



Universidade Federal de São Paulo
Campus Diadema



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Ana Luiza Patriarcha Clinio da Silva

Provar sem palavras: uma abordagem teórica para o ensino de Geometria

**Diadema
2022**

Ana Luiza Patriarcha Clinio da Silva

**Provar sem palavras: uma abordagem teórica para o
ensino de Geometria**

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo, Campus Diadema.

Orientador: Profa Dra. Gleiciane da Silva Aragão

Coorientador: Profa Dra. Paola Andrea Gaviria Kassama

Diadema

2022

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Ana Luiza Patriarcha Clinio

Provar sem palavras: uma abordagem teórica para o ensino de Geometria / Ana Luiza Patriarcha Clinio Silva. -- Diadema, 2022.
84 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2022.

Orientadora: Gleiciane da Silva Aragão
Coorientadora: Paola Andrea Gaviria Kassama

1. Geometria. 2. Visualização. 3. Provas sem palavras. 4. Plano de aula. 5. Base Nacional Comum Curricular. I. Título.

Ana Luiza Patriarcha Clinio da Silva

Provar sem palavras: uma abordagem teórica para o ensino de Geometria

Chefe de Departamento:

Prof. Dr. Renato Marcone José de Souza

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof. Dr. Renato de Sá Teles

Presidente da banca:

Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - UNIFESP

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renato Marcone José de Souza - UNIFESP

Prof. Dr. Ricardo de Sá Teles - UTFPR

Prof. Dr. Tiago Nunes Castilho - UNIFESP

Data da defesa: 19 de Maio de 2022

Dedico este trabalho aos primos Renato e Willian Rossini.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a minha amiga, colega de trabalho e de mestrado, Simone Tanaka por me auxiliar em listas de exercícios e provas das disciplinas obrigatórias; pelo suporte incentivador e emocional ao longo de toda minha trajetória dentro da UNIFESP.

Agradeço ao marido da Simone, João Paulo, e a sua amiga doutora Eliane, por conseguirem que a minha matrícula no mestrado profissional fosse efetivada.

Agradeço aos meus colegas de mestrado pelos inúmeros debates sobre os exercícios das disciplinas obrigatórias, que tanto me fizeram crescer como aluna e profissional da área da educação.

Agradeço às minhas amigas Giullia, Gabriela, Marcela, Milene, Larissa e Juliana e aos meus amigos Eniba, Renato e Cardoso por me mandarem mensagens de incentivo, amor e carinho ao longo de todo o processo.

Agradeço, por fim, a minha orientadora e a minha coorientadora pela paciência, resiliência, persistência e cuidado comigo, com a minha saúde mental e com as leituras minuciosas desse trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Quando passares pelas águas estarei contigo, e quando pelos rios, eles não submergirão; quando passares pelo fogo não te queimarás, nem arderá em ti. Porque eu sou o Senhor teu Deus.” - Isaías 43:2-3.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de desenvolver um estudo das provas sem palavras. A abordagem teórica irá mostrar o conceito e o surgimento das provas sem palavras e como elas se popularizaram em meados da década de 80 através de publicações de uma coletânea de enunciados figurativos, desenvolvidos ou encontrados na literatura mundial por diversos matemáticos e leitores da revista *American Associate Magazine*. Pretende-se discutir, através de artigos acadêmicos, o que é e como a visualização no ensino foi pouco discutida ao longo da história, e como ela é aplicada ao ensino de Geometria, e propor provas sem palavras que podem ser abordadas ao longo do currículo básico definido pela Base Nacional Comum Curricular. Para tal, serão apresentados os enunciados figurativos em planos de aula, com seus respectivos objetivos a serem trabalhados, bem como as habilidades e competências que serão exploradas. Em seguida, será proposta a sua resolução com o auxílio do *software* Geogebra, e um planejamento de aula, utilizando o dado enunciado, com dicas e sugestões ao professor.

Palavras-chaves: Geometria. Visualização. Provas sem palavras. Plano de aula. Base Nacional Comum Curricular.

Abstract

This work aims to develop a study of proofs without words. The theoretical approach will show the concept and emergence of wordless proofs and how they became popular in the mid 80's through publications of a collection of figurative utterances, developed or found in the world literature by several mathematicians and readers of magazine *American Associate Magazine*. It is intended to discuss, through academic articles, what is and how visualization in teaching has been little discussed throughout history, and how it is applied to the teaching of Geometry, and propose proofs without words that can be addressed throughout the basic curriculum defined by the Common National Curriculum Base. To this end, figurative statements will be presented in lesson plans, with their respective objectives to be worked on, as well as the skills and competences that will be explored. Then, it will be proposed its resolution with the help of Geogebra software, and a lesson plan, using the given data, with tips and suggestions to the teacher.

Keywords: Geometry. Meaning. Proofs without words. Lesson plan. Curriculum Common National Base.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Uma prova sem palavras do Teorema de Pitágoras.	16
Figura 2 – Representação da duplicação do quadrado.	16
Figura 3 – Uma página do livro Euclid’s Elements escrito por Oliver Byrne.	17
Figura 4 – Representações para explicar a palavra “over”.	21
Figura 5 – Quadrado é um caso particular de trapézio.	22
Figura 6 – Em um plano cartesiano, ponto inicial A	23
Figura 7 – Plotagem de pontos de um gráfico.	23
Figura 8 – Representação de ângulo: região entre duas semirretas.	24
Figura 9 – Reta \overleftrightarrow{AB}	25
Figura 10 – Segmento de reta \overline{AB}	26
Figura 11 – Semirreta	26
Figura 12 – Semirretas opostas.	27
Figura 13 – Segmentos consecutivos.	27
Figura 14 – Segmentos colineares.	27
Figura 15 – Segmentos adjacentes.	28
Figura 16 – Transporte de segmentos.	28
Figura 17 – Semiplanos determinados pela reta r	29
Figura 18 – Regiões angulares no plano.	29
Figura 19 – Interior e exterior do ângulo \widehat{POQ}	30
Figura 20 – Transporte de ângulos.	31
Figura 21 – Ângulos: (1) agudo. (2) reto. (3) obtuso. (4) raso.	31
Figura 22 – Ângulos consecutivos.	32
Figura 23 – Ângulos adjacentes.	32
Figura 24 – Ângulos opostos pelo vértices.	32
Figura 25 – Bissetriz de um ângulo.	33
Figura 26 – Circunferência de centro em C e raio r	33
Figura 27 – Arco maior \widehat{AB} da circunferência α (figura à esquerda) e Arco menor \widehat{AB} da circunferência α (figura à direita).	34
Figura 28 – Representação da circunferência α , de centro C e raio r e o ângulo central \widehat{ACB}	35
Figura 29 – Ângulo inscrito \widehat{AOB} relativo a circunferência α	35
Figura 30 – Exemplos de linhas poligonais: (1) aberta e (2) fechada.	36
Figura 31 – Exemplos de linhas poligonais fechadas: (1) não simples e (2) simples.	37

Figura 32 – Exemplos de regiões poligonais.	37
Figura 33 – Exemplos: (1) polígono convexo e (2) polígono côncavo.	38
Figura 34 – Triângulo $\triangle ABC$ de vértices A , B e C	39
Figura 35 – Triângulo retângulo $\triangle ABC$, em que $m(\hat{A}CB) = 90^\circ$	40
Figura 36 – Congruência de triângulos - caso LAL.	41
Figura 37 – Congruência de triângulos - caso ALA.	42
Figura 38 – Congruência de triângulos - caso LLL.	42
Figura 39 – Segmentos tangentes \overline{PA} e \overline{PB}	43
Figura 40 – $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	44
Figura 41 – $ABCD$ é um quadrado cujo o lado mede l e área mede l^2	44
Figura 42 – Teorema de Pitágoras: parte I.	48
Figura 43 – Teorema de Pitágoras: parte II.	50
Figura 44 – Teorema de Pitágoras: resolução.	51
Figura 45 – Lei dos cossenos para ângulos agudos do triângulo retângulo $\triangle ABC$	54
Figura 46 – Lei dos cossenos para ângulos agudos de um triângulo qualquer $\triangle ABC$	56
Figura 47 – Os triângulos $\triangle AFD$ e $\triangle ACG$ são semelhantes.	57
Figura 48 – Todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles.	60
Figura 49 – Todo triângulo possui uma circunferência inscrita.	60
Figura 50 – D , E e F são pontos de tangência dos segmentos \overline{AC} , \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente.	61
Figura 51 – Seis triângulos isósceles.	61
Figura 52 – Todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles.	62
Figura 53 – Prova sem palavras de triângulo seccionado em seis triângulos isósceles.	62
Figura 54 – Área de triângulo em função de seus lados e do raio da circunfe- rência circunscrita.	64
Figura 55 – Prova sem palavras do Teorema de Vivian.	67

Sumário

	Introdução	11
1	O SURGIMENTO DAS PROVAS SEM PALAVRAS	15
2	VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA	19
2.1	Terminologia	19
2.2	Imagens de visualização	20
2.2.1	<i>Figurative Image Schemata</i>	22
2.2.2	<i>Operative Image Schemata</i>	22
2.2.3	<i>Relation Image Schemata</i>	24
2.2.4	<i>Symbolic Image Schemata</i>	24
3	PRÉ-REQUISITOS	25
3.1	Ponto, reta, semirreta e segmento	25
3.2	Ângulos	28
3.3	Circunferência	33
3.4	Polígonos	36
3.5	Triângulos	38
3.5.1	Trigonometria no triângulo retângulo	40
3.5.2	Congruência de triângulos	41
3.5.3	Semelhança de triângulos	43
3.6	Quadrado	44
4	PLANOS DE AULA: PROVAS SEM PALAVRAS EM DIÁ- LOGO COM A BNCC	45
4.1	Plano de aula 01: Teorema de Pitágoras - parte I	47
4.1.1	Informações iniciais da aula 01	47
4.1.2	Atividade da aula 01	48
4.1.3	Descrição da aula 01	48
4.2	Plano de aula 02: Teorema de Pitágoras - parte II	49
4.2.1	Informações iniciais da aula 02	49
4.2.2	Atividade da aula 02	50
4.2.3	Descrição da aula 02:	52
4.3	Plano de aula 03: lei dos cossenos para ângulos agudos do triângulo retângulo	53

4.3.1	Informações iniciais da aula 03	53
4.3.2	Atividades da aula 03	54
4.3.3	Descrição da aula 03	58
4.4	Plano de aula 04: qualquer triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles	59
4.4.1	Informações iniciais da aula 04	59
4.4.2	Atividade da aula 04	60
4.4.3	Descrição da aula 04	62
4.5	Plano de aula 05: área de um triângulo em função de seus lados e do raio da sua circunferência circunscrita	63
4.5.1	Informações iniciais da aula 05	63
4.5.2	Atividade da aula 05	64
4.5.3	Descrição da aula 05	65
4.6	Plano de aula 06: Teorema de Vivian	66
4.6.1	Informações iniciais da aula 06	66
4.6.2	Atividade da aula 06	67
4.6.3	Descrição da aula 06	68
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICES	75

Introdução

A Geometria é uma das áreas mais notórias da Matemática, entretanto pesquisas apontam que os alunos que concluem o Ensino Médio, no Brasil, apresentam dificuldades nos conceitos de geometria. Segundo Clemente, et. al. (2015) em [2], este fato é justificado, por educadores matemáticos, pelas dificuldades dos professores com os conteúdos geométricos.

Assim, pode-se identificar a não valorização do ensino da Geometria no Ensino Básico, conforme defendido por Clemente, et. al. (2015), em contraste com os objetivos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018) em [1], que enfatiza e defende a necessidade de desenvolver o pensamento geométrico:

Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2018).

Ao longo de minha trajetória como estudante da licenciatura em Matemática dentro da Universidade de São Paulo, atuei como estagiária, acompanhando professores de escolas públicas dos mais diversos bairros da cidade de São Paulo e constatei que Álgebra e Geometria eram estudadas como se fossem dois campos da Matemática independentes, sendo a Geometria cobrada apenas no final do ano letivo e o único diálogo com a Álgebra dada por meio de fórmulas. Em uma das aulas que acompanhei, notei que nenhum aluno da turma conseguiu compreender o significado do Teorema de Pitágoras, por exemplo, uma vez que os alunos não associaram a palavra “quadrado da hipotenusa” como “a área do quadrado, cuja medida do seu lado é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo dado”.

De fato, apesar da Geometria ser um dos mais antigos campos de conhecimento, as pesquisas acadêmicas sobre visualização no Ensino da Matemática são muito mais recentes. Influenciados pela visão filosófica do construtivismo, os primeiros trabalhos sobre o tema foram apresentados somente na década de 1980. Uma dentre os primeiros pesquisadores foi Presmeg (2006) (ver [10]). Para ela, a habilidade de visualização em uma figura, isto é, compreender e analisar seus elementos, de modo a auxiliar na resolução de um problema, é uma tarefa que envolve vários processos cognitivos, como a abstração e a manipulação, além da capacidade de articular Álgebra e Geometria.

De acordo com a BNCC, a Matemática é uma ciência de caráter hipotético-dedutivo, que apresenta um papel fundamental para a compreensão do mundo concreto e abstrato.

Com base nisso e no processo de visualização proposto por Presmeg (2006), o objetivo deste trabalho é estudar as chamadas *proofs without words* ou *provas sem palavras* e discutir seu potencial pedagógico como um recurso aos professores que proponham valorizar o ensino de Geometria, o diálogo entre a Álgebra e a Geometria e o desenvolvimento do pensamento geométrico e hipotético-dedutivo na educação básica, tomando como embasamento teórico a BNCC. Segundo o autor de vários volumes sobre o tema (ver [6, 7, 8]), Nelsen (1993) explica que as provas sem palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático, ou ainda, tenta promover alguma intuição sobre a demonstração formal de tal enunciado.

O presente trabalho foi dado por uma abordagem teórica, ou seja, o trabalho foi fruto de uma pesquisa bibliográfica, e visa contribuir com a formação de professores. A busca de referências bibliográficas foi feita através de bancos de teses de universidades públicas brasileiras ou universidades estrangeiras, periódicos, livros e artigos em revistas de divulgação científica. As provas sem palavras foram adaptadas de [6, 7, 8] para figuras dinâmicas e animações no *software* Geogebra.

O Capítulo 1 tratará do panorâmico histórico das provas sem palavras e de como as figuras auxiliaram o desenvolvimento de problemas matemáticos e como elas se transformaram e se popularizaram como recurso de provas matemáticas por meio de uma revista norte-americana de divulgação científica.

O Capítulo 2 será dedicado à discussão sobre o que é visualização e como esse conceito se aplica ao pensamento geométrico. Para tal, será utilizado como embasamento teórico, o trabalho de Dorfler (1991) e Presmeg (2006) (ver [3, 10]), que abordarão pesquisas teóricas e práticas sobre as representações visuais na Matemática dos estudantes da educação básica americana.

O Capítulo 3 apresentará os pré-requisitos necessários para o Capítulo 4, bem como um material de apoio ao professor. Nele, serão abordados definições e resultados de Geometria Plana que serão necessários para a compreensão das resoluções das provas sem palavras.

O Capítulo 4 irá propor materiais para uso dos professores que consistem em uma seleção de planos de aula explorando as provas sem palavras com resoluções no *software* Geogebra, como recurso para revisar e aprofundar conceitos de Geometria Plana estudados ao longo da educação básica, conforme exigidos pela BNCC, e

visando ser a principal contribuição desta dissertação. Cada prova sem palavras será explorada como uma atividade de ensino de uma determinada propriedade matemática, e essa atividade apresentará justificativas de uso em sala de aula, com base nas habilidades e competências da BNCC.

Por fim, o Capítulo 5 apresentará uma síntese do trabalho, retomando os objetivos aqui apresentados e defendendo as provas sem palavras como um recurso pedagógico que possibilita o exercício do método hipotético-dedutivo, o diálogo da Álgebra com a Geometria e a valorização desta última dentro do currículo das escolas.

1 O surgimento das provas sem palavras

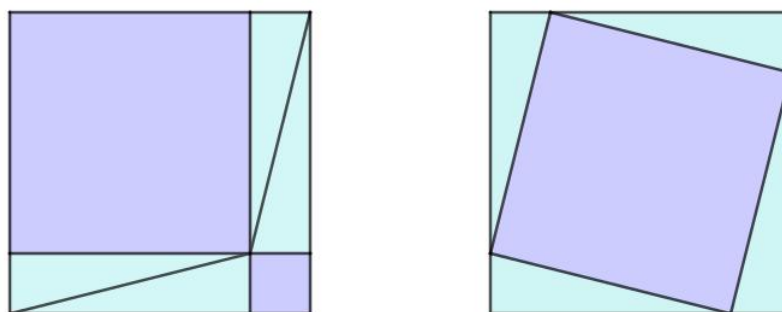
Para a escrita deste capítulo, foram utilizados como referência um artigo da revista de divulgação científica *Mathematical Association of America* e o volume I da série de livros *Proofs Without Words* (ver [4, 6]).

Segundo o autor de vários volumes sobre o tema (ver [6, 7, 8]), Nelsen (1993) explica que as provas sem palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático, ou ainda, tenta promover alguma intuição sobre a demonstração formal de tal enunciado. Figuras sempre foram um recurso usado pelos matemáticos sob as mais diversas necessidades. Neste capítulo, será discutido o surgimento e a popularização desse recurso através dos leitores de uma revista americana de divulgação científica de Matemática em meados da década de 1980.

