tratarmos de Polinômios e Equações Algébricas. Visitamos as obras de Pólya ([22], 1995) e Tao ([25], 2013), que tratam do Método de Pólya e da Resolução de Problemas matemáticos. Também foram realizadas consultas a documentos norteadores do currículo escolar de Matemática no Ensino Médio brasileiro, como os PCN (BRASIL, 1999) e a BNCC (BRASIL, 2017). Nossa proposta consiste em apresentar uma abordagem voltada a resolver problemas que envolvam os polinômios e equações algébricas de variável complexa, tendo como referência o método de Pólya para resolução de problemas.

A abordagem teórica tratada neste trabalho justifica-se, segundo a BNCC (BRASIL, 2017) como a construção de argumentos para cada raciocínio utilizado nas resoluções. Por essa razão, para um bom entendimento das resoluções, é necessário que o leitor tenha antes de tudo, os conceitos básicos destes dois conteúdos, que neste trabalho foram explorados no capítulo 2. Assim, o leitor terá à mão as ferramentas as quais serão utilizadas em problemas que envolvam esses dois conteúdos, criando assim, uma interligação entre a teoria e a prática. Como generaliza Oliveira ([21], 2013), onde diz que cada etapa e atividades a serem trabalhadas de forma integrada, visam potencializar o Ensino-Aprendizagem do tema a ser abordado.

3.1 Resolução de problemas na Matemática e o método de Pólya

Para Dante (2002) *apud* Silva (2018), um problema matemático é uma situação ou um questionamento que requer a descoberta de fatos matemáticos e/ou a demonstração de um resultado matemático. A nível de currículo escolar, a BNCC(BRASIL, 2017) e os PCN (BRASIL, 1999) coadunam com a ideia de que um problema matemático trata-se de uma situação ou questionamento levantado o qual a priori não se conhece a sua solução, mas com base nos conhecimentos matemáticos, é possível que sua solução seja construída. Dentro dessa perspectiva, Pólya (1995) enfatiza a importância de uma heurística que se constituirá como um roteiro estratégico ao qual devemos seguir para que se possa resolver algum problema matemático. Antes da elaboração deste roteiro, além de um conhecimento prévio do conteúdo, devemos conhecer a natureza do problema em questão. Se o mesmo é um *problema de determinação* ou um *problema de demonstração*.

Para Pólya (1995), um problema de determinação é caracterizado por ser um problema onde se deseja chegar a um determinado valor específico. Onde, com base nos dados fornecidos no problema podemos chegar, através de conhecimentos já adquiridos, a um determinado valor ou valores, que são pedidos no problema. Já um problema de demonstração caracteriza-se por ser um problema que, com base em resultados já demonstrados, devemos demonstrar outro resultado que nos é proposto no seu enunciado. É importante conhecermos a natureza de um problema matemático antes de traçarmos qualquer abordagem em relação à sua resolução, pois segundo Tao (2013, p. 2 e 4)

O conhecimento do tipo de problema é importante pois determina a abordagem básica. Nos problemas do tipo mostre que ... ou calcule..., os dados nos são fornecidos e o objetivo é deduzir deles alguma afirmação ou calcular alguma expressão; um problema deste tipo é em geral mais fácil do que um dos outros dois, pois há um objetivo claramente à vista para o qual podemos dirigir esforços. Questões do tipo encontre... funcionam por tentativa e erro; em geral há um primeiro palpite que quase funciona, e depois ajustamo-lo um pouco para que fique mais correto; ou então modificamos os requisitos a que o objeto a encontrar deve obedecer, de modo que eles sejam mais fáceis de se satisfazer. Os problemas do tipo existe ou não... são em regra os mais difíceis, pois primeiro temos que decidir se um certo objeto existe ou não, e depois ou fornecer uma prova ou um contra-exemplo.

Dessa forma, conhecermos o tipo de problema que nos é proposto nos permite antes de tudo, escolhermos a melhor estratégia para solucionarmos, pois:

[...] Tal como a estratégia de entender os dados, a de entender o objetivo ajuda a focar a atenção em quais as melhores armas a se usar. Conhecer o objetivo nos ajuda a estabelecer metas parciais que, como sabermos, nos aproxima da resolução do problema.(TAO 2013, p. 4).

Nos casos onde temos problemas de determinação, o(s) valor(es) procurado(s) é (são) considerado(s) a(s) *incógnita(s)* do nosso problema. Assim, antes de resolver um problema de determinação, é importante que se faça a seguinte pergunta: *Qual é a incógnita?* É importante que se faça esta observação, pois na grande maioria das vezes, é comum acreditar-se que a incógnita de um problema constitui uma letra específica numa equação. Essa confusão acaba na grande maioria das vezes, nos atrapalhando, pois acaba por tirar nossa atenção do foco que o problema está nos sugerindo. Devemos considerar também o uso de *incógnitas auxiliares*, que correspondem a algum valor ou elemento ligado ao dado problema, o qual nos permitirá chegar ao resultado da incógnita

inicial. Com relação a importância do uso de incógnitas auxiliares na resolução de problemas, Pólya (1995, p. 43) nos diz que:

Primeiro, a nova incógnita deve ser acessível, isto é, mais fácil de obter, a partir dos dados, do que a incógnita original. Segundo, a nova incógnita deve ser útil, isto é, deve ser, quando encontrada, capaz de prestar algum serviço efetivo na procura da incógnita original. Em suma, a nova incógnita deve ser uma espécie de intermediário. Uma pedra no meio de um riacho está mais próxima de mim do que a outra margem, a qual desejo chegar e, quando chegar à pedra, ela me terá auxiliado a alcançar a margem oposta.

Observe o problema a seguir, que trata das relações de Girard.

Problema: Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + 20x^2 - 8x - 12 = 0$, determinar o valor da soma $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$.

Com base nessa perspectiva, trata-se de um problema de determinação onde a incógnita é o valor da soma $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ e não necessariamente os valores α, β e γ para os quais a equação é verdadeira. Certamente, encontrar os valores de α, β e γ nos faria chegar ao valor da expressão $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$. Neste caso, diríamos que α, β e γ seriam incógnitas auxiliares na resolução de problemas. No entanto, o processo de obtenção dessas raízes tornará a solução do problema mais trabalhosa, uma vez que com as relações de Girard podemos chegar de forma mais prática ao valor que nos é pedido.

Por outro lado, há ocasiões onde não possuímos um resultado já conhecido, que nos possibilite a chegar ao resultado que é procurado no problema sugerido. Em casos como esses, o uso de um problema correlato poderá nos viabilizar uma estratégia alternativa para assim chegarmos ao resultado ao qual no problema é sugerido. Segundo Pólya (1995, p. 39) [...] *a diferença entre um problema fácil e outro difícil pode estar em conhecer-se ou não um outro problema já anteriormente resolvido, que tenha a mesma*

incógnita.

Ainda com relação ao uso de problemas correlatos, Pólya (1995, p. 6) nos diz ainda que:

[...] sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa idéia se pouco conhecemos do e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa idéia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma idéia boa sem lembrar alguns fatos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *Conhece um problema correlato?*

Dessa maneira, com relação ao problema enunciado acima, uma vez que não se conheça as relações de Girard, obter as raízes da equação para então encontrarmos o valor da soma pedida, poderia se tornar um plano razoável.

