Universidade Federal do Acre
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

SOBRE GRUPOS DE ORDEM NO MÁXIMO OITO: UMA ATIVIDADE LÚDICA

Francisco Raildo da Silva e Silva

Rio Branco - AC
Maio/2022

SOBRE GRUPOS DE ORDEM NO MÁXIMO OITO: UMA ATIVIDADE LÚDICA

Por

Francisco Raildo da Silva e Silva

Sob Orientação do
Professor Dr. Sergio Brazil Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Acre, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Maio/2022

Francisco Raildo da Silva e Silva

SOBRE GRUPOS DE ORDEM NO MÁXIMO OITO: UMA ATIVIDADE LÚDICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Acre, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Rio Branco - Acre, 23 de maio de 2022.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. Sergio Brazil Junior (Presidente)
Universidade Federal do Acre - UFAC

....

Prof. Dr. Josean da Silva Alves (Membro)
Universidade Federal do Acre - UFAC

....

Prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi (Membro Externo)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Dedico a minha família, professores e amigos.

Em especial ao meu amigo Francisco José Oliveira da Silveira (In Memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar está oportunidade, em seguida os agradecimentos são para minha família, em especial, minha esposa Greicy Kelly Dantas do Nascimento, minha mãe Maria Helena Monte da Silva e minha irmã Maria Daiane da Silva Araújo que me apoiaram e me incentivaram durante esses anos de estudos.

Ao meu grande amigo Francisco José Oliveira da Silveira por sua hospitalidade durante os anos que morei em Rio Branco fazendo minha graduação e quando tinha que ir aos finais de semana para assistir às aulas do curso.

Aos meus amigos de mestrado Noah Gabriel Dantas, Lucas Motta Freire, Taylon Oliveira, Matheus Silva e aos demais, que me ajudaram com este trabalho e com os estudos durante o curso.

Aos meus professores do mestrado que desde a graduação contribuíram para que eu alcançasse o conhecimento e grau de estudo que tenho hoje.

Resumo

Este trabalho apresentará um estudo sobre a importância dos jogos como recurso estimulador do aprendizado dos alunos e a construção de uma atividade lúdica significativa baseada na estrutura algébrica de um grupo de ordem no máximo oito, que se desenvolve por meio da análise de suas representações geométricas a partir da utilização de ferramentas como algumas definições, teoremas e resultados da teoria dos grupos. A dinâmica do jogo tem como objetivo a compreensão de conceitos algébricos de grupos de uma maneira mais lúdica e agradável aos interessados. Este recurso didático foi desenvolvido, criado, apresentado e testado por alguns alunos do curso de Matemática na modalidade EaD da Universidade Federal do Acre – UFAC como resultado final.

Palavras-chave: Grupos; Jogos; Recurso Didático; Subgrupos.

Abstract

This paper will present a study on the importance of games as a stimulating resource for students' learning and the construction of a significant playful activity based on the algebraic structure of a group of order of a maximum of eight, which develops through the analysis of their geometric representations from the use of tools as some definitions, theorems and results of group theory. The dynamics of the game aims to understand algebraic concepts of groups in a more playful and pleasant way to those interested. This didactic resource was developed, created, presented and tested by some students of the mathematics course in the EaD modality of the Federal University of Acre - UFAC as a final result.

Keywords: Groups; Games; Didactic Resource; Subgroups.

Conteúdo

Introdução

Trabalhar conceitos e conteúdos complexos de uma forma mais divertida e atrativa para os alunos é um grande desafio para os professores e educadores. Utilizar recursos como vídeos, slides, quiz, jogos, pesquisas na internet, confecção de materiais, entre outros, pode não ser uma tarefa fácil para alguns professores. Para o professor criar, confeccionar ou até mesmo adaptar uma atividade com a finalidade de ser utilizada como recurso didático educativo, requer planejamento e muito tempo. Quanto ao tempo é a parte mais fácil pois, entre o planejamento das aulas, período que está lecionando suas aulas, correções de atividades e correções de provas sempre sobra uma madrugada ou outra para trabalhar em suas atividades.

Já o planejamento, requer um pouco mais de atenção visto que para desenvolver uma atividade voltada para o ensino de conteúdo é preciso criatividade e é claro que existe algumas dificuldades como a precariedade das ferramentas ofertadas pelas escolas, principalmente do ensino público e a falta de domínio dos recursos tecnológicos por parte de alguns professores que acaba eliminando a criação de algumas atividades que envolvem um pouco mais de conhecimento ou habilidade em manusear as ferramentas tecnológicas.

Por outro lado, uma atividade bastante utilizada e bem atrativa aos alunos é a criação ou adaptação de jogos como recurso estimulador do aprendizado. Os jogos são utilizados com esta finalidade há muito tempo e tem um papel importante no desenvolvimento dos alunos haja vista que estimula a concentração, fortalece os laços afetivos, desenvolve o espírito de competitividade e estimula a criatividade. Os jogos podem ser utilizados em qualquer disciplina e para abordar qualquer conteúdo. Por se tratar de uma disciplina que envolve conteúdos abstratos e complexos para uma grande maioria dos alunos, é bastante comum encontrar jogos voltados para o ensino de matemática.

Em Álgebra Abstrata, por exemplo, estruturas algébricas não é um tema muito simpático para uma considerável parte dos discentes. Muitos falam que é um assunto muito abstrato, outros dizem que não conseguem entender e que preferem estudar conceitos da disciplina de Cálculo. Não são raros os alunos que buscam uma forma alternativa de se aprender essa parte da matemática.

Pensando nas indagações dos alunos quanto a uma atividade menos abstrata para aprender tal conteúdo, foi pensado em desenvolver uma atividade lúdica que envolvesse um determinado tipo de estrutura algébrica e suas características. Ficou decidido que a atividade a ser desenvolvida seria para trabalhar conceitos de grupos e subgrupos.

No primeiro capítulo foi realizado um estudo sobre a importância dos jogos como recurso que estimula e mobiliza o ensino e as aprendizagens dos discentes. Para este estudo foram analisados trabalhos e textos dos principais pesquisadores sobre o assunto. A partir deste estudo foi possível organizar as principais ideias e como construir a atividade de maneira mais significativa atentando para o tipo de atividade, estrutura da atividade, organização da atividade e objetivos da atividade. Neste momento foi levado em consideração as principais dúvidas e questionamentos dos alunos quando apresentado o tema de teoria dos grupos.

No segundo capítulo foi apresentado o embasamento teórico e pré-requisitos necessários para compreensão dos assuntos abordados. Assim, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre tal assunto utilizando o livro Elementos de Álgebra dos autores Arnaldo Garcia e Yeves Lequain, ampliando o conhecimento sobre o tema. Este capítulo também serviu para fazer a escolha dos grupos que seriam utilizados. Sem impedimento para fazer com grupos de ordem maior, foi decidido que os grupos utilizados seriam com, no máximo, oito elementos, ou seja, os grupos de ordem menor ou igual a oito, apresentando seus elementos, tábua de operação, subgrupos e reticulados.

O terceiro capítulo foi voltado para o desenvolvimento da atividade e a confecção do jogo direcionado especificamente para o estudo de um grupo de ordem 8. A decisão de fazer para um grupo de ordem 8 como já foi dito, não impede o leitor interessado de fazer para outros grupos de ordem inferior ou superior. Em seguida, consta o desenvolvimento prático do jogo “Reticulando D4” com os alunos da Universidade Federal do Acre, do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD, do polo UAB de Feijó. Desta forma, o capítulo contém o material didático utilizado e relatos que avaliam positivamente o desenvolvimento da atividade lúdica na apresentação do conteúdo de grupos e subgrupos da disciplina de estruturas algébricas. No decorrer deste relato foram apresentados algumas definições e resultados sem o aprofundamento das ideias. Para um leitor mais interessado, ficam indicadas as bibliografias.

Capítulo 1.

A Importância dos Jogos no Ensino da Matemática

A inteligência matemática é um dos tipos de inteligência que podem ser identificadas em algumas pessoas. As principais características desses indivíduos é a facilidade em lidar com números, operações, padrões de repetição e jogos. De maneira geral, esses indivíduos apresentam certa afinidade em matemática. Nas escolas ou ambientes de estudo, para aqueles que não apresentam esse tipo de inteligência desenvolvida, a matemática acaba se tornando um terror. Porém, mais aterrorizante ainda é a tarefa de ensinar tal disciplina a esses alunos. E é neste sentido que se apresenta o jogo “Reticulando D_4” como uma estratégia que os professores poderão utilizar para ensinar matemática nas escolas ou ambientes de estudos.

Nas escolas ou nos ambientes de ensino, cabe ao professor planejar, elaborar estratégias didáticas, adaptar materiais, utilizar recursos tecnológicos e adaptar-se a qualquer que seja a modalidade de ensino, isso para levar ao aluno o conhecimento de maneira mais clara e objetiva possível. Uma das técnicas que os professores de matemática mais recorrem para apresentar ou ensinar seus conteúdos é a utilização de jogos, porém, trabalhar com tal instrumento não é uma tarefa tão fácil, tendo em vista que existem conteúdos muito abstratos onde adaptar ou criar um jogo é uma tarefa delicada.

É importante considerar ainda que muitos professores apresentam dificuldades para construir os conhecimentos matemáticos junto ao aluno através dos jogos didáticos, esta fragilidade se dá em decorrência de fatores relacionados a própria formação, assim como do processo de formação continuada que deveria oportunizar a estes professores novas habilidades e competências no ensino da matemática com estratégias voltadas para o uso de jogos.

Esta realidade também contribui para que os índices de reprovação na disciplina de matemática sejam cada vez mais preocupantes. Os estudantes apresentam certa resistência em relação a matemática, pois é possível perceber, no cotidiano da sala de aula, que os alunos desenvolvem aversão a disciplina, muito embora não tenham sido reprovados ou vivenciado situações que os estigmatizaram em relação aos conteúdos matemáticos.

Além disso, na maioria das vezes os conhecimentos matemáticos são apresentados aos alunos de forma teórica, sem relação com seus saberes experienciais, envolvem apenas os conceitos algébricos e, a associação desses elementos já causa resistência por parte dos alunos, aliados a isso vem a desmotivação, a falta de interesse, por conseguinte as práticas pedagógicas dos professores descontextualizadas da realidade do aluno, se torna um campo fértil para um ensino fragmentado dos conteúdos matemáticos.

Com relação a estes pressupostos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já deixava claro que

> [...] o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p.26)

Neste sentido, percebe-se que o ensino de matemática de forma mais propositiva já era uma preocupação e evidenciava a necessidade de se construir um aprendizado que fosse significativo para o aluno e consolidasse seu processo de autonomia diante das situações problemas que lhes fossem apresentadas, garantindo assim, ao aluno "estabelecer um sistema de relações entre a prática vivenciada e a construção e estruturação do vivido, produzindo conhecimento" (GRANDO, 2000, p.13)

Esta necessidade de garantir que o ensino da matemática realmente atendesse aos objetivos propostos na construção das competências e habilidades matemáticas dos alunos fizeram surgir várias iniciativas, estudos e teorias com diversas abordagens para o ensino construtivo dessa disciplina, as quais se destacam a Etnomatemática, a Modelagem, a Resolução de Problemas, as Tecnologias de Informação e Comunicação, Educação Matemática Crítica, o uso de Materiais e Jogos Didáticos, sendo este último um dos mais propositivos para se atingir tal finalidade.

