UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCOS JOSÉ DA SILVA VIANA

OS JOGOS BARALHO DA TRIGONOMETRIA E BINGO DOS SENOS-COSSENOS COMO RECURSOS DE ENSINO PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA

CATALÃO
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação   [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Marcos José da Silva Viana

3. Título do trabalho

OS JOGOS BARALHO DA TRIGONOMETRIA E BINGO DOS SENOS-COSSENOS COMO RECURSOS DE ENSINO PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **MARCOS JOSÉ DA SILVA VIANA**, **Usuário Externo**, em 12/06/2022, às 11:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Marta Borges**, **Professora do Magistério Superior**, em 13/06/2022, às 19:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2953804** e o código CRC **5FDB9C8B**.

MARCOS JOSÉ DA SILVA VIANA

OS JOGOS BARALHO DA TRIGONOMETRIA E BINGO DOS SENOS-COSSENOS COMO RECURSOS DE ENSINO PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Marta Borges

CATALÃO
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo bibliotecário-documentalista
Marcio Luiz Fernandes Barbosa CRB 1/3161.

Viana, Marcos José da Silva
Os jogos baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos como recursos de ensino para a aprendizagem significativa em matemática [manuscrito] /Marcos José da Silva Viana. - 2022.
CXLII, 142 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Marta Borges.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2022.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, abreviaturas, lista de figuras.

1. Jogos Matemáticos. 2. Trigonometria. 3. Aprendizagem Significativa. 4. Ensino. I. Borges, Marta, orient. II. Título.

CDU 51:37.02

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **27** da sessão de Defesa de Dissertação de **Marcos José da Silva Viana**, que confere o título de Mestre em **Matemática,** na área de concentração em **Ensino de Matemática**

Aos **vinte e nove de abril de dois mil e vinte e dois**, às **nove horas e trinta minutos**, por Webconferência via sistema Google Meet (https://meet.google.com/trh-ifsf-frp), reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dra. Marta Borges (PROFMAT/IMTec - "RC/UFG - UFCAT em transição"), orientadora à distância pelo Google Meet, Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior (PROFMAT/IMTec - "RC/UFG - UFCAT em transição") e Dr. Igor dos Santos Lima (Departamento de Matemática/UnB),** para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Google Meet, procederem a avaliação da Dissertação intitulada *"*OS JOGOS BARALHO DA TRIGONOMETRIA E BINGO DOS SENOS-COSSENOS COMO RECURSOS DE ENSINO PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA*"*, de autoria de **Marcos José da Silva Viana**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da "RC/UFG - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pela presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que procedeu com a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada **Aprovada**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente. **Vinte e nove de abril de dois mil e vinte e dois**.

Obs.: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Marta Borges**, **Professora do Magistério Superior**, em 29/04/2022, às 12:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Porfirio Azevedo Dos Santos Junior**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/04/2022, às 12:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Igor dos Santos Lima**, **Usuário Externo**, em 29/04/2022, às 12:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2863899** e o código CRC **BA0621E1**.

Dedico este trabalho a minha esposa Rivane Brandão e minha filha Elisa Brandão Viana.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela dádiva da vida e me oportunizar a fazer esse Mestrado.

A minha mãe Maria da Cruz Ribeiro da Silva por todo apoio recebido, palavras de carinho e conforto para superar os obstáculos dessa caminhada.

A minha amada esposa Rivane Brandão e minha filha Elisa Brandão Viana pelo apoio e incentivo incondicional e companheirismo nos momentos em que foi necessário abdicar de suas companhias para me dedicar aos estudos.

A minha orientadora professora doutora Marta Borges pelo aprendizado, apoio, incentivo, paciência e orientações que foram cruciais para o desenvolvimento dessa dissertação.

Aos professores do PROFMAT da UFCAT por contribuírem de maneira significativa para o meu aprendizado. A banca por aceitar o convite e pelas sugestões que foram de grande valia para o enriquecimento do trabalho.

À CAPES por permitir cursar um Mestrado Profissional.

A todos que colaboraram de alguma maneira para que eu chegasse à conclusão desse curso com êxito.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo construir uma proposta de ensino relacionada aos conceitos de seno, cosseno, tangente, ângulos (em radianos e graus) e círculo trigonométrico tendo a metodologia dos jogos matemáticos como recurso didático aliado à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, no intuito de responder à seguinte pergunta norteadora: de que forma o jogo como recurso didático pode contribuir para aprendizagem significativa dos alunos nas aulas de trigonometria? Para tanto, foi realizada uma pesquisa qualitativa teórica do tipo exploratória e bibliográfica, a qual contém: uma revisão bibliográfica acerca do uso dos jogos no ensino e aprendizagem de Matemática, os pressupostos da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e por fim, foi elaborada uma proposta de ensino, que apresenta duas etapas: uma consiste na construção de uma sequência didática, que viabilize maior reforço dos conteúdos abordados por meio dos jogos: baralho da trigonometria e o bingo dos senos-cossenos e a outra apresenta a construção e análise das possibilidades dos jogos supracitados. Os resultados indicam que os jogos como metodologia de ensino podem agregar ao processo de ensino e aprendizagem de matemática, visto que com a proposta de ensino elaborada, de uma parte, pode contribuir para a formação do professor de Matemática, ao viabilizar orientações e possibilidades didático-pedagógicas que contribuam para a ampliar a sua prática de ensino. De outra parte, por meio dos jogos construídos, com os conteúdos de trigonometria abordados de uma forma mais significativa, dinâmica e prazerosa, pode permitir o desenvolvimento de competências e habilidades por parte dos alunos, como: concentração, criatividade, criticidade, disciplina, trabalho em equipe, assim como a socialização entre os indivíduos envolvidos.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos. Trigonometria. Aprendizagem Significativa. Ensino.

ABSTRACT

This research aims to build a teaching proposal related to the concepts of sine, cosine, tangent, angles (in radians and degrees) and trigonometric circle, having the methodology of mathematical games as a didactic resource allied to the theory of meaningful learning by David Ausubel, in the In order to answer the following guiding question: how can the game as a didactic resource contribute to the significant learning of students in trigonometry classes? In order to do so, an exploratory and bibliographical qualitative theoretical research was carried out, which contains: a bibliographic review about the use of games in the teaching and learning of Mathematics, the assumptions of Ausubel's theory of meaningful learning and, finally, a teaching proposal, which has two stages: one consists of the construction of a didactic sequence, which enables greater reinforcement of the contents covered through games: trigonometry deck and sine-cosine bingo and the other presents the construction and analysis of the possibilities of the aforementioned games. The results indicate that games as a teaching methodology can add to the mathematics teaching and learning process, since with the elaborate teaching proposal, on the one hand, it can contribute to the formation of the Mathematics teacher, by providing guidance and didactic-pedagogical possibilities that contribute to the expansion of their teaching practice. On the other hand, through built games, with trigonometry contents approached in a more significant, dynamic and pleasant way, it can allow the development of skills and abilities by students, such as: concentration, creativity, criticality, discipline, work as a team, as well as socialization among the individuals involved.

Keywords: Math Games. Trigonometry. Meaningful Learning. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular.
DC-GOEM	Documento Curricular para Goiás - Etapa Ensino Médio.
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio.
Inep	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
OCDE	Organização para a Cooperação de Desenvolvimento Econômico.
Pisa	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.
SD	Sequência Didática.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática, notadamente a trigonometria, é um desafio aos docentes, haja vista que somente o ensino tradicional já não chama tanto a atenção do alunado, talvez pelo fato das aulas serem expositivas dialogadas, com apenas inserção de fórmulas de forma mecanizada e, por vezes, apresentada sem conexão com a realidade vivenciada por esses alunos. Porém algumas reflexões são pertinentes para esse contexto, tais como: o docente tem a preocupação de contextualizar e busca mostrar a importância desses conceitos aos alunos? E os alunos procuram estudar e vislumbrar aplicações desse conteúdo?

Nesse sentido, “[...] o ensino tradicional não estimula o aluno a apreender esse conhecimento, pois o que é ensinado possivelmente não terá significado, ao não contribuir como ferramenta auxiliar para que o aluno possa compreender onde e para que será utilizada a informação” (CHIUMMO; OLIVEIRA, 2016, p. 2). Ademais, “A prática docente, quando se restringe a dar aulas expositivas e indicar exercícios como atividades de fixação, [...] tem demonstrado não ser favorável para a aprendizagem significativa dos estudantes, pois o conteúdo ensinado é descontextualizado e desprovido de significado” (VIGANÓ, 2015, p. 13).

Sendo assim, fica evidente que é de suma relevância que haja uma mudança de pensamento da comunidade escolar como um todo, no sentido de um maior engajamento com relação a apresentação dos conceitos para que o ensino obtenha o êxito necessário, ou seja, a compreensão/assimilação dos conteúdos.

Por outro lado, o ensino tradicional é um importante aliado no processo de ensino e aprendizagem, pois o professor necessita de um tempo menor para explicar/desenvolver alguma teoria que, por exemplo, precisa abordar uma situação-problema, possui um maior domínio para o planejamento das aulas, bem como as “[...] estratégias de interacção estabelecidas entre aluno e professor, funcionam como elementos de apoio e motivação, possibilitando o intercâmbio de ideias, conhecimentos, bem como avaliação da aprendizagem” (VIDAL, 2002, p. 46). Além disso, o “[...] aluno pode dar sua opinião em tempo real, transmitir o seu conhecimento sobre a informação que está a ser transmitida” (VIDAL, 2002, p. 46).

Nessa perspectiva, é complexo pensar em ensino sem a utilização do método convencional de ensino, apesar da estrutura que é definida no ensino ser complicada para atribuir outra metodologia de ensino, em virtude da extensão de conteúdo a ser ministrado. No entanto, é relevante começar a levantar a bandeira e exigir que sejam inseridas metodologias alternativas de ensino em certos momentos e com maior a frequência possível.

Diante desse contexto, a versão preliminar do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) de 2018 no Brasil aponta um cenário desanimador quanto a proficiência em Matemática de um modo geral, haja vista que em uma escala de nível de proficiência em Matemática, a qual compreende os níveis: abaixo de 1 a 6 (sendo o nível: abaixo de 1 o pior e 6 o de melhor desempenho), os resultados mostraram de acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) baseado na Organização para a Cooperação de Desenvolvimento Econômico (OCDE), que cerca de 68,1% dos estudantes brasileiros (média brasileira: 384) participantes dessa avaliação encontram-se no nível abaixo de 1 (média menor que 358) ou 1 (média: 358), isto é, não possuem conhecimentos básicos em Matemática, em detrimento a 23,9% dos países da OCDE, enquanto, apenas 0,1 % dos estudantes brasileiros participantes estão no nível 6 (média de 669), ou seja, possuem conhecimentos matemáticos complexos em detrimento a 2,4 % dos países da OCDE.

Nesse sentido, é relevante destacar que “O percentual de estudantes em [...] cada nível de proficiência indica quão bem os países conseguem fomentar a excelência em seus sistemas educativos” (PISA, 2018, p. 108). É válido ressaltar que o Pisa (ocorre por amostragem) é a principal avaliação internacional do aprendizado dos alunos de um país, a qual é realizada a cada 3 anos com alunos de escolas públicas e particulares nas áreas de leitura, matemática e ciências com alunos de 15 anos de idade e possui como pré-requisito para a participação das escolas, bom desempenho nas avaliações: Prova Brasil (feitas por estudantes de 9° ano do Ensino Fundamental) e Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), além do Pisa para Escolas no Brasil, que faz um diagnóstico dessas áreas de ensino das escolas participantes.

Por outro lado, de acordo com os resultados gerais do Pisa de 2015, referentes ao ensino médio de Matemática no Brasil, foram avaliadas 46 escolas (selecionadas por amostra, levando em conta bons resultados na Prova Brasil e Enem), sendo 33 públicas e 13 particulares, em termos de desempenho médio em Matemática *versus* perfil socioeconômico (ESCS).

Os resultados mostraram a nível nacional, de acordo com a Fundação Lemann (2017, p. 19) que das 46 escolas avaliadas: 7 escolas que atendem alunos de perfil socioeconômico abaixo da média brasileira conseguiram resultados acima da média brasileira e 33 apresentaram desempenho melhor que a média do Brasil (entre 350 e 400), sendo 20 delas públicas, em comparação com escolas da OCDE (referência em qualidade da educação) e Cingapura (país melhor colocado no Pisa na época do desenvolvimento desta pesquisa).

Relativamente a essa média não são especificados os cálculos diretos no documento Matriz de Avaliação de Matemática - Pisa 2012[1] (último ano em que o domínio principal foi o letramento matemático), porém de acordo com a escala de proficiência de Matemática[2] (que vai do nível abaixo de 1 a 6) é possível perceber em cada nível dessa escala, as características das atividades bem como as habilidades que os estudantes são capazes de desenvolver, excetuando-se o nível abaixo de 1, pois não são especificadas as habilidades a serem desenvolvidas.

Outro ponto observado no Pisa de 2015, segundo a Fundação Lemann (2017, p. 26), é que a indisciplina nas escolas com maior desempenho é menor, conforme informações colhidas via questionário sociodemográfico. Nesse sentido, conforme os dados apresentados têm-se um panorama favorável no que tange ao desenvolvimento dos estudantes das escolas participantes nessa área de ensino daquele ano.

Por outro lado, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz os princípios norteadores para os documentos curriculares da educação básica brasileira, sendo que no caso do ensino de Matemática, uma das possibilidades de organização desse ensino é de acordo com as unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, que por sua vez estão associados e orientam para o desenvolvimento de habilidades no Ensino Fundamental, como, por exemplo, levar em consideração o desenvolvimento do letramento matemático[3], o qual pode ser definido como "[...] as competências e habilidades de

---

[1] A cada avaliação do Pisa é definido um dos domínios como sendo principal (Letramento em Leitura, Letramento Matemático e Letramento Científico), isto significa que aproximadamente metade do tempo do teste refere-se ao domínio principal. Em 2018, foi lançada uma nova Matriz de Referência de Leitura, todavia, a Matriz de Matemática de 2018 foi a mesma de 2012 (último ano que foi domínio principal), por esse motivo a utilizamos como referência nessa pesquisa. Contudo, "A nova Matriz de Referência de Matemática utilizada para nortear o teste de 2022 foi lançada oficialmente em 14 de outubro de 2019 na Universidade de Oxford [...]". Disponível em:https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa/matrizes-de-referencia. Acesso em: 03 nov. 2021.

[2] Escala de Proficiência de matemática do Pisa 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 04 nov. 2021.

[3]Segundo a matriz do Pisa 2018, "Letramento matemático é a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e faz com que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias". Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf . Acesso em: 08 out. 2020.

raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de [...] formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, [...] e ferramentas matemáticas [...]". (BRASIL, 2018, p. 266).

Relativamente ao ensino médio, a BNCC propõe que o ensino de Matemática tenha por base a realidade vivenciada pelos estudantes, a fim de possibilitar "[...] a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos" (BRASIL, 2018, p. 528). Partilhando desse pensamento, o Documento Curricular para Goiás - Etapa Ensino Médio (DC-GOEM) de 2021 referente à área da Matemática e suas Tecnologias afirma que

> [...] a Matemática Escolar, direcionada ao/à estudante do Ensino Médio, ao ser planejada com vista à sua formação integral precisa considerar seu contexto social, afinidades e inteligências, interações com o meio, experiências singulares com a vida e com as áreas do conhecimento bem como com a própria Matemática, para torná-lo/a protagonista de sua aprendizagem (GOIÁS, 2021, p. 325).

Sob esse contexto, de acordo com a BNCC e o DC-GOEM (2021), o ensino médio é o momento ideal para que sejam aproveitados os conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, buscando assim, ampliação do letramento matemático. "Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, [...] que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos" (BRASIL, 2018, p. 529).

Nesse sentido, para que os estudantes consigam atingir esses propósitos se faz necessário o desenvolvimento de algumas habilidades, tais como: "processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 529). Assim, os estudantes devem articular sua própria maneira de "raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p. 529). Tais pressupostos vão ao encontro do que afirma o DC-GOEM (2021) quando diz que

> [...] a Matemática Escolar articula os conhecimentos científicos com as situações cotidianas, colaborando com o percurso formativo do/a estudante na educação básica por meio do desenvolvimento de habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos, representações significativas e resolução de problemas. Fortalece os repertórios expressivo e receptivo que, articulados ao domínio de linguagens matemáticas, corroboram a expressão pessoal e auxiliam na compreensão de fenômenos técnicos-científicos, socioeconômicos, culturais e outros. Nesse contexto contribui para a construção de argumentações consistentes nos mais variados ambientes e na organização e síntese de pensamentos e conhecimentos para tomada de decisões. E amplia os conhecimentos teórico-conceituais que devem estar articulados e contextualizados com o conhecimento pessoal, cultural e local que cada sujeito traz de suas rotinas, vivências e trajetórias (GOIÁS, 2021, p. 324).

Nessa perspectiva, é relevante que o professor busque metodologias/estratégias que possam melhorar o aprendizado de Matemática dos estudantes, visando torná-los protagonistas na construção dos seus próprios conhecimentos. Em especial, no caso da trigonometria, nesta pesquisa procuramos abordar aplicações a partir de um contexto que poderá ser vivenciado pelos alunos, procurando dessa forma demonstrar a importância do conteúdo abordado.

Assim sendo, aplicações como, por exemplo, problemas envolvendo cálculo da altura de um prédio, nos quais se pode medir distâncias e fazer uso de conceitos relacionados ao triângulo retângulo (catetos, ângulo e hipotenusa) podem incentivar/estimular os estudantes a se dedicarem mais ao estudo, uma vez que estes passam a construir significados para o que estão aprendendo, na medida em que põem em prática os conteúdos ministrados nas aulas.

Para além do conteúdo e suas aplicações, os métodos de ensino também colaboram para despertar o interesse dos estudantes pelo estudo da Matemática. Nesse sentido, esta pesquisa aborda o uso dos jogos matemáticos como metodologia alternativa de ensino de trigonometria. Para tanto, inicialmente foi realizada uma busca de publicações relacionadas ao tema em publicações científicas (artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses), a fim de evidenciar benefícios no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Dentre estes, destacam-se os trabalhos de Selva e Camargo (2009), Zeferino (2015) e Silva (2018).

O artigo “O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento”, de Selva e Camargo (2009), é produto de um projeto de pesquisa intitulado: “Jogos matemáticos: uma alternativa para o ensino de Matemática de 5ª a 8ª do ensino fundamental”, desenvolvido no período de agosto de 2007 a julho de 2008, na Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI) - Campus Frederico Westplahen. Este trabalho consistiu na realização de estudos teóricos que buscaram identificar se os jogos matemáticos como recurso didático contribuíam para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática dos estudantes nas séries supracitadas. Nesse contexto, as autoras fizeram escolhas de 18 jogos, dos quais alguns foram criados e outros adaptados com diversos conteúdos de trigonometria referentes às séries citadas e foi ministrada uma oficina pedagógica, em conjunto com quatro professores voluntários, a fim de auxiliar na confecção dos jogos. Cada jogo estava organizado de acordo com as regras, objetivos e exemplos de como jogar. A coleta de dados foi realizada a partir de relatórios feitos pelos alunos e professores no decorrer da pesquisa.

Assim, foram aplicados nove destes jogos a *posteriori* em duas escolas. Segundo as pesquisadoras, foi possível perceber maior interação entre aluno-aluno, aluno-professor, assim como aluno-pesquisadoras e intervenções pedagógicas pertinente para o desenvolvimento do aprendizado. Os resultados mostraram que tanto os professores quanto os alunos consideraram importante o uso de jogos matemáticos na assimilação de conceitos matemáticos e concluíram que o uso de jogos trouxe contribuições importantes para tornar o planejamento do professor mais dinâmico, interativo e prazeroso, além de permitir a construção do saber matemático, o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, o trabalho em equipe e a cooperação entre os alunos (SELVA; CAMARGO, 2009).

A pesquisa de Zeferino (2015) resultou no trabalho de conclusão de curso intitulado “Jogos Matemáticos nas Aulas do Ensino Médio: Pife - Trigonométrico”, (com regras semelhantes ao jogo pife). Este trabalho consistiu na realização de um aporte teórico acerca da utilização de jogos no ensino de Matemática, dificuldades no ensino de trigonometria e na criação do jogo “Pife Trigonométrico”, envolvendo a trigonometria do triângulo retângulo.

O autor ministrou uma oficina na semana de educação do Instituto Federal de São Paulo, no ano de 2014, a qual contou com a participação de 14 alunos da instituição das áreas de Matemática e Engenharias. Neste dia, após a oficina, os alunos foram convidados a experimentar uma partida do jogo e, a partir dessa partida, o autor da pesquisa fez observações que foram importantes para o desenrolar do seu trabalho, haja vista que não houve especificamente uma coleta de dados para posterior análise.

Assim sendo, de acordo com o autor, foi possível constatar que o uso de jogos matemáticos como ferramenta no ensino de trigonometria propicia um ambiente agradável para o aprendizado, a criação de hipóteses, permitindo benefícios como: a socialização, entendimento do conteúdo abordado e formalização de conceitos.

Na dissertação “Jogos pedagógicos na aprendizagem de trigonometria para alunos do ensino médio”, de Silva (2018), este fez a aplicação de dois jogos, a saber: “Baralho Trigonométrico” (criado por ele), considerado um jogo de estratégia, e o jogo “Trigonometrilha” (adaptado), sendo este considerado um jogo de conhecimento. Esses jogos foram aplicados em uma escola da rede estadual de ensino paulista em turmas da 2ª série do Ensino Médio nos anos de 2015, 2016 (feitas pelo pesquisador) e 2017 (aplicação feita por outro professor) e contou com a participação de 19, 25, 16 estudantes, respectivamente.

De acordo com o pesquisador, os resultados obtidos mostraram uma melhora significativa com relação aos números de acertos dos conteúdos abordados nos jogos, pois “a média de acertos passou de 29% para 63% em 2015, de 30% para 49% em 2016 e de 20% para 31% em 2017” (SILVA, 2018, p. 79). Estes percentuais foram obtidos a partir de avaliações diagnósticas (com pré-teste e pós-teste) aplicadas pelo pesquisador em todos os anos, visando melhor comparativo dos resultados.

Nesse sentido, um fator positivo, citado pelo autor, foi que os jogos pedagógicos, constituíram uma importante ferramenta para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, uma vez que melhorou o ambiente de sala de aula, pois os alunos assumiram uma postura de maior participação e envolvimento nas aulas convencionais, em virtude do trabalho em equipe, e assim o autor da pesquisa concluiu que a utilização dos jogos com conteúdo de trigonometria propiciou uma melhora tanto com relação aos conteúdos abordados como em uma melhor comunicação e desenvolvimento do saber matemático (SILVA, 2018).

Diante dessas possibilidades constatadas nas pesquisas já realizadas, surgiu a ideia de elaborar nesta pesquisa uma proposta de ensino que traga uma sequência de atividades a serem empregadas pelo professor de modo a mostrar, aos alunos, que a trigonometria relativamente aos conceitos de seno, cosseno, tangente, ângulos (em radianos e graus) e círculo trigonométrico pode ser assimilada por meio dos jogos: baralho da trigonometria (Apêndice B) (adaptação das regras do jogo de pife) cujo objetivo é reforçar de forma lúdica os conceitos de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

Esse jogo possui cartas que trabalham tanto com a formalização Matemática quanto a aplicação com cartas em 3D. Todavia, o jogo bingo dos senos-cossenos (Apêndice C) detêm o objetivo de trabalhar o círculo trigonométrico de maneira lúdica, fazendo a redução ao primeiro quadrante de números reais conhecidos marcados nos demais quadrantes do referido círculo.

Para tanto, em se tratando dessa assimilação/reforço é válido enfatizar que em primeiro momento devem ser desenvolvidas uma parte teórica com a formalização Matemática usando o ensino tradicional necessário para recordar os conteúdos abordados nesses jogos. Todavia, no decorrer dessa formalização podem ser utilizadas metodologias alternativas, por exemplo, os jogos como forma de ajudar o aluno no entendimento desses conceitos haja vista que só com aulas expositivas dialogadas talvez fique muito complexa tal compreensão.

Nesse contínuo tais jogos foram construídos (em parte com auxílio dos alunos para confecção das cartas e cartelas, por exemplo) a partir de uma sequência didática que viabiliza ao professor desenvolver e trabalhar com alunos em sala de aula os conceitos de trigonometria abordados nos jogos supracitados. Com os jogos propostos, espera-se apresentar possibilidades que reiterem os benefícios advindos da utilização dessa metodologia no ensino de trigonometria, tais como: desenvolvimento da criatividade, criticidade, estratégias de jogo, como, por exemplo, identificar soluções mais fáceis para resolver um determinado problema, e mesmo para agregar maior interesse e motivação pelas aulas (GRANDO, 1995).

Nessa perspectiva, pensando nos jogos propostos nesta pesquisa em relação ao DC-GOEM (2021) referente a Área da Matemática e suas Tecnologias poderá se enquadrar na segunda parte deste relativamente ao Itinerário Formativo: Imersão na Matemática Escolar: Conhecimentos Essenciais para o Desenvolvimento da Sociedade, a qual contempla a Unidade Curricular: Trigonometria. Assim, no caso de uma escola de tempo integral é possível ser efetuado desde a construção dos jogos até a sua aplicação. Todavia, em uma escola que não seja de tempo integral, o ideal é que seja feito apenas a aplicação deste, visto que não há tempo hábil para a confecção de tais jogos.

O interesse pela pesquisa surgiu em decorrência da minha experiência[4] como docente nos anos de 2018 e 2019 em turmas do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio em escolas da rede pública do Estado de Goiás. Nas turmas as quais lecionei os conteúdos de trigonometria referentes ao assunto de razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) em um triângulo retângulo, ângulos (em radianos e graus) e círculo trigonométrico, os alunos apresentavam grande dificuldade em distinguir quando usariam o seno, cosseno ou a tangente para resolver determinado exercício, seja ele formal ou contextualizado.

Outro quesito observado durante esse período de experiência profissional foi relativamente a marcar um número real com mais de uma volta no círculo trigonométrico, bem como relacionar as simetrias existentes no que concerne aos eixos vertical e horizontal e ao centro do círculo trigonométrico de um determinado número real marcado no referido círculo. Boa parte dos alunos não conseguiam vislumbrar como marcar tais números, como, por exemplo, marcar o número real $\frac{21\pi}{4}$ (não percebiam que $\frac{21\pi}{4} = \frac{20\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 5\pi + \frac{\pi}{4} = 4\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$, se tratava de 2 voltas (4π) completas somadas a meia volta (π) mais $\frac{1}{4}$ de volta no círculo trigonométrico). Em consequência se sentiam desmotivados/desinteressados em aprender e logo questionavam onde utilizariam esses conceitos em seu cotidiano.

No que se refere à construção do conhecimento matemático por parte dos alunos, esta pesquisa teve como aporte teórico os pressupostos da teoria da aprendizagem significativa, de David Ausubel, que foi apresentada no decorrer deste trabalho. Desse modo, na tentativa de responder à questão de investigação: de que forma o jogo como recurso didático pode contribuir para a aprendizagem significativa dos alunos nas aulas de trigonometria? foram traçados os objetivos informados a seguir.

O objetivo geral foi construir e analisar uma proposta de ensino relacionada aos conceitos seno, cosseno, tangente, ângulos (em radianos e graus) e círculo trigonométrico tendo

[4]Escrevi em 1ª pessoa do singular apenas nessa parte da pesquisa, pois ficaria estranho falar de mim em 1ª pessoa do plural, no entanto no decorrer das demais partes do texto retomarei a escrita em 1ª pessoa do plural.

a metodologia dos jogos matemáticos como recurso didático aliada a aprendizagem significativa de David Ausubel, possuindo como objetivos específicos:

- Fazer uma revisão bibliográfica relacionada a trabalhos acadêmicos que envolvam jogos no ensino de trigonometria;
- Estudar os pressupostos teóricos e metodológicos da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel;
- Produzir os jogos baralho da trigonometria e o bingo dos senos-cossenos relacionado aos conteúdos de razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e o círculo trigonométrico;
- Descrever expectativas de aprendizagens significativas de conceitos matemáticos exploradas com os jogos;
- Investigar e analisar as possibilidades pedagógicas dos jogos baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos relacionados ao desenvolvimento de competências e habilidades à luz da BNCC;
- Construir uma Sequência Didática (SD) que oriente o professor na ação de mediador do processo e que desperte o interesse e a motivação dos alunos pela trigonometria relacionada aos conceitos de seno, cosseno, tangente, ângulos (em radianos e graus) e círculo trigonométrico.

Desse modo, na Introdução discorremos sobre um panorama do ensino de Matemática na perspectiva da BNCC (2018) e do Pisa (Matriz de Referência de 2012) e fizemos uma revisão de trabalhos preexistentes na literatura (artigos, trabalho de conclusão de curso, dissertações) no que diz respeito à utilização de jogos como ferramenta auxiliar no ensino de Matemática, bem como da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, no intuito de justificar a relevância do tema abordado nessa pesquisa.

No Capítulo 2 dividimos em três seções, a saber: na primeira apresentamos os aspectos introdutórios à teoria da aprendizagem significativa na perspectiva de David Ausubel e algumas visões de autores acerca dessa teoria, tais como: a humanística, a interacionista social, a cognitiva contemporânea e a visão crítica (subversiva, antropológica). Na segunda, abordamos os jogos e a teoria da aprendizagem significativa ausubeliana, os benefícios advindos dos jogos como metodologia de ensino de Matemática e descrevemos quais os aspectos necessários para que a aprendizagem significativa ausubeliana aconteça.

Ademais a terceira: ensino de trigonometria, contempla duas subseções: uma aborda de forma sucinta um breve histórico da trigonometria, tais como: o seu surgimento e contribuições de diversas obras e povos para o desenvolvimento desse ramo importante da Matemática. E na outra ensino de trigonometria na perspectiva de documentos curriculares, discorremos brevemente acerca de como o ensino de trigonometria é descrito na BNCC (2018) e no DC-GOEM referente a área da Matemática e suas Tecnologias, assim como são abordadas algumas dificuldades relativas à tal ensino.

No Capítulo 3 descrevemos a metodologia da pesquisa, a qual se caracteriza como uma pesquisa qualitativa teórica, quanto aos objetivos é exploratória e aos procedimentos do tipo bibliográfica. No Capítulo 4 elaboramos uma sequência didática intitulada: *Reforçando o conteúdo de razões trigonométricas fundamentais através dos jogos baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos.*

A descrição dessa sequência está dividida em duas etapas: na primeira fizemos orientações ao professor sobre abordagem de conteúdo em dois exercícios retirados das cartas do jogo baralho da trigonometria, aplicação e regras do jogo. Na segunda fizemos uma abordagem dos conteúdos contido no jogo bingo dos senos-cossenos em três maneiras de jogar por meio de situações de jogo bem como abordamos acerca da aplicação e regras desse jogo.

Por fim, nas Considerações Finais tecemos sobre os benefícios que o uso de jogos como recurso didático pode propiciar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e que aliado à teoria da aprendizagem significativa podem gerar uma aprendizagem com significado, assim como foi evidenciado o que agregamos dessa pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo está dividido em três seções, a saber: a primeira apresenta aspectos introdutórios à teoria da aprendizagem significativa na perspectiva de David Ausubel; a segunda aborda os jogos e teoria da aprendizagem significativa e a terceira refere-se ao ensino de trigonometria, que por sua vez contempla duas subseções: breve histórico e ensino de trigonometria na perspectiva de documentos curriculares.

2.1 Teoria da aprendizagem significativa na perspectiva de David Ausubel

A teoria da aprendizagem significativa, segundo Moreira (2011), foi proposta por David Ausubel[5], no ano de 1963 e reiterada por ele em 2000, construída e embasada,

> Na experiência pessoal e de sua escolarização insatisfatória, no conhecimento do biológico e fisiológico como médico, na relação pessoal junto ao outro, como professor e clínico, Ausubel refletiu sobre os caminhos a serem oferecidos para que a capacidade de perceber, compreender e elaborar fosse facilitada em situação de educação formal (MASINI; MOREIRA, 2017, p. 14).

Diante desse contexto, Ausubel "[...] buscou sistematizar os princípios que propiciam ao ser humano situar-se no mundo, organizando sua experiência e atribuindo significados à realidade em que se encontra" (MASINI; MOREIRA, 2017, p. 14-15). Assim, como evidenciado, é de suma importância levar-se em consideração a realidade que cerca o aprendiz, haja vista que a "[...] teoria da aprendizagem significativa de Ausubel é uma teoria sobre a aquisição, com significados, de corpos organizados de conhecimento em situação formal de ensino" (MOREIRA, 2011, p. 41).

De modo geral, "Aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe" (MOREIRA, 2011, p. 13). Isto é, substantiva significa não-literal (não se levar ao pé da letra), enquanto que não-arbitrária quer dizer que a interação deve ocorrer com algum conhecimento prévio especificamente relevante presente na estrutura cognitiva do indivíduo que aprende (MOREIRA, 2011).

---

[5]David Ausubel (1918-2008) graduou-se em Psicologia e Medicina, doutorou-se em Psicologia do desenvolvimento na Universidade de Columbia, onde foi professor no *Teachers College* por muitos anos. Dedicou sua vida acadêmica ao desenvolvimento de uma visão cognitiva à Psicologia Educacional (MOREIRA, 2011, p. 14).

Nesse sentido, de acordo com o autor, na visão ausubeliana o conhecimento prévio (chamado de subsunçor) é a variável que mais influência para o desenvolvimento da aprendizagem significativa de novos conhecimentos, dado que

> O subsunçor é [...] um conhecimento estabelecido na estrutura cognitiva do sujeito que aprende e que permite, por interação, dar significado a outros conhecimentos [...] pode ser também uma concepção, um construto, uma proposição, uma representação, um modelo, enfim, um conhecimento prévio especificamente relevante para a aprendizagem significativa de determinados novos conhecimentos (MOREIRA, 2011, p. 18).

Sob esse ponto de vista, Masini e Moreira (2017) reiteram que, para Ausubel, os subsunçores são muito importantes na aquisição de novos conhecimentos, uma vez que servem de "ideias-âncoras", (isto é, quando um subsunçor a partir de sucessivas interações adquire maior estabilidade cognitiva, fica mais rico sendo capaz de servir de base para novas aprendizagens significativas (MOREIRA, 2011) para dar significado a novos conhecimentos, na medida em que a partir das interações na estrutura cognitiva, ou seja, de um "[...] conjunto hierárquico de subsunçores dinamicamente inter-relacionados" (MOREIRA, 2011, p. 19), os conhecimentos prévios passam a ter maior clareza, estabilidade cognitiva, abrangência, tornando-se assim mais ricos, mais diferenciados, possibilitando a atribuição de novos significados por parte do aprendiz em determinado conceito.

Nessa perspectiva, é interessante ressaltar que a aprendizagem significativa ausubeliana pode ocorrer por recepção ou descoberta. A aprendizagem por recepção consiste no fato do aprendiz receber o conhecimento em sua forma final, seja ele por meio de um livro, uma aula, um filme ou mesmo uma experiência em laboratório (MOREIRA, 2011). No entanto, tal aprendizagem não se configura como uma aprendizagem mecânica, uma vez que "[...] requer muita atividade cognitiva para relacionar, interativamente, os novos conhecimentos com aqueles já existentes na estrutura cognitiva, envolvendo processos de captação de significados [...]" (MOREIRA, 2011, p. 34).