Na resolução de problemas matemáticos, devemos nos ater a determinada condição (ou condições) imposta(s) no seu enunciado. Esta condição por vezes poderá ser uma determinada propriedade matemática ou mesmo uma imposição, ao qual apenas algumas das possíveis soluções do problema em questão venham a atender. A essa(s) condição(ões) específica(s) Pólya (1995) denomina de *condicionante*. Vejamos um exemplo no problema a seguir.

Problema: Sendo dados os polinômios $P(x) = x$, $Q(x) = 50x + 1, 4x^2 - 4x^3$ e $R(x) = 2x^3 - 8, 5x^2 + 5x - 7$, obtenha os números reais a e b tais que $R(x) = a \cdot P(x) + b \cdot Q(x)$.

Neste problema, podemos notar que existe uma condição que deve ser cumprida, que seria a igualdade $R(x) = a \cdot P(x) + b \cdot Q(x)$. A solução deste problema são os números reais que satisfazem esta igualdade, tornando-a verdadeira. Assim, a igualdade $R(x) = a \cdot P(x) + b \cdot Q(x)$ é a condicionante do nosso problema.

Nos casos em que temos problemas de demonstração, partimos de um fato que já se é conhecida a sua validade, que pode ser *hipótese* para então demonstrarmos a validade de outro fato ao qual chamamos de *tese*. Por vezes nossa hipótese pode ser um teorema auxiliar por nós já conhecido, ao qual nos referimos como lema. Com relação ao uso de teoremas auxiliares como suporte, Fossa (2009, p. 114) nos fala que:

[...] quando um matemático consegue demonstrar uma proposição, ele não a guarda como troféu, mas está sempre disposto a usá-la para demonstrar outras proposições. Desta maneira, os teoremas de uma teoria matemática apresentam uma relação de dependência entre si. Cada teorema é uma consequência lógica de vários teoremas anteriores. Mas, por outro lado, podemos usar os nossos teoremas anteriormente demonstrados, somente quando eles são aplicáveis à nova proposição a ser demonstrada.

Diante de um problema de demonstração, é preciso que se saiba, antes de solucioná-lo, qual o procedimento mais adequado a ser adotado. Coadunando com esse ponto de vista, De Moraes Filho (2012, p. 217) nos afirma que:

[...] as estratégias apresentadas são de caráter geral, não são normas fixas ou rígidas, e, claro, funcionam com mais eficácia para aqueles que conhecem a teoria matemática envolvida no resultado a ser demonstrado [...] Mais uma vez, o tipo de atitude e de procedimento a serem tomados em uma demonstração matemática dependem de cada caso, da complexidade do tema, da pessoa que deseja fazer a demonstração, de seu conhecimento adquirido ao longo dos anos, de sua experiência e inclinações pessoais.

Problemas do tipo *se ..., então...* são problemas onde, com base nas informações fornecidas, demonstramos que a nossa hipótese implica na nossa tese. Há, porém

problemas que envolvem propriedades ou a validade de um fato envolvendo números naturais, que por vezes utilizamos como caminho para nossa solução o *Princípio da Indução Finita*, onde segundo Hefez ([11], 2009), se uma determinada propriedade p dos números naturais é de tal modo que:

(I) Se p é verdadeira para $n = 1$;

(II) Se para todo n natural em que p é verdadeira, p também é verdadeira para $n + 1$, então p é verdadeira para todo n natural.

Numa demonstração por indução, a afirmação p a ser demonstrada é chamada de *hipótese de indução*, pois durante a demonstração a utilizamos para demonstrar que sua validade para um n implica na validade para $n + 1$, com n natural.

Há também os problemas de demonstração onde por vezes utilizamos a *redução a um absurdo*, onde nega-se a tese do problema e mostramos que essa negação implica na contrariedade da nossa hipótese, cuja validade já é conhecida, ou num axioma matemático.

Após serem feitas estas considerações, é necessário se traçar um *plano* de resolução para enfim, encontrarmos a solução pedida num problema matemático sugerido. É importante enfatizar que, para se solucionar um problema matemático a respeito de um determinado tema, faz-se necessário um conhecimento prévio deste tema. No caso de problemas que tratam dos polinômios e equações algébricas, os algoritmos operatórios e os teoremas associados a esses dois temas são as nossas principais ferramentas para que possamos chegar à solução de um problema proposto.

Pólya (1995) ressalta ainda que, em eventuais dificuldades na resolução de um problema, será necessário fazermos uma *revisão* a respeito da temática ao qual o nosso problema está associado. Feitas estas considerações, estaremos aptos à elaboração e

execução de um plano de resolução para um problema proposto. Durante a execução do plano, é importante que se verifique cada passo. Cada passagem durante a resolução de um problema deve ser devidamente fundamentada dentro do conteúdo inerente ao problema em questão levantado. De fato, ao se verificar a validade de cada passagem, poderemos constatar se o plano que fora previamente estabelecido para a nossa resolução é ou não um bom plano para solucionarmos o problema levantado, evitando desse modo dificuldades futuras.

Por fim, Pólya (1995) ressalta que após a execução do nosso plano, ao se solucionar um problema proposto, devemos examinar a solução obtida. Ao percorrer o caminho traçado para se chegar a solução e solução encontrada, o conhecimento obtido poderá nos possibilitar a ver se seria possível estabelecer um plano melhor ou, um caminho mais rápido para se chegar à nossa resposta e com isso, poder utilizar o nosso plano ou nosso resultado obtido na solução de um outro problema que por ventura venha a ser levantado. Em outras palavras, segundo Oliveira ([19] 2012), uma verificação final do plano estabelecido e do resultado obtido, poderá abrir caminho para solucionarmos outros problemas, tendo um problema recém resolvido como um problema correlato.

3.2 As etapas do Método de Pólya

Com isso, ficam assim determinados os passos para a resolução de problemas, segundo o método de Pólya:

1º passo: Compreensão do problema. Nesta etapa, é preciso compreender o problema. Devemos conhecer sua natureza, se o mesmo trata-se de um problema de demonstração ou de determinação. Feito isso, com base nas informações fornecidas no problema, devemos procurar responder as seguintes perguntas: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese?*

Qual é a conclusão?

2º passo: Estabelecimento de um plano.

Nesta etapa, devemos encontrar uma conexão entre os dados fornecidos e a incógnita. Para isso, é importante procurar responder as seguintes perguntas: *Conhece um problema correlato? Eis um problema correlato e já resolvido. É possível utilizá-lo?* Após respondermos as perguntas levantadas nesta etapa e na etapa anterior, podemos estabelecer um plano de execução para a resolução do nosso problema.

3º passo: Execução do plano. Nesta etapa executamos o plano estabelecido. É importante que se verifique a validade de cada passagem realizada durante a execução.

4º passo: Retrospecto. Nesta etapa verificamos a solução obtida. Para isso, as seguintes perguntas são aqui levantadas: *É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?*

É importante destacar que, no decorrer de cada passagem, não necessariamente deveremos buscar as respostas para todas as perguntas propostas, se por ventura a resposta de pelo menos uma delas for o suficiente para que consigamos chegar ao nosso objetivo. Tao (2013), salienta que nem todos os problemas matemáticos possuem solução que se enquadram claramente dentro do método de Pólya, mas os questionamentos por ele sugerido, nos possibilitará traçarmos um objetivo ao qual se deva alcançar. Nos fala ainda que ao tentarmos forçar um problema até que o mesmo se quebre, podemos, ao encontrarmos o lugar onde o mesmo quebrou, nos permitirá encontrar suas principais dificuldades, quais estratégias são mais promissoras e quais as mais passíveis de falha.