O uso dos jogos didáticos utilizados como estratégias e metodologias para uma melhoria significativa do ensino da matemática vem ganhando cada vez mais força e despertando o interesse dos educadores haja vista que

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem (GRANDO, 2000, p.15).

A partir destas considerações, cabe assinalar que o papel do professor é de fundamental importância nesta nova abordagem de ensino, que a partir deste contexto assume a postura de mediador/facilitador da aprendizagem do aluno e os jogos tornam-se recursos didáticos que implicará em um ensino mais criativo, crítico com múltiplas vantagens no processo de ensino e aprendizagem.

Os jogos, de acordo com Kishimoto (2001), não possui uma definição que possa ser considerada simplória, pois a mesma abrange diferentes maneiras e estratégias de realiza-los como, por exemplo, jogos políticos, xadrez, amarelinha, adivinhas, entre outros de igual natureza.

Grando (1995) esclarece que a origem da palavra jogo "vem do latim Iocu, que significa facejo, zombaria e que foi empregada no lugar de ludu: brinquedo, jogo, divertimento, passatempo" (1995, p.30). Compreende-se, pois que se trata de uma atividade que produz divertimento, criatividade e que permite passar o tempo de forma mais produtiva.

Desta forma, o uso dos jogos serve não apenas para entretenimento e socialização, mas numa nova abordagem de ensino, se torna uma estratégia para a construção de conhecimentos a partir do uso de metodologias concretas, tornando o campo de ensino da matemática de uma relação abstrata para um contexto real, concreto e que faz parte do cotidiano do aluno.

Note-se também que ao utilizar os jogos como estratégia mobilizadora de conhecimento, é imprescindível a utilização de regras, uma vez que são elas (as regras) que permitirão tanto a compreensão do jogo, quanto sua finalidade e uma execução que conduzirá aos objetivos propostos em um prévio planejamento.

Nesta concepção, Grando (1995, p.34) deixa claro que "[...] não existe jogo se não há regras (verdade inabalável). E estas regras devem ser respeitadas pelos jogadores. Aquele que ignora ou desrespeita as regras, destrói o jogo e é expulso, pois ameaça a existência da comunidade dos jogadores". Fica claro, nesta afirmação que o uso do jogo não pode ser feito de forma aleatória, ou unicamente para passar o tempo, deve ser uma atividade planejada, executável e produtora de conhecimentos aos participantes.

No ensino da matemática, o jogo possui uma finalidade que transcende a socialização e o entretenimento, deve ser compreendido como um facilitador da aprendizagem, especialmente em relação à construção de conceitos e a memorização de processos, neste sentido, a sua repetição pode ser mais agradável do que a resolução de uma extensa lista de exercícios (MIORIM E FIORENTINI, 1990, p.7).

De fato, o uso dos jogos na sala de aula é muito mais que uma possibilidade e oportunidade que os alunos têm de socializar e interagir com seus pares, trata-se de um mecanismo que favorece a cooperação mútua, o trabalho em equipe e o processo de construção de estratégias para elucidação da situação problema proposta pelo professor. Esta situação requer do educador a construção de um planejamento de forma organizada e que permita o uso do jogo de forma interessante e desafiadora.

É certo que o uso dos jogos ajuda a reforçar os conhecimentos trabalhados pelo professor e, pode ser utilizado antes, durante ou após o fechamento da aula, de forma a promover novos aprendizados, e nesse aspecto Kishimoto (2001, p. 80) reforça que:

> O jogo, na educação matemática, passa a ter o caráter de material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. A criança, colocada diante de situações lúdicas, aprende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, aprende também a estrutura matemática presente.

Assim, a questão central é garantir que o aluno participe da atividade, mas não de qualquer jeito, deve haver uma intencionalidade, ou seja objetivos a serem alcançados, metas a serem cumpridas e regras que deverão ser seguidas, já que o importante não é apenas o conteúdo em si, mas as estratégias utilizadas, o respeito as regras e a interação entre professor, aluno, conhecimento e as metodologias desenvolvidas.

E, por fim o aluno deverá compreender e reconhecer que o momento do uso dos jogos se trata de um período importante de sua formação, visto que ele terá a oportunidade de argumentar, propor soluções na busca de chegar aos resultados esperados pelo professor, já que o jogo pode não ter uma resposta única, mas várias, deve-se, então respeitar as respostas, desde que não fujam do propósito e daquilo que foi planejado previamente pelo professor, pois como afirma Kamii (1995, p. 78), “o ensino de matemática não pode se dar por meio das atividades realizadas no papel, a escrita interrompe o pensamento quando a criança para, para escrever, ela para de pensar”.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Para se realizar uma abordagem sobre grupos de ordem menor ou igual a oito, torna-se necessário realizar algumas considerações. Nesse sentido, serão apresentadas algumas definições e resultados os quais tem grande importância para o entendimento do presente relato e que são facilmente encontradas em Garcia (2001).

O primeiro conceito apresentado é muito importante para nosso estudo sobre os grupos e é muito utilizado no decorrer do texto.

Inteiros módulo $\boldsymbol{n}$: Seja n um inteiro positivo. Sobre $\mathbb{Z}$, definimos a relação $\underset{n}{\equiv}$ da maneira seguinte: para $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \underset{n}{\equiv} b \Leftrightarrow a - b \text{ é múltiplo de } n.$$

Em vez de escrever $a \underset{n}{\equiv} b$, escreve-se também $a \equiv b(mod\, n)$ e diz-se que a é $côngruo$ a b $módulo$ n.

É imediato verificar que $\underset{n}{\equiv}$ é uma relação de equivalência, isto é,

$$\begin{cases} a \underset{n}{\equiv} a \\ a \underset{n}{\equiv} b \ \Rightarrow \ b \underset{n}{\equiv} a \\ a \underset{n}{\equiv} b, b \underset{n}{\equiv} c \ \Rightarrow \ a \underset{n}{\equiv} c \end{cases}$$

Se $a \in \mathbb{Z}$, então, por definição, sua classe de equivalência módulo o inteiro n consiste no conjunto $\{b \in \mathbb{Z};\ b \underset{n}{\equiv} a\}$, isto é, no subconjunto $\{a + km; k \in \mathbb{Z}\}$; ela será denotada por $\bar{a}$ ou $a + n\mathbb{Z}$. Denotaremos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ o conjunto das classes de equivalência modulo n; é claro que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$.

Observação: Os inteiros módulo n também podem ser representados da seguinte maneira.

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

A seguir, será apresentada e pode ser facilmente encontrada nas referências bibliográficas a definição do conceito mais importante para o estudo da teoria dos grupos e, consequentemente para o desenvolvimento deste trabalho. É a partir dela que os resultados seguintes são baseados e construídos.

Definição 1: Um conjunto G com uma operação

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

é um $grupo$ se as condições seguintes são satisfeitas:

(i) A operação é associativa, isto é,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \qquad \forall\, a, b, c \in G.$$

(ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists\, e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \;\; \forall a \in G.$$

(iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,

$$\forall\, a \in G, \;\exists\, b \in G \quad \text{tal que } a \cdot b = b \cdot a = e.$$

O grupo é $abeliano$ ou $comutativo$ se:

(iv) A operação é comutativa, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall\, a, b \in G.$$

Observamos que é bastante comum a utilização da notação aditiva para denotar a operação de um grupo abeliano, bem como utilizar o símbolo "0" para indicar o seu elemento neutro.

Exemplos clássicos de grupos são: o conjunto dos números reais com a soma usual $(\mathbb{R}, +)$, o conjunto dos números inteiros com a soma usual $(\mathbb{Z}, +)$, o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ das $m \times n$ matrizes com entradas em $\mathbb{C}$ e com a operação usual de adição de matrizes e o conjunto $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, onde $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, formado pelas classes de equivalência módulo n com respeito à soma definida da seguinte forma: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$. O conjunto dos números reais, exceto o 0, com a multiplicação usual $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ também constitui a estrutura de grupo.

Um dos grupos mais importantes para o estudo da teoria dos Grupos é denotado por $(S_n, \circ)$, e é dito como, $Grupo\ das\ Permutações$ do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Os elementos deste grupo são as funções $f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \to \{1, 2, 3, \dots, n\}$ bijetoras e a operação em si "$\circ$" é determinada pela composição destas funções. Estas funções possuem uma representação matricial de ordem $2 \times n$, onde na primeira linha se encontra os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ e na segunda linha suas respectivas imagens perante a bijeção. Veja um exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ f(1) & f(2) & & f(n-1) & f(n) \end{pmatrix}$$

Deste modo a composição de duas funções $f, g \in S_n$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & & f(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(1) & g(2) & & g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & & f(g(n)) \end{pmatrix}.$$

Pode-se observar que este último grupo é não-abeliano, enquanto que os anteriormente citados o são. Outros exemplos de grupos são facilmente encontrados em Garcia (2001).

Definição 2: A quantidade de elementos de um grupo G (denotada por $|G|$) é chamada de $ordem\ do\ grupo$.

Existem grupos com ordens finita e infinita. Por exemplo, o grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$, onde $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, é um grupo com n elementos, enquanto que o grupo $(\mathbb{R}, +)$ possui infinitos elementos.

Definição 3: Seja $(G,\cdot)$ um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um $subgrupo$ de G (denotamos $H < G$) quando, com a operação de G, o conjunto H é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:

0) $h_1 \cdot h_2 \in H, \quad \forall\, h_1 \cdot h_2 \in H$.

i) $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3 \quad \forall\, h_1, h_2, h_3 \in H$.

ii) $\exists\, e_H \in H$ tal que $e_H \cdot h = h \cdot e_H = h, \ \forall\, h \in H$.

iii) Para cada $h \in H$, existe $k \in H$ tal que $h \cdot k = k \cdot h = e_H$.

Observações:

1) A condição i) é sempre satisfeita, pois a igualdade $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ é válida para todos os elementos de G.

2) O elemento neutro e_H de H é necessariamente igual ao elemento neutro e de G. De fato, tomando $a \in H \subseteq G$, temos $e_H \cdot a = a$; multiplicando os dois lados por a^{-1} à direita, obtemos $e_H = e$.

3) Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual ao inverso de h em G. De fato, se k é o inverso de h em H, então $h \cdot k = k \cdot h = e_H$, logo $h \cdot k = k \cdot h = e$, pois $e_H = e$, e, portanto, k é o inverso de h em G.

Proposição 1: Seja $H \subset G$, onde $H \neq \emptyset$, então H é um subgrupo de G se e somente se as duas condições seguintes são satisfeitas:

1) $h_1 . h_2 \in H, \ \forall\ h_1, h_2 \in H$.

2) $h^{-1} \in H, \ \forall\ h \in H$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que H seja um subgrupo de G. A condição 1) é então claramente satisfeita. Agora, seja $h \in H$; sendo H um grupo, h possui um inverso em H; mas, pela Observação 3) precedente, tal inverso é necessariamente igual a h^{-1}; logo $h^{-1} \in H$, e a condição 2) é satisfeita. Reciprocamente, suponhamos que as duas condições 1) e 2) sejam satisfeitas. Então, a condição 0) da Definição 3 é claramente satisfeita. Para ver que a ii) é satisfeita, basta ver que $e \in H$; isto de fato acontece, pois, tomando $h \in H$, temos $h^{-1} \in H$ pela condição 2) e logo $e = hh^{-1} \in H$ pela condição1). Finalmente, que a condição iii) é satisfeita decorre da condição 2) ser satisfeita. ■

Note que verificar estas duas condições torna-se mais elementar do que verificar se o subconjunto dado constitui ou não uma estrutura de grupo. O leitor pode observar tal fato, mostrando através da Proposição 1, que $(\mathbb{Z},+)$ é subgrupo de $(\mathbb{R},+)$.

