

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FÁBIO JARDIM DE ALMEIDA

DESMISTIFICANDO A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN

CURITIBA

2022

FÁBIO JARDIM DE ALMEIDA

DESMISTIFICANDO A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN

DEMYSTIFYING EINSTEIN'S THEORY OF RELATIVITY

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba**



FABIO JARDIM DE ALMEIDA

DESMISTIFICANDO A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 31 de Maio de 2022

Dr. Rudimar Luiz Nos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Fabiano Steklain Lisboa, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Eduardo Gueron, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 31/05/2022.

Dedico este trabalho a todos que estiveram ao meu lado durante toda essa "batalha", em especial: ao amor da minha vida, minha esposa Phamella, que assistiu toda essa jornada ao meu lado e em todos os instantes me apoiou; ao(s) nosso(s) futuro(s) filho(s); à melhor professora, que sempre me ensinou tudo, minha mama Elieda; à minha irmã Flávia; à minha avó Laura, a primeira professora de toda família; ao meu avô Sebastião (in memorian); à minha sogra Patrícia; aos meus cunhados Felipe e Poliana; à minha avó do coração Hilma; ao meu sogro do coração Altamir; ao tio Paulo; à tia Marlene; aos meus grandes amigos DJosef, Luiza, Fernando, Raphael, Marlus, Thiago, Oromar, Mayron, Vincenzo, aos meus afilhados Júlia e Samuel e meus compadres Jenifer, Mara, Ana e Jorge; Giampaolo e família, Giuliano e família, Bruno e família, Josias e família, Gerson e família, Johann e família, Anderson Bernardo e família, Luiz Inoue e família, Maria Olívia e família; Guilherme e família; aos demais familiares e amigos; e ao meu professor orientador, que me fez voltar a ver a geometria Euclidiana de uma maneira ainda mais mágica e a chegar até aqui, Prof. Rudimar Luiz Nós.

AGRADECIMENTOS

- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.
- A todos(as) os(as) professores(as) do PROFMAT da UTFPR, Campus Curitiba. Em especial para: Prof. Márcio, Prof. Rodolfo, Prof. Rudimar, Prof. Ronie, Prof. André, Profa. Paula e Profa. Denise.
- Aos(às) colegas da turma 2019 do PROFMAT: Paulo, Fellipe, Hugo, João, Ricardo, Jéssica, Mariana, Victória, Marilete, Roberto, Cleomar, Enoque e Isaías.
- Aos(às) grandes professores(as) que tive em minha vida e que marcaram meu caminho em sala de aula: Profa. Cida, Prof. Leoni, Profa. Hadriana, Profa. Viviane, Profa. Alexandra, Prof. Leandro, Prof. Ronaldo, Prof. Valentim, Prof. Chong, Prof. Néris, Prof. João Paulo, Prof. Andrey, Profa. Nilce, Prof. Péricles, Prof. Odilon, Prof. Joacê, Prof. Sheldon, Prof. Francisco, Prof. Orivan, Prof. Hayashi, Prof. Altemir, Prof. Cezar, Prof. Maurício, Prof. Olímpio, Prof. Vado, Prof. Luiz “Joinha”, Prof. Ricardo “Capivara”, Prof. Júlio, Profa. Elizabeth, Prof. Arinei, Prof. Tadeu, Prof. Johann.
- Às instituições das quais já fiz parte e das quais continuo a fazer parte: Escola Logus (Curitiba/PR) e Colégio Monteiro Lobato (Guaratuba/PR).
- A todos(as) os(as) meus(minhas) queridos(as) alunos(as) atuais e ex-alunos(as).
- In Memoriam: Sebastião Ferreira Jardim, Marcelo Furhmann, Guilherme Skripnik, Cristyan Valentim, Rosylea Ruviaro, André Navarro, Marlon Diego e Sandro Nitsch.

Daria tudo que sei pela metade do que ignoro.

René Descartes (1596-1650): filósofo, físico e matemático francês.

A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber mais do que aquilo que se deve ensinar.

George Pólya (1887-1985): matemático húngaro.

A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

Johann Kepler (1571-1630): astrônomo, físico e matemático alemão.

The measure of a life is a measure of love and respect So hard to earn, so easily burned.

The Garden - Rush song by Neil Peart (1952-2020): baterista e compositor canadense.

No que diz respeito ao empenho, ao compromisso, ao esforço, à dedicação, não existe meio termo. Ou você faz uma coisa bem feita ou não faz.

Ayrton Senna (1960-1994): piloto de automobilismo brasileiro.

RESUMO

ALMEIDA, F. J. de. **Desmistificando a teoria da relatividade de Einstein**. 114 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

Apresentamos neste trabalho as ideias que embasam a teoria da relatividade de Einstein, assim como um relato do desenvolvimento histórico das geometrias não Euclidianas. Relacionamos também algumas aplicações da teoria da relatividade e organizamos atividades/experimentos para os estudantes vivenciarem conceitos dessa teoria - o valor da velocidade da luz e a sua invariância - e de geometria esférica - a área de superfícies terrestres com o *Google Earth*. Concluimos que o emprego de recursos tecnológicos é imprescindível à plena compreensão de conceitos físicos e matemáticos que fundamentam a teoria da relatividade e as geometrias não Euclidianas.

Palavras-chave: Geometrias não Euclidianas; Velocidade da luz; GPS; *Google Earth*.

ABSTRACT

ALMEIDA, F. J. de. **Demystifying Einstein's theory of relativity**. 114 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

We present in this work the ideas that support Einstein's theory of relativity and an account of the historical development of non-Euclidean geometries. We also list some applications of the theory of relativity and organize activities/experiments for students to experience concepts of this theory - the value of the speed of light and its invariance - and spherical geometry - the area of terrestrial surfaces with Google Earth. We conclude that technological resources are essential to fully understand the physical and mathematical concepts that underlie the theory of relativity and non-Euclidean geometries.

Keywords: Non-Euclidean geometries; Speed of light; GPS; Google Earth.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Euclides de Alexandria	25
Figura 2.2 – Livro de Saccheri	27
Figura 2.3 – Quadrilátero de Saccheri/Khayyam–Saccheri	27
Figura 2.4 – Triângulo: (a) esférico; (b) hiperbólico	28
Figura 2.5 – Lambert	29
Figura 2.6 – Legendre	30
Figura 2.7 – Gauss	31
Figura 2.8 – Lobachevsky	31
Figura 2.9 – Janos Bolyai	32
Figura 2.10–Klein	34
Figura 2.11–Poincaré	34
Figura 2.12–O horizonte hiperbólico do disco de Poincaré	35
Figura 2.13–Disco de Poincaré: (a) reta (em verde); (b) retas paralelas à reta r	35
Figura 2.14–Beltrami	36
Figura 2.15–Pseudoesfera	36
Figura 2.16–Riemann	37
Figura 2.17–Retas (circunferências máximas) na geometria esférica	38
Figura 3.1 – Explosão que deu origem ao Universo: Big Bang	40
Figura 3.2 – A luz é uma radiação eletromagnética	45
Figura 3.3 – Caixa de luz: (a) referencial com a caixa em repouso; (b) referencial com a caixa em movimento à direita	47
Figura 3.4 – Diagrama espaço-tempo	51
Figura 3.5 – Representação da Terra no espaço curvo	57
Figura 3.6 – Representação da Terra e sua vizinhança no espaço-tempo	58
Figura 3.7 – Eclipse solar total observado em Sobral-CE	60
Figura 3.8 – Luz saindo do buraco negro localizado no centro da galáxia Messier 87	61
Figura 3.9 – Modelo de espaço-tempo curvo com uma fenda: o buraco de minhoca	62
Figura 3.10–Curvaturas do Universo	63
Figura 4.1 – Relógio de quartzo	65
Figura 4.2 – Relógio atômico de Césio-133	66
Figura 4.3 – Relógio ótico na Universidade do Colorado	66
Figura 4.4 – Trilateração: (a) sistema de satélites; (b) localização	67
Figura 4.5 – Ímã: (a) campo magnético; (b) magnetismo terrestre	69
Figura 4.6 – Quarks e elétrons são pequenos ímãs	70
Figura 4.7 – Magnetismo do elétron através de seu movimento de rotação	71
Figura 4.8 – Cristais antiferromagnéticos e cristais ferromagnéticos, respectivamente	71

Figura 4.9 – Alinhamento dos domínios magnéticos	72
Figura 4.10–Ímã artificial: eletroímã	73
Figura 4.11–Ação da força magnética na mudança de referencial	74
Figura 4.12–(a) Filamento de cobre (retângulo laranja) e suas cargas elétricas: próton (+, vermelho) e elétron (–, amarelo); (b) filamento neutro com um corpo carregado positivamente em sua vizinhança	75
Figura 4.13–(a) Corpo carregado positivamente em movimento sob a mesma direção, sentido e velocidade da corrente elétrica no filamento; (b) repulsão provocada pela força magnética	75
Figura 4.14–A partir do referencial do corpo carregado positivamente, os elétrons estão estáticos e as cargas positivas percorrem o filamento no sentido oposto à corrente	76
Figura 4.15–(a) Contração de Lorentz; (b) força elétrica repulsiva	77
Figura 4.16–Mar ou nuvem de elétrons	77
Figura 4.17–Reflexão da luz nos metais	78
Figura 4.18–Ouro e mercúrio	79
Figura 4.19–Orbitais s, p, d, f e sua representação	79
Figura 4.20–Diferença de energia antes e depois da contração relativística	80
Figura 4.21–Espectro magnético das ondas	81
Figura 4.22–Observação de uma constelação por um observador na Terra à noite	84
Figura 4.23–Observação de uma constelação por um observador na Terra durante o dia	84
Figura 4.24–Desvio na posição da constelação observada da Terra	85
Figura 4.25–Desvio que o Sol provoca nos raios de luz vindo das estrelas durante o ápice do eclipse solar	85
Figura 5.1 – Comprimento da barra de chocolate utilizada no experimento	86
Figura 5.2 – Informações sobre o micro-ondas usado no experimento	87
Figura 5.3 – Conceitos básicos de ondulatória: comprimento de onda e os nós	87
Figura 5.4 – Barra de chocolate acomodada a 1cm da base do micro-ondas	88
Figura 5.5 – Barra de chocolate acomodada a 8cm da base do micro-ondas	88
Figura 5.6 – Barra de chocolate a 1 <i>cm</i> da base e a distância entre os pontos derretidos	89
Figura 5.7 – Barra de chocolate a 8 <i>cm</i> da base e a distância entre os pontos derretidos	90
Figura 5.8 – Comprimento da barra de chocolate utilizada na segunda parte do experimento	90
Figura 5.9 – Espessura da barra de chocolate utilizada na segunda parte do experimento	90
Figura 5.10–Barra de chocolate na posição horizontal	91
Figura 5.11–Barra de chocolate na posição oblíqua	91
Figura 5.12–Barra de chocolate na posição vertical	91
Figura 5.13–Distância entre os pontos de derretimento na posição horizontal	92
Figura 5.14–Distância entre os pontos de derretimento na posição oblíqua	92
Figura 5.15–Distância entre os pontos de derretimento na posição vertical	92

Figura 5.16–Interferômetro: (a) de Michelson; (b) de Michelson-Morley	94
Figura 5.17–Interferências construtivas e destrutivas	95
Figura 5.18–Interferências construtivas: franjas claras em círculos concêntricos	95
Figura 5.19–Interferômetro virtual da Universidade do Porto	96
Figura 5.20–Interferômetro virtual da Universidade Federal do Ceará	97
Figura 5.21–Refração da luz: o raio de luz saindo do ar para a água	97
Figura 5.22–QR-Code para um vídeo ilustrativo sobre o interferômetro de Michelson-Morley	98
Figura 5.23–Localização de Quito e Singapura no <i>Google Earth</i>	99
Figura 5.24–Mapa do Distrito Federal	100
Figura 5.25–Mapa do estado do Colorado - EUA	100
Figura 5.26–Distância entre as cidades de Quito e Singapura segundo o <i>Google Earth</i> . .	101
Figura 5.27–Demarcação do extremo nordeste do estado do Colorado	102
Figura 5.28–Demarcação do extremo noroeste do estado do Colorado	103
Figura 5.29–Demarcação do extremo sudoeste do estado do Colorado	103
Figura 5.30–Demarcação do extremo sudeste do estado do Colorado	103
Figura 5.31–Perímetro e área do estado do Colorado segundo o <i>Google Earth</i>	104

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Biografia de Albert Einstein	14
1.1.1	Infância	14
1.1.2	O início científico	15
1.1.3	Família Einstein	16
1.1.4	Teoria da Relatividade Especial - 1905	17
1.1.5	Teoria da Relatividade Geral - 1915	18
1.2	Justificativa para a escolha do tema	20
1.3	Revisão da bibliografia	21
1.4	Objetivos	22
1.4.1	Objetivo geral	22
1.4.2	Objetivos específicos	22
1.5	Procedimentos metodológicos	23
1.6	Estrutura do trabalho	23
2	AS NOVAS GEOMETRIAS	25
2.1	O quinto postulado de Euclides	26
2.1.1	Saccheri	27
2.1.2	Lambert e Legendre	29
2.2	Desvendando o quinto postulado	30
2.2.1	Gauss	30
2.2.2	Lobachevsky	31
2.2.3	Bolyai	32
2.3	Uma nova geração de matemáticos	33
2.3.1	Klein	33
2.3.2	Poincaré	34
2.3.3	Beltrami	36
2.3.4	Riemann	37
2.4	Geometria Riemanniana	39
3	A TEORIA DA RELATIVIDADE	40
3.1	Do princípio até Einstein	41
3.2	Einstein	45
3.3	Uma nova geometria	53
3.4	Buracos negros	61
3.5	Pós-Einstein	63

4	APLICAÇÕES DA TEORIA DA RELATIVIDADE	64
4.1	Relógios de precisão	64
4.1.1	GPS	67
4.2	Magnetismo	68
4.2.1	Eletromagnetismo	73
4.3	Metais	77
4.3.1	O brilho dourado do ouro	78
4.3.2	O estado físico do mercúrio	80
4.4	Luz	80
4.4.1	A luz faz curvas?	82
4.4.2	O eclipse solar de 1919	83
5	EXPERIMENTOS	86
5.1	Calculando a velocidade da luz	86
5.2	Usando o interferômetro de Michelson	93
5.3	Explorando o Google Earth	98
6	CONCLUSÕES	105
	REFERÊNCIAS	106
	Índice	113

1 INTRODUÇÃO

Iniciamos este capítulo apresentando uma pequena biografia de Albert Einstein, o formulador da teoria da relatividade. Quanto a esta, resumimos as ideias principais, as quais serão melhor explorados no Capítulo 3. A referência básica empregada nesses relatos foi a obra de Fiona Macdonald: “Personagens que mudaram o mundo: os grandes cientistas”, volume sobre Albert Einstein (MACDONALD, 1993).

1.1 BIOGRAFIA DE ALBERT EINSTEIN

1.1.1 INFÂNCIA

Albert Einstein, nascido em 14 de março de 1879 na cidade de Ulm na Alemanha, foi o primeiro dos dois filhos do casal Hermann Einstein e Pauline Koch. Desde muito cedo o pequeno Einstein foi motivado pelo pai e pelo tio Jakob, ambos engenheiros, com pequenos desafios matemáticos e explicações sobre ciências. Além disso, o jovem físico desenvolveu um afeto especial por música, pois sua mãe, sempre que possível, entretinha os filhos tocando piano.

Aos completar 5 anos de idade, Einstein adoeceu e ganhou de seu pai uma bússola.

Era um presente simples, mas representaria um momento importante na vida dele. A agulha dentro da bússola, totalmente fechada, isolada e inacessível, parecia segura pela mão de uma pessoa invisível, que a forçava a apontar em direção ao norte. Ficou tão excitado com o fato que começou a tremer e teve febre. Embora tivesse apenas 5 anos, sabia que havia “alguma coisa escondida por trás do objeto”. Depois daquilo, queria descobrir o que era essa misteriosa força (MACDONALD, 1993, p. 12).

Todo o incentivo e apoio dos pais de Einstein renderam frutos à humanidade. Fascinado pelas ciências, o pequeno Einstein cresceu questionando seus familiares em situações cada vez mais inusitadas: “Como ocorre a escuridão?”; “De que são feitos os raios do Sol?”; “Como seria viajar dentro de um feixe de luz?”

Na época escolar, Einstein não tinha muitos amigos; preferia a companhia dos livros. Era um aluno dedicado e tinha boas notas, sendo que matemática e latim eram as disciplinas nas quais se destacava. Aos 10 anos, começou a estudar matemática por conta própria em seus momentos de lazer. Aos 15 anos, os Einsteins, que não eram abastados, tiveram problemas financeiros e a solução encontrada pela família foi se mudar para a Itália. Contudo, Einstein permaneceu em Munique para concluir seus estudos. Nesse período, a saudade da família tornou Einstein um adolescente rebelde e com sua genuína inteligência, ora de forma inocente ora propositadamente, afrontava os professores, que já não eram simpatizantes ao futuro físico.

1.1.2 O INÍCIO CIENTÍFICO

Einstein, aos 16 anos de idade, abandonou os estudos e a capital alemã para se juntar à família em território italiano. Ao chegar, prometeu a seus pais que estudaria por conta própria para se tornar aluno no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, na Suíça. Como não foi aprovado, aprimorou sua formação em uma escola secundária na cidade suíça de Aarau. Na adolescência, Einstein pretendia ser professor de ciências naturais, pois tinha preferência pela matemática e uma grande facilidade de abstração.

Aos 17 anos, o jovem Einstein diplomou-se na escola secundária de Aarau, o que lhe garantiu o desejado ingresso no Instituto Federal de Zurique. Após o ingresso, renunciou formalmente à cidadania alemã, uma vez que se a mantivesse, deveria se alistar no exército. E Einstein sempre teve aversão à violência. Por toda sua vida, foi um defensor da paz e da diplomacia entre os povos. Em 1900, após quatro anos de estudos no Instituto Federal de Zurique, qualificou-se como professor especialista em matemática e física para escolas secundárias.

Durante os estudos em Zurique, Einstein fez grandes amizades que perduraram por toda sua vida: Marcel Grossmann (1878-1936), Michele Besso (1873-1955) e Mileva Maric (1875-1948). Esta última tornar-se-ia sua primeira esposa. Maric também era uma estudiosa das ciências e da matemática; ela e Einstein passavam horas conversando sobre teorias e ideias. Em sala de aula, Einstein sempre foi um aluno que não ficava preso aos conceitos que eram abordados pelo professor: estudava e se aprofundava no que despertava seu interesse, e este consistia na análise de problemas que ainda não tinham soluções definidas. Grossmann, colega de estudos, emprestava a Einstein suas anotações de sala de aula para que o amigo obtivesse êxito nas avaliações. Dessa forma, com a ajuda do amigo, Einstein podia se dedicar ao estudo da física, uma de suas maiores paixões.

Durante os anos no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, Einstein teve atritos pessoais com um de seus professores, Heinrich Weber (1842-1913). Este considerava Einstein um aluno inteligente, porém negligente, pois não dava ouvidos aos seus conselhos de cátedra. Após concluir os estudos, Einstein começou a procurar por um emprego sabendo que Weber não o aceitaria como professor no Instituto de Zurich. A influência de Weber no meio acadêmico era grande e dessa forma seria muito difícil para Einstein se tornar professor em algum grande instituto. Então, após alguns meses sem trabalhar, Einstein começou a exercer de maneira temporária a profissão de professor escolar. Este não era seu objetivo de vida; entretanto, percebeu que a atividade o fazia feliz.

Ao mesmo tempo que exercia o magistério, Einstein desenvolveu suas pesquisas e escreveu artigos. Decepcionou-se em 1902 quando seu pedido de ingresso na Universidade de Zurique para obter o título de *PhD* foi rejeitado. Todavia, o pai de Grossman indicou-o no mesmo ano para trabalhar como perito técnico de terceira categoria no Serviço de Marcas e Patentes de Berna. Essa foi a razão para o grande momento que estava por vir e mudar a história da física.

Einstein, agora com um posto de trabalho apropriado, tinha tempo para se dedicar à pesquisa e um salário que podia mantê-lo sem muitos esforços. Em 1906, o diretor do Serviço de Patentes o promoveu para perito técnico de primeira categoria, destacando-o como um dos mais valiosos peritos.

1.1.3 FAMÍLIA EINSTEIN

Empregado e capaz de sustentar uma família, Einstein se casa com sua colega Mileva Maric que, mesmo sendo pouco creditada historicamente, foi uma das pioneiras nos estudos de matemática e ciências. À época, eram raras as mulheres que podiam estudar até o nível superior e o campo das ciências era por tradição masculino. Com o falecimento do pai de Einstein, Hermann Einstein, o casal formaliza sua união algumas semanas após o funeral que abalou Einstein profundamente.

A família Einstein sempre foi muito unida e Pauline, mãe de Einstein, era contra a união de Einstein com Maric. Einstein tornou-se pai de Hans Albert Einstein em maio de 1904 e de Eduard Einstein em julho de 1910. Einstein teve três filhos (NOBELLECTURES, 1967) e havia um grande mistério sobre a filha Lieserl Einstein (BBCNEWSBRASIL, 2021). Cartas encontradas décadas após a morte de Einstein comprovam que Einstein e Maric teriam concebido Lieserl em 1902, antes da união matrimonial do casal, o que era inconcebível para os costumes da época. Esse seria o motivo pelo qual a mãe de Einstein foi contra o casamento do filho. Pouco se sabe sobre a primogênita do casal: ela nasceu na casa da família de Mileva na Sérvia e Einstein nunca a conheceu; acredita-se que a bebê tenha ficado na casa dos pais de Mileva para não desonrar a jovem, que ainda não era casada, e nem o nome da família Einstein. A história mais aceita é que a criança faleceu aos dois anos de idade devido a uma doença bacteriana muito comum na época, a escarlatina. Einstein nunca tornou isso público até sua morte.

Hans Albert Einstein seguiu alguns passos do pai, graduando-se em engenharia civil na Universidade de Zurique. A contragosto de Einstein, que insistiu para que seu filho adentrasse no mundo na física quântica, Hans tornou-se engenheiro hidráulico e um renomado professor na Universidade de Berkeley, na Califórnia. Hans, que faleceu em 1973, se orgulhava do fato de que suas conquistas ocorreram sem o intermédio do pai famoso.