4 Sequência de Problemas

Neste capítulo, apresentamos uma sequência de problemas, os quais empregaremos as definições, os algoritmos e os teoremas até aqui estudados. Apresentaremos cada etapa das soluções dentro do método de Pólya, empregando também a estratégia de resolução mais pertinente conforme a natureza do problema apresentado. Foram escolhidas questões dentro da temática deste trabalho, que já foram abordadas em vestibulares de instituições brasileiras de Ensino Superior, bem como também questões encontradas no acervo de livros do PROFMAT e em listas de problemas trabalhados no Programa Nacional de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), promovido semestralmente pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

A sequência de problemas e soluções aqui colocados foi escolhida de tal modo que, segundo Nacarato (2018), venha a trazer uma proposta de estudo com o intuito de priorizar o raciocínio algébrico com relação à temática deste trabalho, em detrimento do uso mecânico de técnicas meramente reprodutivas.

Problema 1. (OLIVEIRA [20]) O produto $(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{25})$ é um polinômio na variável x . Determinar o coeficiente de x^{50} nesse produto.

Resolução 1.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante?

Temos um problema de determinação, onde nossa incógnita é o coeficiente do termo x^{50} da multiplicação acima. Usaremos também essa informação como condicionante.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Sabemos que, pelas propriedades da potenciação de números complexos, quando multiplicamos potências com mesma base, conservamos a base e somamos seus expoentes.

Devemos então somarmos os coeficientes de todas as multiplicações $x^r \cdot x^s$ tais que $r + s = 50$, onde $0 \leq r \leq 100$ e $0 \leq s \leq 25$

3º Passo: Execução do plano.

Como $r + s = 50$, temos então as seguintes parcelas da multiplicação:

$$x^{25} \cdot x^{25} + x^{26} \cdot x^{24} + \dots + x^1 \cdot x^{49} + 1 \cdot x^{50}.$$

Como $0 \leq s \leq 25$, temos que a soma dos termos acima possui 26 parcelas. Logo, temos que o coeficiente procurado é igual a 26.

4º Passo: Retrospecto.

Não houve a necessidade de se realizar a multiplicação por inteira para se chegar a nossa resposta, uma vez que utilizamos uma das propriedades da potenciação para se chegar à nossa resposta final.

Problema 2. Dado o polinômio $P(x) = x^7 - 4x^6 + 24x^5 + 59x^4 + 48x^3 + 113x^2 - 75x + 40$, determine $P(3 + 5i)$.

Resolução 2.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de determinação, cuja incógnita a ser determinada é o valor numérico do número complexo $3 + 5i$. Não há uma condicionante clara no enunciado.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Vimos que, para se calcular um valor numérico de forma prática, podemos utilizar o teorema do resto. Para isto, será necessário utilizar um polinômio que tenha $3 + 5i$

como raiz. E que, pelo teorema das raízes conjugadas, $3 - 5i$ também será raiz desse mesmo polinômio.

3º Passo: Execução do plano. Primeiramente, vamos determinar um polinômio $D(x)$ de coeficientes reais que possua $3 + 5i$ como raiz. Pelo teorema da decomposição de raízes, segue-se que:

$$\begin{aligned}
 D(x) &= [x - (3 + 5i)] \cdot [x - (3 - 5i)] \\
 &= [(x - 3) + 5i] \cdot [(x - 3) - 5i] \\
 &= (x - 3)^2 - (5i)^2 \\
 &= x^2 - 6x + 9 - (-25) \\
 &= x^2 - 6x + 34.
 \end{aligned}$$

Agora, usando o método de Horner para dividir $P(x)$ por $D(x)$, teremos:

	1	-4	24	59	48	113	-75	40
6	--	6	12	12	18	-12	-6	--
-34	--	--	-34	-68	-68	-102	-68	34
	1	2	2	3	-2	-1	-13	74

Com isso, temos que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, onde $Q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ e $R(x) = -13x + 74$. Por fim, aplicando $x = 3 + 5i$ em $P(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
P(3 + 5i) &= D(3 + 5i) \cdot Q(3 + 5i) + R(3 + 5i) \\
&= 0 \cdot Q(3 + 5i) + R(3 + 5i) \\
&= R(3 + 5i) \\
&= -13(3 + 5i) + 74 \\
&= -39 - 65i + 74 \\
&= 35 - 65i.
\end{aligned}$$

4º Passo: Retrospecto.

Notemos que, para se calcular o valor numérico do número complexo em questão, que possui parte imaginária não nula, precisou-se de um polinômio $D(x)$ que possuía este número complexo como raiz. Como $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ pela definição de divisão de polinômios, de fato teremos $P(3 + 5i) = 35 - 65i$.

Problema 3. (PAPMEM): Sabendo que i e $1 + i$ são raízes da equação

$$x^7 - 6x^6 + 15x^5 - 25x^4 + 28x^3 - 25x^2 + 14x - 6 = 0,$$

resolva-a no universo dos complexos.

Resolução 3.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de terminação, cuja a incógnita são os valores para os quais a equação $x^7 - 6x^6 + 15x^5 - 25x^4 + 28x^3 - 25x^2 + 14x - 6 = 0$ é verdadeira. A

condicionante do problema é o fato dos números complexos i e $1 + i$ serem raízes da equação.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Vimos que, pelo teorema da decomposição das raízes, a equação pode ser decomposto sob a forma $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5)(x - r_6)(x - r_7) = 0$, onde r_1, r_2, \dots, r_7 são as suas raízes. Além disso, pelo teorema das raízes conjugadas, $-i$ e $1 - i$, também são raízes da equação. Dessa forma, com o usos das raízes já fornecidas no enunciado, usaremos o teorema da decomposição de raízes para achar as demais raízes.

3º Passo: Execução do plano

Pelo teorema da decomposição de raízes temos que;

$$P(x) = (x - i)(x + i)(x - (1 + i))(x - (1 - i))(x - r_5)(x - r_6)(x - r_7),$$

onde r_5, r_6 e r_7 são as demais raízes desconhecidas. Assim, consideremos os polinômios $D_1(x) = x + 1$ e $D_2(x) = x^2 - 2x + 2$ que admitem como raízes $\pm i$ e $1 \pm i$, respectivamente. Em outras palavras, temos que $P(x)$ é divisível tanto por $D_1(x)$ quanto por $D_2(x)$. Segue-se daí que:

	1	-6	15	-25	28	-25	14	-6
0	--	0	0	0	0	0	0	--
-1	--	--	-1	6	-14	19	-14	6
	1	-6	14	-19	14	-6	0	0

Temos $P(x) = (x + 1) \cdot Q_1(x)$, com $Q(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 19x^2 + 14x - 6$. Dividindo agora $Q_1(x)$ por $D_2(x)$, temos:

	1	-6	14	-19	14	-6
2	---	2	-8	8	-6	---
-2	---	---	-2	8	-8	6
	1	-4	4	-3	0	0

Temos agora que $P(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 2)(x^3 - 4x^2 + 4x - 3)$. As demais raízes da equação $P(x) = 0$ serão as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$. Por tentativa e erro, temos pelo teorema das raízes racionais que 3 é raiz da equação $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$, pois $27 - 36 + 12 - 3 = 0$. Como consequência disso, temos:

	1	-4	4	-3
3	---	3	-3	3
	1	-1	1	0

A partir daí, temos que $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0 \iff (x - 3)(x^2 - x + 1) = 0$. Por fim, nos resta encontrar as raízes da equação $x^2 - x + 1 = 0$. Aplicando a fórmula resolvente das equações polinomiais do 2º grau, temos então que:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto formado pelas soluções da equação $P(x) = 0$ será

$$\{3, i, -i, 1 + i, 1 - i, \frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\}.$$

4º passo: Retrospecto.