Definição 4: O conjunto formado por todos os subgrupos de um grupo $(G,*)$ é chamado de $reticulado\ do\ grupo$ e o denotaremos por $\mathfrak{R}(G)$, isto é, $\mathfrak{R}(G) = \{H \subseteq G; H \leq G\}$. Podemos, também, apresentar uma forma geométrica deste reticulado, como veremos mais adiante.

Uma das formas de estudar o reticulado de um grupo dado, é através da seguinte definição:

Definição 5: Seja S um subconjunto não vazio de um grupo G, o conjunto $\{a_1 a_2 a_3 \dots a_n |\ a_i \in S\ ou\ a_i \in S^{-1}\ e\ n \in \mathbb{N}\}$ será dito conjunto gerado por S, denotado por $< S >$.

Observação: $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$.

Se $S = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, ou seja, S é finito, então denotaremos $< S >$ por $< b_1, b_2, \dots, b_n >$.

Proposição 2: Sejam G um grupo e S um subconjunto não-vazio de G. Então. O conjunto $< S >$ é subgrupo de G.

DEMONSTRAÇÃO. Esta proposição decorre imediatamente da proposição 1. ■

Agora, seja $(G,*)$ um grupo e dado $x \in G$, note que o conjunto: $< x > = \{\dots, (g^{-1})^3, (g^{-1})^2, g^{-1}, 1, g, g^2, \dots\}$, ou simplificando as notações e tomando $(g^{-1})^t = g^{-t}$, temos que $< x > = \{y \in G; y = x^n\ ,\ n \in \mathbb{Z}\}$, e neste caso dizemos que $< x >$ é o subgrupo das potências de x, ou na notação aditiva, $< x > = \{y \in G; y = nx, n \in \mathbb{Z}\}$ é subgrupo dos múltiplos de x . Para o caso em que

$< x > = G$, diremos que G é um grupo cíclico.

Um exemplo de grupo cíclico é $(\mathbb{Z}, +)$, pois perceba que $(\mathbb{Z}, +) = < 1 > = \{y \in \mathbb{Z}; y = 1.n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Definição 6: A ordem de um elemento de um grupo $(G,*)$ fica então definida como sendo a ordem do subgrupo gerado por ele.

Nota-se facilmente que todo grupo cíclico é abeliano. Exemplos de grupos cíclicos finitos são os conjuntos $(\mathbb{Z}_n, +)$, $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, onde este é formado pelas classes de equivalência módulo n $(G = \mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$. O Grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é um exemplo de grupo cíclico infinito.

A seguir será apresentado um conceito muito importante para obtenção de alguns resultados importantes da teoria dos grupos que são as classes laterais. Este conceito pode ser facilmente encontrado em Garcia (2001)

Classes Laterais: Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Sobre G, defina a relação de equivalência $\tilde{E}$ da maneira seguinte:

$$y \, \tilde{E} \, x \iff \exists \, h \in H \text{ tal que } y = xh$$

Verifique que $\tilde{E}$ é uma relação de equivalência.

Por definição, a classe de equivalência que contem x é o conjunto $\{y \in G \mid y \, \tilde{E} \, x\} = \{xh \mid h \in G\}$; denotamos esse conjunto por xH e o chamaremos de classe lateral à esquerda de H em G que contém x. Quando não houver confusão possível, chamaremos simplesmente esta classe de classe lateral de x à esquerda.

Definição 7: A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda é o $índice$ de H em G; ele sera denotado por $(G : H)$.

Proposição 3: Todas as classes laterais de H em G tem a mesma cardinalidade, igual a cardinalidade de H.

DEMONSTRAÇÃO. A função

$$H \longrightarrow xH$$

$$h \longmapsto xh$$

é claramente uma bijeção. ■

Um teorema muito importante no estudo dos grupos é o Teorema de Lagrange, que relaciona a ordem de um grupo com a ordem de seus subgrupos. O teorema será enunciado a seguir e sua demonstração pode ser facilmente encontrada em Garcia (2001).

Teorema de Lagrange: Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então $|G| = |H| \cdot (G: H)$; em particular, a ordem e o índice de H dividem a ordem de G.

DEMONSTRAÇÃO. Considerando a relação de equivalência à esquerda $\check{E}$ em G, obtemos uma partição de G em classes de equivalência. A Proposição 3: mostra que em cada uma dessas classes temos $|H|$ elementos. Como, por definição, o número de classes é $(G: H)$, temos a igualdade $|G| = |H| \cdot (G : H)$ ■

Definição 8: Sejam $(G,*)$ e $(\mathcal{G},\times)$ dois grupos. Uma função $f: G \to \mathcal{G}$ é um homomorfismo se ela é compatível com as estruturas dos grupos, isto é, se $f(a * b) = f(a) \times f(b), \forall\, a, b \in G$.

A aplicação $Id: G \to G$, definida por $Id(g) = g, \forall g \in G$ é um homomorfismo chamado $homomorfismo\ identidade$.

Definição 9: Chamamos um homomorfismo $f: G \to \mathcal{G}$ de $isomorfismo$, quando este é bijetor. Nesse caso dizemos que os grupos são isomorfos, e isto que dizer que os grupos possuem a mesma estrutura a menos da operação estabelecida.

Todo grupo cíclico finito é isomorfo a algum $\mathbb{Z}_n$, $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, logo, a partir de agora, e por questão de praticidade, referir-nos-emos aos grupos cíclicos finitos como $\mathbb{Z}_n$.

É de fácil verificação que se $(G,*)$ é um grupo de ordem p, onde p é um número primo, então ele é cíclico e isomorfo ao $\mathbb{Z}_p$. Esse grupo possui reticulado simples, pois, pelo Teorema de Lagrange, a ordem de qualquer subgrupo de G divide p.

Além dos grupos de ordem prima, os grupos $(G,*)$ de ordem p^2, com p primo são, também, abelianos.

Outro teorema muito importante no estudo dos grupos e que veremos a seguir é o Teorema de Cayley, que verifica que todo grupo finito é isomorfo a um subgrupo de um grupo de permutações. O teorema será enunciado a seguir, e pode ser encontrado facilmente em Garcia (2001).

Teorema de Cayley: Seja G um grupo finito de ordem n; seja G_0 o conjunto subjacente a G (i.e., G_0 é o conjunto de G sem a estrutura de grupo). Então

$$\begin{aligned} T: G &\longrightarrow \mathcal{P}(G_0) \simeq S_n \\ g &\longmapsto T_g: G_0 \longrightarrow G_0 \\ &\qquad\qquad x \longmapsto gx \end{aligned}$$

é um homomorfismo injetivo.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam g_1, g_2 dois elementos quaisquer de G; para todo elemento x de G_0, temos.

$$T_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)x = g_1(g_2x) = T_{g_1}\left(T_{g_2}(x)\right) = T_{g_1} \circ T_{g_2}(x);$$

Logo

$$T_{g_1g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2},$$

e assim obtemos que T é um homomorfismo entre o grupo G e o grupo $\mathcal{P}(G_0)$. Agora, T é injetivo pois se $g \in \ker T$, temos que $id_{G_0} = T_{g,}$ isto é $x = T_G(x) = gx,\ \forall\, x \in G$; logo $g = e$. ■

Com este teorema, podemos utilizar uma mesma linguagem quando estivermos trabalhando com grupos finitos, ou seja, podemos representar qualquer grupo finito como um subgrupo de um grupo de permutações de n elementos.

2.1. Apresentação dos grupos com ordem ≤ 8.

A seguir será realizado de forma simplificada a apresentação das estruturas dos grupos de ordem menor ou igual a oito. E ainda, para facilitar a compreensão, vamos utilizar o teorema de Cayley para representar os grupos que serão citados a seguir como sendo grupos isomorfos a algum subgrupo do grupo das permutações de n elementos.

2.1.1. Grupo de ordem 1.

A menos de isomorfismo, (1,·) é o único grupo com um elemento, e seu reticulado é $\Re(1,\cdot) = \{1\}$ e sua representação geométrica é apenas um ponto.

Pelo teorema de Cayley $G = (1,\cdot)$ é isomorfo a $G = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

2.1.2. Grupos com ordem 2, 3, 5 e 7.

Esses grupos são cíclicos. Daí, seus reticulados possuem apenas os subgrupos triviais, isto é, $\Re((\mathbb{Z}_p, +)) = \{\{\bar{0}\}, \mathbb{Z}_p\}$. Pelo teorema de Cayley podemos representar esses grupos da seguinte maneira:

$(\mathbb{Z}_2, +)$ é isomorfo a $(G,\circ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

$(\mathbb{Z}_3, +)$ é isomorfo a $(G,\circ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$;

$(\mathbb{Z}_5, +)$ é isomorfo a $(G,\circ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$;

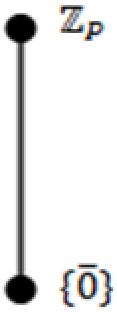
$(\mathbb{Z}_7, +)$ é isomorfo a

$(G,\circ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right\}$

Observação: Reduzimos o tamanho da fonte para que a representação do grupo coubesse em uma linha.

A representação geométrica de seus reticulados pode ser feita pela figura a baixo.

Figura 1.1: Reticulado dos grupos de ordem prima



Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.3. Grupos de ordem 4.

Segundo Garcia (2001, pág. 188) os grupos de ordem 4 são, a menos de isomorfismo, o $(\mathbb{Z}_4, +)$ e $(V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$, esse último é chamado de grupo de Klein, e são abelianos.

2.1.3.1. O grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$

Esse grupo consiste das classes de equivalência módulo 4, logo $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

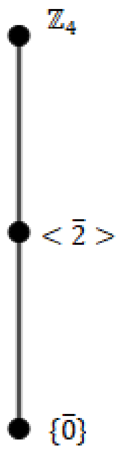
A tábua de operação desse grupo é:

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Em $(\mathbb{Z}_{\mathbf{4}}, +)$, apenas $\bar{2}$ possui ordem 2, enquanto que $\bar{1}$ e $\bar{3}$ possuem ordem 4 e geram o grupo. Assim, o reticulado de $(\mathbb{Z}_{\mathbf{4}}, +)$ é $\Re((\mathbb{Z}_4, +)) = \{\{0\}, <\bar{2}>, \mathbb{Z}_4\}$.

A representação geométrica de seu reticulado pode ser feita pela figura a baixo.