No entanto, na aprendizagem por descoberta, "[...] o aprendiz deve *em primeiro lugar* descobrir este conteúdo, criando proposições que representem soluções para os problemas suscitados, ou passos sucessivos para a resolução dos mesmos" (AUSUBEL, 2001, p. 5, grifo do autor). Assim, do ponto de vista didático tal aprendizagem pode funcionar como motivadora, ou apropriada, haja vista que demanda autonomia por parte do aprendiz, no sentido de perceber, compreender e agregar um novo conteúdo em sua estrutura cognitiva (JORGE; PIRES; TRAJANO, 2020).

Ademais, a aprendizagem significativa é classificada em três tipos, a saber: *representacional*, *conceitual* e *proposicional*. A aprendizagem *representacional* (de representações) se refere a atribuição de símbolos arbitrários, os quais representam, em significados, os objetos, eventos, conhecimentos ou conceitos de modo literal (MOREIRA, 2011). A aprendizagem *conceitual* (de conceitos) como assevera Moreira (2011, p. 38-39), "ocorre quando o sujeito percebe regularidades em eventos ou objetos, passa a representá-los por determinado símbolo e não mais depende de um referente concreto do evento ou objeto para dar significado a esse símbolo". A aprendizagem *proposicional* (de proposições) conforme apresenta Moreira (2011, p. 39), "[...] implica dar significado a novas ideias expressas na forma de uma proposição", o que vai ao encontro do que afirmam Jorge, Pires, Trajano (2020, p. 6) quando dizem que essa aprendizagem "[...] ocorre quando um conjunto de proposições atribui significado a um determinado conceito".

Nessa perspectiva, a estrutura cognitiva na teoria da aprendizagem significativa ausubeliana é caracterizada por dois processos que ocorrem simultaneamente em todos os momentos da aprendizagem, a saber: *diferenciação progressiva*, que "é o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante de sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos" (MOREIRA, 2011, p. 20). E a *reconciliação integradora*, definida como "um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, [...] que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados [...]" (MOREIRA, 2011, p. 22). Isto é,

> [...] Através desses processos, o aprendiz vai organizando, hierarquicamente, a sua estrutura cognitiva em determinado campo de conhecimentos. Hierarquicamente significa que alguns subsunçores são mais gerais, mais inclusivos do que outros, mas essa hierarquia não é permanente; à medida que ocorrem os processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, a estrutura cognitiva vai mudando (MOREIRA, 2011, p. 42-43).

Sob esse aspecto, a partir dessas constantes interações do indivíduo que aprende com um determinado conhecimento prévio, a sua estrutura cognitiva vai mudando e adquirindo de forma gradual novos significados, passando este subsunçor a servir para novas aprendizagens significativas (MOREIRA, 2011).

Outrossim, existem duas condições consideradas fundamentais para que a aprendizagem ocorra de forma significativa, conforme destaca Moreira (2011):

- **o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo**, ou seja, essa condição implica "[...] que o material de aprendizagem (livros, aulas, aplicativos,...) tenha significado lógico (isto é, seja relacionável de maneira não-arbitrária e não-literal a uma estrutura cognitiva apropriada relevante)" (MOREIRA, 2011, p. 24-25).

- **o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender**, isto é, "[...] o aprendiz deve querer relacionar os novos conhecimentos, de forma não-arbitrária e não-literal, a seus conhecimentos prévios" (MOREIRA, 2011, p. 25).

Diante do exposto, pode-se inferir que nessa teoria de Ausubel é de vital importância que os conteúdos a serem apresentados ao aprendiz sejam significativos para que estes possam ter uma predisposição para aprendê-los e assim adquirir novos significados. Contudo, se não houver uma conexão vinculada entre esses novos conhecimentos com os que o aprendiz já sabe possivelmente não existirá aprendizagem nessa perspectiva.

Por outro lado, é válido enfatizar que caso o aprendiz não detenha subsunçores adequados que lhes possibilitem a aquisição de novos conhecimentos, Ausubel propõe em seus trabalhos o chamado *organizador prévio*, que

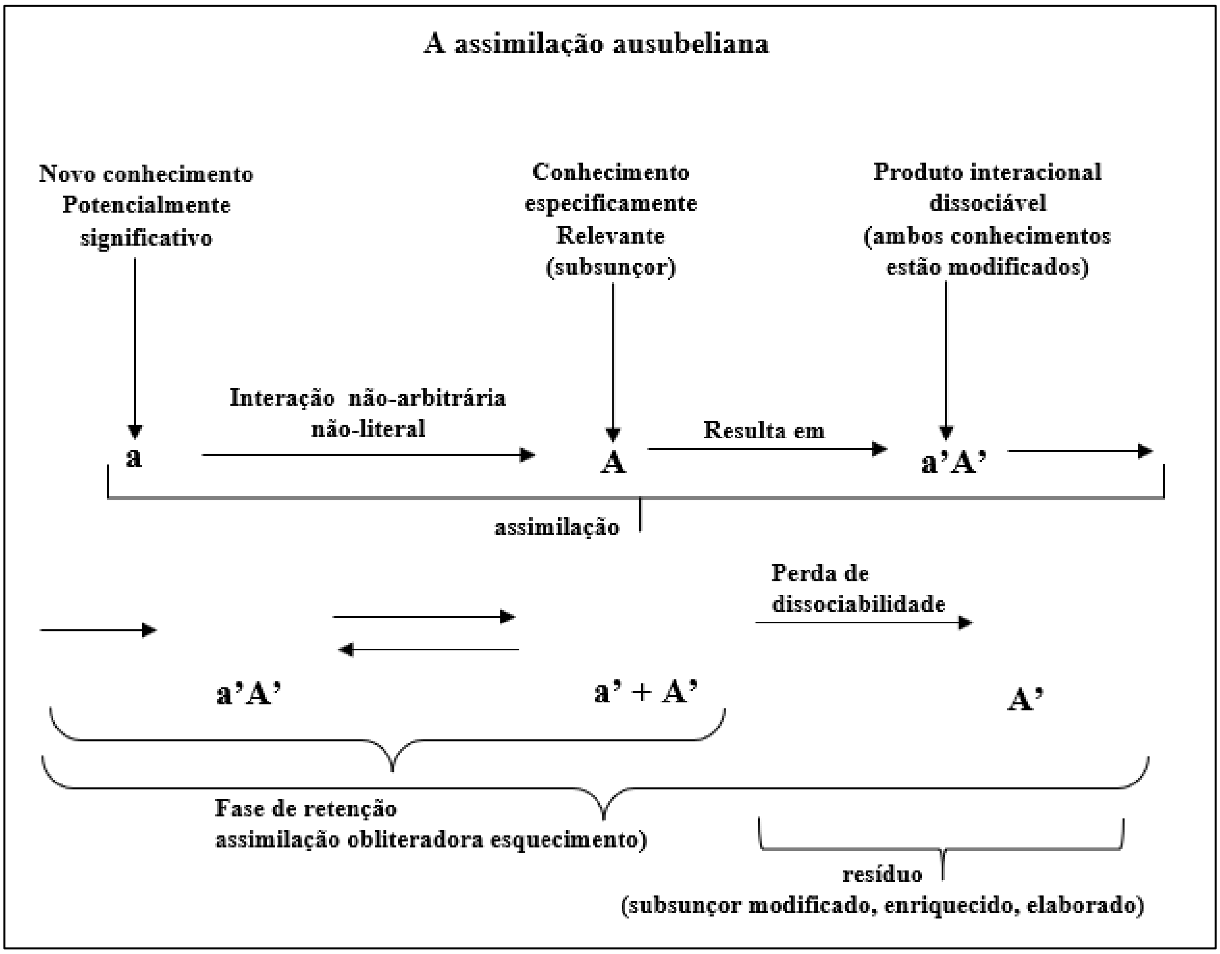
> [...] é um recurso instrucional apresentado em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem [...] Pode ser um enunciado, uma pergunta, uma situação-problema, uma demonstração, um filme, uma leitura introdutória, uma simulação. Pode também ser uma aula que precede um conjunto de outras aulas (MOREIRA, 2011, p. 30).

Ou seja, os organizadores prévios são recursos a serem utilizados na tentativa de suprir lacunas de subsunçores ou para evidenciar as relações, bem como discriminá-las entre os conhecimentos novos e os conhecimentos que o aprendiz já sabe.

No entanto, é importante frisar que uma aprendizagem para ser significativa não significa que o aprendiz não possa esquecer, pelo contrário, Ausubel em sua teoria afirma que o esquecimento é uma consequência natural dessa aprendizagem, a qual chamava de *assimilação obliteradora*, "[...] ou seja, a perda progressiva da dissociabilidade dos novos conhecimentos que lhes deram significados, que serviram de ancoradouro cognitivo" (MOREIRA, 2011, p. 39).

Em resumo, a teoria da aprendizagem significativa na visão cognitiva clássica de Ausubel ocorre conforme a Figura 1.

Figura 1- Aprendizagem significativa na visão cognitiva clássica de Ausubel.



Fonte: Moreira (2011, p. 158).

A esquematização da Figura 1, conforme apresenta Moreira (2011, p. 39), em que **a** é um novo conhecimento podendo ser um conceito, uma proposição, fórmula, entres outros, e **A** se refere a um subsunçor relevante presente na estrutura cognitiva relativamente à aprendizagem significativa de **a**, pode ser explicada da seguinte maneira:

> **a** interage com **A** gerando um produto interacional **a'A'** que é dissociável em **a' + A'** durante a fase de retenção, mas que progressivamente perde a dissociabilidade até que se reduza simplesmente a **A'**, o subsunçor modificado em decorrência da interação inicial. Houve, então o esquecimento de **a'**, mas que, na verdade, está obliterado em **A'** (MOREIRA, 2011, p. 40).

Ou seja, ocorre a interação de a (novo conhecimento potencialmente significativo) de forma não-literal e não-arbitrária, isto é, ocorre interação com algum conhecimento relevante na estrutura cognitiva do indivíduo que aprende, com A (subsunçor), a qual resulta em um produto interacional de a' + A' (ambos os conhecimentos estão modificados), que por sua vez é dissociável durante a fase de retenção, porém com progressiva perda de dissociabilidade até que seja reduzida A', que é o subsunçor que foi modificado no decorrer da primeira interação.

Nesse sentido, ocorreu a assimilação obliteradora, ou seja, o esquecimento residual de a', mas que, na verdade, está incorporado em A' (MOREIRA, 2011).

Conforme já evidenciado para Ausubel, os subsunçores (conhecimentos prévios) são ferramentas essenciais para que a aprendizagem se desenvolva e se consolide de forma significativa. Embora, a teoria da aprendizagem significativa tenha sido proposta na década de 1960, por Ausubel, existem algumas visões de autores acerca dessa teoria, conforme apresenta Moreira (2011): a humanística, a interacionista social, a cognitiva contemporânea e a visão crítica (subversiva, antropológica).

A Visão humanística

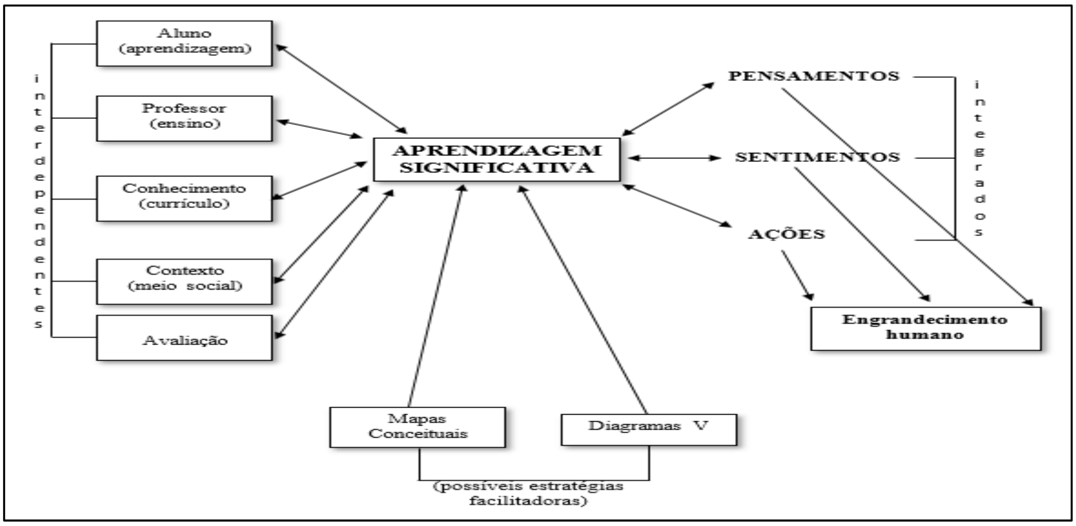
Proposta por Joseph Novak[6] (NOVAK, 1981; NOVAK; GOWIN, 1996) que atuou como colaborador e coautor juntamente a Ausubel na segunda edição da obra considerada básica da aprendizagem significativa. De acordo com esse autor, na teoria da aprendizagem significativa está implícita a integração construtiva e positiva entre pensamentos, sentimentos e ações que conduz ao engrandecimento humano (MOREIRA, 2011).

Nessa perspectiva de Novak, "[...] atitudes e sentimentos positivos em relação à experiência educativa têm suas raízes na aprendizagem significativa e, por sua vez, facilitam-na" (MASINI; MOREIRA, 2017, p. 36), ou seja, levando em consideração que a predisposição para aprender é uma das condições para quem aprende de maneira significativa, existe uma integração de pensamentos, sentimentos e ações. Segue a Figura 2 contemplando a visão humanística de Novak.

No esquema da Figura 2, de acordo com Moreira (2011), Novak propõe uma integração construtiva de sentimentos, pensamentos e ações que norteiam para o engrandecimento humano, podendo essa integração ser positiva, negativa ou matizada. Assim, na percepção de Novak quando a aprendizagem ocorre de maneira significativa, há o crescimento do aprendiz na perspectiva de um determinado conhecimento, que por sua vez, tem uma boa impressão, pois aprendeu e assim, sente-se disposto a novas aprendizagens na área em questão. Entretanto, se a aprendizagem acontece de forma mecânica, o aluno desenvolve um sentimento de repulsa (perde o interesse) pela matéria de ensino e não se predispõe a aprender de forma significativa.

[6] Joseph Donald Novak nasceu em 1932, um educador norte-americano e professor emérito da Cornell University e pesquisador sênior do Florida Institute for Human & Machine Cognition. Graduou-se em Ciências e Matemática pela University of Minessota em 1952, concluiu mestrado em Science Education em 1954 na University of Minessota. Muito conhecido por ser o criador da técnica dos mapas conceituais na década de 1970. Disponível em: https://stringfixer.com/pt/Joseph_D._Novak. Acesso em: 14 nov. 2021.

Figura 2 - A aprendizagem significativa na visão humanística de Novak.



Fonte: Moreira (2011, p. 161).

Ademais, conforme apresentado na Figura 2, Novak acrescenta os chamados lugares comuns da educação, a saber: aprendizagem, ensino, currículo, contexto (meio social) e avaliação, que segundo esse autor estão interligados na aprendizagem significativa. Em contrapartida, os mapas conceituais, assim como os diagramas V, são vistos como estratégias que possivelmente podem ser usadas, no intuito de facilitar a aprendizagem significativa (MOREIRA, 2011).

A visão interacionista social

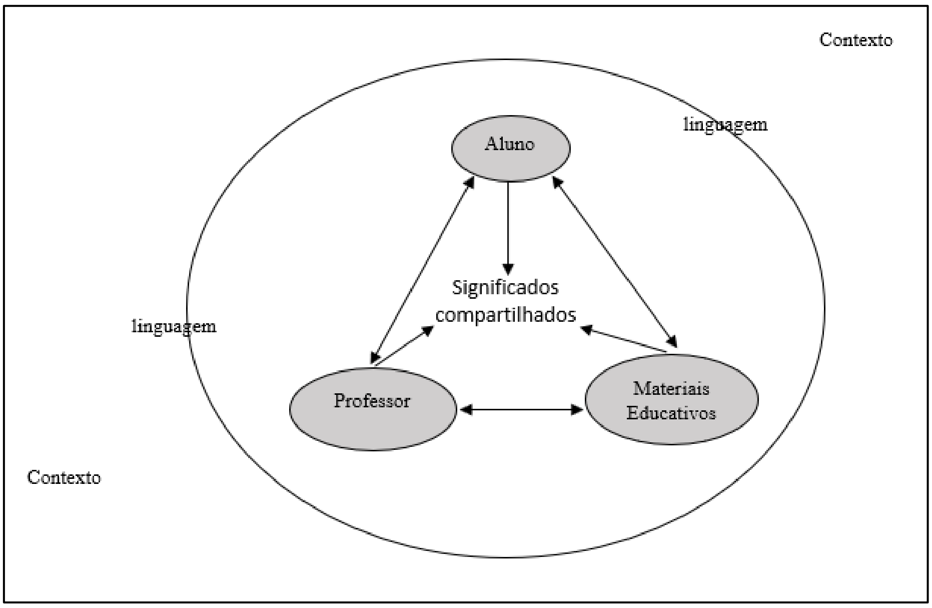
A visão interacionista social da aprendizagem significativa proposta por D. B. Gowin [7](1981) é, na perspectiva desse autor, o processo de ensino-aprendizagem visto como uma negociação de significados composto por uma abordagem triádica (aluno ↔ professor ↔ materiais educativos do currículo), isto é,

> [...] um episódio de ensino-aprendizagem se caracteriza pelo compartilhar significados entre aluno e professor, a respeito de conhecimentos veiculados por materiais educativos do currículo. Usando materiais educativos do currículo, aluno e professor buscam uma congruência de significados (MOREIRA, 2011, p. 71).

[7]D. Bob Gowin nasceu em 1925, nos Estados Unidos. Graduou-se em Artes em 1948 pela Universidade do Texas, doutorou-se em 1956 pela Universidade de Yale. Foi educador e filósofo da educação e professor emérito da Cornell University. e membro da Sociedade de Educação de Filosofia. Muito contribuiu para teoria da aprendizagem significativa, como, por exemplo, o modelo de Gowin. Disponível em: https://cpb-us-e1.wpmucdn.com/blogs.cornell.edu/dist/3/6798/files/2016/01/D.-Bob-Gowin-1er5twb.pdf. Acesso em: 15 nov. 2021.

Nesse sentido, a designação “interacionista” significa, na prática, que o professor é o mediador dos conhecimentos e apresenta os significados compartilhados no contexto das matérias de ensino, sendo o aluno receptor desses conhecimentos, que por sua vez, os compartilha com o professor a fim de que este verifique se houve o compartilhamento dos significados no contexto ao qual o professor se referia. Caso contrário o professor deve explicitar esses conteúdos de diversas maneiras (não necessariamente aulas expositivas dialogadas, todavia, pode ser um vídeo, uma leitura, um recurso computacional entre outros), no sentido de obter o êxito esperado, no caso, o entendimento do conteúdo conforme apresentado pelo professor. Segue a Figura 3 contemplando essa visão de Gowin.

Figura 3 - A aprendizagem significativa na visão interacionista social de Gowin.



Fonte: Moreira (2011, p. 163).

Conforme apresentado na Figura 3, nesse modelo de Gowin (1981),

> O professor apresenta ao aluno os significados já compartilhados pela comunidade a respeito dos materiais educativos do currículo. O aluno, por sua vez, deve devolver ao professor os significados que captou. Se o compartilhar significados não é alcançado, o professor deve, outra vez, apresentar, de outro modo, os significados aceitos no contexto da matéria de ensino. O aluno, de alguma maneira deve externalizar novamente os significados que captou (MOREIRA, 2011, p. 71).

Nessa perspectiva, de acordo com esse autor, um episódio de ensino é concretizado, quando o aluno consegue captar os significados compartilhados no contexto da matéria de ensino introduzido pelo professor, da maneira como o professor queria que este aluno compreendesse.

A visão cognitiva contemporânea

Essa visão parte do princípio de que a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel deixa lacunas acerca de como acontece a interação entre os novos conhecimentos e conhecimentos prévios. Diante desse contexto, Johnson-Laird[8] (1983) propôs a teoria dos modelos mentais, argumentando que a construção de modelos mentais frente a um novo conhecimento pode se configurar em um passo importante para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, haja vista que essa "[...] construção reflete a intencionalidade do sujeito, porque se ele constrói o modelo, é porque quer dar conta da situação" (MOREIRA, 2011, p. 164). Ademais,

> [...] os modelos mentais são representações internas que constituem uma terceira via entre representações proposicionais e imagens. [...] São representações instáveis, não necessariamente precisas ou "corretas", descartáveis, que o sujeito constrói na memória de trabalho quando compreende (ainda que à sua maneira) a situação. (MOREIRA, 2011, p. 73).

De acordo com essa asserção do autor, os referidos modelos são recursivos, na medida em que podem ser modificados quantas vezes se fizerem necessárias para que seja alcançada a compreensão desejada pelo sujeito, visando a incorporação de novas informações (MOREIRA, 2011).

A visão crítica (subversiva, antropológica)

Conforme apresenta Moreira[9] (2011), além de ser significativa, é importante que a aprendizagem se faça de forma crítica subversiva, isto é, "[...] na sociedade contemporânea não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso adquiri-los criticamente" (MOREIRA, 2011, p. 173). Sob essa ótica, diferente da visão clássica ausubeliana que se preocupa com a aprendizagem significativa a partir de conhecimentos prévios, na visão crítica proposta por Moreira, no ano 2000, é imprescindível que o estudante não aprenda por

---

[8] Philip N. Johnson-Laird nasceu em 1936 no Reino Unido. Graduou-se em Psicologia em 1964 e doutorou-se 1967 pela University College London. Foi professor na Universidade de Princeton no departamento de Psicologia, além de outras universidades. Foi membro da American Philosophical Society. Escreveu diversos livros sobre a cognição e a psicologia do raciocínio e foi responsável por desenvolver a teoria dos modelos mentais. Disponível em: https://stringfixer.com/pt/Philip_N._Johnson-Laird. Acesso em: 14 nov. 2021.

[9] Marco Antônio Moreira é licenciado e Mestre em Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)/Brasil e Doutor em Ensino de Ciências pela Cornell University/USA . É Professor Titular Emérito da UFRGS e Pesquisador Sênior do CNPq na Área de Educação. Tem larga experiência no campo da aprendizagem significativa, com muitos artigos e livros publicados, congressos organizados e teses dirigidas (MASINI; MOREIRA, p. 87). Inclusive foi orientando de doutorado de Joseph Novak em meados da década de 1970, desenvolvendo nesse período a tese sobre aprendizagem significativa em conteúdos de Física (MOREIRA, 2011).

aprender, ou seja, se faz necessário que este saiba se este conhecimento servirá para ele, quando, como e até que ponto servirá ou não, aquilo que é compreendido.

Ainda nesse contexto, outro fator fundamental é que o professor faça uma leitura crítica do seu objeto de estudo, relativamente aos conteúdos matemáticos a serem abordados no decorrer do processo de ensino e aprendizagem, no sentido de definir o que é primordial, secundário e o que é optativo em cada conteúdo. Nessa perspectiva, Moreira (2011, p. 174) lista princípios de facilitação da aprendizagem significativa para que o ensino se desenvolva de maneira crítica, a saber:

- **Conhecimento prévio** (aprendemos a partir do que já sabemos):

  Esse é o princípio considerado primordial na aprendizagem significativa, visto que é a variável mais importante na aquisição de significados de novos conhecimentos, uma vez que a interação cognitiva ocorre de maneira não-arbitrária e não-literal na estrutura cognitiva. No entanto, é interessante que o aprendiz tenha materiais significativos a sua disposição, além da real intenção de querer aprender de forma significativa.

- **Perguntas ao invés de respostas** (estimular o questionamento ao invés de dar respostas prontas):

  Como afirmam Masini e Moreira (2017, p. 173), esse princípio coloca a interação e o questionamento como elementos fundamentais na facilitação da aprendizagem significativa crítica. Assim, é mais relevante para o aprendiz aprender a fazer questionamentos (perguntas) acerca de determinado conceito ao invés de aprender apenas respostas corretas.

  Nesse sentido, é necessário desvincular-se do livro didático como forma de recurso instrucional primordial, pois esse recurso didático nem sempre estimula questionamentos e as respostas já estão prontas, conferindo uma visão única acerca de determinado assunto (MASINI; MOREIRA, 2017).

- **Diversidade de materiais** (abandono do manual único):

  A aprendizagem deve ser diversificada no sentido do livro didático não ser o recurso instrucional prioritário e que todos os conteúdos devem partir dele. É importante saber que existem materiais potencialmente significativos que podem ser propostos para que o processo de ensino-aprendizagem possa ser desenvolvido, tais como: um *software*, uma proposta de ensino, jogos, uma produção de texto, atividades colaborativas presenciais, entre outros (PEREIRA, 2011).

- **Aprendizagem pelo erro** (é normal errar; aprende-se corrigindo erros):

  A aprendizagem por meio do erro, como assegura Masini e Moreira (2017), é natural do ser humano em sua vida cotidiana. Todavia, em contextos escolares esses erros são punidos, no sentido de que a escola vislumbra o aluno como receptor de conteúdos em que são reproduzidas respostas corretas. Diante desse quadro, é importante salientar que, a partir do erro, o aluno pode também construir conhecimentos, pois o sujeito que aprende passa a ser o perceptor do seu conhecimento (MOREIRA, 2011).

- **Aluno como perceptor representador** (o aluno representa tudo o que percebe):

  Esse princípio pressupõe que o aprendiz não é apenas um mero receptor de conhecimentos, e sim um perceptor, isto é, "[...] o sujeito que percebe e representa o que lhe está sendo ensinado" (MOREIRA, 2011, p. 175). Sob este ponto de vista, existe a necessidade que o aluno faça questionamentos acerca do que lhe é ensinado e de como são buscados tais ensinamentos.

- **Consciência semântica** (o significado está nas pessoas, não nas palavras):

  Esse princípio leva em consideração, segundo Masini e Moreira (2017), que o processo de ensino-aprendizagem deve envolver apresentação, negociação e compartilhamento de significados, sendo a linguagem de vital importância nesse processo. Desse modo, faz-se necessário que o aluno esteja consciente dos significados que são atribuídos às coisas e aos objetos, dado que "[...] um episódio de ensino se consuma quando o aluno e professor compartilham significados sobre os materiais educativos" (GOWIN, 1981 apud MOREIRA, 2017, p. 77-78). Assim, para que o aluno aprenda de forma significativa é imprescindível que este vincule os conhecimentos prévios de forma não-literal e não-arbitrária aos conhecimentos adquiridos com os materiais potencialmente significativos.

- **Incerteza do conhecimento** (o conhecimento humano é incerto, evolutivo):

  O princípio da incerteza do conhecimento não implica a rejeição do conhecimento, mas que o ensino não seja dogmático (seja aceito como verdade absoluta), visto que, como afirmam Masini e Moreira (2017), o conhecimento é evolutivo, na medida em que um modelo que é aprendido hoje pode ser melhorado amanhã, ou seja, o conhecimento é construído e reconstruído a todo momento.

- **Desaprendizagem** (às vezes, o conhecimento prévio funciona como obstáculo epistemológico):

Nem sempre o conhecimento prévio servirá como facilitador da aprendizagem significativa, por vezes pode ser um obstáculo para esse conhecimento, tendo em vista que o indivíduo que aprende não consegue captar a relação existente entre esses conhecimentos e os novos conhecimentos. Assim, o sentido de "desaprender" está no fato desses conhecimentos não servirem como ideia-âncora da estrutura cognitiva do sujeito que aprende para adquirir novos conhecimentos (MOREIRA, 2011).

- **Conhecimento como linguagem** (tudo que chamamos conhecimento é linguagem):

  Esse princípio remete ao fato de que a linguagem é base para a compreensão de um determinado conhecimento, conteúdo, tendo em vista que a linguagem é mediadora da assimilação humana (externamos o que captamos do meio). E aprender essa linguagem de maneira crítica implica o desenvolvimento de novas possibilidades de enxergar esses conhecimentos, ou seja, é aprender a ter uma nova visão de mundo a partir dessa linguagem (MOREIRA, 2011).

- **Diversidade de estratégias** (abandono do quadro giz):

  A ideia desse princípio, conforme menciona Moreira (2011), é diversificar estratégias e tornar o aluno protagonista da sua aprendizagem, ou seja, o professor deve deixar de ser o detentor do conhecimento e o aluno ser apenas o receptor desse conhecimento. Para tanto, o professor tem a seu favor recursos instrucionais, que podem fazer com que o aluno vislumbre que sua ação participativa é primordial para o seu aprendizado com significado, a saber: organizadores prévios (como, por exemplo, um enunciado, uma pergunta, uma situação-problema, discussões, tarefas iniciais, experiências, uso de aplicativos, uma demonstração, um filme, uma leitura introdutória, textos ou mesmo uma aula, entre outros) (MOREIRA, 2011).

- **Abandono da narrativa** (simplesmente narrar não estimula a compreensão):

  Esse princípio parte do pressuposto de que o professor deve deixar de ser apenas o narrador do conhecimento, do conteúdo, haja vista que só aulas expositivas dialogadas possuindo como recurso principal o livro didático não estimula a compreensão do aluno. Nesse sentido, é importante que o professor lecione suas aulas de forma mais colaborativa com os alunos e os permita que externalizem seus conhecimentos acerca do conteúdo que está sendo ministrado, a fim de torná-los protagonistas de sua aprendizagem (MOREIRA, 2011).

Diante do exposto, do estudo dos pressupostos da teoria da aprendizagem significativa na perspectiva ausubeliana e apresentadas visões de alguns autores acerca dessa teoria, na próxima seção discorremos acerca dos jogos e a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

2.2 Jogos e a teoria da aprendizagem significativa ausubeliana

Os jogos desde os tempos primitivos figuram como uma atividade natural do ser humano (ALMEIDA, 2000) e corroborando com esse pensamento Huizinga (2001, p. 3) afirma que o jogo "[...] Ultrapassa os limites da atividade física e biológica", isto é, segundo esse autor, a intensidade e o encanto do jogo não podem ser explicados por análises biológicas. Sob este aspecto, pôde-se perceber que o jogo está culturalmente enraizado desde o surgimento da humanidade, e "[...] é no jogo e pelo jogo que a civilização se desenvolve" (HUIZINGA, 2001, prefácio).

Nesse contexto, a definição de jogo está intimamente vinculada a características de tensão, alegria e diversão e se configura como uma atividade voluntária, na qual a liberdade situa-se no prazer de brincar e requer variantes de tempo e espaço, regras a serem seguidas de forma absoluta. Conforme apresenta Huizinga (2001),

> O jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da "vida quotidiana" (HUIZINGA, 2001, p. 33).

Nesse sentido, pensando nos jogos como metodologia de ensino e aprendizagem estes se apresentam como um recurso didático com grande potencial para uma aprendizagem significativa, embora a princípio, segundo Almeida (2000), o uso de jogos no ensino fosse visto como irrelevante e sem significado no contexto escolar, uma vez que agregam em si mesmo um valor que difere da prática educativa, isto é, estão intimamente vinculados ao prazer espontâneo de jogar, sendo apenas uma mera distração/diversão aos participantes.

Sob esse ponto de vista, tem-se a percepção de que os jogos são típicos da disciplina de educação física, assim sendo não possuiriam nenhum significado no processo de ensino e aprendizagem dos alunos em outras áreas do conhecimento, pois

> É muito comum ouvirmos dizer que "os jogos não servem para nada e não têm significação alguma dentro das escolas, a não ser na cadeira de educação física". Tal opinião está muito ligada a pressupostos da pedagogia tradicional, que excluía o lúdico de qualquer atividade educativa séria ou formal (ALMEIDA, 2000, p. 59).

Nessa perspectiva, Almeida (2000) ressalta que existe uma limitação quanto à utilização dos jogos bem como no que diz respeito ao seu verdadeiro sentido na prática educativa, haja vista que alguns educadores os excluem dos contextos escolares "abusando de argumentos como: os jogos contrariam a seriedade do ato de estudar; o jogo representa [...] fruição passiva em busca de prazer, satisfação pessoal, independente de uma ação reflexiva e coletiva" (ALMEIDA, 2000, p. 41). Dessa forma, para esses educadores, os jogos são vistos apenas como passa tempo, distração, sendo totalmente desvinculados das atividades educativas formadoras.

Em contrapartida, existem autores (KISHIMOTO, 2011; GRANDO, 1995; SELVA; CAMARGO, 2009; ALVES, 2001) que defendem a utilização dos jogos como metodologia de ensino alternativa, mais precisamente no ensino de matemática. Os jogos têm-se constituído uma boa ferramenta auxiliar no processo de ensino e na aprendizagem dos alunos, já que torna as aulas mais dinâmicas e prazerosas, "[...] possibilitando trabalhar o formalismo próprio da matemática de uma forma atrativa e desafiadora, visando mostrar que a matemática está também presente nas relações sociais e culturais" (SELVA; CAMARGO, 2009, p. 3).

Kishimoto (2011) partilha dessa concepção quando afirma que

> O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que pouco a pouco será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados culturais para os conceitos matemáticos e estudos de novos conceitos (KISHIMOTO, 2011, p. 95).

Sob a ótica da utilização de jogos no contexto educacional, Grando (1995) assegura que estes possuem diversas finalidades, entre elas: "a fixação de conceitos, a motivação, a construção de conceitos, aprender a trabalhar em grupo, propiciando a solidariedade entre os alunos, estimular a raciocinar, desenvolver o senso crítico, a disposição para aprender e descobrir coisas novas, além do desenvolvimento da cidadania" (GRANDO, 1995, p. 86-87).

Outrossim, Grando (1995) caracteriza o jogo matemático

> [...] como aquele que incorpora a estrutura matemática, fornecendo uma representação concreta e manipulativa para sustentar e demonstrar o que há por trás da Matemática. Assim, os aspectos relacionados à ação pedagógica do jogo propiciam uma discussão que objetiva, sobretudo, o desenvolvimento do aluno e a sua compreensão e relação com a realidade que o cerca (GRANDO, 1995, p. 105).

Nessa perspectiva, Selva e Camargo (2009, p. 5) corroboram que "os jogos matemáticos são recursos que podem ser empregados pelos professores em sala de aula a fim de dinamizar suas aulas e facilitar a aprendizagem dos alunos". Assim, de acordo com essas autoras, os jogos matemáticos são capazes de contribuir de forma efetiva, haja vista que podem auxiliar no desenvolvimento do trabalho do professor, na medida em que torna o planejamento das aulas mais dinâmico e atrativo, conforme a necessidade na administração de conteúdo.

Em contrapartida, associam elementos pertinentes ao processo de ensino e aprendizagem dos alunos, tendo em vista que proporcionam o desenvolvimento de aspectos relevantes para aquisição de conhecimentos, além de promover a socialização, a liderança, disciplina e trabalho em equipe. Por esse ângulo, segundo Alves (2001), os jogos no ensino funcionam como um importante aliado para o desenvolvimento de habilidades e competências, uma vez que a sua utilização possui diversas finalidades, dentre elas: desenvolvimento da solidariedade, senso crítico, criatividade, assimilação de conceitos, tornando assim as aulas de Matemática mais dinâmicas, pois

> [...] os jogos propiciam condições agradáveis e favoráveis para o ensino da matemática, uma vez que, com esse tipo de material, o indivíduo é motivado para trabalhar e pensar tendo por base o material concreto, descobrindo, reinventando e não só recebendo informações. Assim, o jogo pode fixar conceitos, motivar os alunos, propiciar a solidariedade entre os colegas, desenvolver o senso crítico e criativo, estimular o raciocínio, descobrir novos conceitos (ALVES, 2001, p. 25).