Eduard Einstein em 1932 ingressou ao curso de medicina e sonhava ser psiquiatra, seguindo os passos de Sigmund Freud. Contudo, foi diagnosticado com esquizofrenia em 1933; ficou internado dos 22 anos até os 55 anos de idade em uma clínica psiquiátrica, falecendo em 1965 em decorrência de um acidente vascular cerebral. Einstein nunca visitou o filho após a internação.

O casamento com Mileva Maric teve um fim prematuro porque Einstein tinha um estilo de vida particular: gostava de estar sozinho e vivia separado da esposa e dos filhos por anos. Em 1914, Einstein começou a ter um caso com sua prima Elsa Löwenthal; em 1919, separou-se

de Maric e casou-se com Elsa, com quem já convivia. Mesmo separados, Einstein entregou a Mileva e seus filhos o prêmio em dinheiro recebido pelo prêmio Nobel de Física de 1921. Elsa faleceu em 1936 e Mileva em 1948.

Entre 1905 e 1915, Einstein teve seu período mais frutífero enquanto pesquisador e estudioso. Nesse período, escreveu alguns artigos de suma importância à humanidade. Em 1905, Einstein concluiu sua tese de *PhD*, intitulada “Uma nova determinação das dimensões moleculares”, sob a orientação do professor Alfred Kleiner (1849-1916), físico experimental na Universidade de Zurique, e também escreveu quatro artigos, sendo um deles o que deu início ao que hoje conhecemos como “teoria da relatividade especial” ou “teoria da relatividade restrita” (MERRIAM, 2021).

1.1.4 TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL - 1905

No início do século XX, a física não conseguia explicar todos os fenômenos conhecidos, como por exemplo, a existência do éter luminífero e a radiação dos corpos escuros. Os estudos para comprovar a existência do éter e da radiação deram origem, respectivamente, a dois novos campos da física: as teorias da relatividade de Einstein e a física quântica.

Até o fim do século XIX, a física era regida pelas três leis de Newton, a lei da gravitação universal e as equações de Maxwell. Essas leis e equações eram suficientes para explicar com clareza a mecânica, a cinemática e os fenômenos ondulatórios, ópticos, elétricos, magnéticos e térmicos. No entanto, esses pilares da física não interagiam de forma satisfatória quando se abordava um tema que os entrelaçava: a eletrodinâmica dos corpos em movimento.

Albert Einstein foi um dos primeiros a abordar essa problemática sob uma nova perspectiva. Em um de seus artigos de 1905, intitulado *Zur Elektrodynamik Bewegter Körper* (Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento), Einstein propôs dois postulados (conceito assumido como verdade, mesmo sem a devida comprovação) totalmente inovadores:

1. Princípio da Relatividade: as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, ou seja, não existe nenhum referencial inercial preferencial.
2. Princípio da constância da velocidade da luz: a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor constante c em todos os referenciais inerciais (GOTO, [s.d.], p. 17).

Desta maneira, Einstein contrariou os conceitos fundamentais da física Newtoniana de que espaço e tempo seriam grandezas absolutas. Ao invés disso, o que seria absoluto no Universo era a velocidade da luz no vácuo, sendo esta uma constante universal para todo referencial inercial: nenhum corpo, por menor que seja sua massa, conseguirá atingir a velocidade da luz (EINSTEIN, 1999).

A interpretação do Universo dada por Einstein gerou algumas consequências até então impossíveis.

1. Relatividade da simultaneidade

Fenômenos simultâneos (ocorrem exatamente ao mesmo tempo) não são absolutos e sim relativos: eventos que são simultâneos em um referencial A , podem ocorrer em instantes distintos em um outro referencial B , como ilustra o Exemplo 1.1.

Exemplo 1.1. *Em um trem, há um maquinista operando a locomotiva (primeiro vagão), um segurança cuidando da última composição do veículo e há também passageiros no vagão central. Ao sair de uma estação ferroviária, esse trem é saqueado por uma gangue que atira no maquinista e no segurança. Os passageiros da composição central afirmam que a emboscada foi simultânea, ou seja, ambos os tiros ocorreram ao mesmo tempo. Já as pessoas que estavam na estação de trem contam que o segurança foi atingido primeiro e que depois ouviram o tiro que acertou o maquinista.*

2. Dilatação temporal

O tempo varia de acordo com o referencial adotado. Observadores em referenciais inerciais, que estão em movimento em relação a um segundo referencial, percebem o tempo de maneira mais lenta. O Exemplo 1.2 ilustra a dilatação temporal.

Exemplo 1.2 (Paradoxo dos gêmeos). *Dois irmãos gêmeos são separados: um vai ao espaço em uma missão que durará trinta anos e o outro ficará na Terra. Quando o irmão astronauta retornar à Terra, parecerá mais jovem que o gêmeo que viveu na Terra, pois a velocidade de viagem do irmão astronauta foi muito grande em relação ao seu gêmeo na Terra.*

3. Contração do comprimento

As medidas de comprimento também são dependentes do referencial adotado. Quando o tempo dilata, o comprimento contrai, como ilustra o Exemplo 1.3.

Exemplo 1.3. *Uma nave espacial hipotética de 10 metros de comprimento (medidos quando a nave está em repouso) passa por um observador a uma velocidade de 60% da velocidade da luz. O observador notará que o comprimento da nave é de apenas 8 metros, pois como a velocidade da nave é muito grande (é uma fração significativa da velocidade da luz) seu comprimento se contrai na direção do movimento (contração de Lorentz).*

1.1.5 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL - 1915

Provavelmente a teoria da relatividade especial teria sido elaborada, se não por Einstein, por algum outro físico. As ideias principais já eram tema do debate científico da época; era uma questão de tempo até a formulação dessa teoria. Contudo, a teoria da relatividade geral foi uma grande novidade para o universo científico da época, descrevendo como campos magnéticos e corpos se movem na presença de campos gravitacionais e, por consequência disso, como a

matéria gera sua própria gravidade. Até então não haviam indícios da necessidade de uma nova teoria para a gravitação.

Na teoria da relatividade geral, Einstein propôs dois novos postulados para fundamentar suas concepções.

1. Princípio da Relatividade: as leis da natureza são as mesmas em todos os referenciais, inerciais ou não inerciais.
2. Princípio da Equivalência (versão forte): os efeitos devidos à aceleração do referencial e os da gravitação são equivalentes. [...] As igualdades entre as massas inercial e gravitacional é o enunciado do princípio da equivalência na sua versão fraca (GOTO, [s.d.], p. 140).

Para Goto (s.d.), o primeiro postulado da teoria da relatividade geral é uma generalização do primeiro postulado da teoria da relatividade especial, uma vez que não são mais necessários os referenciais inerciais. Já o segundo postulado da teoria da relatividade geral mostra que corpos de quaisquer natureza interagem da mesma forma ao campo gravitacional no qual estão submetidos. Em outras palavras, corpos em queda livre têm a mesma aceleração, independentemente de sua massa ou qualquer outra propriedade, o que leva à conclusão de que as massas inerciais e as massas gravitacionais são equivalentes.

Pela física Newtoniana, a massa inercial m_I e a massa gravitacional m_G de um corpo podem, ocasionalmente, ser iguais. A massa inercial é aquela constante na segunda lei de Newton: $F = m_I \cdot a$, onde a representa a aceleração. Se F é uma força gravitacional, então $F = m_G \cdot g$, sendo g a gravidade. Assim, temos na segunda lei de Newton que: $m_I \cdot a = m_G \cdot g$. Isolando a aceleração nessa equação, temos que $a = \frac{m_G}{m_I} \cdot g$. Para que se tenha $a = g$, a razão entre as massas $\frac{m_G}{m_I}$ deve ser igual a um. Isto ocorre quando $m_G = m_I$.

Na física clássica Newtoniana, a gravidade é uma força que depende da massa dos corpos e da distância entre os mesmos. Após Einstein e a teoria da relatividade geral, a gravidade é a geometria do espaço-tempo, é a curvatura do espaço; a gravidade agora é um modelo de como corpos devem acelerar nas proximidades de outros corpos massivos, como planetas e estrelas.

A geometria pode alterar o movimento de um corpo sem ser necessariamente uma força; a geometria determina o movimento e pode causar aceleração (MACDONALD, 1993), como ilustram os Exemplos 1.4 e 1.5.

Exemplo 1.4. *Duas esferas idênticas estão em queda livre: a primeira de uma altura de dois metros e sem nenhum obstáculo em seu trajeto até o solo; a segunda também a uma altura de dois metros em relação ao solo, porém com uma espiral pela qual a esfera rolará, sem atrito, em uma espécie de tobogã. Os cenários são quase iguais, mas a geometria do tobogã guia a queda de forma precisa. O que diferencia as situações são as curvas da pista espiral.*

Exemplo 1.5. *Um trem se movimenta apenas para frente. Em uma locomotiva não há um volante/manche, e mesmo assim o veículo faz curvas em sua trajetória, pois a geometria dos trilhos guia o trajeto percorrido pelo trem.*

A gravidade é gerada por um grande acúmulo de matéria; somente corpos massivos têm a capacidade de curvar o espaço-tempo. De acordo com a teoria da relatividade geral, a própria Terra tenta se mover em linha reta. Entretanto, a curvatura do espaço quadridimensional (três dimensões espaciais e uma dimensão temporal) não permite que a Terra se afaste do Sol, mantendo-a presa em uma órbita elíptica ao redor da estrela. A luz se propaga sempre em linha reta e, como o trem no Exemplo 1.5, segue a curvatura do Universo. “A massa diz ao espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo diz à massa como se mover” (John Wheeler apud NOGUEIRA, 2019).

Para confirmar que a teoria da relatividade geral era de fato verdadeira, foram propostos três testes (EINSTEIN, 1999), descritos a seguir.

1. O periélio de Mercúrio

A física Newtoniana havia calculado com extrema precisão a órbita elíptica de todos os planetas do sistema solar, com exceção de Mercúrio.

Quando um planeta descreve sua trajetória elíptica ao redor do Sol, que ocupa um dos focos da elipse, em alguns momentos de sua translação o planeta fica mais próximo do Sol (periélio). A precessão do periélio do planeta Mercúrio tinha uma pequena variação de aproximadamente 43" de arco a cada cem anos. Os demais planetas do sistema solar também têm uma precessão que, por serem extremamente pequenas, são irrelevantes.

2. O desvio da luz pelo campo gravitacional

Em 1919, duas expedições foram enviadas a pontos estratégicos do hemisfério sul para registrar um eclipse solar: uma para a Ilha do Príncipe, na África Ocidental, e outra para a cidade de Sobral, no interior do Ceará. No dia 29 de maio de 1919, o céu escureceu por alguns minutos durante o dia e, após algumas fotografias e alguns meses de cálculos, em novembro do mesmo ano se confirma que os raios de luz podem ser curvar no espaço.

3. O deslocamento das linhas espectrais para o vermelho

As estrelas podem aparentar mudança em sua frequência luminosa, alterando assim sua coloração. Quando uma estrela está se aproximando, a frequência de suas ondas luminosas aumenta e sua coloração fica mais azul; quando está se afastando, a frequência das ondas luminosas da estrela diminui e assim sua coloração tende a ficar mais vermelha.

1.2 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

As informações circulam de forma acelerada, chegando à população em tempo real e de qualquer parte do globo terrestre. A tecnologia que possibilita aos meios de comunicação essa circulação é fruto dos avanços científicos das últimas décadas. A física embasa esses avanços, explicando como ocorrem os fenômenos associados aos mesmos. Estudar e compreender esses

fenômenos em sala de aula na Educação Básica é imprescindível à formação científica, como destaca a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Nesse cenário, a BNCC da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias – integrada por Biologia, Física e Química – propõe ampliar e sistematizar as aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental. Isso significa, em primeiro lugar, focalizar a interpretação de fenômenos naturais e processos tecnológicos de modo a possibilitar aos estudantes a apropriação de conceitos, procedimentos e teorias dos diversos campos das Ciências da Natureza. Significa, ainda, criar condições para que eles possam explorar os diferentes modos de pensar e de falar da cultura científica, situando-a como uma das formas de organização do conhecimento produzido em diferentes contextos históricos e sociais, possibilitando-lhes apropriar-se dessas linguagens específicas (BRASIL, 2018, p. 537).

Desta forma, a teoria da relatividade é, dentro da física moderna, um dos temas que devem ser abordados e estudados em sala de aula, pois estamos todos inseridos no mesmo Universo e, portanto, regidos pelas mesmas leis. Segundo Wolfson (2005) : “[...] a relatividade sugere que pensemos a geometria como um ramo da física e não da matemática, organizando o palco do espaço-tempo onde nós e o restante da realidade física exercemos nossos papéis no Universo mais amplo” (WOLFSON, 2005, p. 22). Como a geometria Euclidiana não é suficiente para explicar nossa realidade física, o professor de matemática precisa conhecer as geometrias não Euclidianas e a teoria da relatividade, para que possa entender como o Universo funciona.

1.3 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Inicialmente, pretendíamos comparar este trabalho com outras dissertações do PROFMAT sobre a teoria da relatividade. Contudo, a biblioteca online do programa estava indisponível no período da pesquisa. Assim, selecionamos três dissertações de mestrado que abordam a teoria da relatividade para a comparação: Jeferson F. de S. Wolff (2005) - UFRGS; Bruno M. Riboldi (2015) - UFSCar; Alisson C. Giacomelli (2016) - UFP. As duas primeiras dissertações são do Mestrado Profissional em Ensino de Física, enquanto a terceira é do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.

Wolff (2005), na dissertação intitulada “O ensino da teoria da relatividade especial no nível médio: uma abordagem histórica e conceitual”, relata uma experiência de inserção do ensino da teoria da relatividade especial com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. O projeto foi aplicado em sala de aula em duas escolas de Ensino Médio no interior do estado do Rio Grande do Sul, e originou um texto com a cronologia histórica para os estudantes e um manual para os professores. No trabalho, Wolff aborda os conceitos de simultaneidade, dilatação temporal, contração do comprimento, adição de velocidades e energia relativística, e também analisa alguns livros didáticos de Física utilizados no Ensino Médio quanto ao tratamento dado à teoria da relatividade especial. Nos apêndices, o autor apresenta exemplos, exercícios e um modelo de avaliação escrita.

Riboldi (2015), no trabalho intitulado “A construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) para ensinar relatividade utilizando animações e o game *a slower speed of light*”, constrói e aplica uma UEPS baseada na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. O objetivo é facilitar a aprendizagem da teoria da relatividade especial com o emprego de animações e de um jogo educativo. Riboldi aborda na dissertação a dilatação temporal, a contração do comprimento, a invariância da velocidade da luz, a simultaneidade de eventos relativísticos, o efeito holofote e o efeito Terrell. O projeto foi aplicado em duas turmas de uma escola de Ensino Médio no interior do estado de São Paulo, e originou um produto educacional para o ensino da teoria da relatividade especial.

Giacomelli (2016), na dissertação intitulada “Teoria da relatividade: uma proposta didática para o Ensino Médio”, estrutura uma proposta didática para inserção de tópicos das teorias da relatividade especial e geral no Ensino Médio. No trabalho, Giacomelli analisa como a teoria da relatividade é abordada nos livros didáticos de física para o Ensino Médio recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015. O projeto, fundamentado na teoria da transposição didática, foi aplicado em uma turma de Licenciatura em Física da Universidade de Passo Fundo (UPF) no Rio Grande do Sul, originando um produto educacional constituído de textos, atividades experimentais e dinâmicas de sala de aula.

Ao comparar este trabalho com os três descritos anteriormente, constatamos semelhança na abordagem de conceitos pertinentes à teoria da relatividade. No restante, os trabalhos são distintos. Não há nos três trabalhos analisados a associação com geometrias não Euclidianas e aplicações da teoria da relatividade. Os experimentos apresentados também diferem daqueles relatados nas três dissertações selecionadas.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 OBJETIVO GERAL

Apresentar os postulados e decorrências das teorias da relatividade especial e geral e a associação destas com geometrias não Euclidianas.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Associar a geometria a fenômenos físicos, evidenciando a interdisciplinaridade entre matemática e física.
2. Relacionar os matemáticos que contribuíram para o avanço das geometrias não Euclidianas.
3. Mencionar aplicações da teoria da relatividade.
4. Organizar experimentos/atividades para investigar conceitos da teoria da relatividade e suas aplicações.

5. Explorar o *Google Earth*, um software de geolocalização.

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia científica estabelece uma estrutura sequencial e lógica para o desenvolvimento de um trabalho de pesquisa. Segundo Lakatos (2003):

A finalidade da pesquisa científica não é apenas um relatório ou descrição de fatos levantados empiricamente, mas o desenvolvimento de um caráter interpretativo, no que se refere aos dados obtidos. Para tal, é imprescindível correlacionar a pesquisa com o universo teórico, optando-se por um modelo teórico que serve de embasamento à interpretação do significado dos dados e fatos colhidos ou levantados (LAKATOS, 2003, p. 224).

Assim, a metodologia adotada neste trabalho é qualitativa, bibliográfica, experimental e descritiva. Neste sentido, adotamos os seguintes procedimentos metodológicos:

1. pesquisa bibliográfica sobre o desenvolvimento histórico das geometrias não Euclidianas (BOYER; MERZBACH, 2012; BURTON, 2011; EVES, 1997; ROONEY, 2012) e a teoria da relatividade (WOLFSON, 2005; MACDONALD, 1993);
2. emprego de softwares, como o *Google Earth* (GOOGLE, 2022) e o interferômetro de Michelson-Morley (CASTRO; DIAS, 2021; TEIXEIRA D. D.; PEREIRA; CARVALHO, 2009);
3. organização de experimentos/atividades;
4. uso da fotografia para registrar os experimentos propostos.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado da seguinte maneira:

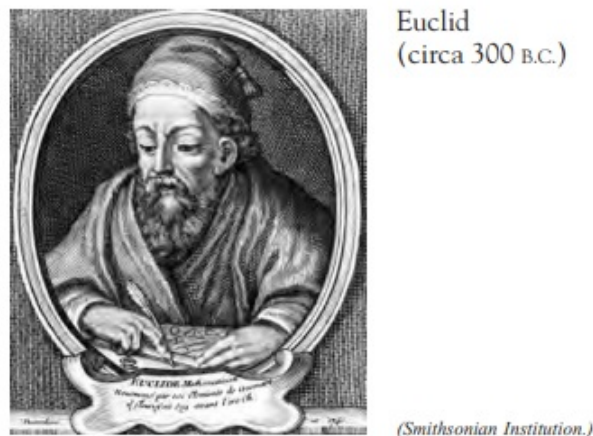
1. no Capítulo 1, apresentamos uma pequena biografia de Albert Einstein e um resumo de suas teorias da relatividade especial e geral. Além disso, descrevemos a justificativa para a escolha do tema, a revisão bibliográfica, os objetivos e a metodologia adotada;
2. no Capítulo 2, discorreremos sobre a origem das geometrias não Euclidianas: a cronologia de seu surgimento, os matemáticos que se debruçaram sobre o assunto e as descobertas de Riemann;
3. no Capítulo 3, sintetizamos as considerações de Richard Wolfson em “Simplesmente Einstein: a teoria da relatividade desmistificada”. Neste capítulo, exploramos um pouco mais as ideias que fundamentam as teorias da relatividade especial e geral;

4. no Capítulo 4, mencionamos aplicações da teoria da relatividade, como por exemplo, o sistema GPS;
5. no Capítulo 5, organizamos experimentos para “vivenciar” a relatividade e as geometrias não Euclidianas. Nos experimentos, calculamos a velocidade da luz e exploramos a geometria esférica com o *Google Earth*;
6. no Capítulo 6, apresentamos as considerações finais.

2 AS NOVAS GEOMETRIAS

Grande parte dos conhecimentos da filosofia e das ciências tem origem nos grandes pensadores da Grécia Antiga. E, na matemática, não foi diferente. Tivemos Ptolomeu, Arquimedes e Pitágoras, entre outros grandes estudiosos, e, mais precisamente no período de 300 a.C, Euclides de Alexandria - Figura 2.1, considerado o pai da geometria. Sua fascinante grande obra “Os elementos” foi por séculos um exemplo de formalidade, ditando às gerações seguintes os rigores para a demonstração em matemática. Infelizmente, pouco se sabe a respeito de quando e onde precisamente Euclides nasceu e cresceu. No entanto, é muito possível que sua educação matemática tenha acontecido na escola Platônica de Atenas (EVES, 1997).

Figura 2.1 – Euclides de Alexandria



Fonte: Burton (2011, p. 144).

Em sua magnífica obra, Euclides aborda aritmética, teoria de números, geometria plana e geometria espacial, estas duas últimas denominadas atualmente em sua homenagem como geometrias Euclidianas. Em “Os elementos”, Euclides apresentou 465 proposições organizadas em 13 volumes, sendo que as proposições geométricas foram demonstradas com o emprego de 5 postulados e algumas noções comuns. Segundo a tradução de Bicudo (EUCLIDES, 2009), os cinco postulados e as nove noções comuns de Euclides são, respectivamente:

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos;

(EUCLIDES, 2009, p. 98)

Noções Comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais;
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais;
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si;
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si;
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;
8. E o todo é maior do que a parte;
9. E duas retas não contêm uma área.

(EUCLIDES, 2009, p. 99)

2.1 O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

O quinto postulado de Euclides, também denominado postulado das paralelas, aceita algumas possíveis interpretações. Durante séculos, alguns estudiosos matemáticos tentaram demonstrar que era possível deduzi-lo a partir dos outros quatro postulados. Além disso, muitos gregos acreditavam que o quinto postulado parecia mais com uma proposição do que com um postulado (EVES, 1997). O questionamento ocorria pelo fato do quinto postulado não ter sido utilizado por Euclides em sua obra até a Proposição I29. Dessa forma, nasceu a curiosidade para saber se o postulado das paralelas era realmente necessário ou se era possível deduzi-lo como um teorema derivado dos demais postulados ou, ao menos, ser substituído por outro postulado equivalente.

De todas as formas para substituir ou reescrever o quinto postulado de Euclides, a mais conhecida e aceita até hoje é a proposta pelo matemático e físico John Playfair (1748-1819). A alternativa sugerida por Playfair já era conhecida desde o século V e foi criada por Proclus Diadochus (411-485). Até hoje, essa versão é utilizada para explicar o postulado das paralelas nos artigos de geometria elementar.