Figura 1.2: Reticulado do grupo $\mathbb{Z}_4$



Fonte: Elaborada pelo autor

Pelo teorema de Cayley, podemos representar o grupo $(\mathbb{Z}_{\mathbf{4}}, +)$ como um grupo isomorfo a um subgrupo do grupo das permutações de 4 elementos. Assim, $(\mathbb{Z}_{\mathbf{4}}, +)$ é isomorfo a $(G, \circ) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

2.1.3.2. O grupo $(\boldsymbol{V_4} = \mathbb{Z}_{\mathbf{2}} \times \mathbb{Z}_{\mathbf{2}}, +)$

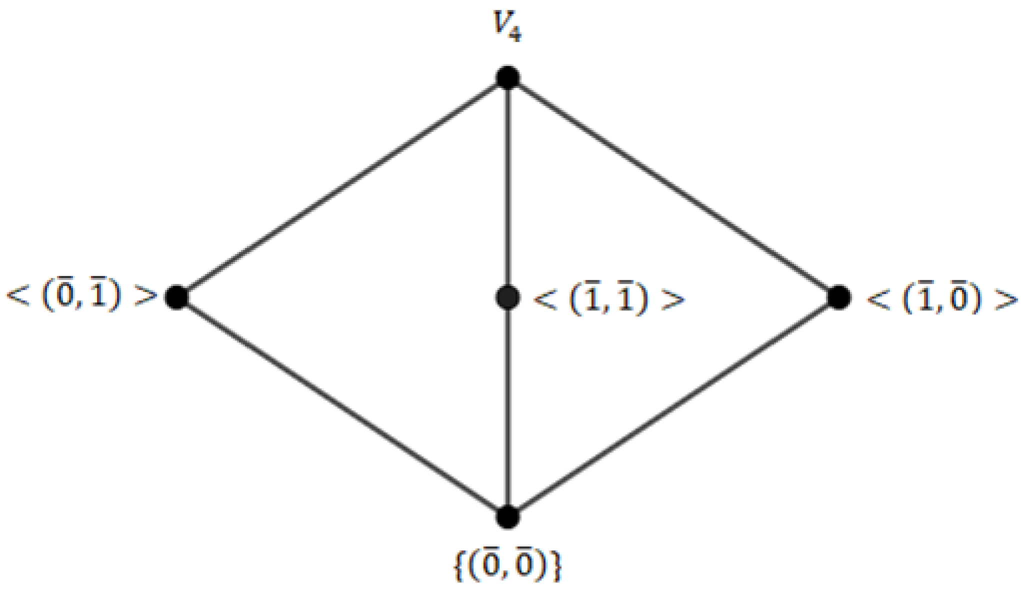
Este grupo tem como elementos os pares ordenados (a, b) onde $a, b \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Assim, $(V_4, +) = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$.

A tábua de operaçao de $(V_4,+)$ é:

+	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$

Diferentemente de $(\mathbb{Z}_4,+)$, em $(V_4,+)$ todos os três elementos não-nulos possuem ordem dois. Logo, existem três sub-grupos não triviais gerados por cada um dos elementos não-nulos de $(V_4,+)$. Segue, então, que o reticulado do grupo $(V_4,+)$ é $\mathfrak{R}(V_4) = \{(\bar{0},\bar{0})\}, < (\bar{1},\bar{0}) >, < (\bar{0},\bar{1}) >, < (\bar{1},\bar{1}) >, V_4\}$ e sua representação geométrica é:

Figura 1.3: Reticulado do grupo V_4



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizamos novamente o teorema de Cayley para representar o grupo V_4 como um grupo isomorfo a um subgrupo do grupo das permutações de 4 elementos. desta forma, $(V_4,+)$ é isomorfo a $(G,\circ) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

2.1.4 Grupos de ordem 6.

Em Garcia (2001, pág.189) encontramos que os grupos de ordem 6, a menos de isomorfismo, são $(\mathbb{Z}_6, +)$ e $(S_3, \circ)$.

2.1.4.1. O grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$

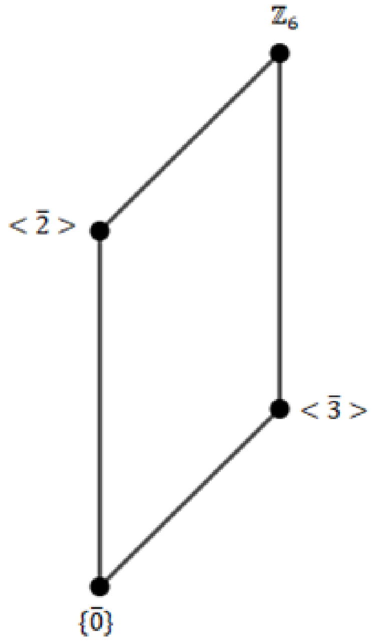
Esse grupo abeliano é formado pelas classes de equivalência módulo 6, logo $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Pelo Teorema de Lagrange, as possíveis ordem de subgrupos de $(\mathbb{Z}_6, +)$ são 1,2,3 e 6.

A tábua de operação desse grupo é:

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Analisando a tábua acima vemos que $(\mathbb{Z}_6, +)$ é cíclico, pois $(\mathbb{Z}_6, +) = \{< \bar{1} > = < \bar{5} >\}$. Os elementos $\bar{2}$ e $\bar{3}$ geram, respectivamente, subgrupos de ordem três e dois que são, respectivamente, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ e $\{\bar{0}, \bar{3}\}$. Além disso, $< \bar{4} > = < \bar{2} >$, de modo que o reticulado do grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$ é $\Re(\mathbb{Z}_6) = \{\{\bar{0}\}, < \bar{2} >, < \bar{3} >, \mathbb{Z}_6\}$ e sua representação geométrica é:

Figura 1.4: Reticulado do grupo $\mathbb{Z}_6$



Fonte: Elaborada pelo autor

Pelo teorema de Cayley o grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$, é isomorfo ao grupo $(G,\circ) = \left\{\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\1\,2\,3\,4\,5\,6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\2\,3\,4\,5\,6\,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\3\,4\,5\,6\,1\,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\4\,5\,6\,1\,2\,3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\5\,6\,1\,2\,3\,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\6\,1\,2\,3\,4\,5\end{pmatrix}\right\}$ que é um subgrupo do grupo das permutações de seis elementos.

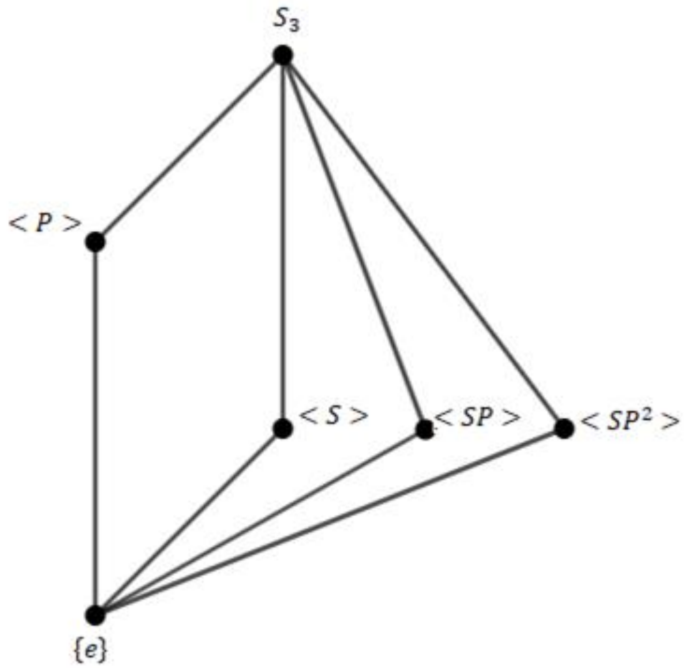
2.1.4.2. O grupo $(\boldsymbol{S_3},\circ)$

Esse grupo é constituído a partir das permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Seus elementos, assim definidos, são $e = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix}$, $\mathcal{P}^2 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix}$, $\mathcal{S} = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}$, $\mathcal{SP} = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix}$, $\mathcal{SP}^2 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix}$ e sua tábua de composição é:

$\circ$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}^2}$	$\boldsymbol{\mathcal{S}}$	$\boldsymbol{\mathcal{SP}}$	$\boldsymbol{\mathcal{SP}^2}$
$\boldsymbol{e}$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	e	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$
$\boldsymbol{\mathcal{P}^2}$	$\mathcal{P}^2$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{S}$
$\boldsymbol{\mathcal{S}}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{SP}^2$
$\boldsymbol{\mathcal{SP}}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{P}^2$	e	$\mathcal{P}$
$\boldsymbol{\mathcal{SP}^2}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	e

Os elementos $\mathcal{S}$, $\mathcal{SP}$ e $\mathcal{SP}^2$ possuem ordem dois enquanto que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^2$ possuem ordem 3. Vê-se facilmente que $(S_3,\circ) = < \mathcal{S}, \mathcal{P} >$. Os subgrupos gerados pelos elementos são: $< e > = \{e\}$; $< \mathcal{P} > = \{e, \mathcal{P}, \mathcal{P}^2 >\}$; $< \mathcal{S} > = \{e, \mathcal{S}\}$; $< \mathcal{SP} > = \{e, \mathcal{SP}\}$; e $< \mathcal{SP}^2 > = \{e, \mathcal{SP}^2\}$. Assim, o reticulado do $(S_3,\circ)$ é $\Re(S_3) = \{\{e\}, < \mathcal{P} >, < \mathcal{S} >, < \mathcal{SP} >, < \mathcal{SP}^2 >, S_3\}$. E a representação geométrica do reticulado geométrico de $(\boldsymbol{S_3},\circ)$ é:

Figura 1.5: Reticulado do grupo S_3



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando o teorema de Cayley, encontramos o grupo

$(G,\circ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

isomorfo ao grupo $(S_3,\circ)$.

2.1.5. Os grupos de ordem 8.

De acordo com Garcia (2001, pág. 175), a menos de isomorfismos, existem exatamente cinco grupos de ordem 8, a saber: $(\mathbb{Z}_8, +)$; $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$; $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$; $(\mathrm{D}_4,\circ)$ e $(\mathbb{Q}_8,*)$. Destes, $(\mathbb{Z}_8, +)$ e $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ são abelianos. A seguir, realizaremos uma breve exposição sobre os mesmos, apresentando seus reticulados algébricos e respectivas representações geométricas.

2.1.5.1. O grupo $(\mathbb{Z}_{\mathbf{8}}, +)$

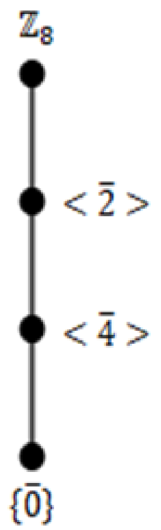
O conjunto $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, cujos elementos são as classes residuais módulo 8, é um grupo abeliano.

Segue abaixo sua tábua de operação:

+	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{7}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$
$\mathbf{2}$	2	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{7}}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$

Analisando a tábua de composição vemos que $<\bar{2}> = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} = <\bar{6}>$; $<\bar{4}> = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ e $<\bar{1}> = <\bar{3}> = <\bar{5}> = <\bar{7}> = \mathbb{Z}_8$. Dado isso, o reticulado de $(\mathbb{Z}_{\mathbf{8}}, +)$ é $\Re(\mathbb{Z}_8) = \{\{\bar{0}\}, <\bar{2}>, <\bar{4}>, \mathbb{Z}_8\}$ e sua representação geométrica é:

Figura 1.6: Reticulado do grupo $\mathbb{Z}_8$



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando o teorema de Cayley encontramos o subgrupo do grupo das permutações de oito elementos

$(G,\circ)=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&5&6&7&8&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&5&6&7&8&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&7&8&1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&8&1&2&3&4&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&1&2&3&4&5&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}\right\},$

Observação: Reduzimos o tamanho da fonte para que a representação do grupo coubesse em uma linha.

que é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}_8,+)$.