Ademais, como assegura Zeferino (2015), do ponto de vista pedagógico, o jogo

> [...] é um facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas de difícil assimilação, desenvolvendo no aluno sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las, com autonomia e cooperação (ZEFERINO, 2015, p. 37)

Nesse sentido, de acordo com Kishimoto (2011), os jogos como metodologia alternativa de ensino de matemática podem contribuir para a construção de conhecimentos de forma ativa dos alunos e aliado à teoria da aprendizagem significativa conforme destaca Moreira (2011), os conhecimentos prévios do aluno são de fundamental importância, os conceitos matemáticos formais são inseridos de forma gradual permitindo dessa maneira ao aluno a construção de outros conhecimentos mais elaborados, isto é, o conhecimento antes considerado como novo é incorporado na estrutura cognitiva do aluno e a partir dessa incorporação podem ser adquiridos novos conhecimentos.

Diante desse contexto, conforme visto na seção 2.1, para que a aprendizagem significativa ausubeliana aconteça se faz necessário considerar alguns aspectos importantes, tais como: ocorra de forma não-literal e não-arbitrária, haja um conhecimento prévio (subsunçor especificamente relevante para o aprendiz em relação a determinado conceito), a estrutura cognitiva do aprendiz, o material deve ser potencialmente significativo, bem como existir uma predisposição do aluno para aprender.

É válido destacar que esse tipo de aprendizagem se processa mediante a interação entre o conhecimento que o aprendiz já sabe e um novo conhecimento e, a partir dessas interações na estrutura cognitiva (hierarquia de subsunçores logicamente organizados), são adquiridos novos significados, isto é, o conhecimento se modifica tornando-se mais estável, claro, organizado, oportunizando ao aluno uma aprendizagem com significado acerca de determinado conteúdo.

Nesse sentido, segundo Jorge, Pires e Trajano (2020), os jogos podem funcionar como um importante aliado da teoria da aprendizagem significativa, uma vez que uma fase complementar a essa teoria consiste, de acordo com Ausubel (2000), na retenção e esquecimento de conteúdo, que por sua vez, são processos naturais dessa teoria. Isso significa, segundo esse autor, que o conteúdo que foi aprendido é incorporado a algum subsunçor, o qual passa a funcionar como ancoradouro pelo aprendiz e que essa "[...] retenção do conteúdo é medida pela força de dissociabilidade estabelecida com a estrutura cognitiva" (JORGE; PIRES; TRAJANO, 2020, p. 5).

Em outras palavras, quando se reduz a utilização de determinado conhecimento a força de dissociabilidade ("Característica pela qual um conceito incorporado a estrutura cognitiva mantém-se diferenciado da ideia-âncora durante certo período de tempo"(MASINI; MOREIRA, 2017, p. 83).), isto é, a disposição de conhecimentos prévios relevantes e estáveis na estrutura cognitiva passam a diminuir a capacidade de caracterização destes conhecimentos e assim atinge-se a subsunção obliterante (assimilação obliteradora), isto é, a fase de esquecimento do conteúdo apresentado. Nessa perspectiva, a aprendizagem significativa se destaca em detrimento à aprendizagem mecânica, pois

> Na aprendizagem significativa, a relação estabelecida entre os subsunçores e as novas ideias do material educacional protege os significados de interferências arbitrárias e literais devido à alta estabilidade. A não-arbitrariedade e subjetividade também promovem a retenção de um maior volume de material por mais tempo (JORGE; PIRES; TRAJANO, 2020, p. 5-6).

Assim sendo, pensando na perspectiva do jogo como metodologia de ensino vinculado à teoria da aprendizagem significativa é interessante considerar que "[...] a qualidade de um jogo educacional está relacionada à sua capacidade de promover associações entre a estrutura cognitiva do indivíduo e o objeto de conhecimento relacionado ao jogo, de forma que os significados se destaquem e possam ser retidos pelo estudante" (JORGE; PIRES; TRAJANO, 2020, p. 6).

Por outro lado, conforme mencionado anteriormente, quando o educando não possui subsunçores relativamente a um determinado conceito/conteúdo e o material potencialmente significativo (no nosso caso, os jogos) entra em cena, os organizadores prévios que "Podem ser introduções, discussões, tarefas iniciais, textos, experiências, uso de aplicativos, vídeos etc., cuja função é facilitar ao aluno a percepção da relação e da discriminação entre novos conhecimentos e seus conhecimentos prévios"(MASINI; MOREIRA, 2017, p. 43). Nesse sentido, tais organizadores são materiais que funcionam como uma ponte entre o que aprendiz já sabe e o que precisa saber para que este consiga agregar uma aprendizagem com significado relativamente a um determinado assunto (MOREIRA, 2011).

É interessante ressaltar que, como mencionado, a aprendizagem significativa ausubeliana pode ocorrer por recepção ou descoberta. Sob este ângulo, as atividades lúdicas envolvendo jogos em contextos escolares (desde que apresentados como parte do desenvolvimento dos conceitos e propriedades conforme orienta ou recomenda Grando (1995)) em conjunto com a aprendizagem significativa ausubeliana pode ser uma ferramenta de fundamental importância para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, já que pode motivar/estimular e agregar o conhecimento dos estudantes, dado que

> O jogo como promotor da aprendizagem e do desenvolvimento, passa a ser considerado nas práticas escolares como importante aliado para o ensino, já que colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-los dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas (KISHIMOTO, 2011, p. 89).

Pelo exposto, pode-se inferir que os jogos na perspectiva de aprendizagem significativa podem facilitar o entendimento de conteúdos relativamente aos três tipos de aprendizagem significativa (representacional, de conceitos, proposicional), em virtude de existirem diversas categorias de jogos, com fins metodológicos e/ou pedagógicos, das quais Grando (1995) destaca: os jogos de estratégias (associação recorrente a jogos matemático de acordo com esse autor); jogos de fixação de conceitos e os jogos pedagógicos, na qual os define da seguinte maneira:

> Jogos de estratégias (e/ou jogos de construção de conceitos) – [...] São aqueles que dependem única e exclusivamente do jogador para vencer. O fator "sorte" ou "aleatoriedade" não está presente. O jogador deve elaborar estratégias, que não dependa de sorte, para tentar vencer o jogo. Exemplos desse tipo de jogo, são: Xadrez, damas, kalah.
> Jogos de fixação de conceitos – são aqueles cujo objetivo está expresso em seu próprio nome: "fixar conceitos". São os mais comuns, muito utilizados nas escolas que propõem o uso de jogos no ensino ou "aplicar conceitos". Apresentam seu valor pedagógico na medida em que substituem, muitas vezes as listas e mais listas de exercícios aplicadas pelos professores para que os alunos assimilem os conceitos trabalhados[...].
> Jogos pedagógicos – [...] São aqueles que possuem seu valor pedagógico, ou seja, podem ser utilizados durante o processo de ensino-aprendizagem. [...] englobam todos os outros tipos: [...] estratégia, fixação de conceitos [...]; pois todos estes apresentam papel fundamental no ensino (GRANDO, 1995, p. 52).

Dessa forma, os autores considerados nesta seção asseguram que o uso dos jogos matemáticos como metodologia de ensino alternativa pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, tendo em vista que propiciam diversão e aprendizado, além de motivar, desenvolver o raciocínio lógico e permitir a construção de conhecimentos de forma ativa por parte de quem joga. No tocante aos jogos propostos nesta dissertação, é imprescindível que os alunos detenham um conhecimento prévio dos conteúdos abordados. O Apêndice A contempla uma parte referente à formalização Matemática desses conceitos, para que estes jogos funcionem como reforço de aprendizagem.

Todavia, é válido ressaltar que, de acordo com Zeferino (2015), apesar dos jogos serem ferramentas valiosas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática se faz necessário que o professor, ao utilizá-los, tenha objetivos claros do que quer que os alunos aprendam, além de alguns cuidados, dentre eles: criação de um jogo (observar o nível de escolaridade a ser aplicado), estar ciente de que o jogo pode ser usado para suprir algumas lacunas de determinado conceito que não foi compreendido (lembrando que não é qualquer conteúdo que podemos desenvolver um jogo) e tempo de execução, caso contrário, servirão apenas como distração/entretenimento para os envolvidos (ZEFERINO, 2015). Estes cuidados foram levados em consideração neste trabalho e serão abordados no capítulo da sequência didática.

A próxima seção apresenta aspectos relacionados à trigonometria e sua inserção nos documentos curriculares, iniciando com um breve histórico do surgimento desta parte da Matemática.

2.3 Ensino de trigonometria

Essa seção está dividida em duas subseções: a primeira refere-se a aspectos do surgimento da trigonometria e a contribuição de diversos povos para o seu desenvolvimento. A outra discorre sobre o ensino de trigonometria na perspectiva de documentos curriculares, bem como apresenta dificuldades enfrentadas pelos professores e alunos nesse conteúdo de Matemática.

2.3.1 Breve histórico da trigonometria

A trigonometria surgiu, de acordo Roque e Pitombeira (2012), em decorrência de necessidades humanas para resolver problemas cotidianos em diversas áreas, como astronomia (com maior efetividade) e geografia, e recebeu contribuição de diversos povos, a saber: os gregos, egípcios, babilônios, árabes e hindus. Conforme afirmam os autores,

> Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na geografia. Assim, os estudos de trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da trigonometria plana (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 135).

Nesse sentido, fez-se necessário o desenvolvimento da trigonometria plana, envolvendo a resolução de problemas nos triângulos como, por exemplo, calcular lados, ângulos, uma vez que funcionavam como aparatos importantes para se conseguir definir com maior exatidão as posições e trajetórias dos corpos celestes e cálculo de distâncias. Nessa perspectiva, o termo trigonometria vem do grego e significa medida do triângulo (DOMINGUES, [s.d.] apud IEZZI, 2004, p. 36). No entanto, é válido ressaltar que a sua formalização como a que se tem atualmente ocorreu apenas no século XVII, já que antes desse período não se tinha um simbolismo algébrico adequado (DOMINGUES, [s.d.] apud IEZZI, 2004).

Apesar das contribuições importantes de vários matemáticos para o ramo da trigonometria, segundo Boyer (1974), Aristarco de Samos (310-230 a.C.) escreveu o livro *Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua,* no qual fez observações e inferiu que, "[...] quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas vista ao Sol e à Lua difere para menos de um ângulo reto por trintavos de um quadrante. Na linguagem de hoje isso significa que a razão da distância da Lua para a distância do Sol [...] é sen 3°" (BOYER, 1974, p. 116).

Assim, de acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 135), ao comparar, "A distância da terra ao sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da terra à lua. Na demonstração deste fato vemos pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno". Além disso, o papiro de Rhind (1700 a.C.) dos egípcios assinala *seqt* de um ângulo, os relacionando com os problemas métricos das pirâmides, sendo conhecido hoje como cotangente (DOMINGUES. [s.d.] apud IEZZI, 2004, p. 36). Ainda, de acordo com Boyer (1974, p. 118), por cerca de 300 anos outros matemáticos, de Hipócrates a Eratóstenes, estudaram os conceitos de retas e círculos e os utilizaram em diversos problemas relacionados com a astronomia, todavia, não conseguiram fazer uma sistematização desses conceitos trigonométricos.

Contudo, Hiparco de Nicéia (por volta 180-125 a.C.) foi considerado o "pai da trigonometria", segundo Boyer (1974, p. 118), por ter compilado de forma presumida a primeira tabela trigonométrica (tabelas de cordas) que provavelmente tenha sido originada da ideia de Hipsicles, que, por sua vez, havia dividido o círculo em 360 partes. Essa ideia Hiparco usou para o desenvolvimento dos seus trabalhos em astronomia, possibilitando assim importantes contribuições nesse ramo, a saber: "[...] a elaboração de um amplo catálogo de estrelas; a medida da duração do ano com grande exatidão (365,2467 dias contra 365,2422 dias segundo avaliações modernas); cálculo do ângulo de inclinação da eclíptica [...] com o plano do equador terrestre" (IEZZI, 2004, p. 37), além da "[...] descoberta da precessão dos equinócios" (fenômeno da astronomia que dar início a primavera e o outono) (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 136).

No entanto, é válido salientar que, como acontece com vários matemáticos da antiguidade, pouco se sabe sobre sua vida. Assim, conforme Roque e Pitombeira (2012, p. 136), o que se conhece sobre Hiparco de Nicéia é devido a Ptolomeu (séc. II d.C.), que cita vários dos resultados sobre trigonometria e astronomia, mencionando um tratado de 12 livros escritos por ele sobre cordas em círculos, que infelizmente se perderam com o tempo.

Ademais, o matemático Menelau de Alexandria (100 d.C.), como afirma Boyer (1974), fez contribuições relevantes tanto para o ramo da trigonometria quanto para a astronomia, tendo em vista que escreveu um tratado com seis livros que, por sua vez, tratava de *cordas num círculo* desenvolvendo, assim com maior rigor a trigonometria esférica. Entretanto, cerca de cinquenta anos depois, a trigonometria grega atingiu o seu apogeu com a brilhante obra de Cláudio Ptolomeu, chamada de *syntaxis matemática* ("*síntese matemática")*, uma coleção de treze livros sobre astronomia, que mais tarde foi chamada de *Almagesto* ("maior") pelos árabes.

Nessa obra apresentada, Ptolomeu "[...] coloca no centro do Universo a Terra, em torno da qual giram o Sol, a Lua e os cinco planetas então conhecidos, segundo uma concepção [...] para descrever o comportamento do sistema solar por quatorze séculos." (DOMINGUES. [s.d.] apud IEZZI, 2004, p. 37).

Para tanto, conforme menciona Boyer (1974, p. 68), este se utiliza dos resultados das tabelas de cordas calculada por Hiparco de Nicéia para o desenvolvimento desta célebre obra. Segundo Roque e Pitombeira (2012) as técnicas apresentadas e a forma como a trigonometria foi exposta no *Almajesto* foi padrão, até o renascimento.

Nesse sentido, Pereira (2011, p. 34) afirma que "Os gregos, os hindus e os árabes usaram linhas trigonométricas. Essas tiveram a forma de cordas num círculo." Os hindus trilharam um caminho diferente dos demais povos para o estudo da trigonometria, já que "Apesar do domínio do Almajesto, no final século IV começou a ser largamente utilizado um conjunto de textos matemáticos surgidos na Índia, com o título de Siddantha, que significa "*Sistemas de*

Astronomia" (PEREIRA, 2011, p. 34). Assim, "[...] o Siddantha usava uma trigonometria baseada na relação entre metade da corda e metade do ângulo central de uma circunferência." (PEREIRA, 2011, p. 34), utilizando uma linguagem de forma poética e sânscrita (uma das línguas oficiais da Índia).

Por fim, conforme apresentado, a trigonometria teve contribuições de vários povos, haja vista que "Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios." (BOYER, 1974, p. 116). Apresentados aspectos históricos relacionados à trigonometria, a próxima seção discorre sobre a abordagem desse conteúdo em documentos curriculares oficiais.

2.3.2 Ensino de trigonometria na perspectiva de documentos curriculares

O ensino de trigonometria é previsto nos documentos norteadores para o desenvolvimento da educação básica no país, destacando-se a BNCC (BRASIL, 2018) e o DC-GOEM (2021) referente a área da Matemática e suas Tecnologias. No entanto, é válido ressaltar que a BNCC foi o documento norteador dessa pesquisa.

A área de Matemática abordada na BNCC, no tangente aos conteúdos de trigonometria, não traz uma especificação de conteúdo, já que está organizada por competências específicas que, por sua vez, possuem habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos. Sendo assim, o que é evidenciado como conteúdos de trigonometria utilizados no 9° ano do Ensino Fundamental está relacionado a unidade temática Geometria: objetos de conhecimento, possuindo como uma das habilidades relações métricas no triângulo retângulo, que é um conceito prévio para a aprender trigonometria no círculo trigonométrico.

Nesse contexto, pensando na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel conforme Moreira (2011, p. 14), esta "[...] se caracteriza pela *interação* entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é *não-literal* e *não-arbitrária*. Assim, segundo Moreira (2011), os conhecimentos prévios (no caso as relações métricas no triângulo retângulo) adquirem maior estabilidade cognitiva, e a partir desse conhecimento os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito.

Por outro lado, no Ensino Médio, os conteúdos relacionados à trigonometria são propostos na organização curricular na Unidade Temática Geometria e Medidas, estando relacionados com as competências específicas 1 e 3 respectivamente:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da

> Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (BRASIL, 2018, p. 532).
>
> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).

As competências supracitadas possuem algumas habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, podendo a escola flexibilizar para o ano que considerar pertinente (seja ele: o primeiro ou terceiro ano), todavia, as que mais se aproximam do estudo relacionado ao ensino de trigonometria são:

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 532).
> (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (BRASIL, 2018, p.536).

De outra parte, o DC-GOEM (2021) referente a área da Matemática e suas Tecnologias está dividido em duas partes: a primeira contempla a formação geral básica, a qual "[...] está organizado a partir das competências e habilidades que constam na BNCC do Ensino Médio e por Objetivos de Aprendizagem (OA) [...]" (GOIÁS, p. 327), e a segunda constituída por Itinerários Formativos. Assim, nesse documento, a área da Matemática e suas Tecnologias no tangente ao ensino da trigonometria apresenta a seguinte estrutura:

Habilidade específica da BNCC:

> (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvam fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (GOIÁS, 2021, p. 365).

Objetivos de Aprendizagem, que por sua vez estão relacionados à habilidade da BNCC supracitada, a saber:

> (GO-EMMAT306A) Registrar, em listas, tabelas e outras informações contidas em situações problemas, mídias (internet, livros ou revistas) que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos etc.) identificando as características gráficas das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), para justificar os procedimentos utilizados nas soluções.
> (GO-EMMAT306B) Interpretar registros, dados e informações em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, comparando suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria para resolver problemas de natureza trigonométrica.

> (GO-EMMAT306C) Resolver problemas cotidianos que envolvem fenômenos periódicos reais, utilizando procedimentos matemáticos diversos para construir modelos de funções senos e cossenos e representá-las no plano cartesiano. (GOIÁS, 2021, p. 365).

E os Objetos de conhecimentos (conteúdos matemáticos), os quais estão descritos como: “Trigonometria no triângulo retângulo (principais razões trigonométricas). Trigonometria no ciclo trigonométrico. Unidades de medidas de ângulos (radianos). Funções trigonométricas (função seno e função cosseno)” (GOIÁS, 2021, p. 365).

No que concerne ao Itinerário Formativo, de acordo com o DC-GOEM (2021) detêm

> [...] o objetivo de contribuir para a formação integral dos/as estudantes, promovendo as dez competências gerais da educação básica e valores, tais como: ética, democracia, liberdade, justiça social, pluralidade, solidariedade, sustentabilidade, escolha, autonomia e acolhimento à diversidade (GOIÁS, 2021, p. 498).

Nessa perspectiva, os Itinerários Formativos referentes à área da Matemática e suas Tecnologias são: Imersão na Matemática Escolar: Conhecimentos Essenciais para o Desenvolvimento da Sociedade e a Matemática Escolar Aplicada ao Mercado de Trabalho. No entanto, é importante enfatizar que tais itinerários são compostos por eixos estruturantes, a saber: Investigação Científica, Projetos Criativos, Mediação e Intervenção Sociocultural e Empreendedorismo, que por sua vez possuem habilidades relacionadas as competências gerais da BNCC; Unidades Curriculares e dentro dessas unidades estão os módulos (relacionados aos conteúdos).

Nesse sentido, o Itinerário Formativo Imersão na Matemática Escolar: Conhecimentos Essenciais para o Desenvolvimento da Sociedade é o que contempla a parte da trigonometria, mais especificamente a Unidade Curricular: Trigonometria, a qual possuem a habilidade do Itinerário formativo, o eixo estruturante, a carga horária, objetos do conhecimento e as práticas sugeridas ao professor para o desenvolvimento da referida habilidade. Assim, podemos citar, por exemplo, algumas habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes no que concerne a trigonometria abordada no DC-GOEM (2021) conforme segue:

> [...] 2.3 Utilizar as relações trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente) do triângulo retângulo compreendendo as medidas e relações estabelecidas entre elas (o seno é o inverso do cosseno, por exemplo) para resolver problemas cotidianos.
> 2.4 Utilizar o teorema do ângulo interno em triângulos retângulos identificando os tipos de ângulos (reto, agudos, complementares etc.) para utilizar a tabela trigonométrica como suporte de cálculos das relações trigonométricas.
> 2.5 Utilizar a tabela trigonométrica como suporte de cálculos das relações trigonométricas identificando e relacionando as medidas de ângulos apresentados em triângulos com os valores correspondentes ao seno, cosseno e ou tangente para resolver problemas cotidianos.

> [...] 2.9 Determinar a medida de arcos de circunferência utilizando conceitos, procedimentos e estratégias diversas que relacionem a medida do ângulo e o raio dela para resolver problemas diversos.
> 2.10 Converter medidas angulares (grau, grado e radiano) utilizando relações de proporcionalidade para resolver problemas que envolvem contextos ligados à ângulos.
> 2.11 Compreender o círculo trigonométrico (sua estrutura, elementos e conceitos 820 envolvidos) verificando as relações que se estabelecem entre os ângulos, quadrantes, entre outros para determinar a medida de razões trigonométricas e visualizar informações essenciais da trigonometria.
> [...] 2.14 Selecionar e mobilizar recursos criativos relacionados à trigonometria no triângulo retângulo e/ou no círculo trigonométrico identificando os elementos, conceitos e características básicas para resolver problemas de natureza diversa, incluindo aqueles que permitam a produção de novos conhecimentos matemáticos, comunicando com precisão suas ações e reflexões relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como adequando-os às situações originais (GOIÁS, 2021, p. 820-821).

Diante do exposto, nesses documentos norteadores da educação básica no tangente ao ensino de trigonometria no país e no Estado de Goiás, pode-se inferir que na BNCC os conteúdos são abordados de forma muito geral, sem muita ênfase no detalhamento dos conteúdos, conforme evidenciado por meio das habilidades mencionadas, percebe-se que entre os conteúdos estão: função seno e cosseno e relações métricas no triângulo retângulo. No entanto, é válido enfatizar que em todo o documento o termo trigonometria sequer é citado.

Outrossim, no DC-GOEM referente à área da Matemática e suas Tecnologias os conteúdos há um detalhamento dos conteúdos bem como existe práticas sugeridas ao professor no sentido de desenvolver as habilidades relacionadas a BNCC. Portanto, é possível perceber que estes documentos não só dialogam entre si, mas o DC-GOEM (2021) referente a essa área funciona com um complemento a BNCC.

Por outro lado, Pereira (2011) assinala algumas dificuldades no ensino de trigonometria que influenciam para que o aprendizado deste conteúdo não seja tão efetivo utilizando o método tradicional de ensino, a saber:

> [...] Os relacionados ao currículo, merecendo destaque uma excessiva extensão dos conteúdos programáticos, bem como um fosso existente entre a abordagem dos conteúdos no ensino médio e os do ensino fundamental [..] voltado para um processo de seleção ao ensino superior constituído de questões voltadas a aplicação algorítmica de regras e fórmulas;
> [...] Aquelas relacionadas a formação dos alunos que em sua maioria apresentam pouco ou quase nenhum domínio dos conhecimentos prévios importantes para o estudo de trigonometria como o estudo da circunferência e de seus elementos, entre estes o de comprimento de arco; semelhança de triângulos, de simetria e, principalmente de um domínio de funções como uma relação entre grandezas e de suas representações;
> [...] a pouca afinidade dos professores com o conteúdo, seu desenvolvimento histórico e as suas aplicações contemporâneas em diversas áreas do conhecimento humano, fator proveniente tanto do estudo de trigonometria da educação básica, como a formação inicial, onde determinados conteúdos ou não são abordados ou são de forma não adequada para futuros professores [...] pois os temas são vistos como algo a ser aprendido, mas nunca como algo a ser ensinado (PEREIRA, 2011, p. 22-23).

O autor destaca que tais dificuldades podem se configurar como fatores que ocasionam desinteresse, desmotivação dos alunos para o aprendizado de conteúdos de trigonometria, tendo em vista que estes, em sua grande maioria, não conseguem relacionar a utilização dos conteúdos lecionados pelo professor com aplicações em seu cotidiano, levando a um "[...] ensino de trigonometria descontextualizado e sem significado para a maioria dos alunos [...]" (PEREIRA, 2011, p. 23).

Nesse sentido, Feijó (2018), citando Gur (2009), elenca em sua pesquisa cinco grupos de erros que os alunos enfrentam no estudo de trigonometria: "dados mal usados, interpretação equivocada da linguagem, inferências lógicas inválidas, definições distorcidas e erros técnicos/mecânicos" (GUR, 2009, p. 68 apud FEIJÓ, 2018, p. 18). O autor os classifica em três grupos de acordo com a raiz de tal erro, como se segue:

> [...] O grupo *conceito* engloba o erro relacionado ao objeto e/ou símbolo matemático. Contidos neles está a interpretação equivocada da linguagem, como por exemplo, quando o aluno não consegue identificar qual é a hipotenusa em um triângulo retângulo.
> [...] O grupo *processo* engloba o erro relacionado à capacidade de usar as operações. Contidos nele estão dados mal usados e erros técnicos e/ou mecânicos, como, por exemplo, quando o aluno não consegue indicar uma aproximação para sen θ, dado o valor de cos θ, na relação fundamental da trigonometria.
> [...] O grupo *procepto* engloba erro relacionado à capacidade de reconhecer um simbolismo como processo e conceito. Nele estão contidas as inferências lógicas inválidas e as definições distorcidas. Um exemplo de erro relacionado ao procepto é quando o aluno não consegue reconhecer que sen x é tanto uma função quanto um valor (FEIJÓ, 2018, p. 18-19).

Em geral, os alunos possuem essas dificuldades, segundo Feijó (2018), pois ao que parece existem problemas tanto pela maneira como é ensinada como pelo modo como se aprende a trigonometria. Quanto ao ensino,

> [..] existem evidências da formação incompleta e/ou inadequada dos professores de Matemática no que diz respeito à trigonometria, fazendo-se necessária a revisão e/ou reformulação do currículo dos cursos de formação[...] além de amplo acesso a cursos de formação continuada [...] (FEIJÓ, 2018, p. 19).

Assim, o autor destaca que é importante que o professor tenha domínio do conteúdo de trigonometria a ser abordado em sala, para que este conhecimento seja ensinado com maior clareza possível e procurando contextualizar com a realidade vivenciada pelos alunos. Contudo, se faz necessário que os alunos participem de forma ativa na construção desse conhecimento e tenham conhecimentos prévios indispensáveis interiorizados para o bom andamento do conteúdo ministrado.

Nessa perspectiva, pensando em minimizar um pouco essas dificuldades, é importante que o professor busque recursos didáticos e atividades que o auxiliem em sua prática docente, visando maior assimilação dos conteúdos ministrados. Como visto na seção 2.2, atividades lúdicas como os jogos matemáticos podem trazer alguns benefícios para o ensino de Matemática, uma vez que

> [...] a utilização do jogo como ferramenta de ensino em sala de aula pode estimular o espírito investigativo, a relação professor-aluno e a relação aluno-aluno, o respeito mútuo, a vontade de aprender e conhecer mais sobre algo novo, a criatividade e o prazer de estudar, desde que seja corretamente selecionado e aplicado (RODRIGUES, 2018, p. 37).

Nesse sentido, podem promover uma melhora também no ensino de trigonometria, haja vista que podem agregar o interesse pelas aulas e a motivação por parte dos alunos, já que serão mais dinâmicas, possibilitando ainda o trabalho em equipe, maior interação na relação aluno-professor e aluno-aluno, desenvolvimento da criatividade, raciocínio e construção ativa do próprio conhecimento. Sob esse ponto de vista, Selva e Camargo (2009) partilham desse pensamento quando asseveram que

> [...] o jogo é um processo, no qual o aluno necessita de conhecimentos prévios, interpretação de regras e raciocínio, o que representa constantes desafios, pois a cada nova jogada são abertos espaços para a elaboração de novas estratégias, desencadeando situações-problema que, ao serem resolvidas, permitem a evolução do pensamento abstrato para o conhecimento efetivo, construído durante a atividade (SELVA; CAMARGO, 2009, p. 5).

Por esse ângulo, os autores ressaltam que a utilização dos jogos é importante para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, a partir de conhecimentos prévios dos alunos, planejamento de estratégias que viabilizem ser o vencedor, além de permitir a disciplina, em virtude das regras a serem seguidas no decorrer do jogo, podendo ser uma ferramenta que os alunos possam construir conhecimentos mais elaborados e efetivos para o seu processo de ensino e aprendizagem.

Diante do exposto, é possível constatar a importância de se adotar os jogos como recurso didático, pois podem motivar e despertar o interesse pela trigonometria, considerando-se que esta será trabalhada e reforçada de maneira distinta do modelo tradicional de ensino.

No próximo capítulo discorremos acerca dos aspectos metodológicos da pesquisa.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa, quanto a sua natureza, segue uma abordagem do tipo qualitativa, pois "[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes" (BOGDAN; BIKLEN, 1982 apud LÜDKE; ANDRÉ, 2014, p. 14). Nessa perspectiva, tal pesquisa se caracteriza como teórica, pois conforme assegura Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 69), "[...] não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica".

Nesse sentido, utilizamos uma tendência na área de Educação Matemática, a saber: os jogos, considerada relevante no processo de ensino e aprendizagem nessa área do conhecimento aliado a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Este trabalho conta com um aporte teórico no que diz respeito aos pressupostos teóricos da teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel; uso dos jogos no ensino de Matemática (trigonometria) na perspectiva de documentos curriculares, breve histórico do surgimento da trigonometria bem como foi elaborada uma proposta de ensino por meio de uma sequência didática, na tentativa de viabilizar ao professor uma maneira de despertar o interesse e a motivação dos alunos pela trigonometria relacionada aos conceitos de seno, cosseno e tangente através dos jogos: baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos (ambos construídos pelo autor da pesquisa).

No tocante aos objetivos, a pesquisa é do tipo exploratória, pois "têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses." (GIL, 2002, p. 42). Ademais quanto aos procedimentos, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, com o intuito de buscar referenciais publicados em artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses relacionados a trabalhos com jogos e a teoria da aprendizagem significativa, a fim de justificar a relevância do tema. Nesse sentido, buscamos subsídios teóricos para a construção dos jogos propostos, visando contribuir para uma aprendizagem com significado dos alunos relacionado ao conteúdo de razões trigonométricas fundamentais.

Assim, os jogos mencionados foram construídos para fazer parte de uma sequência didática, isto é, "[...] um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito" (DOLZ; NOVERRAZ; SCHNEUWLY, 2004, p. 96). O que vai ao encontro do que afirma Zabala (1998, p. 18, grifos do autor) quando diz que sequências didáticas "[...] são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Nesse contexto, a sequência didática é uma ferramenta importante para nortear o trabalho do professor no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, visto que possibilita “[...] o estudo e a avaliação sob uma perspectiva processual, que inclua as fases de planejamento, aplicação e avaliação” (ZABALA, 1998, p. 18).

Diante do exposto, de modo geral, para a construção da proposta de ensino foram seguidas as etapas:

- Pesquisas, construção e análise das possibilidades dos jogos: baralho da trigonometria (Apêndice B) e o bingo dos senos-cossenos (Apêndice C). Nessa perspectiva, inicialmente foram elaborados os referidos jogos (Ilustração dos jogos construídos e da ampulheta constam nos Apêndices B e C). À medida que foram sendo construídos, buscamos identificar e analisar possibilidades de aprendizagem significativa de conceitos matemáticos explorados com os jogos, bem como as possibilidades pedagógicas relacionados ao desenvolvimento de competências e habilidades, conforme a BNCC.
- Construção de uma sequência didática, relacionada aos conceitos de seno, cosseno e tangente. É válido ressaltar que é essencial que o aluno possua conhecimentos prévios dos conceitos supracitados e algumas propriedades, como por exemplo, razões trigonométricas e ângulos (em radiano e graus), a fim de que se obtenha êxito na assimilação/reforço dos conteúdos abordados nos jogos.

Os jogos foram construídos dentro dos recursos possíveis.

Para a elaboração das cartas do jogo baralho da trigonometria propriamente dito foram necessários recursos didáticos e tecnológicos, seguindo os passos:

1. confecção das cartas usando o Editor de texto Microsoft Word 2019;
2. todas as cartas foram impressas em cores em papel A4;
3. as cartas foram recortadas com auxílio de tesouras/estilete;
4. colagem das cartas com cola bastão;
5. plastificação de todas das cartas.

Por outro lado, para a construção do jogo bingo dos senos-cossenos foram utilizados:

1. editor de texto Microsoft Word 2019 para a construção do círculo trigonométrico e das cartelas do jogo e da tabela auxiliar de ângulos;
2. impressão dos círculos em cores e das cartelas em papel A4;

3. régua graduada;
4. material para plastificação do círculo e das cartelas;
5. tampas de garrafa pet (pedras do bingo);
6. garrafa pet (confecção do globo), ampulheta para medicação do tempo de jogada (construída pelo autor) e varetas para auxiliar nas simetrias.

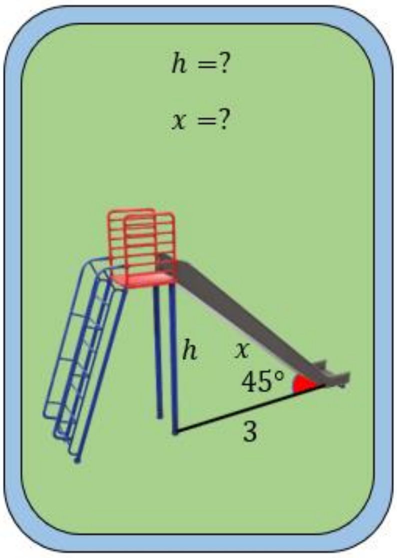
Foi necessário, ainda, a utilização do Power Point (para a explicação e exemplos de jogos que podem ser feitos no decorrer do jogo baralho da trigonometria e de como se joga o bingo dos senos-cossenos), lousa ou quadro, giz ou pincel (para eventual aula expositiva acerca do conteúdo abordado nos jogos ou de conhecimentos prévios necessários para o seu desenrolar).

Relativamente à sequência didática, esta contempla duas descrições de atividades:

A primeira descrição da sequência de atividades consiste na abordagem de conteúdo em dois exercícios retirados das cartas do jogo baralho da trigonometria (idealizado e elaborado pelo autor dessa pesquisa), aplicação e apresentação de suas regras.

Esse jogo possui sessenta (60) cartas, que por sua vez, são divididas em vinte (20) cartas perguntas (Figura 4) e quarenta (40) cartas respostas (Figura 5), cujo objetivo é reforçar de forma lúdica a compreensão do conteúdo de razões trigonométricas fundamentais: seno, cosseno e tangente por parte do aluno. Foi desenvolvido para ser usado na 2ª série do Ensino Médio ou em turmas que o professor considerar pertinente.