As figuras dadas na Figura 1 foram encontradas em um texto chinês em 200 a.C. e são um exemplo histórico de como as relações matemáticas podiam ser expressas de modo não algébrico: a figura da esquerda é um quadrado seccionado em dois quadrados e em quatro triângulos retângulos congruentes entre si pelo caso Cateto-Hipotenusa,¹ de modo que os catetos maiores têm a medida do lado do quadrado maior e os catetos menores têm a medida do lado do quadrado menor. Ao transladar e rotacionar os triângulos, obtém-se a figura da direita: um quadrado seccionado nos quatro triângulos retângulos originais e um quadrado, cuja medida do seu lado é igual à medida da hipotenusa de cada triângulo. Como não houve alteração do tamanho da área da figura, é fácil verificar que as áreas dos quadrados da figura da esquerda correspondem à área do quadrado central da figura da direita, mostrando que a soma das áreas dos quadrados das medidas dos catetos é igual a área do quadrado da medida da hipotenusa, enunciado definido como “Teorema de Pitágoras”.

¹ Seja $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos retângulos. Se as hipotenusas e pelo menos, um dos catetos de cada triângulo forem congruentes, então $\triangle ABC$ é congruente ao $\triangle DEF$.

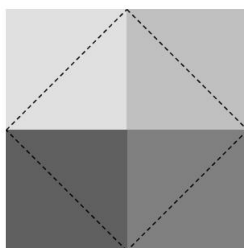
Figura 1 – Uma prova sem palavras do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autora (2021).

Segundo Doyle (2014) em [4], os diagramas também foram usados pelos filósofos como forma de discutir o conhecimento. Sócrates (470 a.C. - 399 a.C.) utilizou-se da Figura 2 para convencer que uma ideia intuitiva poderia ser transformada em conhecimento através de um olhar cuidadoso: dado o quadrado de arestas tracejadas, seccione sua área total em quatro partes através da intersecção de suas diagonais. Note que as quatro áreas geradas são iguais, pois todos os triângulos são congruentes pelo caso Lado-Lado-Lado², uma vez que a intersecção das diagonais é o ponto médio das próprias, dividindo cada uma das duas diagonais em segmentos congruentes. Assim, para gerar um novo quadrado com o dobro da área, basta construir um triângulo congruente para cada um dos quatro triângulos gerados, de modo que a medida das diagonais sejam a medida dos lados do novo quadrado.

Figura 2 – Representação da duplicação do quadrado.



Fonte: Autora (2021).

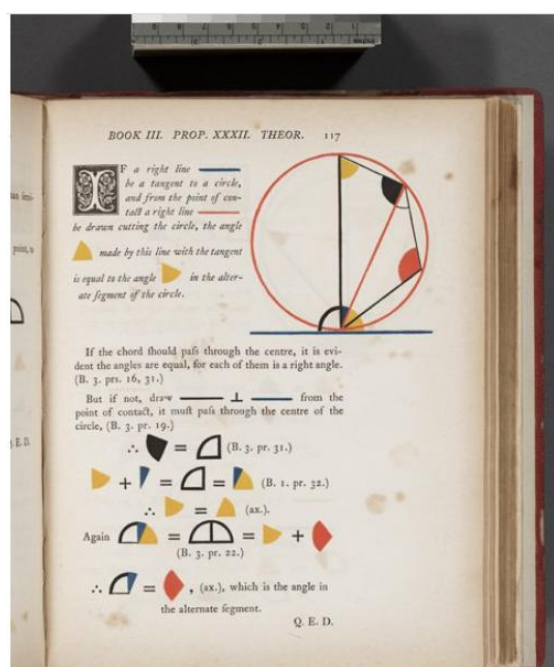
Tal discussão levou à descoberta do problema da duplicação do quadrado, cujo enunciado é o seguinte: dado um quadrado de área arbitrária, gerar um novo quadrado com o dobro da área. A demonstração algébrica é, segundo Doyle (2014), muito trabalhosa. Acredita-se que não foi a intenção de Sócrates utilizar essa

² Seja $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos quaisquer. Se todos os lados de $\triangle ABC$ forem congruentes a todos os lados de $\triangle DEF$, então $\triangle ABC$ é congruente ao $\triangle DEF$.

figura como uma prova, mas sim como suporte para sua argumentação algébrica. Entretanto, a figura é intuitiva a ponto de dispensar uma argumentação verbal como foi feito no parágrafo anterior.

Oliver Byrne (1810 - 1880) consolidou as provas visuais matemáticas ao escrever uma versão dos *Elementos de Euclides* (ver Figura 3), em 1847, com figuras coloridas ao “invés de grandes textos, de modo a facilitar a vida do leitor”. A ideia da obra era minimizar a quantidade de texto para as demonstrações algébricas por meio de figuras, uma abordagem dita “inovadora” que consolidou a visualização no âmbito matemático.

Figura 3 – Uma página do livro *Euclid’s Elements* escrito por Oliver Byrne.



Fonte: Doyle (2014, p.1).

Apesar da utilização em alguns momentos da história, as provas sem palavras começaram a serem difundidas apenas pelos matemáticos modernos. Entretanto, não era um recurso muito utilizado até 1970 quando surgiu uma coluna na revista intitulada *Proofs without words*. Em 1975, foi publicado um artigo intitulado *Dois enunciados matemáticos sem palavras*, que apareceu no final da revista. Um deles era uma demonstração do Teorema de Pitágoras, ilustrado na Figura 1, na qual não foi apresentada no artigo como uma demonstração, mas sim como uma ilustração para convencer o leitor do resultado.

Em 1976, dois meses depois das figuras serem publicadas, a *Mathematics Magazine*, famosa revista norte-americana de divulgação científica, ficou sob nova

direção de dois co-autores. Com tal mudança no editorial, foi mudado o layout do jornal, de modo a surgir a seção *News and letters*. Essa nova seção permitiu aos leitores que fizessem reflexões sobre matérias publicadas anteriormente em outras edições da revista. Os enunciados figurativos, publicados por Rufus Isaac, promoveram vários comentários, de modo que os editores da revista lançaram uma nota, encorajando os leitores a mandarem mais resoluções às figuras propostas por Isaac e que também trouxessem outras figuras às próximas edições da revista de modo que fosse aberta uma nova seção, intitulada *Proofs without words*.

Inicialmente, foram publicadas dois enunciados por ano. Conforme os anos passaram, a quantidade de enunciados foi aumentando e despertando a curiosidade de matemáticos. Um deles foi o professor da *Lewis and Clark University*, Roger Nelsen, que publicou um enunciado, que prova desigualdades entre as média harmônica, média geométrica, média aritmética e a média quadrada. Nelsen reuniu as provas sem palavras publicadas em edições anteriores e publicou vários livros com uma coletânea de enunciados, entre eles: *Proofs without words: exercises in visual thinking (1993)*, *Proofs without words II: more exercises in visual thinking (2000)* e *Proofs without words III: more exercises in visual thinking (2006)* (ver [6, 7, 8]).

A grande discussão por trás das provas sem palavras é se de fato elas podem ser consideradas provas formais. Para Nelsen (1993), como dito anteriormente no início do capítulo, as provas sem palavras são figuras ou diagramas que auxiliam o leitor a entender o porquê determinado enunciado matemático é válido e pode dar ideias sobre como começar uma demonstração formal. E ainda, ele acredita que as provas sem palavras são um recurso importante para instigar a curiosidade matemática. Elas funcionam como um esboço para as demonstrações matemáticas e que apesar de menos rigorosas, são mais atraentes ao leitor que busca conhecer melhor a Matemática. Esta dissertação irá tomar a seguinte posição com relação às figuras:

“A questão predominante é que as imagens nada mais são do que dispositivos heurísticos; são psicologicamente sugestivos e pedagogicamente importantes - mas não provam nada. Quero me opor a essa visão e defender que as imagens tenham um papel legítimo a desempenhar como evidência e justificativa - um papel muito além da heurística.” - (aprod DOYLE et. al., 1993, p.2)

2 Visualização no ensino de Geometria

A Matemática é uma disciplina do currículo elementar que exige a utilização de diversos objetos de caráter majoritariamente visual para a concretização de seus conceitos abstratos e concretos como símbolos, tabelas, gráficos estatísticos, gráficos de funções, figuras planas, figuras tridimensionais e fórmulas.

Apesar da educação Matemática ser global e estar presente desde o período pré-histórico, conforme relata Presmeg (2006) em [10], a visualização no ensino como tema de pesquisa em educação matemática é relativamente recente. Um levantamento feito por Bishop (1988 apud PRESMEG, 2006) mostrou que dos 233 artigos publicados pelo *Journal for Research in Mathematics Education* em meados da década de 1980, apenas 8 estavam relacionados ao tema de visualização. No ano seguinte, durante a décima primeira edição do *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) a proporção foi a mesma.

Segundo Presmeg (2006), no campo da Psicologia, as pesquisas sobre o imaginário, estavam consolidadas no século XIX. Entretanto, no século XX surgiu o Behaviorismo, estudo da Psicologia que valoriza estudos com comprovações experimentais e não subjetivas como sensações e percepções.

Mais recentemente, na década de 1980, com a ascensão do construtivismo, as pesquisas sobre metodologias de ensino começaram a ganhar notoriedade como tema complexo a ser estudado. Esse foi o momento propício para pesquisas sobre o pensamento visual no ensino de Matemática (PRESMEG, 2006, p.2, tradução nossa).

2.1 Terminologia

O termo visualização pode ser usado de várias maneiras, de acordo com o campo de pesquisa ou da área de conhecimento. Sendo assim, faz-se necessário definir o termo que será amplamente utilizado nesta presente pesquisa. Segundo Piaget e Inhelder (1971), o termo visualização é utilizado para imagens visuais que estão na mente do indivíduo, guiando sua criação e modificações. Isso inclui o processo de construção e transformação visual no imaginário. Todas as manipulações implicam no fazer Matemática.

Uma imagem visual, de acordo com Presmeg (2006), é uma construção

mental, descrevendo uma informação espacial ou visual. Diz-se que um visualizador é a pessoa que prefere usar um método visual quando há a possibilidade de escolher outro método.

2.2 Imagens de visualização

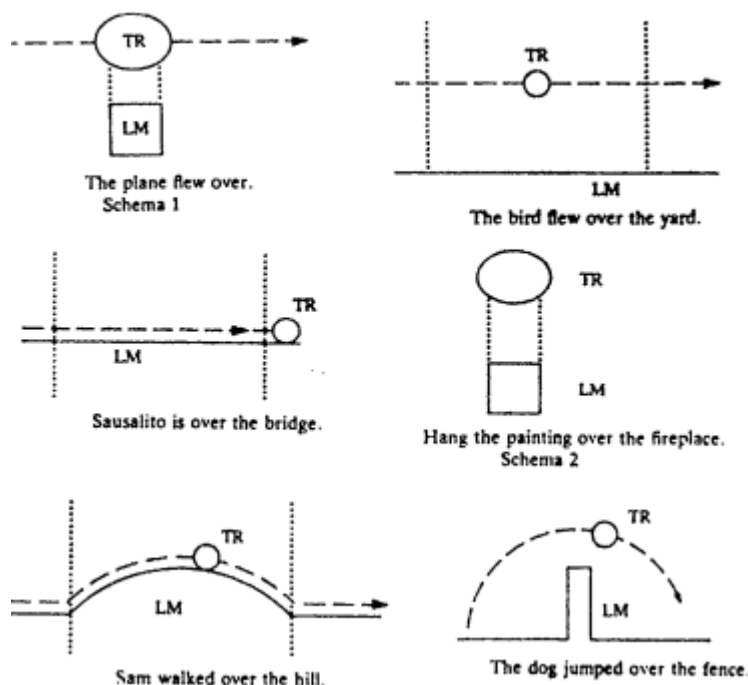
Somente em 1991, o tema Imaginário e Visualização ganhou uma categoria no PME, em duas das três plenárias do congresso os autores Dorfler e Presmeg discutiram os tipos de imagens que utilizamos hoje. Assim, tomando como base os estudos de Dorfler, esta seção discutirá o conceito da chamada *image schemata* baseado no artigo “Meaning: Image Schemata and protocols”, cujo objetivo é discutir como os indivíduos se apropriam de alguma ideia matemática. Os estudos de Dorfler (1991) [3], mostram a complexidade desse tema ao salientar a existência de teorias filosóficas e epistemológicas com diferentes interpretações para a definição do que seria o significado de conceitos matemáticos. Entretanto, essa apropriação não deve ser entendida de modo que os significados formais de conceitos matemáticos sejam pontos de partida, ou extremamente ignorados, mas sim adquiridos ao longo do processo de aprendizagem. Dessa forma, salienta a necessidade da coexistência de significados formais, por meio de estudos formais, cuja a vantagem é a segurança em manipular ferramentas matemáticas, entretanto, “o preço disso é a perda da imaginação e criatividade” (Dorfler, p. 18).

A palavra “significado” deve ser interpretada com cautela, pois não há uma definição objetiva, não sendo possível comparar o entendimento por um único tipo de teoria descritiva, uma vez que o substantivo “significado” tem um caráter subjetivo. O interesse do Dorfler foi entendê-la sob a perspectiva do comportamento cognitivo. Para isso, ele irá tomar como ponto de partida do estudo teórico de Johnson e Lakoff, os quais utilizaram o termo *image schemata*, definidas como estruturas esquemáticas para explicitar relações de uma estrutura linguística (as palavras, por exemplo):

Um mecanismo cognitivo utilizado para o uso de palavras (e outras unidades linguísticas). Uma *image schemata* é uma estrutura esquemática para denotar significados que uma palavra possui. Mais precisamente, a representação de uma palavra é gerada por um tipo de conjunto de palavras que são correlacionadas pelo processo metafórico de correspondência e transformações metonímias (DORFLER, p. 19)

Observe o exemplo da Figura 4, em que Lakoff apresenta uma análise detalhada de representações para conceituar a palavra “over”.

Figura 4 – Representações para explicar a palavra “over”.



Fonte: Dorfler (1991, p.19).

Importante salientar que a Figura 4 é um meio figurativo de representação de uma *image schemata*, sendo uma forma de se referir a ela, uma vez que “as *image schemata* é então vista como consistindo das atividades cognitivas de interpretação, aplicação, projeção, transformações de figuras geométricas do tipo esquemáticas” (DORFLER, p.20)

Segundo Dorfler (1991), uma *image schemata* é um processo hipotético cognitivo baseado em modelos esquemáticos para obter o significado referencial de palavras, sendo que a interpretação individual das *image schemata* resultam das experiências próprias do indivíduo.

Ainda, os significados estão baseados em mecanismos que podem ser explicados por objetos concretos ou esquemas geométricos. Esses últimos não são usados para retratar um objeto, mas servem para expressar relações de caráter espacial e temporal.

Os conceitos Matemáticos podem ser entendidos como relações e complexos sistemas de relações. A manipulação cognitiva dos conceitos matemáticos é facilitada pela construção e a disponibilidade de *image schemata* adequadas.

Uma *image schema* é uma interação perceptiva e/ou cognitiva e a manipulação de alguma classe de modelo de objetos semelhantes, seja um material, um desenho ou apenas uma imagem. Estes últimos serão chamados de operadores (DORFLER, p. 21).

2.2.1 *Figurative Image Schemata*

É definido *Figurative Image Schemata* como aquelas imagens obtidas por meio de operadores puramente figurativos, tais operadores mostram diversas características que guiam o aprendiz na formação de uma adequada imagem esquema. Tal condição não é suficiente para o aluno atingir o entendimento, mas sim a contribuir com o entendimento. Segundo Dorfler (1991), conceitos matemáticos como zero da função, convexidade, periodicidade, entre outros elementos pertinentes ao estudo de funções são alguns exemplos de objetos para os quais uma imagem figurativa adequada favorável à promoção do processo cognitivo do estudante, desde que aliado a uma adequada explicação do professor e à iteração social. Já outros conceitos como figuras planas também podem obter significado gerado pelas *Figurative Image Schemata*, entretanto, é necessário cautela com relação ao operador, que pode gerar má interpretação. Por exemplo, em livros didáticos é comum observar uma única representação para cada tipo de trapézio (reto, isósceles e escaleno), de modo que o estudante gere significado de trapézio somente às figuras mostradas, sem refletir sobre sua definição e podendo perder-se em questões interessantes como perceber que o quadrado, por exemplo, é um caso particular de trapézio (ver Figura 5).

Figura 5 – Quadrado é um caso particular de trapézio.



Fonte: Autora (2022).

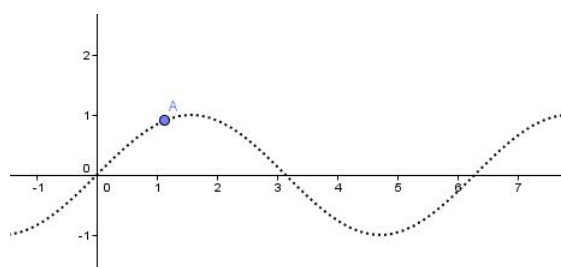
Assim, Dorfler (1991) enfatiza o fato que a *Image Schemata* é de caráter altamente individual e subjetivo, que depende das suas vivências sociais e características pessoais.

2.2.2 *Operative Image Schemata*

Define-se *Operative Image Schemata* como aquelas obtidas por meio de associações entre o operador e operações específicas.