2.1.5.2. O Grupo $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,+)$

Os grupos $\mathbb{Z}_4=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ e $\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ são, respectivamente, constituídos pelas classes residuais módulo 4 e módulo 2. Assim sendo $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2,+)=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{3},\bar{0})\}$ é um grupo abeliano, tendo $(\bar{0},\bar{0})$ como identidade.

Segue abaixo a tábua de operação de $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2,+)$:

+	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{3}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{3}},\bar{\mathbf{0}})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{3}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{3}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{0})$

Analisando a tábua do grupo vemos que os subgrupos gerados pelos elementos são:

$<(\bar{0},\bar{1})>=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})\};$

$<(\bar{2},\bar{0})>=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\};$

$<(\bar{2},\bar{1})>=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1})\};$

$<(\bar{1},\bar{0})>=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{3},\bar{0})\}=<(\bar{3},\bar{0})>;$

$<(\bar{1},\bar{1})>=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{3},\bar{1})\}=<(\bar{3},\bar{1})>;$

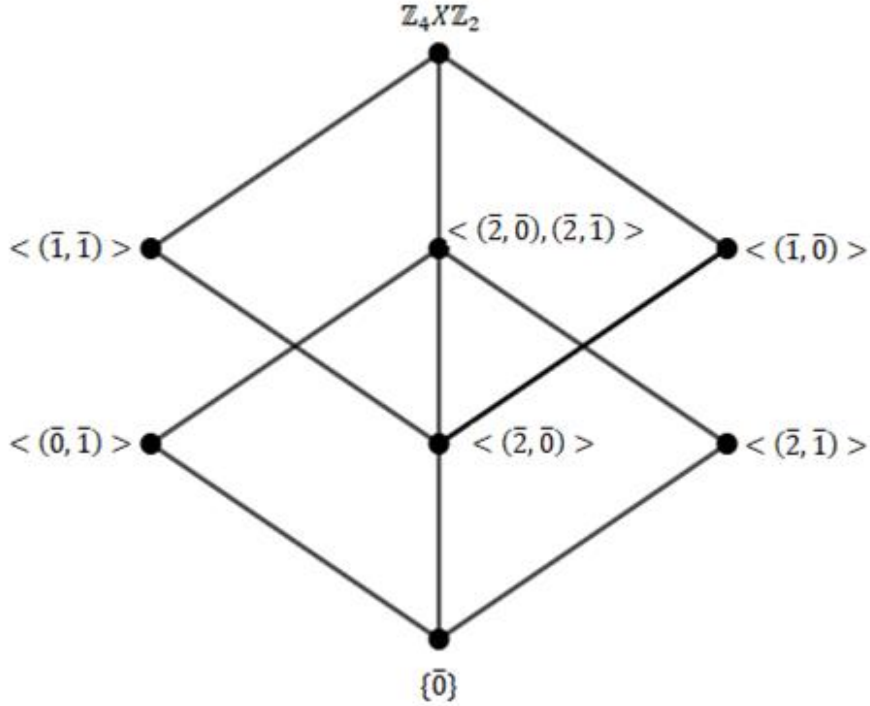
$<(\bar{2},\bar{0})>=<(\bar{1},\bar{0})>\cap<(\bar{1},\bar{1})>.$

Os elementos de ordem dois de $(\mathbb{Z}_{\mathbf{4}} \times \mathbb{Z}_{\mathbf{2}}, +)$ geram um subgrupo de ordem 4 mostrado a seguir: $<(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1})> = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1})\}$.

O reticulado de $(\mathbb{Z}_{\mathbf{4}} \times \mathbb{Z}_{\mathbf{2}}, +)$ é:

$\Re(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) = \{\{(\bar{0},\bar{0})\}, <(\bar{0},\bar{1})>, <(\bar{2},\bar{0})>, <(\bar{2},\bar{1})>, <(\bar{1},\bar{0})>, <(\bar{1},\bar{1})>, <(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1})>,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2\}$
e sua representação geométrica é

Figura 1.7: Reticulado do grupo $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$



Fonte: Elaborada pelo autor

O grupo isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}_{\mathbf{4}} \times \mathbb{Z}_{\mathbf{2}}, +)$ pelo teorema de Cayley é o grupo

$(G,\circ) = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&4&3&6&5&8&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&5&6&7&8&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&6&5&8&7&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&7&8&1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&8&7&2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}\right\}$

Observação: Reduzimos o tamanho da fonte para que a representação do grupo coubesse em uma linha.

2.1.5.3. O Grupo do Quatérnios $(\mathbb{Q}_{\mathbf{8}}, \cdot)$

Consideremos as matrizes

$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $Q_3 = \begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix}$, $Q_4 = \begin{pmatrix}-i & 0\\0 & i\end{pmatrix}$, $Q_5 = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$,

$Q_6 = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $Q_7 = \begin{pmatrix}0 & i\\i & 0\end{pmatrix}$, $Q_8 = \begin{pmatrix}0 & -i\\-i & 0\end{pmatrix}$.

onde: $i^2 = -1$.

O conjunto $\mathbb{Q}_8 = \{I = Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8\}$ com a operação usual de multiplicação de matrizes " $\cdot$ " é um grupo não-abeliano, e tem, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ como identidade. Em seguida exibiremos a tábua de multiplicação do $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$.

$\cdot$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{Q_2}$	$\boldsymbol{Q_3}$	$\boldsymbol{Q_4}$	$\boldsymbol{Q_5}$	$\boldsymbol{Q_6}$	$\boldsymbol{Q_7}$	$\boldsymbol{Q_8}$
$\boldsymbol{I}$	I	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
$\boldsymbol{Q_2}$	Q_2	I	Q_4	Q_3	Q_6	Q_5	Q_8	Q_7
$\boldsymbol{Q_3}$	Q_3	Q_4	Q_2	I	Q_7	Q_8	Q_6	Q_5
$\boldsymbol{Q_4}$	Q_4	Q_3	I	Q_2	Q_8	Q_7	Q_5	Q_6
$\boldsymbol{Q_5}$	Q_5	Q_6	Q_8	Q_7	Q_2	I	Q_3	Q_4
$\boldsymbol{Q_6}$	Q_6	Q_5	Q_7	Q_8	I	Q_2	Q_4	Q_3
$\boldsymbol{Q_7}$	Q_7	Q_8	Q_5	Q_6	Q_4	Q_3	Q_2	I
$\boldsymbol{Q_8}$	Q_8	Q_7	Q_6	Q_5	Q_3	Q_4	I	Q_2

O único elemento de ordem 2 de $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ é Q_2 e o subgrupo gerado por ele é $< Q_2 >= \{I, Q_2\}$.

Os demais elementos possuem ordem 4. Segue abaixo os subgrupos gerados por eles:

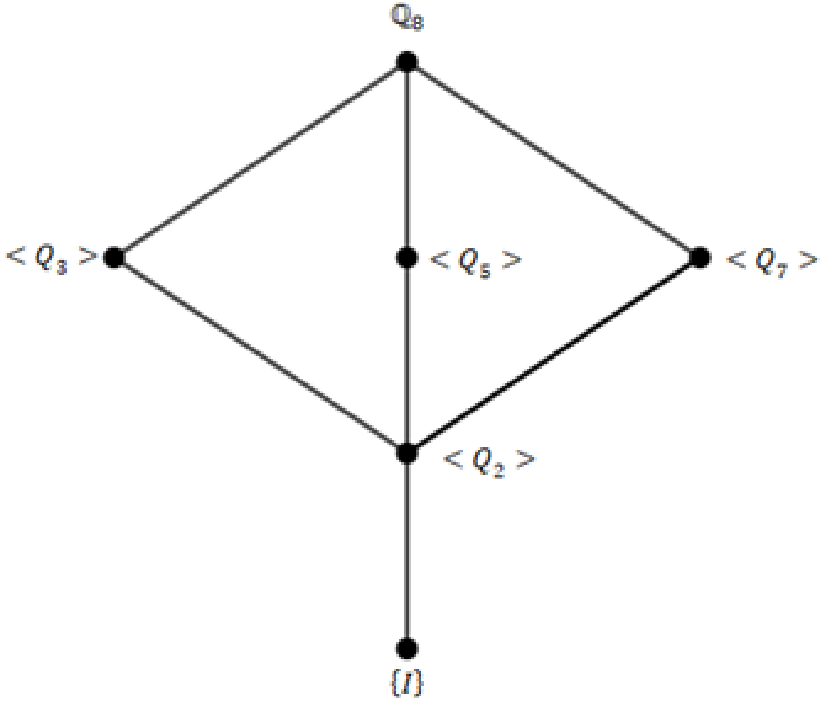
$< Q_3 > = \{I, Q_2, Q_3, Q_4\} =< Q_4 >$;

$< Q_5 > = \{I, Q_2, Q_5, Q_6\} =< Q_6 >$;

$< Q_7 > = \{I, Q_2, Q_7, Q_8\} =< Q_8 >$.

Assim, o reticulado de $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ é $\Re(\mathbb{Q}_8) = \left\{\{I\}, < Q_2 >, < Q_3 >, < Q_5 >, < Q_7 >, \mathbb{Q}_8\right\}$ cuja representação geométrica é:

Figura 1.8: Reticulado do grupo $\mathbb{Q}_8$



Fonte: Elaborada pelo autor

O subgrupo do grupo das permutações de 8 elementos isomorfo ao grupo $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ é o grupo

$$(G,\circ) = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&4&3&6&5&8&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&2&1&7&8&6&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&1&2&8&7&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&8&7&2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&7&8&1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&5&6&4&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&6&5&3&4&1&2\end{pmatrix}\right\}.$$

Observação: Reduzimos o tamanho da fonte para que a representação do grupo coubesse em uma linha.

2.1.5.4. O Grupo Diedral $(\boldsymbol{D_4}, \circ)$.

O Diedral D_4 é um subgrupo, de ordem oito, do grupo de permutações S_4. Existe um isomorfismo entre seus elementos e as rotações planas e espaciais que preservam um quadrado $P_1P_2P_3P_4$, cujo centro de gravidade está na origem do sistema cartesiano tridimensional. O $(D_4, \circ)$. é um grupo não-abeliano, tendo como identidade $e = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$. Assim,

$$(\mathrm{D}_4, \circ) = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}.$$

E fazendo $e = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 3\ 4\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}^2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 4\ 1\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}^3 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 4\ 3\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{SP} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 1\ 4\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{SP}^2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 2\ 1\ 4 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{SP}^3 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix}$. A tábua de composição de $(\boldsymbol{D_4}, \circ)$ é:

$\circ$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}^2}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}^3}$	$\boldsymbol{\mathcal{S}}$	$\boldsymbol{\mathcal{SP}}$	$\boldsymbol{\mathcal{SP}}^2$	$\boldsymbol{\mathcal{SP}}^3$
$\boldsymbol{e}$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{P}^3$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{SP}^3$
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{P}^3$	e	$\mathcal{SP}^3$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$
$\boldsymbol{\mathcal{P}^2}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{P}^3$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{SP}^3$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$
$\boldsymbol{\mathcal{P}^3}$	$\mathcal{P}^3$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{SP}^3$	$\mathcal{S}$
$\boldsymbol{\mathcal{S}}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{SP}^3$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{P}^3$
$\boldsymbol{\mathcal{SP}}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{SP}^3$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{P}^3$	e	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$
$\boldsymbol{\mathcal{SP}}^2$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{SP}^3$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{P}^3$	e	$\mathcal{P}$
$\boldsymbol{\mathcal{SP}}^3$	$\mathcal{SP}^3$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{SP}$	$\mathcal{SP}^2$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}^2$	$\mathcal{P}^3$	e

Da tabela, podemos extrair os seguintes subgrupos gerados pelos elementos de ordem 2: $< \mathcal{P}^2 > = \{e, \mathcal{P}^2\}$; $< \mathcal{S} > = \{e, \mathcal{S}\}$; $< \mathcal{SP} > = \{e, \mathcal{SP}\}$; $< \mathcal{SP}^2 > = \{e, \mathcal{SP}^2\}$; $< \mathcal{SP}^3 > = \{e, \mathcal{SP}^3\}$.