Notemos que todas as decomposições feitas foram baseadas nos teoremas das raízes conjugadas e no teorema das raízes racionais. Logo, ao fazermos

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5)(x - r_6)(x - r_7) = 0$$

teremos $x^7 - 6x^6 + 15x^5 - 25x^4 + 28x^3 - 25x^2 + 14x - 6 = 0$.

Problema 4. (ITA-2013 *apud* Netto (2020)) A soma das raízes da equação em \mathbb{C} , $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$ é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Resolução 4.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de determinação, onde a condicionante é a exigência de que $z - |z| = 0$. Assim, a incógnita do nosso problema corresponde à soma das raízes da equação que satisfazem esta condicionante.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Note que $z^8 = (z^4)^2$. Dessa forma, podemos usar uma incógnita auxiliar como fazemos para solucionar equações biquadradas. Note ainda que $z - |z| = 0$ equivale a $z = |z|$.

Essa condicionante descarta as raízes reais negativas e raízes complexas com parte imaginária não nula. Em outras palavras, as raízes que satisfazem esta condicionante são as raízes reais positivas da equação.

3º Passo: Execução do plano.

Fazendo $y = z^4$, temos a equação $y^2 - 17y + 16 = 0$. Aplicando a fórmula resolvente da equações polinomiais do 2º grau, teremos:

$$\begin{aligned}y = z^4 &= \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \\ &= \frac{17 \pm 15}{2}.\end{aligned}$$

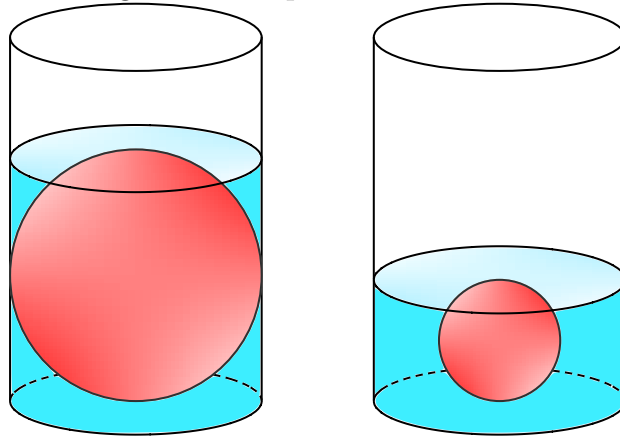
Com isso, temos $y = z^4 = 16$ ou $y = z^4 = 1$. Logo, temos que as soluções da equação $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$ formam o conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm i, \pm 2i\}$. Portanto, a soma procurada no problema é $2 + 1 = 3$, cuja resposta se encontra na alternativa *C*.

4º Passo: Retrospecto.

Como 1 e 2 são de fato as únicas raízes positivas encontradas, de fato teremos 3 como nossa resposta.

Problema 5. (UFAL) Um reservatório na forma de um cilindro reto, está parcialmente preenchido com líquido. O volume do líquido é tal que, ao se colocar uma esfera sólida, de mesmo raio que o raio da base do cilindro, no interior do cilindro, a altura do líquido atinge a altura do diâmetro da esfera, como ilustrado a seguir à esquerda. Existe uma outra esfera sólida, de raio menor que o anterior, que, quando repousa na base do cilindro contendo o mesmo volume de líquido de antes, a altura do líquido fica igual ao diâmetro da esfera, como ilustrado na figura à direita:

Figura 4: Recipientes com esferas



Fonte: Autor

Se o raio da esfera maior é igual a 2, qual é o raio da esfera menor?

- a) $\sqrt{3} - 1$
- b) $\sqrt{2} - 1$
- c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- d) 1,5
- e) 0,8

Resolução 5.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante?

É um problema de determinação, cuja incógnita corresponde ao raio da menor das esferas mencionadas no enunciado. Há mais de uma condicionante no problema: o raio da esfera maior é igual a 2, o volume de líquido nos dois reservatórios é igual e quando quando as duas esferas se encontram submersas, a altura do líquido em cada reservatório é igual ao diâmetro da esfera que se encontra no seu anterior.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Sabemos que os volumes de uma esfera e de um cilindro são, respectivamente, $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ e $\pi \cdot r^2 \cdot h$, onde h corresponde a altura do cilindro. Através dessas duas expressões construímos uma equação que nos possibilitará chegar ao raio da esfera menor.

3º Passo: Execução do plano.

Sejam V_l o volume de líquido que se encontra nos reservatórios. Calculando o volume da parte preenchida do primeiro cilindro, temos:

$$\begin{aligned} V_l + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 &= \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow V_l + \frac{32}{3} \pi &= 16\pi \\ \Leftrightarrow V_l &= \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

Sendo r o raio da esfera menor que se encontra no segundo reservatório, temos agora:

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} \pi + \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 &= \pi \cdot 2^2 \cdot 2r \\ \Leftrightarrow r^3 - 6r + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema das raízes racionais, temos que 2 é uma das raízes da equação

$$r^3 - 6r + 4 = 0.$$

Como 2 é o valor do raio da esfera maior, temos que a solução $r = 2$ não nos convém.

Assim, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini na decomposição da equação, teremos:

	1	0	-6	4	
2	--	2	4	-4	
	1	2	-2	0	

Temos que $r^3 - 6r + 4 = 0 \iff (r - 2)(r^2 + 2r - 2) = 0$. Aplicando a fórmula resolvente das equações polinomiais do 2º grau, temos então:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

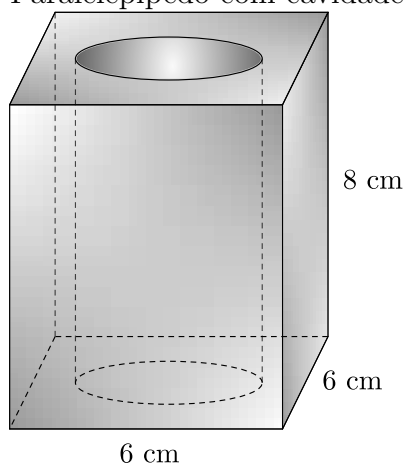
A solução $r = -1 - \sqrt{3}$ também não nos convém, uma vez que, pela natureza do problema, r representa um número real positivo. Logo, temos que $r = \sqrt{3} - 1$, resposta que se encontra na alternativa *a*.

4º Passo: Retrospecto.

Temos neste problema uma aplicação das equações algébricas na Geometria, onde, com base em expressões de volumes de sólidos, que neste problema funcionaram como nossas incógnitas auxiliares, pudemos estabelecer uma equação que nos forneceria o valor do raio procurado. Foi necessário que se levasse em conta também a natureza do problema proposto, uma vez que em Geometria não existem valores negativos para distância. Esse fato nos serviu como crivo para as soluções que surgiram ao longo do processo de resolução da equação polinomial que obtemos.