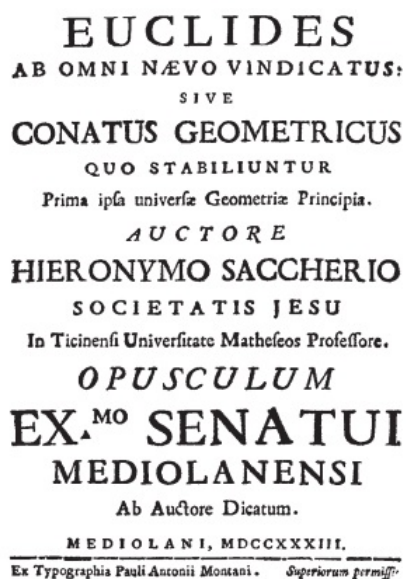
Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta. Outras alternativas para o postulado das paralelas são: (1) Há pelo menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso; (2) Existe um par de triângulos semelhantes não congruentes; (3) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos; (4) Por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência; (5) Por qualquer ponto no interior de um ângulo menor do que 60° pode-se sempre traçar uma reta que intersecta ambos os lados do ângulo (EVES, 1997, p. 539).

As tentativas de provar, a partir dos demais postulados, que o postulado das paralelas era um teorema foi de interesse de vários matemáticos e geômetras por mais de dois mil anos. E por mais que tenham sido frustradas, essas tentativas deram início a ideias, que com o passar das novas gerações de grandes estudiosos, fomentaram os conceitos das novas geometrias e de parte da matemática moderna.

2.1.1 SACCHERI

De acordo com Eves (1997), um dos primeiros a investigar cientificamente o quinto postulo de Euclides foi o padre jesuíta italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733). Em seus muitos anos de estudo, Saccheri ficou maravilhado com as provas matemáticas via *reductio ad absurdum* (do latim, redução ao absurdo). Assim, Saccheri resolveu aplicar a técnica ao postulado das paralelas de Euclides e publicou um livro sobre essas demonstrações denominado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda imperfeição) - Figura 2.2.

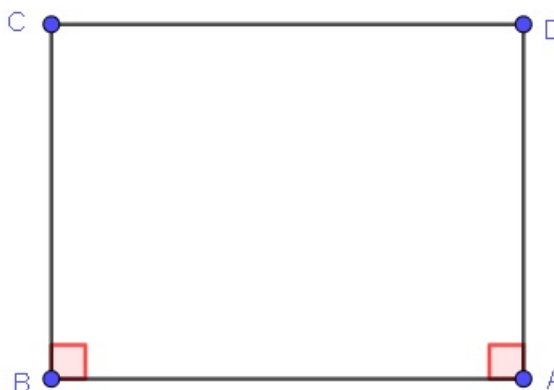
Figura 2.2 – Livro de Saccheri



Fonte: Burton (2011, p. 570).

Em seus estudos, Saccheri aceitou as 28 proposições iniciais de Euclides, que não necessitam do quinto postulado em suas demonstrações, e utilizou o quadrilátero $ABCD$ ilustrado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Quadrilátero de Saccheri/Khayyam–Saccheri



Fonte: O Autor.

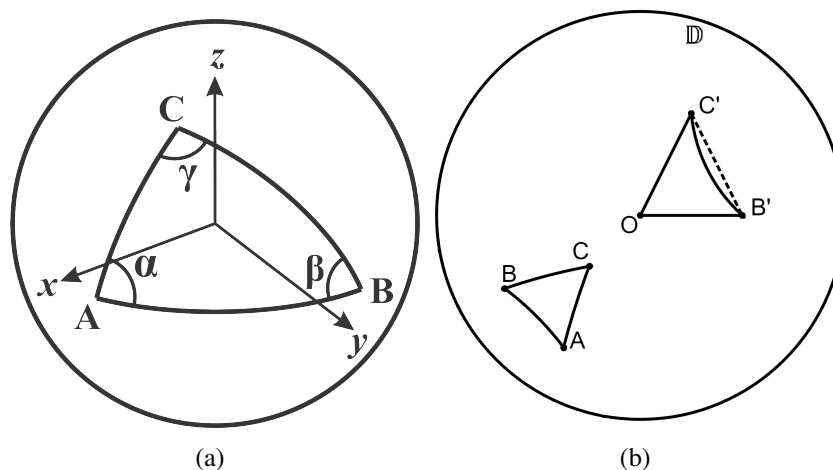
De acordo com Rooney (2012), os estudos de Saccheri podem ter sido influenciados por escritos do matemático iraniano Omar Khayyam (1048-1131). Como pouco se sabe a respeito de Saccheri, e não há certeza de que seu trabalho tenha sido totalmente independente, o quadrilátero $ABCD$ da Figura 2.3 é denominado por muitos autores de “quadrilátero de Khayyam–Saccheri”. Nesse quadrilátero, onde os ângulos A e B são retos e $BC \equiv AD$, Saccheri fez três suposições:

- i.* C e D são ângulos agudos (menores do que 90°);
- ii.* C e D são ângulos retos (iguais a 90°);
- iii.* C e D são ângulos obtusos (maiores do que 90°).

As três suposições de Saccheri são denominadas, respectivamente, de hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso. O objetivo de Saccheri era mostrar, através da redução ao absurdo, que as hipóteses do ângulo agudo e do ângulo obtuso levavam a contradições, provando assim que C e D eram ângulos retos.

A hipótese do ângulo obtuso, indiretamente desconsiderada por Saccheri devido à infinidade da reta (EVES, 1997), originou a geometria esférica, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180° - Figura 2.4(a). Quanto à hipótese do ângulo agudo, se Saccheri, ao invés de forçar uma contradição utilizando recursos matemáticos não usuais e nebulosos à época, como elementos infinitos, tivesse admitido sua incapacidade para analisá-la, hoje ele seria conhecido como precursor dos estudos das geometrias não Euclidianas (EVES, 1997). De acordo com Eves (1997) e Rooney (2012), o trabalho de Saccheri é conhecido hoje por ter sido redescoberto em 1889 por seu conterrâneo Eugenio Beltrami. Os estudos deste e de outros matemáticos originaram o que hoje conhecemos como geometria hiperbólica, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° - Figura 2.4(b).

Figura 2.4 – Triângulo: (a) esférico; (b) hiperbólico



Fonte: a) Motta (2018); b) Albon (2021).

2.1.2 LAMBERT E LEGENDRE

Após mais de três décadas das tentativas de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) - Figura 2.5, resolveu trabalhar no mesmo problema do quinto postulado de Euclides. Os resultados de seu trabalho foram publicados em um livro póstumo chamado *Die Theorie der Parallelinien* (A teoria das linhas paralelas). Em seus estudos, Lambert considerou um quadrilátero com três ângulos retos e criou três hipóteses para o quarto ângulo: agudo, reto ou obtuso.

[...] como Saccheri, ele mostrou que para as três hipóteses a soma dos ângulos de um triângulo é *menor que*, *igual a* ou *maior que* dois ângulos retos, respectivamente, e então, indo além, que a deficiência abaixo de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo agudo, ou o excesso de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo obtuso, é proporcional à área do triângulo. Observou a semelhança entre a geometria decorrente da hipótese do ângulo obtuso e a geometria esférica, na qual a área do triângulo é proporcional a seu excesso esférico e conjecturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo agudo poderia talvez se verificar numa esfera de raio imaginário (EVES, 1997, p. 541).

Figura 2.5 – Lambert



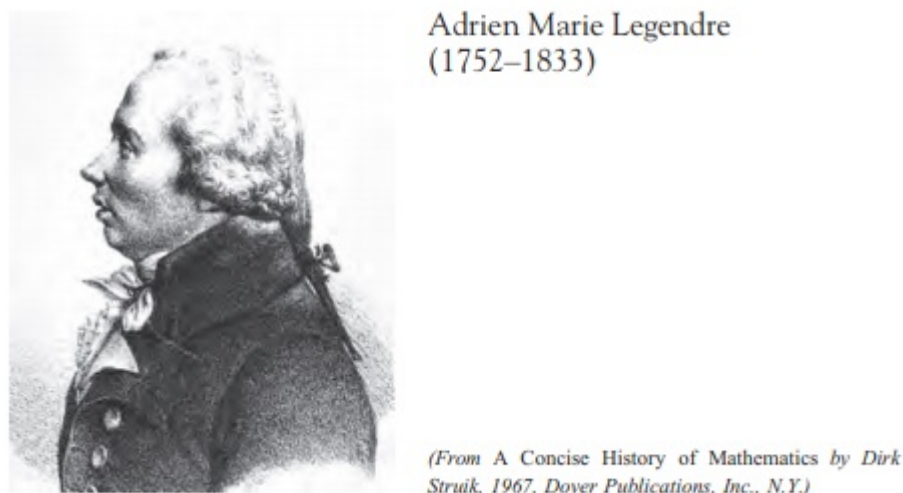
Johann Heinrich Lambert
(Coleção David Smith)

Fonte: Eves (1997, p. 479).

Lambert, assim como Saccheri, desconsiderou de forma indireta a hipótese do ângulo obtuso e suas conclusões a respeito do ângulo agudo, após vários estudos, foram insatisfatórias e pouco precisas.

Outro matemático que ajudou a difundir o problema do quinto postulado de Euclides foi o analista francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) - Figura 2.6. Legendre adotou outra forma de abordar o problema, considerando que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser *menor do que*, *igual a* ou *maior do que* dois ângulos retos.

Figura 2.6 – Legendre



Fonte: Burton (2011, p. 575).

Muitos dos estudos e tentativas de Legendre constam nas edições de seu livro *Éléments de Géométrie* (Elementos de geometria), muito conhecido e que, conforme Eves (1997), auxiliou na popularização do problema do postulado das paralelas.

2.2 DESVENDANDO O QUINTO POSTULADO

Saccheri, Lambert e Legendre tentaram em vão, por algumas décadas, demonstrar o quinto postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros postulados. O russo Lobachevsky, o húngaro Bolyai e o alemão Gauss compreenderam a independência do quinto postulado de Euclides e conceberam os primórdios das novas geometrias, chamadas de não Euclidianas, em épocas muito próximas e de forma independente.

Lobachevsky, Bolyai e Gauss abordaram a problemática do quinto postulado de Euclides da maneira que John Playfair havia interpretado, considerando três possibilidades: “Por um ponto dado pode-se traçar *mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma* paralela a uma reta dada. Essas situações equivalem, respectivamente, às hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso” (EVES, 1997, p. 541). Novamente, assumindo a infinitude da reta, a opção do ângulo obtuso foi descartada e, suspeitando que sob a hipótese do ângulo agudo existia a possibilidade de se determinar uma geometria tão bem estruturada quanto à Euclidiana, cada um deles abordou essa hipótese de maneira singular.

2.2.1 GAUSS

Com toda certeza, o príncipe da matemática Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - Figura 2.7, é o nome mais notável entre os três revolucionários estudiosos das geometrias não Euclidianas e, de acordo com Eves (1997), é provável que ele tenha sido o primeiro a

estabelecer conclusões a respeito da hipótese do ângulo agudo. Inclusive, há suspeitas de plágio que não foram comprovadas. Os professores de Lobachevsky e Bolyai, devido às suas ligações com Gauss, podem ter induzido ambos a pensar de forma análoga à Gauss. No entanto, Gauss nunca publicou seus estudos a esse respeito, “[...] não compartilhou suas ideias com outros; simplesmente elaborou a ideia para si próprio” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 364). Logo, todas as honras pelo pioneirismo no estudo das geometrias não Euclidianas são creditadas a Lobachevsky e Bolyai.

Figura 2.7 – Gauss

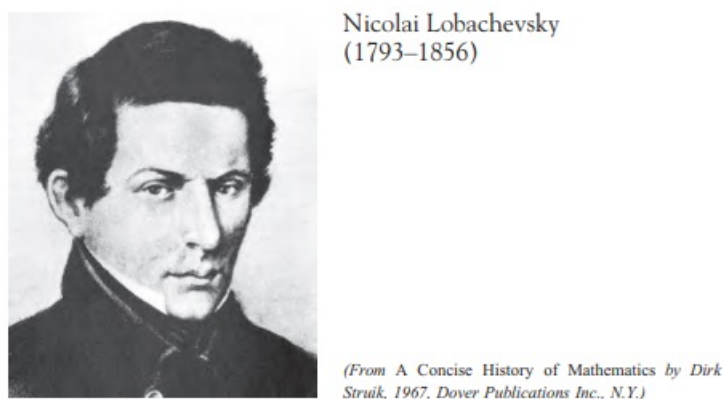


Fonte: Burton (2011, p. 547).

2.2.2 LOBACHEVSKY

O matemático russo Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) - Figura 2.8, é considerado por muitos como aquele que realmente desvendou o prelúdio das geometrias não Euclidianas, às quais chamava de *geometria imaginária*.

Figura 2.8 – Lobachevsky



Fonte: Burton (2011, p. 593).

Enquanto estudante na Universidade de Kazan, Lobachevsky foi aluno de Johann Christian Martin Bartels (1769-1836). Este havia sido professor de Gauss (O’CONNOR; ROBERTSON, 2009), com quem trocava correspondência de forma corriqueira. Após graduar-se, Loba-

chevsky tornou-se professor na Universidade de Kazan, e foi lá, segundo Eves (1997), que em 1830 publicou em um boletim da universidade seus estudos sobre uma nova geometria. Contudo, como grande parte dos matemáticos europeus da época não eram fluentes em russo, em 1840 Lobachevsky publicou seus estudos em alemão no livro *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas). Em 1855, publicou esses estudos, de forma mais bem elaborada e em uma abordagem final, em um livro em francês denominado *Pangéométrie* (Pangeometria).

Em 1842, Lobachevsky ingressou, por intermédio de Gauss, na Sociedade Científica de Göttingen. Em correspondência, Gauss parabenizou Lobachevsky por suas descobertas, mas nunca de forma pública. Falecido em 1856, Lobachevsky não pode desfrutar do reconhecimento de sua obra. O matemático inglês William Kingdon Clifford (1845-1879) comparou: “[...] O que Copérnico foi para Ptolomeu, Lobachevsky foi para Euclides” (BURTON, 2011, p. 595). A geometria desenvolvida por Lobachevsky é conhecida como geometria de Lobachevsky.

2.2.3 BOLYAI

O professor de matemática húngaro Farkas Bolyai (1775-1856), pai do matemático e oficial do exército húngaro Janos Bolyai (1802-1860) - Figura 2.9, foi amigo de Gauss. Farkas compartilhou com Janos seu fascínio pelo quinto postulado de Euclides, o qual tentou desvendar sem êxito por muito tempo de sua vida. Janos, encantado pelo desejo de descobrir novos horizontes na geometria, deu continuidade aos estudos de seu pai sobre o postulado das paralelas. Porém, Farkas não aprovava que Janos perdesse boa parte da vida nessa busca. “Pelo amor de Deus, imploro a você, desista. Receie isto tanto quanto as paixões sensuais porque isso, também, pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 365). Janos, por sua vez, não deu ouvidos ao pai. Em 1823, escreveu a Farkas: “do nada eu criei um universo novo e estranho” (EVES, 1997, p. 542).

Figura 2.9 – Janos Bolyai



Fonte: O'Connor e Robertson (2004).

Desta forma, Farkas pediu então que Janos publicasse as descobertas em seu livro *Tenta-*

men Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi (Um jovem interessado em introduzir elementos da matemática pura), em um apêndice da obra chamado *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* (Apêndice explicando a ciência do espaço absolutamente verdadeira). O livro de Farkas Bolyai, com o apêndice de Janos Bolyai, foi publicado somente em 1832, dois anos após as publicações de Lobachevsky na Universidade de Kazan. Entusiasmado, Farkas enviou as descobertas de Janos a Gauss. Este não demonstrou interesse algum, pois segundo ele mesmo, já havia pensado nessas hipóteses cerca de trinta anos antes (BURTON, 2011). Desanimado, Janos nunca mais publicou material algum.

O matemático e geômetra americano George Bruce Halsted (1853–1922) classificou o apêndice escrito por Janos Bolyai como “[...] as mais extraordinárias duas dezenas de páginas em toda a história do pensamento” (BURTON, 2011, p. 590). Janos Bolyai morreu em 1860, sem o devido reconhecimento por sua obra.

2.3 UMA NOVA GERAÇÃO DE MATEMÁTICOS

Após as publicações sobre as descobertas de Lobachevsky e Bolyai, outros matemáticos investigaram as novas geometrias. Segundo Eves (1997), a consistência da hipótese do ângulo agudo veio nos anos seguintes graças aos trabalhos de Beltrami, Klein e Poincaré, entre outros. Estes matemáticos comprovaram indubitavelmente a independência do quinto postulado de Euclides, que baseava os estudos de Lobachevsky e Bolyai.

Em 1854, Riemann provou que, com alguns pequenos ajustes nos postulados, pode-se enunciar uma outra geometria não Euclidiana, consistente, entretanto diferente, àquela de Lobachevsky e Bolyai, utilizando-se como base a hipótese do ângulo obtuso, que até então fora sempre rejeitada. Com a real independência do postulado das paralelas, originaram-se outros sistemas geométricos.

2.3.1 KLEIN

O matemático e educador alemão Felix Klein (1849-1925) - Figura 2.10, foi notável em seu trabalho como pesquisador, tanto na matemática quanto na pedagogia, pois “desde Gaspard Monge (1746-1818) não existira professor tão influente, pois além de dar aulas estimulantes, Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu forte influência em círculos pedagógicos” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 369). Klein também desmistificou as geometrias, colocando-as de formas equivalentes sob o ponto de vista das descobertas no campo da teoria de grupos. Esse estudo de Klein com o matemático norueguês Sophus Lie (1842-1899) ficou conhecido como *Programa Erlanger*.

Klein foi chefe do Departamento de Matemática da Universidade de Göttingen, que se tornou a meca dos estudantes de matemática até a ascensão política do nazismo na Alemanha (EVES, 1997). O totalitarismo e a discriminação racial impostos pelo governo alemão provocaram

Figura 2.10 – Klein

Felix Klein
(1849–1925)

(From A Concise History of Mathematics by Dirk Struik, 1967, Dover Publications, Inc., N.Y.)

Fonte: Burton (2011, p. 603).

o êxodo de pensadores da Alemanha, sendo que boa parte migrou para os Estados Unidos da América. Em 1871, Klein nomeou a geometria de Lobachevsky e Bolyai como geometria hiperbólica, a geometria de Euclides como geometria parabólica e a geometria de Riemann como geometria Elíptica, tendo esta como caso particular a geometria esférica (EVES, 1997). Outra de suas contribuições às geometrias não Euclidianas foi a estruturação de uma geometria hiperbólica no plano, o disco de Klein.

2.3.2 POINCARÉ

O francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) - Figura 2.11, é considerado o último matemático universalista, ou seja, o último dos que dominavam todas as áreas da matemática pura e aplicada à época. Segundo Boyer (2012), seu antecessor era ninguém menos do que Gauss, sendo que ambos contribuíram em vários ramos das ciências. Enquanto Gauss escreveu pouco e poliu bem suas obras sob o lema “Pouco, porém maduro” (EVES, 1997, p. 618), Poincaré foi um escritor prolífico, tendo deixado mais de 30 livros e 500 artigos técnicos.

Figura 2.11 – Poincaré

Henri Poincaré
(1854–1912)

(From A Concise History of Mathematics by Dirk Struik, 1967, Dover Publications, Inc., N.Y.)

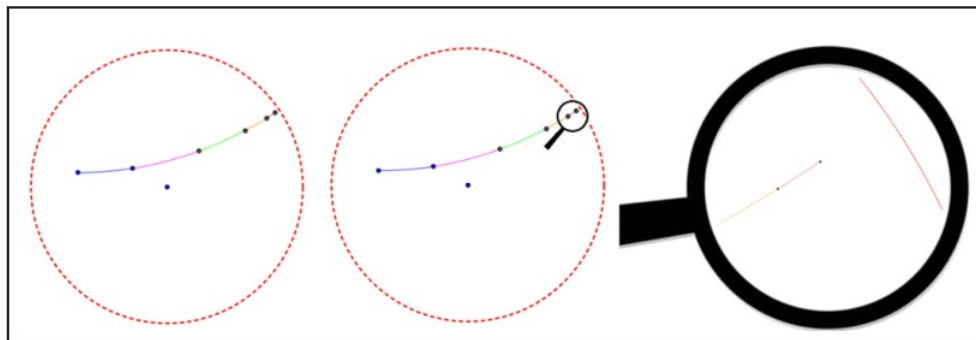
Fonte: Burton (2011, p. 700).

Gauss e Poincaré transbordavam conhecimento e tinham uma predileção por teoremas

gerais ao invés de particularidades. Poincaré graduou-se como engenheiro de minas na École des Mines em 1879 e, no mesmo ano, obteve seu doutorado em ciências na Universidade de Paris. Depois de dois anos como professor na Universidade de Caen, transferiu-se para a Universidade de Paris, onde lecionou até sua morte. Como a matemática se expandiu muito nos séculos XX e XXI, dificilmente haverá um matemático que possa receber de maneira sensata o título de universalista novamente.

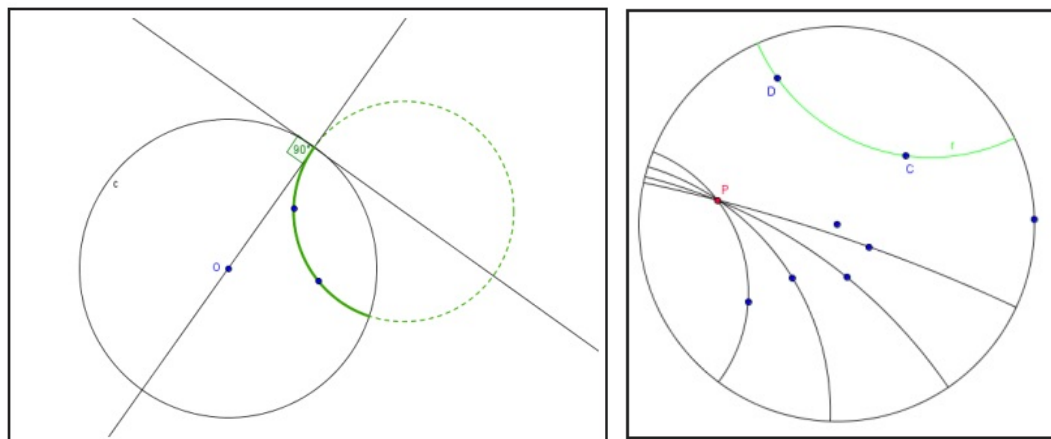
Poincaré contribuiu significativamente às geometrias não Euclidianas. Um dos seus modelos, o disco de Poincaré, é uma geometria hiperbólica bidimensional. Nesta, o plano hiperbólico é definido pela região delimitada por uma circunferência, onde os pontos internos à circunferência são os pontos do plano hiperbólico, os pontos que pertencem à circunferência são os pontos ideais e a circunferência é o horizonte hiperbólico - Figura 2.12 (RIBEIRO; GRAVINA, 2013). Os arcos de circunferência contidos no disco e perpendiculares ao horizonte hiperbólico, assim como os diâmetros da circunferência, são as retas hiperbólicas - Figura 2.13(a).