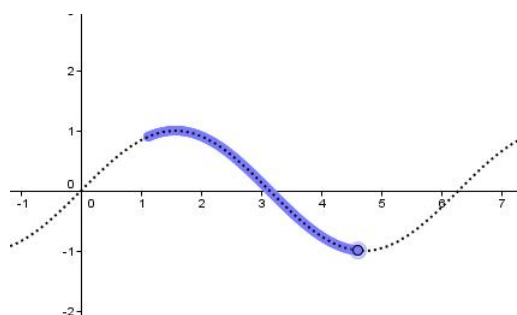
Uma apropriada *Figurative Image Schemata* favorece a manipulação de conceitos matemáticos, porém, existem casos em que se faz necessário relacionar o operador as operações específicas. Isto é, não se restringir a *Figurative Image Schemata* apenas. Assim, por exemplo, para a compreensão de um gráfico de uma função com valores reais, uma adequada interpretação operativa somaria ao processo cognitivo do aluno, contribuindo para um entendimento apropriado. Para Dorfler (1991), a compreensão do gráfico requer do aluno uma operação mental, dada pelo movimento vertical a partir do valor de x até o gráfico, movimentando-se 90 graus à direita ou à esquerda e continuando, à direita ou à esquerda, até encontrar o valor de $f(x)$. Após a apropriação do conceito de gráfico de uma função, a introdução da noção de ponto máximo de uma função, por exemplo, pode ser auxiliada por uma *Figurative Image Schemata*. Ver Figuras 6 e 7.

Figura 6 – Em um plano cartesiano, ponto inicial A .



Fonte: Autora (2022).

Figura 7 – Plotagem de pontos de um gráfico.



Fonte: Autora (2022).

Outro exemplo, é a indicação de abertura e fechamento de ângulos como pode ser visto na Figura 8. Para que o aluno compreenda que tal objeto é uma região do plano, delimitada por duas semirretas (ver Definição 3.2.2).

Figura 8 – Representação de ângulo: região entre duas semirretas.



Fonte: Autora (2022).

2.2.3 *Relation Image Schemata*

Define-se *Relation Image Schemata* como aquelas obtidas por meio de relações mútuas entre os operadores. “Mostrar um desenho em geral não é suficiente para estimular a construção apropriada de uma *Relation Image Schemata* ou *Operative Image Schemata* para o estudante (DORFLER, p. 27)”. Nestes casos, é necessário utilizar-se das orientações sociais e lembrar-se da importância do papel do professor para guiar tais construções. Por exemplo, durante uma discussão sobre a definição de uma circunferência, utilizar-se da rotação de um objeto qualquer, fixado sob um ponto, é uma relação entre dois operadores: o ponto fixo, esquemático de alguma forma, e o próprio objeto. Note que rotações e translações fazem parte deste tipo de *image schemata*.

2.2.4 *Symbolic Image Schemata*

Define-se *Symbolic Image Schemata* como aquelas obtidas por meio de fórmulas algébricas. Para Dorfler, a compreensão do significado das fórmulas matemáticas é um processo cognitivo que demanda, mais uma vez, orientação por meio dos professores de modo a auxiliar o aluno a atingir o entendimento. Por exemplo, problematize a fórmula do Teorema de Pitágoras ($a^2 + b^2 = c^2$): é necessário explicar, através de operadores, que cada variável ao quadrado representa a área de quadrados de medidas a , b e c .

3 Pré-requisitos

Este capítulo destina-se aos pré-requisitos necessários para a compreensão das resoluções das provas sem palavras que serão vistas no Capítulo 4. Serão abordados definições e resultados envolvendo conceitos de Geometria Plana. É importante salientar que os resultados apresentados aqui não são originais e podem ser encontrados com mais detalhes em Muniz Neto (2013) e Osvaldo e Pompeo (1993) (ver [5, 9]), bem como em outras referências. No entanto, as figuras são de autoria da própria autora.

Apesar do leitor poder escolher outras referências para consulta, é necessário atentar-se às notações de objetos geométricos, como ângulo, medida angular, segmento etc, as quais serão utilizadas constantemente no Capítulo 4.

3.1 Ponto, reta, semirreta e segmento

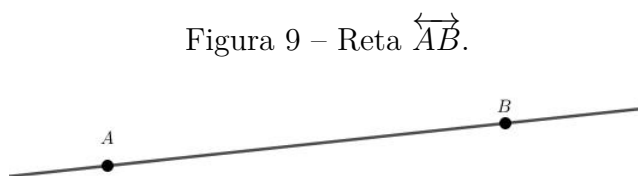
Ponto, reta e plano serão considerados objetos matemáticos primitivos, isto é, serão adotados sem definição. Pode-se denotar:

- ponto com letras maiúsculas: A, B, C, \dots ;
- reta com letras minúsculas: a, b, c, \dots ;
- plano com letras gregas minúsculas: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Dados dois pontos A e B , apenas uma das seguintes afirmações ocorre: ou A e B são coincidentes ($A = B$) ou A e B são distintos ($A \neq B$).

Dados um ponto A e uma reta r , apenas uma das seguintes afirmações ocorre: ou o ponto A está na reta r ($A \in r$) ou o ponto A não está na reta r ($A \notin r$).

Pelos postulados de Euclides, dois pontos distintos A e B do plano determinam uma única reta que passa por eles (ver Figura 9). Essa reta será indicada por \overleftrightarrow{AB} .



Fonte: Autora (2021).

Três pontos A , B e C no plano são **colineares** quando C estiver sobre a reta \overleftrightarrow{AB} . Caso contrário, A , B e C são **não colineares**.

Definição 3.1.1 (Segmento de reta) *Dados dois pontos distintos A e B do plano, define-se segmento de reta como a união do conjunto $\{A, B\}$ com o conjunto dos pontos da reta \overleftrightarrow{AB} que estão entre A e B . O segmento de reta será denotado por \overline{AB} e os pontos A e B são as extremidades do segmento \overline{AB} (ver Figura 10).*

Figura 10 – Segmento de reta \overline{AB} .



Fonte: Autora (2021).

Se $A = B$ dizemos que o segmento \overline{AB} é o **segmento nulo**.

Observação 3.1.2 (Medida do segmento) *A medida do segmento \overline{AB} será denotada por $m(\overline{AB})$.*

Definição 3.1.3 (Semirreta) *Dados dois pontos distintos A e B do plano, define-se semirreta como a união do segmento de reta \overline{AB} com o conjunto dos pontos P tais que B está entre A e P . A semirreta será denotada por \overrightarrow{AB} e o ponto A é a origem da semirreta \overrightarrow{AB} (ver Figura 11).*

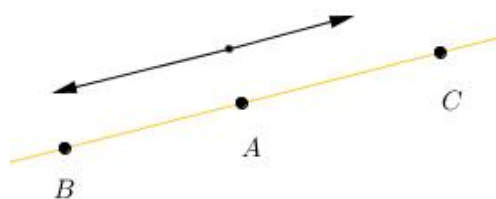
Figura 11 – Semirreta



Fonte: Autora (2021).

Observação 3.1.4 (Semirretas opostas) *Se A está entre B e C , então as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são chamadas de semirretas opostas (ver Figura 12).*

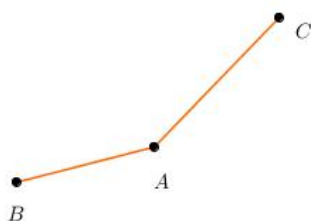
Figura 12 – Semirretas opostas.



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.1.5 (Segmentos consecutivos) *Dois segmentos de reta são ditos consecutivos quando uma extremidade de um deles coincide com uma extremidade do outro (ver Figura 13).*

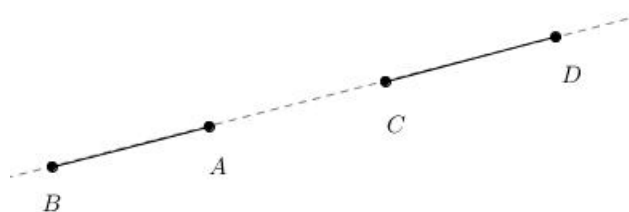
Figura 13 – Segmentos consecutivos.



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.1.6 (Segmentos colineares) *Dois segmentos de reta são ditos colineares quando estão numa mesma reta (ver Figura 14).*

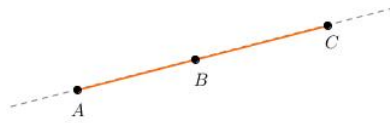
Figura 14 – Segmentos colineares.



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.1.7 (Segmentos adjacentes) *Dois segmentos de reta consecutivos e colineares são ditos adjacentes quando possuem apenas uma extremidade em comum (ver Figura 15).*

Figura 15 – Segmentos adjacentes.

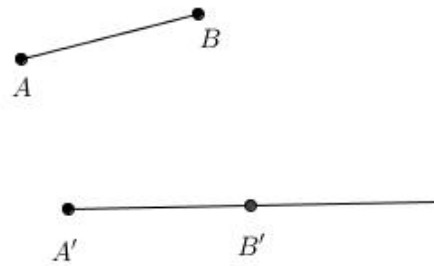


Fonte: Autora (2021).

Definição 3.1.8 (Segmentos congruentes) *Dois ou mais segmentos de reta são congruentes quando possuem a mesma medida. A congruência entre segmentos será denotada pelo símbolo “ \equiv ”.*

Observação 3.1.9 (Postulado do transporte de segmentos) *Dados um segmento de reta \overline{AB} no plano e uma semirreta de origem em um ponto A' deste plano, temos que existe sobre esta semirreta um único ponto B' tal que $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$. O postulado é ilustrado na Figura 16.*

Figura 16 – Transporte de segmentos.

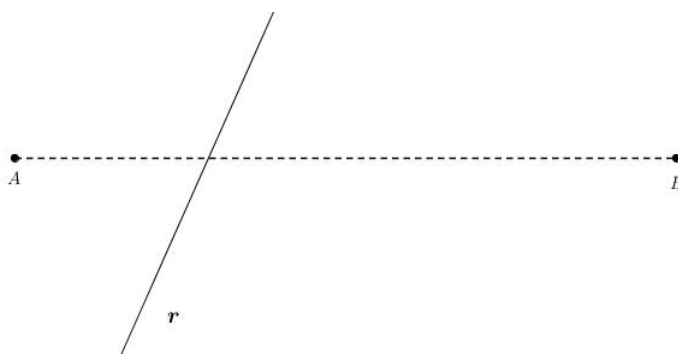


Fonte: Autora (2021).

3.2 Ângulos

Definição 3.2.1 (Região convexa) *Uma região Σ do plano é convexa quando, para todos os pontos $A, B \in \Sigma$, tivermos $\overline{AB} \subset \Sigma$. Caso contrário, Σ é uma região não convexa.*

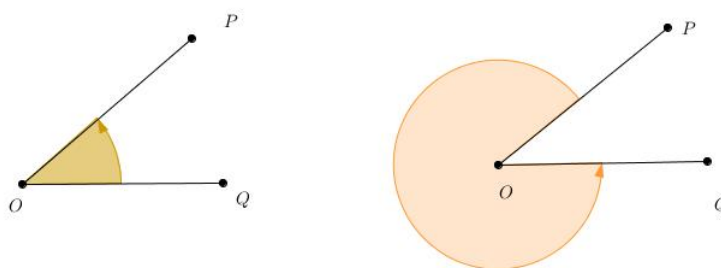
Uma reta r de um plano divide esse plano em duas regiões convexas, os **semiplanos** delimitados por r . Se A e B são dois pontos distintos em cada um desses semiplanos, então $\overline{AB} \cap r \neq \emptyset$ (ver Figura 17).

Figura 17 – Semiplanos determinados pela reta r .

Fonte: Autora (2021).

Definição 3.2.2 (Ângulo) Dadas duas semirretas \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} no plano de mesma origem em O , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} . O ângulo de vértice O e lados \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} será denotado por $P\hat{O}Q$ (ver Figura 18).

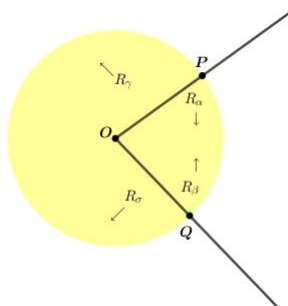
Figura 18 – Regiões angulares no plano.



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.2.3 (Interior e exterior de um ângulo) Considere o ângulo $P\hat{O}Q$ de vértice O e lados \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} . Nessas condições, temos:

1. O interior do ângulo $P\hat{O}Q$ é definido pela interseção $R_\alpha \cap R_\beta$, onde R_α é o semiplano com origem na reta \overleftrightarrow{OP} e que contém o ponto Q e R_β é o semiplano com origem na reta \overleftrightarrow{OQ} e que contém o ponto P (ver Figura 19).
2. O exterior do ângulo $P\hat{O}Q$ é definido pela união $R_\gamma \cup R_\sigma$, onde R_γ é o semiplano com origem na reta \overleftrightarrow{OP} e que não contém o ponto Q e R_σ é o semiplano com origem na reta \overleftrightarrow{OQ} e que não contém o ponto P (ver Figura 19).

Figura 19 – Interior e exterior do ângulo $P\hat{O}Q$.

Fonte: Autora (2021).

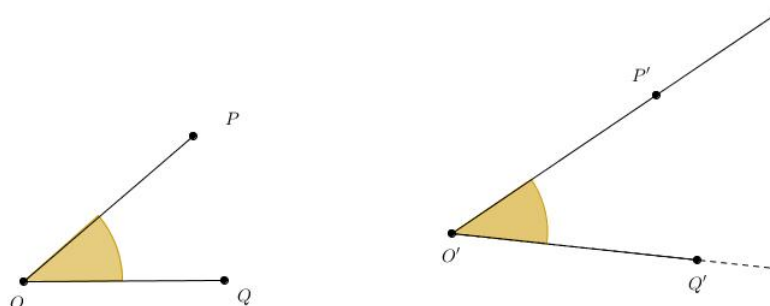
Observação 3.2.4 *O interior de um ângulo é convexo e os pontos do interior são pontos internos ao ângulo. Por outro lado, o exterior de um ângulo é côncavo e os pontos do exterior são pontos externos ao ângulo.*

Observação 3.2.5 *A medida angular varia de 0 a 2π radianos, mas também será usada a escala em graus, que varia de 0° a 360° . Se for necessário utilizar a medida angular de um determinado ângulo, denotaremos o símbolo m antes da menção do ângulo. Por exemplo, se quisermos afirmar que a medida angular de um determinado ângulo $P\hat{O}Q$ é igual a 60° , será dito apenas que $m(P\hat{O}Q) = 60^\circ$.*

Definição 3.2.6 (Ângulos congruentes) *Dois ou mais ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida. A congruência entre ângulos será denotada pelo símbolo “ \equiv ”.*

Observação 3.2.7 (Postulado do transporte de ângulos) *Dados um ângulo $P\hat{O}Q$ de vértice O e lados \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} e uma semirreta $\overrightarrow{O'P'}$ de um plano, temos que existe sobre este plano, e num dos semiplanos que a reta $\overleftrightarrow{O'P'}$ determina, uma única semirreta $\overrightarrow{O'Q'}$ que forma com $\overrightarrow{O'P'}$ um ângulo $P'\hat{O}Q'$ tal que $P'\hat{O}Q' \equiv P\hat{O}Q$. O postulado é ilustrado na Figura 20.*

Figura 20 – Transporte de ângulos.



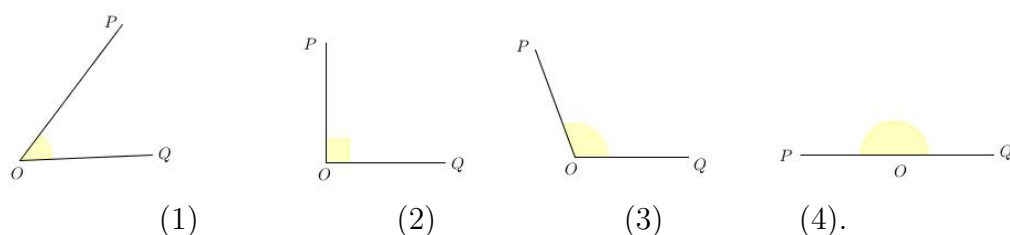
Fonte: Autora (2021).

Considere o ângulo $P\hat{O}Q$ de vértice O e lados \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} . Dizemos que:

1. $P\hat{O}Q$ é **agudo** quando $0^\circ < P\hat{O}Q < 90^\circ$.
2. $P\hat{O}Q$ é **reto** quando $P\hat{O}Q = 90^\circ$.
3. $P\hat{O}Q$ é **obtuso** quando $90^\circ < P\hat{O}Q < 180^\circ$.
4. $P\hat{O}Q$ é **raso** quando $P\hat{O}Q = 180^\circ$. Neste caso, as semirretas \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} são opostas, isto é, P , O e Q estão na mesma reta, com $O \in \overline{PQ}$.

Os casos particulares descritos acima são ilustrados na Figura 21.

Figura 21 – Ângulos: (1) agudo. (2) reto. (3) obtuso. (4) raso.

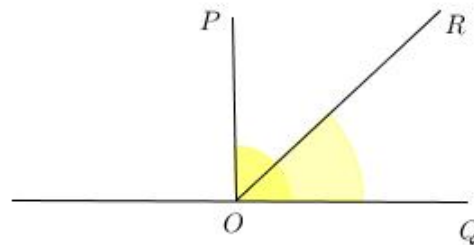


Fonte: Autora (2021).

Observação 3.2.8 (Ângulos complementares e suplementares) *Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90° . Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180° .*

Definição 3.2.9 (Ângulos consecutivos) *Dois ângulos são ditos consecutivos quando um lado de um deles coincide com um lado do outro (ver Figura 22).*

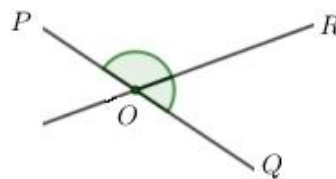
Figura 22 – Ângulos consecutivos.