Problema 6. (SOUZA) O paralelepípedo reto retângulo tem dimensões da base medindo 6 cm , e altura, 8 cm . Uma cavidade na forma de cilindro reto de raio r atravessa esse paralelepípedo, como mostra a figura.

Figura 5: Paralelepípedo com cavidade cilíndrica



Fonte: Autor

Sabendo que a área total desse sólido é dada por $264 + 24\pi \text{ cm}^2$, determine o valor do raio da cavidade cilíndrica.

Resolução 6.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante?

É um problema de determinação, cuja incógnita é o raio da cavidade cilíndrica que se encontra no paralelepípedo em questão. O fato da área total desse sólido valer $264 + 24\pi \text{ cm}^2$ será nossa condicionante.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

No problema anterior, utilizamos as expressões associadas aos volumes de cada tipo de sólido envolvido no problema, para estabelecermos uma equação e solucioná-la. Utilizaremos desta vez as expressões associadas às áreas laterais de acordo com cada tipo de sólido de acordo com a descrição deste problema.

3º Passo: Execução do plano.

Ao calcularmos a área lateral do sólido de acordo com as informações fornecidas, teremos:

$$\begin{aligned}2(6 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 6 \cdot 8) - 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 8 &= 24\pi + 264 \\-2\pi r^2 + 16\pi r + 264 &= 24\pi + 264 \\r^2 - 8r + 12 &= 0.\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula resolvente da equação polinomial do 2º grau, temos agora:

$$\begin{aligned}r &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} \\&= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \\&= \frac{8 \pm 4}{2}.\end{aligned}$$

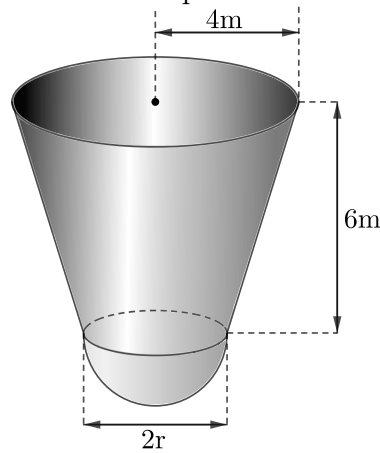
Temos então que $r = 2$ e $r = 6$ são as soluções da equação. A solução $r = 6$ não nos convém. Logo, temos $r = 2 \text{ cm}$ como solução do nosso problema.

4º Passo: Retrospecto.

Nesta solução, as expressões que forneciam a área lateral do sólido, funcionaram como nossas incógnitas auxiliares que nos possibilitou estabelecer uma equação algébrica, a qual nos levou a duas possíveis soluções do problema. A solução $r = 6$ não nos foi conveniente, pois se a cavidade cilíndrica possuísse $r = 6 \text{ cm}$, seu diâmetro seria de 12 cm , extrapolando as dimensões explícitas na figura dada. Com isso chegamos a conclusão de que a solução de fato é $r = 2 \text{ cm}$.

Problema 7. (SOUZA) Um reservatório cuja capacidade é $\frac{184\pi}{3} \text{ m}^3$ tem a forma de uma semiesfera acoplada a um tronco de cone, como indicado na figura. Qual é a medida do raio da semiesfera?

Figura 6: Semiesfera acoplada a um tronco de cone



Fonte: Autor

Resolução 7.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante?

É um problema de determinação, onde a nossa incógnita é o raio da semiesfera da figura. O fato de que o volume do reservatório ser igual a $\frac{184\pi}{3} m^3$ será a nossa condicionante.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

No problema 5, utilizamos as expressões que forneciam os volumes dos sólidos em questão para então, estabelecermos uma relação que nos forneceria uma equação a qual a partir dela, encontramos uma solução definitiva. Podemos utilizar as expressões que nos fornecem os volumes de um tronco de cone e de uma semiesfera e seguirmos esse mesmo critério.

3º Passo: Execução do plano.

Aplicando nas fórmulas do volume do tronco de cone e da semiesfera, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 + \frac{\pi \cdot 6}{3} (4^2 + 4r + r^2) = \frac{184\pi}{3} \iff r^3 + 3r^2 + 12r - 44 = 0.$$

Pelo teorema das raízes racionais, temos como possíveis $\{\pm 44, \pm 22, \pm 11, \pm 4, \pm 2, \pm 1\}$. Porém, como r também representa o raio da base menor do tronco de cone, temos que os únicos valores que podem ser a solução do problema são 1 e 2. Com isso, temos que 2 é uma solução racional da equação, pois:

	1	3	12	-44
2	--	2	10	44
	1	5	22	0

Temos com isso que $r^3 + 3r^2 + 12r + 44 = 0 \iff (r - 2)(r^2 + 5r + 22) = 0$. Note ainda que na equação $r^2 + 5r + 22 = 0$, temos $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 < 0$, o que nos leva a conclusão de que as outras raízes da equação $r^3 + 3r^2 + 12r + 44 = 0$ não são reais positivas, o que contraria a natureza do nosso problema. Logo, temos 2 m como nossa solução.

4º Passo: Retrospecto.

Com base nas expressões dos volumes dos sólidos envolvidos e construímos, a equação que nos forneceria a solução, para que por fim, encontrássemos a solução final, utilizando as dimensões do sólido e natureza do próprio problema, que admite apenas números reais positivos como possíveis soluções.

Problema 8. (UFPE-2012) O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + 19$ tem coeficientes a e b números inteiros, e suas raízes são inteiras e distintas. Indique $|a| + |b|$.

Resolução 8.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de determinação, cuja incógnita representa o valor da soma $|a| + |b|$. Há duas condicionantes nesse problema. A primeira nos diz que os coeficientes a e b são inteiros, e a segunda nos diz que as três raízes do polinômio são inteiras e distintas.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Como a e b representam coeficientes do polinômio, vimos anteriormente pelas relações de Girard, que é possível se estabelecer uma relação entre a e b e as raízes desse polinômio. Além disso, por hipótese as três raízes são inteiras e distintas, pelo teorema das raízes racionais, as três raízes pertencem ao conjunto $\{\pm 1, \pm 19\}$.

3º Passo: Execução do plano.

Como o polinômio do problema é de 3º grau, consideremos x_1, x_2 e x_3 suas raízes. Pelas relações de Girard temos:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 &= b \\x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= -19\end{aligned}$$

Como as três raízes pertencem ao conjunto $\{\pm 1, \pm 19\}$, pela terceira relação acima, podemos concluir que as três raízes do polinômio são $-1, 1$ e 19 , e como consequência, temos então:

$$\begin{aligned}-a &= -1 + 1 + 19 \iff a = -19 \\b &= -1 \cdot 1 + (-1) \cdot 19 + 1 \cdot 19 \iff b = -1\end{aligned}$$

. Portanto,

$$|a| + |b| = |-19| + |-1| = 19 + 1 = 20.$$

4º Passo: Retrospecto.

Com os valores obtidos, podemos reescrever o polinômio como $x^3 - 19x^2 - x + 19$, onde de fato podemos constatar que os inteiros $-1, 1$ e 19 são suas raízes, conforme mostram os cálculos a seguir.