Figura 4 - Carta pergunta do baralho.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 5 - Carta resposta do baralho.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Todavia, é necessário levar em consideração que as figuras usadas para ilustrar esses conceitos devem possuir um valor didático (isto é, no caso das cartas do baralho com ilustração em 3D de figuras de casa, avião, bola, por exemplo, podem se configurar como um instrumento que facilita a apreensão dos conceitos, haja vista que possuem relações com o cotidiano dos alunos) compatível com o conhecimento matemático do educando, para que este se torne um reforço de aprendizagem do conteúdo abordado, visto que as imagens podem funcionar como um aparato para a melhor apreensão dos conteúdos. De fato, conforme afirmam Jorge, Pires e Trajano (2020, p. 6), a "[...] junção entre texto e imagem não deve ocorrer de forma aleatória. As imagens do material educacional precisam ter valor didático e estar de acordo com a carga cognitiva do educando".

A segunda descrição da sequência de atividades apresenta uma abordagem de conteúdo em três maneiras de jogar por meio de situações de jogo bem como discorremos acerca da aplicação e regras do jogo bingo dos senos-cossenos.

Esse jogo é constituído por vinte e oito (28) números reais (pedras do bingo):

$$-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1;$$

$$0 \text{ rad}, \frac{\pi}{6}\text{ rad}, \frac{\pi}{4}\text{ rad}, \frac{\pi}{3}\text{ rad}, \frac{\pi}{2}\text{ rad}, \frac{2\pi}{3}\text{ rad}, \frac{3\pi}{4}\text{ rad}, \frac{5\pi}{6}\text{ rad}, \pi \text{ rad}, 2\pi \text{ rad};$$

$$-\frac{\pi}{6}\text{ rad}, -\frac{\pi}{4}\text{ rad}, -\frac{\pi}{3}\text{ rad}, -\frac{\pi}{2}\text{ rad}, -\frac{2\pi}{3}\text{ rad}, -\frac{3\pi}{4}\text{ rad}, -\frac{5\pi}{6}\text{ rad}, -\pi \text{ rad}, -2\pi \text{ rad};$$

vinte (20) cartelas compostas de razões trigonométricas (cosseno e seno) e números reais, vinte (20) círculos trigonométricos, sessenta (60) varetas de cores distintas, a saber: verde (simetria em relação ao eixo horizontal), azul (simetria em relação ao centro) e vermelho (simetria em relação ao eixo vertical). Contudo, é valido frisar que esta quantidade de cartelas não consta no Apêndice C, haja vista que fizemos apenas dois modelos de cartelas para a 2ª e 3ª maneira de jogar.

O objetivo desse jogo é formalizar/reforçar de forma lúdica o conteúdo razões trigonométricas: seno e cosseno utilizando o círculo trigonométrico para fazer as simetrias e/ou reduções dos cálculos de ângulos em radiano dos quadrantes 2º, 3º e 4º para o 1º quadrante do referido círculo. Nesse sentido, foi desenvolvido para ser usado em turmas da 2ª série do Ensino Médio ou até mesmo no Ensino Superior, se o professor julgar pertinente.

Apresentadas as características iniciais dos jogos, no próximo capítulo será apresentada a proposta de ensino (Sequência Didática).

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 Reforçando/assimilando o conteúdo de razões trigonométricas fundamentais através dos jogos baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos.

Estrutura curricular

Etapa de ensino/Série

Ensino Médio/2ª Série.

Área

Matemática.

Unidade Temática (BNCC)

Geometria e Medidas;

Números e Álgebra.

Objetos de Conhecimento (BNCC)

Razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo;

Círculo trigonométrico;

Ângulos em radianos e graus;

Conversão de ângulos;

Noção de isometrias (translação, reflexão, rotação e composições destas).

Habilidades (BNCC)

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Objetivos/Expectativas de Aprendizagem

Determinar o sinal do seno e do cosseno em cada quadrante;

Resolver problemas relacionados a razões trigonométricas fundamentais no triângulo retângulo;

Calcular o seno e o cosseno de 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º, 270º e de seus arcos côngruos (analogamente para as medidas em radianos);

Compreender os conceitos de seno e cosseno para arcos trigonométricos não agudos;

Relacionar as medidas, em graus ou radianos, associadas a pontos no círculo trigonométrico, simétricos em relação aos eixos do seno (eixo vertical), ao eixo do cosseno (eixo horizontal) ou à origem do sistema cartesiano;

Fazer redução ao 1º quadrante de números reais pertencentes aos 2º, 3º e 4º quadrantes utilizando as simetrias em relação aos eixos: vertical, horizontal e ao centro no círculo trigonométrico;

Reforçar os conteúdos de razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) de forma lúdica por meio dos jogos baralho da trigonometria e o bingo dos senos-cossenos;

Promover o desenvolvimento de habilidades dos alunos, tais como: fixar conceitos, socialização, estimular o raciocínio, criatividade, disciplina, respeito mútuo e trabalho em grupo com os jogos propostos.

Duração das Atividades

10 aulas com duração de 50 minutos cada.

Conteúdos trabalhados previamente pelo professor com aluno

Para o desenvolvimento das aulas, faz-se necessário que o professor tenha previamente ministrado conteúdos (ou que os alunos já tenham estudado) considerados primordiais acerca do círculo trigonométrico, de simetria dos pontos no círculo trigonométrico, arcos côngruos, conversão de ângulos em graus para radiano e vice-versa, das relações métricas, definições de hipotenusa e catetos (cateto oposto e cateto adjacente aos ângulos agudos) em um triângulo retângulo, assim como de suas medidas ($a, b, c,$ respectivamente hipotenusa e catetos) por meio do Teorema Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) e das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e suas relações.

É válido salientar que o professor pode reforçar tais conteúdos de Matemática de forma lúdica utilizando para tanto a metodologia dos jogos.

Estratégias de ensino e recursos educacionais

A metodologia dos jogos como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática pode se configurar em uma boa alternativa para agregar maior interesse e motivação dos alunos pelas aulas, dado que "[...] o jogo pode fixar conceitos, motivar os alunos, propiciar a solidariedade entre os colegas, desenvolver o senso crítico e criativo, estimular o raciocínio, descobrir novos conceitos" (ALVES, 2001, p. 24).

Sob este ponto de vista, a metodologia dos jogos aliada à teoria da aprendizagem significativa ausubeliana, a qual leva em conta a "[...] Aquisição de novos significados; pressupõe a existência de conceitos e proposições relevantes na estrutura cognitiva, uma predisposição para aprender e uma tarefa de aprendizagem potencialmente significativa" (MASINI; MOREIRA, 2017, p. 81). Nesse sentido, pode desencadear uma aprendizagem com significado para o aprendiz, em virtude de levar em consideração os conhecimentos prévios do aluno relacionáveis com a estrutura cognitiva para que o aluno consiga adquirir novos significados acerca de um determinado conteúdo.

É válido ressaltar que para o desenrolar desse trabalho são necessários, por exemplo, dos conhecimentos prévios de: ângulos (em radianos e graus), de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180 graus, Teorema de Pitágoras, de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em um triângulo retângulo e no círculo trigonométrico.

Nessa perspectiva, com os jogos os alunos podem relacionar, por exemplo, as cartas do baralho da trigonometria com sua vivência cotidiana, haja vista que existem cartas relacionadas a objetos, tais como: casa, avião, emoji, bola, cadeira.

Nesse contexto, pressupõe-se o desenvolvimento das competências 1 e 5 relacionadas às habilidades (EM13MAT105) e (EM13MAT308) respectivamente no que tange a BNCC da Matemática para o Ensino Médio. Para tanto, nessa sequência didática foram abordados dois jogos construídos pelo autor, a saber: baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos, utilizando o conteúdo de razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente).

O primeiro (baralho) contempla cartas com a formalização Matemática (figuras bidimensionais) bem como cartas que possuem aplicações dos conteúdos abordados no jogo (figuras com representação de objetos tridimensionais) e o outro consiste em um bingo (jogo de raciocínio) utilizando razões seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Para a elaboração dos jogos supracitados, foram necessários materiais e recursos didáticos e tecnológicos, tais como: para as cartas do baralho, o círculo trigonométrico e cartelas do bingo utilizamos o Editor de texto Microsoft Word 2019; todas as cartas, o círculo trigonométrico e cartelas foram impressos em cores em papel A4 bem como para as cartas e as cartelas foram cortadas com auxílio de tesouras; régua graduada; cola bastão e material para a plastificação das cartas do baralho, do círculo trigonométrico e das cartelas do bingo e uma ampulheta (para marcar o tempo de jogada no decorrer do jogo).

Nesse contínuo, é importante salientar que o professor precisa possuir conhecimento dos pressupostos teóricos da teoria da aprendizagem significativa, conforme mencionado na seção 2.1, se faz necessário considerar alguns aspectos importantes, tais como: que a aprendizagem ocorra de forma não-literal e não-arbitrária, exista um conhecimento prévio, a estrutura cognitiva do aprendiz, o material deve ser potencialmente significativo assim como existir uma predisposição do aluno para aprender, a fim de que o professor consiga orientar os alunos no decorrer desse processo de aprendizagem bem como ser cauteloso quanto a quantidade de alunos na turma e os objetivos a serem alcançados com os jogos propostos para que não sejam apenas uma distração.

Descrição da sequência de atividades

1ª etapa – Abordagem de conteúdo em exercícios retirados do jogo baralho da trigonometria, aplicação e regras desse jogo.

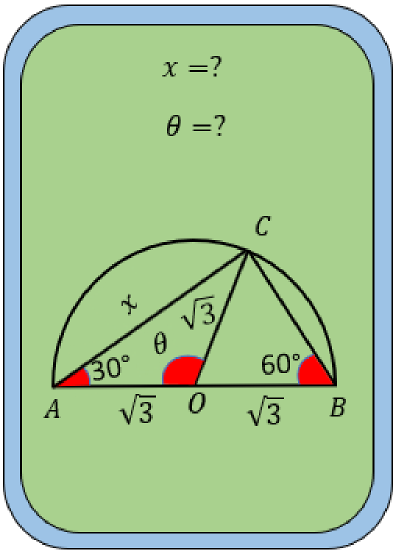
Nessa etapa inicial, é fundamental que o professor faça uma revisão dos conteúdos: Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, para então chegar ao conteúdo de razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo, que é o foco do jogo baralho da trigonometria.

Nesse sentido, o professor poderá utilizar o material de sua preferência, o livro didático, um resumo para trabalhar os conteúdos abordados nos jogos descrito no apêndice A ou o jogo propriamente dito para ensinar o conteúdo razões trigonométricas, funcionando nesse caso como material de didático. Para tanto, poderá dispor de 4 (quatro) aulas de 50 minutos cada com aulas expositivas dialogadas, em sala de aula (presencial) usando o método tradicional de ensino, assim como na oportunidade este mencionará sobre o uso de jogos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Nesse sentido, é relevante que o professor veja os exercícios 1 e 2 (retirados do jogo baralho da trigonometria) propostos pelo autor dessa sequência didática acerca desses conteúdos tanto formais quanto aplicações e nesse contexto colocá-los como atividades para os alunos irem tendo contato e terem a oportunidade de observar como ocorre a abordagem dos conteúdos no referido jogo.

Exercício 1. Seja ABC um triângulo retângulo em C como na Figura 6. Calcule os valores de x e θ.

Figura 6 - Carta do baralho da trigonometria do exercício 1.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Orientações ao professor quanto a abordagem de conteúdos para resolver o exercício 1.

1. No primeiro momento é interessante que o professor explore com os alunos os conteúdos que podem ser abordados nessa carta do jogo baralho da trigonometria, a saber: Teorema de Pitágoras, triângulo isósceles, triângulo equilátero, soma dos ângulos internos de um triângulo que equivale a 180°, ângulos suplementares (quando soma de dois ângulos equivale a 180°). É de suma importância que os alunos estejam cientes de tais definições, haja vista que funcionam como conhecimentos prévios (subsunçores) para o desenrolar da solução desse exercício;
2. É interessante o professor começar explicando que o triângulo ABC é de fato retângulo em C e recordar aos alunos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo equivale a 180 graus;
3. Nessa etapa, o professor deve trabalhar as características de um triângulo retângulo, tais como: hipotenusa, catetos e ângulo de medida 90 graus;

4. O professor pode ainda explorar da carta do jogo baralho proposta nesse exercício dois tipos de triângulos que estão presentes, a saber: triângulo isósceles BCO de base BC e o triângulo equilátero BCO. Neste caso, o professor pode abordar a definição de triângulos isósceles e, em seguida, usar a propriedade da soma de ângulo interno de triângulo para verificar que o triângulo BCO é de fato equilátero;
5. Nesse momento é de suma importância que o professor explore a diferença entre triângulo isósceles e equilátero para explicar que todo triângulo equilátero é isósceles (mas nem todo triângulo isósceles é equilátero), podendo ainda trabalhar o conceito de ângulo suplementar;
6. Por fim, após abordar os conteúdos mencionados anteriormente o professor pode introduzir o conceito de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), podendo iniciar identificando no triângulo retângulo, a hipotenusa, os catetos (oposto e adjacente ao ângulo) e, em seguida, fazer a aplicação da razão trigonométrica conveniente para chegar à resposta desse exercício.

Relacionando esse exercício à teoria da aprendizagem significativa de Ausubel podemos observar que os conteúdos: soma dos ângulos internos de qualquer triângulo equivale a 180 graus, Teorema de Pitágoras, triângulo retângulo (hipotenusa, catetos e ângulo de medida de 90 graus), triângulo isósceles, triângulo equilátero equivalem a subsunçores, isto é, os conhecimentos prévios necessários para que o exercício seja resolvido.

Ademais, a partir das interações desses conteúdos abordados no jogo com os que os alunos já possuem acerca desses conceitos (interações não-arbitrária e não-literal), o professor pode trabalhar com os alunos para que estes consigam incorporar tais conceitos a partir dos vários contatos que esses terão e, assim, tais conhecimentos vão ficando mais claros, ricos e organizados na estrutura cognitiva até certo ponto que passam a funcionar como subsunçores, sendo conhecimentos prévios relevantes para os conteúdos subsequentes razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

Quanto à sua classificação, segundo essa teoria, o Exercício 1 é do tipo conceitual, haja vista que explora conhecimentos como, por exemplo, o conceito de triângulo é expandido, no sentido de o aluno perceber que existe uma caracterização para triângulos (isósceles, equilátero e retângulo).

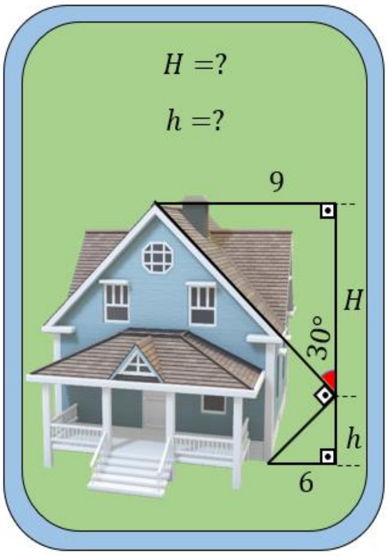
Ao observar a carta do exercício 1 o professor poderá observar os processos da teoria da aprendizagem significativa referentes à diferenciação progressiva, a partir do momento que aluno consegue atribuir um novo significado para o conteúdo, por exemplo, buscar em seus conhecimentos prévios que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulos é 180 graus, este vai assimilando o porquê do triângulo ser retângulo em C e, a partir disso, poderá relembrar os conceitos necessários e assim conseguindo distinguir os conceitos e eliminando lacunas antes incompreendidas chegando, a reconciliação integradora.

Por fim, nessas condições esse material poderá se configurar como potencialmente significativo (no caso o jogo), todavia, a predisposição do aluno para aprender dependerá em grande parte se o estudante vai se interessar pelo jogo proposto.

Proposta de solução do exercício 1 (Apêndice A).

Exercício 2. Calcule a altura da casa $(H + h)$ ilustrada na Figura 7.

Figura 7 - Carta do baralho da trigonometria do exercício 2.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Orientações ao professor quanto a abordagem de conteúdos para resolver o exercício 2.

1. No primeiro momento o professor deve enfatizar a matemática no cotidiano dos alunos, explorando as formas geométricas apresentadas no desenho da carta (casa). Assim, o professor pode explorar os conhecimentos prévios que os alunos possuem (ou pelos menos deveriam saber), tais como: Teorema de Pitágoras, que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$, e que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes desse triângulo.
2. O professor pode começar denominando por letras maiúsculas do alfabeto os vértices dos dois triângulos contidos na carta e explorar o conceito de triângulo retângulo (ângulo de 90 graus, hipotenusa e os catetos).

3. Em seguida, o professor pode encorajar ou incentivar o aluno para que este observe as informações que a carta possui. Nesse momento também o professor pode trabalhar outro conhecimento prévio dos alunos: o conceito de ângulo suplementar para então introduzir a definição de ângulo interno de um triângulo.
4. Após essas abordagens, o professor pode promover uma interação desses conceitos para recordar o conceito de semelhança de triângulos.
5. Nesse momento, o aluno já adquiriu informações importantes para compreender um novo conceito, que são as relações métricas no triângulo retângulo, que por sua vez é de suma importância para a compreensão das razões trigonométricas fundamentais (foco desse exercício).
6. Por fim, diante das explorações feitas dos conceitos: triângulo retângulo, ângulo suplementar, semelhança de triângulo, soma de ângulo interno de um triângulo e relações métricas, aluno possui informações suficientes para compreender as razões trigonométricas, a fim de aplicar tais razões e resolver o exercício 2 retirado do jogo baralho proposto.

Correlacionando esse exercício à teoria da aprendizagem significativa é possível perceber que os conteúdos: soma dos ângulos internos de qualquer triângulo equivale a 180°, ângulo externo de um triângulo, Teorema de Pitágoras, ângulo suplementar e semelhança de triângulos poderão funcionar como os subsunçores importantes para resolver o referido exercício.

No entanto, é importante observar que a respectiva SD não foi aplicada na prática, devido à pandemia de COVID-19, mas o referido jogo foi testado pelo autor, em que foi possível identificar possibilidades de relacionar o ensino por meio deste com alguns pressupostos da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Desse modo, foi possível identificar situações durante o jogo a partir das quais presumimos que as interações dos subsunçores supracitados com os conceitos matemáticos contidos na carta, como, por exemplo, as formas geométricas da casa (interação substantiva e não-arbitrária), possibilitarão ao professor explorar, dialogando com o aluno, conceitos novos, tais como relações métricas no triângulo retângulo e razões trigonométricas fundamentais.

Nesse sentido, a partir dessas sucessivas interações, temos a expectativa de que os conhecimentos poderão tornar-se mais consistentes, estáveis e com significado para o aluno (diferenciação progressiva) e, a partir da reorganização e compreensão desses conceitos, possam ir sendo incorporados na estrutura cognitiva do aluno como subsunçores.

Além disso, segundo essa teoria, presumimos que esse exercício poderá ser caracterizado como conceitual e proposicional, visto que conforme acontecem as interações entre os subsunçores, o professor poderá ir abordando novos conhecimentos, como, por exemplo, quando explora os conceitos: ângulo suplementar, soma dos ângulos internos de um triângulo, o aluno vai adquirindo conhecimentos até chegar ao conteúdo de relações métricas, semelhança de triângulo e, por fim, razão trigonométrica. Tais asserções poderão ser reafirmadas ou repensadas a partir de uma futura experiência efetiva do autor dessa pesquisa, aplicando os jogos com alunos em uma escola.

Proposta de solução do exercício 2 (Apêndice A).

Relativamente aos dois exercícios supracitados, optamos por recorrer às cartas do baralho da trigonometria proposto no trabalho, haja vista que este possui cartas com a formalização Matemática da trigonometria assim como aplicações referentes a esse ramo tão importante da matemática.

Nesse contexto, é importante que o professor como mediador de conhecimentos possa mostrar a utilização de tais conceitos no cotidiano dos alunos, a fim de que estes consigam associar essas aplicações dos conceitos de Matemática em suas vivências cotidianas, visando uma aprendizagem com significado.

Aplicação do jogo baralho da trigonometria

O jogo baralho da trigonometria foi idealizado e construído pelo autor desse trabalho tomando como referência algumas regras do jogo de baralho denominado pife[10]. Esse jogo foi pensado para ser utilizado na 2ª série do Ensino médio ou em turmas que o professor julgar pertinente em uma (1) aula com duração de 50 minutos, na tentativa de aprimorar/reforçar a compreensão do conceito de razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) por parte dos alunos.

Por outro, o professor pode adequar esse jogo para o 9º ano do Ensino Fundamental, por exemplo, e nesse caso o objetivo passa a ser desenvolver o conteúdo razões trigonométricas fundamentais no triângulo retângulo possuindo o jogo baralho da trigonometria como ferramenta auxiliar para o ensino de triângulos: equilátero e isósceles. Ademais, caso o

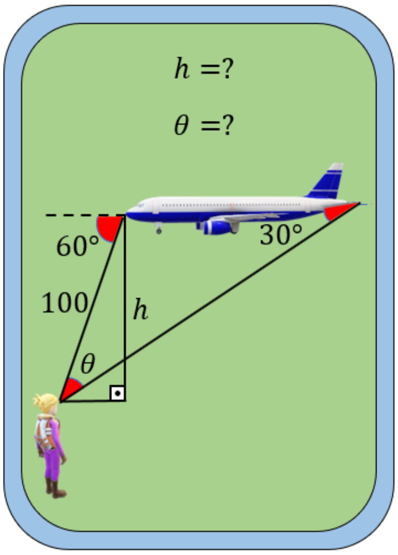
[10] Em diversas localidades da região Nordeste do país o jogo pife é bem conhecido.

professor que queira adaptar a 3ª série do Ensino Médio, por exemplo, este jogo poderá funcionar como motivador para o aluno entender a definição de seno, cosseno e tangente.

No que concerne a quantidade de alunos em sala de aula, o ideal é que seja no máximo vinte (20) alunos pensando em quatro (4) jogos para aplicação, caso exceda essa quantidade o professor pode optar por fazer rodízio dos participantes, ou estes jogarem uma dupla de jogadores contra outra dupla de jogadores.

O jogo baralho da trigonometria possui sessenta (60) cartas, que por sua vez são divididas em: vinte (20) cartas perguntas (Figura 8) e quarenta (40) cartas respostas (Figura 9). Esse jogo pode ser jogado por no mínimo dois (2) e no máximo (4) jogadores visando uma melhor distribuição das cartas. Inicialmente deve-se escolher o jogador que irá distribuir as cartas, este deve dividir as cartas em dois acervos: cartas perguntas e cartas respostas, embaralhá-las e em seguida fazer a distribuição.

Figura 8 - Carta pergunta do baralho.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 9 - Carta resposta do baralho.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

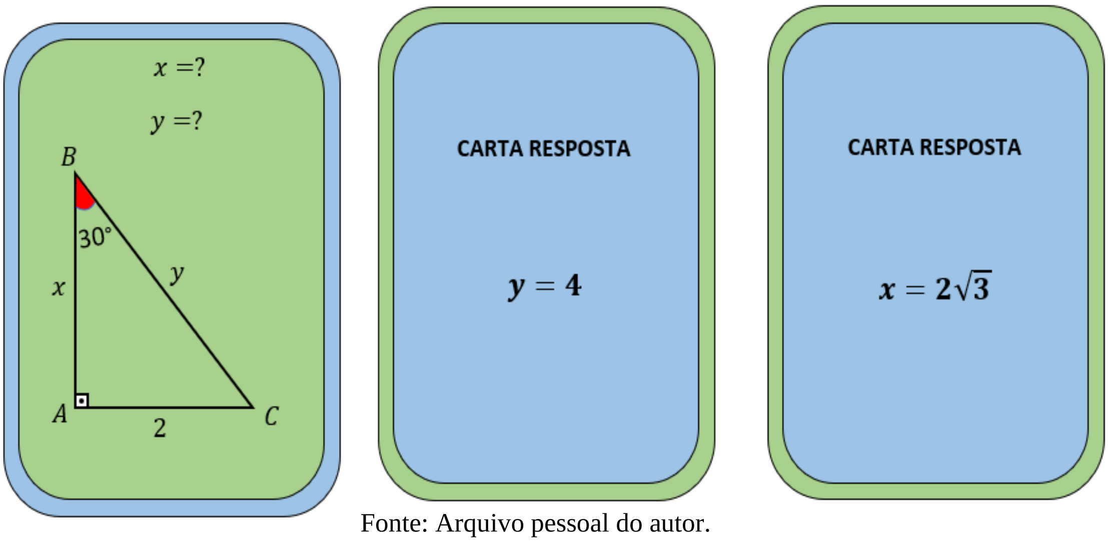
Essa proposta aborda os conceitos de seno, cosseno e tangente de forma lúdica e possui como objetivo reforçar tais conceitos por meio de perguntas relacionadas tanto a formalização quanto a aplicações de Matemática, a fim de que os alunos possam vislumbrar aplicações e compreender esses conceitos de forma que adquiram significado para sua aprendizagem.

O jogador que conseguir formar três jogos será o vencedor da partida, haja vista que o jogo consistirá de 4 partidas para que haja um vencedor do jogo. Nesse sentido, não necessariamente o vencedor da partida será o vencedor do jogo, isto é, cada jogo formado na partida equivale um (1) ponto para o jogador. Sendo assim, o vencedor da partida obterá três (3) pontos e os demais pontuarão conforme a quantidade de jogos formados.

Essa pontuação dos jogos formados em cada partida foi inserida a fim de que este jogo se torne mais dinâmico e competitivo, além de permitir que cada jogador tenha mais chances para ser o vencedor do jogo. Em caso de empate ao final do jogo, o vencedor será aquele que obtiver a maior quantidade de vitórias nas partidas, caso o empate persista, o vencedor do jogo será o jogador que obteve a primeira vitória no jogo.

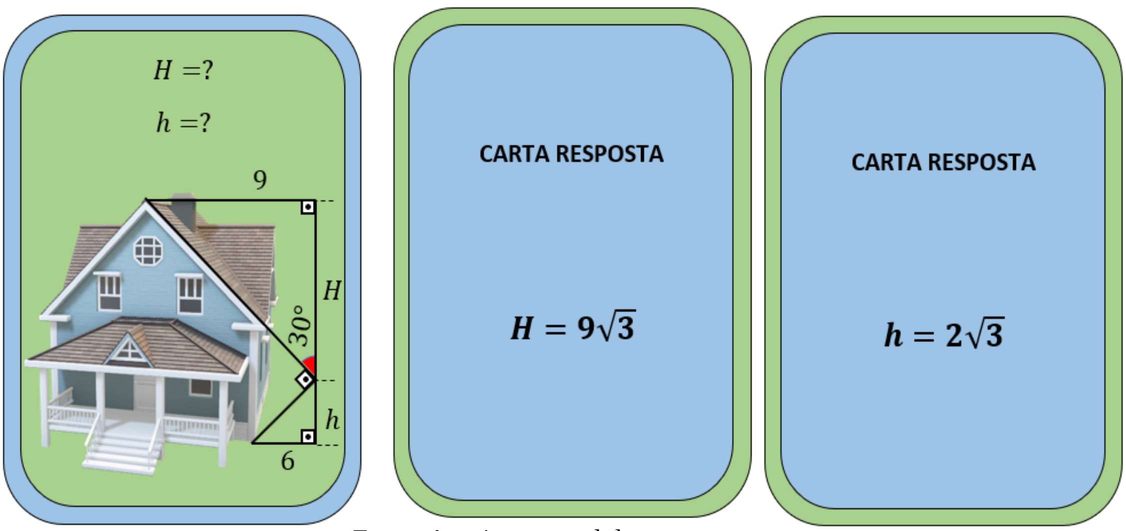
A formação de cada jogo ocorrerá da seguinte maneira: uma carta pergunta + duas cartas respostas correspondentes, formando assim trinca. Quando o jogador estiver com duas trincas formadas e for formar a terceira trinca, este pode "bater" na carta descartada no acervo por qualquer um dos jogadores, porém deve falar a palavra "TRIGONOU"; caso contrário só lhe restará uma possibilidade de vencer a partida, se encontrar a carta correspondente no acervo das cartas de entrada. As Figuras 10 e 11 apresentam uma ilustração de formação dos jogos para melhor entendimento.

Figura 10 - Jogo envolvendo a formalização matemática.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 11 - Jogo com aplicação da matemática no cotidiano.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Cada jogador deve receber três (3) cartas perguntas e seis (6) cartas respostas uma a uma respectivamente, totalizando nove (9) cartas, lembrando que o jogador distribuidor deve ser o último a receber as cartas. É importante ressaltar que cada carta pergunta possui duas (2) cartas respostas e que tanto o jogo quanto a distribuição devem obedecer ao sentido anti-horário, isto é, da esquerda para a direita de cada jogador e cada jogador deve jogar na sua vez.

A sobra dos acervos (cartas perguntas e cartas respostas) do baralho deve ser deixada sobre a mesa com as faces voltadas para baixo. O jogador que iniciar o jogo deve pegar uma carta no acervo que desejar, todavia, deve ser descartada uma carta referente ao mesmo acervo que este pegou a carta para que o jogo inicie. Após o descarte o jogador subsequente tem duas possibilidades: pegar a carta, se esta lhe servir, ou pegar uma carta no acervo que for conveniente para a formação do jogo.

É interessante salientar que com relação à carta descartada na rodada os demais jogadores podem solicitá-la, ficando assim, como uma carta em espera, desde que os jogadores anteriores a ele não a queiram. No entanto, se o jogador antecedente descartar uma carta mais conveniente do que a carta em espera o jogador pode trocar a carta que desejar sem objeção.

2ª etapa – Abordagem de conteúdo em três maneiras de jogar por meio de situações de jogo, aplicação e regras do jogo bingo dos senos-cossenos.

Nessa etapa é imprescindível que o professor faça uma revisão sobre o círculo trigonométrico, mais especificante sobre simetrias (reflexão, translação e rotação), razões trigonométricas no círculo e soma ou diferença de dois arcos para os alunos, tendo em vista que a compreensão destes conceitos é de suma importância para o desenvolvimento do jogo bingo dos senos-cossenos.

Nesse sentido, o professor poderá utilizar o material de sua preferência, o livro didático, um resumo para trabalhar os conteúdos abordados nesse jogo, descritos no Apêndice A. Para tanto, poderá dispor de quatro (4) aulas expositivas dialogadas de 50 minutos cada em sala de aula (presencial) usando o método tradicional de ensino, bem como selecionar vídeo aulas no you tube sobre os tópicos de revisão e colocar para os alunos assistem ou ainda trabalhar essa revisão utilizando o software geogebra.

Aplicação do jogo bingo dos senos-cossenos

O jogo bingo dos senos-cossenos foi construído pelo autor dessa sequência didática e detêm como objetivo formalizar/reforçar de forma lúdica os conceitos das razões trigonométricas (seno e cosseno) utilizando o círculo trigonométrico. Nesse contexto, a partir do momento em que são usados os elementos que compõem o jogo bingo, tais como: o círculo trigonométrico, as varetas e as situações de jogo para explicar os conteúdos citados este funcionarão como material didático e não apenas como reforço de conteúdos. Esse é um jogo de raciocínio, cujo objetivo é formalizar/reforçar de forma lúdica o conteúdo razões trigonométricas: seno e cosseno utilizando o círculo trigonométrico para fazer as simetrias e/ou reduções dos cálculos de ângulos em radiano dos quadrantes 2º, 3º e 4º para o 1º quadrante do referido círculo. Ademais, foi desenvolvido para ser usado em turmas da 2ª série do Ensino Médio ou até mesmo no Ensino Superior, se o professor julgar pertinente.

Relativamente à quantidade de alunos em sala de aula, o ideal é que seja vinte (20) alunos jogando pensando em um bingo. Caso exceda essa quantidade, o professor pode optar em dobrar o número de cartelas, quantidade de círculos trigonométricos, varetas, ou colocar os participantes para jogarem em duplas. Para tanto, poderá dispor de uma (1) aula de 50 minutos para aplicação desse jogo.

Esse jogo é constituído por vinte e sete (28) números reais (pedras do bingo), a saber:

$$-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1;$$

$$0 \text{ rad}, \frac{\pi}{6}\text{rad}, \frac{\pi}{4}\text{rad}, \frac{\pi}{3}\text{rad}, \frac{\pi}{2}\text{rad}, \frac{2\pi}{3}\text{rad}, \frac{3\pi}{4}\text{rad}, \frac{5\pi}{6}\text{rad}, \pi \text{ rad}, 2\pi \text{ rad};$$

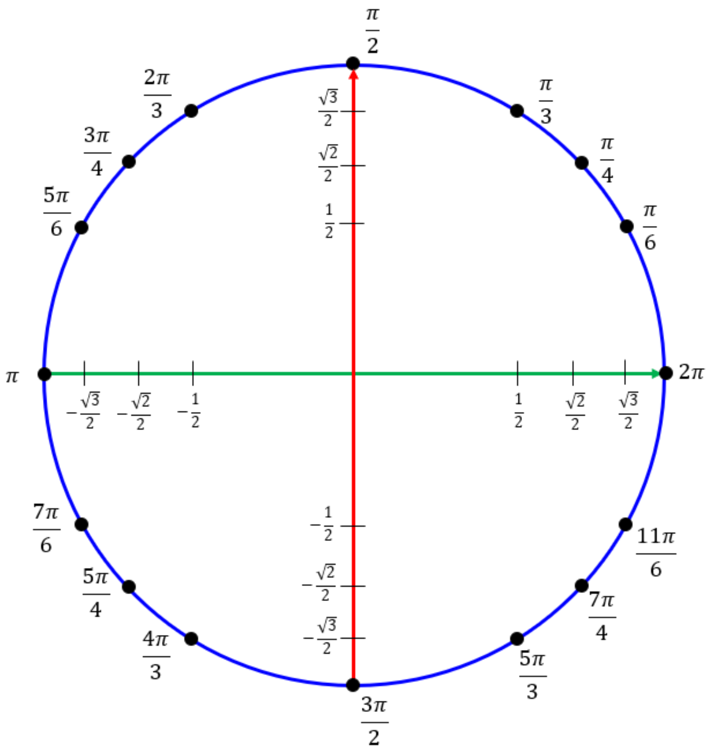
$$-\frac{\pi}{6}\text{rad}, -\frac{\pi}{4}\text{rad}, -\frac{\pi}{3}\text{rad}, -\frac{\pi}{2}\text{rad}, -\frac{2\pi}{3}\text{rad}, -\frac{3\pi}{4}\text{rad}, -\frac{5\pi}{6}\text{rad}, -\pi \text{ rad}, -2\pi \text{ rad};$$

vinte (20) cartelas compostas de razões trigonométricas (cosseno e seno) e números reais, vinte (20) círculos trigonométricos, sessenta (60) varetas distribuídas em três cores distintas, a saber: verde (simetria em relação ao eixo horizontal), azul (simetria em relação ao centro) e vermelho (simetria em relação ao eixo vertical).

Cada jogador receberá: uma cartela, três varetas e um círculo trigonométrico para se orientarem quanto às simetrias em relação ao eixo vertical (eixo do seno), ao eixo horizontal (eixo do cosseno) e ao centro do círculo no decorrer do jogo. Vence o jogo aquele jogador que preencher toda a sua cartela primeiro, podendo o jogo possuir um ou mais vencedores.