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.2.10 (Ângulos adjacentes) *Dois ângulos consecutivos $PÔR$ e $RÔQ$ de mesmo vértice O são ditos adjacentes quando não possuem pontos internos em comum (ver Figura 23).*

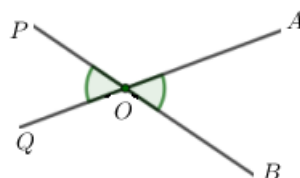
Figura 23 – Ângulos adjacentes.



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.2.11 (Ângulos opostos pelo vértices) *Dois ângulos $AÔB$ e $PÔQ$ de mesmo vértice O são opostos pelo vértice se seus lados são semirretas opostas, isto é, as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OQ} , bem como as semirretas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OP} , são opostas, respectivamente (ver Figura 24).*

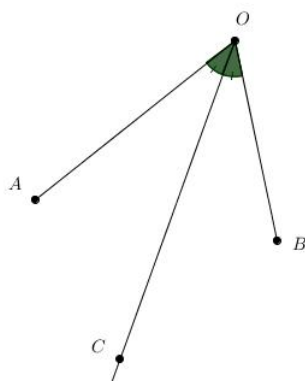
Figura 24 – Ângulos opostos pelo vértices.



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.2.12 (Bissetriz de um ângulo) *Uma semirreta \overrightarrow{OC} é bissetriz do ângulo $AÔB$ se, e somente se, $AÔC \equiv BÔC$ (ver Figura 25).*

Figura 25 – Bissetriz de um ângulo.

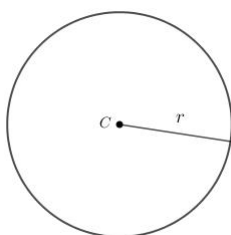


Fonte: Autora (2022).

A unicidade da bissetriz de um ângulo está demonstrada em [9].

3.3 Circunferência

Definição 3.3.1 (Circunferência) *Circunferência é o conjunto de pontos do plano, que distam uma mesma distância de um dado ponto do mesmo plano. Seja $r > 0$ tal distância, denominado o raio, e C o ponto dado, denominado o centro da circunferência (ver Figura 26).*

Figura 26 – Circunferência de centro em C e raio r .

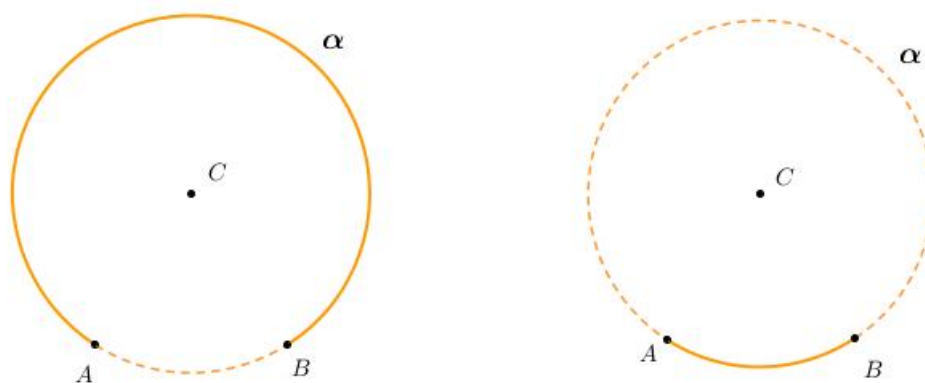
Fonte: Autora (2021).

O **diâmetro** de uma circunferência de centro em C e raio r é dado por $2r$.

Definição 3.3.2 (Arco de circunferência) *Sejam α uma circunferência de centro em C e dois pontos distintos, A e B , pertencentes à α . Nessas condições, define-se:*

1. Arco menor \widehat{AB} da circunferência α é a união dos conjuntos dos pontos A e B e de todos os pontos de α que estão no interior do ângulo $A\hat{C}B$ (ver Figura 27).
2. Arco maior \widehat{AB} da circunferência α é a união dos conjuntos dos pontos A e B e de todos os pontos de α que estão no exterior do ângulo $A\hat{C}B$ (ver Figura 27).

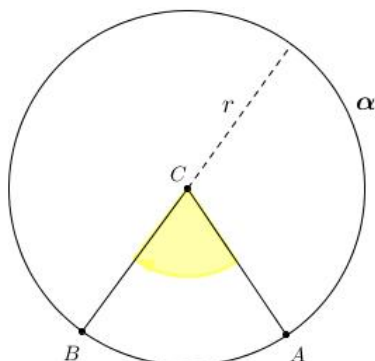
Figura 27 – Arco maior \widehat{AB} da circunferência α (figura à esquerda) e Arco menor \widehat{AB} da circunferência α (figura à direita).



Fonte: Autora (2021).

Definição 3.3.3 (Ângulo central de uma circunferência) *Ângulo central de uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Mais precisamente, sejam C o centro de uma circunferência α e dois pontos distintos, A e B , pertencentes à α , \widehat{AB} é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{C}B$ (ver Figura 28).*

Figura 28 – Representação da circunferência α , de centro C e raio r e o ângulo central \widehat{ACB} .

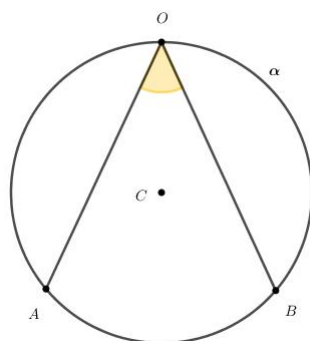


Fonte: Autora (2021).

Definição 3.3.4 (Medida de arcos de circunferência) *A medida de um determinado arco de circunferência é dado pela medida do ângulo central correspondente, em graus ou radianos. Quando for necessário referenciar a medida do arco \widehat{AB} , será utilizada a simbologia $m(\widehat{AB})$.*

Definição 3.3.5 (Ângulos inscritos em uma circunferência) *Ângulo inscrito em uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a circunferência. Mais precisamente, sejam α uma circunferência de centro em C e O um ponto pertencente à α , define-se o ângulo inscrito \widehat{AOB} relativo à α , em que cada uma de suas respectivas semirretas, \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , interceptam a circunferência no ponto O (vértice de \widehat{AOB}) e em dois pontos distintos, A e B , da circunferência, respectivamente (ver Figura 29).*

Figura 29 – Ângulo inscrito \widehat{AOB} relativo a circunferência α .



Fonte: Autora (2021).

Na Figura 29, \widehat{ACB} é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito \widehat{AOB} e \widehat{AB} é o arco correspondente ao ângulo central \widehat{ACB} .

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [9], Capítulo XI, Seção III-167.

Teorema 3.3.6 (Medida do ângulo inscrito) *A medida do ângulo inscrito a uma circunferência mede metade da medida do ângulo central correspondente.*

3.4 Polígonos

Será necessário definir polígonos convexos para que seja possível definirmos triângulos e quadrados, cujas suas propriedades serão utilizadas no Capítulo 4.

Definição 3.4.1 (Linha poligonal) *Dada A_1, A_2, \dots, A_n , com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, uma sequência finita de pontos distintos do plano. Chama-se linha poligonal à união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$, tal que três pontos consecutivos, A_{k-1}, A_k, A_{k+1} , são não colineares. Se A_{n+1} coincidir com A_1 , diz-se que a linha poligonal é fechada. Caso contrário, se A_n não coincidir com A_1 , diz-se que a linha poligonal é aberta.*

E ainda, cada um dos pontos A_i , onde $i = 1, 2, \dots, n$, serão denominados vértices, cada segmento $\overline{A_iA_{i+1}}$ será denominado lado ou aresta e a linha poligonal será denotada por $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$.

Na Figura 30, ilustramos linhas poligonais, aberta e fechada.

Figura 30 – Exemplos de linhas poligonais: (1) aberta e (2) fechada.

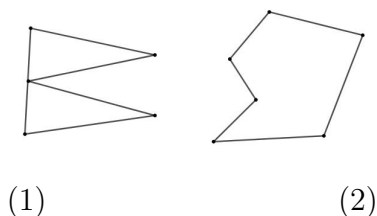


Fonte: Autora (2021).

Definição 3.4.2 (Linha poligonal fechada simples) *Uma linha poligonal fechada $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ é simples se não há interseção entre dois segmentos não consecutivos. Caso contrário, a linha poligonal fechada é dita não simples. A este tipo de linha poligonal é dado o nome de polígono simples.*

Na Figura 31, ilustramos linhas poligonais fechadas, simples e não simples.

Figura 31 – Exemplos de linhas poligonais fechadas: (1) não simples e (2) simples.



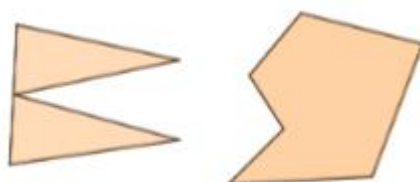
Fonte: Autora (2021).

Observação 3.4.3 (Polígono simples) *Uma linha poligonal fechada simples é também chamada de polígono simples.*

Definição 3.4.4 (Região poligonal) *A região poligonal correspondente a uma linha poligonal fechada é a união da linha poligonal com os pontos do seu interior.*

Na Figura 32, ilustramos as regiões poligonais correspondentes as linhas poligonais fechadas da Figura 31.

Figura 32 – Exemplos de regiões poligonais.



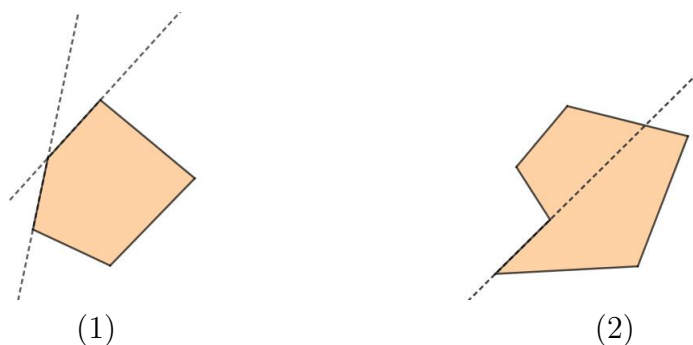
Fonte: Autora (2021).

Definição 3.4.5 (Polígono convexo) *Um polígono simples é dito polígono convexo quando a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n - 2)$ vértices, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, em um mesmo semiplano, dos dois que ela determina. Um polígono simples não convexo é denominado côncavo.*

Na Figura 33, ilustramos regiões poligonais correspondentes a polígonos, convexo e côncavo.

Dizemos que um polígono convexo $A_1A_2\dots A_n$ é um **n -ágono** se ele possuir um número n de lados (n vértices). No entanto, destacamos o uso dos nomes **triângulo** para $n = 3$ e **quadrilátero** para $n = 4$.

Figura 33 – Exemplos: (1) polígono convexo e (2) polígono côncavo.



Fonte: Autora (2021).

Dado um polígono convexo $A_1A_2\dots A_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, os ângulos convexos $A_{i-1}\hat{A}_iA_{i+1}$ são os **ângulos internos** do polígono. Dessa forma, um polígono de n vértices possui n ângulos internos.

Definição 3.4.6 (Polígono regular) *Um polígono convexo é dito regular quando todos os seus lados e todos os seus ângulos internos são congruentes.*

Definição 3.4.7 (Polígono inscritível) *Um polígono convexo é dito inscritível quando existe uma única circunferência que passa por todos seus vértices.*

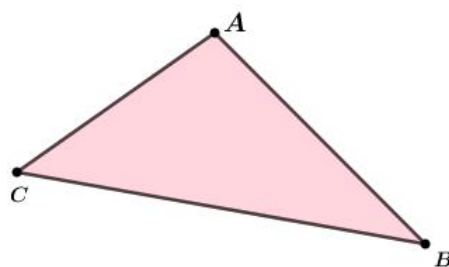
Observação 3.4.8 *Se um polígono convexo está inscrito numa circunferência, dizemos que a circunferência é circunscrita em tal polígono.*

3.5 Triângulos

Um triângulo é um caso particular de polígono convexo, conforme descrito a seguir.

Definição 3.5.1 (Triângulo) *Dizemos que ABC é um triângulo se, e somente se, ABC é um polígono convexo de três lados.*

O triângulo será denotado por $\triangle ABC$, sendo seus elementos três ângulos ($B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$) e três lados (\overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA}). A região triangular correspondente ao triângulo $\triangle ABC$ é ilustrada na Figura 34.

Figura 34 – Triângulo $\triangle ABC$ de vértices A , B e C .

Fonte: Autora (2021).

Como um triângulo possui três lados, então temos apenas três possibilidades para os comprimentos dos lados, dadas na definição a seguir.

Definição 3.5.2 (Triângulo equilátero, isósceles e escaleno.) *Um triângulo $\triangle ABC$ é denominado:*

1. *Escaleno, quando os três lados não são congruentes dois a dois.*
2. *Isósceles, quando possui pelo menos dois lados congruentes.*
3. *Equilátero, quando possui três lados congruentes. Note que um triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles.*

Observação 3.5.3 *Todo triângulo é inscritível em uma circunferência.*

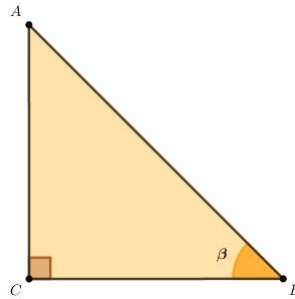
Teorema 3.5.4 (Soma dos ângulos internos de um triângulo) *Dado um triângulo $\triangle ABC$, em que $\hat{C}AB, \hat{A}BC, \hat{B}CA$ são seus ângulos internos, então*

$$m(\hat{C}AB) + m(\hat{A}BC) + m(\hat{B}CA) = 180^\circ.$$

Definição 3.5.5 (Triângulo retângulo) *Define-se triângulo retângulo como um triângulo $\triangle ABC$ em que um dos seus ângulos internos mede 90° . Chamamos de hipotenusa, o lado oposto ao ângulo de medida 90° . Os demais lados recebem o nome de cateto.*

Na Figura 35, temos que $\triangle ABC$ é retângulo, ou reto, em $\hat{A}CB$, \overline{AB} é hipotenusa, \overline{AC} e \overline{BC} são catetos.

Figura 35 – Triângulo retângulo $\triangle ABC$, em que $m(\hat{A}CB) = 90^\circ$.



Fonte: Autora (2021).

3.5.1 Trigonometria no triângulo retângulo

A seguir enunciamos uma importante relação métrica no triângulo retângulo, conhecida como o Teorema de Pitágoras, para demonstração consultar [9], Capítulo XIV, Seção I-197.

Teorema 3.5.6 (Teorema de Pitágoras) *O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Com base na Figura 35, podemos definir as razões trigonométricas a seguir.

Definição 3.5.7 (Razões trigonométricas) *Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$, reto em $\hat{A}CB$ define-se razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente, relativas a um ângulo β dado, como:*

$$\text{sen}(\beta) = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{AB})}, \quad \text{cos}(\beta) = \frac{m(\overline{CB})}{m(\overline{AB})} \quad e \quad \text{tg}(\beta) = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{CB})}.$$

Em particular, temos

Teorema 3.5.8 (Relação fundamental da trigonometria) $\text{sen}^2\beta + \text{cos}^2\beta = 1$, para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo, reto em $\hat{A}CB$, em que $m(\hat{A}CB) = \beta$, conforme mostra a Figura 35.

Aplicando as razões trigonométricas dadas na Definição 3.5.7, temos

$$\text{sen}^2\beta + \text{cos}^2\beta = \left(\frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{AB})}\right)^2 + \left(\frac{m(\overline{CB})}{m(\overline{AB})}\right)^2 = \frac{\left(m(\overline{AC})\right)^2 + \left(m(\overline{CB})\right)^2}{\left(m(\overline{AB})\right)^2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras (ver Teorema 3.5.6),

$$\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{cos}^2\beta = \frac{\left(m(\overline{AB})\right)^2}{\left(m(\overline{AB})\right)^2} = 1. \quad \blacksquare$$

3.5.2 Congruência de triângulos

Inicialmente, temos a definição de congruência de triângulos, onde obtemos todas as condições para que dois triângulos sejam congruentes.

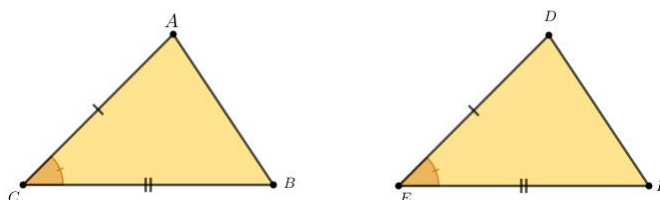
Definição 3.5.9 (Congruência de triângulos) Dizemos que dois triângulos são congruentes (símbolo \equiv) se os lados e ângulos de um deles são ordenadamente congruentes aos lados e ângulos do outro.

Por outro lado, temos condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes, que são chamadas **casos de congruências**. Vamos enunciar quatro desses casos que são usados tanto neste capítulo, quanto no Capítulo 4. Caso o leitor queira se aprofundar no assunto, com enunciados e demonstrações, recomenda-se consultar [5, 9].

1º caso - Lado-Ângulo-Lado (LAL) - postulado: Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, dois lados e um ângulo compreendido entre esses lados, então esses triângulos são congruentes.

Na Figura 36, note que $\overline{AC} \equiv \overline{DE}$, $\hat{ACB} \equiv \hat{DEF}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{EF}$. Logo, pelo caso LAL, obtemos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Figura 36 – Congruência de triângulos - caso LAL.



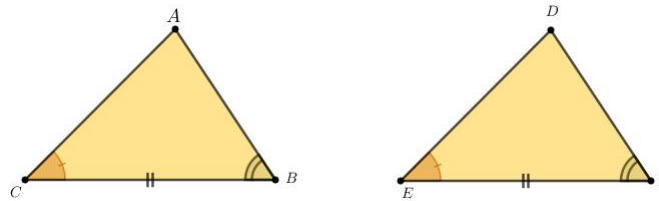
Fonte: Autora (2021).