(I) Para $x = -1$, temos;

$$(-1)^3 - 19(-1)^2 - (-1) + 19 = -1 - 19 + 1 + 19 = 0.$$

(II) Para $x = 1$, temos;

$$1^3 - 19 \cdot 1^2 - 1 + 19 = 1 - 19 - 1 + 19 = 0.$$

(III) Para $x = 19$, temos;

$$19^3 - 19 \cdot 19^2 - 19 + 19 = 19^3 - 19^3 - 19 + 19 = 0.$$

Isso mostra que os valores encontrados satisfazem nossas condicionante e por seguinte, a incógnita do nosso problema. Vale destacar ainda que os coeficientes a e b do polinômio dado inicialmente, funcionaram como incógnitas auxiliares dentro da nossa solução.

Problema 9. (AFA) A soma dos quadrado das raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$ é

- a) 10.
- b) 11.
- c) 12.
- d) 14.

Resolução 9.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a

conclusão?

É um problema de determinação, cuja incógnita é o valor da soma dos quadrados das raízes da equação fornecida. Não há uma condicionante clara no seu enunciado.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Não estudamos até aqui nenhuma relação entre as raízes de uma equação algébrica e a soma dos seus respectivos quadrados. Porém, as relações de Girard relacionam os coeficientes de uma equação algébrica ao valor da soma de suas raízes, da soma dos produtos dois a dois dessas raízes, da soma do produto três a três dessas raízes... e ao valor do produto de todas essas raízes. Dito isso, é possível que através dessas relações possamos chegar ao valor solicitado pelo nosso problema.

3º Passo: Execução do plano.

Consideremos a , b e c as três raízes da equação do nosso problema. Pelas relações de Girard, temos:

$$(I) -(a + b + c) = -2 \iff a + b + c = 2.$$

$$(II) ab + ac + bc = -4.$$

Por outro lado, temos ainda que:

$$\begin{aligned} & (a + b + c)^2 = 2^2 \\ \iff & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 4 \\ \iff & a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 4 \\ \iff & a^2 + b^2 + c^2 + 2(-4) = 4 \\ \iff & a^2 + b^2 + c^2 - 8 = 4 \\ \iff & a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 8 \\ \iff & a^2 + b^2 + c^2 = 12. \end{aligned}$$

Portanto, $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Logo, temos a alternativa C como resposta.

4º Passo: Retrospecto.

Embora não haja uma relação direta entre os coeficientes de uma equação algébrica e a soma dos quadrados de suas raízes, foi possível estabelecermos uma estratégia para chegarmos ao resultado que nos foi proposto com base nas relações de Girard já conhecidas. Nessa perspectiva, as relações de Girard utilizadas na solução do no nosso problema, desempenharam a função de incógnitas auxiliares.

Problema 10. (FGV-2011) O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ tem o número 1 como raiz dupla. O valor absoluto da diferença entre as outras raízes é igual a:

- a) 5.
- b) 4
- c) 3.
- d) 2.
- e) 1.

Resolução 10.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de determinação, cuja incógnita representa o valor absoluto da diferença entre as duas raízes não fornecidas no enunciado. A condicionante do problema nos diz que 1 representa uma raiz dupla desse polinômio.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Os problemas que envolvem o teorema da decomposição de raízes nos servem como problemas correlatos para que possamos solucionar o nosso problema proposto. Assim, utilizaremos o dispositivo prático de Briot-Ruffini para realizarmos essa decomposição

para que então, possamos encontrar as demais raízes e por fim, o valor absoluto da diferença entre elas.

3º Passo: Execução do plano.

Como 1 é uma raiz dupla, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini para decompor duas vezes o polinômio $P(x)$ pelo binômio $(x - 1)$, temos:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & 3 & 5 & -4 \\ \hline 1 & -- & 1 & -4 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -1 & 4 \\ \hline 1 & -- & 1 & -3 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

Com isso, temos $P(x) = (x - 1)^2(x^2 - 3x - 4)$. As raízes restantes são as raízes da equação $x^2 - 3x - 4 = 0$. Agora, aplicando a fórmula resolvente das equações polinomiais do 2º grau, temos que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{3 \pm 5}{2}. \end{aligned}$$

Logo, as outras duas raízes procuradas são o 4 e -1 . Por fim, o valor absoluto da

diferença entre elas será $|-1-4| = |-5| = 5$, concluindo assim que a alternativa a é a nossa resposta.

4º Passo: Retrospecto.

Com o uso do teorema da decomposição de raízes de do dispositivo prático de Briot-Ruffini, pudemos usar a condicionante de que o número 1 é uma raiz dupla do polinômio $P(x)$, para que com isso pudéssemos chegar a uma equação polinomial do segundo grau e a partir dela, as demais raízes de $P(x)$ não fornecidas no problema. As raízes não fornecidas no enunciado desempenharam a função de incógnitas auxiliares na nossa resolução, para que pudéssemos chegar ao valor absoluto que nos fora solicitado. Vale ressaltar que, o fato de 1 ser uma raiz dupla do polinômio $P(x)$ implica que este será divisível pelo polinômio $D(x) = (x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$. Dessa forma, é possível que a decomposição de raízes possa ser feita pelo método de Horner, a exemplo do problema 2, bem como também por qualquer outro algoritmo de divisão até aqui estudado.

Problema 11. (ITA - 2012 *apud* Netto (2020)) Considere o polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtem-se resto 0 e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a:

- a) $5(5 - 2\sqrt{3})$
- b) $15(5 - 2\sqrt{3})$
- c) $30(5 - 2\sqrt{3})$
- d) $45(5 - 2\sqrt{3})$
- e) $50(5 - 2\sqrt{3})$

Resolução 11.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita?

Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de determinação, cujas condicionantes do problema são: $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são raízes do polinômio $p(x)$, e $p(x)$ quando dividido por $q(x) = x - 5$ deixa resto 0 e $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. A incógnita do nosso problema corresponde ao valor numérico $p(-1)$.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Vimos em problemas anteriores que, quando um polinômio ou equação algébrica possui um número complexo como raiz, o conjugado desse mesmo número complexo também é uma raiz desse mesmo polinômio. Além disso, se ao dividirmos um polinômio $p(x)$ por um binômio do tipo $x - a$ ($a \in \mathbb{C}$) obtemos como resto 0. Então, pelo teorema do resto, a é uma raiz de $p(x)$. Assim, temos que 5 também é uma raiz de $p(x)$.

3º Passo: Execução do plano.

Pelo teorema da decomposição de raízes, temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= k(x - 5)(x - 2i)(x + 2i)[x - (i - \sqrt{3})][x - (-i - \sqrt{3})] \\ &= k(x^2 + 4)[(x + \sqrt{3})^2 + 1](x - 5). \end{aligned}$$

Aplicando $p(1)$, temos ainda:

$$p(1) = k(1^2 + 4)[(1 + \sqrt{3})^2 + 1](1 - 5) = -20k(5 + 2\sqrt{3}).$$

Como por hipótese $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$, temos $k = -1$. Daí;

$$p(-1) = (-1)[(-1)^2 + 4][(-1 + \sqrt{3})^2 + 1](-1 - 5) = 30(5 - 2\sqrt{3}).$$

Portanto, temos a alternativa c como resposta.

4º Passo: Retrospecto.

Utilizamos neste problema os teoremas do resto, da decomposição e das raízes conjugadas para construirmos o polinômio $p(x)$ realizando a operação de multiplicação de polinômios. Daí, calculamos o valor numérico de $p(x)$ para $x = -1$, concluindo assim a

nossa resolução.

Problema 12. (PAPMEM) Seja α uma raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$. Prove que $\alpha^2 - 2$ é outra raiz da mesma equação.