O círculo trigonométrico elaborado possui dois eixos perpendiculares cruzando-se no centro do círculo e orientados conforme a Figura 12, na qual foram marcados 16 números reais.

Figura 12 - Círculo trigonométrico de raio 1 para o jogo bingo dos senos-cossenos.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Os dois eixos dividem o círculo trigonométrico em quatro partes iguais denominadas quadrantes. Note que:

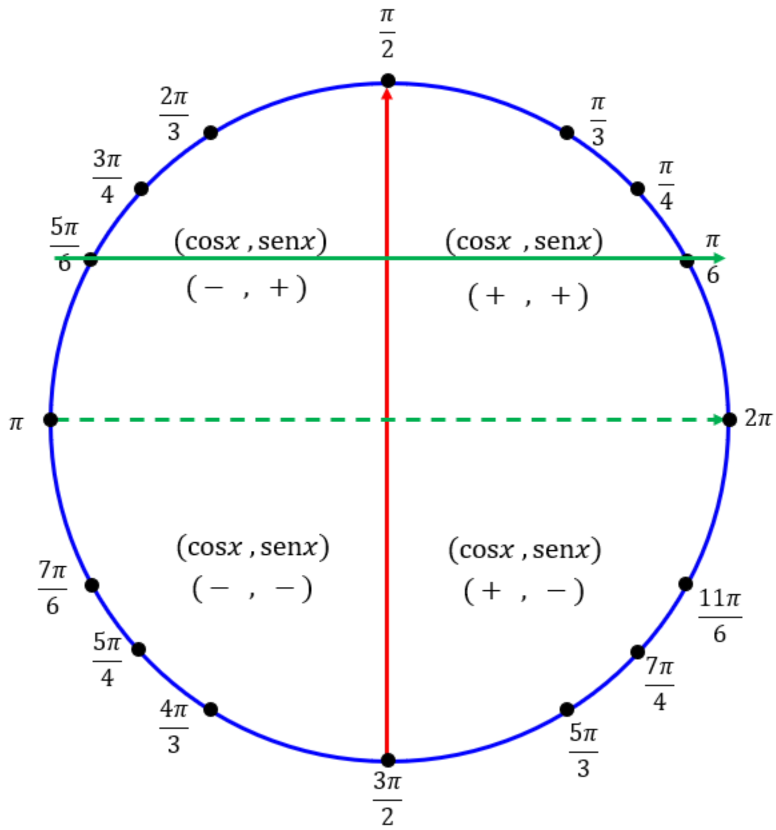
- No primeiro quadrante (1º) estão marcados os números reais $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, com os sinais do seno e do cosseno destes números positivos;
- No segundo quadrante (2º) estão marcados os números reais $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$, com sinais do seno destes números positivos e o cosseno destes números negativos;
- No terceiro quadrante (3º) estão marcados os números reais $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$, com os sinais do seno e o cosseno destes números negativos;
- No quarto quadrante (4º) estão marcados os números reais $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$, com os sinais do seno destes números negativos e o cosseno destes números positivos.

É válido ressaltar que os números reais 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π não pertencem a nenhum quadrante, já que estão situados sobre os eixos que dividem os quadrantes. Assim, fazendo uma análise nota-se que: o sen 0, sen π , sen 2π, cos $\frac{\pi}{2}$ e cos $\frac{3\pi}{2}$ são não negativos; o sen $\frac{\pi}{2}$, cos 0 são positivos e o sen $\frac{3\pi}{2}$, cos π são negativos.

Por outro lado, visando melhor entendimento por parte do professor, algumas explicações são relevantes no que diz respeito às simetrias dos números reais abordados no jogo bingo dos senos-cossenos, conforme apresentadas a seguir:

- Os números reais $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ marcados no primeiro quadrante são simétricos aos números reais $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}$ e $\frac{2\pi}{3}$ marcados no segundo quadrante, respectivamente em relação ao eixo vertical (eixo do seno). Para observar essa simetria faz-se a translação do eixo horizontal (eixo do cosseno) para cima e se a soma dos dois números sobre eixo horizontal transladado for igual a π, então constata-se que esses números são simétricos. Assim verifica-se a correspondência de quaisquer um desses números, como, por exemplo, ilustrado na Figura 13:

Figura 13 - Exemplo de simetria de números reais em relação ao eixo do seno no círculo trigonométrico.

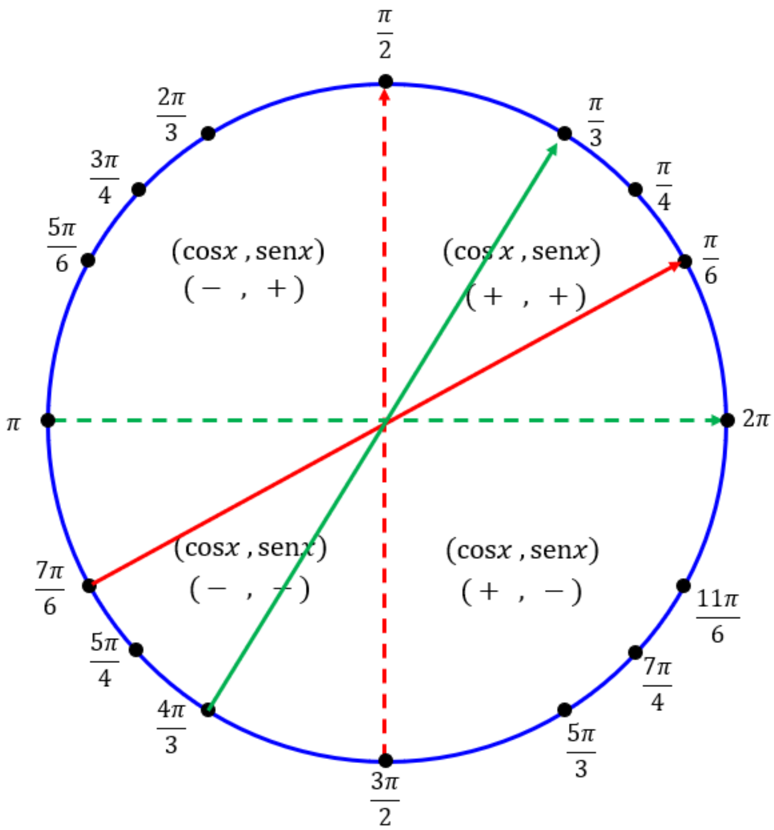


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Observe que o simétrico de $\frac{\pi}{6}$ em relação ao eixo vertical (eixo do seno) é o número real $\frac{5\pi}{6}$, já que está sobre o eixo horizontal transladado e $\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi$. Assim, pelo fato desses números serem simétricos tem-se que o sen $\frac{\pi}{6}$ é igual o sen $\frac{5\pi}{6}$, via redução do 2º para o 1º quadrante.

- Os números reais $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ marcados no primeiro quadrante são simétricos aos números reais $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{4\pi}{3}$ marcados no terceiro quadrante, respectivamente em relação ao centro do círculo trigonométrico. Para verificar a simetria desses números faz-se uma rotação (girar) do eixo vertical (eixo do seno) no sentido horário ou uma rotação (girar) do eixo horizontal (eixo do cosseno) no sentido anti-horário e se a diferença entre os dois números reais sobre eixo horizontal ou eixo vertical em valor absoluto for igual a π, então constata-se que esses números são simétricos. Assim verifica-se a correspondência de cada um desses números, conforme mostrado na Figura 14.

Figura 14 - Exemplo de simetria de números reais em relação ao eixo centro do círculo trigonométrico.



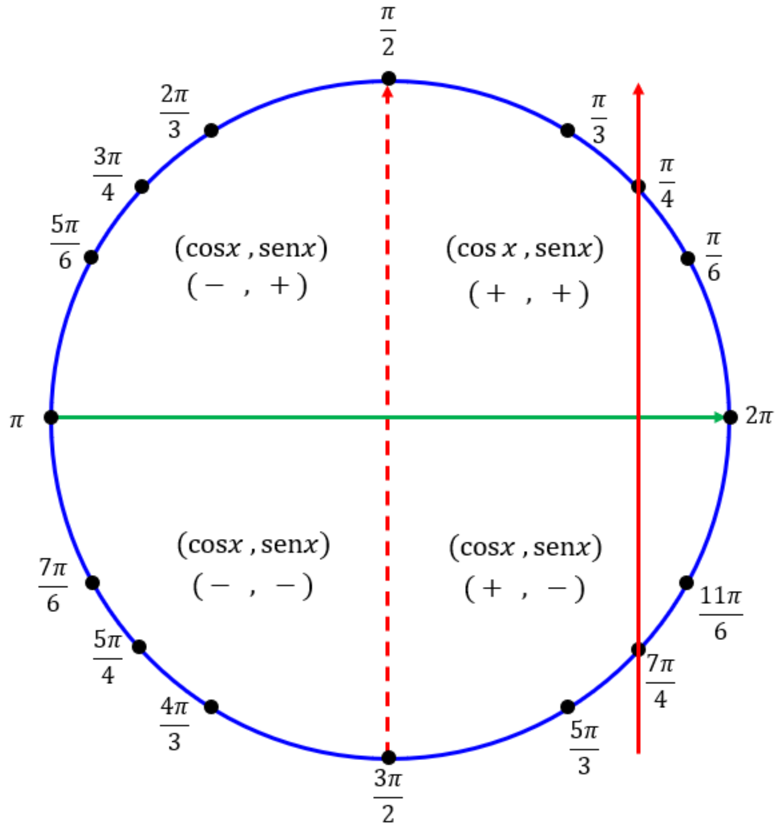
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Observe que os valores de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ com x pertencente ao terceiro quadrante são ambos negativos, como pode ser visto na Figura 14. Assim, o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação ao centro é $\frac{4\pi}{3}$ e tem-se que $\cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{4\pi}{3}$, isso porque o cosseno é positivo no 1º quadrante e negativo no 2º quadrante.

- Os números reais $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ marcados no 1º quadrante são simétricos aos números reais $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{3}$ marcados no 4º quadrante em relação ao eixo horizontal (eixo do cosseno).

Para observar essa simetria faz-se a translação do eixo vertical (eixo do seno) para a esquerda e se a soma dos dois números sobre eixo vertical transladado for igual a 2π, então constata-se que esses números são simétricos. Assim verifica-se a correspondência de cada um desses números reais, como, por exemplo, ilustrado na Figura 15.

Figura 15 - Exemplo de simetria de números reais em relação ao eixo do cosseno do círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Ao observar a Figura 15, é possível notar que o simétrico de $\frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo horizontal (eixo do cosseno) é o número real $\frac{7\pi}{4}$ situado no quarto quadrante e o valor do $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}$, já o $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4}$. Isso ocorre em virtude de o seno ser positivo para ângulos no 1º quadrante e negativo no 4º quadrante, enquanto o cosseno é positivo no 1º e 4º quadrantes.

Nesse contexto, segue o Quadro 1 contendo todas as simetrias abordadas no jogo bingo dos senos-cossenos, a saber: dos números reais $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ marcados no 1º quadrante com relação aos demais números marcados no 2º, 3º e 4º quadrantes, bem como as simetrias dos números $0, \frac{\pi}{2}, \pi, , \frac{3\pi}{2}$ e 2π que não pertencem a nenhum dos quadrantes.

Quadro 1 - Simetrias dos números reais marcados nos círculos trigonométricos das Figuras 13, 14 e 15.

Simetrias			
Simétrico de	Em relação eixo vertical	Em relação eixo horizontal	Em relação ao centro
0	π	$-$	π
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$-$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
π	0	$-$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
2π	π	$-$	π

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse jogo poderá ser jogado de três maneiras, ficando a critério do professor a que melhor se adeque a sua turma. A seguir são apresentadas essas maneiras por meio de situações de jogos, com as respectivas orientações para abordagem dos conteúdos.

1ª maneira de jogar o jogo bingo dos senos-cossenos

Nessa maneira as pedras do jogo são compostas por nove (9) números reais a serem sorteadas, a saber: $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, vinte (20) círculos trigonométricos, vinte (20) cartelas as quais são divididas em dois grupos: um com 5 valores de cossenos e 4 valores de senos (Figura 16) e o outro 4 valores de cossenos e 5 valores de senos (Figura 17), com seus respectivos argumentos em radianos.

Figura 16 - modelo 1 de cartela 1ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$	$\cos 2\pi$
$\cos\frac{\pi}{6}$	$\cos\pi$	$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 17 - modelo 2 de cartela 1ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\pi$
$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\cos\frac{7\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Situações de jogo:

Suponha que a pedra do bingo dos senos-cossenos sorteada foi $\frac{1}{2}$.

1. Em primeiro momento, o professor deve orientar o jogador (aluno) a verificar se em sua cartela possui o valor do seno de x (em relação ao eixo vertical) ou o valor do cosseno de x (em relação ao eixo horizontal) que satisfaz a igualdade $\cos x = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.
2. Uma vez sorteada a pedra $\frac{1}{2}$ o professor deve orientar o aluno a observar se existe o $\cos x = \frac{1}{2}$ relativamente ao eixo horizontal (eixo do cosseno) ou se existem simetrias que correspondem ao valor da pedra sorteada $\frac{1}{2}$ bem como se existe o $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ em relação ao eixo vertical (eixo do seno) ou se existem simetrias que correspondem ao valor da pedra sorteada $\frac{1}{2}$. O aluno deve perceber que o valor do cosseno de x e o valor do seno de x que satisfazem as igualdades $\cos x = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ são respectivamente $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{6}$.
3. Se os elementos $\cos\frac{\pi}{3}$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ estiverem na cartela devem ser marcados. Senão, aguarde a próxima pedra sorteada;

4. Como a pedra sorteada $\frac{1}{2}$ é positiva, o aluno deve verificar em quais os quadrantes o cosseno e o seno são positivos, chegando à conclusão que o cosseno é positivo (no 1º e 4º quadrantes) e o seno é positivo (no 1º e 2º quadrantes), a fim de identificar a existência de outros simétricos;
5. Em continuidade à análise, o professor deve trabalhar com o aluno a simetria de $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ mesmo que os elementos $\cos\frac{\pi}{3}$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ estejam ou não na cartela. Para tanto, é importante observar que como o cosseno é positivo no 4º quadrante, o professor deve instigar o aluno no sentido deste identificar que a simetria de $\frac{\pi}{3}$ a ser feita é em relação ao eixo horizontal. No entanto, a simetria de $\frac{\pi}{6}$ deverá ser feita em relação ao eixo vertical, uma vez que o seno é positivo no segundo quadrante;
6. Para fazer essas simetrias o professor deve orientar o aluno a utilizar o círculo trigonométrico e as varetas auxiliares.
7. Assim, para encontrar o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação ao eixo horizontal, o professor deve orientar o aluno a posicionar a vareta verde sobre o eixo vertical e transladá-la para direita até o número $\frac{\pi}{3}$ que está marcado no primeiro quadrante do círculo trigonométrico e, em seguida, observar que possui uma correspondência de $\frac{\pi}{3}$ com $\frac{5\pi}{3}$. Assim, o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ nesse caso é o número real $\frac{5\pi}{3}$;
8. Após ter sido identificado o simétrico de $\frac{\pi}{3}$, o aluno deve verificar se o elemento $\cos\frac{5\pi}{3}$ consta em sua cartela ou não. Se sim, deve ser marcado. Senão, aguarde o sorteio da próxima pedra;
9. Para encontrar o simétrico de $\frac{\pi}{6}$ em relação ao eixo vertical, o professor deve orientar o aluno a posicionar a vareta vermelha sobre o eixo horizontal e transladá-la para cima até o número real $\frac{\pi}{6}$ que está marcado no primeiro quadrante do círculo trigonométrico e, em seguida, observar que possui uma correspondência de $\frac{\pi}{6}$ com $\frac{5\pi}{6}$. Assim, o simétrico de $\frac{\pi}{6}$ nesse caso é o número real $\frac{5\pi}{6}$;
10. Após ter encontrado o simétrico de $\frac{\pi}{6}$, o aluno deve verificar se o elemento $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ consta na sua cartela ou não. Se sim, deve ser marcado. Senão, aguarde o sorteio da próxima pedra.

Forma alternativa para encontrar o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ via redução ao 1º quadrante.

1. O professor deve trabalhar com o aluno até o passo 4;
2. Em seguida, para encontrar o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ via redução para o primeiro quadrante, o professor deve instigar o aluno a identificar em qual quadrante o cosseno é positivo já que o $\cos x = \frac{1}{2}$. A partir disso, o aluno deve concluir que é no 4º quadrante. Nesse sentido, supondo que o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ é o número real x que pertence ao quarto quadrante e usando o fato de $x + \frac{\pi}{3} = 2\pi$ (explicação no Apêndice A) resulta que $x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, ou seja, $x = \frac{5\pi}{3}$. Logo, o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ é número real $\frac{5\pi}{3}$, assim temos que $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
3. Para encontrar o simétrico de $\frac{\pi}{6}$ via a redução ao 1º quadrante, o professor deve orientar o aluno a identificar em qual quadrante o seno é positivo, em razão do $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ ser positivo, assim o aluno deve concluir que é no 2º quadrante. Nesse contexto, supondo que o simétrico de $\frac{\pi}{6}$ é o número x que pertence ao segundo quadrante e utilizando o fato de $x + \frac{\pi}{6} = \pi$ (explicação no Apêndice A) resulta que $x = \pi - \frac{\pi}{6}$, ou seja, $x = \frac{5\pi}{6}$. Logo, o simétrico de $\frac{\pi}{6}$ é número real $\frac{5\pi}{6}$, assim temos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Suponha que a pedra do bingo dos senos-cossenos sorteada foi $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Em primeiro momento, o professor deve orientar o jogador (aluno) a verificar se em sua cartela possui o valor do seno de x (em relação ao eixo vertical) ou o valor do cosseno de x (em relação ao eixo horizontal) que satisfazem a igualdades $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2. Uma vez sorteada a pedra $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ o professor deve solicitar ao aluno que verifique em quais quadrantes o cosseno e o seno são negativos;
3. Ao observar o círculo trigonométrico, o professor deve instigar o aluno a vislumbrar que o cosseno é negativo (no 2º e 3º quadrantes) e o seno é negativo (no 3º e 4º quadrantes);

4. Para encontrar os valores correspondentes a x, o professor deve orientar o aluno que tome θ (um número real pertencente ao 1º quadrante) o qual deve ser o simétrico o simétrico de x. Assim, $\cos x = -\cos\theta$ e $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}\theta$, uma vez que tanto $\cos x$ quanto $\operatorname{sen} x$ são negativos uma vez que a pedra sorteada é negativa;
5. Nesse sentido, o professor deve orientar o aluno a verificar se existe um ângulo θ que satisfaz as igualdades $-\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
6. Em seguida o professor deve orientar o aluno de modo que este perceba que θ deve assumir o valor $\frac{\pi}{4}$ para que as igualdades $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sejam satisfeitas;
7. A partir da constatação feita pelo aluno de que $\theta = \frac{\pi}{4}$, o professor deve solicitar ao aluno que identifique as simetrias a serem usadas para encontrar os simétricos de $\frac{\pi}{4}$.
8. Para tanto, sabendo que o $\cos x$ é negativo, resulta que os valores de x estão no 2º e 3º quadrantes. Nesse sentido, para valor de x do 2º quadrante, o aluno deve fazer a simetria de $\frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo vertical e para valor de x no 3º quadrante, o aluno deve fazer a simetria de $\frac{\pi}{4}$ em relação ao centro do círculo. Por outro lado, sabendo que $\operatorname{sen} x$ é negativo, então os valores de x estão no 3º e 4º quadrantes. Assim, para valor de x no 3º quadrante o aluno deve fazer a simetria de $\frac{\pi}{4}$ em relação ao centro do círculo e para valor de x no 4º quadrante deve fazer a simetria de $\frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo horizontal;
9. Para encontrar os simétricos de $\frac{\pi}{4}$ no 2º quadrante, o professor deve orientar o aluno a posicionar a vareta sobre o eixo horizontal do círculo trigonométrico e transladá-la para cima até o número real $\frac{\pi}{4}$ que está marcado no 1º quadrante do círculo trigonométrico e, em seguida, observar que possui uma correspondência de $\frac{\pi}{4}$ com $\frac{3\pi}{4}$. No 3º quadrante, o professor deve orientar o aluno a posicionar a vareta sobre o centro do círculo trigonométrico e do número real $\frac{\pi}{4}$ e, em seguida, constatar que possui uma correspondência de $\frac{\pi}{4}$ com $\frac{5\pi}{4}$. Logo, os simétricos de $\frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo vertical é o número real $\frac{3\pi}{4}$ e em relação ao centro é o número real $\frac{5\pi}{4}$. Portanto, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$ e $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$, chegando-se à conclusão que $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4}$;

10. Após ter encontrado os simétricos de $\frac{\pi}{4}$, o aluno deve verificar se os elementos $\cos\frac{3\pi}{4}$ e $\cos\frac{5\pi}{4}$ constam na sua cartela ou não. Se sim, devem ser marcados. Senão, continua o jogo ou continua verificando;
11. Para encontrar os simétricos de $\frac{\pi}{4}$ no 3º quadrante, o professor deve orientar o aluno a posicionar a vareta sobre o centro do círculo trigonométrico e do número real $\frac{\pi}{4}$ e, em seguida, constatar que possui uma correspondência de $\frac{\pi}{4}$ com $\frac{5\pi}{4}$ e, no 4º quadrante, o professor deve orientar o aluno posicionar a vareta sobre o eixo vertical do círculo trigonométrico e transladá-la para a direita até o número real $\frac{\pi}{4}$ que está marcado no 1º quadrante do círculo trigonométrico e, em seguida, verificar que possui uma correspondência de $\frac{\pi}{4}$ com $\frac{7\pi}{4}$. Assim, os simétricos de $\frac{\pi}{4}$ em relação ao centro é o número real $\frac{5\pi}{4}$ e em relação ao eixo horizontal é o número real $\frac{7\pi}{4}$. Portanto, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$, chegando-se à conclusão que $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$;
12. Após ter encontrado os simétricos de $\frac{\pi}{4}$, o aluno deve verificar se os elementos $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$ constam na sua cartela ou não. Se sim, devem ser marcados. Senão, continua o jogo ou continua verificando.

Forma alternativa para encontrar os simétricos $\frac{\pi}{4}$ via redução ao 1º quadrante.

1. O Professor deve trabalhar com o aluno até o passo 7;
2. Em seguida, para encontrar os simétricos de $\frac{\pi}{4}$ via redução ao 1º quadrante é importante que o professor juntamente ao aluno observe que o fato do $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ implica que x assume valores no 2º e 3º quadrantes e o $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ resulta que x assume valores no 3º e 4º quadrantes;
3. Assim, suponha que o simétrico de x seja o número real $\frac{\pi}{4}$.
4. Se x pertence ao 2º quadrante, então $x + \frac{\pi}{4} = \pi$ (explicação no Apêndice A), logo $x = \pi - \frac{\pi}{4}$, isto é, $x = \frac{3\pi}{4}$. Assim, o número real $\frac{3\pi}{4}$ é o simétrico do número real $\frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo vertical. Portanto, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$;

5. Se x pertence ao 3º quadrante, então $x - \frac{\pi}{4} = \pi$, logo $x = \pi + \frac{\pi}{4}$, isto é, $x = \frac{5\pi}{4}$. Assim, o número real $\frac{5\pi}{4}$ é o simétrico do número real $\frac{\pi}{4}$ em relação ao centro. Logo, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$ e como $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ segue que $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$;
6. Se x pertence ao 4º quadrante, então $x + \frac{\pi}{4} = 2\pi$, logo $x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, isto é, $x = \frac{7\pi}{4}$. Assim, o número real $\frac{7\pi}{4}$ é o simétrico do número real $\frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo horizontal. Portanto, $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$;
7. Após ter encontrado os simétricos de $\frac{\pi}{4}$ o aluno deve verificar se os elementos $\cos\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{5\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$ constam em sua cartela ou não. Se sim, devem ser marcados. Senão, continua o jogo ou continua verificando.

2ª maneira de jogar o jogo bingo dos senos-cossenos

Essa segunda forma de jogar o bingo dos senos-cossenos é composta de nove (9) pedras a serem sorteadas $(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, vinte (20) círculos trigonométricos, um total de quarenta (40) cartelas e possui duas versões de jogo: a primeira possui vinte (20) cartelas em que cada cartela possui a característica de três dos seus elementos corresponderem a uma mesma pedra do bingo sorteada, como, por exemplo, os elementos $\cos\frac{\pi}{3}$, $-\cos\frac{2\pi}{3}$ e $-\cos\frac{4\pi}{3}$ constam na mesma cartela e a pedra do bingo correspondente é $\frac{1}{2}$, isto é, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $-\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $-\cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e tais elementos são simétricos.

A segunda é constituída de vinte (20) cartelas, as quais possuem a característica de todos os seus elementos corresponderem a pedra distintas do bingo. Todavia é válido frisar que esta quantidade de cartelas não consta no Apêndice C, haja vista que fizemos apenas dois modelos de cada versão: Figura 18 e Figura 19 (primeira versão) e Figura 20 e Figura 21 (segunda versão).

Figura 18 - modelo 1 de cartela 2ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{\pi}{3}$	$-\cos\frac{2\pi}{3}$	$-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$
$-\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 19 - modelo 2 de cartela 2ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$
$-\cos\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$
$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$	$-\cos\frac{5\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 20 - modelo 3 de cartela 2ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$-\cos\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$
$\cos\frac{7\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 21 - modelo 4 de cartela 2ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$
$\cos\frac{7\pi}{6}$	$-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Situação de jogo:

Essa parte do jogo segue os mesmos passos da primeira situação já descrita, porém com a introdução de um novo elemento nas cartelas, a saber: este novo elemento é acompanhado do sinal de menos. Nesse sentido, se faz necessário que o professor chame a atenção do aluno para esse quesito, haja vista que nessa situação de jogo deve-se fazer todas as análises das simetrias bem como levar em consideração os sinais de cada elemento da cartela.

3ª maneira de jogar o bingo dos senos-cossenos

Nessa etapa o jogo bingo dos senos-cossenos é mais abrangente, visto que contempla a primeira e a segunda maneiras acrescido de novos elementos na cartela. Assim, envolve uma quantidade maior de pedras, isto é, um total de vinte e oito (28), a saber:

$$-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1;$$

$$0\ \text{rad}, \frac{\pi}{6}\ \text{rad}, \frac{\pi}{4}\ \text{rad}, \frac{\pi}{3}\ \text{rad}, \frac{\pi}{2}\ \text{rad}, \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}, \frac{3\pi}{4}\ \text{rad}, \frac{5\pi}{6}\ \text{rad}, \pi\ \text{rad}, 2\pi\ \text{rad};$$

$$-\frac{\pi}{6}\ \text{rad}, -\frac{\pi}{4}\ \text{rad}, -\frac{\pi}{3}\ \text{rad}, -\frac{\pi}{2}\ \text{rad}, -\frac{2\pi}{3}\ \text{rad}, -\frac{3\pi}{4}\ \text{rad}, -\frac{5\pi}{6}\ \text{rad}, -\pi\ \text{rad}, -2\pi\ \text{rad};$$

vinte (20) cartelas, as quais tem a característica de seus elementos possuir: três senos, três cossenos e três números reais. Todavia é valido frisar que esta quantidade de cartelas não consta no Apêndice C, haja vista que fizemos apenas dois modelos (Figura 22 e Figura 23).

É importante deixar claro que: quando a pedra sorteada for um número real não vale marcar diretamente o número sorteado, na verdade, o aluno deve marcar o seno ou o cosseno de um ângulo correspondente aquela pedra sorteada, como, por exemplo, se a pedra sorteada foi $\frac{1}{2}$ o valor do elemento a ser marcado na cartela deve ser o sen $\frac{\pi}{6}$ ou cos $\frac{\pi}{3}$.

Por outro lado, quando a pedra sorteada for um ângulo o jogador deve verificar nos elementos da cartela o número real que corresponde ao valor do seno ou do cosseno do ângulo sorteado (a pedra). Por exemplo, se a pedra sorteada foi $\frac{\pi}{3}$ rad o valor do elemento a ser marcado na cartela deve ser $\frac{1}{2}$ (pois $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$) ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (pois $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Figura 22 - modelo 1 de cartela 3ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$-\frac{1}{2}$	$-\cos\frac{2\pi}{3}$	$-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$
$-\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 23 - modelo 2 de cartela 3ª maneira de jogar.

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$
$-\cos\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$
1	$-\cos\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Situação de jogo:

Suponha que a pedra do bingo dos senos-cossenos sorteada foi $\frac{\pi}{6}$ rad.

1. Em primeiro momento, o professor deve solicitar ao aluno que localize a pedra sorteada no círculo trigonométrico partindo da origem do círculo no sentido anti-horário e, em seguida, orientar o aluno a verificar os sinais de cosseno e seno no

quadrante que se encontra essa pedra sorteada. Feita essa análise o professor deve orientar o aluno a verificar se pedra sorteada possui os valores correspondentes a $\cos\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ e $\operatorname{sen}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$;

2. Ao constatar que $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, o professor deve pedir ao aluno que verifique se os elementos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$, constam em sua cartela ou não. Se sim, devem ser marcados. Senão, continua o jogo ou aguarde o sorteio da próxima pedra;
3. Em continuidade à análise da pedra sorteada, é importante que o professor comente que a pedra sorteada é o ângulo formado pelo eixo horizontal (eixo do cosseno) com raio do círculo trigonométrico em radiano no sentido anti-horário, uma vez que o número real $\frac{\pi}{6}$ é positivo.

Suponha que a pedra do bingo dos senos-cossenos sorteada foi $-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ rad.

1. Em primeiro momento, o professor deve solicitar ao aluno que localize a pedra sorteada no círculo trigonométrico partindo do número real 0 (zero) no sentido horário. Para tanto, o professor deve orientar o aluno a encontrar primeiramente o número real correspondente ao número real $-\frac{\pi}{6}$ da seguinte maneira: somando o arco completo (2π) com o arco negativo ($-\frac{\pi}{6}$), ou seja, $2\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, o que resulta em $\frac{11\pi}{6}$, isso significa que $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{11\pi}{6}$ e o $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$. Assim, o aluno deve identificar a localização deste número real marcado no círculo trigonométrico;
2. Em seguida, o professor deve instigar o aluno a verificar os sinais de cosseno e seno no quadrante em que se encontram a pedra correspondente a $\frac{11\pi}{6}$ e a pedra sorteada $-\frac{\pi}{6}$;
3. Após essa análise, o professor deve orientar o aluno a encontrar um simétrico do número real $\frac{11\pi}{6}$ no 1º quadrante;
4. Em seguida, precisa ser constatado pelo aluno que o número real $\frac{11\pi}{6}$ pertence ao 4º quadrante, isto é, que o $\cos\frac{11\pi}{6}$ é positivo e o $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$ é negativo e que o simétrico de $\frac{11\pi}{6}$ é o número real $\frac{\pi}{6}$. Nesse momento, é relevante que o professor explore do aluno

a relação que existe entre os $\cos\frac{11\pi}{6}$ e $\cos\frac{\pi}{6}$ e do $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$, ou seja, que este perceba que o $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$ e o $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$;

5. Após ter constatado que o $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$ e $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ é esperado que aluno chegue à conclusão de que o $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
6. Por fim, o aluno deve verificar se os elementos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ constam em sua cartela ou não. Se sim, devem ser marcados. Senão, continua o jogo ou aguarde o sorteio da próxima pedra.

Suponha que a pedra sorteada do bingo dos senos-cossenos foi $\frac{2\pi}{3}$ rad.

1. Em primeiro momento, o professor deve solicitar ao aluno que faça a localização da pedra sorteada no círculo trigonométrico e, em seguida, pedir ao aluno que verifique os sinais do cosseno e do seno no quadrante que se encontra a pedra sorteada. É importante que o professor oriente o aluno a encontrar o simétrico de $\frac{2\pi}{3}$ no 1º quadrante;
2. Após essa análise, o aluno já deve ter concluído que o número real $\frac{2\pi}{3}$ pertence ao 2º quadrante, isto é, $\cos\frac{2\pi}{3}$ é negativo, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ é positivo e que o simétrico de $\frac{2\pi}{3}$ é o número real $\frac{\pi}{3}$. Assim, é importante que o professor explore do aluno a relação que existe entre $\cos\frac{2\pi}{3}$ e $\cos\frac{\pi}{3}$ e do $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, ou seja, que este perceba que o $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$ e que o $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$;
3. Após ter constatado que o $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$ e $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, o professor deve solicitar ao aluno faça uma consulta a tabela auxiliar de ângulos e assim perceba que o $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e o $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, chegando à conclusão que o $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ e o $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4. Por fim, o aluno deve verificar se os elementos $-\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ constam em sua cartela ou não. Se sim, devem ser marcados. Senão, continua o jogo ou aguarde o sorteio da próxima pedra.

Correlacionando as três maneiras de jogar o bingo dos senos-cossenos por meio das situações de jogo apresentadas com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel é importante que os alunos detenham os conhecimentos prévios (subsunçores): conversão de ângulos de radianos em graus, saber que o plano cartesiano é dividido em quatro (4) quadrantes, associação de um número real a um ponto no círculo trigonométrico e estudo dos sinais do seno e cosseno nos quadrantes do círculo trigonométrico.

Conforme ressalva já feita na 1ª etapa desta SD, por não ter sido aplicada na prática, mas considerando que o jogo foi testado pelo autor, presumimos que a partir das interações dos referidos subsunçores com os conhecimentos que o aluno possui das definições, como, por exemplo, a posição dos pontos cardeais (Norte, Sul, Leste e Oeste), este poderá fazer analogia aos eixos vertical e horizontal e os pontos colaterais (Nordeste, Sudeste, Sudoeste e Noroeste), podendo ser associados aos números reais pertencentes aos quadrantes do círculo trigonométrico.

Esperamos que as interações ocorridas possam ser de forma não-arbitrária e não-literal na estrutura cognitiva do aluno, de modo que o professor poderá explorar novos conceitos, tais como simetrias em relação aos eixos: vertical (seno) e horizontal (cosseno) e redução de números reais do 2º, 3º e 4º quadrantes para o 1º quadrante.

Assim sendo, conforme ocorrer a incorporação desses subsunçores pelo aluno, presumimos que os conhecimentos poderão adquirir maior estabilidade e significado para o aluno, ocorrendo dessa maneira a diferenciação progressiva, como, por exemplo, quando uma pedra do bingo dos senos-cossenos é sorteada, o professor sendo o mediador do processo de ensino e aprendizagem orienta o aluno a fazer uma sequência de passos, bem como o instiga a identificar as simetrias a serem utilizadas, a fim de verificar se constam elementos correspondentes à pedra sorteada em sua cartela e assim eliminar possíveis dúvidas acerca dessa simetria.

Ademais, de acordo com essa teoria, presumimos que as situações de jogo apresentadas anteriormente poderão ser caracterizadas como conceitual e proposicional, uma vez que existe uma regularidade para resolver as simetrias e fazer as reduções de números reais ao 1º quadrante. Por fim, temos a expectativa de que este seja um material potencialmente significativo (no caso, o jogo bingo), todavia, ressaltamos que a predisposição do aluno para aprender dependerá em grande parte do seu interesse pelo jogo proposto, assim como ocorre em qualquer outra teoria.