Este postulado indica que o lado restante e os dois ângulos restantes dos triângulos também são ordenadamente congruentes, isto significa, pela Figura 36, que $\overline{AB} \equiv \overline{DF}$, $\hat{CAB} \equiv \hat{EDF}$ e $\hat{ABC} \equiv \hat{DFE}$.

2º caso - Ângulo-Lado-Ângulo (ALA): Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado e os dois ângulos adjacentes a ele, então esses triângulos são congruentes.

Na Figura 37, note que $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DEF}$, $\overline{CB} \equiv \overline{EF}$ e $\widehat{CBA} \equiv \widehat{EFD}$. Logo, pelo caso ALA, obtemos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Figura 37 – Congruência de triângulos - caso ALA.

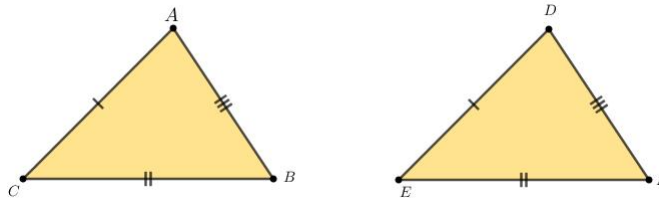


Fonte: Autora (2021).

3º caso - Lado-Lado-Lado (LLL): Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, os três lados, então esses triângulos são congruentes.

Na Figura 38, note que $\overline{AC} \equiv \overline{DE}$, $\overline{CB} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{BA} \equiv \overline{FD}$. Logo, pelo caso LLL, obtemos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Figura 38 – Congruência de triângulos - caso LLL.



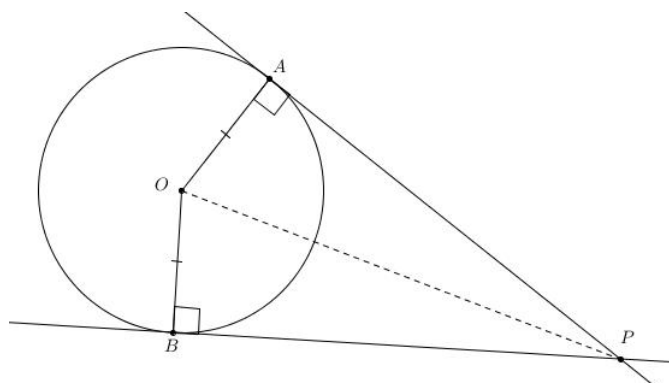
Fonte: Autora (2021).

4º caso - Cateto-Hipotenusa: Se dois triângulos retângulos têm, ordenadamente congruentes, a hipotenusa e um de seus catetos, então esses triângulos são congruentes.

Com base no 4º caso de congruência de triângulos, podemos obter o seguinte resultado

Teorema 3.5.10 (Segmentos tangentes a uma circunferência) *Se de um ponto P conduzirmos os segmentos \overline{PA} e \overline{PB} , ambos tangentes¹ a uma circunferência, com A e B na circunferência, então \overline{PA} e \overline{PB} são congruentes (ver Figura 39).*

¹ Ponto tangente é o único ponto que intercepta uma circunferência e uma reta tangente dadas.

Figura 39 – Segmentos tangentes \overline{PA} e \overline{PB} .

Fonte: Autora (2022).

Demonstração: Seja O o centro da circunferência dada na Figura 39. Temos que \overline{OA} e \overline{OB} são raios da circunferência, portanto, são segmentos congruentes e \overline{OP} é segmento comum aos triângulos $\triangle PAO$ e $\triangle PBO$. Logo, pelo caso Cateto-Hipotenusa, segue que $\triangle PAO$ e $\triangle PBO$ são congruentes e assim, \overline{PA} e \overline{PB} são congruentes. ■

3.5.3 Semelhança de triângulos

Para uma leitura mais proveitosa, vamos definir o que são dois triângulos semelhantes, enunciar o caso de semelhança Ângulo-Ângulo com sua respectiva demonstração. Outros casos de semelhança, bem como o Teorema Fundamental de Semelhança e outros resultados podem ser encontrados em [9].

Definição 3.5.11 (Semelhança de triângulos) *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos congruentes e os lados homólogos (isto é, tais que cada um deve estar em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes) proporcionais.*

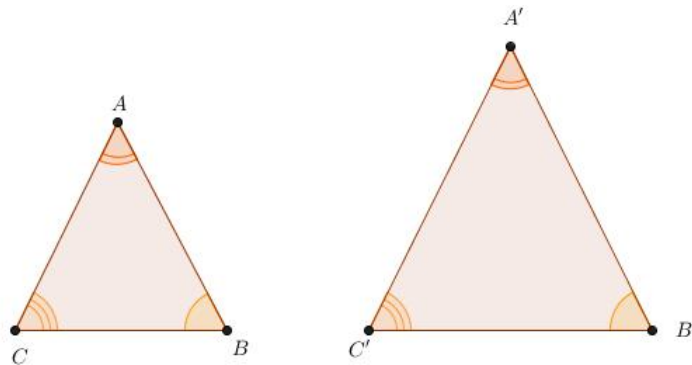
Observação 3.5.12 *Utiliza-se o símbolo \sim para indicar semelhança. Ou seja, dizemos:*

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\iff \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}, \quad \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \quad e \quad \widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$$

$$\iff \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{A'B'})}, \quad \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{B'C'})} \quad e \quad \frac{m(\overline{CA})}{m(\overline{C'A'})}.$$

Na Figura 40, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

Figura 40 – $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Fonte: Autora (2021).

Por outro lado, temos condições mínimas para que dois triângulos sejam semelhantes, que são chamadas casos de semelhança. Nesta dissertação, como dito anteriormente, será trabalhado apenas um caso: Ângulo-Ângulo.

Caso Ângulo-Ângulo: Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

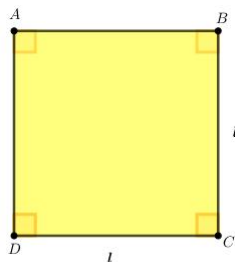
3.6 Quadrado

Um quadrado é um caso particular de polígono regular, conforme descrito a seguir.

Definição 3.6.1 (Quadrado) Dizemos que $ABCD$ é um quadrado se, e somente se, $ABCD$ é um polígono regular de quatro lados (ver Figura 41).

Definição 3.6.2 (Área de quadrado) A área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do lado (ver Figura 41).

Figura 41 – $ABCD$ é um quadrado cujo o lado mede l e área mede l^2 .



Fonte: Autora (2021).

4 Planos de aula: provas sem palavras em diálogo com a BNCC

Como estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018) em [1], habilidades são ideias que os alunos devem aprender para adquirir uma determinada competência, que por sua vez,

“é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8).

O objetivo deste capítulo será propor materiais para uso dos professores, em especial, do Ensino Público. Esses materiais consistem em planos de aula que exploram as provas sem palavras com resoluções, como recurso para revisar e aprofundar conceitos de Geometria Plana, estudados ao longo da educação básica, conforme exigidos pela BNCC. Sendo assim, foram selecionados teoremas que possuem pelo menos uma prova sem palavras correspondente, de forma a explorar, direta ou indiretamente, habilidades específicas da BNCC para o Ensino de Geometria.

Cada plano de aula contém informações, enunciado, resoluções, além de uma sugestão para que o professor consiga conduzir as aulas com seus alunos. Algumas aulas são introdutórias para a realização de suas respectivas habilidades exigidas pela BNCC.

Cada prova sem palavras foi adaptada dos três volumes da obra de Roger Nelsen *Proofs Without Words* (ver [6, 7, 8]) para figuras dinâmicas e animações no *software* Geogebra. Todas as figuras e animações foram feitas pela autora com base nas referências citadas anteriormente sob a justificativa de oferecer subsídios para que o professor possa trabalhar a questão da visualização no ensino de Geometria, conforme discutido no Capítulo 2. Os *links* para acesso as construções no Geogebra serão disponibilizados nos planos de aula.

Por se tratar de figuras dinâmicas, permite-se movimentar pontos, retas e outros objetos, promovendo, além do movimento, ampliação e redução de figuras. O dinamismo dessas figuras é uma nova ferramenta, a qual pode adquirir o papel de operadores, permitindo trabalhar cognitivamente com a *image schemata*.

A fim de facilitar a leitura, será descrito a seguir todas habilidades e competências, que serão trabalhadas através da execução dos planos de aula, sendo necessário apenas mencioná-las ao longo do capítulo.

EM13MAT201: Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (BRASIL, 2018, p. 545);

EM13MAT307: Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 545);

EM13MAT105: Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 545);

EM13MAT308: Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (BRASIL, 2018, p. 545);

EM13MAT506: Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. (BRASIL, 2018, p. 545).

Pensando em criar subsídios para que o professor trabalhe essas habilidades em sala de aula, a seguir serão apresentados seis planos de aulas voltados para o ensino de Geometria Plana no Ensino Médio. Cada plano de aula tem como tema um teorema, que visa trabalhar pelo menos uma das habilidades enunciadas anteriormente. Nos Apêndices, apresentaremos uma sugestão de material que o professor pode disponibilizar aos alunos durante o desenvolvimento dos planos de aula. Importante salientar que foi feito um recorte: utilizou-se somente habilidades associadas à Geometria Plana, com exceção da habilidade EM13MAT505, que visa trabalhar com ladrilhamentos do plano, tema este que não foi diretamente trabalhado por uma das provas sem palavras estudadas na bibliografia desta dissertação.

4.1 Plano de aula 01: Teorema de Pitágoras - parte I

Propriedade matemática: Dado um triângulo do tipo retângulo, é válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

onde $a, b > 0$ são as medidas dos catetos e $c > 0$ é a medida da hipotenusa de tal triângulo.

Este plano de aula está dividido em duas partes, aula 01 e aula 02, as quais têm como objetivo convencer o leitor, no caso, o estudante, sobre a validade do Teorema de Pitágoras. A aula 01 propõe uma prova sem palavras em formato de quebra-cabeças e pode ser adaptado com outros materiais além do digital. Já a aula 02 exige mais pré-requisitos em relação a aula 01, e considero ser um desafio matemático maior, em que o estudante precisa utilizar mais propriedades e relações geométricas aprendidas ao longo do Ensino Básico.

4.1.1 Informações iniciais da aula 01

Público-alvo: Alunos do 9º ano e Ensino Médio.

Objetivos: Espera-se que, ao final da aula, o aluno seja capaz de:

- relacionar a fórmula algébrica à sua respectiva interpretação geométrica e vice-versa;
- revisar área de quadrado;
- explorar a definição de triângulo retângulo.

Justificativas: Trabalhar a habilidade EM13MAT201.

Pré-requisitos: Triângulos retângulos e área de quadrado. Ver Seções 3.4, 3.5 e 3.6.

Recursos: Utilizar a ficha disponível no Apêndice e as construções no Geogebra disponíveis em:

<https://www.geogebra.org/m/zunzeu6r>

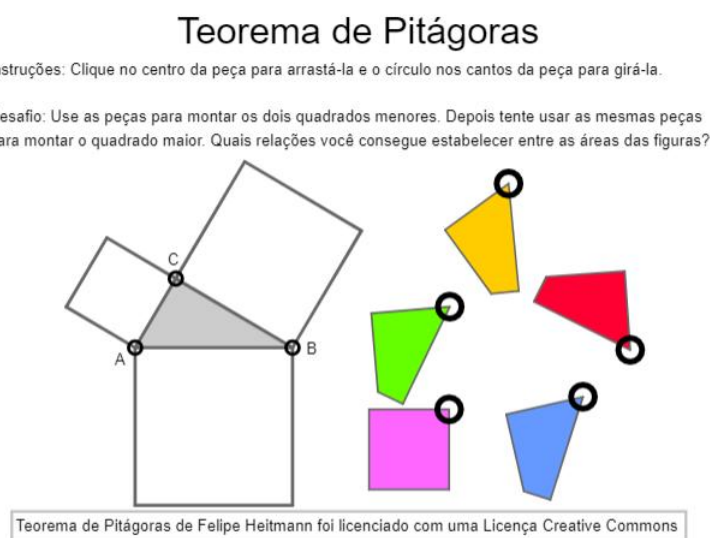
Último acesso em: 14 de Outubro de 2021.

Duração: 1 hora-aula (50 minutos).

4.1.2 Atividade da aula 01

Enunciado da atividade: Dado um triângulo retângulo, vale que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (ver Figura 42).

Figura 42 – Teorema de Pitágoras: parte I.



Fonte: Figura de Felipe Heitman. Creative Commons.

Resolução: A atividade consiste em arrastar os polígonos do quadrado maior para os outros dois quadrados. Com o deslocamento desses polígonos, perceber que a soma das áreas dos quadrados menores equivale à área do quadrado maior, verificando o Teorema de Pitágoras.

4.1.3 Descrição da aula 01

Metodologia: Dividir a turma em duplas. Pedir para que as duplas acessem o quebra-cabeça dinâmico através do *link* disponível na Subseção 4.1.1.

O professor incentivará a turma, como um todo, a explorar a atividade proposta, sem dicas. O objetivo é que as duplas consigam compreender que todas as peças se encaixam ou no quadrado maior ou nos dois quadrados menores. O professor pode incentivar o diálogo entre duplas, de modo que a turma consiga atingir o objetivo da atividade.

Ao final, o professor sintetizará a atividade enunciando o Teorema de Pitágoras geometricamente, conforme visto ao longo da aula e algebricamente:

“Dado um triângulo retângulo, vale que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.” E ainda: “Se a soma dos quadrados das medidas dos dois menores lados de um triângulo for igual ao quadrado do maior lado deste mesmo triângulo, então esse triângulo é retângulo”. Esta última pode ser explorada através da atividade extra disponibilizada para os alunos no Apêndice.

Procedimentos:

1. Apresentação do tema da aula (Teorema de Pitágoras), bem como seu enunciado e seus objetivos de aprendizagem (máximo 5 min.);
2. Acesso ao *link* da construção no Geogebra e entrega da ficha do Apêndice (máximo 5 min.);
3. Revisão dos pré-requisitos: triângulo retângulo e área de quadrado (máximo 10 min.);
4. Discussão de ideias e propostas para a resolução da atividade (máximo 15 min.);
5. Preencher a ficha (máximo 10 min.);
6. Fechamento da aula (máximo 5 min.).

4.2 Plano de aula 02: Teorema de Pitágoras - parte II

Propriedade matemática: Dado um triângulo do tipo retângulo, é válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

onde $a, b > 0$ são as medidas dos catetos e $c > 0$ é a medida da hipotenusa de tal triângulo.

Nesta aula, abordaremos a segunda parte do plano de aula 01.

4.2.1 Informações iniciais da aula 02

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Objetivos: Espera-se que, ao final da aula, o aluno seja capaz de:

- a. compreender que o Teorema de Pitágoras é válido para qualquer triângulo retângulo;

b. revisar conceitos da Geometria Plana do Ensino Fundamental II.

Justificativas: Trabalhar a habilidade EM13MAT105.

Pré-requisitos: Segmentos, arcos, ângulos centrais e inscritos na circunferência, polígonos e triângulos. Ver Seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

Recursos: Utilizar a ficha disponível no Apêndice e as construções no Geogebra disponíveis em:

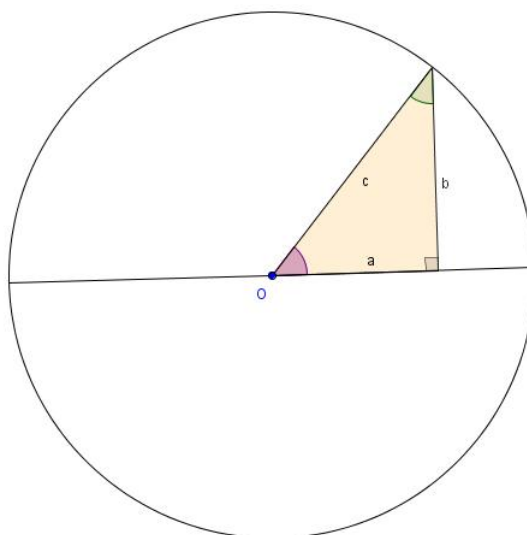
<https://www.geogebra.org/m/ecyzwfuz>

Duração: 2 horas-aula (100 minutos).

4.2.2 Atividade da aula 02

Enunciado da atividade: Dado um triângulo retângulo, vale que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (ver Figura 43).

Figura 43 – Teorema de Pitágoras: parte II.

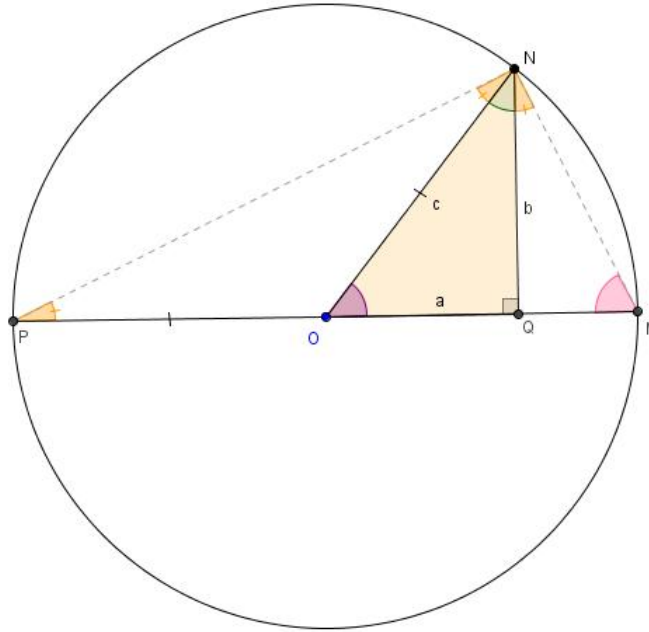


Fonte: Autora (2021).