Os únicos elementos de ordem 4 de $(D_4, \circ)$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^3$, geram o mesmo subgrupo $< \mathcal{P} > = \{e, \mathcal{P}, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3\} = < \mathcal{P}^3 >$.

Podemos encontrar subgrupos gerados por dois elementos. É de fácil verificação que $(D_4, \circ) = < \mathcal{S}, \mathcal{P} >$ e que $\mathcal{SP}, \mathcal{SP}^2$ e $\mathcal{SP}^3$, junto com $\mathcal{P}$, também geram $(D_4, \circ)$. Os subgrupos gerados por dois elementos são:

$< \mathcal{S}, \mathcal{P}^2 > = \{e, \mathcal{S}, \mathcal{P}^2, \mathcal{SP}^2\} = < \mathcal{SP}^2, \mathcal{P}^2 >$

$< \mathcal{P}^2, \mathcal{SP} > = \{e, \mathcal{SP}, \mathcal{P}^2, \mathcal{SP}^3\} = < \mathcal{SP}^3, \mathcal{P}^2 >$

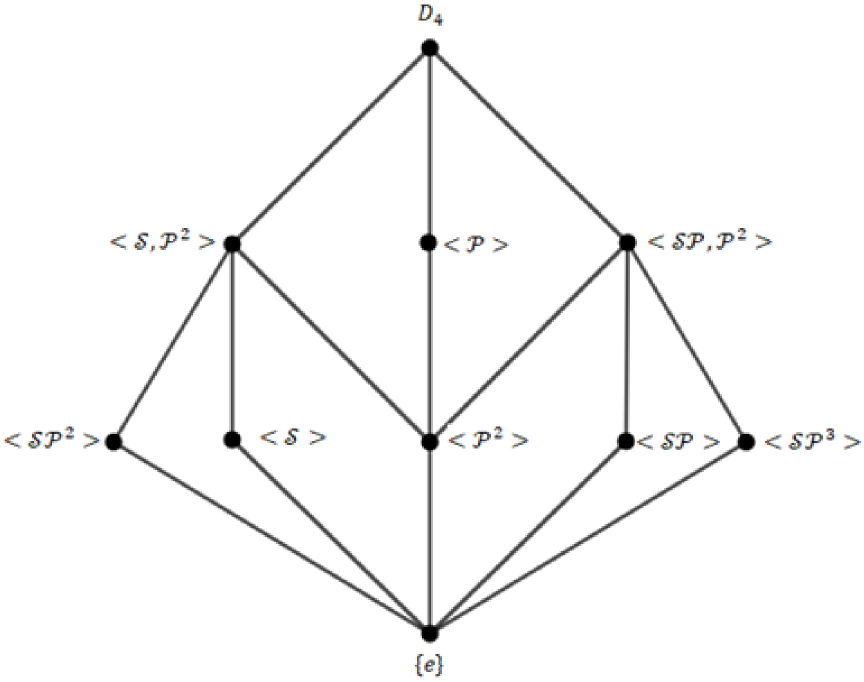
Esses dois subgrupos do grupo Diedral são chamados grupos de Klein. Observe que cada elemento operado consigo mesmo resulta no elemento neutro, enquanto a operação entre dois elementos não-neutros distintos resulta no outro elemento não-neutro do grupo.

Enfim, o reticulado do grupo $(D_4, \circ)$ é

$\Re(D_4) = \{\{e\}, < \mathcal{P}^2 >, < \mathcal{S} >, < \mathcal{SP} >, < \mathcal{SP}^2 >, < \mathcal{SP}^3 >, < \mathcal{P} >, < \mathcal{S}, \mathcal{P}^2 >, < \mathcal{P}^2, \mathcal{SP} >, D_4\}$

cuja representação geométrica é:

Figura 1.9: Reticulado do grupo D_4



Fonte: Elaborada pelo autor

O subgrupo do grupo das permutações isomorfo ao grupo $(D_4,\circ)$ é o grupo $(G,\circ) = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&8&5&6&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&1&2&7&8&5&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&2&3&6&7&8&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&7&8&1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&8&5&4&1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&5&6&3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&6&7&2&3&4&1\end{pmatrix}\right\}$.
Observação: Reduzimos o tamanho da fonte para que a representação do grupo coubesse em uma linha.

2.1.5.5. O Grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

O conjunto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 =\{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1},\bar{0}), (\bar{0},\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0},\bar{1}),$ $(\bar{0},\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$ formado pelas 3-uplas (a,b,c) com $a,b,c \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0},\bar{1}\}$, com a operação de adição, definida por: $(a,b,c)+(d,e,f) = (a+d, b+e, c+f)$ também é um grupo abeliano devido a comutatividade em $\mathbb{Z}_2$.

Em seguida exibimos a tábua de operação do grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

+	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$

Cada elemento desse grupo é de ordem dois, exceto a identidade. Dessa forma, garantimos a existência de 7 subgrupos não triviais de ordem 2, distintos dois a dois, gerados pelos distintos elementos diferentes do elemento neutro.

Podemos encontrar também subgrupos gerados por dois elementos, são eles:

$\sigma = <(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0})> = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0})\};$

$\varphi = <(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1})> = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1})\};$

$\alpha = <(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1})> = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1})\};$

$\mu = <(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1})> = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\};$

$\beta = <(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1})> = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\};$

$\theta = <(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0})> = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\};$

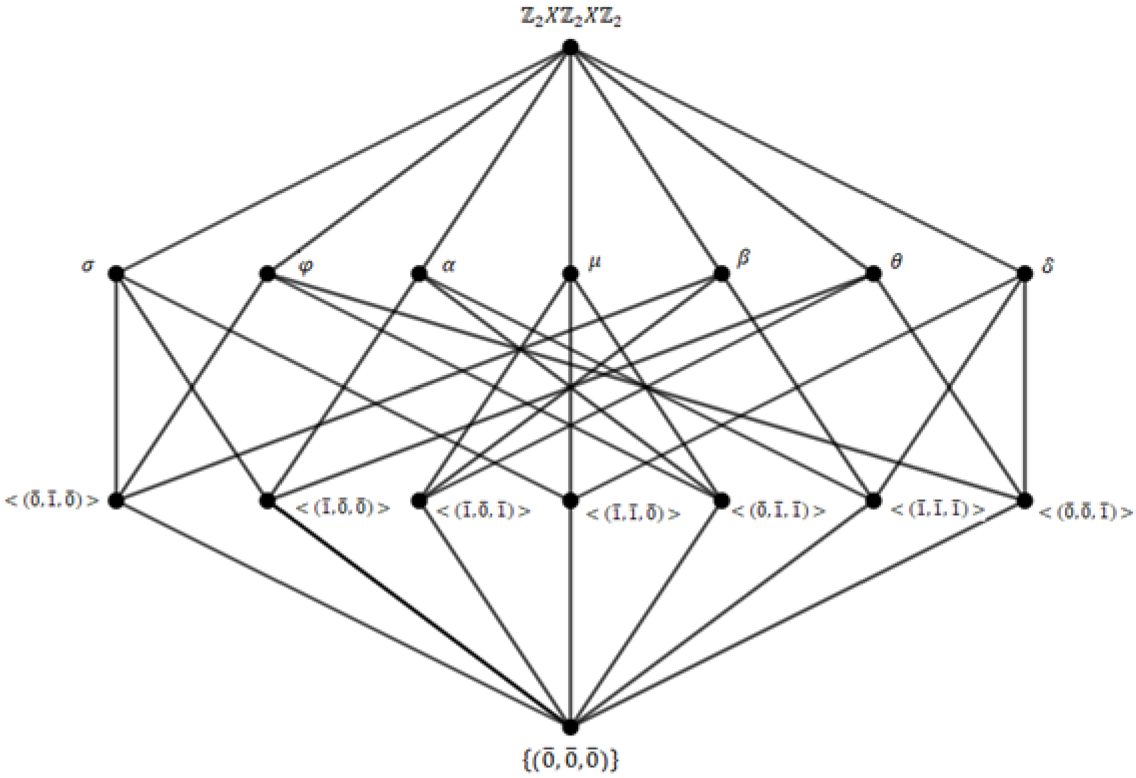
$\delta = <(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1})> = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1})\}.$

Portanto o reticulado deste grupo é:

$\Re(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{\{(\bar{0},\bar{0},\bar{0})\}, <(\bar{1},\bar{0},\bar{0}), <(\bar{0},\bar{1},\bar{0})>, <(\bar{0},\bar{0},\bar{1})>, <(\bar{1},\bar{1},\bar{0})>,$
$<(\bar{1},\bar{0},\bar{1})>, <(\bar{0},\bar{1},\bar{1})>, <(\bar{1},\bar{1},\bar{1})>,\ \sigma,\ \varphi, \alpha, \mu, \beta, \theta, \delta, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\}$

que podemos representar por:

Figura 1.10: Reticulado do grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando o teorema de Cayley novamente para determinar o subgrupo do grupo das permutações de oito elementos que é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ encontramos

$$(G,\circ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&2&3&4&5&6&7&8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 2&1&5&6&3&4&8&7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&5&1&7&2&8&4&6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 4&6&7&1&8&2&3&5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 5&3&2&8&1&7&6&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 6&4&8&2&7&1&5&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 7&8&4&3&6&5&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 8&7&6&5&4&3&2&1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observação: Reduzimos o tamanho da fonte para que a representação do grupo coubesse em uma linha.

Essas informações a respeito de grupos, subgrupos e seus reticulados são de fundamental importância para que seja possível atingir o objetivo principal deste trabalho que é a apresentação de uma atividade lúdica significativa para trabalhar teoria dos grupos. Sendo assim, é de fundamental importância para o leitor ter conhecimentos dos fundamentos teóricos citados no texto acima.

Capítulo 3

Durante o período que estudei a disciplina de estruturas algébricas, ainda quando fazia o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Acre - UFAC percebi que era comum os colegas do curso apresentarem dificuldade em entender o conteúdo de teoria dos grupos, por se trata de uma disciplina muito abstrata e de difícil compreensão para alguns. Observei também que os alunos buscavam entretenimento entre uma aula e outra jogando jogos de cartas como “uno” e “baralho”. Foi então, que surgiu a ideia de criar um jogo em que os alunos pudessem aprender conceitos de estruturas algébricas de uma forma menos abstrata e mais divertida.