Ao final desses passos nas três situações de jogo e das análises feitas é esperado que o aluno chegue à conclusão de que todo número real pertencente a quaisquer dos quadrantes possui três simétricos, isto é, um em cada quadrante (um em relação ao eixo vertical, um em relação ao eixo horizontal e o outro em relação ao centro).

É importante ressaltar que, como pôde-se perceber, nesse jogo não foi abordado o conceito de tangente. No entanto, o professor que desejar fazer exercícios referentes à tangente envolvendo o jogo bingo dos senos-cossenos com mais de uma volta no círculo trigonométrico poderá utilizar a sugestão das atividades complementares (Apêndice F) propostas pelo autor dessa sequência didática.

Avaliação

O professor avaliará a participação, envolvimento e aprendizagem dos conceitos de razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) dos alunos por meio da construção (como por exemplo, recortar e colar as cartas, cartelas e círculo trigonométrico podendo o professor pedi ao aluno que elabore cartas e cartelas para os jogos propostos) e aplicação dos jogos propostos: baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos.

Na construção o professor poderá verificar, o compromisso, a dedicação, participação, criatividade e aprendizagem dos conceitos matemáticos formais abordados nos jogos, haja vista que ao serem elaboradas cartas/cartelas pelo aluno este terá que possuir conhecimentos (podendo neste caso servir como aperfeiçoamento desses conteúdos) ou mesmo assimilá-los, pois para tal construção se faz necessário elaborar as perguntas e respondê-las.

Relativamente à aplicação, o professor poderá averiguar evidências de que ocorreu aprendizagem de maneira significativa. Para tanto, Masini e Moreira (2017) sugerem que deve existir dialogicidade, avaliação formativa (nesse caso foi elaborada pelo autor da pesquisa uma ficha de avaliação pós-jogo (Apêndice E) e recursiva.

Nessa perspectiva, no caso dos jogos supracitados, tais evidências podem ser constatadas mediante a interação entre os participantes do jogo e com o professor, a participação, planejamento de estratégias para jogar. Ademais, no início dos jogos será entregue uma ficha de jogada (Apêndice D) ao jogador em que deve anotada qual a razão trigonométrica utilizada para encontrar o valor correspondente das cartas respostas necessárias para a formação do jogo, no caso do jogo baralho da trigonometria e, em relação ao jogo bingo dos senos-cossenos, é de suma relevância que sejam anotadas: a pedra sorteada e as simetrias feitas com auxílio das varetas para encontrar os simétricos correspondentes ao valor dessa pedra. Nesse sentido, o professor poderá fazer uma avaliação pontual, ou seja, verificar em qual ponto os alunos estão com maior dificuldade para solucionar os exercícios.

Nesse contexto, é importante que o professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem mostre aos alunos que o erro de cálculo, por exemplo, não configura que ele não aprendeu, mas que ele poderá, a partir desse erro, refazer as tarefas e traçar estratégias ainda melhores para vencer os jogos.

Referências e Bibliografia consultada (da sequência didática)

BENEVIDES, F. S. **Portal da matemática OBMEP:** Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas; 19 jan. 2019; Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=42. Acesso em: 27 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018, 600 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 maio. 2020.

DINIZ, M. I.; SMOLE, K. S. **Matemática Ensino Médio:** 1º ano. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013, 464 p.

IEZZI et al. **Matemática:** Ciência e aplicações: Ensino Médio: 2º ano. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016, 288 p.

JORGE, T. A.; TRAJANO, V. S.; PIRES, F. E. S. S. **A Teoria da Aprendizagem Significativa e o jogo.** Revista Educação em Questão, Natal, v. 58, n. 57, 2020, p. 1-21. Disponível em: https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/21088/13171 . Acesso em: 22 ago.2021.

MASINI, E. F. S.; MOREIRA, A. M. **Aprendizagem Significativa na Escola.** 1.ed. Curitiba, PR: CRV, 2017, 88 p.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ponto de partida para esse trabalho consistiu em criar possibilidades para diversificar as aulas de Matemática, mais especificamente a trigonometria. Nesse sentido, buscamos subsídios teóricos da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, bem como construímos dois jogos (baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos) visando estimular o interesse e a motivação pelas aulas por parte dos alunos e uma forma alternativa de ensino de conhecimentos teóricos da trigonometria associados a aplicações no cotidiano, haja vista que uma aula de Matemática muito teórica, rígida, sem uma conexão com o contexto vivenciado pelos alunos pode se configurar como desmotivadora e reforçar o "estereótipo" de que a Matemática é uma disciplina de difícil compreensão.

Nessa perspectiva, com a realização dessa pesquisa pôde-se perceber que a utilização de jogos como recurso didático no ensino de Matemática (a partir da pesquisa teórica e da experiência do pesquisador autor dessa pesquisa em aplicação de jogos em outras oportunidades) são uma ferramenta que pode agregar de forma substancial o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, visto que possibilita o desenvolvimento do raciocínio matemático, criatividade, socialização entre os indivíduos, trabalho em equipe, disciplina, torna as aulas mais dinâmicas e prazerosas, além de colocar o aluno como protagonista na construção ativa do seu próprio conhecimento. Todavia, é imprescindível que o professor, ao aplicar um jogo em sala de aula, possua objetivos claros do que quer que os alunos aprendam para que estes jogos não se tornem apenas momentos de diversão.

No tocante à teoria da aprendizagem significativa, esta se processa em virtude da interação que ocorre entre o conhecimento que o aprendiz já sabe e um novo conhecimento e, a partir dessas interações na estrutura cognitiva do sujeito são adquiridos novos significados, ou seja, tem-se a expectativa de que o conhecimento é modificado e torna-se mais estável, claro, organizado, oportunizando ao aluno uma aprendizagem com significado no que diz respeito a um determinado conteúdo.

Nessa perspectiva, pensando nos jogos matemáticos propostos nessa pesquisa podemos inferir com relação ao jogo baralho da trigonometria que a partir do momento em que esse jogo aborda os conteúdos matemático através de uma sequência de passos para resolução dos exercícios é possível constatar que se configura como uma estratégia de ensino alternativa, na medida em que existe toda uma teoria matemática que está sendo explorada envolvendo conceitos, tais como: soma dos ângulos internos de um triângulo, Teorema de Pitágoras, triângulos (retângulo, isósceles e equilátero), semelhança de triângulos e o foco do jogo as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

No que concerne ao jogo bingo dos senos-cossenos este funciona como uma ferramenta auxiliar para o ensino de trigonometria, haja vista que envolve uma teoria de conceitos matemáticos como, por exemplo, distinguir em quais quadrantes do círculo trigonométrico o seno e o cosseno são positivos e/ou negativos, simetrias em relação: aos eixos vertical e horizontal e ao centro e redução de números reais ao 1º quadrante (foco do jogo).

Assim, fazendo uma correlação desses jogos com a seções 2.1 (teoria da aprendizagem significativa de Ausubel) e 2.2 (jogos e a teoria da aprendizagem significativa ausubeliana) é possível perceber o uso das definições dessa teoria, como, por exemplo, os conhecimentos prévios (subsunçores) soma dos ângulos internos de um triângulo, Teorema de Pitágoras, identificação dos quadrantes do círculo trigonométrico em que o seno e o cosseno são positivos e/ou negativos podem levar a novos conhecimentos, a saber: semelhança de triângulos, razões trigonométricas, simetrias, entre outros, as quais a partir da interações (não-arbitrária e não literal) que ocorrem com os subsunçores citados, tem-se a expectativa que esses novos conhecimentos passam a se tornar mais claros, com maior estabilidade na estrutura cognitiva passando de conhecimento novo a ser subsunçor (diferenciação progressiva) do aluno. Desse modo, a estrutura cognitiva vai eliminando quaisquer dúvidas no que tange a esses conhecimentos chegando, assim, a reconciliação integradora, isto é, “[...] processo de aprendizagem que resulta em delineamento explícito e similaridades de diferenças entre ideias correlatadas (MASINI; MOREIRA, 2017, p. 84).

Outrossim, os jogos matemáticos como metodologia de ensino aliada à teoria da aprendizagem significativa ausubeliana podem oportunizar uma aprendizagem com significado aos alunos, na medida em que promovem o desenvolvimento cognitivo a partir dos conhecimentos prévios do aprendiz acerca de determinado conteúdo (no caso dos jogos propostos, seno, cosseno, tangente, ângulos (em radianos e graus) e simetrias no círculo trigonométrico) e espera-se construir novos conhecimentos, isto é, por meio das aplicações que remetem ao cotidiano, como, por exemplo, casa, avião, cadeira, bola, é possível mostrar ao aluno que um conceito antes tido como abstrato sem significado através de jogos pode desencadear uma aprendizagem significativa.

Por fim, o autor desse trabalho o considera importante para sua formação acadêmica, visto que como futuro mestre em Matemática possibilita-lhe um leque maior de inserção no mercado de trabalho (tanto no ensino básico como superior) e, nesse sentido, é de suma relevância conhecer outros métodos de ensino para complementar/auxiliar o ensino tradicional.

Essa pesquisa trouxe uma visão que não tinha com relação à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel bem como oportunizou agregar conhecimentos relevantes acerca da trigonometria, tais como: razões trigonométricas no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico, necessários para a elaboração dos jogos baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos.

Nesse contexto, espera-se que os jogos propostos aliado a teoria supracitada funcionem com uma ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos de Matemática, pois promovem momentos de socialização, interação, criatividade, raciocínio matemático e coloca o aluno como protagonista na construção do seu aprendizado, podendo resultar em uma aprendizagem com significado para o aprendiz. Tem-se a expectativa que em um futuro próximo aplicar os jogos propostos nessa pesquisa em sala de aula, visto que, em razão da pandemia de COVID-19 as escolas na época do desenrolar desse trabalho se encontravam sem aulas presenciais, inviabilizando, dessa forma, tal aplicação em âmbito escolar.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, P. N. **Educação Lúdica**: Técnicas e Jogos Pedagógicos. 10. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2000. 295 p.

ALVAREZ, M.; AULT, C.; NOVAK, J. **D. Bob Gowin (memorial)**. Disponível em: https://cpb-us-e1.wpmucdn.com/blogs.cornell.edu/dist/3/6798/files/2016/01/D.-Bob-Gowin-1er5twb.pdf . Acesso em: 15 nov. 2021.

ALVES, E. V. S. **A ludicidade e o ensino de matemática**. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001. 112 p.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C**. História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974, 489 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018, 600 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 maio. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Pisa para as Escolas Brasil 2017**. São Paulo, 2018. Disponível em: https://drive.google.com/drive/folders/156k8e_hJz26hGR8k7FYvh-Rrn-Tl5nMu. Acesso em: 29 set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Relatório Brasil no PISA 2018**: versão preliminar. Brasília, 2018. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf . Acesso em: 8 out. 2020.

CHIUMMO, A.; OLIVEIRA, E. C. **Jogos Matemáticos**: Uma ferramenta Educacional no Ensino Fundamental. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-14. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7231_2910_ID.pdf . Acesso em: 16 maio. 2020.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências didáticas para o oral e a escrita**. In: SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim e colaboradores. Gêneros orais e escritos na escola. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2004, p.95-128. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4836962/mod_folder/content/0/iii.%20DOLZ%3B%20NOVERRAZ%3B%20SCHNEUWLY.%20Sequ%C3%AAncias%20Did%C3%A1ticas%20para%20o%20oral%20e%20para%20a%20escrita%20apresenta%C3%A7%C3%A3o%20de%20um%20procedimento.pdf?forcedownload=1 . Acesso em: 27 set. 2020.

FEIJÓ, R. S. A. A. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** Um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 108 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/32144/1/2018_RachelSaffirAra%C3%BAjoAlvesFeij%C3%B3.pdf. Acesso em: 16 maio. 2020.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2007, 228 p.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2002, 176 p.

GOIÁS. Secretaria de Estado da Educação**. Documento Curricular para Goiás - Etapa Ensino Médio: Área da Matemática e Suas Tecnologias.** Goiânia, 2021. Disponível em: https://site.educacao.go.gov.br/files/documento-curricular-de-goias-para-ensino-medio.pdf. Acesso em: 30 maio 2022.

GRANDO, R. C. **O Jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo De Ensino-Aprendizagem da Matemática.** Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, São Paulo, 1995. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253786. Acesso em: 28 set. 2020.

HUIZINGA, J. **Homo ludens:** Filosofia. 5.ed. São Paulo: Perspectiva, 2001, 243 p.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Trigonometria. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004, 312 p.

JORGE, T. A.; TRAJANO, V. S.; PIRES, F. E. S. S. **A Teoria da Aprendizagem Significativa e o jogo.** Revista Educação em Questão, Natal, v. 58, n. 57, 2020, p. 1-21. Disponível em: https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/21088/13171 . Acesso em: 22 ago.2021.

Joseph D. Novak. **Stringfixer**, [s.d.]. Disponível em: https://stringfixer.com/pt/Joseph_D._Novak. Acesso em: 14 nov. 2021.

KISHIMOTO, T. M. (org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011, 207 p.

LEMANN, FUNDAÇÃO. **Pisa para Escolas Brasil 2017**. São Paulo, 2018

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: EPU, 2013, 112 p.

MASINI, E. F. S.; MOREIRA, A. M. **Aprendizagem Significativa na Escola**. 1.ed.Curitiba, PR: CRV, 2017, 88 p.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa:** a teoria e textos complementares.1.ed.São Paulo: Livraria da Física, 2011, 179 p.
PEREIRA, C. S. **Aprendizagem em trigonometria no ensino médio contribuições da teoria da aprendizagem significativa.** 2011. 91 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011. Disponível em: http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/1970 . Acesso em: 26 maio. 2020.

Philip Johnson-Laird. **Stringfixer**, [s.d.]. Disponível em: https://stringfixer.com/pt/Philip_N._Johnson-Laird. Acesso em: 14 nov. 2021.

RODRIGUES, G. S. **Uma proposta de aplicação de jogos matemáticos no Ensino Básico**. 2018. 99 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2018.Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160270124 . Acesso em: 15 maio. 2020.

ROQUE, T. M.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012, 301 p.

SELVA, K. R.; CARMAGO, M. O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009, Ijuí. **Anais...** X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_4.pdf. Acesso em: 26 maio. 2020.

SILVA, R. M. L. **Jogos pedagógicos na aprendizagem de trigonometria do ensino médio.** 2018 93 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2018. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/97/97138/tde-03122018-175550/publico/PED17019_C.pdf . Acesso em: 05 abr. 2020.

VIDAL, E. **Ensino à distância vs ensino tradicional.** 2002, 76 p. Monografia – Universidade Fernando Pessoa, Porto, 2002. Disponível em: file:///C:/Users/rivan/Downloads/ead_e_trad.pdf. Acesso em: 06 fev. 2022.

VIGANÓ, V. C. R.**Uma Proposta Pedagógica para a aprendizagem significativa de trigonometria.** Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias Do Sul, Caxias do Sul, 2015. Disponível em: https://repositorio.ucs.br/xmlui/bitstream/handle/11338/1066/Dissertacao%20Vanessa%20Cristina%20Rech%20Vigan%c3%b3.pdf?sequence=1&isAllowed=y . Acesso em: 01 nov. 2021.

ZABALA, A. **A prática educativa:** Como ensinar. 1. Ed. Porto Alegre, RS: Artmed, 1998, 224 p.

ZEFERINO, L. **Jogos Matemáticos nas Aulas do Ensino Médio**: Pife - Trigonométrico”. 2015. 56 p. Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/275765/mod_data/content/3912/Leandro%20Zeferino.pdf Acesso em: 13 jun. 2020.

APÊNDICE A – Resumo dos conceitos e propriedades utilizados nos jogos: baralho da trigonometria e bingo dos senos-cossenos

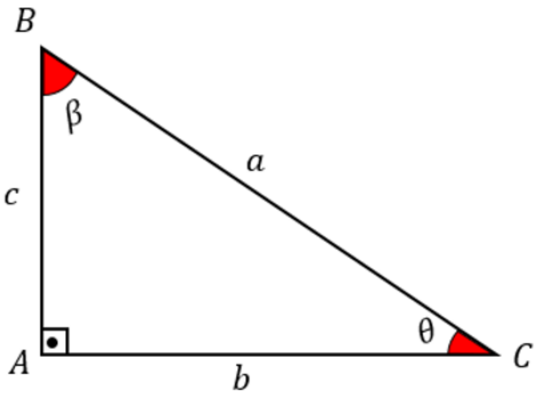
Neste apêndice recordamos os conceitos de Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas em um triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente) e as razões trigonométricas no círculo trigonométrico (seno e cosseno).

Para tanto, a *priori* abordamos o Teorema de Pitágoras que diz: *Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.* Em outras palavras, sejam a a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto no triângulo retângulo) e b e c os catetos desse triângulo, tem-se a representação algébrica:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

Assim, como forma de melhor entendimento segue, na Figura 24, a ilustração geométrica de um triângulo ABC retângulo em A, bem como a apresentação de seus elementos:

Figura 24 - Triângulo retângulo em A.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático.

Note que:

- a é a medida do lado $\overline{BC}$, ou seja, a é a medida da hipotenusa que é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo retângulo;
- c é a medida do lado $\overline{AB}$, ou seja, c é a medida do cateto oposto em relação ao ângulo agudo θ ($\theta < 90°$) e a medida do cateto adjacente em relação ao ângulo agudo β ($\beta < 90°$);
- b é a medida do lado $\overline{AC}$, ou seja, b é a medida do cateto oposto em relação ao ângulo agudo β ($\beta < 90°$) e a medida do cateto adjacente em relação ao ângulo agudo θ ($\theta < 90°$).

Relativamente a essas três medidas (catetos e hipotenusa) o professor poderá fazer comparações entre suas razões em função de um determinado ângulo agudo, e tais comparações são as chamadas razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Nessa perspectiva, tomando como referência a Figura 24, o professor poderá explicitar aos alunos as razões trigonométricas fundamentais no triângulo ABC retângulo em A (Figura 24). Assim, de modo geral:

Em todo triângulo retângulo, o **seno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa,

$$\boxed{sen\, \theta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{a}}$$

Em todo triângulo retângulo, o **cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\boxed{cos\, \theta = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{b}{a}}$$

Em todo triângulo retângulo, a **tangente** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente.

$$\boxed{tg\, \theta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \theta}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \theta} = \frac{c}{b}}$$

É importante o professor salientar que para o ângulo agudo β, tais razões são feitas de forma análoga ao ângulo θ. Nesse contexto, o professor tem uma boa oportunidade para apresentar, aos alunos, os chamados ângulos notáveis ($30°, 45°, 60°$), assim conhecidos, em virtude, de sua importância para a geometria (notadamente na trigonometria), no cálculo de razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente, pois possuem resultados diferenciados, no sentido de facilidade dos cálculos. O Quadro 2 a seguir apresenta os respectivos valores.

Quadro 2 - Ângulos notáveis.

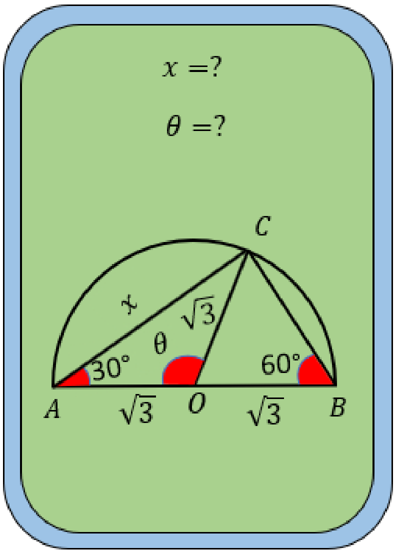
Razão \ Ângulo	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte:Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Assim, a fim de promover a aprendizagem desses conceitos, são propostos exercícios elaborados para o baralho da trigonometria construídos pelo autor dessa pesquisa acerca desses conteúdos tanto formais quanto aplicações, vislumbrando que o aluno consiga relacionar tais conteúdos com conhecimentos prévios de sua estrutura cognitiva. Seguem os exercicíos 1 e 2 (retirados do jogo baralho da trigonometria).

Exercício 1. Seja ABC um triângulo retângulo em C. Calcule os valores de x e θ da Figura 6.

Figura 6 - Carta do baralho da trigonometria do exercício 1.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Para a resolução deste exercício o professor pode começar explicando que o aluno necessita possuir conhecimentos prévios, tais como: lembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, triângulo isósceles (possui dois lados iguais) e ângulos suplementares (quando soma de dois ângulos equivale a 180°), lembrando que na teoria da aprendizagem significativa os conhecimentos prévios são fundamentais para que o aluno adquira uma aprendizagem com significado. Prosseguindo, o professor poderá efetuar o cálculo do ângulo θ que é pedido no exercício 1, utilizando para tanto a razão trigonométrica cosseno para determinar o valor de x.

Proposta de solução

Como o triângulo ABC é retângulo em C, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, e como o ângulo $B\hat{A}C = 30°$ e o ângulo $A\hat{B}C = 60°$, logo tem-se que o ângulo $A\hat{C}B = 90°$, e o fato do triângulo ACO ser isósceles de base AC, resulta que $A\hat{C}O = C\hat{A}O = 30°$, segue que a medida do ângulo $A\hat{O}C = 120°$, ou seja, $\theta = 120°$, isto é,

$$A\hat{C}O + C\hat{A}O + A\hat{O}C = 180° \Rightarrow 30° + 30° + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 180° - 60°$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\theta = 120°}.$$

Assim, para determinar o valor de x basta aplicar o $\operatorname{sen} 60°$ já que x é a medida do cateto AC que é oposto ao ângulo de 60° ou utilizando o $\cos 30°$, uma vez que a medida do cateto AC é adjacente ao ângulo de 30° e a medida do lado $AB = 2\sqrt{3}$ é a hipotenusa. Usando a razão trigonométrica do cosseno, tem-se que o $\cos 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{3}} \Rightarrow x = 3$.

Portanto, $\boldsymbol{\theta = 120°}$ **e** $\boldsymbol{x = 3}$.

No entanto, é válido lembrar que existem outras formas para determinar esses valores, tal como segue uma proposta alternativa.

O professor poderá começar observando que o triângulo BCO é isósceles de base BC, pois tem dois lados iguais, ou seja, $\overline{BO} = \overline{CO}$ implica que os ângulos da base são iguais, isto é, $O\hat{B}C = B\hat{C}O = 60°$. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, resulta que o ângulo $B\hat{O}C = 60°$ e como os ângulos θ e $B\hat{O}C$ são suplementares, isto é, $\theta + B\hat{O}C = 180°$, logo tem-se que $\theta = 120°$.

A partir do exposto, observa-se que os três ângulos internos do triângulo BCO são iguais, chegando-se à conclusão de que o triângulo BCO é equilátero, ou seja, a medida do lado $BC = \sqrt{3}$. Sendo assim, para determinar o valor de x, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, cuja hipotenusa é o lado AB e os catetos são os lados AC e BC. Logo tem-se,

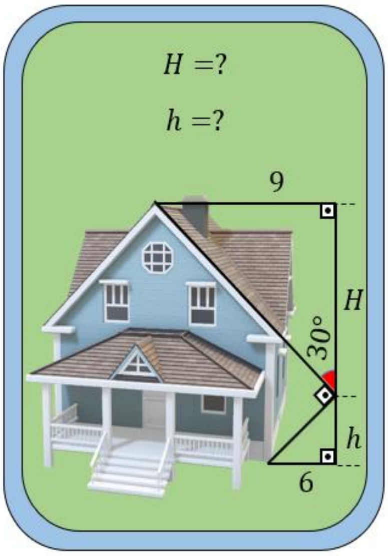
$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$$
$$\Rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + x^2$$

$$\Longrightarrow 12 = 3 + x^2$$
$$\Longrightarrow x^2 = 12 - 3$$
$$\Longrightarrow x^2 = 9$$
$$\Longrightarrow x^2 = 9$$
$$\Longrightarrow x = \sqrt{9}$$
$$\Longrightarrow x = 3$$

Portanto, $\boldsymbol{\theta = 120°}$ **e** $\boldsymbol{x = 3}$.

Exercício 2. Calcule a altura da casa $(H + h)$ ilustrada na Figura 7.

Figura 7 - Carta do baralho da trigonometria do exercício 2.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Professor, para resolver esse exercício é importante que os alunos detenham conhecimentos prévios imprescindíveis, a saber: que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° e que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes desse triângulo. Em seguida, o professor poderá explicar que para calcular os valores das alturas pedidas no exercício 2, será utilizada a razão trigonométrica tangente dos ângulos notáveis: tg 30° e tg 60°.

Proposta de solução

Para calcular a altura da casa é necessário determinar as duas alturas H e h conforme mostrado na Figura 7.

Observe que no triângulo menor de altura h, o ângulo formado pela hipotenusa com altura h mede $60°$, uma vez que a soma dos ângulos $30° + 90° = 120°$ (observe que $120°$ é o ângulo externo do triângulo menor) e sabendo que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$, o que implica que o ângulo formado entre a hipotenusa e altura h forma um ângulo de $60°$. Logo para obter a altura h aplica-se a tangente do ângulo formado entre a hipotenusa e altura h mede $60°$, isto é,

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{6}{h} \Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{6}{h} \Longrightarrow h = \frac{6}{\sqrt{3}} \Longrightarrow h = 2\sqrt{3}.$$

Em seguida, para determinar a altura H do triângulo maior, aplica-se novamente a tangente, só que desta vez no ângulo de $30°$. Assim tem-se:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{9}{H} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9}{H} \Longrightarrow H = \frac{27}{\sqrt{3}} \Longrightarrow H = \frac{27\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow H = 9\sqrt{3}.$$

Portanto, a altura da casa é $H + h = 9\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \Longrightarrow \boldsymbol{H + h = 11\sqrt{3}.}$

Lembrando que essa não é a única maneira para resolver este exercício, visto que pode ser usado outras ferramentas, como, por exemplo, a lei dos senos.

Relativamente aos dois exercícios supracitados, optou-se por recorrer às cartas do baralho da trigonometria proposto no trabalho, haja vista que este possui cartas com a formalização Matemática da trigonometria assim como aplicações referentes a esse ramo tão importante da Matemática. Nesse contexto, é importante que o professor como mediador de conhecimentos possa mostrar a utilização de tais conceitos no cotidiano dos alunos, a fim de que estes consigam associar essas aplicações dos conceitos de Matemática em suas vivências cotidianas, visando uma aprendizagem com significado.

Dando processeguimento aos conceitos, considere um círculo trigonométrico de raio unitário, isto é, raio de medida igual a 1 conforme a Figura 25 seguinte.

Nesse contínuo, o professor poderá começar relembrando que o círculo trigonométrico (Figura 25) é uma circunferência de raio r, com centro na origem do plano cartesiano, que por sua vez é dividida em quatro partes iguais denominadas quadrantes (Q), na qual:

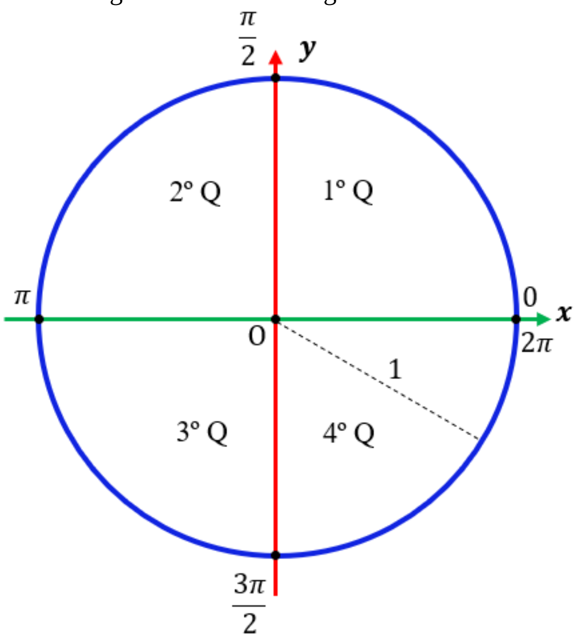
O 1º quadrante: compreende os ângulos entre $0°$ e $90°$ graus ou entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ radianos;

O 2º quadrante: compreende os ângulos entre $90°$ e $180°$ graus ou entre $\frac{\pi}{2}$ e π radianos;

O 3º quadrante: compreende os ângulos entre $180°$ e $270°$ graus ou entre π e $\frac{3\pi}{2}$ radianos;

O 4º quadrante: compreende os ângulos entre $270°$ e $360°$ graus ou entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π radianos.

Figura 25 - Círculo trigonométrico.

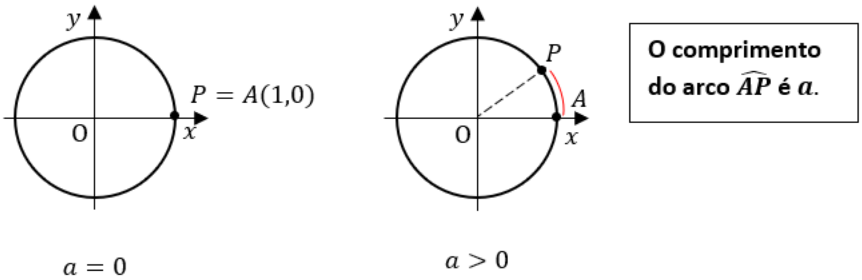


Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Nesse contexto, o professor poderá fazer uma revisão no que diz respeito a associação de números reais a pontos no círculo trigonométrico, conforme descrito a seguir. Assim, fazendo a associação a cada número real a, com $0 \leq a < 2\pi$, a um único ponto P do círculo trigonométrico, de modo que:

- se $a = 0$, então o ponto P coincide com o ponto $A(1, 0)$;
- se $a > 0$, então descrevemos, a partir do ponto A, no sentido anti-horário, um arco de comprimento a cujas extremidades são os pontos A e P, como mostrado na Figura 26.

Figura 26 - Associação de número real no círculo trigonométrico.



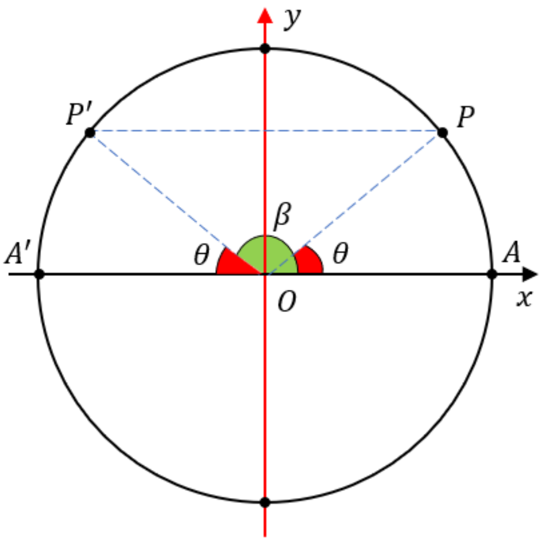
Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

É válido enfatizar que o professor reforce no círculo trigonométrico os 3 (três) tipos de simetrias: em relação ao eixo vertical (eixo do seno), em relação ao eixo horizontal (eixo do cosseno) e em relação ao centro, haja vista que são um dos pontos chave para o desenvolvimento do jogo bingo dos senos-cossenos.

Assim, para o estudo de cada uma delas, tomamos um arco de medida a radianos, do 1º quadrante, correspondente ao número real a com $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ ($a = \widehat{AP}$, no sentido anti-horário). Nessa perspectiva, como forma de melhor esclarecimento foi discorrido uma formalização matemática das simetrias no círculo trigonométrico, para que em caso de eventuais dúvidas dos alunos quanto as simetrias, o professor possa saná-las.

- **Simetria em relação ao eixo vertical (eixo do seno)**

Figura 27 - Simetria em relação ao eixo do seno no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Fez-se uma demonstração dessa simetria visando maior entendimento por parte do professor, conforme apresentado: Sejam A, A', P e P' pontos do círculo trigonométrico, em que o ponto A é a origem do círculo trigonométrico e o simétrico de A em relação ao eixo vertical é o ponto A' e o simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P'. Como tomou-se como referência o raio medindo 1, o comprimento de cada arco é igual a medida do seu ângulo central, isto é, se o arco $\widehat{AP} = a$, então $\theta = a$. Assim como o arco $\widehat{AA'} = \pi$ e o arco $\widehat{AP}$ é côngruo ao arco $\widehat{A'P'}$, então a medida do arco $\widehat{AP'} = \pi - a$ implica que $\widehat{AP'} = \pi - \theta$, ou seja, $\widehat{AP'} = \beta$. Assim, utilizando a fórmula da diferença de dois arcos tem-se:

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}(\pi)\cos(\theta) - \cos(\pi)\,sen(\theta)$$

$$\text{sen}(\pi - \theta) = 0\cos(\theta) - (-1)\text{sen}(\theta)$$

$$\text{sen}(\pi - \theta) = 0 + \text{sen}(\theta)$$

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(\pi)\cos(\theta) + \text{sen}(\pi)\,\text{sen}(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) + 0$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta), \text{ pois } \cos(\pi) = -1 \text{ e } \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

Portanto, $\mathbf{sen}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{sen}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})$.

Exemplo de aplicação dessa simetria:

Sejam os pontos P e P', imagens dos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, respectivamente, simétricos em relação ao eixo vertical.

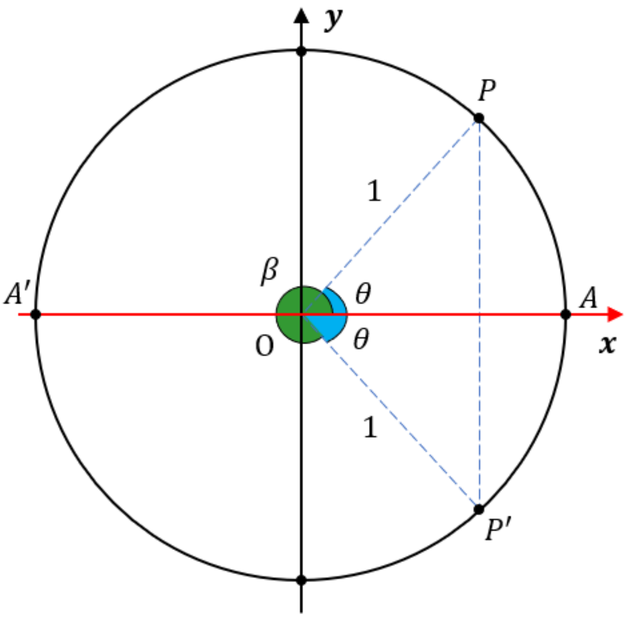
Note que, pelo fato do ponto P pertencer ao primeiro quadrante e ser simétrico em relação ao eixo vertical ao ponto P' pertencente ao segundo quadrante do círculo trigonométrico, tem-se que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- **Simetria em relação ao eixo horizontal (eixo do cosseno)**

Figura 28 - Simetria em relação ao eixo do cosseno no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

De modo análogo ao que foi feito na demonstração da simetria do eixo vertical também foi demonstrado relativamente a simetria do eixo horizontal, conforme segue: Sejam A, P e P'

pontos do círculo trigonométrico, na qual o ponto A é a origem do círculo trigonométrico. O simétrico de P em relação ao eixo horizontal, o ponto P'.