Figura 2.12 – O horizonte hiperbólico do disco de Poincaré



Fonte: Ribeiro e Gravina (2013, p. 57).

Figura 2.13 – Disco de Poincaré: (a) reta (em verde); (b) retas paralelas à reta r



(a)

(b)

Fonte: Ribeiro e Gravina (2013, p. 56).

No modelo do disco de Poincaré, dados um ponto hiperbólico P e uma reta r que não passa por P , há uma infinidade de retas que passam por P e são paralelas à r - Figura 2.13(b). Ainda, a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é equivalente a 180° menos a área do triângulo.

2.3.3 BELTRAMI

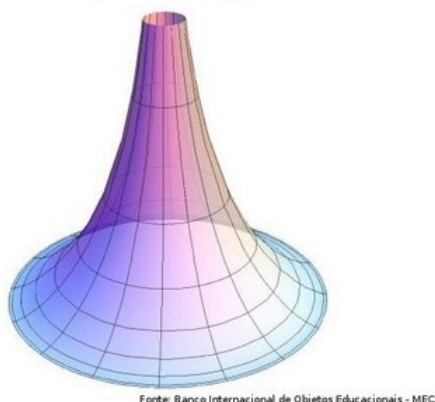
O italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) - Figura 2.14, acreditava que a geometria desenvolvida por Lobachevsky e Bolyai tinha origem na hipótese do ângulo agudo de Saccheri, apesar de Lobachevsky e Bolyai desconhecerem os estudos desenvolvidos por Saccheri (BURTON, 2011).

Figura 2.14 – Beltrami



Fonte: O'Connor e Robertson (2000).

Figura 2.15 – Pseudoesfera



Fonte: MEC (s.d.).

Beltrami ficou conhecido por ter justificado em 1868, no artigo *Essay on an Interpretation of Non-euclidean Geometry* (Ensaio sobre uma interpretação da geometria não Euclidiana), que a geometria de Lobachevsky e Bolyai é consistente se, e somente se, a geometria Euclidiana é consistente. Para tanto, Beltrami utilizou a superfície da pseudoesfera - Figura 2.15, ou seja, uma “[...] superfície de revolução da curva denominada tratriz em torno de sua assíntota” (ARCARI, 2008, p. 10). O modelo de Beltrami fez a transição, no sentido matemático, da geometria imaginária de Lobachevsky à realidade.

2.3.4 RIEMANN

O grande matemático alemão e revolucionário das geometrias Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) - Figura 2.16, nasceu na área rural de Hannover, era introspectivo e de saúde frágil. Riemann foi orientado por Gauss após conseguir surpreendê-lo durante uma *habilitationsschrift* (dissertação probatória) em 1854, quando aspirava por uma vaga de *privatdozent* (professor não remunerado) na Universidade de Göttingen, instituição na qual concluiu seu doutoramento.

Figura 2.16 – Riemann



Bernhard Riemann
(1826–1866)

(The Bettmann Archive.)

Fonte: Burton (2011, p. 593).

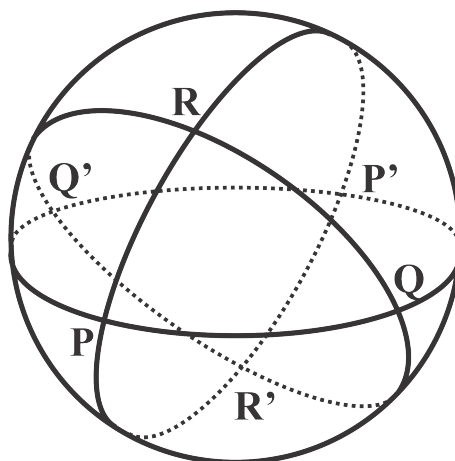
À época, Gauss era considerado o maior matemático de todos os tempos e chefiava a banca examinadora. Para a apresentação, o candidato pretendente à vaga deveria relacionar três temas para que a banca escolhesse um deles. Era de praxe a banca escolher o primeiro tema, porém Gauss ficou curioso com o terceiro tema proposto pelo jovem Riemann: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* (Sobre as hipóteses que constituem os fundamentos da Geometria). “O resultado no caso de Riemann, foi a mais célebre conferência probacionária da história da matemática, pois apresentava uma profunda e ampla visão de todo campo da geometria” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 366). A dissertação de Riemann conseguiu um fato quase inédito, ou seja, surpreender o velho Príncipe, que ficou em êxtase com as ideias do jovem matemático e comentou: “A dissertação apresentada por Herr Riemann oferece evidência convincente de uma mente criativa, ativa, verdadeiramente matemática, e de uma imaginação gloriosamente fértil” (GARBI, 2006, p. 261).

A dissertação de Riemann, segundo Garbi (2006), foi fundamental à evolução das geometrias não Euclidianas. Ao assumir uma fórmula geral para calcular distâncias entre pontos infinitamente próximos variando parâmetros, Riemann criou uma infinidade de geometrias distintas. Até então, as únicas conhecidas eram a Euclidiana e a Hiperbólica, que se tornariam casos particulares da geometria de Riemann.

Ainda que Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Lobachevsky e Bolyai tenham dedicado anos de suas vidas ao estudo das geometrias não Euclidianas, existia algo que todos eles ignoraram e que Riemann resolveu investigar: a hipótese do ângulo obtuso. Saccheri, Lambert e Legendre não haviam conseguido provar nada em seus estudos; Gauss, Lobachevsky e Bolyai fizeram interpretações distintas abordando somente a hipótese do ângulo agudo. Riemann foi capaz de teorizar sobre a hipótese do ângulo obtuso, que sempre fora desconsiderada.

Segundo Eves (1997) e Garbi (2006), Riemann imaginou como retas poderiam ser fechadas, e nesse ponto passou a considerar as superfícies esféricas e, em seguida, as superfícies elípticas, desenvolvendo a geometria elíptica, da qual a geometria esférica é um caso particular. “Se as propriedades da geometria hiperbólica causam espanto, as da elíptica causam incredulidade [...]” (GARBI, 2006, p. 264). A geometria elíptica, que nasceu da hipótese do ângulo obtuso, não é nenhum pouco intuitiva. Na geometria esférica, por exemplo, duas retas se intersectam sempre em dois pontos diametralmente opostos na superfície esférica - Figura 2.17.

Figura 2.17 – Retas (circunferências máximas) na geometria esférica



Fonte: Motta (2018, p. 75).

Os estudos sobre geometrias não Euclidianas provenientes da imaginação fértil de Riemann tornaram-se a base para o desenvolvimento do cálculo tensorial realizado por Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), Tullio Levi-Civita (1873-1941) e outros matemáticos contemporâneos. Esses estudos também chegaram às mãos de Albert Einstein (1879-1955) e se tornaram as ferramentas matemáticas utilizadas na formulação da teoria da relatividade geral.

Este problema permaneceu insolúvel para mim até 1912, quando, subitamente, vi que a teoria de Gauss das superfícies contém a chave para resolver o mistério. Compreendi que as coordenadas de superfície de Gauss tinham um significado profundo. Todavia, não sabia então que Riemann tinha estudado as bases da Geometria de um modo ainda mais profundo [...] Compreendi que os fundamentos da Geometria têm um significado físico [...] Meu querido amigo, o matemático (Marcel) Grossman, estava em Zurique [...] Por ele soube [...] de Ricci e, mais tarde, de Riemann. Assim, perguntei a meu amigo se meus

problemas poderiam ser resolvidos a partir da teoria de Riemann [...] (GARBI, 2006, p. 262).

Após a morte de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), que havia sido professor de Riemann em Berlim, Riemann ocupou em 1859 a cadeira de Dirichlet em Göttingen, posição que outrora pertenceu a Gauss.

O incrível Riemann, que contribuiu com as geometrias não Euclidianas e outras inúmeras áreas da matemática, da física e da engenharia moderna, faleceu devido a uma tuberculose, pouco antes de completar 40 anos de idade. Indiscutivelmente, Riemann foi uma das mentes matemáticas mais brilhantes de todos os tempos.

2.4 GEOMETRIA RIEMANNIANA

A dissertação de Riemann à banca examinadora na Universidade de Göttingen não foi sobre uma geometria específica, mas sim sobre uma visão ampla de toda geometria como “[...] um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 366).

A geometria de Riemann é muito mais abrangente do que a geometria de Lobachevsky. Para Riemann, a geometria não era mais a interpretação de pontos, retas e planos no espaço e sim de n -uplas coordenadas que são escritas segundo alguma relação, chamada de métrica. Riemann percebeu que a relação de distância entre pontos infinitesimalmente próximos é dada, na geometria Euclidiana, pela métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, e que existem várias métricas possíveis para calcular a distância entre dois pontos. A métrica usada para calcular essa distância determina as propriedades do espaço e a sua geometria.

Um espaço cuja métrica é da forma

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz + \\ & + g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz + \\ & + g_{31}dxdz + g_{32}dydz + g_{33}dz^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde as g são constantes ou, mais geralmente, funções de x , y e z , chama-se um espaço Riemanniano. Assim, (localmente) o espaço Euclidiano é apenas o caso muito especial de um espaço Riemanniano em que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e todos os outros g são zero (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 366).

A partir da métrica (2.1), Riemann criou uma fórmula para a curvatura Gaussiana de uma superfície em determinado espaço. Anos mais tarde, Albert Einstein e outros estudiosos usariam a geometria e o espaço Riemannianos, juntamente com os estudos de geometria diferencial e análise tensorial, estes também frutos da geometria de Riemann, como ferramentas para desenvolver a teoria da relatividade geral.

3 A TEORIA DA RELATIVIDADE

A astrofísica, depois de muitos questionamentos e apenas algumas décadas de experimentos e observações, mostra que o Universo não existiu desde sempre de forma constante. Ele evoluiu a partir de uma explosão denominada Big Bang - Figura 3.1; para muitos cosmólogos, estudiosos da origem e evolução do Universo, não há motivo para se pensar no tempo anterior ao Big Bang, pois este é causador da existência do tempo.

Figura 3.1 – Explosão que deu origem ao Universo: Big Bang



Fonte: Lincoln (2019).

A geometria utilizada para descrever o Universo não é a geometria Euclidiana que estudamos na escola. A geometria do espaço-tempo é mais complexa, permitindo por exemplo que linhas retas se curvem, ou que a soma dos ângulos internos de um triângulo seja maior do que 180° e, dessa forma, possibilitando uma infinidade de novos fenômenos, tais como loops temporais, buracos negros e viagens ao futuro. A geometria do espaço-tempo é descrita pela teoria da relatividade de Einstein.

[...] na verdade, toda matéria e energia funciona da mesma maneira em qualquer lugar. Dito de um outro modo, as leis da física – as regras que, de certa forma, estão escritas na estrutura do Universo e que dizem às coisas como se comportar – são as mesmas em todo lugar. Não existe um lugar especial ou preferencial onde as leis da física estariam corretas e outros em que precisariam ser modificadas (WOLFSON, 2005, p. 25-26).

A concepção de que “nenhum lugar é especial” já era conhecida por alguns estudiosos precursores à Einstein. Nicolau Copérnico (1473-1543) desafiou o contexto histórico em que viveu e contrariou o conceito do geocentrismo fundamentando a teoria heliocêntrica. Depois

de Copérnico, Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1643-1727) também criaram leis quantitativas que descrevem a forma como os corpos se movem. Mas foi Albert Einstein quem afirmou que, independentemente do estado de movimento de um corpo, as leis que regem a física são exatamente as mesmas.

Saltos temporais não são de simples compreensão, pelo fato de nossa vivência ser estritamente terrestre. Nossa galáxia se move, em média, a 90% da velocidade da luz (aproximadamente 300.000 km/s) em relação a outras galáxias longínquas, mas isso não é algo que acompanhamos ou notamos em nosso cotidiano. Se fossemos estudiosos de galáxias, todo esse contexto complexo seria óbvio.

Nossas experiências, enquanto terráqueos, são muito limitadas. Nesse contexto, nos movimentamos a uma fração ínfima da velocidade da luz. Ao aprender a engatinhar, andar, correr, dirigir ou voar, conhecemos o senso de espaço absoluto e nos acostumamos a ele. É importante perceber que nossa noção de tempo também é limitada, pois temos na Terra o senso simplório do tempo absoluto que vivenciamos: “[...] nossa noção adulta de tempo como uma medida absoluta e universal de progresso do passado em direção ao futuro” (WOLFSON, 2005, p. 30). As consequências desses novos conceitos, fugindo do senso comum, inicialmente não parecem lógicas. Porém, o princípio da relatividade mostra como tudo isso está correto e faz sentido.

Para compreender os novos conceitos de espaço e tempo precisamos, antes de mais nada, conhecer o conceito de movimento, pois todos nós e tudo que nos cerca depende do movimento para existir. O simples fato de sair de um ponto *A* e ir a um ponto *B* no espaço caracteriza o movimento: a Terra se move ao redor do Sol e em torno de si; elétrons giram na órbita de um átomo possibilitando reações químicas. Sem movimento, tudo para. Mover-se significa ir de um lugar a outro no espaço em determinado tempo. Qualquer significado de movimento precisa relacionar espaço e tempo.

3.1 DO PRINCÍPIO ATÉ EINSTEIN

No início, acreditava-se que o estado natural dos corpos na Terra era o repouso e que qualquer ação que tirasse o corpo desse estado natural, colocando-o em movimento, deveria ter uma explicação lógica. Já os corpos fora da Terra pertenciam ao domínio celestial, com movimentos perfeitos em trajetórias circulares.

Analisando dados e obras de grandes pensadores, astrônomos e físicos, conclui-se que o conceito de movimento é histórico. Pensando no movimento terrestre, de Aristóteles (384-322 a.C.) até Ptolomeu (século II d.C.), fundamentou-se a teoria do Geocentrismo, isto é, a Terra ocupa o centro do universo e os demais astros e planetas giram ao seu redor, sendo a Terra o centro do modelo simplesmente porque é o local que habitamos.

O modelo geocêntrico somente foi colocado em dúvida no início do século XVI por

Nicolau Copérnico. Este, considerado herege pela igreja católica por suas ideias contrárias ao dogma Aristotélico, idealizou o Heliocentrismo, teoria na qual o Sol é o centro do Universo. Com base nos estudos de Copérnico, o dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) fez algumas descobertas extras, que não foram publicadas até sua morte. Contudo, seu prodigioso estudante Johannes Kepler (1571-1630) deu continuidade aos estudos e renunciou definitivamente à ideia de que os corpos celestes se movem em trajetórias circulares perfeitas. Kepler concluiu que a Terra e os demais planetas giram ao redor do Sol em órbitas elípticas, sendo que o Sol fica sempre em um dos focos dessas elipses. Além disso, Kepler calculou as trajetórias e os períodos¹ dos planetas com uma assombrosa exatidão para a época em que viveu.

Outro grande astrônomo e físico foi Galileu Galilei, que além de concordar com os estudos de Copérnico, foi um dos primeiros estudiosos a “[...] insistir na primazia do experimento e da observação para estabelecer a verdade científica” (WOLFSON, 2005, p. 39). Galileu foi o primeiro a construir um telescópio astronômico e a observar como os planetas se moviam; com base em observações de Júpiter e Vênus, compreendeu o movimento dos planetas na órbita solar. Suas constatações e sua dedicação à ciência rederam a Galileu uma prisão perpétua por heresia. A igreja católica só o absolveu em 1992.

Galileu também fazia experimentos no campo da mecânica: atirava corpos de massas diferentes do alto da torre de Pisa e observava a velocidade com que atingiam o solo. Por meio de um experimento com esferas e planos inclinados, estabeleceu um conceito inovador: o estado natural do movimento dos corpos na Terra não é o repouso, mas sim o movimento uniforme.

Após as descobertas de Galileu, nasce um gênio que conseguiu conectar a física celestial à física terrestre: Issac Newton, com sua teoria da gravitação universal, explica os movimentos nas regiões mais longínquas do Universo e o movimento de corpos ínfimos na Terra. A lei da gravitação universal mostra que os corpos têm uma tendência natural a reagir à presença de outro corpo na sua vizinhança. Na Terra, como a massa dos corpos é muito pequena, essa interação não é perceptível. Comparando a Terra e a Lua, que têm massas expressivas, a interação entre esses dois corpos é real e faz com que a Lua, atraída pela Terra, descreva ao redor desta uma trajetória quase circular. A Lua não colide com a Terra por que sua velocidade é constante e sua trajetória é tangente à curvatura da Terra. Assim, a aceleração gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua muda a trajetória desta, como havia descrito Galileu.

Além disso, as três leis fundamentais da mecânica clássica propostas por Newton também ressaltam esse novo Universo. A primeira lei de Newton, ou princípio da inércia, estabelece que um corpo tende a permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme caso a resultante das forças que atuam sobre ele seja nula. A segunda lei de Newton, ou princípio fundamental da dinâmica, afirma que a força resultante que atua sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração. A terceira lei de Newton, ou princípio da ação e reação, estabelece que, quando um corpo *A* colide com um corpo *B*, a força que *A* exerce em *B*, *B* também exerce

¹ Tempo para um volta completo em torno do Sol.

em A ; essas forças têm a mesma direção e intensidade, porém os sentidos são opostos.

Newton contribuiu significativamente em várias áreas da matemática, física e astronomia, criando e/ou renovando conceitos. Por exemplo, a primeira concepção de satélite artificial orbitando a Terra foi de Newton. Essa concepção virou realidade somente 230 anos depois da sua morte, com o lançamento da *Sputnik 1* em outubro de 1957. Além disso, a refração da luz branca, a teoria dos gases, o comportamento das ondas mecânicas como o som, obedecem as leis de Newton. Contudo, em sua obra *Opticks* de 1704, Newton afirmou que a luz se comportava como partícula. Em 1801, o inglês Thomas Young (1773-1829) realizou um experimento de interferência entre raios de luz, denominado experimento da fenda dupla, que comprovou que a luz se comporta como uma onda.

A eletricidade e o magnetismo são fenômenos conhecidos pelo homem desde o tempo dos grandes pensadores gregos. Entretanto, essas duas áreas da física sempre foram tratadas de forma distinta até o século XVIII. Até meados do século XIX, alguns conceitos importantes já eram conhecidos.

Eletricidade:

- carga elétrica - Benjamin Franklin (1706-1790);
- relação entre as cargas, seus sinais e reações (lei de du Fay) - Charles du Fay (1698-1739);
- força de interação entre as cargas (lei de Coulomb) - Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806);
- corrente elétrica estável (invenção da pilha) - Alessandro Volta (1745-1827);
- campo elétrico - Michael Faraday (1791-1867).

Magnetismo:

- todo ímã tem um par de polos distintos (norte e sul);
- polos iguais se repelem e polos distintos se atraem;
- é impossível separar os polos de um ímã;
- todo ímã gera na sua vizinhança um campo magnético;
- ímãs naturais.

Em 1820, o dinamarquês Hans Christian Öersted (1777-1851) ligou um circuito elétrico e esqueceu uma bússola próxima ao fio que conduzia a corrente elétrica. No experimento, Öersted observou que a passagem da corrente elétrica por um filamento do circuito alterava o campo magnético na região próxima ao fio. Era o primeiro passo para o que hoje conhecemos como eletromagnetismo, e que está necessariamente presente em todos os aparelhos *wireless* (sem fio) e em muitos outros dispositivos eletrônicos.

Após a descoberta ocasional de Öersted, muitos físicos, cientistas e estudiosos dedicaram-se ao estudo do comportamento das cargas elétricas, dos campos elétricos, dos ímãs e dos campos

magnéticos. Em 1831, Michael Faraday, que já conhecia a ideia do eletroímã², tentou com o magnetismo gerar corrente elétrica. E assim o fez, descobrindo que o magnetismo variável é capaz de gerar corrente elétrica. Faraday denominou esse fenômeno de indução eletromagnética. Foi graças a esse feito que hoje é possível produzir energia elétrica em uma usina hidroelétrica. No processo, a água gira uma turbina que movimenta um poderoso ímã entre grandes bobinas. São estas bobinas que geram corrente elétrica.

O campo elétrico gerado ao redor de uma carga puntiforme (formato de ponto) é proporcional à sua carga elétrica e inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto observado até a carga geradora. Portanto, cargas elétricas estáticas criam apenas campos elétricos, enquanto cargas elétricas em movimento criam campos elétricos e magnéticos. Assim, a descoberta de Faraday acrescentou um novo conceito importante: um campo magnético variável é capaz de gerar um campo elétrico. Ao conhecer essas ideias revolucionárias, James Clerk Maxwell (1831-1879) provou, através das equações que levam seu nome, que era possível criar um campo magnético a partir de um campo elétrico variável.

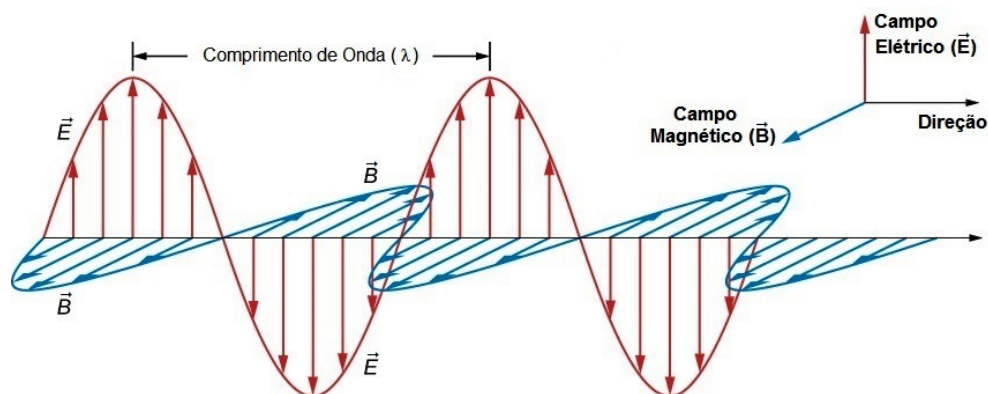
As descobertas teóricas de Maxwell mostram que campos elétricos variáveis geram campos magnéticos, que por sua vez variam e geram novos campos elétricos, que novamente sofrem variação e geram novos campos magnéticos, e assim esse sistema se perpetua, tornando-se independente com o passar do tempo e se propagando no espaço como ondas eletromagnéticas. Em 1887, o alemão Heinrich Hertz (1857-1894) comprovou as descobertas de Maxwell com um experimento simples e sem muitas ambições: um circuito elétrico se movimenta em uma direção e assim envia energia a um outro circuito sem alimentação, o qual começa a funcionar. Esse experimento foi melhorado por Guglielmo Marconi (1874-1937), que em 1901 conseguiu enviar ondas eletromagnéticas da Inglaterra à América do Norte. Essas ondas cruzaram o Atlântico por intermédio de um telégrafo sem fio.