A Construção do Jogo

“Reticulando o Grupo G” é um jogo que consiste em estimular o aprendizado dos participantes a respeito das noções de grupos, subgrupos e seus reticulados. O Jogo foi idealizado para duas pessoas (oponentes ou jogadores) jogar, gerando a competitividade entre os participantes.

O jogo também pode ser facilmente adaptado para o sistema de escrita em Braile para pessoas de baixa visão ou cegas. Basta fazer as adaptações necessárias no material utilizando papel relevo.

3.1. Os Elementos do jogo:

O jogo consiste de:

- Um “baralho”, cujas cartas são os elementos do grupo escolhido;
- Dois tabuleiros constando a representação geométrica do reticulado do grupo $(G,*)$
- Tampas de cores azuis e vermelhas (as cores podem ser alteradas).

3.1.1. As Regras

Para jogar estabelecemos as seguintes regras:

Regra 1: A quantidade de cartas dependerá da quantidade de vezes que cada elemento ocorre nos subgrupos de G, multiplicado por 2;

Regra 2: O jogador 1 embaralha as cartas e o jogador 2 deve “cortar” o baralho. Após isso, o jogador 1, alternando uma carta para cada, distribui apenas $|G|$ cartas para cada jogador. Em nenhum momento do jogo qualquer oponente pode ter mais que $|G|$ cartas;

Regra 3: O jogador 2 inicia o jogo puxando uma carta do monte restante da distribuição;

Regra 4: Neste momento (ver regra 3), o jogador tem $|G| + 1$ cartas e deve descartar ao menos 1 carta. A partir daí, os oponentes jogam alternadamente e podem puxar cartas do “monte” ou tomar o descarte do outro;

Regra 5: Qualquer jogador só pode puxar e descartar uma carta por vez. Quando conseguir construir um subgrupo, o jogador deve descartá-lo. Ao fazer isto, deve tomar uma de suas tampas e coloca-la sobre subgrupo correspondente na representação geométrica do reticulado;

Regra 6: Quando um jogador conseguir descartar um subgrupo e tiver um número de cartas menor que $|G|$ ele pode na sua vez puxar ou pegar o descarte do oponente sem que seja necessario descartar uma de suas cartas, isso pode acontecer ate o jogador ficar com $|G|$ cartas.

Regra 7: É vetado a qualquer jogador a tomar cartas de um subgrupo descartado.

Regra 8: Ganha o jogo aquele que montar o reticulado geométrico primeiro.

3.1.2. Níveis

O jogo pode ser disputado em três níveis de dificuldade, indo do nível mais fácil ao mais difícil. Cada jogador pode optar em qual nível jogar.

Nível Iniciante: Ao jogador é permitido receber uma folha (3.3.2) que consta todos os subgrupos de G e seus respectivos elementos.

Nível Intermediário: Ao jogador é permitido usar caneta e papel em branco para encontrar os subgrupos à mão.

Nível Avançado: Ao jogador é permitido usar apenas as cartas (as contas necessárias devem “ser feitas de cabeça”).

3.2 Um Exemplo: Reticulando o $\boldsymbol{D_4}$.

Para exemplificar a proposta desse trabalho será apresentado o jogo Reticulando D_4. Ou seja, vamos fazer o exemplo para o grupo Diedral de ordem oito.

Deixando claro que embora este trabalho limite a escolha do grupo à ondem de no máximo oito elementos, nada impede que o jogo seja construído para grupos de ordem superior

Este jogo possui 62 cartas, onde cada carta é a representação de algum elemento do grupo Diedral. Veja:

- 20 cartas e (pois a identidade aparece em todos os 10 subgrupos);
- 10 cartas $\mathcal{P}^2$ (pois $\mathcal{P}^2$ aparece em 5 subgrupos);
- 6 cartas $\mathcal{S}$; (pois $\mathcal{S}$ aparece em 3 subgrupos);
- 6 cartas $\mathcal{SP}$; (pois $\mathcal{SP}$ aparece em 3 subgrupos);
- 6 cartas $\mathcal{SP}^2$; (pois $\mathcal{SP}^2$ aparece em 3 subgrupos);
- 6 cartas $\mathcal{SP}^3$; (pois $\mathcal{SP}^3$ aparece em 3 subgrupos);
- 4 cartas $\mathcal{P}^3$; (pois $\mathcal{P}^3$aparece em 2 subgrupos);
- 4 cartas $\mathcal{P}$ (pois $\mathcal{P}$ aparece em 2 subgrupos);

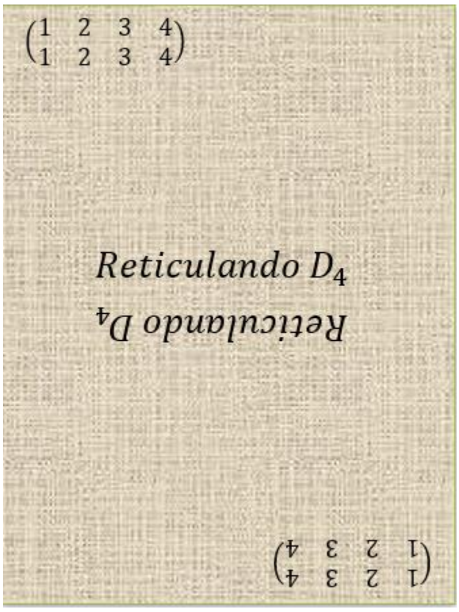
As cartas devem serem impressas em um material resistente e adequado para manuseio. Quanto as dimensões, devem ser respeitadas as dimensões de um baralho tradicional.

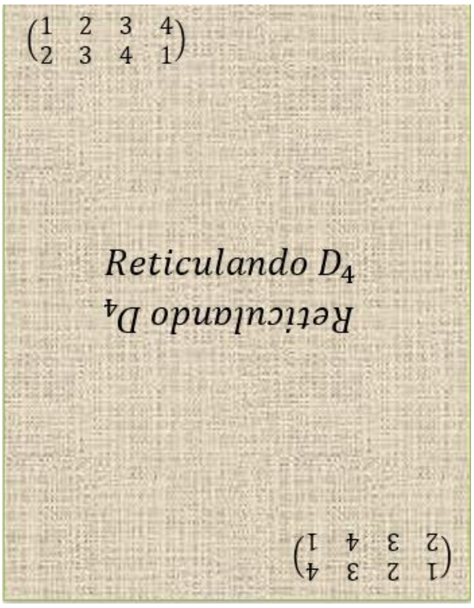
Além das cartas, os jogadores também terão disponível dois tabuleiros (um para cada jogador) com a representação geométrica do reticulado do grupo Diedral. E ainda, 20 peças (10 para cada jogador) para fazer a marcação sobre o tabuleiro, as peças devem ser distintas entre os jogadores

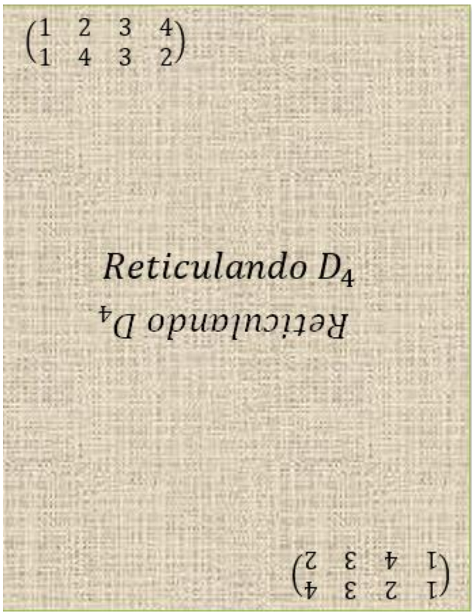
3.3. Material Didático (Confecção)

Em seguida temos o modelo das cartas, onde cada carta representa um elemento do grupo Diedral, o modelo do tabuleiro, representando o reticulado do grupo Diedral e uma tabela contendo todos os subgrupos do grupo Diedral.

3.3.1. Cartas e Tabuleiro







$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Reticulando D_4

Reticulando D_4

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Reticulando D_4

Reticulando D_4

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Reticulando D_4

Reticulando D_4

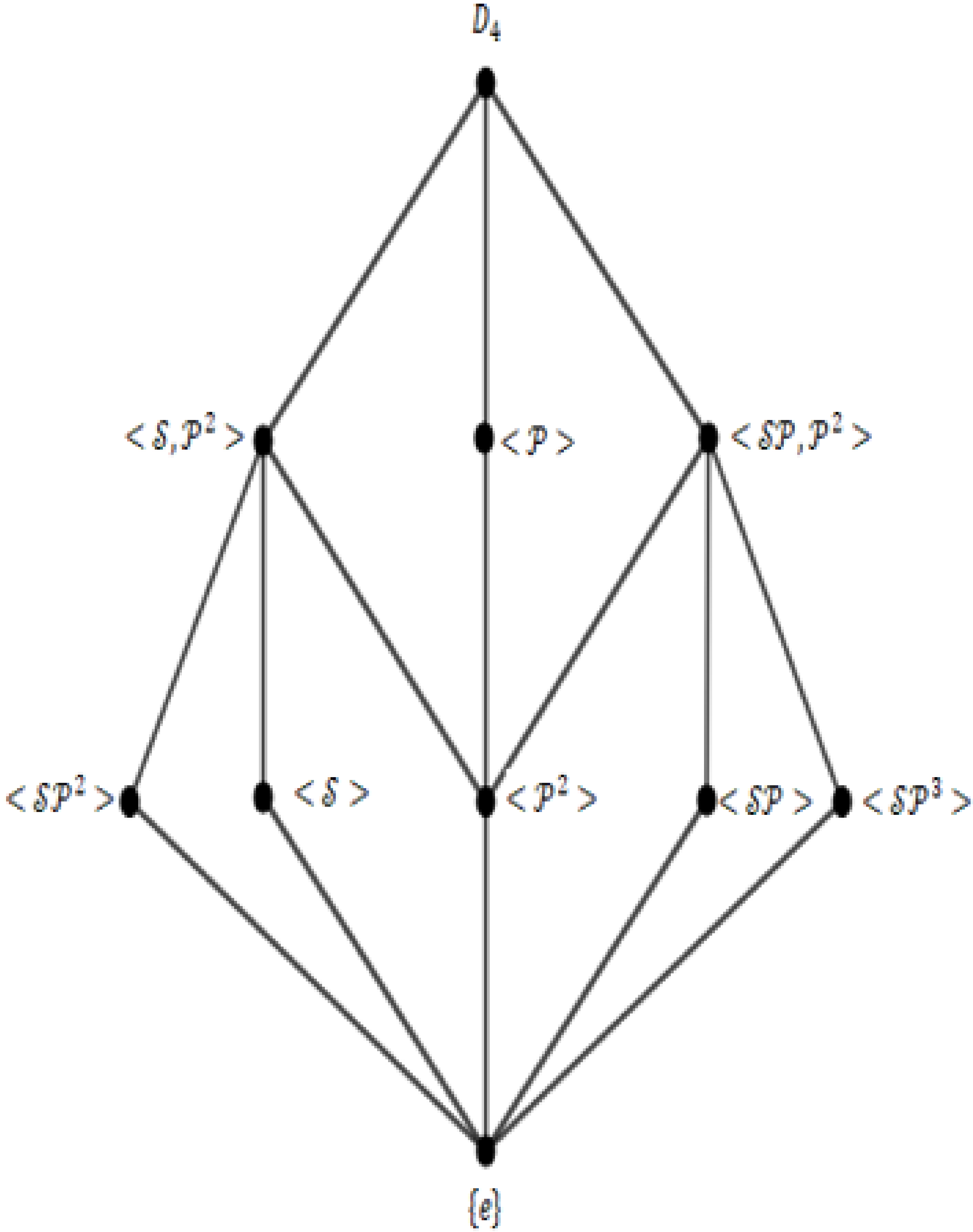
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Reticulando D_4