Assim, tomando como referência o raio medindo 1, o comprimento de cada arco é igual a medida do seu ângulo central, isto é, se o arco $\widehat{AP} = a$, então $\theta = a$, assim como o arco $\widehat{AP}$ é côngruo ao arco $\widehat{AP'}$, em virtude, dos seus ângulos centrais serem congruentes, logo a medida do arco $\widehat{APP'} = 2\pi - a$ resulta que $\widehat{APP'} = 2\pi - \theta$, ou seja, $\widehat{APP'} = \beta$. Logo, utilizando a fórmula da diferença de dois arcos tem-se:

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(2\pi)\cos(\theta) + \text{sen}(2\pi)\,\text{sen}(\theta)$$
$$\cos(2\pi - \theta) = 1\cos(\theta) + 0\text{sen}(\theta)$$
$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta) + 0$$
$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$$
$$\text{sen}(2\pi - \theta) = \text{sen}(2\pi)\cos(\theta) - \cos(2\pi)\,\text{sen}(\theta)$$
$$\text{sen}(2\pi - \theta) = 0 - \text{sen}(\theta)$$
$$\text{sen}(2\pi - \theta) = -\text{sen}(\theta), \text{ pois } \cos(2\pi) = 1 \text{ e } \text{sen}(2\pi) = 0.$$

Portanto, $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{sen}(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{sen}(\boldsymbol{\theta})$**.**

Exemplo de aplicação dessa simetria:

Sejam os pontos P e P', imagens dos números reais $\frac{\pi}{3}$ e $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, respectivamente e simétricos em relação ao eixo horizontal.

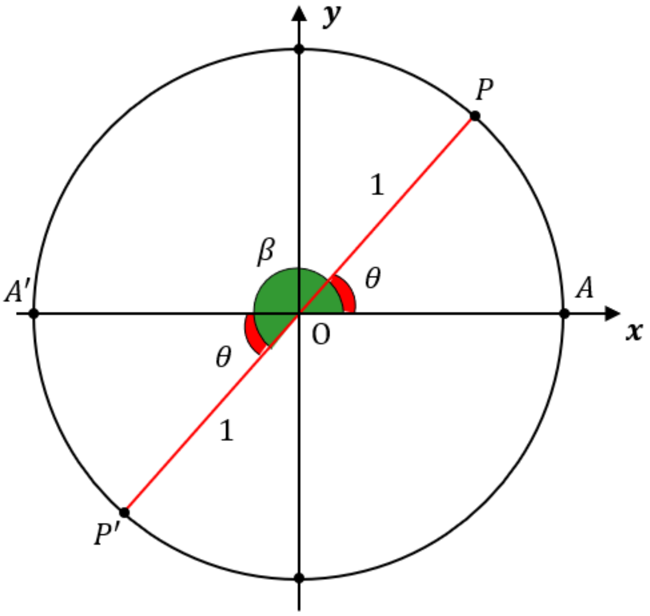
Note que, o fato do ponto P pertencer o primeiro quadrante e ser simétrico em relação ao eixo horizontal ao ponto P' que pertence ao quarto quadrante do círculo trigonométrico, tem-se que:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- **Simetria em relação ao centro**.

Figura 29 - Simetria em relação ao centro do círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Assim como foi apresentado uma demonstração para as simetrias anteriores com a simetria em relação ao centro não seria diferente. Sendo assim, segue uma proposta de demonstração: Sejam A, A', P e P' pontos do círculo trigonométrico, em que o ponto A é a origem do círculo trigonométrico e o simétrico de A em relação ao centro é o ponto A' e o simétrico de P em relação ao centro é o ponto P'. Tomando como referência o raio medindo 1, o comprimento de cada arco é igual a medida do seu ângulo central, isto é, se o arco $\widehat{AP} = a$, então $\theta = a$.

Assim, como o arco $\widehat{AA'} = \pi$ e o arco $\widehat{AP}$ é côngruo ao arco $\widehat{A'P'}$, uma vez que, o ângulo $A'\hat{O}P'$ é congruente ao ângulo $A\hat{O}P$, pois são ângulos opostos pelo vértice, então a medida do arco $\widehat{AP'} = \pi + a$ implica que $\widehat{AP'} = \pi + \theta$, ou seja, $\widehat{AP'} = \delta$. Assim, utilizando a fórmula da soma de dois arcos tem-se:

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(\theta) + \cos(\pi)\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = 0\cos(\theta) + (-1)\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = 0 - \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\pi + \theta) = \cos(\pi)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) - 0$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta), \text{ pois } \operatorname{sen}(\pi) = 0 \text{ e } \cos(\pi) = -1.$$

Portanto, $\mathbf{sen}(\boldsymbol{\delta}) = -\mathbf{sen}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\delta}) = -\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})$.

Exemplo de aplicação dessa simetria:

Sejam os pontos P e P', imagens dos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, respectivamente e simétricos em relação ao centro.

Observe que o fato do ponto P pertencer ao primeiro quadrante e ser simétrico em relação ao centro ao ponto P' pertencente ao terceiro quadrante do círculo trigonométrico, tem-se:

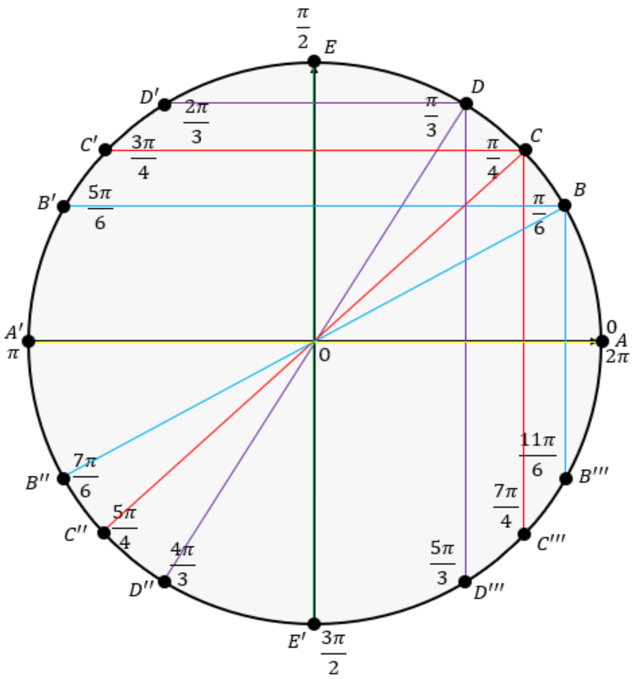
$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Após essa breve revisão das simetrias no círculo trigonométrico apresentamos o exercício 3 (elaborado para o jogo bingo dos senos-cossenos) como uma proposta de solução visando maior entendimento desses conceitos.

Exercício 3. Sejam A, B, C, D e E pontos do círculo trigonométrico (Figura 30) e imagens dos números reais $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente. Determine as simetrias dos pontos A, B, C, D e E em relação ao eixo vertical (eixo do seno), em relação ao eixo horizontal (eixo do cosseno) e em relação ao centro quando houver.

Figura 30 - Simetrias em relação aos pontos A, B, C, D e E no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Professor, para resolver esse exercício, é importante que os alunos possuam conhecimentos prévios, a saber: conversão de ângulos de radianos em graus, saber que o plano cartesiano é dividido em quatro (4) quadrantes, associação de um número real a um ponto no círculo trigonométrico e estudo dos sinais do seno e cossenos nos quadrantes do círculo trigonométrico.

Proposta de solução

- **Simetrias em relação ao eixo vertical**

Observe que dois pontos quaisquer do círculo trigonométrico são simétricos em relação ao eixo vertical se a soma das imagens dos pontos for igual a π. Além disso, a distância do ponto ao eixo vertical é a mesma distância do seu simétrico ao eixo vertical (veja na Figura 28). Assim, tem-se que:
Os pontos A e A' são imagens dos números reais 0 e π, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo vertical, pois $0 + \pi = \pi$.
Os pontos B e B' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo vertical, pois $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$.
Os pontos C e C' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo vertical, pois $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$.
Os pontos D e D' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo vertical, pois $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.
Já o ponto E não possui nenhum simétrico em relação ao eixo vertical, pois está sobre o eixo vertical.

- **Simetrias em relação ao eixo horizontal**

Professor note que dois pontos quaisquer do círculo trigonométrico são simétricos em relação ao eixo horizontal se a soma das imagens dos pontos for igual a 2π. Além disso, a distância do ponto ao eixo horizontal é a mesma do seu simétrico ao eixo horizontal (veja na Figura 28).

Assim, tem-se que:

Os pontos E e E' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo horizontal, pois $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$.

Os pontos B e B''' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo horizontal, pois $\frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 2\pi$.

Os pontos C e C''' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo horizontal, pois $\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 2\pi$.

Os pontos D e D''' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, respectivamente, e simétricos em relação ao eixo horizontal, pois $\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$.

Já o ponto A não possui nenhum simétrico em relação ao eixo horizontal, pois está sobre o eixo horizontal.

- **Simetrias em relação ao centro**

Professor, observe que dois pontos quaisquer do círculo trigonométrico são simétricos em relação ao centro do círculo se a diferença das imagens dos pontos em valor absoluto for igual a π. Além disso, distância do ponto ao centro do círculo é a mesma distância do seu simétrico ao centro do círculo (veja na Figura 30).

Assim, note que:

Os pontos A e A' são imagens dos números reais 0 e π, respectivamente, e simétricos em relação ao centro, pois $\pi - 0 = \pi$.

Os pontos B e B'' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$, respectivamente, e simétricos em relação ao centro, pois $\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi$.

Os pontos C e C'' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, respectivamente, e simétricos em relação ao centro, pois $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$.

Os pontos D e D'' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, respectivamente, e simétricos em relação ao centro, pois $\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$.

Os pontos E e E'' são imagens dos números reais $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, respectivamente, e simétricos em relação ao centro, pois $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$.

Segue o Quadro 3, ilustrando as simetrias existentes dos pontos A, B, C, D e E no círculo trigonométrico mostrado na Figura 30.

Quadro 3 - Simetrias dos pontos A, B, C, D e E.

Simetrias			
Simétrico de	Em relação eixo vertical	Em relação eixo horizontal	Em relação ao centro
0	π	$-$	π
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$-$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

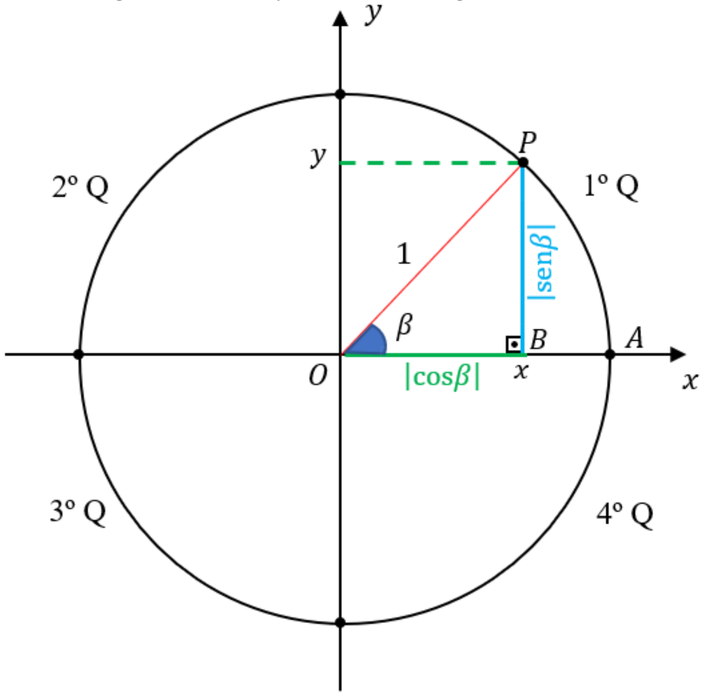
Redução ao 1º Quadrante

Nesse contínuo, é importante que o professor mostre aos alunos a redução dos 2º, 3º e 4º quadrantes ao 1º quadrante geometricamente e algebricamente, tendo em vista que se configura como um dos pontos cruciais para o desenvolvimento do jogo bingo dos senos-cossenos. Nesse sentido, a seguir foi mostrado como são feitas tais reduções.

Assim sendo, seja o círculo trigonométrico de raio unitário, ou seja, de raio 1 com centro na origem, o ponto $O = (0,0)$ do plano cartesiano mostrado na Figura 31. Considere os pontos

$P = (x, y)$ e $A = (1, 0)$ com A sendo a origem do círculo trigonométrico e um arco $\widehat{AP}$ com sentido anti-horário de comprimento β em radiano (caso a medida esteja em grau, basta converter usando a regra de três simples, lembrando que π radiano equivale a $180°$ graus).

Figura 31 - Redução no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Na Figura 31, note que o triângulo BOP é retângulo em B, então usando o conceito de razão trigonométrica, tem-se que:

$$\text{sen}\beta = \frac{\overline{BP}}{\overline{OP}} \Longrightarrow \text{sen}\beta = x \text{ e } \cos\beta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} \Longrightarrow \cos\beta = y$$

Assim, pode-se escrever o ponto P da seguinte maneira: $P = (\cos\beta, \text{sen}\beta)$, isto é, a abscissa do ponto P equivale ao cosseno do arco $\widehat{AP} = \beta$ e a ordenada do ponto P equivale ao seno do arco $\widehat{AP} = \beta$.

Segue o Quadro 4, ilustrando os sinais (positivo ou negativo) do seno e cosseno em cada um dos quadrantes de um ângulo β (ângulo central) qualquer de um círculo trigonométrico de raio 1.

Quadro 4 - Sinais do cosseno e seno em cada quadrante.

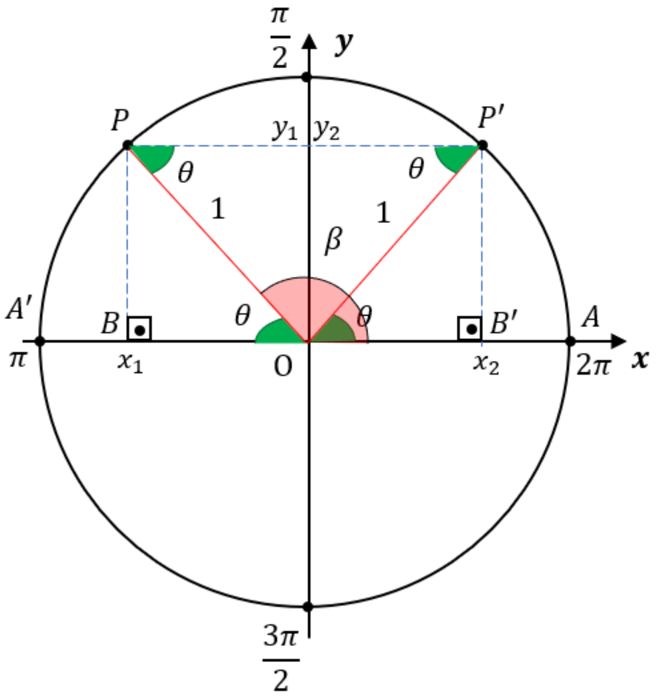
Quadrante	cosseno	seno	$\beta\ rad$	$\beta\ grau$
Primeiro	positivo	positivo	$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$	$0 < \beta < 90°$
Segundo	negativo	positivo	$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$	$90° < \beta < 180°$
Terceiro	negativo	negativo	$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$	$180° < \beta < 270°$
Quadrante	cosseno	seno	$\beta\ rad$	$\beta\ grau$
Quarto	positivo	negativo	$\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$	$270° < \beta < 360°$

Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Redução do 2º ao 1º quadrante

Segue uma explicação de como é feita a redução do 2º para o 1º quadrante. Considere o círculo trigonométrico mostrado na Figura 32.

Figura 32 - Redução do 2º ao 1º quadrante no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Sejam A e P pontos do círculo trigonométrico de raio 1 sendo o ponto A a origem do círculo, isto é, $A = (1, 0)$ e o ponto $P = (x_1, y_1)$ pertencente ao segundo quadrante tal que o arco $\widehat{AP}$ (no sentido anti-horário) mede β radiano, ou seja, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Assim sendo, tem-se que o $\cos\beta < 0$ e o $\text{sen}\beta > 0$.

Denote por B o pé da perpendicular baixada de P ao eixo OX (eixo horizontal), assim tem-se que o triângulo BOP é retângulo em B, logo $\overline{BP} = \text{sen}\beta$ e $\overline{BO} = -\cos\beta$. Considere o ponto P' como sendo o simétrico de P em relação ao eixo OY e designe por B' o pé da perpendicular baixada de P' ao eixo OX (eixo horizontal), assim resulta que o segmento $\overline{PP'}$ é paralelo ao segmento $\overline{BB'}$ e o segmento $\overline{OP}$ é transversal (Figura 32) logo o ângulo $O\hat{P}P' = B\hat{O}P$.

Além disso, sabe-se que o triângulo OPP' é isósceles de base $\overline{PP'}$ o que implica que o ângulo $O\hat{P}P' = P\widehat{P'}O$, isto é, $P\widehat{P'}O = \theta$.

De modo análogo, $O\widehat{P'}P = B'\hat{O}P'$, tem-se que os triângulos BOP e $B'OP'$ são congruentes pelo critério LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto ao lado) o que significa que o ponto P' tem o mesmo valor absoluto da abscissa de P e o mesmo valor absoluto da ordenada de P.

Como os pontos P e P' pertencem ao segundo e primeiro quadrantes respectivamente e são simétricos em relação ao eixo OY (eixo vertical), então de $P = (\cos\beta, \text{sen}\beta)$ obtem-se que $P' = (-\cos\beta, \text{sen}\beta)$. Sabendo que $\theta = \widehat{AP'}$ (no sentido anti-horário), pode-se escrever $P' = (\cos\theta, \text{sen}\theta)$ e como $\beta + \theta = \pi$ implica que $\theta = \pi - \beta$, o que resulta em $P' = \big(\cos(\pi - \beta), \text{sen}(\pi - \beta)\big)$.

Portanto, de $P' = (-\cos\beta, \text{sen}\beta)$ e $P' = \big(\cos(\pi - \beta), \text{sen}(\pi - \beta)\big)$ fazendo as comparações das coordenadas de P', resulta:

$$-\cos\beta = \cos(\pi - \beta) \Rightarrow \cos\beta = -\cos(\pi - \beta)$$

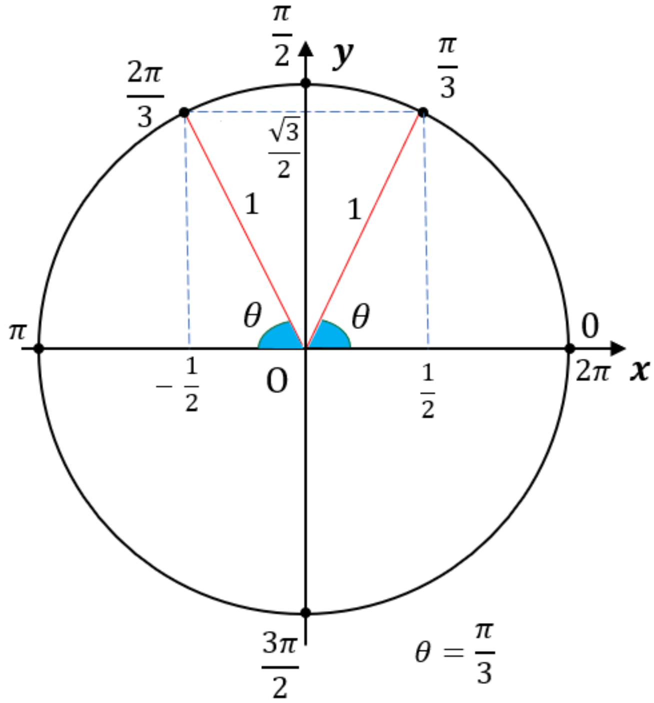
e

$$\text{sen}\beta = \text{sen}(\pi - \beta).$$

Exemplo de aplicação:

Obtenha, por redução ao 1º quadrante, os valores $\cos\frac{2\pi}{3}$ e $\text{sen}\frac{2\pi}{3}$.

Figura 33 - Exemplo de redução do 2º ao 1º quadrante no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Fazendo a conversão do valor $\frac{2\pi}{3}$ rad em graus.

Como $\pi = 180°$, então $\frac{2\pi}{3} = \frac{2x180°}{3} = 120°$. Logo, $\frac{2\pi}{3}$ pertence ao 2º quadrante, assim o $\cos\frac{2\pi}{3} < 0$ e $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} > 0$. Além disso, existe um número real a pertencente ao 1º quadrante que é simétrico em relação ao eixo vertical ao número real $\frac{2\pi}{3}$, então $a + \frac{2\pi}{3} = \pi$, implica que $a = \pi - \frac{2\pi}{3}$, isto é, $a = \frac{\pi}{3}$.

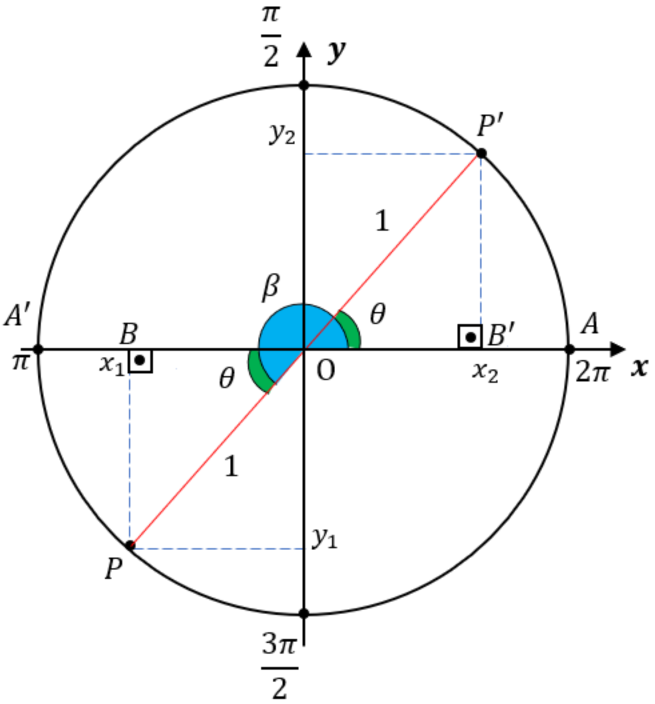
Portanto, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Redução do 3º ao 1º quadrante

Segue uma explicação de como é feita a redução do 3º para o 1º quadrante.

Considere o círculo trigonométrico mostrado na Figura 34.

Figura 34 - Redução do 3º ao 1º quadrante no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Sejam A e P pontos do círculo trigonométrico de raio 1 em que o ponto A é a origem do círculo, isto é, $A = (1, 0)$ e o ponto $P = (x_1, y_1)$ pertence ao terceiro quadrante tal que o arco $\widehat{AP}$ (no sentido anti-horário) mede β radiano, ou seja, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Assim sendo, tem-se $\cos\beta < 0$ e $\operatorname{sen}\beta < 0$.

Denote por B o pé da perpendicular baixada de P em relação ao eixo OX (eixo horizontal), note que o triângulo BOP é retângulo em B, logo $\overline{BP} = -\operatorname{sen}\beta$ e $\overline{BO} = -\cos\beta$. Sabendo que o ponto P' é o simétrico de P em relação ao centro do círculo trigonométrico, isto é, origem do plano cartesiano (Figura 34) e designando por B' o pé da perpendicular baixada de P' em relação ao eixo OX (eixo horizontal), resulta que os ângulos $B\hat{O}P$ e $B'\hat{O}P'$ são iguais, uma vez que são ângulos oposto pelo vértice o que permite dizer que os triângulos BOP e $B'OP'$ possuem um lado igual ($\overline{OP} = \overline{OP'}$) e dois ângulos iguais ($B\hat{O}P = B'\hat{O}P' = \theta$ e $O\hat{B}P = O\hat{B}P' = 90°$).

Assim tem-se que os triângulos BOP e $B'OP'$ são congruentes pelo critério LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto ao lado) o que significa que o ponto P' tem o mesmo valor absoluto da abscissa de P e o mesmo valor absoluto da ordenada de P e como os pontos P e P' pertencem ao terceiro e primeiro quadrante respectivamente e são simétrico em relação ao centro do círculo, então de $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ resulta que $P' = (-\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$. Sabendo que $\theta = \widehat{AP'}$

(no sentido anti-horário), pode-se escrever $P' = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e como $\beta = \theta + \pi$ implica que $\theta = \beta - \pi$, logo $P' = \big(\cos(\beta - \pi), \operatorname{sen}(\beta - \pi)\big)$.

Portanto, de $P' = (-\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$ e $P' = \big(\cos(\beta - \pi), \operatorname{sen}(\beta - \pi)\big)$ fazendo as comparações das coordenadas de P', obtêm-se:

$$-\cos\beta = \cos(\beta - \pi) \Longrightarrow \cos\beta = -\cos(\beta - \pi)$$

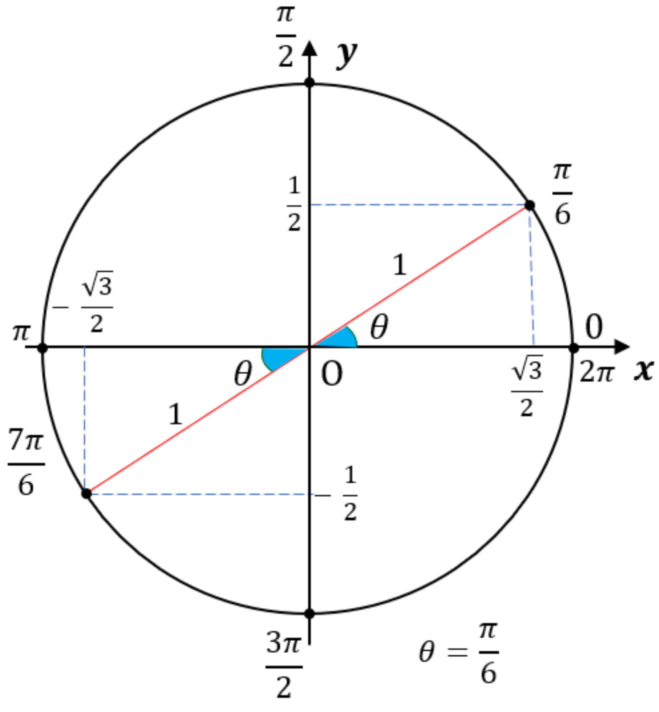
e

$$-\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\beta - \pi) \Longrightarrow \operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(\beta - \pi).$$

Exemplo de aplicação:

Obtenha, por redução ao 1º quadrante, os valores $\cos\frac{7\pi}{6}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$.

Figura 35 - Exemplo de redução do 3º ao 1º quadrante no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Fazendo a conversão do valor $\frac{7\pi}{6}$ rad em graus.

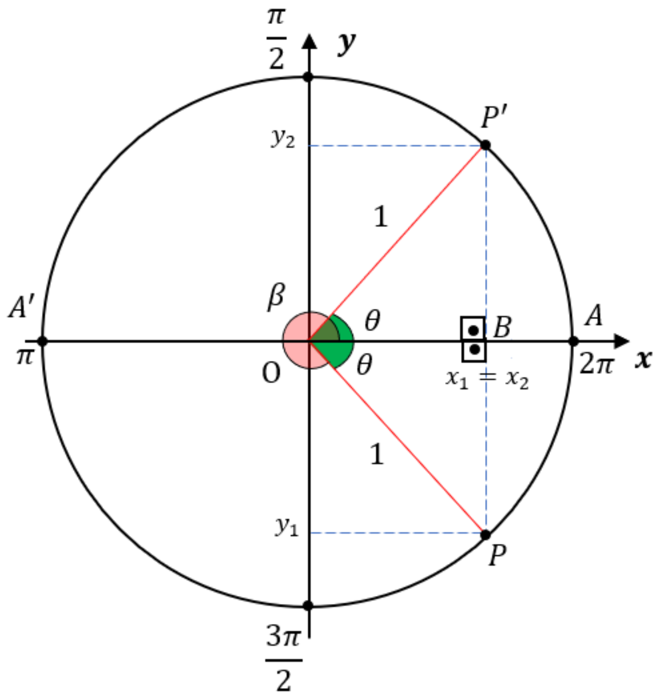
Como $\pi = 180°$, então $\frac{7\pi}{6} = \frac{7x180°}{6} = 210°$. Logo, $\frac{7\pi}{6}$ pertence ao 3º quadrante, assim, o $\cos\frac{7\pi}{6} < 0$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} < 0$. Além disso, existe um número real $\boldsymbol{a}$ pertencente ao 1º quadrante que é simétrico em relação ao centro do círculo ao número real $\frac{7\pi}{6}$ com $a < \frac{7\pi}{6}$, então $\frac{7\pi}{6} - a = \pi$, implica, $a = \frac{7\pi}{6} - \pi$, isto é, $a = \frac{\pi}{6}$.

Portanto, $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\text{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Redução do 4º ao 1º quadrante

Segue uma explicação de como é feita a redução do 4º para o 1º quadrante. Considere o círculo trigonométrico mostrado na Figura 36.

Figura 36 - Redução do 4º ao 1º quadrante no círculo trigonométrico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

Sejam A e P pontos do círculo trigonométrico de raio 1, na qual o ponto A é a origem do círculo, isto é, $A = (1, 0)$ e o ponto $P = (x_1, y_1)$ pertencente ao quarto quadrante tal que o arco $\widehat{AP}$ (no sentido anti-horário) mede β radiano, ou seja, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Assim, tem-se que $\cos\beta > 0$ e $\text{sen}\beta < 0$.

Denote por B o pé da perpendicular baixada de P em relação ao eixo OX, observe que o triângulo BOP é retângulo em B, logo resulta em $\overline{BP} = -\text{sen}\beta$ e $\overline{OB} = \cos\beta$. Seja o ponto P' o simétrico de P em relação ao eixo OX (eixo horizontal), tem-se que P' está situado no primeiro quadrante (Figura 36), neste caso o pé da perpendicular baixada de P' ao eixo OX (eixo horizontal) coincide com o ponto B, então o segmento $\overline{BP}$ é congruente ao segmento $\overline{BP'}$.

Como o lado $\overline{OP}$ do triângulo BOP é igual ao lado $\overline{OP'}$ do triângulo BOP' e o lado $\overline{OB}$ é comum aos dois triângulos, então os triângulos BOP e BOP' são congruentes pelo critério LLL (lado, lado, lado) implica que os ângulos $P\hat{O}B$ e $P'\hat{O}B$ são congruentes, isto é, $P\hat{O}B = P'\hat{O}B = \theta$.

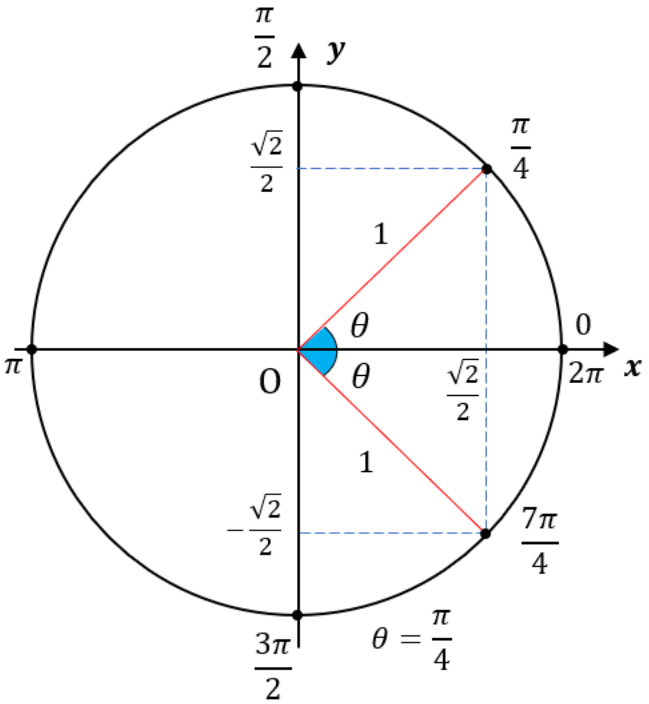
Portanto, $P' = (\cos\theta, \text{sen}\theta)$, e como P' é o simétrico de $P = (\cos\beta, \text{sen}\beta)$, tem-se que $P' = (\cos\beta, -\text{sen}\beta)$, além disso, $\beta + \theta = 2\pi$, isto é, $\theta = 2\pi - \beta$ conclui-se que

$\cos\beta = \cos\theta \Rightarrow \cos\beta = \cos(2\pi - \beta)$ e $-\text{sen}\beta = \text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\beta = -\text{sen}(2\pi - \beta)$.

Exemplo de aplicação:

Obtenha, por redução ao 1º quadrante, os valores $\cos\frac{7\pi}{4}$ e $\text{sen}\frac{7\pi}{4}$.

Figura 37 - Exemplo de redução do 4º ao 1º quadrante no círculo trigonométrico.



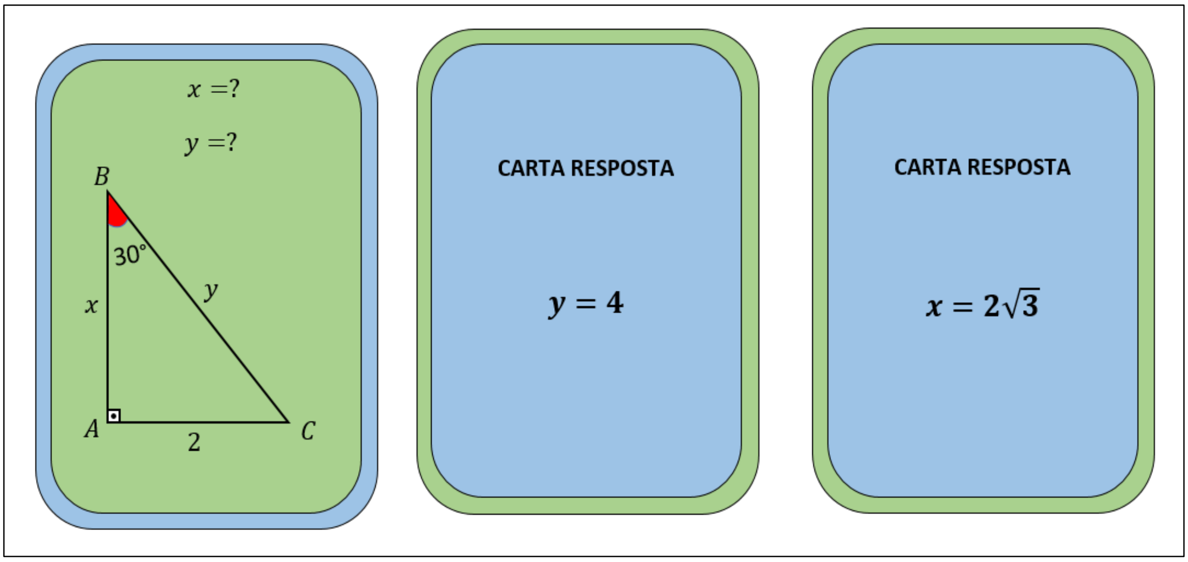
Fonte: Arquivo pessoal do autor, construído a partir do livro didático (IEZZI, 2016).