Desde o século XVII, sabia-se que a velocidade da luz era de, aproximadamente, $300.000.000 \text{ m/s}$. Maxwell provou brilhantemente com suas equações que as ondas eletromagnéticas tinham velocidade igual à velocidade da luz. De posse desses dados inéditos, conseguiu demonstrar que a luz era uma onda eletromagnética. Pouco mais de 60 anos após Young provar que a luz não se comportava como partícula, Maxwell comprovou indubitavelmente que a luz é um fenômeno simultâneo de eletricidade e magnetismo, ou seja, a luz é uma onda eletromagnética.

Todas as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com a mesma velocidade, equivalente à velocidade da luz. Esta é representada pela letra “c”, e acredita-se que o símbolo é devido à inicial da palavra latina *celeritas*, que significa rapidez. Quando as ondas eletromagnéticas se propagam em outros meios que não o vácuo, a velocidade de propagação é sempre menor do que a velocidade da luz. O que diferencia as ondas eletromagnéticas umas das outras são suas frequências e comprimentos de onda - Figura 3.2.

² A carga elétrica em movimento gera um campo magnético.

Figura 3.2 – A luz é uma radiação eletromagnética



Fonte: Santos e Souza (2022).

No início do século XX, surgiu uma nova dicotomia no mundo da física: os conceitos da mecânica *versus* os conceitos do eletromagnetismo. As grandes descobertas da mecânica, tendo como principal responsável Newton, ocorreram entre o início do século XVII e a primeira metade do século XVIII; já as novas descobertas da eletrodinâmica tiveram como grande contribuinte Maxwell e aconteceram entre a segunda metade do século XVIII até o final do século XIX. Nesta época, o mundo da física está prestes a conhecer Albert Einstein, o homem que irá reunir esses conceitos, que parecem tão distantes, em uma regra universal.

Dentre todas essas inovações e avanços da física, surgiu uma intrigante dúvida que somente Einstein foi capaz de responder. Sabemos que as ondas mecânicas necessitam de um meio material para a propagação. Desta forma, a velocidade do som no ar, ao nível do mar, é de 343 m/s , em condições normais de pressão e a uma temperatura de 20°C . Quando pensamos em ondas eletromagnéticas, a velocidade da luz $c = 299.792.458 \text{ m/s} \approx 300.000 \text{ km/s}$ é dada em relação a qual referencial? Essa pergunta foi temporariamente respondida criando-se um novo conceito: o éter luminífero. Assim, todos os corpos, entre estes os planetas, estariam supostamente imersos em uma substância misteriosa e transparente, que possibilitaria a propagação das ondas eletromagnéticas. Contudo, esse novo conceito interferia em outros contextos já conhecidos e descobertos anteriormente: como toda a Terra estaria envolvida por esse éter, como ela se movia nesse meio?

3.2 EINSTEIN

Em 1905, Albert Einstein era um homem casado, pai de família, que trabalhava em um escritório de patentes na Suíça e que tinha bastante tempo livre para suas descobertas no mundo da física. Por sua forma afrontosa de ser enquanto acadêmico, não obteve indicações de seus professores e, por consequência, não alcançou o mesmo sucesso que seus colegas que se tornaram cátedras na Universidade de Zurique. Neste mesmo ano, Einstein completou um artigo científico intitulado “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”, o qual conectava diretamente

seu artigo que apresentava a teoria especial da relatividade ao eletromagnetismo. Com uma frase poderosa, Einstein acabaria com toda polêmica sobre o éter: “Princípio da Relatividade - As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais que se movem de maneira uniforme” (WOLFSON, 2005, p. 109).

A partir de então, sabe-se que as ondas eletromagnéticas, diferentemente de todas as outras ondas até então conhecidas, propagam-se no vácuo (espaço vazio). A ideia de Einstein não foi uma novidade, pois Galileu já havia feito uma afirmação muito parecida: “as leis de movimento atuam igualmente bem para qualquer corpo em movimento uniforme” (WOLFSON, 2005, p. 49). Portanto, a teoria especial da relatividade de Einstein é uma generalização da relatividade de Galileu para toda a física, inclusive para o recém descoberto fenômeno das ondas eletromagnéticas, afirmando que não há repouso ou movimento absoluto, e que as condições do referencial serão sempre válidas em todo Universo.

Como não há ponto, local ou planeta privilegiado em relação às leis do movimento e como não é possível existir o repouso absoluto nem o movimento absoluto, podemos aceitar uma nova afirmação: em um mesmo meio, a velocidade da luz é invariável. A invariância da velocidade da luz é um fenômeno novo e, devido ao fato de não termos em nosso cotidiano corpos se movendo com velocidades próximas à velocidade da luz, de difícil comprovação.

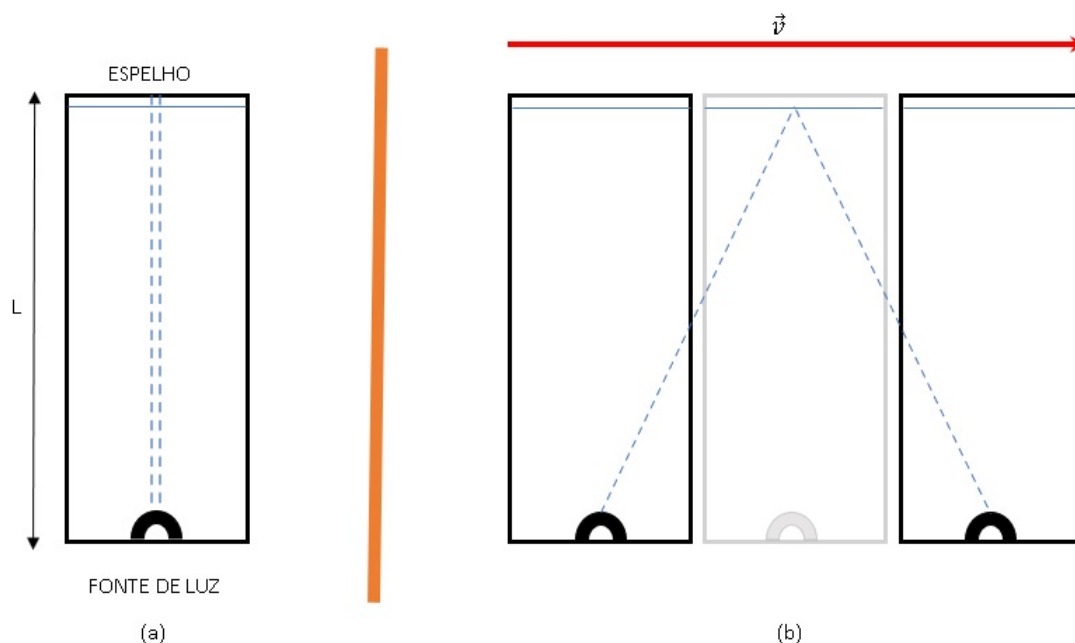
Além do estado de movimento dos corpos, há outras grandezas que dependem de referencial para serem completamente compreendidas. Tempo e espaço são dois bons exemplos: não são grandezas absolutas, mas sim relativas ao referencial de um observador. Newton já havia publicado em 1687: “[...] O tempo absoluto, real e matemático, por si só e por sua própria natureza, flui de maneira uniforme, sem relação com qualquer coisa externa” (NEWTON, 1962 apud WOLFSON, 2005, p. 125). Porém, a ideia de Newton coloca um relógio em um local especial para fazer essa medição absoluta e uniforme, o que é contra o princípio da relatividade e à teoria de não existir nenhuma posição especial no Universo.

O tempo de fato é relativo, e hoje há várias provas disso. Porém, para compreender esse conceito abstrato e até inicialmente absurdo, devemos nos desprender de nossas crenças e pontos de vista baseados em nossas experiências cotidianas. Afinal de contas, em nossos percursos e trajetos diários, nos movimentamos a velocidades muito menores que $0,1\%$ de c .

Na física, consideramos como evento um fato que ocorreu em algum lugar (no espaço) em um certo momento (tempo). Portanto, um evento sempre ocorre em algum lugar e em algum tempo. O intervalo de tempo entre dois eventos não é o mesmo para dois observadores em movimento um em relação ao outro. Pode-se usar a caixa de luz - Figura 3.3, como um relógio para medir o intervalo de tempo entre dois eventos.

Na caixa, um rápido pulso de luz sai da fonte, percorre a caixa, atinge o espelho na face oposta à fonte, reflete e retorna para a fonte; a linha tracejada é a trajetória da luz. A partida do pulso de luz da fonte é o primeiro evento, enquanto que o retorno da luz à fonte é o segundo

Figura 3.3 – Caixa de luz: (a) referencial com a caixa em repouso; (b) referencial com a caixa em movimento à direita



Fonte: O Autor, baseado em Wolfson (2005, p. 129).

evento. No primeiro caso - Figura 3.3(a), a caixa está em repouso em relação ao referencial: a luz percorre uma distância $2L$, o dobro do comprimento L da caixa. No segundo caso - Figura 3.3(b), a caixa se movimenta para a direita, com velocidade \vec{v} , em relação ao referencial. Neste caso, a trajetória da luz é mais longa. Devido à invariância da velocidade da luz, o tempo entre os dois eventos no segundo caso é maior.

Quando a velocidade dos corpos em dois referenciais distintos é pequena, a diferença de tempo entre dois eventos é insignificante; porém, quando a velocidade dos corpos em dois referenciais distintos se aproxima de c , a diferença de tempo se torna significativa.

O tempo entre dois eventos é relacionado pela fórmula da dilatação do tempo (PEREIRA; MIZUKOSHI, 2022)

$$t' = t\sqrt{1 - v^2}, \quad (3.1)$$

onde:

t' é o tempo entre dois eventos, medido em um referencial no qual os eventos ocorrem em um mesmo lugar;

t é o tempo entre dois eventos, medido em um referencial no qual os eventos ocorrem em lugares diferentes;

v é a velocidade relativa dos dois referenciais, como fração de c .

Em (3.1), se $v = 0$, então $t' = t$, o que indica que os dois referenciais não estão em movimento relativo (são o mesmo referencial) e não há dilatação temporal; se $v = 1$ (movimento relativo à velocidade da luz), então $t' = 0$, o que sugere que o tempo não passa no referencial no qual os dois eventos ocorrem no mesmo lugar. Contudo, a velocidade v sempre é dada como uma fração de c . Como nenhum corpo massivo atinge a velocidade da luz, $v < c$.

Para medir distâncias interestelares e intergalácticas (distâncias astronômicas) usamos como unidade de medida o ano-luz, que é simplesmente a distância percorrida por um feixe de luz no espaço em um período de tempo de um ano. Como

$$v = \frac{d}{t}, \quad (3.2)$$

onde v , d e t representam, respectivamente, velocidade, distância e tempo, então

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (3.3)$$

$$\Delta s = v_m \Delta t, \quad (3.4)$$

sendo v_m , Δs e Δt , respectivamente, a velocidade média, a variação de distância e a variação de tempo. Sabendo que a velocidade da luz é $c \approx 300.000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ e que um ano tem um pouco mais que 30 milhões de segundos ($3 \cdot 10^7 \text{ s}$), empregando esses valores em (3.4) concluímos que $\Delta s = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s} = 9 \cdot 10^{12} \text{ km}$. Assim, um ano-luz é equivalente a mais de 9 trilhões (cerca de 9,46 trilhões) de quilômetros. Esta é uma medida muito grande, inclusive para distâncias no sistema solar.

A dilatação temporal expressa em (3.1) é ilustrada no Exemplo 3.1.

Exemplo 3.1. *Imaginemos uma espaçonave que atinge facilmente uma velocidade de $0,9c$ (90% da velocidade da luz). Ignorando o fato de ser tecnologicamente impossível construir essa nave no momento presente e que a aceleração para atingir tal velocidade seria, provavelmente, fatal a qualquer ser vivo, suponhamos que essa nave parte da Terra em direção a um exoplaneta³ situado a uma distância de 36 anos-luz. Quanto tempo a nave leva para chegar ao exoplaneta?*

Como a velocidade da nave é menor do que c , a nave levará mais do que 36 anos para chegar ao exoplaneta. Empregando (3.3), concluímos que:

$$\begin{aligned} 0,9c &= \frac{36 \text{ anos-luz}}{\Delta t}; \\ \Delta t &= \frac{36 \text{ anos-luz}}{0,9c}; \\ \Delta t &= \frac{36 \cdot 9 \cdot 10^{12} \text{ km}}{0,9 \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 120 \cdot 10^7 \text{ s}; \\ \Delta t &= 40 \text{ anos.} \end{aligned}$$

³ Planeta localizado fora do sistema solar.

Logo, a viagem durará cerca de 40 anos para nós que estamos na Terra e para qualquer ser que habite o exoplaneta, destino da viagem. Porém, o tempo de viagem será diferente para os tripulantes da nave. Estes conhecerão na prática a dilatação temporal estabelecida em decorrência da teoria da relatividade de Einstein. Em (3.1), usando $v = 0,9$ (a velocidade da nave é 90% da velocidade da luz) e $t = 40$ anos (o tempo do percurso no referencial da Terra e do exoplaneta é de 40 anos), obtemos que:

$$\begin{aligned} t' &= t\sqrt{1 - v^2}; \\ t' &= 40\sqrt{1 - (0,9)^2}; \\ t' &= 40\sqrt{1 - 0,81}; \\ t' &= 40\sqrt{0,19}; \\ t' &\approx 17,44 \text{ anos.} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, a dilatação temporal para os tripulantes da nave será de cerca de 17,5 anos: o envelhecimento, a sensação de tempo e vivência será de 17,5 anos na nave, enquanto que na Terra e no exoplaneta o tempo decorrido será de 40 anos. A velocidade da nave faz com que um tripulante de 10 anos de idade na partida da Terra tenha quase 28 anos na chegada ao exoplaneta, diferentemente de seus conterrâneos na Terra e também dos hipotéticos habitantes do exoplaneta, que tinham 10 anos de idade na data da partida e terão 50 anos na data de chegada.

Após essas constatações, alguns detalhes devem ser colocados em ordem para evitar futuros mal-entendidos. No Exemplo 3.1, a distância Terra-exoplaneta é de 36 anos-luz, a nave viaja com uma velocidade de $0,9c$ e leva 40 anos para chegar ao destino. Se para os tripulantes da nave o tempo decorrido na viagem é de aproximadamente 17,5 anos, então a viagem ocorre a uma velocidade superior a c ? A resposta a esse questionamento é *não*. Primeiramente, nenhum corpo pode se movimentar com velocidade superior a c ; segundo, é a mudança de referencial que explica essa confusão de valores.

Empregando os dados do Exemplo 3.1 em (3.4), temos que:

$$\begin{aligned} \Delta s' &= (0,9c \text{ ano-luz/ano}) \cdot (17,44 \text{ anos}); \\ \Delta s' &\approx 15,7 \text{ anos-luz,} \end{aligned}$$

onde $\Delta s'$ é a distância Terra-exoplaneta no referencial da nave, assim como t' em (3.1) é o tempo de viagem no referencial da nave e seus passageiros. Logo, para quem está na nave a distância Terra-exoplaneta é de cerca de 15,7 anos-luz e, viajando a uma velocidade de $0,9c$, o tempo de percurso é maior do que 15,7 anos: precisamente, aproximadamente 17,44 anos a mais, totalizando os 17,44 anos calculados em (3.5). Esse valor para o tempo também pode ser calculado isolando-se t na relação (3.2).

A estranheza dos dados ocorre por entendermos a distância entre dois pontos como algo fixo e invariável. As medidas de espaço e tempo não são absolutas. Devemos lembrar que tempo

e espaço são grandezas relativas e o referencial adotado as altera. E, analogamente à dilatação temporal em (3.1), há a contração de comprimento dada por:

$$\Delta s' = \Delta s \sqrt{1 - v^2}, \quad (3.6)$$

sendo que o termo $\sqrt{1 - v^2}$, também presente na equação (3.1), é denominado fator relativístico.

Infelizmente, a tecnologia atual não possibilita a construção de uma espaçonave que viaje a velocidades próximas à da luz. Assim, não podemos comprovar pessoalmente a dilatação temporal e a contração de comprimento. Contudo, há partículas subatômicas que viajam a velocidades muito altas e que nos permitem confirmar os dois fenômenos. Sabendo de ambos, temos na Terra a noção de que o tempo nessa espaçonave passa devagar.

É importante destacar que, na fórmula da dilatação temporal (3.1), se a velocidade do corpo chegar muito próxima à velocidade da luz, teremos que:

$$\lim_{v \rightarrow 1^-} t \sqrt{1 - v^2} = t';$$

$$t \cdot 0 = t'. \quad (3.7)$$

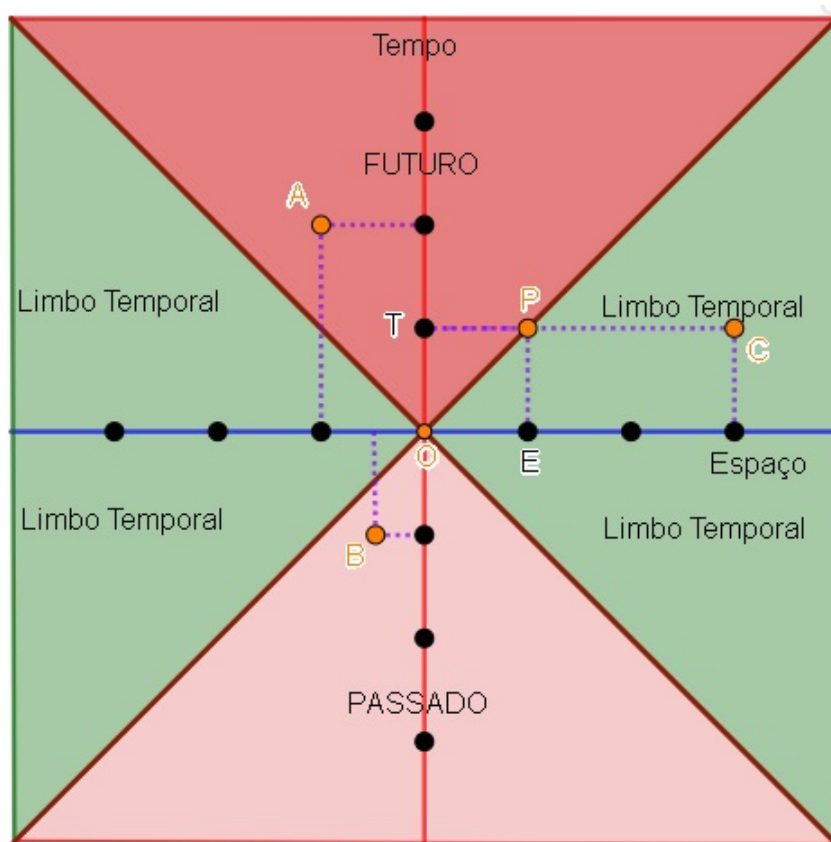
Podemos então, a partir do que indica (3.7), escolher o tempo de viagem? Sim, a viagem pode durar anos ou intervalos menores que segundos. Porém todas essas viagens temporais só são possíveis para o futuro; retornar no tempo continua sendo impossível.

A teoria da relatividade tornou relativos os conceitos de evento, espaço e tempo. Assim, aspectos relacionados aos mesmos, que até então eram considerados invariáveis, agora devem ser compreendidos sob a nova perspectiva: dois eventos A e B que ocorrem na ordem AB em um referencial X , podem ocorrer na ordem inversa BA , ou até mesmo simultaneamente, em um referencial Y .

Desta forma, não podemos considerar as relações entre passado, presente e futuro apenas de maneira linear, como em uma linha do tempo. Para interpretar eventos no espaço-tempo, emprega-se um plano onde a abscissa é o local no espaço unidimensional, em anos-luz, e a ordenada é o instante no tempo, em anos. Cada ponto nesse plano, ilustrado na Figura 3.4, é um evento que ocorre em determinado lugar e momento; a origem desse plano representa o local *aqui* no instante *agora*.

No diagrama espaço-tempo - Figura 3.4, há uma reta dividindo exatamente ao meio os quadrantes ímpares e a outra dividindo os quadrantes pares. Essas retas limitam o *limbo temporal*, que é a região do plano onde as ações definidas na origem O não alteram os eventos. No plano, os pontos na região vermelho claro abaixo do eixo do espaço representam os eventos que influenciaram o aqui e agora, este situado na origem do plano; os pontos na região vermelho escuro acima do eixo do espaço representam os eventos que podem influenciar futuramente as ações definidas no aqui e agora; os pontos na região verde abaixo do eixo do espaço indicam os eventos que não influenciaram o aqui e agora; os pontos na região verde acima do eixo do

Figura 3.4 – Diagrama espaço-tempo



Fonte: O Autor, baseado em Wolfson (2005, p. 187).

espaço indicam os eventos que não serão influenciados pelo aqui e agora. O Exemplo 3.2 mostra algumas interpretações no diagrama espaço-tempo.