Resolução: Com base na Figura 44, considere o triângulo $\triangle QNO$ em que O é o centro de uma semicircunferência e os pontos Q e N pertencem a ela. Seja ainda seu diâmetro \overline{PM} . Tal triângulo será retângulo, por construção, de modo que \overline{NQ} seja perpendicular a \overline{PM} . Considere os catetos \overline{OQ} e \overline{NQ} com medidas $m(\overline{OQ}) = a$

e $m(\overline{NQ}) = b$, respectivamente, e a hipotenusa \overline{ON} com medida $m(\overline{ON}) = c$. Note ainda que \overline{ON} é o raio da circunferência dada.

Figura 44 – Teorema de Pitágoras: resolução.



Fonte: Autora (2021).

Como \overline{ON} e \overline{OP} são raios da circunferência, segue que $\triangle NOP$ é isósceles e assim $O\hat{N}P \equiv N\hat{P}O$ com $m(O\hat{N}P) = m(N\hat{P}O)$. Denote $\alpha = m(N\hat{P}O)$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (ver Teorema 3.5.4), segue que $m(P\hat{O}N) = 180^\circ - 2 \cdot \alpha$ e $m(N\hat{M}Q) = 90^\circ - \alpha$, uma vez que é um ângulo inscrito relacionado ao arco \widehat{PN} (ver Teorema 3.3.6). Novamente, usando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , temos

$$m(M\hat{N}Q) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha.$$

Note que,

$$\begin{aligned} m(P\hat{O}N) + m(N\hat{O}Q) &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow 180^\circ - 2 \cdot \alpha + m(N\hat{O}Q) &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow m(N\hat{O}Q) &= 2 \cdot \alpha. \end{aligned}$$

E como, $N\hat{Q}O$ é um ângulo reto (isto é, sua medida é de 90°), obtemos

$$m(Q\hat{N}O) = 180^\circ - 90^\circ - 2 \cdot \alpha$$

$$\iff m(Q\hat{N}O) = 90^\circ - 2 \cdot \alpha.$$

Pelas descrições anteriores, temos que $Q\hat{P}N \equiv M\hat{N}Q$ com $m(Q\hat{P}N) = m(M\hat{N}Q) = \alpha$ e $Q\hat{M}N \equiv Q\hat{N}P$ com $m(Q\hat{M}N) = m(Q\hat{N}P) = 90^\circ - \alpha$. Logo, $\triangle QNP$ e $\triangle MNQ$ são semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo (ver Subseção 3.5.3), ou seja,

$$\frac{m(\overline{PQ})}{m(\overline{NQ})} = \frac{m(\overline{NQ})}{m(\overline{MQ})}$$

$$\iff \frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

$$\iff c^2 = a^2 + b^2.$$

4.2.3 Descrição da aula 02:

Metodologia: Nesta aula, será proposto aos alunos o enunciado do problema e espera-se que, com orientação do professor, eles possam obter a resolução.

Para tal, pode ser utilizado o *link* disponível na Subseção 4.2.1 para apresentar o enunciado, movimentando o triângulo ao longo da semicircunferência e a própria circunferência para que o estudante se convença que há uma infinidade de triângulos retângulos distintos inscritos em uma semicircunferência qualquer. Dessa forma, os estudantes poderão ganhar a percepção da figura operativa, conforme propõe Presmeg (2006).

Além disso, não espera-se que os estudantes consigam concluir a resolução apenas com o enunciado. Sendo assim, o docente pode propor além do enunciado, o seguinte trecho da resolução:

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

$$\iff a^2 + b^2 = c^2.$$

Procedimentos:

1. Apresentação do tema da aula (Teorema de Pitágoras), bem como seu enunciado e seus objetivos de aprendizagem (máximo 5 min.);

2. Acesso ao *link* da construção no Geogebra e entrega da ficha do Apêndice (máximo 5 min.);
3. Revisão dos pré-requisitos: arcos, ângulos centrais e inscritos na circunferência, polígonos e triângulos (máximo 25 min.);
4. Anotação de ideias e propostas para a resolução da atividade (máximo 30 min.);
5. Socialização das ideias das duplas com dicas dadas pelo professor (máximo 20 min.);
6. Fechamento da aula com a finalização da resolução da atividade (máximo 15 min.).

4.3 Plano de aula 03: lei dos cossenos para ângulos agudos do triângulo retângulo

Propriedade matemática: Dado um triângulo qualquer $\triangle ABC$ e um dos seus ângulos internos conhecidos, $\hat{A}\hat{C}B$. É válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{A}\hat{C}B,$$

onde $a, b, c > 0$ são as medidas dos lados do triângulo e $\hat{A}\hat{C}B$ é o ângulo oposto ao lado de medida c .

Neste plano de aula está proposta duas provas sem palavras que trabalham a validade da lei dos cossenos. A primeira verificará para os ângulos agudos de um triângulo retângulo e a segunda para os ângulos agudos de um triângulo qualquer. Já para os ângulos obtusos, será proposto como um complemento às aulas. A ideia é que a primeira prova sem palavras seja mais simples de convencer o leitor, pois necessita de menos argumentos em relação à segunda. Assim, o professor pode trabalhar a segunda prova sem palavras como um aprofundamento da aula.

4.3.1 Informações iniciais da aula 03

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Objetivos: Espera-se que, ao final da aula, o aluno seja capaz de:

- a. argumentar uma justificativa para a fórmula da lei dos cossenos para qualquer ângulo agudo de qualquer triângulo;

- b. revisar conceitos da Geometria Plana;
- c. utilizar as definições de seno e cosseno como recurso para resolução de problemas;
- d. aplicar a relação fundamental da trigonometria.

Justificativas: Trabalhar as habilidades EM13MAT105 e EM13MAT308.

Pré-requisitos: Segmentos, ângulos, Teorema de Pitágoras, figuras planas (quadrado), congruência e semelhança de triângulos e propriedades de arcos de circunferência. Ver Seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6.

Recursos: Utilizar a ficha disponível no Apêndice e as construções no Geogebra disponíveis em:

<https://www.geogebra.org/m/wkmznbw> (enunciado da atividade 1)

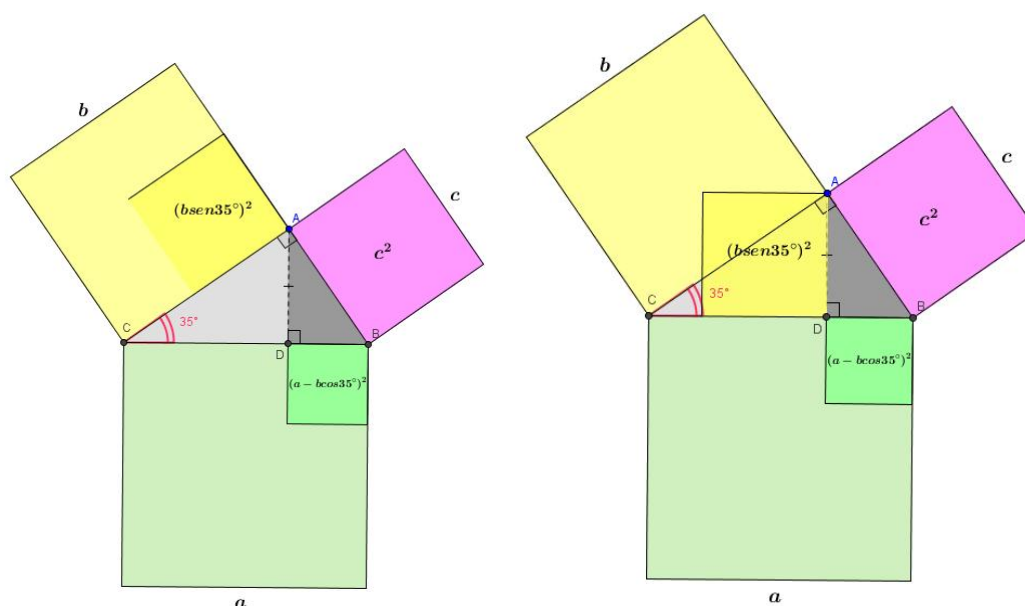
<https://www.geogebra.org/m/kgvecv8u> (enunciado da atividade 2)

Duração: 1 hora-aula para a atividade 1 (50 minutos) e 2 horas-aula para a atividade 2 (100 minutos).

4.3.2 Atividades da aula 03

Enunciado da atividade 1: Lei dos cossenos para ângulos agudos do triângulo retângulo (ver Figura 45).

Figura 45 – Lei dos cossenos para ângulos agudos do triângulo retângulo $\triangle ABC$.



Fonte: Autora (2021).

Resolução da atividade 1: Com base na Figura 45, considere o triângulo retângulo $\triangle ABC$ em que $m(\overline{AB}) = c$, $m(\overline{BC}) = a$, $m(\overline{AC}) = b$ e $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. E ainda, sem perda de generalidade, tome o ângulo agudo oposto ao cateto de medida c , $\widehat{BCA} = \theta$ (na Figura, 45 estamos considerando $\theta = 35^\circ$) e seja \overline{AD} a altura relativa à hipotenusa \overline{BC} .

Pela definição da altura \overline{AD} , \widehat{ADB} é reto e segue que os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle ACD$ também são retângulos.

A partir dos lados do triângulo $\triangle ABC$, é possível construir três quadrados de lados de medidas a , b e c .

Considerando o triângulo $\triangle ACD$ e usando a definição de seno (Definição 3.5.7), obtemos

$$\text{sen}\theta = \frac{m(\overline{AD})}{b}$$

$$\iff b \cdot \text{sen}\theta = m(\overline{AD}).$$

Da mesma forma, pela definição de cosseno, obtemos

$$\text{cos}\theta = \frac{m(\overline{CD})}{b}$$

$$\iff b \cdot \text{cos}\theta = m(\overline{CD}).$$

Note que,

$$m(\overline{DB}) = m(\overline{CB}) - m(\overline{CD})$$

$$\iff m(\overline{DB}) = a - b \cdot \text{cos}\theta.$$

Como o triângulo $\triangle ADB$ é retângulo, então vale o Teorema de Pitágoras (Teorema 3.5.6). Portanto, aplicando tal teorema e a relação fundamental da

trigonometria (Teorema 3.5.8), temos

$$m(\overline{AB})^2 = m(\overline{AD})^2 + m(\overline{DB})^2$$

$$\iff c^2 = (b \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 + (a - b \cdot \operatorname{cos}\theta)^2$$

$$\iff c^2 = b^2 \cdot (\operatorname{sen}\theta)^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{cos}\theta + b^2 \cdot (\operatorname{cos}\theta)^2$$

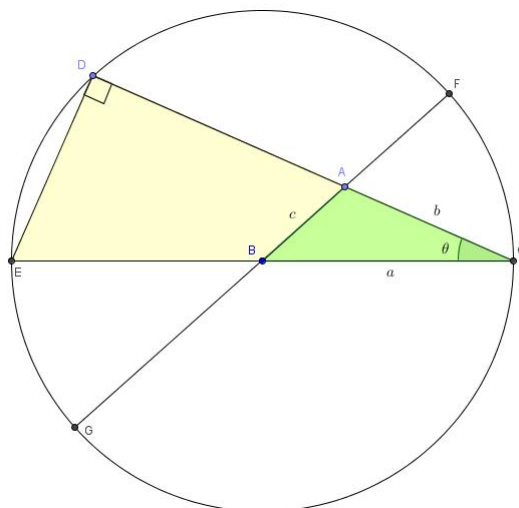
$$\iff c^2 = a^2 + b^2 \cdot [(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\operatorname{cos}\theta)^2] - 2 \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{cos}\theta$$

$$\iff c^2 = a^2 + b^2 \cdot 1 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{cos}\theta$$

$$\iff c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{cos}\theta.$$

Enunciado da atividade 2: Lei dos cossenos para ângulos agudos de um triângulo qualquer (ver Figura 46).

Figura 46 – Lei dos cossenos para ângulos agudos de um triângulo qualquer $\triangle ABC$.



Fonte: Autora (2021).

Resolução da atividade 2: Com base na Figura 46, considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$ inscrito em um triângulo retângulo $\triangle CDE$, que por sua vez está inscrito em uma circunferência de centro B de tal modo que sua hipotenusa \overline{EC} é o diâmetro. E ainda, \overline{AB} é um segmento contido no diâmetro \overline{FG} . Sejam $m(\overline{AC}) = b$, $m(\overline{AB}) = c$, $m(\overline{BC}) = a$ e $m(\widehat{DCE}) = \theta$.

Observe que $\overline{BC} \equiv \overline{BF}$, pois são raios da circunferência, logo \overline{EB} e \overline{BF}

têm medida a . Assim,

$$m(\overline{AF}) = m(\overline{BF}) - m(\overline{AB})$$

$$\Leftrightarrow m(\overline{AF}) = a - c.$$

Por outro lado, tomando o triângulo $\triangle CDE$ e aplicando a definição de cosseno, obtemos

$$\cos\theta = \frac{m(\overline{CD})}{m(\overline{CE})}$$

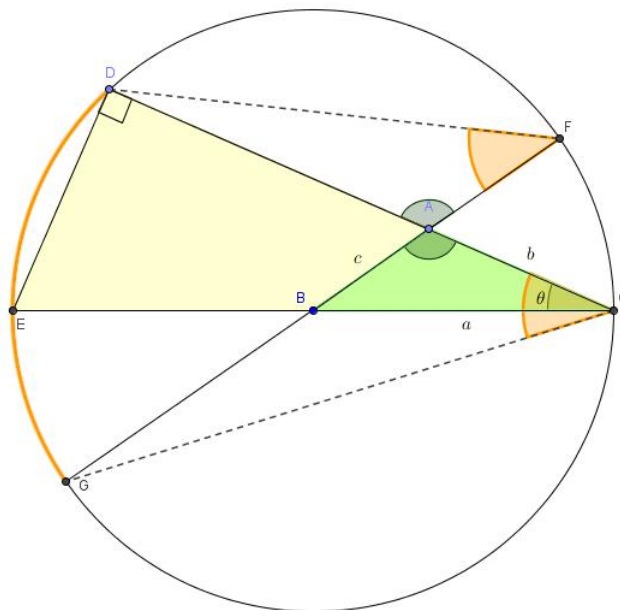
$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{m(\overline{CA}) + m(\overline{AD})}{m(\overline{CB}) + m(\overline{BE})}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{b + m(\overline{AD})}{a + a}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot a \cdot \cos\theta - b = m(\overline{AD}).$$

Conforme a Figura 47, note que $\triangle AFD$ e $\triangle ACG$ são semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo (ver Subseção 3.5.3), pois $\widehat{FAD} \equiv \widehat{CAG}$ e $\widehat{AFD} \equiv \widehat{ACG}$, uma vez que são ângulos opostos pelo vértice e enxergam o mesmo arco \widehat{GD} , respectivamente.

Figura 47 – Os triângulos $\triangle AFD$ e $\triangle ACG$ são semelhantes.



Fonte: Autora (2021).

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{m(\overline{AD})}{m(\overline{AG})} &= \frac{m(\overline{AF})}{m(\overline{AC})} \\ \Leftrightarrow \frac{2 \cdot a \cdot \cos\theta - b}{a + c} &= \frac{a - c}{b} \\ \Leftrightarrow (2 \cdot a \cdot \cos\theta - b) \cdot b &= (a - c) \cdot (a + c) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot a \cdot \cos\theta \cdot b - b^2 &= a^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$

4.3.3 Descrição da aula 03

Metodologia: Dividir os alunos em grupos de três ou quatro alunos. Pedir para que as duplas acessem os *links* disponíveis da Subseção 4.3.1.

Para tal, o professor revisará os conceitos que serão utilizados na tentativa de argumentações, como: propriedade de circunferência, propriedade de arcos (ângulos que enxergam o mesmo arco têm medidas iguais) e definições de seno e cosseno.

O professor deve dizer para argumentação da atividade 1, basta utilizar o Teorema de Pitágoras mais de uma vez.

Já para o enunciado da atividade 2, será necessário avaliar o desenvolvimento dos grupos para perceber a necessidade de auxiliar os alunos com dicas e informações de uma possível resolução.

Em ambas as atividades, é preciso incentivar os alunos a manipularem as construções, de modo que a percepção da validade da lei dos cossenos se torne mais abrangente.

Para o fechamento da aula, será feita uma roda de conversa sobre as principais dificuldades encontradas ao longo das atividades e como fizeram para solucioná-las.

Procedimentos:

1. Apresentação do tema da aula (Lei dos cossenos), bem como o enunciado e seus objetivos de aprendizagem (máximo 10 min.);
2. Acesso ao *link* da construção no Geogebra para o caso do enunciado da atividade 1 e entrega da ficha do Apêndice (máximo 5 min.);

3. Revisão dos pré-requisitos para a atividade 1 (máximo 10 min.);
4. Anotação de ideias e propostas para a resolução da atividade 1 (máximo 20 min.);
5. Socialização das ideias das duplas com dicas dadas pelo professor (máximo 5 min.);
6. Acesso ao *link* da construção no Geogebra para o caso do enunciado da atividade 2 e entrega da ficha do Apêndice (máximo 5 min.);
7. Revisão dos pré-requisitos para a atividade 2 (máximo 15 min.);
8. Anotação de ideias e propostas para a resolução da atividade 2 (máximo 40 min.);
9. Socialização das ideias com dicas dadas pelo professor (máximo 20 min.);
10. Fechamento da aula (máximo 20 min.).