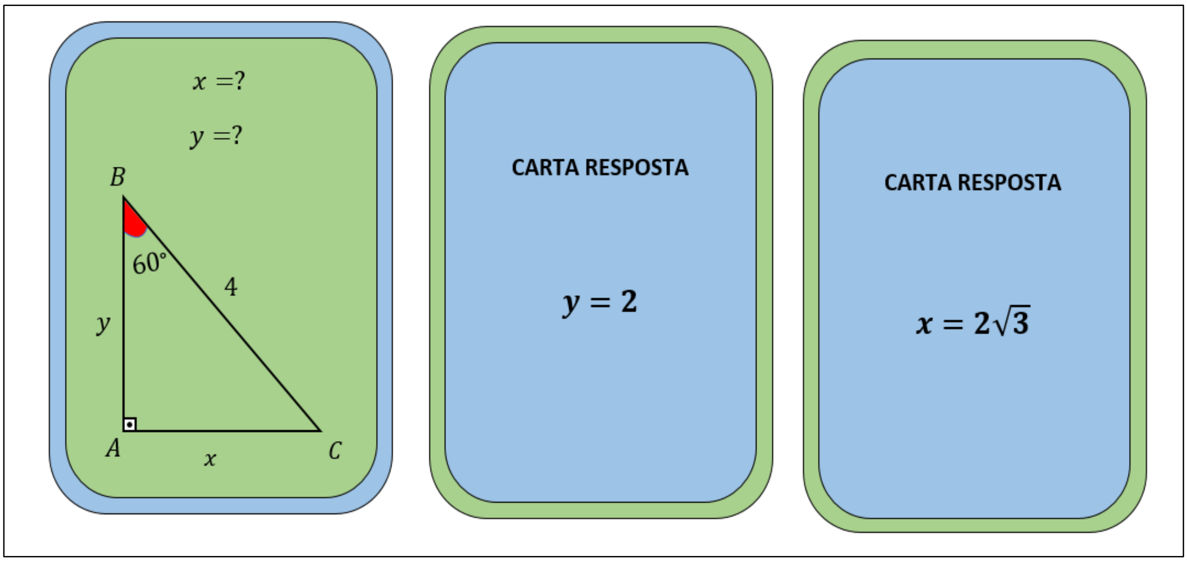
Fazendo a conversão do valor $\frac{7\pi}{4}$ rad em graus.

Como $\pi = 180°$, então $\frac{7\pi}{4} = \frac{7x180°}{4} = 315°$. Logo, $\frac{7\pi}{6}$ pertence ao 4º quadrante, assim, $\cos\frac{7\pi}{4} > 0$ e $\text{sen}\frac{7\pi}{4} < 0$. Além disso, existe um número real $\boldsymbol{a}$ pertencente ao 1º quadrante que é simétrico em relação ao eixo horizontal ao número real $\frac{7\pi}{4}$, então $\frac{7\pi}{4} + a = 2\pi$, implica que $a = 2\pi - \frac{7\pi}{4}$, isto é, $a = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

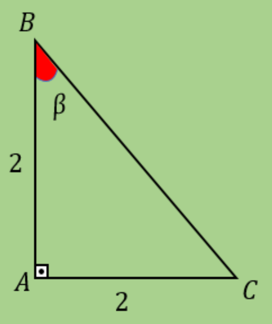
APÊNDICE B – Baralho da Trigonometria





$tg(\beta) = ?$

$\beta = ?$



CARTA RESPOSTA

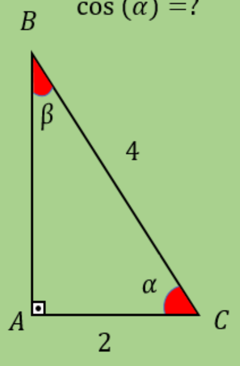
$$tg(\beta) = 1$$

CARTA RESPOSTA

$$\beta = 45°$$

$sen(\beta) = ?$

$\cos(\alpha) = ?$



CARTA RESPOSTA

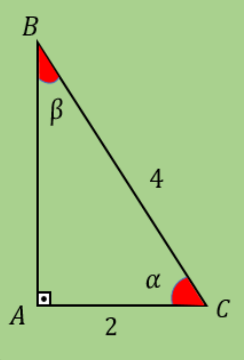
$$sen(\beta) = \frac{1}{2}$$

CARTA RESPOSTA

$$cos(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$\beta = ?$

$\alpha = ?$



CARTA RESPOSTA

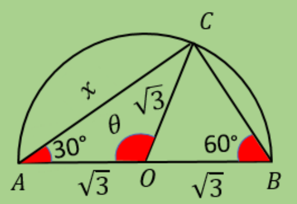
$$\beta = 30°$$

CARTA RESPOSTA

$$\alpha = 60°$$

$x = ?$

$\theta = ?$



CARTA RESPOSTA

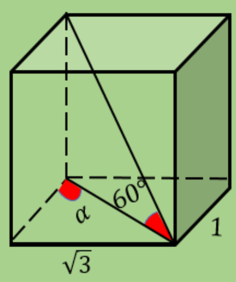
$\boldsymbol{\theta = 120°}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{x = 3}$

$\alpha = ?$

$tg(\alpha) = ?$



CARTA RESPOSTA

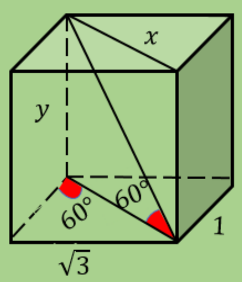
$\boldsymbol{\alpha = 60°}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{tg(\alpha) = \sqrt{3}}$

$x = ?$

$y = ?$



CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{y = 2\sqrt{3}}$

CARTA RESPOSTA

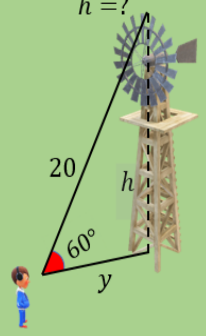
$\boldsymbol{x = 2}$

CARTA RESPOSTA

$h = 10\sqrt{3}$

$y = ?$

$h = ?$

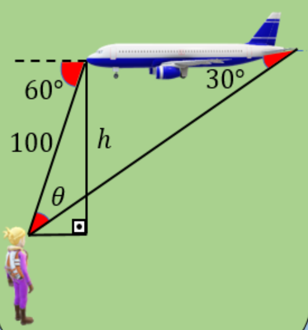


CARTA RESPOSTA

$y = 10$

$h = ?$

$\theta = ?$



CARTA RESPOSTA

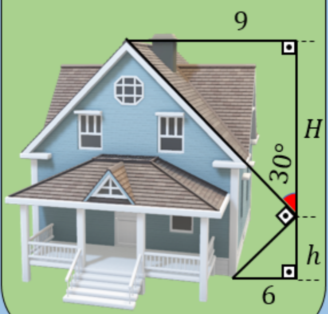
$h = 50\sqrt{3}$

CARTA RESPOSTA

$\theta = 30°$

$H = ?$

$h = ?$



CARTA RESPOSTA

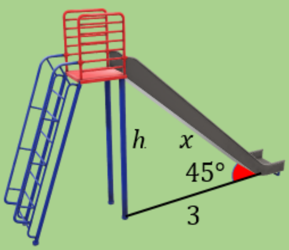
$H = 9\sqrt{3}$

CARTA RESPOSTA

$h = 2\sqrt{3}$

$h = ?$

$x = ?$



CARTA RESPOSTA

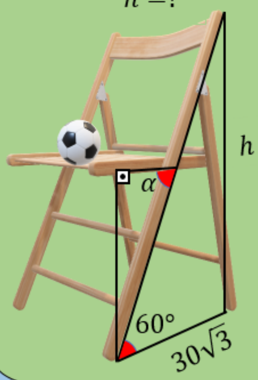
$x = 3\sqrt{2}$

CARTA RESPOSTA

$h = 3$

$\alpha = ?$

$h = ?$



CARTA RESPOSTA

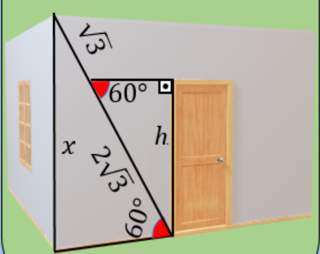
$\alpha = 60°$

CARTA RESPOSTA

$h = 90$

$x = ?$

$h = ?$



CARTA RESPOSTA

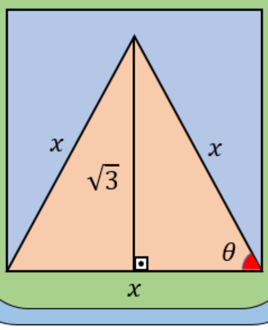
$x = 4,5$

CARTA RESPOSTA

$h = 3$

$\theta = ?$

$x = ?$



CARTA RESPOSTA

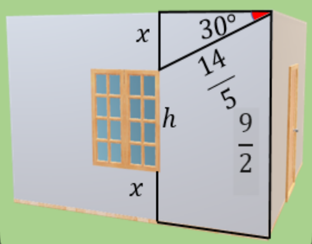
$\boldsymbol{x = 2}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{\theta = 60°}$

$x = ?$

$h = ?$



CARTA RESPOSTA

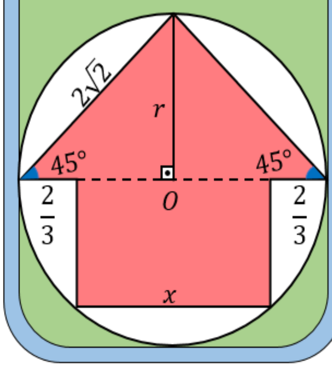
$\boldsymbol{x = \frac{7}{5}}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{h = 1,7}$

$r = ?$

$x = ?$



CARTA RESPOSTA

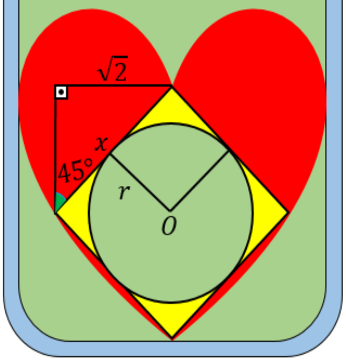
$\boldsymbol{r = 2}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{x = \frac{8}{3}}$

$x = ?$

$r = ?$



CARTA RESPOSTA

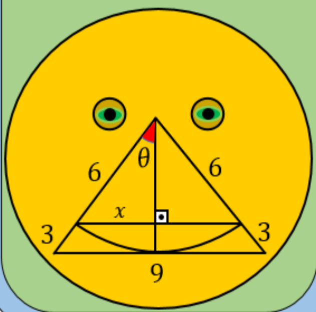
$\boldsymbol{x = 2}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{r = 1}$

$\theta = ?$

$x = ?$



CARTA RESPOSTA

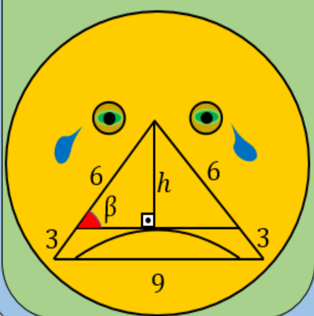
$\boldsymbol{\theta = 30°}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{x = 3}$

$\beta = ?$

$h = ?$



CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{\beta = 60°}$

CARTA RESPOSTA

$\boldsymbol{h = 3\sqrt{3}}$

Carta verso do baralho da trigonometria.

APÊNDICE C – Bingo dos senos-cossenos

Círculo trigonométrico de raio 1.

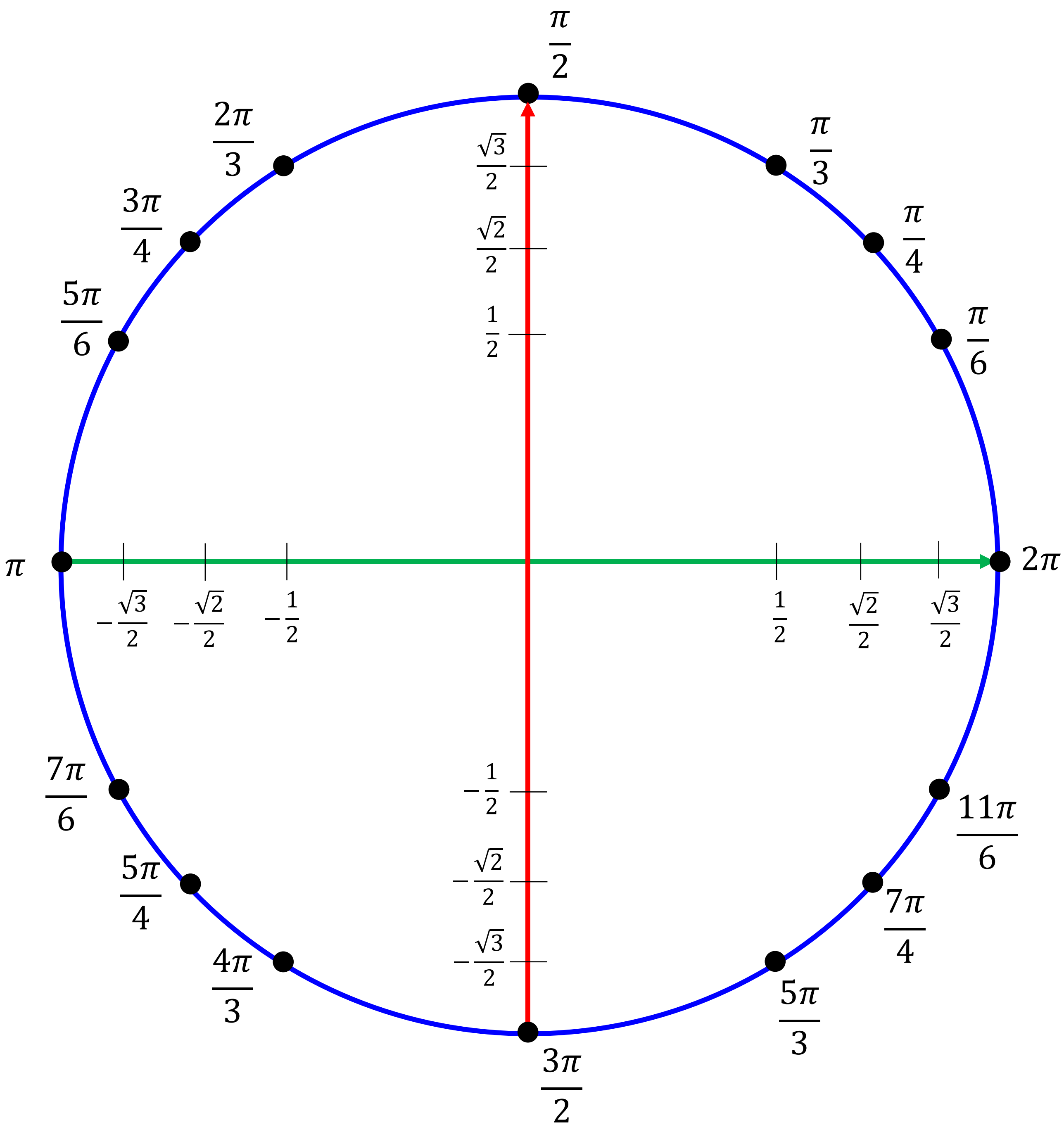
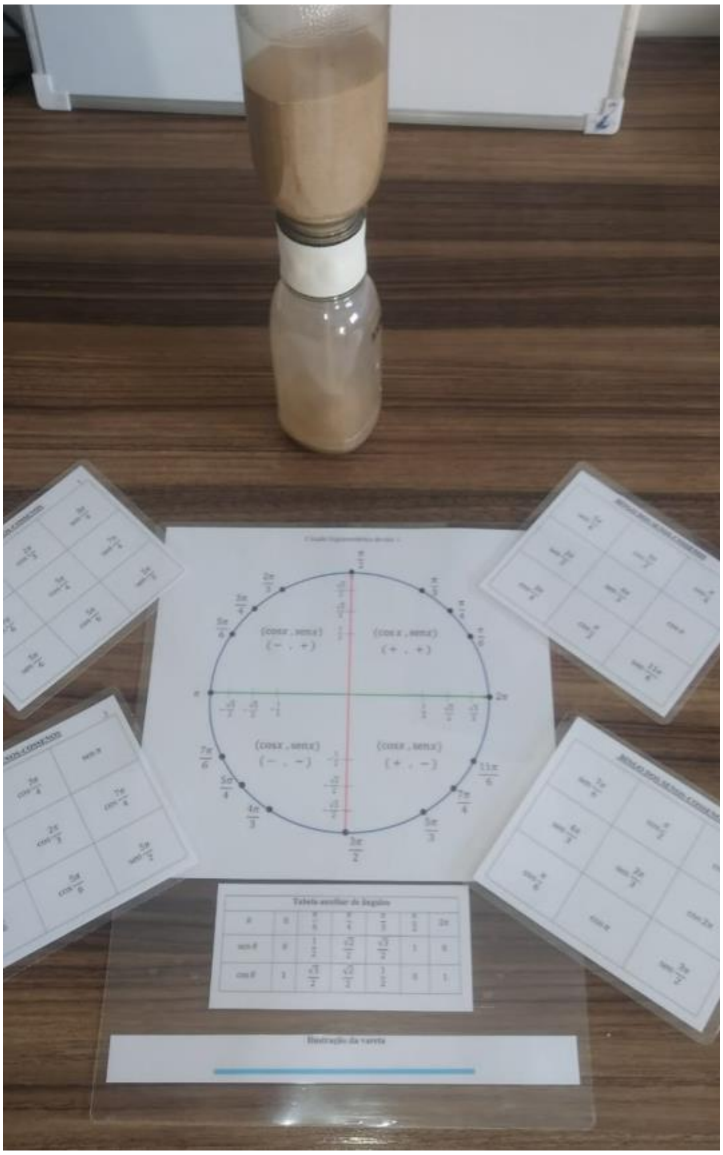


Ilustração das varetas para uso das simetrias:

Em relação ao eixo horizontal

Em relação ao eixo vertical

Em relação ao centro



Cartelas do bingo dos senos-cossenos referente a primeira maneira de jogar.

<u>BINGO DOS SENOS-COSSENOS</u>

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$
$\cos\frac{7\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

<u>BINGO DOS SENOS-COSSENOS</u>

$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$	$\cos 2\pi$
$\cos\frac{\pi}{6}$	$\cos\pi$	$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\pi$
$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\cos\frac{7\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$	$\cos\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$	$\cos\pi$
$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{5\pi}{6}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$
$\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}$	$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{7\pi}{4}$
$\text{sen}\,0$	$\cos\frac{11\pi}{6}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\cos 0$
$\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}$	$\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}$	$\cos\pi$
$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\cos\frac{3\pi}{2}$	$\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{sen} 2\pi$
$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$	$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{7\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{11\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\cos 0$
$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$
$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\cos\pi$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{7\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\pi$	$\cos\frac{11\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$	$\cos\frac{7\pi}{6}$	$\cos 0$
$\operatorname{sen} 0$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$	$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{2}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4}$	$\cos\frac{7\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{3}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos 2\pi$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen} 2\pi$
$\cos\frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$	$\cos\frac{11\pi}{6}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos \pi$	$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}$	$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$
$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$	$\cos \pi$	$\cos \frac{2\pi}{3}$
$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}$	$\cos \frac{\pi}{3}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos \frac{4\pi}{3}$	$\cos 0$	$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$
$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$	$\cos \frac{3\pi}{4}$	$\operatorname{sen} 2\pi$
$\cos \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}$	$\cos \frac{2\pi}{3}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos 2\pi$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
$\operatorname{sen} 2\pi$	$\cos 0$	$\cos\frac{2\pi}{3}$
$\operatorname{sen} 2\pi$	$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{11\pi}{6}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{7\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$
$\cos\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$	$\cos\frac{3\pi}{2}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{5\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
$\operatorname{sen} 2\pi$	$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{4\pi}{3}$
$\operatorname{sen} 2\pi$	$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{11\pi}{6}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\pi$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$
$\cos 2\pi$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{2}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{5\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos 2\pi$
$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$	$\cos\frac{11\pi}{6}$

BINGO DOS SENOS-COSSENOS

$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$	$\cos\frac{5\pi}{4}$	$\cos\frac{11\pi}{6}$
$\operatorname{sen} 0$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{3\pi}{2}$

APÊNDICE D – Ficha de jogada

Instituição: ____

Aluno (a):____

Série:____ Turma:_____ Cidade, ____/_____/_____.

Professor:____

Ficha de jogada: [   ] Baralho da trigonometria

[   ] Bingo dos senos-cossenos

Caro(a) estudante, utilize essa de ficha de jogada para fazer os cálculos necessários durante o jogo, especificando qual a razão trigonométrica ou as simetrias utilizadas. Ao resolver os exercícios, deixe registradas as suas dúvidas.

Espaço destinado aos cálculos:

Exercício nº____

APÊNDICE E – Ficha de avaliação pós-jogo

Instituição: ____

Aluno (a):____

Série:____ Turma:_____ Cidade, ____/_____/_____.

Professor:____

Questionário avaliativo pós-jogo: [   ] Baralho da trigonometria

[   ] Bingo dos senos-cossenos

Caro(a) estudante, obrigado pela sua colaboração. Sua opinião é muito importante.

1. Você encontrou dificuldades para jogar o jogo? Se sim, quais?

2. Você utilizou alguma estratégia no jogo? Se sim, qual?

3. O que você achou do jogo envolvendo conteúdos de Matemática?

4. Você conseguiu compreender melhor os conteúdos abordados no jogo?

5. Em qual momento você apresentou maior dificuldade no jogo?

APÊNDICE F – Atividades complementares relativas à tangente

Atividade 1.

Considere um círculo trigonométrico de raio 1, com origem em $A = (1, 0)$. Seja P um ponto do círculo pertencente ao 3º quadrante tal que o arco $\widehat{AP}$ (no sentido anti-horário) mede $\frac{7\pi}{6}\ rad$. Determine o simétrico em relação ao centro do círculo trigonométrico e calcule a tangente da medida do arco $\widehat{AP}$.

(Dica: usa a relação tg $\beta\ = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}$).

Atividade 2.

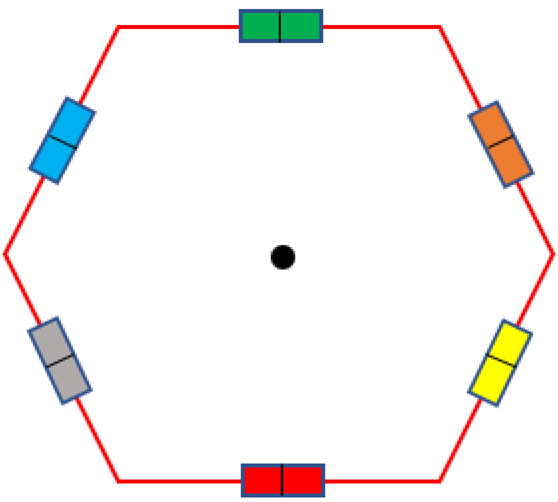
Considere um círculo trigonométrico de raio 1, com origem em $A = (1, 0)$. Seja P um ponto do círculo trigonométrico tal que o arco $\widehat{AP}$ (no sentido anti-horário) mede $\frac{31\pi}{4}\ rad$. Determine a coordenada de P e calcule a tangente da medida do arco $\widehat{AP}$.

(Dica: $P = (\cos\beta,\ \text{sen}\beta)$ e usa a relação tg $\beta\ = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}$).

Atividade 3.

Na cidade de Catalão foi construída uma praça em formato hexagonal regular com perímetro 36 metros e instalados bancos no ponto médio de cada lado da praça como mostrado na Figura 36. Se três pessoas chegarem nessa praça, qual será a menor e a maior distância que elas podem sentar em bancos distintos?

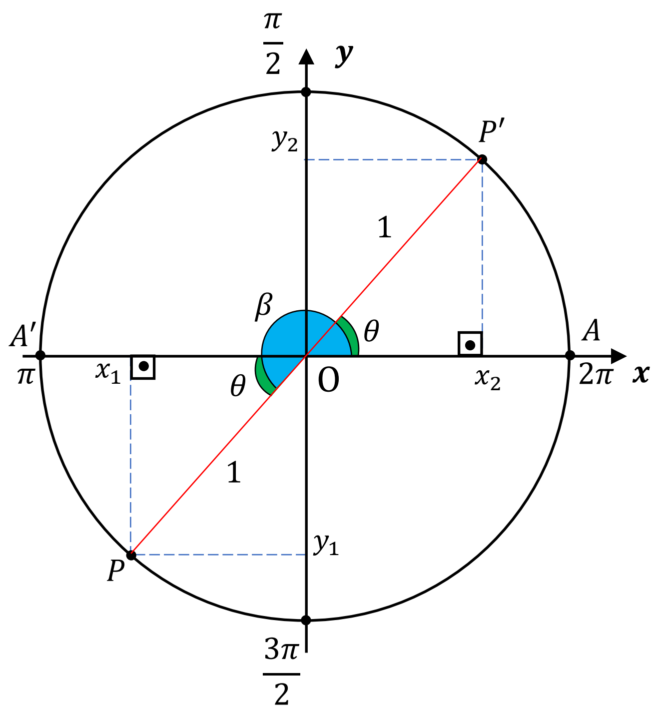
Figura 38 - Praça



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Proposta de solução da atividade 1.

Figura 39 - Ilustração da proposta de solução da atividade 1 relativa a tangente.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Seja P o ponto pertencente ao 3º quadrante do círculo trigonométrico de raio 1 e de imagem $\frac{7\pi}{6}$. Assim, o simétrico de P em relação ao centro é um ponto P'que pertence ao primeiro (1º) quadrante cuja imagem é o número real a, logo tem-se que o arco $\widehat{AP'} = a$ (no sentido anti-horário), isto é, $\widehat{AP'} = \theta$ e o arco $\widehat{AP'}$ é côngruo ao arco $\widehat{A'P}$ (no sentido anti-horário), uma vez que o ângulo $A\hat{O}P'$ é congruente ao ângulo $A'\hat{O}P$, pois são ângulos opostos pelo vértice, então a medida do arco $\widehat{AP} = \pi + a$, isto é, $\beta = \pi + a$.

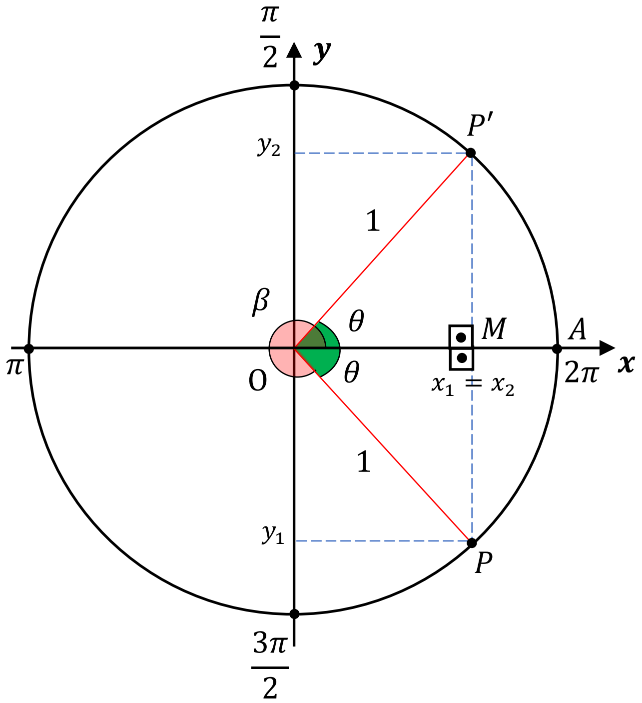
Como o círculo tem raio 1, implica que $\beta = \frac{7\pi}{6}$ o que resulta $\frac{7\pi}{6} = \pi + a$, ou seja, $a = \frac{7\pi}{6} - \pi$ logo $a = \frac{\pi}{6}$. Dessa forma, o simétrico de P em relação ao centro do círculo trigonométrico é ponto P' de imagem $\frac{\pi}{6}$. Desse modo, tem-se que $P = (\cos\frac{7\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})$ resulta que $P' = (\cos\frac{7\pi}{6} - \pi), \operatorname{sen}(\frac{7\pi}{6} - \pi))$, ou seja $P' = (\cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6})$ e o fato de P pertencer ao 3º quadrante e P' ao 1º quadrante e serem simétrico, tem-se que $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$. Logo, pela dica dada na atividade 1, conclui-se que

$$\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{\mathrm{sen}\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6}} \Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{-\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}}{-\cos\frac{\pi}{6}} \Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, o simétrico de P em relação ao centro é o ponto P' de imagem $\frac{\pi}{6}$ e $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Proposta de solução da atividade 2

Figura 40 - Ilustração da proposta de solução da atividade 2 relativa à tangente.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Seja P o ponto pertencente ao 4º quadrante do círculo trigonométrico de raio 1, pois a sua imagem é $\frac{31\pi}{4}$, a qual equivale a três voltas no círculo trigonométrico (uma volta corresponde 2π) mais sete quarto de π, isto é, $\frac{31\pi}{4} = 6\pi + \frac{7\pi}{4}$. Assim, a imagem do ponto P é equivalente a $\frac{7\pi}{4}$, ou seja, o arco $\widehat{AP} = \frac{7\pi}{4}$ (no sentido anti-horário) e como o simétrico de P em relação ao eixo horizontal é um ponto P'que pertence ao 1º quadrante cuja imagem é o número real a, assim temos que

$$\frac{7\pi}{4} + a = 2\pi \Longrightarrow a = 2\pi - \frac{7\pi}{4} \Longrightarrow a = \frac{\pi}{4}$$

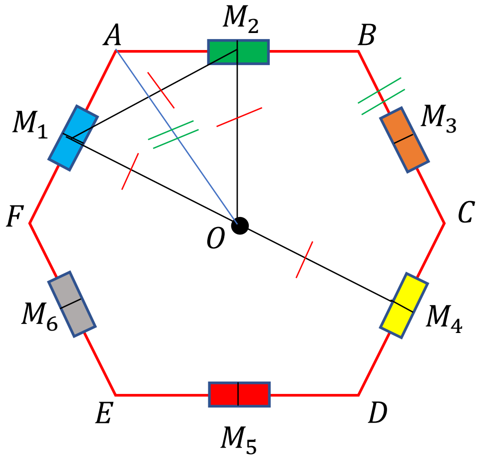
O fato do círculo trigonométrico ter raio 1, implica que o comprimento de cada arco é igual a medida do seu ângulo central, então os arcos de medidas $\widehat{AP} = \frac{7\pi}{4}$ e $\widehat{AP'} = a$ (ambos no sentido anti-horário) temos que $\beta = \frac{7\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. De $P = (\cos\beta, \mathrm{sen}\beta)$ e $P' = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$

serem simétricos em relação ao eixo horizontal, resulta que o $\cos\beta = \cos\theta$ e $\text{sen}\beta = -\text{sen}\theta$, isto é, $P = (\cos\theta, -\text{sen}\theta)$, assim $P = (\cos\frac{\pi}{4}, -\text{sen}\frac{\pi}{4})$, ou seja, $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Logo, pela dica dada na atividade 2, conclui-se que

$$\text{tg}\frac{31\pi}{4} = \text{tg}\frac{7\pi}{4} = \frac{\text{sen}\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{7\pi}{4}} \Longrightarrow \text{tg}\frac{7\pi}{4} = \frac{-\text{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow \text{tg}\frac{7\pi}{4} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow \text{tg}\frac{7\pi}{4} = -1.$$

Portanto, a coordenada do ponto P é $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e a tangente da medida do arco $\widehat{AP}$ (no sentido anti-horário) é igual a tangente do ângulo central $\beta = \frac{7\pi}{4}$, ou seja, $\text{tg}\frac{7\pi}{4} = -1$.

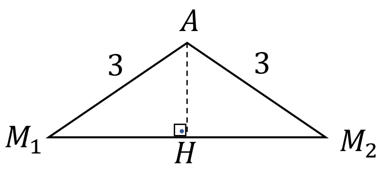
Proposta de solução da atividade 3



Sejam A, B, C, D, E e F os vértices da praça do formato hexagonal regular e $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ os pontos médios dos lados $\overline{FA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ e $\overline{EF}$ da praça respectivamente. Logo a menor distância que três pessoas podem sentar em bancos distintos são nos bancos adjacentes, ou seja, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, $\overline{M_4M_5}$, $\overline{M_5M_6}$ e $\overline{M_6M_1}$ são todos congruentes entre si, uma vez que a praça tem formato de um hexágono regular. Dessa maneira, basta calcular o comprimento de um dos lados.

Por hipótese, o perímetro da praça mede 36 metros, então cada um dos seus lados mede 6 metros. Assim, ligando os pontos médios adjacentes de cada vértice obtêm-se triângulos isósceles de bases $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, $\overline{M_4M_5}$, $\overline{M_5M_6}$ e $\overline{M_6M_1}$. Considere o triângulo isósceles M_1AM_2 de base $\overline{M_1M_2}$ implica que os ângulos $A\widehat{M_1}M_2$ e $A\widehat{M_2}M_1$ são iguais, além disso, tem-se que o ângulo $M_1\hat{A}M_2$ mede $120°$, visto que a praça tem formato de um hexágono regular (o que significa que cada ângulo interno mede $120°$).

Para melhor entendimento da solução segue o triângulo M_1AM_2 retirado do desenho da praça.



Como em todo triângulo na geometria plana a soma dos ângulos internos é 180°, tem-se:

$$A\widehat{M_1}M_2 + A\widehat{M_2}M_1 + M_1\hat{A}M_2 = 180°$$

$$\Longrightarrow 2A\widehat{M_1}M_2 + 120° = 180°$$

$$\Longrightarrow 2A\widehat{M_1}M_2 = 60°$$

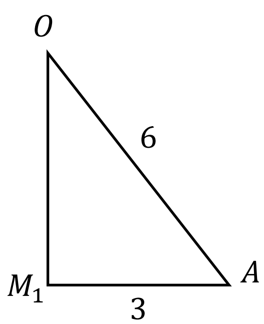
$$\Longrightarrow A\widehat{M_1}M_2 = 30°$$

Logo os ângulos internos do triângulo M_1AM_2 são $A\widehat{M_1}M_2 = 30°$, $A\widehat{M_2}M_1 = 30°$ e $M_1\hat{A}M_2 = 120°$. Assim, ao traçar a altura do triângulo M_1AM_2, esta coincide com a mediana relativa ao lado $\overline{M_1M_2}$ e a bissectriz interna relativamente ao ângulo $M_1\hat{A}M_2$, pois o triângulo é isósceles. Sendo assim, aplicando o cosseno no triângulo M_1AH retângulo em H no ângulo $A\widehat{M_1}H$, obtemos que:

$$\cos 30° = \frac{\overline{M_1H}}{\overline{M_1A}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{M_1H}}{3} \Longrightarrow \overline{M_1H} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\overline{M_1M_2} = 3\sqrt{3}$.

Para calcular a maior distância, considere o triângulo M_1AO retângulo em M_1.



Sabe-se que o segmento $\overline{AO}$ é igual a medida do hexágono, então o $\cos\hat{A} = \frac{\overline{M_1A}}{\overline{AO}}$, ou seja, $\cos\hat{A} = \frac{3}{6}$ implica que $\cos\hat{A} = \frac{1}{2}$, o qual resulta $\hat{A} = 60°$. Logo, têm-se:

$$\text{tg } 60° = \frac{\overline{M_1O}}{\overline{M_1A}} \Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{M_1O}}{3} \Longrightarrow \overline{M_1O} = 3\sqrt{3}.$$

Portanto, para que as três pessoas possam sentar-se em bancos distintos a menor distância é $3\sqrt{3}$ e a maior distância é $6\sqrt{3}$.