Resolução 12.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de demonstração, onde devemos demonstrar que o número complexo $\alpha^2 - 2$ é uma raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$, tendo como condicionante o fato de que o número complexo α ser uma raiz dessa equação.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Podemos utilizar os procedimentos adotados para demonstrar os teoremas até aqui abordados como problemas correlatos para nossa solução. O problema tem como hipótese o fato de que o o número complexo α ser uma raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$, e como tese a afirmação de que o número complexo $\alpha^2 - 2$. Demonstraremos então que a hipótese implica na tese do problema.

3º Passo: Execução do plano.

Aplicando α na equação $x^3 - 3x + 1 = 0$, temos: $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \iff \alpha^3 = 3\alpha - 1$

Agora, substituindo $\alpha^2 - 2$ na equação, teremos:

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1 &= \alpha^6 - 6\alpha^4 + 12\alpha^2 - 8 - 3\alpha^2 + 6 + 1 \\ &= (\alpha^3)^2 - 6\alpha^3 \cdot \alpha + 9\alpha^2 - 1.\end{aligned}$$

Substituindo α^3 por $3\alpha - 1$ na expressão obtida, temos agora:

$$\begin{aligned}(3\alpha - 1)^2 - 6\alpha(3\alpha - 1) + 9\alpha^2 - 1 &= 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 - 18\alpha + 6\alpha + 9\alpha^2 - 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, o número complexo $\alpha^2 - 2$ também é raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$.

4º Passo: Retrospecto.

Utilizamos na solução desse problema o modelo de demonstração *hipótese* \implies *tese*. Com base no teorema do resto e nas definições apresentadas neste trabalho, construímos a nossa solução.

Problema 13. (Lima [14]) Mostre que, se n é um número par então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ não possui raiz real.

Resolução 13.

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trata-se de um problema de demonstração onde temos como hipótese o fato do número natural n ser par e devemos mostrar que o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ não possui raiz real nessa condição.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Não demonstramos até aqui nenhum problema relacionado ao problema acima. Assim, é de se esperar que tentemos respondê-lo, por tentativa e erro, por cada um dos métodos de demonstração conhecidos. Dentre as técnicas de demonstração até aqui abordadas neste trabalho, utilizaremos a redução a um absurdo.

3º Passo: Execução do plano.

Suponha que n é par e que $p(x)$ tenha uma raiz real. Observemos que $p(1) = n + 1$. Logo, $a \neq 0$ e $a \neq 1$, ou seja, 0 e 1 não são raízes de $p(x)$. Como $a \neq 0$ e $p(x) = a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1$ representa a soma de uma P.G. de razão a , tem-se:

$$p(a) = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Agora, $p(a) = 0$ e $a \neq 1$, implica que $a^{n+1} - 1 = 0$. Daí, $a^{n+1} = 1$. Como por hipótese n é para, $n + 1$ será ímpar. Logo, $a^{n+1} = 1$ implicaria que $a = 1$, o que é um absurdo.

Portanto, $p(x)$ não possui raiz real.

4º Passo: Retrospecto.

É de esperar que se conheça o assunto de progressões geométricas para que se tenha um entendimento da solução aqui exposta, e que após tentar sem sucesso demonstrar este resultado por outros métodos, o que nos resta é a redução a um absurdo como caminho para nossa solução.

Problema 14. (Muniz Neto (2012) - Adaptado) Mostre que, para todo natural $n \geq 1$, o polinômio $x^n - a^n$ é divisível pelo binômio $x - a$, com $a \in \mathbb{R}$.

Resolução 14.

Primeira resolução:

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante? Se é um problema de demonstração, qual a hipótese? Qual é a conclusão?

Trataremos nesta primeira solução este problema como um problema de demonstração, onde o valor de n no polinômio $x^n - a^n$ deve satisfazer a condicionante de ser maior ou igual a 1. Com isso, deve-se mostrar que $x^n - a^n$ é divisível pelo binômio $x - a$.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Uma vez que não há valor fixo para n , torna-se inviável fazermos essa demonstração por qualquer algoritmo até aqui estudado. Porém, como por hipótese n é natural e maior ou igual a 1, podemos usar o princípio da indução finita para fazê-la.

3º Passo: Execução do plano.

Resolveremos este problema utilizando indução sobre n .

(I) Para $n = 1$, a afirmação é verdadeira. Pois;

$$x^1 - a^1 = 1(x - a)$$

(II) Considerando os valores de n para os quais a afirmação é verdadeira, mostremos que a mesma é verdadeira para $n + 1$. Tomando nossa afirmação como hipótese de indução, temos;

$$\begin{aligned}x^{n+1} - a^{n+1} &= x \cdot x^n - ax^n + ax^n - a \cdot a^n \\ &= (x - a)x^n + a(x^n - a^n).\end{aligned}$$

Como $(x - a)x^n$ é divisível por $x - a$ e $x - a$ divide $x^n - a^n$ por hipótese, temos que $x^{n+1} - a^{n+1}$ é divisível por $x - a$. Logo, a veracidade da afirmação é válida para todo natural $n \geq 1$.

4º Passo: Retrospecto.

Embora não seja um método de demonstração muito comum a nível de Ensino Médio, Pólya (1995) nos diz que se trata de uma ferramenta muito poderosa para se demonstrar resultados matemáticos, inclusive a nível básico como o resultado demonstrado neste exercício.

Segunda resolução:

1º Passo: É um problema de determinação ou demonstração? Qual é a incógnita? Qual a condicionante?

Agora, este problema como um problema de determinação, onde ainda temos como condicionante o fato de $n - 1$. Até aqui, o enunciado não nos deixa claro qual a incógnita a se considerar.

2º Passo: Conhece algum problema correlato?

Mostrar que um polinômio $p(x)$ é divisível por outro polinômio $d(x)$ significa mostrar que o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$ é o polinômio nulo. Assim, devemos encontrar um polinômio $q(x)$ tal que $x^n - a^n = (x - a) \cdot q(x)$. Feito isso, concluiremos a nossa demonstração.

3º Passo: Execução do plano.

Consideremos o polinômio $q(x) = a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$ tal que $x^n - a^n = (x - a) \cdot q(x)$. Temos:

$$\begin{aligned} x^n - a^n &= (x - a)(a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n) \\ &= a_1 \cdot x^n + a_2 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n \cdot x \\ &\quad - (a \cdot a_1 \cdot x^{n-1} + a \cdot a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a \cdot a_{n-1} \cdot x + a \cdot a_n) \\ &= a_1 \cdot x^n + (a_2 - a \cdot a_1)x^{n-1} + (a_3 - a \cdot a_2)x^{n-2} + \dots + (a_n - a \cdot a_{n-1})x - a \cdot a_n. \end{aligned}$$

Comparando membro a membro as duas expressões, teremos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 - a \cdot a_1 &= 0 \iff a_2 = a \\ a_3 - a \cdot a_2 &= 0 \iff a_3 = a^2 \\ &\dots \\ a_n - a \cdot a_{n-1} &\iff a_n = a^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, temos que $q(x) = x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + \dots + a^{n-2} \cdot x + a^{n-1}$.

Portanto, $x^n - a^n = (x - a) \cdot (x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + \dots + a^{n-2} \cdot x + a^{n-1})$, demonstrando assim que $x^n - a^n$ é divisível por $x - a$.

4º Passo: Retrospecto.