4.4 Plano de aula 04: qualquer triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles

Propriedade matemática: Dado um triângulo qualquer, é possível, sempre, seccioná-lo em seis triângulos isósceles.

Neste plano de aula, está proposta a demonstração do teorema que todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles. Para tal objetivo, foi produzido um arquivo no *software* Geogebra que consiste em uma animação que mostra o passo-a-passo da prova sem palavras. A descrição de como conduzir a aula está disposta a seguir.

4.4.1 Informações iniciais da aula 04

Público alvo: Alunos do 8º ano, 9º ano e Ensino Médio.

Objetivos: Espera-se que, ao final da aula, o aluno seja capaz de:

- a. convencer o leitor, por meio de uma prova sem palavra, que todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles;
- c. revisão do conceito de bissetriz, circunferência e tipos de triângulos;
- d. utilizar o resultado desenvolvido em aplicação de problemas do dia-a-dia.

Justificativas: Trabalhar as habilidades EM13MAT105, EM13MAT307, EM13MAT201.

Pré-requisitos: Conceitos de bissetriz, circunferência e tipos de triângulos. Ver Seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

Recursos: Utilizar a ficha disponível no Apêndice e as construções no Geogebra disponíveis em:

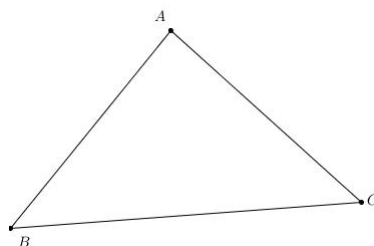
<https://www.geogebra.org/m/vpdp3d8u>

Duração: 1 hora-aula (50 minutos).

4.4.2 Atividade da aula 04

Enunciado da atividade: Todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles (ver Figura 48).

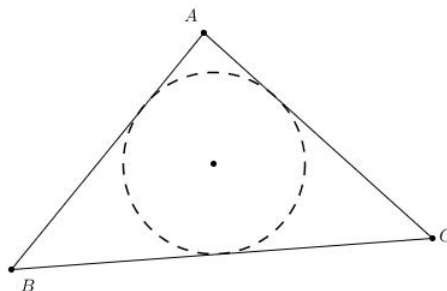
Figura 48 – Todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles.



Fonte: Autora (2021).

Resolução: Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Ele possui uma circunferência inscrita, cujo o centro recebe o nome de incentro, proveniente do encontro das bissetrizes do $\triangle ABC$ (ver Figura 49).

Figura 49 – Todo triângulo possui uma circunferência inscrita.



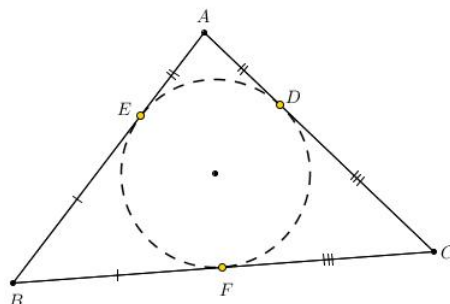
Fonte: Autora (2021).

Na Figura 50, denote as intersecções entre os lados de $\triangle ABC$ e suas respectivas bissetrizes de D , E e F . Tais pontos também são pontos de tangência.

Portanto, pelo Teorema 3.5.10, obtemos

$$\overline{DA} \equiv \overline{AE}, \quad \overline{EB} \equiv \overline{BF} \quad \text{e} \quad \overline{FC} \equiv \overline{CD}.$$

Figura 50 – D , E e F são pontos de tangência dos segmentos \overline{AC} , \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente.

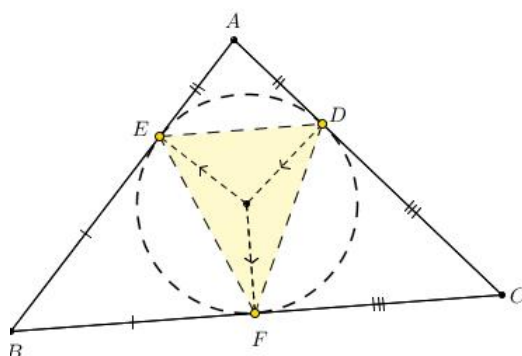


Fonte: Autora (2021).

Assim, fica garantido que os triângulos $\triangle EBF$, $\triangle FCD$ e $\triangle DAE$ são todos do tipo isósceles.

Na Figura 51, observe que os pontos D , E e F são não colineares e, assim, formam o triângulo $\triangle DEF$, que é formado por três triângulos $\triangle DIE$, $\triangle EIF$ e $\triangle FID$ também isósceles, uma vez que \overline{DI} , \overline{EI} e \overline{FI} são raios da circunferência inscrita em $\triangle ABC$.

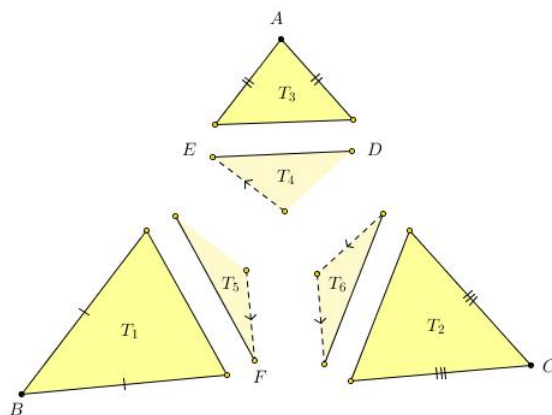
Figura 51 – Seis triângulos isósceles.



Fonte: Autora (2021).

Logo, o $\triangle ABC$, foi seccionado em seis triângulos isósceles $\triangle EBF$, $\triangle FCD$, $\triangle DAE$, $\triangle DEI$, $\triangle EFI$, $\triangle AED$ e $\triangle FDI$, que denominaremos respectivamente por T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 e T_6 , conforme a Figura 52.

Figura 52 – Todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles.

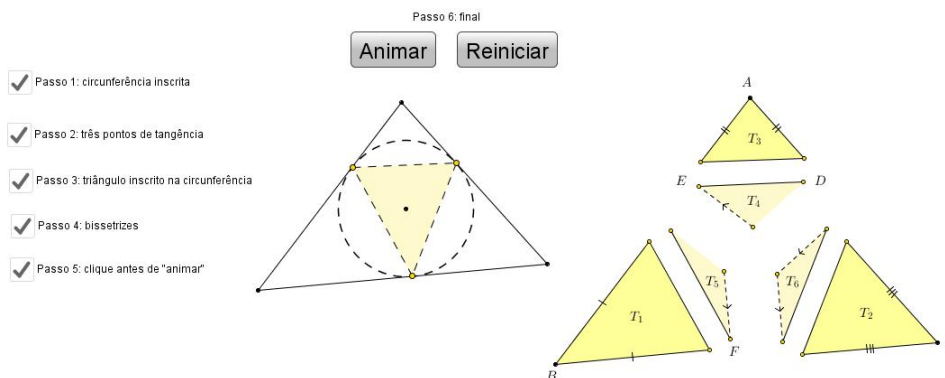


Fonte: Autora (2021).

4.4.3 Descrição da aula 04

Metodologia: Esta aula pode ser feita com construções geométricas, utilizando régua e compasso, como também através do *software* Geogebra usando o *link* disponível na Subseção 4.4.1. Nele, o aluno deve ir selecionando cada um dos passos de 1 a 6 para visualizar a animação, conforme a Figura 53.

Figura 53 – Prova sem palavras de triângulo seccionado em seis triângulos isósceles.



Fonte: Autora (2021).

Para reiniciar a atividade, basta clicar no botão “Reiniciar” e desmarcar todos os passos de 1 a 5.

Procedimentos:

1. Apresentação do tema da aula (Um triângulo qualquer pode ser seccionado em seis triângulos isósceles), bem como seu enunciado e seus objetivos de aprendizagem (máximo 10 min.);

2. Acesso ao *link* da construção no Geogebra e entrega da ficha do Apêndice (máximo 5 min.);
3. Revisão dos pré-requisitos: bissetriz, circunferência e tipos de triângulos (máximo 10 min.);
4. Orientação de como utilizar o link disponibilizado (máximo 5 min.);
5. Manipulação do aplicativo (máximo 15 min.);
6. Finalização da aula (máximo 5 min.)

4.5 Plano de aula 05: área de um triângulo em função de seus lados e do raio da sua circunferência circunscrita

Propriedade matemática: Dado um triângulo qualquer é válida a seguinte fórmula:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R},$$

onde $A > 0$ representa a área deste triângulo, $a, b, c > 0$ são as medidas dos seus lados e $R > 0$ é o raio da sua respectiva circunferência circunscrita.

Neste plano aula, está proposta uma prova sem palavras que visa convencer, através de manipulação algébrica a propriedade descrita acima.

4.5.1 Informações iniciais da aula 05

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Objetivos: Espera-se que, ao final da aula, o aluno seja capaz de:

- a. argumentar uma justificativa para a fórmula que relaciona área de triângulo, dados seus lados e o raio da circunferência circunscrita;
- b. revisão do conceito de semelhança de triângulos e relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo, conforme orienta a BNCC.

Justificativas: Trabalhar as habilidades EM13MAT105, EM13MAT308, EM13MAT307, EM13MAT506.

Pré-requisitos: Propriedades de triângulo do tipo isósceles, conceito de semelhança de triângulos e relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo. Ver Seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

Recursos: Utilizar a ficha disponível no Apêndice e as construções no Geogebra disponíveis em:

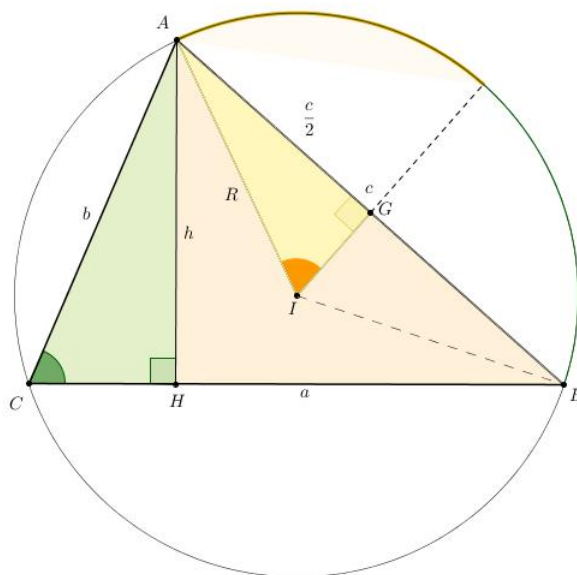
<https://www.geogebra.org/m/xyn3mfm2>

Duração: 2 horas-aula (100 minutos).

4.5.2 Atividade da aula 05

Enunciado da atividade: Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, cujas medidas de seus lados são $a, b, c > 0$ e sua circunferência circunscrita possui raio de medida $R > 0$, temos que sua área é dada pela fórmula $\frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$ (ver Figura 54).

Figura 54 – Área de triângulo em função de seus lados e do raio da circunferência circunscrita.



Fonte: Autora (2021).

Resolução: Na Figura 54, considere o triângulo $\triangle ABC$, em que $m(\overline{AB}) = c$, $m(\overline{BC}) = a$ e $m(\overline{CA}) = b$. Como todo triângulo é inscrito (ver Observação 3.5.3), denote por α a circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$, de centro I e raio R . Seja \overline{AH} a altura relativa ao lado \overline{BC} , em que $m(\overline{AH}) = h$.

Agora, seja $G \in \overline{AB}$. Queremos mostrar que $\triangle ACH \approx \triangle AIG$. Então, seja G o pé da altura relativa ao lado \overline{AB} do triângulo $\triangle AIB$. Note que tal triângulo é isósceles, uma vez que \overline{AI} e \overline{IB} são raios de α .

Sendo assim, segue que G é ponto médio de \overline{AB} , $m(\overline{AG}) = \frac{c}{2}$ e a medida

do ângulo central $A\hat{I}G$ é igual a $m\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right)$.

Por outro lado, $A\hat{C}B$ é ângulo inscrito e, portanto, sua medida é metade do arco \widehat{AB} , isto é, $m(A\hat{C}B) = m\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right)$, pelo Teorema 3.3.6.

Assim, concluí-se que $A\hat{C}B \equiv A\hat{I}G$. E ainda, $C\hat{H}A \equiv A\hat{G}I$, pois ambos são ângulos provenientes das alturas \overline{AH} e \overline{IG} . Logo, pelo caso Ângulo-Ângulo (ver Subseção 3.5.3), segue que $\triangle ACH \approx \triangle AIG$, conforme queríamos demonstrar.

Logo,

$$\frac{h}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{R}$$

$$\implies h = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot c}{R}.$$

Denotando por A a área de $\triangle ABC$, temos

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$\implies A = a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot c}{R}.$$

Portanto,

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

4.5.3 Descrição da aula 05

Metodologia: Dividir os alunos em grupos de três ou quatro alunos. Pedir para que acessem o *link* disponível na Subseção 4.5.1. Para tal, o professor revisará os conceitos que serão utilizados na tentativa de argumentação, como: semelhança de triângulos, elementos da circunferência, ângulo central e ângulos inscritos, por exemplo.

Em seguida, o professor deverá encaminhar a resolução da atividade, sugerindo que os grupos mostrem que $\triangle ACH \approx \triangle AIG$.

Por fim, o professor pode ainda auxiliar os alunos com dúvidas, mas sem encaminhar a resolução: mostrar caminhos alternativos, ideias e sugestões que façam o grupo refletir e alterar rotas ou criar novas discussões.

Procedimentos:

1. Apresentação do tema da aula (Área de um triângulo qualquer em função de seus lados e do raio da sua circunferência circunscrita), bem como seu enunciado e seus objetivos de aprendizagem (máximo 15 min.);
2. Acesso ao *link* da construção no Geogebra e entrega da ficha do Apêndice (máximo 5 min.);
3. Revisão dos pré-requisitos e apresentação do objetivo da prova (mostrar que dois triângulos são semelhantes (máximo 20 min.);
4. Criação de estratégias das ideias das duplas com dicas dadas pelo professor (máximo 30 min.);
5. Preenchimento da ficha (máximo 15 min.);
6. Fechamento da aula com a socialização das dificuldades de realizar uma prova matemática (máximo 15 min.).

4.6 Plano de aula 06: Teorema de Vivian

Propriedade matemática: Dado qualquer triângulo equilátero, a soma das distâncias partindo de um ponto interior deste triângulo é igual à altura deste triângulo.

Este Teorema, apesar de apresentar um resultado bem interessante, não está previsto no currículo das escolas. Esta prova sem palavras utiliza reflexões, rotações e translações a todo momento, exigindo do leitor operar a imagem a todo momento.

4.6.1 Informações iniciais da aula 06

Público-alvo: Alunos do Ensino médio.

Objetivos: Espera-se que, ao final da aula, o aluno seja capaz de:

- a. argumentar uma justificativa para o Teorema de Vivian;
- b. revisar conceitos da Geometria Plana estudados no Ensino Fundamental, conforme orienta a BNCC.

Justificativas: Trabalhar as habilidades EM13MAT105, EM13MAT308, EM13MAT307, EM13MAT506.

Pré-requisitos: Congruência de triângulos, propriedades de paralelismo de retas, simetria de reflexão por uma reta e translação de segmento. Ver Seções 3.1, 3.2, 3.4 e 3.5.

Recursos: Utilizar a ficha disponível no Apêndice e as construções no Geogebra disponíveis em:

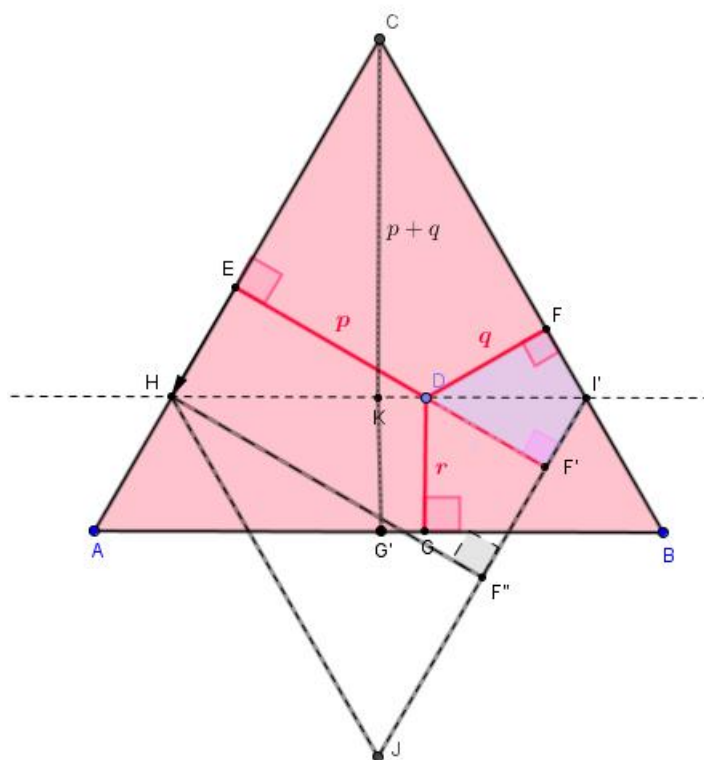
<https://www.geogebra.org/m/jrqfbwsg>

Duração: 2 horas-aula (100 minutos).

4.6.2 Atividade da aula 06

Enunciado da atividade: Em um triângulo equilátero, a soma das distâncias partindo de um ponto interior deste triângulo é igual à altura deste triângulo (ver Figura 55).