Exemplo 3.2. No diagrama espaço-tempo, representado na Figura 3.4, temos que:

- o ponto O , origem do plano, representa o momento presente, isto é, um evento que ocorre no local “aqui” e no instante “agora”; o segmento \overline{OT} , no eixo do tempo, representa o intervalo de um ano, equivalente a $31.536.000\text{ s}$; o segmento \overline{OE} , no eixo do espaço, representa a distância de um ano-luz, que equivale a distância percorrida por um raio de luz durante o intervalo de tempo de um ano, ou seja, $300.000\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 31.536.000\text{ s} = 9.460.800.000.000\text{ km}$;
- todos os pontos que estão nas bissetrizes dos quadrantes, como o ponto P , representam eventos à velocidade da luz;
- o ponto C , localizado à direita de P , exemplifica um evento que, em um ano, percorre uma distância três vezes maior do que a velocidade da luz. Como isto não é possível, o ponto C está no limbo temporal. Todos os pontos nessa região em verde não podem ser alcançados e não têm influência alguma no ponto O ;

- o ponto B está no passado do ponto O . Todos os pontos localizados na região em vermelho claro podem ter alguma influência no ponto O ;
- o ponto A está no futuro do ponto O . Todos os pontos localizados na região em vermelho escuro poderão sofrer alguma influência do que ocorreu no passado e do que está acontecendo no presente.

A teoria da relatividade especial foi apresentada em 1905 por Einstein, quando este tinha apenas 25 anos de idade. Entretanto, foi aos 16 anos que Einstein se imaginou correndo ao lado de um raio de luz. Esta ideia o levou a conceber que, se conseguisse correr ao lado de um raio de luz, sua velocidade também seria c e o raio estaria em repouso em relação a seu corpo. Einstein concluiu que nada poderia atingir ou mesmo superar a velocidade da luz, como mostra o Exemplo 3.3. Este fato foi denominado de invariância da velocidade da luz, em qualquer referencial.

Exemplo 3.3. *Um foguete se move em relação a Terra com velocidade constante de $0,6c$. Dentro desse foguete um objeto é lançado, no sentido do movimento do foguete, com velocidade $0,5c$. Podemos afirmar que a velocidade desse objeto em relação a Terra é de $1,1c$ e, portanto, superior à velocidade da luz?*

Em nosso cotidiano terreno, movimentos com velocidades extremamente baixas em relação à c nos dão a falsa impressão de que a resposta à questão proposta no Exemplo 3.2 é a soma vetorial: $0,6 + 0,5 = 1,1$. Contudo, para responder corretamente a questão precisamos da fórmula de adição relativística da velocidade, dada por:

$$v' = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}, \quad (3.8)$$

onde: u é a velocidade do foguete em relação à Terra; v é a velocidade do objeto em relação ao foguete e v' é a velocidade do objeto dentro no foguete em relação à Terra. Todas as velocidades em (3.8) são dadas em função de c .

Assim, utilizando os dados do Exemplo 3.2 em (3.8), concluímos que:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{0,6 + 0,5}{1 + 0,6 \cdot 0,5}; \\ v' &= \frac{1,1}{1 + 0,3}; \\ v' &= \frac{1,1}{1,3}; \\ v' &\approx 0,85c. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De acordo com (3.9), a velocidade do objeto em relação à Terra não é superior a c . Nas medições de velocidades do cotidiano, a diferença entre a soma vetorial e a adição relativística é

insignificante. Porém, quanto mais próximas as velocidades estão de c , mais essa diferença vai se tornando significativa.

Além da velocidade, a massa de um corpo é outra grandeza importante na teoria da relatividade. Einstein relacionou essas duas grandezas na equação da energia relativística

$$E = m.c^2, \quad (3.10)$$

onde E é a energia de um corpo ou de um sistema de corpos, m é a massa do corpo e c é a velocidade da luz. A relação (3.10) mostra que uma massa m produz uma quantidade E de energia, sendo esta igual ao produto entre m e o quadrado de c . Como c tem um valor muito grande, uma pequena quantidade de m gera uma energia E - Exemplo 3.4. A conversão total de massa em energia é um fenômeno muito raro.

Exemplo 3.4. *Uma folha de papel tem massa m conhecida. Ao queimarmos essa folha de papel, podemos somar a massa das cinzas, do oxigênio - o comburente necessário no processo de combustão - e do dióxido de carbono resultante da combustão. Ao comparar essa soma com m , constataremos que uma parte muito pequena da massa inicial foi perdida na forma de calor.*

A equação (3.10) foi citada em 1905 no artigo sobre a teoria da relatividade especial. Em 1907, a equação foi o tema abordado por Einstein em um novo artigo, no qual afirmou que “a massa de um corpo é a medida de seu conteúdo energético” (WOLFSON, 2005, p. 199). Desta forma, Einstein estabeleceu a permutabilidade entre massa e energia, duas grandezas até então pouco relacionadas.

Ainda em relação à massa, por menor que seja a massa de um corpo, este terá inércia, pois massa e inércia são duas características gerais da matéria. Ao se colocar um corpo de massa ínfima a uma velocidade próxima de c , a inércia do corpo será infinita e a força necessária para empregar ao mesmo uma aceleração maior do que zero também será infinita. Novamente, não é possível imprimir a um corpo uma velocidade maior do que c . Vários físicos tentaram por décadas, e ainda tentam, encontrar situações em que se obtêm velocidades próximas, iguais ou superiores a c . É importante destacar que, na Terra, a luz percorre meios materiais, como água e vidro, que diminuem significativamente sua velocidade.

3.3 UMA NOVA GEOMETRIA

Após tantas descobertas, tudo parece ser relativo. Mas nem tudo é: a velocidade da luz é invariante. Uma grandeza relativística como o intervalo do espaço-tempo de Minkowski (1864-1909) (CARAÇA, 2017), que é quadridimensional, tem seu quadrado definido pela diferença entre os quadrados dos intervalos de tempo e espaço, ou seja,

$$[Espaço - Tempo]^2 = [\Delta Espaço]^2 - [\Delta Tempo]^2. \quad (3.11)$$

Ao compararmos (3.11) com o que estabelece o teorema de Pitágoras, percebemos a diferença de sinal no lado direito. Essa mudança de sinal não condiz com os princípios da geometria Euclidiana. Assim, a equação (3.11) estabelece três possibilidades para o quadrado do intervalo do espaço-tempo, descritas a seguir.

- i) *Intervalo temporal*: a diferença dos quadrados dos intervalos de tempo e espaço é positiva. Neste caso, dois eventos são suficientemente próximos no espaço e afastados no tempo, de forma que é possível um observador estar presente em ambos.
- ii) *Intervalo espacial*: a diferença dos quadrados dos intervalos de tempo e espaço é negativa. Neste caso, os eventos são tão próximos no tempo e afastados no espaço, que nenhum observador pode estar presente em ambos.
- iii) *Intervalo luminoso*: a diferença dos quadrados dos intervalos de tempo e espaço é nula. Neste caso, os eventos ocorrem em lugares e momentos distintos. Eventos separados por intervalos luminosos correspondem à emissão e à chegada de um pulso de luz.

Com todas as novas descobertas exploradas por Einstein, o conceito de espaço-tempo tomou forma. Compreendeu-se então que as unidades de medida usadas para tempo (anos, meses, dias, horas, minutos e segundos) e distância (quilômetros, milhas, metros, centímetros, milímetros), que são unidades convencionais e perfeitamente úteis para seres terrestres que se movem a velocidades muito abaixo de c , não são distintas para medir espaço-tempo. Assim, o espaço-tempo permite trabalhar simultaneamente com unidades que antes definiam uma grandeza específica: o espaço-tempo pode ser medido em segundos ou em metros, e quem converte essas unidades é a velocidade da luz. Um metro de tempo é a fração de segundos que a luz precisa para percorrer a distância de um metro, da mesma forma que um segundo de espaço é a distância percorrida pela luz em um segundo. Continuamos medindo o tempo em anos e as distâncias em anos-luz, porém essa nova relação para o espaço-tempo é válida.

Da mesma forma que o espaço e o tempo, a eletricidade e o magnetismo eram conhecidos e estudados separadamente no início do século XIX. Com a descoberta de Öersted em 1821, fundou-se o eletromagnetismo, que associou eletricidade e magnetismo e trouxe com isso um mundo novo para toda física. Quase um século depois, Einstein fez o mesmo apresentando a teoria da relatividade especial, estruturando o conceito de espaço-tempo como uma grandeza quadridimensional.

Até aqui, a teoria da relatividade de Einstein é tratada como *especial*, ou melhor, como algo restrito e limitado, que tem aceitação inicialmente apenas em situações especiais: “as leis da física são as mesmas para todos os observadores em *movimento uniforme*” (WOLFSON, 2005, p. 222). Levou mais de 10 anos para que Einstein conseguisse provar a teoria geral da relatividade, excluindo a limitação do movimento uniforme e estendendo a interpretação da aceleração da gravidade.

Desde Galileu já era sabido que corpos com massas distintas, quando abandonados de uma certa altura, vinham ao chão com acelerações iguais. O *princípio da equivalência* (WOLFSON, 2005, p. 228) mostra que existem situações nas quais não se pode distinguir qual é o tipo de movimento que ocorre, porém o resultado do movimento é conhecido. Os exemplos 3.5 a 3.8 ilustram esse princípio.

Exemplo 3.5. *Uma pessoa dentro de uma caixa, que está fixada no chão, abandona uma bola de uma altura. A bola cairá com aceleração de aproximadamente 10 m/s^2 , ou seja, a cada segundo de queda a velocidade da bola em relação ao solo aumentará 10 m/s .*

Exemplo 3.6. *Uma pessoa está segurando uma bola dentro de uma caixa-foguete, a qual está no espaço a uma distância muito grande de qualquer outro corpo e com aceleração constante de aproximadamente 10 m/s^2 . Ao ser abandonada, a bola irá ganhar velocidade de 10 m/s a cada segundo até tocar o chão da caixa.*

Exemplo 3.7. *Uma pessoa está segurando uma bola dentro de uma caixa-foguete, esta em repouso no espaço intergaláctico e a uma distância muito grande de qualquer outro corpo. Ao ser abandonada, a bola flutuará próxima à região onde segura.*

Exemplo 3.8. *Uma pessoa está segurando uma bola dentro de uma caixa-elevador, esta a uma certa altura em relação ao solo. Quando a caixa é abandonada dessa altura, a bola também é solta e flutuará próxima à região onde estava segura.*

Os Exemplos 3.5 e 3.6 mostram situações equivalentes: para uma hipotética formiga curiosa que assistiu as duas experiências de dentro da caixa, não há diferença entre as experiências. Os Exemplos 3.7 e 3.8 também mostram situações equivalentes: para uma outra hipotética formiga curiosa que assistiu as duas experiências de dentro da caixa, não há diferença entre as experiências. A conclusão dos experimentos relatados nos exemplos é: um referencial não acelerado na total ausência da força gravitacional (Exemplos 3.6 e 3.7) e um referencial em movimento acelerado (Exemplos 3.5 e 3.8), quando comparados aos pares, são equivalentes. “As quatro situações são fundamentalmente indistinguíveis por quaisquer experimentos físicos, não só aqueles que envolvem as leis de movimento” (WOLFSON, 2005, p. 233). Esse *princípio da equivalência* é um dos pilares para a teoria da relatividade geral.

A *queda livre* como um movimento vertical para baixo, na ausência de qualquer resistência do ar e somente sob efeito da aceleração gravitacional, é um conceito trivial. Porém, quando um foguete é lançado para fora da atmosfera terrestre, seus tripulantes aparentam estar fora do alcance da gravidade e tem uma experiência de peso nulo. Esta ideia, difundida principalmente pelos filmes de ficção, é errada: o que realmente ocorre é que, quando é lançado para fora da atmosfera, o foguete entra em queda livre, não em direção vertical e ao solo, mas ao redor do planeta em um movimento circular, denominado *flutuação livre*, no qual a força centrípeta é igual à força centrífuga. Desta forma, os tripulantes do foguete têm a sensação de estarem sem peso.

A ideia da relatividade geral é expandir os conceitos do princípio da relatividade para todos os referenciais. Einstein interpretou isso sob a seguinte perspectiva: um evento é real apenas se observadores em todos os referenciais concordam sobre ele; se um evento não é presente em todos os referenciais, então ele não é real. “Na relatividade geral, um fenômeno deveria ser real apenas se observadores em todos os referenciais concordam sobre ele. Um fenômeno que está presente em um referencial mas não em outro não pode ser objetivamente real” (WOLFSON, 2005, p. 239). Logo, não há referencial privilegiado onde ocorram condições especiais de movimento: se existe uma situação de flutuação livre onde a gravidade parece não existir, então essa situação não pode ser real.

Newton acreditava que as forças de maré eram resultado de variações na gravidade: esta “é uma força que se estende sobre todo um espaço imutável, invariável, universal e tridimensional para influenciar objetos distantes” (WOLFSON, 2005, p. 242). Já para Einstein, “os efeitos de maré resultam da própria gravidade” (WOLFSON, 2005, p. 242). Einstein denominou a gravidade de geometria do espaço-tempo: grandes massas são capazes de distorcer o espaço e, conseqüentemente, o tempo.

[. . .] vivemos, diz Einstein, em um espaço-tempo quadridimensional. A geometria do espaço-tempo apresenta uma curvatura, e essa curvatura do espaço-tempo é a gravidade. Não “é uma manifestação da gravidade” ou “é causada pela gravidade” ou “causa gravidade”. Não: a curvatura do espaço-tempo *é* a gravidade. A gravidade não é alguma força que afeta os objetos no espaço-tempo. A gravidade *é*, nada mais, nada menos, que a geometria do espaço tempo (WOLFSON, 2005, p. 245).

Na geometria Euclidiana, que estudamos na escola, algumas regras são verdades absolutas, como por exemplo: retas paralelas não se cruzam e a distância entre as mesmas é constante; a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Devido a essas e outras regras, temos a ideia intuitiva que a geometria de todo espaço é Euclidiana. E realmente para nós, que habitamos uma porção muito pequena de uma superfície quase esférica e que experimentamos velocidades extremamente baixas quando comparadas à velocidade da luz, faz todo sentido acreditar que a geometria universal é a Euclidiana.

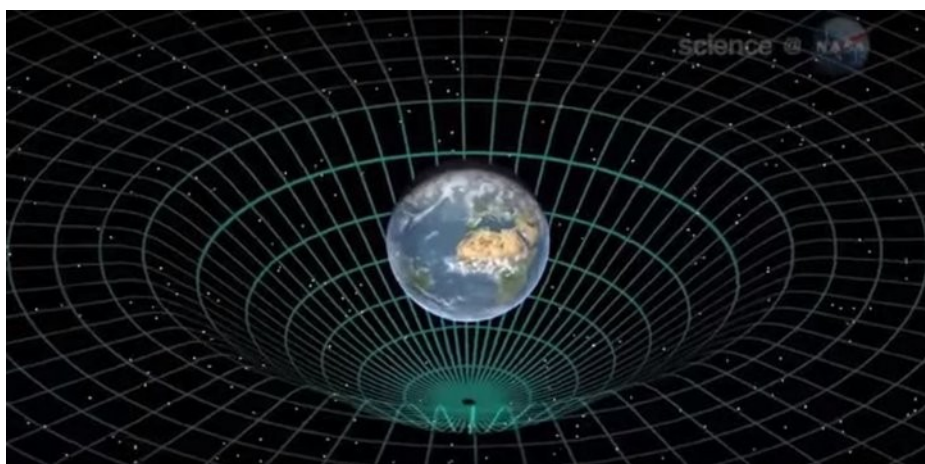
Com as reviravoltas causadas por Einstein e a sua teoria da relatividade geral, muitos conceitos precisam ser reorganizados: as trajetórias de dois corpos que se movem paralelamente na superfície terrestre, após os corpos percorrerem uma grande distância, se intersectam em dois pontos diametralmente opostos; é possível construir na superfície terrestre um triângulo equilátero com três ângulos retos. A razão para a ocorrência dessas “aberrações geométricas” é que a superfície da Terra não é plana, e sim esférica.

Analisando o pequeno “ponto” que habitamos na superfície da Terra ou um pequeno referencial de flutuação livre, não conseguimos perceber a curvatura do espaço. Sob esses referenciais, podemos continuar utilizando a geometria Euclidiana como sempre fizemos: o mundo é simples quando visto localmente. Os “desvios” da geometria e da física ficam perceptíveis

apenas quando saímos de nossa vizinhança; quando consideramos regiões maiores do espaço-tempo, regiões suficientemente grandes para que a curvatura do espaço-tempo seja significativa. Assim, na geometria Euclidiana, a menor distância entre dois pontos é uma reta; na geometria da gravidade, a menor distância entre dois pontos é um arco de curva denominado *geodésica*.

No período clássico, o filósofo Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) acreditava que o estado fundamental do movimento era o repouso. Levou mais de dois mil anos até que Galileu e Newton, contrariando o conceito Aristotélico, colocaram o movimento retilíneo uniforme como estado fundamental do movimento; para Newton, somente as mudanças no movimento deveriam ter uma motivação. Quase dois séculos depois, Einstein criou o princípio da relatividade especial baseando-se nos conceitos Newtonianos; sua teoria da relatividade geral abre um novo caminho: o estado natural do movimento é uma trajetória geodésica, ou a curva mais reta possível dentro do espaço-tempo. O movimento da Terra ao redor do Sol não necessita de uma “força” para ser compreendido, pois o movimento elíptico é o mais simples e natural possível. A gravidade agora é a geometria do espaço-tempo e se algum corpo não está se movendo em linha reta, isso é perfeitamente esperado em um espaço-tempo em que a geometria é curva - Figura 3.5. Sabemos como a matéria se move no espaço-tempo curvo, mas qual é o motivo dessa curvatura? É a presença de matéria que curva o espaço-tempo.

Figura 3.5 – Representação da Terra no espaço curvo



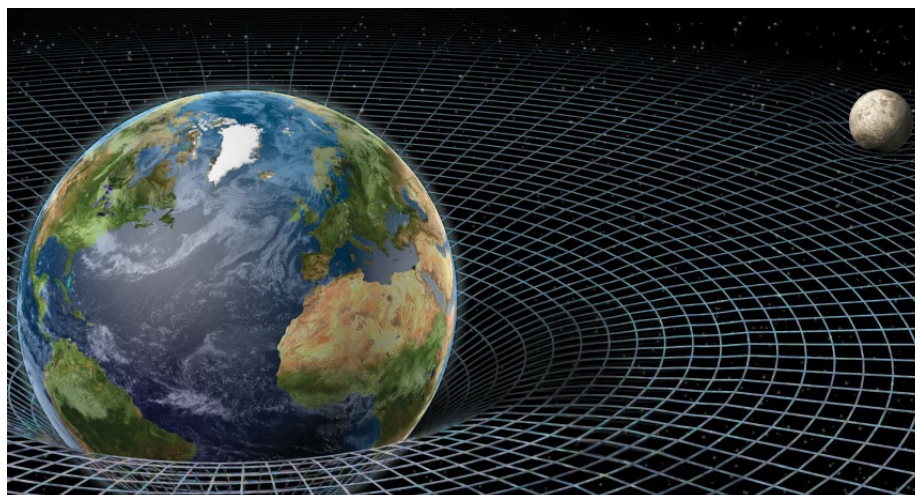
Fonte: Revista Galileu Online (2017).

Na ausência de matéria, o espaço-tempo seria plano e todos os corpos se moveriam em linhas retas, como na geometria Euclidiana. Mas, na presença de matéria - massa e energia segundo (3.10) - a geometria do espaço-tempo se altera, criando uma curvatura. Sendo assim, a matéria atua no espaço-tempo criando a curvatura e o espaço-tempo curvo age no movimento da matéria: onde a matéria é mais densa, o espaço-tempo tem curvatura mais acentuada.

Quando colocamos em uma superfície plana e não rígida um corpo esférico de massa qualquer, este deformará a superfície formando curvas ao redor da esfera. É o que ocorre com a Terra no plano espaço-tempo: toda a vizinhança imediata da Terra sente essa deformação. Corpos que passem a uma grande distância da Terra não sofrem a ação dessa distorção do

espaço-tempo; mas quanto mais próximos possam transitar da Terra, maior será o efeito que essa deformação no espaço-tempo fará na trajetória do corpo, podendo colocá-lo na órbita terrestre, como acontece com a Lua - Figura 3.6. Entretanto, esse exemplo é incompleto, pois mostra apenas uma deformação no espaço, enquanto a gravidade realiza uma deformação no espaço-tempo que é quadridimensional. De qualquer maneira, como não é possível visualizar situações além do tridimensional, essa ainda é uma forma satisfatória de representar a gravidade.

Figura 3.6 – Representação da Terra e sua vizinhança no espaço-tempo



Fonte: Wade (2018a).

Uma forma alternativa de representar a Terra se movendo pelo espaço-tempo é reduzir o espaço em um plano, onde a Terra faz movimentos quase circulares enquanto sai desse plano, em uma espécie de espiral, na qual o tempo é indicado por essa saída da Terra em relação ao plano. Na verdade, a espiral é quase uma linha reta, o que indica que a curvatura provocada pela Terra no espaço-tempo é muito pequena (WOLFSON, 2005).

Todas as novidades introduzidas por Einstein não acabaram com o brilhantismo das descobertas de Newton. De fato, toda a física Newtoniana ainda é útil e importante para descrever fenômenos que ocorrem na Terra, em um local específico, e até mesmo fenômenos em nosso sistema solar, pois a distorção que a Terra e o Sol provocam no espaço-tempo são pequenas em vários locais do espaço quadridimensional.

Em 1915, a teoria da relatividade de Einstein mostrou o seu propósito em uma brecha da teoria da gravitação de Newton no sistema solar: a precessão⁴ do periélio⁵ de Mercúrio. Este fenômeno já era conhecido anteriormente, sendo que Newton havia previsto que todos os planetas tinham órbitas elípticas que ficavam contornando o Sol sempre sobre a mesma elipse; a

⁴ Em astronomia, precessão é o movimento vagaroso do eixo de rotação de um corpo celeste resultante da influência exercida sobre ele por um ou mais astros.

⁵ Em astronomia, o periélio é o ponto da órbita em que um planeta se encontra mais próximo do Sol; oposto de afélio.

única exceção a essa regra era Mercúrio, que em sua volta quase circular ao redor do Sol sempre deixava uma pequeníssima diferença a cada 100 anos de translação.

Einstein resolveu colocar à prova a teoria da relatividade geral: determinou que a diferença entre as órbitas de Mercúrio ao redor do Sol era de $0^{\circ}0'43''$ por século. Esta era mais uma amostra de que a gravidade era a curvatura do espaço-tempo. Desta forma, as teorias de Newton e Einstein ganharam mais um ponto divergente: para Einstein, as órbitas do planetas ao redor do Sol não eram fechadas. Sendo Mercúrio o planeta mais próximo do Sol, é notável que sofreria maior ação da curvatura do espaço-tempo, mesmo a gravidade sendo muito fraca no sistema solar.