Nesta solução, ao abordarmos o problema como um problema de determinação, utilizamos o método de Descartes para determinarmos um polinômio $q(x)$ de tal modo que $x^n - a^n = (x - a) \cdot q(x)$. Neste caso, $q(x)$ assumiu o papel de incógnita na resolução deste problema.

5 Considerações Finais

As minhas experiências vivenciadas como docente e discente me fizeram escolher a temática abordada neste trabalho, devido à sua grande importância dentro da disciplina de Matemática no Ensino Básico. Ao abordarmos a teoria básica dos polinômios e equações algébricas de variáveis complexas, pudemos explorar os algoritmos operatórios, os teoremas e os modelos de resolução empregados em problemas matemáticos acerca desses conteúdos. Pudemos ainda tratar de tópicos inerentes à esta temática, que não são tratados na maioria dos livros didáticos, a fim de enriquecer ainda mais os nossos conhecimentos até aqui adquiridos e de despertar no leitor, o interesse em conhecer não apenas as suas possíveis aplicabilidades, mas também a elegância matemática desses conteúdos.

Ao tratarmos das resoluções de problemas por intermédio do método de Pólya, é possível observar as mais variadas vertentes para se chegar à solução de um problema matemático que possa nos ser proposto. Esse método se mostra de grande importância, pois ao explorá-lo, foi possível perceber que o mesmo nos permite um olhar mais atento durante a resolução de um problema, prevenindo que, ao traçarmos uma diretriz para a nossa resolução, não venhamos a nos enganar com possíveis distratores escondidos dentro de cada problema.

Nos problemas 5, 6 e 7, observamos que os conceitos aqui estudados aliados à natureza geométrica de cada um, podem ser importantes ferramentas no estudo de problemas de Geometria, demonstrando desta forma que os polinômios e equações algébricas podem vir a ser de relevante importância na resolução de problemas em outras áreas da Matemática, além da Álgebra. Destacamos que os mesmos também podem ser instrumentos no que diz respeito ao estudo de algoritmos e fluxogramas, uma vez que os mesmos apresentaram algoritmos práticos para se realizar operações

e resolver problemas em geral. A BNCC (BRASIL, 2017) enfatiza a importância do ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos por meio de algoritmos e fluxogramas, tendo em vista que os estudantes precisam adquirir a capacidade de traduzir uma dada situação problema em outras linguagens.

Os problemas 12, 13 e 14, cujas resoluções se deram por uma demonstração foram abordados a fim de apresentar as diversas formas de solucionar problemas desta natureza. Dentro da minha experiência docente, os problemas de demonstração permitem aos educandos um olhar diferenciado com relação ao tema abordado, possibilitando aos mesmos uma potencialidade muito maior da percepção de cada elemento envolvido durante a resolução de problemas, pois com base neles, é possível se explorar a essência de cada resultado matemático. Ao aplicarmos o método de Pólya durante essas resoluções, foi possível observar que problemas dessa natureza podem despertar um novo olhar matemático, não apenas para os conteúdos tratados neste trabalho, mas como para problemas de Matemática em geral, pois durante a nossa pesquisa, foi possível observar que, sempre que se é possível, podemos tratar um problema de uma forma mais compreensível dentro dos nossos conhecimentos. Ao se trabalhar esta temática com alunos do Ensino Médio sob a ótica da resolução de problemas :

[...] espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da Matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BNCC, 2017 p. 265)

Desejamos então que este trabalho venha a contribuir para a melhoria do processo de Ensino e Aprendizagem acerca das resoluções de problemas de polinômios e equações algébricas no Ensino Médio, bem como também aos mais diversos tópicos de Matemática abordados nesta etapa educacional.

Referências

- [1] ANDRADE, LENIMAR NUNES DE, *Uma generalização de Briot-Ruffini*, Revista do Professor de Matemática, João Pessoa, n. 34, 1997.
- [2] BRASIL, *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*, Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.
- [3] BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em: 23. janeiro. 2021.
- [4] CARMO, MANFREDO PERDIGÃO DO; MORGADO, AUGUSTO CÉSAR; WAGNER, EDUARDO. (ORG.), *Trigonometria e Números Complexos*, Rio de Janeiro: SBM, 2005. p. 91 - 106.
- [5] COSTA, JOSÉ AIRTON DO NASCIMENTO, *Análise das dificuldades de aprendizagem algébrica manifestadas por alunos do 8º ano do ensino fundamental*, Dissertação (Mestrado) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 93 f, Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2019.
- [6] DANTE, LUIZ ROBERTO, *Didática na da Resolução de Problemas de Matemática*, Rio de Janeiro: Ática, 2002.
- [7] DE MORAIS FILHO, DANIEL CORDEIRO. (ORG.), *Um convite à Matemática*, Rio de Janeiro: SBM, 1 ed. 2012.
- [8] DIERINGS, ANDRÉ RICARDO, *Ensino de polinômios no Ensino Médio - Uma nova abordagem.*, 70 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

- [9] FOSSA, JOHN A, *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*, 2 ed. ampl. e rev. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [10] GOMES, LEONARDO SOARES, *Funções polinomiais no ensino básico: Onde vou usra isso na vida professor?*, 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.
- [11] HEFEZ, ABRAMO, *Indução Matemática*, Programa de Iniciação Científica. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>. Acesso em 8 de Março de 2021.
- [12] HEFEZ, ABRAMO; VILLELA, MARIA LÚCIA TORRES. (ORG.), *Polinômios e Equações Algébricas*, 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- [13] LIMA, E. L. *et al.* (ORG.), *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3*, 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [14] LIMA, E. L. (ORG.), *Números e Funções Reais*, 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [15] LIMA, E. L. *et al.* (ORG.), *Temas e Problemas*, 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. p. 21 - 44.
- [16] MUNIZ NETO, A. C. (ORG.), *Polinômios*, 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [17] NACARATO, ADAIR MENDES; CUSTÓDIO, IRIS APARECIDA, *O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática*, Grupo Colaborativo em Matemática - GRUCOMAT. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. E-book.

- [18] NETTO, SERGIO LIMA, *A Matemática nos vestibulares do ITA*, 2 ed. rev. e amp. Fortaleza: VestSeller, 2020.
- [19] OLIVEIRA, KRERLEY IRRACIEL MARTINS; FERNÁNDEZ, ADÁN JOSÉ CORCHO. (ORG.), *Iniciação à Matemática - Um curso com problemas e soluções*, 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [20] OLIVEIRA, MARCELO RUFINO DE, *Números Complexos, Polinômios, Geometria Analítica*, 1. ed. Belém: VestSeller, 2013.
- [21] OLIVEIRA, M. M, *Sequência didática interativa no processo de formação de professores*, Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.
- [22] PÓLYA, GEORGE, *A arte de resolver problemas: um novo aspecto de método matemático*, Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.
- [23] SILVA, ANTUNINO DA, *Resolução de situações-problemas da OBMEP por alunos da 3ª série do Ensino Médio da cidade de União-PI: uma investigação acerca da análise combinatória*, 88 f. Dissertação (Mestrado) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2018.
- [24] SOUSA, JOAMIR ROBERTO DE. (ORG.), *Novo Olhar Matemática*, São Paulo: FTD, 2010.
- [25] TAO, TERENCE. (ORG.), *Como resolver problemas matemáticos - Uma perspectiva pessoal*, Tradução de Paulo Ventura, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [26] ZABALA, ANTONI, *A prática educativa: como ensinar*, Porto Alegre: Artmed, 1998.