Reticulando D_4

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$


D_4
$<\mathcal{S},\mathcal{P}^2>$
$<\mathcal{P}>$
$<\mathcal{SP},\mathcal{P}^2>$
$<\mathcal{SP}^2>$
$<\mathcal{S}>$
$<\mathcal{P}^2>$
$<\mathcal{SP}>$
$<\mathcal{SP}^3>$
$\{e\}$

3.3.2. Relação Dos Subgrupos Para Nível Iniciante

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$< \mathcal{S} > = \{\mathbf{e}, \mathcal{S}\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \mathcal{P}^2 > = \{\mathbf{e}, \mathcal{P}^2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \mathcal{SP} > = \{\mathbf{e}, \mathcal{SP}\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \mathcal{SP}^2 > = \{\mathbf{e}, \mathcal{SP}^2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \mathcal{SP}^3 > = \{\mathbf{e}, \mathcal{SP}^3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \mathcal{S}, \mathcal{P}^2 > = \{\mathbf{e}, \mathcal{S}, \mathcal{P}^2, \mathcal{SP}^2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \mathcal{P} > = \{\mathbf{e}, \mathcal{P}, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$< \mathcal{SP}, \mathcal{P}^2 > = \{\mathbf{e}, \mathcal{SP}, \mathcal{P}^2, \mathcal{SP}^3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{D_4} = \{\mathbf{e}, \mathcal{P}, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3, \mathcal{S}, \mathcal{SP}, \mathcal{SP}^2, \mathcal{SP}^3\}$$

$$\mathbf{D_4} = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\}$$

3.4. Vivência e prática

O jogo foi confeccionado inicialmente em material PVC utilizando as cartas de um baralho plástico comum, respeitando suas dimensões padrão. Primeiro foi feito a limpeza das cartas para remover as marcações do baralho, neste processo foi utilizado uma lixa fina para deixar as cartas prontas para nova impressão.

No momento da impressão, houve um pequeno problema, pois, na gráfica onde o material foi levado, a técnica de impressão utilizava uma prensa aquecida, o calor acabou derretendo o material plástico impossibilitando a impressão. A maneira utilizada para solucionar este problema foi fazer a pintura sobre as cartas de forma manual e individual, utilizando um molde numérico e tinta permanente.

Após sua confecção chegou a hora de utilizar em uma aplicação prática. Para este momento houve a participação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática EaD da Universidade Federal do Acre em parceria com a Universidade Aberta do Brasil – UAB, no polo da cidade de Feijó.

Primeiramente, foi feito uma breve revisão no quadro das principais características de um grupo e de alguns conceitos importantes para compreender as regras do jogo. Em seguida, foi apresentado o tabuleiro que tem o formato do reticulado do grupo Diedral D_4 e as cartas do jogo, juntamente com as suas regras.

Partindo para a hora de jogar foi proposto que os alunos jogassem no nível iniciante e para isso foi entregue uma relação com os subgrupos do grupo Diedral (3.3.2).

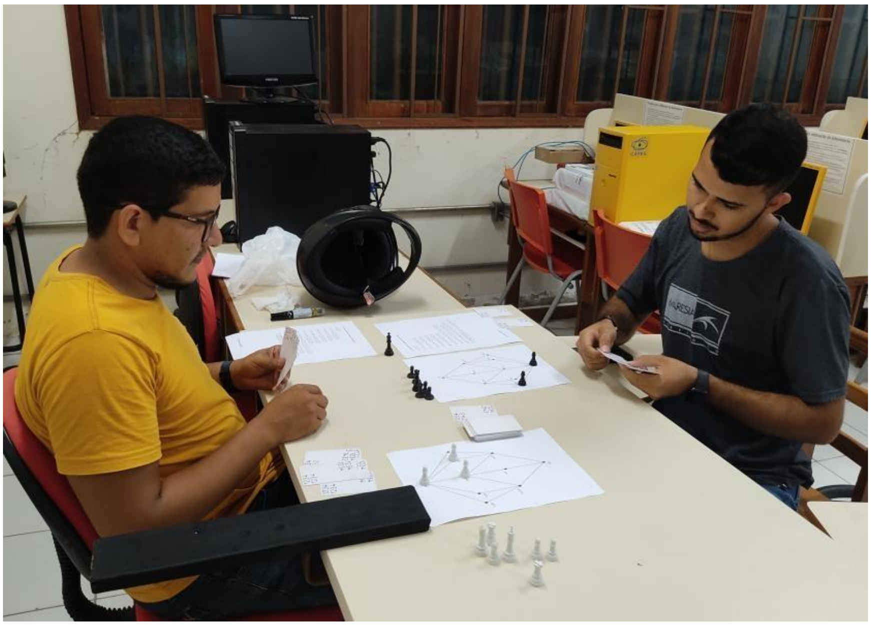
No momento que os alunos estavam jogando foi observado que quando o jogador descartava um subgrupo e ficava com a quantidade de cartas inferior a ordem de D_4, ele não conseguiria formar todos os subgrupos se ele tivesse que descartar sempre uma carta ao final de sua jogada. Uma solução criada foi que o jogador que ficasse com a quantidade de cartas inferior a ordem de D_4 poderia guardar a carta que foi puxada ou descartada pelo seu oponente até completar a quantidade de cartas referente a ordem de D_4. Com isso foi criada a regra de número 6.

Após finalizar a partida de reticulando D_4 no nível iniciante foi proposto que os alunos jogassem no nível intermediário e avançado. No nível intermediário foi disponibilizada uma folha de papel em branco para os participantes fazerem os cálculos. A partida demorou um pouco mais de tempo para ser finalizada, pois, os alunos tinham que fazer os cálculos no papel para poder encontrar os subgrupos do grupo Diedral. Já no nível avançado os alunos até que conseguiram encontrar alguns subgrupos de ordem 2, mas, tiveram dificuldade em encontrar os subgrupos de ordem 4 e, não conseguiram finalizar a partida fazendo as contas apenas de cabeça.

Imagem 1. Alunos do curso de matemática jogando “Reticulando D_4”

Fonte: Autor

Imagem 2. Disputa de uma partida de “Reticulando D_4”



Fonte: Autor

Imagem 3: Aluno Lucas Lima Passos

Fonte: Autor

3.5. Relatos dos alunos

Após os alunos jogarem "Reticulado D_4", foram feitas algumas perguntas quanto ao aprendizado adquirido, às dificuldades em jogar o jogo e no que precisava ser melhorado.

Em relação ao aprendizado, os alunos conseguiram rapidamente recordar ou até mesmo compreender alguns conceitos de grupos e subgrupos apresentados. A revisão dos conceitos e definições antes de iniciar o jogo foi de fundamental importância para os alunos, pois os mesmos já não lembravam muito bem do conteúdo e tiveram a oportunidade até mesmo de aprender alguns conceitos que não aprenderam quando estavam cursando a disciplina de álgebra abstrata.

"Agora eu consegui entender como é feita a operação composição de função. Eu achava que era só ir trocando os números de forma aleatória, mas agora eu entendi e é bem fácil." – Suzane Pessoa.

No que diz respeito às dificuldades os alunos acharam importante à disponibilidade do material didático (3.3.2) contendo todos os subgrupos do grupo Diedral, sem esse apoio os alunos poderiam levar muito tempo para ser finalizado, pois tinham que calcular manualmente e descobrir quais elementos formavam um subgrupo do grupo Diedral, o que acabava deixando o jogo menos atrativo para quem ainda tem dificuldades em operar com os elementos do grupo.

“Ainda bem que tem essa tabela (3.3.2) porque fazer todas essas contas de cabeça ou até mesmo no papel levaria muito tempo” – Lucas Lima Passos.

Quanto às melhorias a serem feitas no jogo foi sugerido um número de cartas extra para evitar que os jogadores fiquem sem cartas para puxar. Outra sugestão foi que ao término das cartas sem jogador vencedor, todas as cartas que já foram descartadas, inclusive, as que já foram utilizadas para formar algum subgrupo sejam embaralhadas novamente e voltem ao jogo. Com isso foi criada a regra 7.

“Seria bom fazer umas cartas a mais para não acabar as cartas antes de terminar o jogo” – Mateus Silva

Apesar de ser um jogo criado para abordar um conteúdo tão abstrato, teve uma boa avaliação dos alunos que jogaram, pois, além de trazer conceitos básicos e necessários sobre grupos, subgrupos e seus reticulados, o jogo acaba tornando o conteúdo mais atrativo transformando o abstrato em lúdico e ainda contribui para o desenvolvimento de novas estratégias de construção de conhecimentos matemáticos, além disso, desperta o espírito de competitividade entre os participantes (não sendo este aspecto, o mais importante).

Considerações Finais

Embora a certeza seja de que este trabalho esteja escrito de forma bastante superficial em relação aos conceitos, tendo em vista que foram omitidos muitos fatos importantes sobre a teoria dos grupos, espero que o mesmo contribua no sentido de despertar o interesse do leitor para o estudo dessas tão importantes estruturas algébricas e que os leitores também possam se divertir jogando o "Reticulando o D_4", jogo que foi proposto no trabalho.

Fica sugerido ao leitor confeccionar "Reticulando o grupo G" para outros grupos constantes no texto ou de ordem superior, pois, nada impede que o jogo seja idealizado para um grupo finito de ordem superior a oito.

Um objetivo futuro para o jogo é transformar o jogo "Reticulando" em um aplicativo para celular ou em um programa computacional e disponibilizar aos interessados pelo assunto. Com isso os professores que desejam utilizar o jogo como recurso de ensino em suas aulas não precisam gastar tempo confeccionando o material do jogo.

Deixo sugerido também, uma adaptação alternativa para o jogo que já foi citada ao longo do texto que é construção do jogo adaptado em braile para alunos com deficiência visual. Desta maneira, além de propor o abjetivo principal do jogo que é uma atividade lúdica para ensinar teoria dos grupos a deficientes visuais, o jogo "reticulando" acaba se tornando uma proposta de atividade inclusiva para esses alunos.

Bibliografia

1. BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.
2. GARCIA, Arnaldo; Lequain, Yves. Elementos de Álgebra. Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.
3. GONÇALVES, Adilson. Introdução à Álgebra. Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.
4. GRANDO, R.C.O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula. 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.
5. GRANDO, Regina Célia. O Jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem. Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, 1995.
6. KAMII, C. A criança e o número. Campinas: Papirus, 1995.
7. KISHIMOTO, Ensino Aprendizagem. Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. 5 ed. São Paulo: Cortez, 2001.
8. MIORIM, M. A., FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. Boletim da SBEM-SP, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10,1990.