Outra descoberta importante foi a constatação da existência de estrelas mortas, que nada mais são do que estrelas que queimaram todo seu combustível e perderam o brilho. Em algumas dessas estrelas, uma quantidade de matéria como a do Sol é comprimida em uma esfera de poucos quilômetros de raio, onde prótons e elétrons, após colapsarem, unem-se formando nêutrons e gerando as hoje conhecidas estrelas de nêutrons. Estas, de massa extremamente densa, têm em seu interior um tipo de pressão que impede o colapso. Contudo, há um limite suportável para essa pressão; ultrapassado o limite, a estrela apagada entra em colapso novamente e forma um buraco negro. Em outras palavras, uma estrela de massa muito grande quando morre, ou vira uma estrela de nêutrons, ou vira um buraco negro. Em ambos os casos a curvatura do espaço-tempo quadridimensional na vizinhança da estrela é muito grande. O Sol em nosso sistema solar não tem massa suficientemente grande para ter esse destino. Assim, o Sol provavelmente se tornará, daqui a alguns bilhões de anos, uma estrela anã branca⁶.

Desde 1930, muitos dos fenômenos astronômicos relatados anteriormente foram previstos teoricamente pela teoria da relatividade geral. Entretanto, foi somente após a década de 1960, com todos os avanços tecnológicos que trinta anos proporcionaram, que alguns desses fenômenos foram realmente observados. Em 1974, os astrofísicos Joseph Hooton Taylor (1941-) e Russell Alan Hulse (1950-) descobriram um sistema binário com duas estrelas de nêutrons, estas em órbitas elípticas muito próximas uma da outra e com períodos de translação de 8 dias. A curvatura do espaço-tempo quadridimensional próxima a esse sistema binário é muito maior do que qualquer outra em nosso limitado sistema solar. Assim, esse é um ótimo contexto para se estudar a relatividade geral de Einstein.

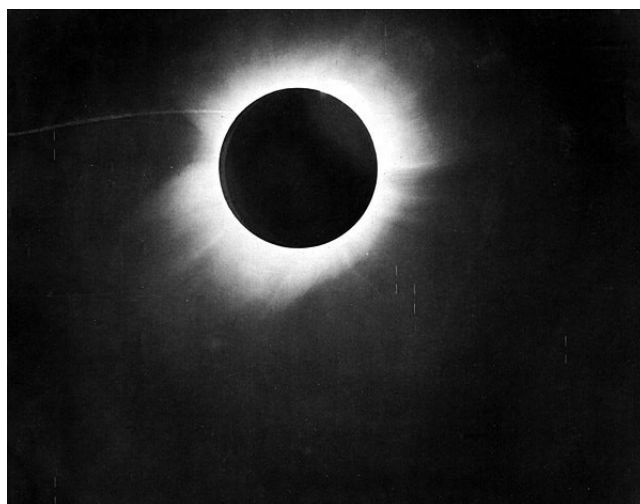
As estrelas de nêutrons são extremamente densas e giram com frequências muito altas, emitindo luz, ondas de rádio e raios X, que são captados na Terra. Devido a isso, as estrelas de nêutrons giratórias foram denominadas *pulsares*. Um sistema binário sofre variação da frequência da luz emitida. Logo, a cor que uma estrela de nêutrons emite pode mudar, mas jamais a velocidade do raio de luz, pela já conhecida invariância da velocidade da luz.

⁶ Em astronomia, uma anã branca, também denominada anã degenerada, é um remanescente estelar composto principalmente por matéria degenerada. Uma anã branca é altamente densa: sua massa é comparável à do Sol, enquanto seu volume é comparável ao da Terra.

A teoria da relatividade geral prevê para o sistema binário de Taylor-Hulse uma precessão de mais de 4° por ano no eixo orbital do par de estrelas. Essa precessão é cerca de trinta e cinco mil vezes mais significativa do que a precessão da órbita de Mercúrio. Com isso, as órbitas dos planetas do sistema solar, além de distintas, transladam em uma relação que depende da curvatura do espaço-tempo no local da órbita. Como nosso sistema solar tem uma gravidade pequena, essa precessão não é perceptível em todos os planetas que orbitam o Sol; porém, em lugares onde estrelas orbitam próximas umas das outras, como no sistema Taylor-Hulse, o acúmulo de massa provoca maiores distorções no espaço-tempo. Essa distorção é capaz de alterar as órbitas de forma significativa, mesmo que a uma distância de quase vinte e um mil anos-luz da Terra.

A descoberta que fez Einstein ter renome internacional não foi o primeiro teste da teoria da relatividade geral, ou seja, o cálculo exato da precessão do periélio de Mercúrio. Com o auxílio da relatividade e da geometria curva, Einstein previu que a luz é atraída por massas significativas no espaço. De acordo com Oliveira (2019) e Romero (2019), no eclipse solar de 29 de maio de 1919 - Figura 3.7, observado por estudiosos na cidade de Sobral-CE e na Ilha do Príncipe na costa da África, o fenômeno da curvatura da luz foi comprovado. A confirmação das previsões de Einstein lançou-o à fama, colocando-o como o homem que derrubou as ideias de Newton. Segundo o London Times à época: “Revolução na Ciência [. . .] Ideias de Newton Derrubadas” (WOLFSON, 2005, p. 269).

Figura 3.7 – Eclipse solar total observado em Sobral-CE



Fonte: Dyson, Eddington e Davidson (2019).

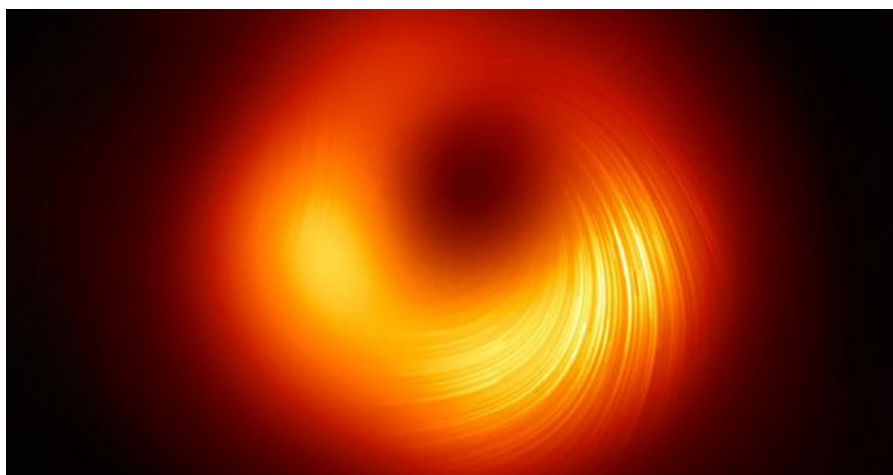
Sabemos que um corpo, quando lançado verticalmente e a uma velocidade alta, entrará em órbita ao redor da Terra. A velocidade mínima para vencer a gravidade, denominada *velocidade de fuga*, é de 11 km/s na Terra e de 611 km/s no Sol, valores esses pequenos quando comparados à velocidade da luz. Por isso, a gravidade em qualquer ponto do sistema solar é muito fraca. Entretanto, na superfície de uma estrela de nêutrons a velocidade de fuga é igual a dois terços da velocidade da luz e, em um buraco negro, é igual à velocidade da luz, valor máximo possível para a gravidade.

Dessa forma, na abordagem Einsteiniana, a gravidade é a geometria do espaço-tempo quadridimensional e, assim como a luz sofre desvio na proximidade de corpos com massa elevada, o tempo também sofre alterações significativas quando medido próximo a corpos de alta densidade. Este fenômeno é conhecido como *dilatação temporal gravitacional*: o tempo passa em ritmos distintos dependendo da posição de dois observadores em relação a um corpo de massa elevada. Sendo a gravidade na Terra muito fraca, essa diferença no tempo é insignificante na nossa percepção diária. Como essas variações no tempo são observadas em relação a corpos com densidades extremamente altas, são as estrelas de nêutrons e os buracos negros que comprovam esse fenômeno relativístico.

3.4 BURACOS NEGROS

Os buracos negros são corpos fascinantes e muito estudados até hoje. A Figura 3.8 mostra o primeiro buraco negro fotografado pelos astrônomos do Telescópio de Horizonte de Eventos (EHT), localizado no centro da galáxia Messier 87 (M87), na constelação de Virgem.

Figura 3.8 – Luz saindo do buraco negro localizado no centro da galáxia Messier 87



Fonte: Gama (2021).

Ao redor desses “pontos” de densidade extrema, há uma superfície esférica, denominada *horizonte de eventos*, onde a velocidade de fuga é maior do que a velocidade da luz. Logo, nem mesmo a luz pode escapar dos efeitos gravitacionais dessa região. Ao observarmos esse fenômeno da Terra, a distâncias muito grandes, não podemos obter informações dos eventos que ocorrem além desse horizonte. Esta é a justificativa para a denominação horizonte de eventos.

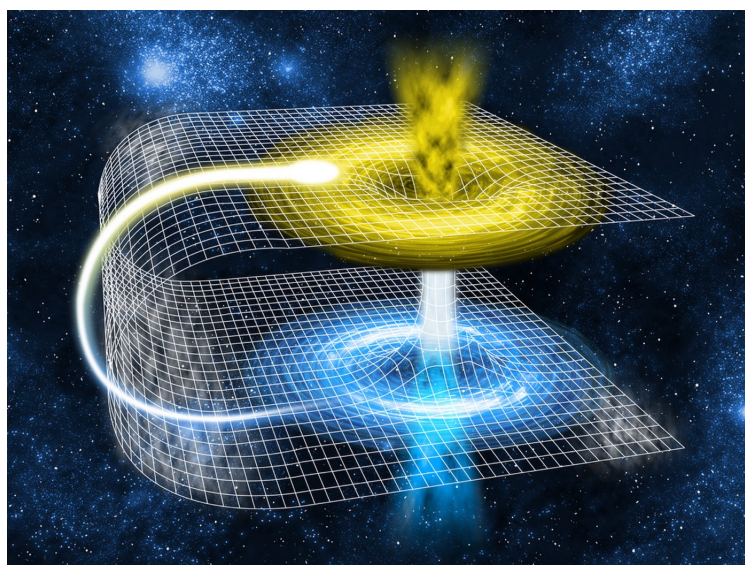
Entre as propriedades perceptíveis dos buracos negros, destaca-se a mais significativa: a massa. Tudo que era matéria ou energia e adentrou no horizonte de eventos, agora faz parte da massa total do buraco negro. Com isso, o buraco negro promove uma grande distorção no espaço-tempo quadridimensional ao seu redor: se a matéria absorvida tem carga elétrica, o buraco negro adquire carga elétrica; se a matéria absorvida está em movimento circular, o buraco negro também descreverá um movimento circular.

A existência dos buracos negros foi comprovada quando estudiosos captaram diversas fontes de raio X a distâncias muito grandes do sistema solar. Os buracos negros emitem raios X, pois tudo que cai em seu interior adquire aceleração muito grande. Após isso, a matéria sólida entra em estado gasoso e o gás gerado atrita, produzindo temperaturas muito altas que emitem luz na forma de raio X. Os buracos negros também provocam grandes distorções temporais no espaço-tempo quadridimensional por possuírem densidades absurdas. Por exemplo, suponhamos que duas pessoas *A* e *B*, de mesma idade e com relógios sincronizados, estejam próximas de um buraco negro. Enquanto *A* permanecer em repouso e *B* “caminhar” em direção ao buraco negro, para *A* o que ocorre com *B*, como caminhar, envelhecer, frequência cardíaca, será cada vez mais lento, até *B* chegar no horizonte de eventos. Porém para *A*, nada disso é percebido; o tempo passa normalmente.

Einstein acreditava que, como uma pedra ao atingir a superfície de um líquido em repouso, ondas gravitacionais no espaço-tempo se propagavam para fora, transmitindo informações sobre o evento ocorrido na parte mais interna. Essa onda no espaço-tempo seria apenas uma mudança que “caminharia” na curvatura do espaço-tempo, afastando-se da perturbação originária à velocidade da luz. A tecnologia avançada do século XXI possibilita que aparelhos sofisticados, alguns fora da Terra como o recente telescópio James Webb, observem o cosmo e auxiliem os físicos modernos a encontrar evidências de ondas gravitacionais, a comprovar hipóteses e descobrir novos fenômenos cósmicos.

Quanto a fenômenos como os *buracos de minhoca*, passagens (fendas ou pontes) teóricas através do espaço-tempo - Figura 3.9, existe alguma fundamentação teórica para explicar a existência dos mesmos. Ainda não há evidências que os comprovem, mas sob a perspectiva da geometria gravitacional proposta por Einstein, que tirou o Cosmo da clássica geometria Euclidiana e o introduziu na geometria curva, esse é um fenômeno possível.

Figura 3.9 – Modelo de espaço-tempo curvo com uma fenda: o buraco de minhoca



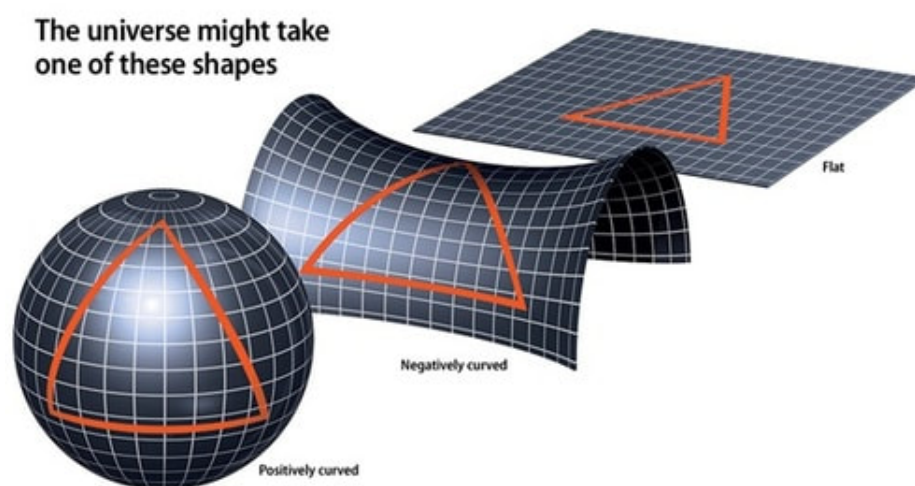
Fonte: Wade (2018b).

3.5 PÓS-EINSTEIN

Einstein e outros renomados físicos do século XX tentaram determinar qual é o formato do Universo e qual é o seu destino. Assim, foram estabelecidas três curvaturas possíveis - Figura 3.10:

1. *curvatura positiva (Positively curved)*, sendo o formato do Universo esférico e finito, indicando uma possível contração;
2. *curvatura negativa (Negatively curved)*, onde o Universo tem o formato de uma sela, ou seja, uma superfície curva entre dois montes elevados, lembrando uma sela de cavalgar. Neste caso, ambos os montes da sela estão em eterna expansão;
3. *curvatura nula (Flat)*, onde o Universo tem o formato de um plano infinito, indicando expansão eterna.

Figura 3.10 – Curvaturas do Universo



Fonte: Bamonti (2020).

Após muito anos de observação e estudos, acredita-se que o formato do Universo seja, em sua maioria, plano.

A ideia de que a relatividade seja algo intuitivo e facilmente compreendido é fora da realidade para qualquer um de nós. Nossas experiências no cotidiano são muito simplórias para vislumbrar esses fenômenos teóricos como se fossem situações triviais. Entender a complexidade dos feitos de Einstein e de seus antecessores, assim como imaginar situações para compreender os fenômenos da relatividade, já caracterizam um bom começo para vislumbrar as consequências das leis que regem o Universo. A relatividade geral está no centro da cosmologia moderna, pois relaciona a interação entre matéria e espaço-tempo, e esta interação é responsável pela geometria do Universo.

4 APLICAÇÕES DA TEORIA DA RELATIVIDADE

Da época de Einstein até a atualidade, vários físicos e astrônomos dedicaram muito do seu tempo, esforço e estudos ao aprofundamento da teoria da relatividade geral e, conseqüentemente, de seus frutos. Os estudos realizados por esses homens e mulheres parecem, por vezes, não interferir em nossa vida. Entretanto, os produtos provenientes desses estudos estão mais presentes em nosso cotidiano do que imaginamos.

Há mais de um século, a incrível mente brilhante do jovem Einstein conseguiu abstrair conceitos, até então inexplorados, e que hoje definem, por exemplo, o funcionamento do sistema de posicionamento global por satélite. Essa ferramenta moderna, conhecida como GPS (*Global Positioning System*), é utilizada por pilotos de aeronaves e navegadores para estabelecer a geolocalização de navios, aviões e mísseis, e até mesmo nos guia por uma rota desconhecida e nos possibilita contabilizar a distância percorrida em uma caminhada no parque.

De acordo com Emspak (2017), o GPS é um dos melhores exemplos para mostrar a relatividade ocorrendo em nosso meio. Contudo, apesar do GPS ser o mais famoso dos sistemas de posicionamento global, hoje há também o Sistema Global de Navegação por Satélite ou GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*). Um dos principais mecanismos de um satélite GPS é um relógio atômico de precisão, cujo funcionamento é regido pela teoria da relatividade.

4.1 RELÓGIOS DE PRECISÃO

Em nossos punhos e casas temos relógios analógicos ou digitais. Segundo Costantini (2015), um relógio de quartzo funciona por intermédio de pequenos cristais de quartzo com formato de diapasão (forquilha) que, ao vibrarem por qualquer contato ou choque mecânico, ressoam em frequência constante de exatos $32.768 = 2^{15}$ pulsos elétricos através de condutores metálicos até um chip. No interior do relógio, esse chip envia a informação da hora certa para o display de LCD nos relógios digitais e, nos relógios analógicos, essas mesmas informações movimentam as engrenagens que fazem os ponteiros se moverem. O quartzo foi o material escolhido para fabricação desses relógios por ser um material abundante e piezoelétrico, ou seja, ao passar corrente elétrica ele se deforma e, ao ser deformado, induz corrente elétrica. Os relógios de quartzo ficaram populares na década de 1970; Warren Marrison (1896-1980) foi co-inventor do primeiro relógio de quartzo em 1927.

Os relógios de quartzo - Figura 4.1, são dispositivos que sofrem atrasos com o passar do tempo. Esse atraso é de cerca de um milésimo de segundo por dia; nos antigos relógios mecânicos de corda e mola, esse atraso era de um décimo de segundo por dia. O atraso diário irrelevante torna-se considerável quando acumulado por anos, alterando assim de forma significativa a medição do tempo.

Figura 4.1 – Relógio de quartzo



Fonte: Costantini (2015).

Os relógios de precisão, inicialmente denominados relógios atômicos e hoje também denominados relógios óticos, são aparelhos ainda mais sofisticados que fazem medições de tempo com precisões infinitesimais. De acordo com Lobo (2018), o primeiro relógio atômico foi inventado nos Estados Unidos em 1946; posteriormente, vários outros foram criados, sempre sendo aperfeiçoados. Entre 1967 e 1968, a definição de um segundo de tempo foi recriada usando-se um relógio atômico. Esse relógio, composto de Césio, já tinha a proporção de atraso de um segundo a cada 3 mil anos.

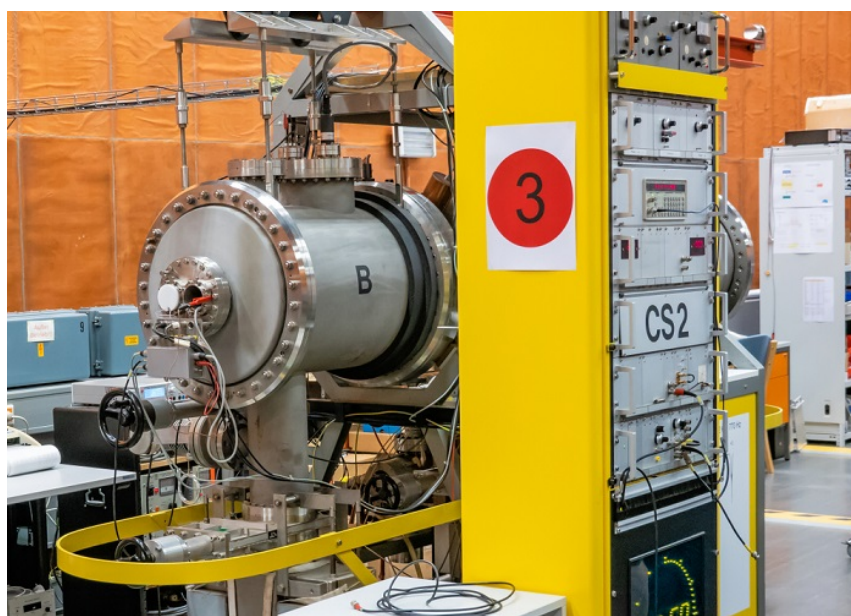
O funcionamento de um relógio atômico de precisão pode ser descrito através das seguintes etapas:

1. Átomos de césio 133 são aquecidos e lançados em forma de raio;
2. Ímãs separam os átomos capazes de receber energia;
3. Aqui os átomos são expostos à energia em forma de ondas. Cada um deles só absorverá a energia se as ondas estiverem em uma frequência de 9 192 631 770 hertz, ou ciclos por segundo;
4. Um oscilador de quartzo (igual ao dos relógios comuns) ajusta o mecanismo que envia ondas para ele lançar frequências próximas àquela que o césio pode absorver. A frequência ainda não é exata, pois o oscilador não é suficientemente preciso;
5. Entre as diferentes ondas de frequência, algumas estarão a exatos 9 192 631 770 hertz. Assim alguns átomos de césio receberão energia;
6. Aqui os átomos que receberam energia são separados por ímãs e identificados por um detector, que avisa ao oscilador que ele atingiu a frequência correta;
7. A frequência, agora exata, é dividida por 9 192 631 770 (o valor dela em hertz). O resultado é um pulso por segundo, que é marcado pelo relógio com precisão de bilionésimos. Para manter a exatidão, o processo é repetido o tempo todo. (MUNDOESTRANHO, 2011)

Atualmente, há relógios atômicos de rubídio portáteis em aeronaves, embarcações e satélites para os mais diversos fins. Os relógios atômicos mais sofisticados têm uma precisão de atraso de um segundo em 300 milhões de anos (HELERBROCK, s.d.b) - Figura 4.2.