Figura 55 – Prova sem palavras do Teorema de Vivian.



Fonte: Autora (2021).

Resolução: Com base na Figura 55, seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero, D um ponto interno qualquer do triângulo e os pontos E, F, G tais que $E \in \overline{AC}$, $F \in \overline{CB}$ e $G \in \overline{AB}$. Sejam \overline{DE} , \overline{DF} e \overline{DG} distâncias aos lados do triângulo, cujas medidas

são $p, q, r > 0$, respectivamente. Além disso, seja $G' \in \overline{AB}$ e $\overline{CG'}$ a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado \overline{AB} . Queremos mostrar que $m(\overline{CG'}) = p + q + r$.

Seja $\overleftrightarrow{HI'}$ uma reta paralela ao segmento \overline{AB} , onde H e I' são pontos pertencentes aos segmentos \overline{AC} e \overline{CB} , respectivamente, e $D \in \overleftrightarrow{HI'}$. Assim, $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CHI'}$ e $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'I'H}$ por serem ângulos correspondentes. Logo, pelo caso Ângulo-Ângulo (ver Subseção 3.5.3), temos que $\triangle CHI'$ e $\triangle ABC$ são semelhantes e, portanto, $\triangle CHI'$ é equilátero.

Agora, escolha J por simetria de reflexão e obtenha o triângulo $\triangle HI'J$, congruente ao triângulo $\triangle H'I'C$, pelo caso LLL (ver Subseção 3.5.2).

Dado $\triangle DFI'$, reflita-o pela $\overleftrightarrow{HI'}$, obtendo o triângulo $\triangle DF'I'$ com $\triangle DFI' \equiv \triangle DF'I'$, onde $F' \in \overline{JI'}$. Como consequência, $\widehat{DF'I'}$ é reto.

Note que $\overline{ED} \cup \overline{DF} = \overline{ED} \cup \overline{DF'}$ por construção. Considerando o segmento $\overline{EF'}$ e uma semirreta de origem em H , pelo postulado do transporte de segmentos (ver Observação 3.1.9), temos que existe sobre essa semirreta um único ponto F'' tal que $\overline{HF''} \equiv \overline{EF'}$. Além disso, $\overline{HF''}$ é a altura do triângulo $\triangle HI'J$ relativa ao lado $\overline{JI'}$, onde $F'' \in \overline{JI'}$ e $m(\overline{HF''}) = p + q$

No $\triangle HI'J$, todas as alturas são congruentes, uma vez que o triângulo é equilátero. Assim, sendo \overline{CK} a altura relativa ao lado $\overline{HI'}$, $\overline{HF''} \equiv \overline{CK}$. Logo, $m(\overline{CK}) = p + q$.

Por fim, basta notar que como $K \in \overline{HI'}$ e $D \in \overline{HI'}$, logo $\overline{CK} \cup \overline{DG} = \overline{CG'}$, ou ainda,

$$m(\overline{CG'}) = m(\overline{CK}) + m(\overline{DG}) = p + q + r.$$

4.6.3 Descrição da aula 06

Metodologia: Dividir os alunos em duplas. Pedir para que as duplas acessem o *link* disponível na subseção Subseção 4.6.1.

O professor anotarà o enunciado na lousa e os alunos serão desafiados a mostrar, com justificativas, que $m(\overline{CG'}) = p + q + r$.

Para tal, o professor revisará os conceitos que serão utilizados na tentativa de argumentação, como: simetria de reflexão, translação de segmento, congruência de triângulos (sugestão: caso LLL) e a propriedade que diz que alturas de um triângulo equilátero são congruentes.

Em seguida, o professor socializará, na lousa, as propostas e ideias dos alunos de modo a irem montando, coletivamente, justificativas para a validade do Teorema de Vivian.

Procedimentos:

1. Apresentação do tema da aula (Teorema de Vivian), bem como seu enunciado e seus objetivos de aprendizagem (máximo 15 min.);
2. Acesso ao *link* da construção no Geogebra e entrega da ficha do Apêndice (máximo 5 min.);
3. Revisão dos pré-requisitos (máximo 30 min.);
4. Anotação de ideias e propostas para a resolução da atividade (máximo 20 min.);
5. Socialização das ideias das duplas com dicas dadas pelo professor (máximo 15 min.);
6. Fechamento da aula com a finalização da resolução da atividade (máximo 15 min.).

5 Considerações finais

Como visto, o estudo sobre o pensamento visual, ferramenta essencial para a compreensão da Geometria e outras áreas da Matemática, é muito recente e há poucos estudos nacionais e internacionais. Essa falta de produção acadêmica sobre o tema reflete na formação continuada dos professores da rede pública e privada, uma vez que não têm acesso a leituras e discussões seja no ambiente de trabalho ou dentro das universidades, contribuindo assim para a manutenção da precariedade do ensino de Geometria.

A proposta deste trabalho foi buscar subsídios para contribuir com a formação de professores, oferecendo embasamento teórico sobre a importância da visualização e como as provas sem palavras podem contribuir como recurso pedagógico para o ensino de Geometria. Aprender algo, significa apropriar-se de um conceito e de uma ideia. Aprender conceitos geométricos, no meu ponto de vista, é quando o aluno consegue manipular objetos geométricos, seja sob o contexto algébrico, por meio de fórmulas e generalizações, seja sob o contexto visual manipulativo, em que consegue, cognitivamente, aplicar operações sobre os objetos. Ambos esses aspectos caracterizam a lógica hipotética-dedutiva da Geometria.

Note que as provas sem palavras são diagramas que exigem do estudante operar cognitivamente sobre elas, ou seja, mentalmente fazer manipulações como translações, rotações, movimentações de pontos, aberturas de segmentos entre outras. Dessa forma, é necessário a todo momento o estudante desenvolver sua *image schemata*, isto é, desenvolver o que Dorfler (1991) e Presmeg (2006) em [3, 10] defendem como “visualizar” um conceito geométrico.

As demonstrações são outro meio de desenvolver o caráter hipotético-dedutivo tão valorizado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018) em [1]. Apesar das provas sem palavras serem provas, como o próprio nome diz, elas também possibilitam aos estudantes a justificarem relações e enunciados matemáticos. Em minha experiência acadêmica e relatos de meus colegas de profissão e como visto em publicações sobre o tema, os alunos têm pouco ou nenhum contato com as demonstrações matemáticas, apesar de ser um dos pilares dessa área de conhecimento. Assim, a Matemática ensinada nas escolas baseiam-se na exposição de fórmulas e técnicas que não são explicadas como ou porque funcionam, ou as relações entre temas ou conteúdos explicados e exercitados anteriormente.

Além disso, as provas sem palavras exigem mais do que propor uma rica

ferramenta de visualização ou a inserção dinâmica das demonstrações em sala de aula: elas também possibilitam a constante revisão e encadeamento de conteúdos já estudados para que as provas possam ser desenvolvidas e entendidas, caracterizando assim um aprendizado em que os estudantes precisam rever ideias e temas.

Portanto, pelo desenvolvimento dos capítulos ao longo desta dissertação, crio argumentos para defender o uso das provas sem palavras dentro de sala de aula, sob intermediação dos professores, em grupos, a fim de proporcionar troca de informações, manipulações e operações de objetos geométrico; bem como forma de inserção do processo lógico dedutivo na vida do estudante, processo esse tão importante na vida adulta, conforme defende a BNCC.

Referências

- [1] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 08 de Agosto de 2020. Citado 3 vezes nas páginas 11, 45 e 71.
- [2] CLEMENTE, João Carlos; PINTO BEDIM, Acácia Aparecida; DOMINGOS RODRIGUES, Adriele Cristina; FERREIRA, Hugo; SOUZA, Jéssica Mayara; SANTOS, Leandro; COHN, Maria Aparecida; DIAS, Maria Flávia; TOMÉ, Neila Maria; CARNEIRO, Reginaldo. **Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir de periódicos em educação matemática**. Encontro Mineiro de Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015. Citado na página 11.
- [3] DORFLER, Willy. **Meaning: image schemata and protocols**. 1991. Citado 3 vezes nas páginas 12, 20 e 71.
- [4] DOYLE, Tim; KUTLER, Lauren; MILLER, Robin; SCHUELLER, Albert. **Proofs without words and beyond: a brief history of proofs without words**. 2014. Disponível em: <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-a-brief-history-of-proofs-without-words>. Acesso em: 08 de Agosto de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- [5] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 41.
- [6] NELSEN, Roger B. **Proofs without words: exercises in visual thinking**. Classroom resource materials, number I. Washington, D. C.: The Mathematical Association of America, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 12, 15, 18 e 45.
- [7] NELSEN, Roger B. **Proofs without words II: more exercises in visual thinking**. Classroom resource materials. Washington, D. C.: The Mathematical Association of America, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 12, 15, 18 e 45.
- [8] NELSEN, Roger B. **Proofs without words III: more exercises in visual thinking**. Classroom resource materials. Washington, D. C.: The Mathema-

- tical Association of America, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 12, 15, 18 e 45.
- [9] OSVALDO, Dolce; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da matemática elementar: geometria plana**. Volume 9. São Paulo: Atual, 1993. Citado 6 vezes nas páginas 25, 33, 36, 40, 41 e 43.
- [10] PRESMEG, Norma. **Research on visualization in learning and teaching mathematics**. 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/241301299_Research_on_visualization_in_learning_and_teaching_mathematics. Acesso em: 28 de Julho de 2020. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 19 e 71.

Apêndices

Nome: _____

N.o: _____

Turma: _____

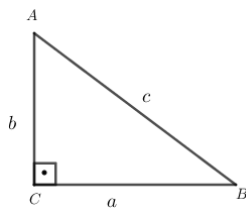
Atividade – Teorema de Pitágoras – Parte I

As Provas Sem Palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático. Nesta aula, você irá jogar um quebra cabeça de modo que você se convença da validade do seguinte Teorema:

Enunciado:

“Dado um triângulo retângulo, vale que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”.

Ou ainda:



Dado um triângulo do tipo retângulo, é válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

onde $a, b > 0$ são as medidas dos catetos e $c > 0$ é a medida da hipotenusa de tal triângulo.

Atividade:

- Acesse o *link* do quebra-cabeça <https://www.geogebra.org/m/zunzeu6r>
 - Usando todas as peças, preencha os dois quadrados menores;
 - Usando todas as peças, monte e preencha o quadrado maior.
- Após realizar a atividade do quebra-cabeça, responda as questões a seguir:

Questões:

01. Com as mesmas peças disponíveis no quebra-cabeça, foi possível cobrir tanto os dois quadrados menores, quanto o quadrado maior. Matematicamente, o que podemos afirmar sobre as áreas dos dois quadrados maiores e o quadrado maior?

02. Pensando na resposta do item 01, determine o comprimento de dois quadrados, cuja soma das suas áreas resulte em 25 unidades de área.

03. Seja ABC um triângulo retângulo, em que um dos catetos mede 5 cm e a hipotenusa mede 13 cm. Usando o Teorema de Pitágoras, determine a medida do outro cateto.

Nome: _____

N.o: _____

Turma: _____

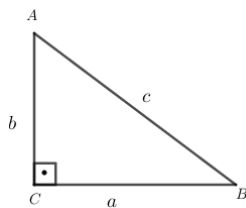
Atividade – Teorema de Pitágoras – Parte II

As Provas Sem Palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático. Nesta aula, você irá jogar um quebra cabeça de modo que você se convença da validade do seguinte Teorema:

Enunciado:

“Dado um triângulo retângulo, vale que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos cateto”.

Ou ainda:



Dado um triângulo do tipo retângulo, é válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

onde $a, b > 0$ são as medidas dos catetos e $c > 0$ é a medida da hipotenusa de tal triângulo.

Atividade:

- Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/ecyzwfuz>
 - O ponto O movimenta, aumentando ou diminuindo a circunferência;
 - O ponto N desloca-se mostrando que as propriedades enunciadas se preservam ao em todos os pontos da circunferência.
- Algebricamente, a partir da figura, mostre a validade do Teorema de Pitágoras;
 - **Dica:** mostre que os triângulos QNP e MNQ são semelhantes.

Atividade extra - pesquisa:

01. Descreva como é feita a marcação de ângulos retos em construções civil, denominado como “esquadreamento de terreno”. Use o espaço em branco para colar imagens exemplificando o método.

02. Ao longo da atividade, foi demonstrado que a partir de um triângulo retângulo vale que o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados. Agora, pesquise provas matemáticas sobre a volta do enunciado: se vale que o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados então o triângulo é retângulo.

Nome: _____

N.o: ____

Turma: _____

Atividade – Lei dos cossenos – Parte I

As Provas Sem Palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático. Nesta aula, você irá jogar um quebra cabeça de modo que você se convença da validade do seguinte Teorema:

Enunciado:

“Dado um triângulo qualquer ABC e um dos seus ângulos internos conhecidos, $\hat{A}CB$. É válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{A}CB)$$

onde a, b, c > 0 são as medidas dos lados do triângulo e $\hat{A}CB$ é o ângulo oposto ao lado de medida c.”

Atividade:

- Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/wkmznvbw>
 - O ponto A movimenta, aumentando ou diminuindo o triângulo, mostrando que as propriedades enunciadas se preservam independentemente do triângulo retângulo.
 - Escolha o ângulo de 0º a 90º pela barra disponibilizada;
 - A Posição inicial e a Posição final movimentam um dos quadrados que serão utilizados na Prova Sem Palavras.

Questão:

01. Qual tipo de tipo de triângulo foi utilizado nesta Prova Sem Palavras? Compare sua resposta com enunciado e faça um pequeno comentário sobre a restrição desta atividade.

Nome: _____ N.o: _____ Turma: _____

Atividade – Lei dos cossenos – Parte II

As Provas Sem Palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático. Nesta aula, você irá jogar um quebra cabeça de modo que você se convença da validade do seguinte Teorema:

Enunciado:

“Dado um triângulo qualquer ABC e um dos seus ângulos internos conhecidos, $\hat{A}CB$. É válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{A}CB)$$

onde $a, b, c > 0$ são as medidas dos lados do triângulo e $\hat{A}CB$ é o ângulo oposto ao lado de medida c .”

Atividade:

- Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/kgvecv8u>
 - O ponto A movimenta, mostrando que as propriedades enunciadas se preservam independentemente do tipo de triângulo destacado em verde.
 - O ponto B movimenta, aumentando e diminuindo a circunferência dada;
 - O ponto D movimenta, alterando o triângulo retângulo, que é fundamental na argumentação da Prova Sem Palavras.
 - **Dica:** Mostre que os triângulos AFD e ACG são semelhantes.

Questões:

01. (Enem - Adaptado) Para se calcular a distância entre duas árvores, representadas pelos pontos A e B, situados em margens opostas de um rio, foi escolhido um ponto C arbitrário, na margem onde se localiza a árvore A. As medidas necessárias foram tomadas, e os resultados obtidos foram os seguintes: $AC = 70$ m, $\hat{BAC} = 62^\circ$ e $\hat{ACB} = 74^\circ$. Sendo $\cos 28^\circ = 0,88$, $\sin 74^\circ = 0,96$ e $\sin 44^\circ = 0,70$, podemos afirmar que a distância entre as árvores é:

02. (PUC-Campinas – Adaptado) O relógio que está na torre do Big Ben foi construído com o ponteiro grande medindo 4,7 metros e o ponteiro pequeno medindo 2,7 metros. Exatamente às 2 horas, a distância entre as pontas, que marcam o tempo, dos dois ponteiros é de, aproximadamente:

Nome: _____ N.o: ____ Turma: _____

Atividade – Todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles

As Provas Sem Palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático. Nesta aula, você irá jogar um quebra cabeça de modo que você se convença da validade do seguinte Teorema:

Enunciado:

Todo triângulo pode ser seccionado em seis triângulos isósceles

Atividade:

- Acesse o *link* <https://www.geogebra.org/m/vpdp3d8u>
 - Caso esteja marcado, remova as marcações e inicie do passo 1 até chegar ao passo 5;
 - Em seguida, no passo 6, clique em “animar”.

Nome: _____ N.o: ____ Turma: _____

Atividade – Área de triângulo dados seus lados e o raio da sua circunferência circunscrita

As Provas Sem Palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático. Nesta aula, você irá jogar um quebra cabeça de modo que você se convença da validade do seguinte Teorema:

Enunciado:

Dado um triângulo ABC qualquer, cujas medidas de seus lados são $a, b, c > 0$ e sua circunferência circunscrita possui raio de medida $R > 0$, temos que sua área é dada pela fórmula $\frac{abc}{4R}$.

Atividade:

- Acesse o *link* <https://www.geogebra.org/m/xyn3mfm2>
 - Os pontos A, B, C movimentam-se para convencer o leitor que o enunciado é válido para qualquer triângulo ABC.
 - **Dica:** Mostre que os triângulos ACH e AIG são semelhantes.

Nome: _____ N.o: ____ Turma: _____

Atividade – Teorema de Vivian

As Provas Sem Palavras são figuras, ou diagramas, que auxiliam o leitor a se convencer sobre a validade de um determinado enunciado matemático. Nesta aula, você irá jogar um quebra cabeça de modo que você se convença da validade do seguinte Teorema:

Enunciado:

Em um triângulo equilátero, a soma das distâncias partindo de um ponto interior deste triângulo é igual à altura deste triângulo.

Atividade:

- Acesse o *link* <https://www.geogebra.org/m/jrqfbwsg>
 - Os pontos A, B, C movimentam-se para convencer o leitor que o enunciado é válido para qualquer triângulo equilátero ABC.