Mais recentemente, foi construído na Universidade do Colorado um relógio ótico com precisão de atraso de um segundo a cada 15 bilhões de anos - Figura 4.3. Por essa incrível façanha os cientistas Jun Ye (1967-) e Hidetoshi Katori (1964-) receberão o Prêmio Breakthrough 2022

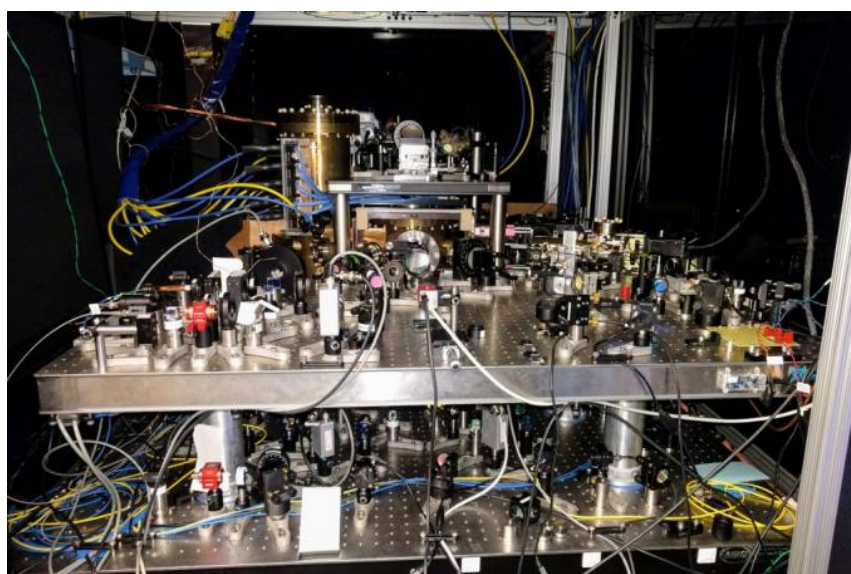
Figura 4.2 – Relógio atômico de Césio-133



Fonte: Helerbrock (s.d.b).

de Física Fundamental, estimado em três milhões de dólares (AFP, 2021).

Figura 4.3 – Relógio óptico na Universidade do Colorado



Fonte: AFP (2021).

Com relógios cada vez mais precisos, podemos observar como ocorre a variação do tempo em relação à velocidade relativa entre dois corpos. Também podemos notar como o tempo flui de forma diferente quando estamos em altitudes diferentes: quanto maior é a distância ao centro da Terra, menor será o efeito que a aceleração gravitacional terá sobre o corpo e assim o tempo passará mais rápido. Obviamente, essas diferenças de tempo são imperceptíveis para o ser humano; entretanto, não passam despercebidas aos sensores de relógios ultraprecisos. Logo,

compensações podem ser realizadas como forma de evitar essas discrepâncias na medição do tempo e, conseqüentemente, mitigar a sua influência nos equipamentos de nosso cotidiano.

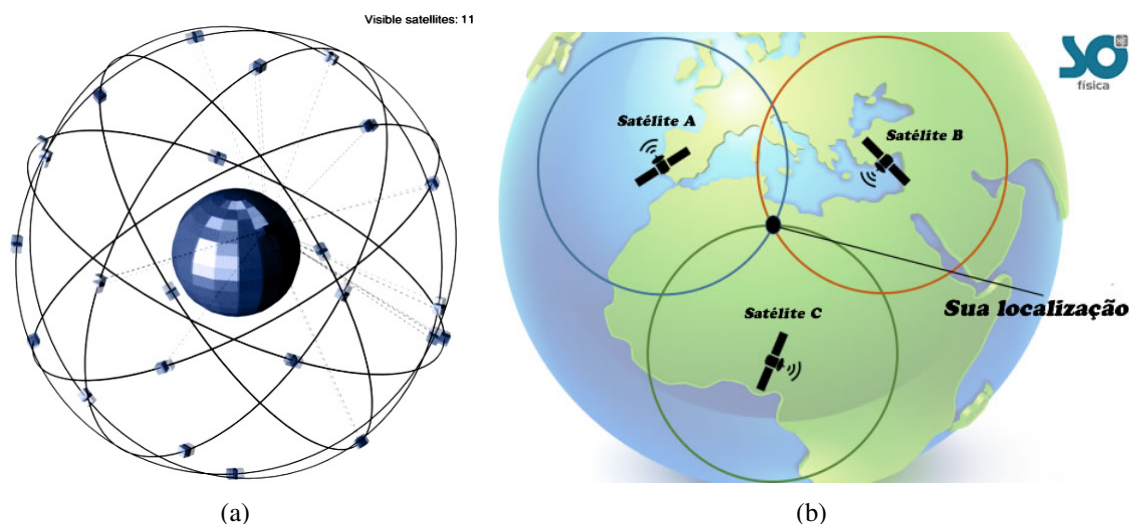
De acordo com Ost (2010), um estudo do NIST (*National Institute of Standards and Technology*) definiu padrões compreensíveis aos seres humanos para visualizar a grandeza da relatividade ao longo do tempo. Vamos considerar o exemplo hipotético onde um ser humano *A* vive a uma altura 33 cm mais baixa do que a altura na qual vive outro ser humano *B*, isto durante um período de 80 anos. Após esse tempo de convívio a essa pequena diferença de altura, *A* terá vivido 25 bilionésimos de segundo a mais do que *B*.

Outro experimento realizado para perceber a dilatação do tempo usou dois relógios de precisão e um veículo a uma velocidade de 32 km/h . Novamente, consideremos o exemplo hipotético onde um observador *C* fica dentro do veículo com um relógio enquanto outro observador *D* fica fora do carro também com um relógio. Para o observador *C*, o relógio fora do carro parece ter uma velocidade menor entre os tics e tacs e o relógio que o acompanha está normal. Já para o observador *D*, o relógio que está dentro do veículo aparenta estar mais rápido que o relógio que está fora do carro. Os dois fenômenos descritos anteriormente (altura e velocidade) já tinham sido previstos por Einstein.

4.1.1 GPS

O GPS é, possivelmente, o exemplo mais cotidiano da aplicação dos conceitos da relatividade. A constelação GPS em torno da Terra é composta por 32 satélites, sendo 24 satélites funcionais com relógios atômicos em seu interior - Figura 4.4(a): cada satélite pesa quase uma tonelada, mede cerca de 5 m de diâmetro e tem uma vida útil média de 10 anos. Os satélites sobressalentes são acionados em caso de problemas ou falhas técnicas. Qualquer ponto da superfície da Terra pode ser captado por pelo menos quatro satélites (UNICAMP, s.d.).

Figura 4.4 – Trilateração: (a) sistema de satélites; (b) localização



Fonte: (a) Unicamp (s.d.); (b) Virtuous Tecnologia da Informação (s.d.).

A conexão entre o aparelho receptor e os satélites ocorre através de ondas de rádio eletromagnéticas que se propagam no ar com uma velocidade próxima à velocidade da luz. A localização ocorre em um processo denominado *trilateração*: três satélites definem a posição na superfície terrestre, enquanto que um quarto satélite indica a altitude em que o receptor está em relação ao nível do mar; a intersecção das áreas de abrangência dos três satélites é o ponto no qual está o receptor - Figura 4.4(b). Para determinar as distâncias entre o receptor e cada satélite, calcula-se a diferença de tempo entre a emissão e a recepção do sinal enviado pelo satélite e multiplica-se essa diferença pela velocidade da luz - equação (3.4).

A relatividade no GPS é sutil: os satélites que varrem a superfície terrestre estão a uma altura de 20 km e trafegam na atmosfera a uma velocidade média de 14.000 km/h ; a movimentação dos satélites em relação ao tempo tem uma diferença prática de tempo na Terra de aproximadamente $38\ \mu\text{s}$ (microsegundos, $1\ \mu\text{s} = 10^{-6}\text{ s}$) por dia. Assim, os relógios atômicos dos satélites são programados para atrasar esses mesmos $38\ \mu\text{s}$ por dia, igualando seus horários aos horários na Terra. No tempo, essa diferença é imperceptível; porém, no sistema GPS e no cálculo das distâncias, a diferença entre os pontos onde está realmente o receptor e onde este aparece no sistema GPS seria de 11 km .

Os modernos aparelhos smartphones, que enviam e recebem os sinais aos satélites GPS, dispõem as informações na forma de coordenadas geográficas sobre um mapa. Desta forma, tem-se essas informações em aplicativos de localização (*GoogleMaps*, *Waze*) e em aplicativos esportivos para caminhadas ou passeios de bicicleta (*RunKeeper*, *Strava*), como também em aplicativos para jogos em realidade aumentada (*PokémonGo*).

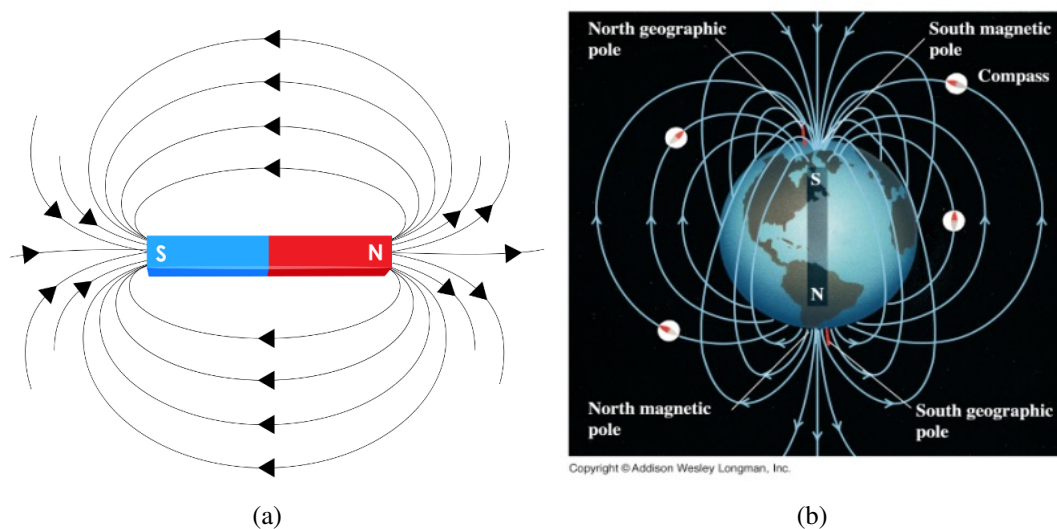
4.2 MAGNETISMO

A eletricidade é outro exemplo de como nos beneficiamos da teoria de Einstein através do fenômeno relativístico do eletromagnetismo. Na natureza, corpos compostos de substâncias distintas têm características distintas. Dentre todas essas substâncias estão os metais e, nestes, os denominados metais ferromagnéticos, que dão origem ao fenômeno conhecido como magnetismo.

Quanto maior a distância de um corpo até um ímã, que é um corpo que gera campo magnético ao seu redor, menor será a interação do campo magnético entre eles. Um ímã tem dois polos, norte (N) e sul (S): as linhas de campo saem do polo norte e percorrem todo o ímã até o polo sul - Figura 4.5(a). É impossível separar os polos norte e sul de um ímã. Os campos magnéticos formados ao redor de metais magnetizados são apenas interações de campos elétricos observados a partir de outro referencial (PURCELL; MORIN, 2013). Exemplificando, quando uma corrente elétrica passa por um filamento condutor e este está próximo a uma bússola, enquanto a corrente elétrica passa pelo fio a agulha da bússola sofre deflexão (desvio) e, quando a corrente elétrica deixa de passar pelo filamento, a agulha da bússola volta a se orientar pelo

magnetismo terrestre natural, que interage em todo planeta através de um campo geomagnético formado pelos metais fundidos no núcleo da Terra.

Figura 4.5 – Ímã: (a) campo magnético; (b) magnetismo terrestre



Fonte: (a) Helerbrock (s.d.a); (b) Neto (2009).

Como há metais pesados fundidos no núcleo da Terra, esta se comporta como um ímã, gerando ao seu redor um campo magnético - Figura 4.5(b). O polo magnético norte, de onde saem as linhas de campo, está próximo do polo sul geográfico, enquanto que o polo sul magnético, onde chegam as linhas de campo, está nas imediações do polo norte geográfico. Por esta razão, as bússolas sempre apontam para o norte geográfico. Um dos fenômenos gerados pelo encontro das linhas de campo no polo norte geográfico terrestre é a aurora boreal.

O comportamento magnético de um metal ferromagnético ocorre em quatro instâncias distintas descritas a seguir, porém dependentes uma da outra; quando todas coexistem, temos os denominados ímãs permanentes.

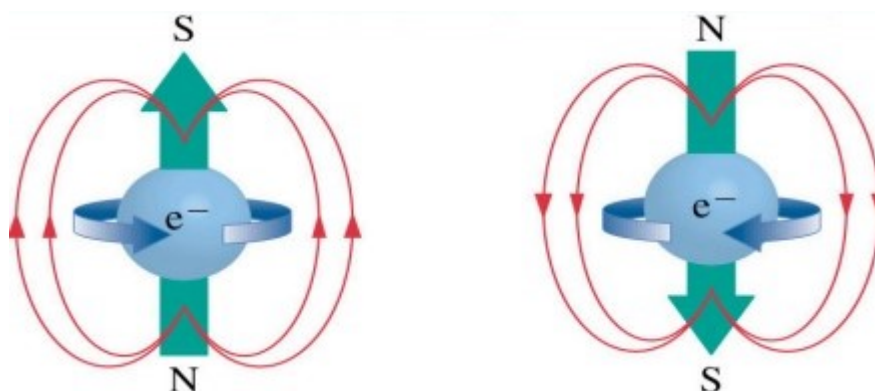
1. As partículas individuais

Os elétrons e os quarks são algumas das menores partículas da matéria e contêm propriedades fundamentais, como massa, carga elétrica e *spin*. Esta última propriedade, também denominada *momento magnético intrínseco*, confirma que elétrons e quarks, por possuírem carga elétrica, são minúsculos ímãs - Figura 4.6. Um elétron tem magnetismo muito mais significativo do que um quark; esta propriedade é resultado dos efeitos da mecânica quântica.

2. Os átomos

Desde a década de 1920 já se imaginava que prótons e elétrons agiam como pequenos ímãs na estrutura atômica. Tempos depois, constatou-se que os ímãs dos prótons tem cerca de

Figura 4.6 – Quarks e elétrons são pequenos ímãs



Fonte: Neto (2009).

um milésimo da força dos ímãs de elétrons. Logo, o núcleo atômico quase não influencia no magnetismo do átomo.

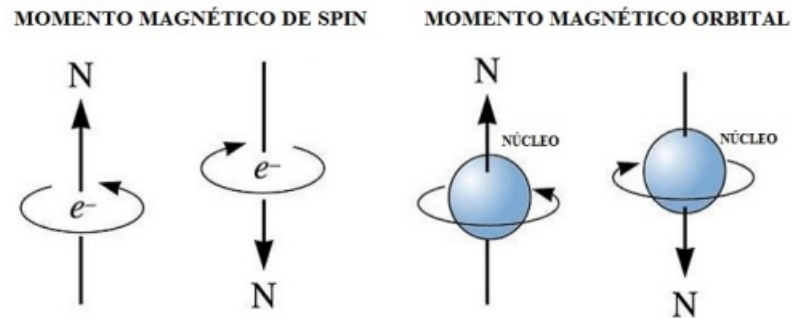
Os elétrons são as cargas negativas que, ao redor do núcleo atômico e a uma certa distância, ficam armazenados em um espaço chamado eletrosfera, que é dividido em camadas ou níveis de energia. Cada uma dessas camadas também é novamente dividida em novos subníveis de energia. A camada mais externa da eletrosfera é denominada valência (PARANÁ, 2003).

Contudo, os elétrons espalhados pela eletrosfera não contribuem para o magnetismo do átomo, devido novamente a um efeito da mecânica quântica. Segundo Purcell (2013), os elétrons, em qualquer um dos níveis ou subníveis de energia, distribuem-se de forma equivalente em todas as direções do espaço. Assim, as correntes geradas pelos elétrons durante o seu movimento se anulam e não criam campo magnético. Ainda, nesses subníveis de energia, os elétrons se organizam aos pares e, como cada um deles é considerado um pequeno ímã, esses pares de elétrons ficam dispostos em direções opostas, cancelando assim qualquer magnetismo possível entre ambos.

Portanto, quando a camada mais externa da eletrosfera de um átomo não é totalmente preenchida, ou alguns elétrons não tem seu respectivo par ou ainda quando nos subníveis de energia os pares de elétrons estão na mesma direção sem se anular, ocorre o *magnetismo intrínseco dos elétrons*, que determina o campo magnético atômico.

O momento magnético intrínseco mostra o magnetismo do elétron através da rotação e o momento magnético orbital, por sua vez, apresenta o elétron desempenhando um movimento de translação ao redor do núcleo atômico, gerando assim o magnetismo característico do átomo - Figura 4.7. Desta forma, os átomos com a camada de valência completa ou praticamente completa não são ferromagnéticos, enquanto que os átomos que possuem nível de energia com cerca de metade de sua capacidade de elétrons são substâncias ferromagnéticas, tais como ferro, cobalto, níquel, manganês, cromo etc.

Figura 4.7 – Magnetismo do elétron através de seu movimento de rotação



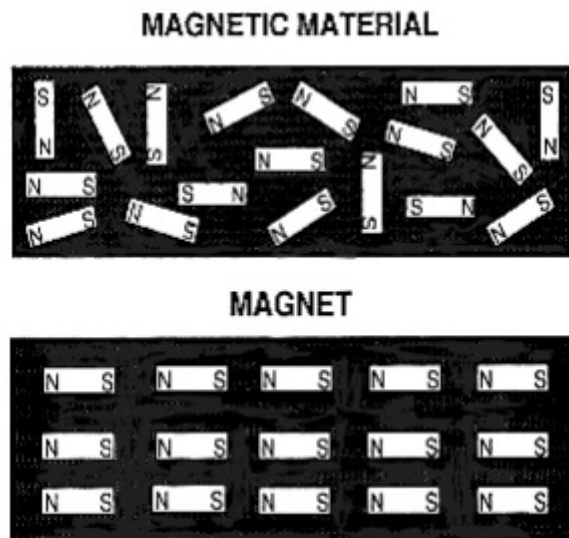
Fonte: Barbosa (2012).

3. Os cristais

Cristais são átomos organizados em pequenos agrupamentos. Os cristais sempre estão organizados de forma a utilizar a menor energia possível. Essa organização ocorre de duas formas:

- (a) cristais ferromagnéticos, onde há um alinhamento natural entre os átomos que constituem o cristal, ampliando o magnetismo do mesmo. Por exemplo, o ferro;
- (b) cristais antiferromagnéticos, onde os átomos que constituem o cristal estão alternados e o magnetismo de um átomo anula o outro. Por exemplo, o cromo.

Figura 4.8 – Cristais antiferromagnéticos e cristais ferromagnéticos, respectivamente



Fonte: Neto (2009).

Um conjunto de átomos pode ser agrupado de diversas maneiras: quando os átomos estão todos uniformemente alinhados, isto é, com os nortes magnéticos todos apontados para

uma única direção e sentido, temos um cristal ferromagnético; quando os átomos estão de maneira desorganizada, temos um metal antiferromagnético - Figura 4.8 . O cromo, quando analisado como substância (ou átomo) é muito magnético; contudo, quando observado como um corpo sólido (ou cristal) é pouco magnético. Portanto, muitos átomos de um elemento magnético podem não formar um objeto magnético.

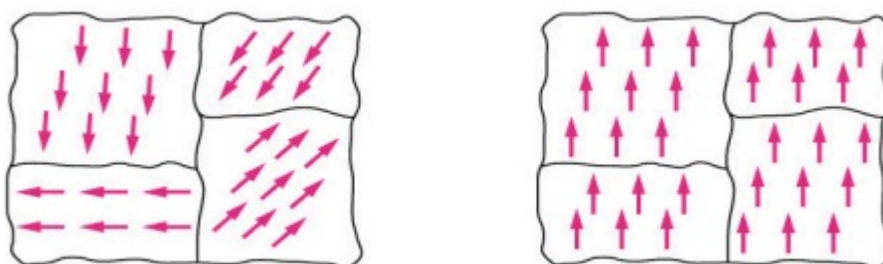
4. Os domínios magnéticos

Mesmo em materiais magnéticos, onde os campos magnéticos dos cristais que os formam estão alinhados, é possível que uma parte do corpo tenha todos os átomos de um domínio (vizinhança) alinhados, apontando para uma mesma direção, e que outra parte tenha os cristais de seu domínio apontando para outra direção. Desta forma, o corpo não estará magnetizado.

Os *domínios magnéticos* são aproximadamente iguais e nenhum deles é forte o bastante para convencer os outros domínios a se alinharem a ele. Assim, um pedaço de ferro pode não estar magnetizado por essa disputa interna entre domínios magnéticos (PARANÁ, 2003).

Um corpo com os domínios magnéticos desalinhados é um corpo não magnético. Contudo, ao se colocar esse corpo próximo a um poderoso ímã por um certo período de tempo, os domínios magnéticos são alinhados, tornando o corpo magnetizado - Figura 4.9. Exemplificando: ao se colocar um objeto de ferro próximo a um campo magnético forte o bastante, este forçará os pequenos domínios magnéticos a se organizarem e isso tornará o corpo magnetizado, com todos os pequenos domínios alinhados de maneira uniforme.

Figura 4.9 – Alinhamento dos domínios magnéticos



Fonte: Neto (2009).

Então, resumindo, para um metal ser um ímã permanente é necessário que:

- os domínios magnéticos estejam orientados uniformemente;
- os átomos dos cristais que compõem os domínios magnéticos estejam devidamente alinhados;

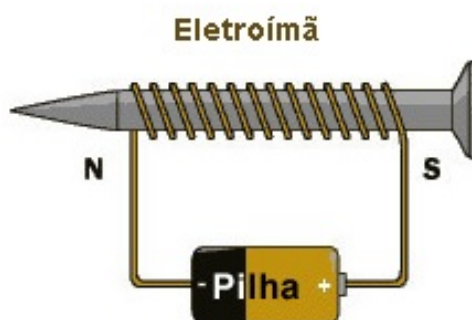
- a eletrosfera de cada átomo esteja semipreenchida de elétrons para que seus campos magnéticos intrínsecos possam se alinhar ao invés de se anularem mutuamente.

A maioria dos corpos não satisfaz os critérios anteriores; por isso, tem-se um número limitado de materiais magnéticos. Cada ímã permanente é um exemplo de que a mecânica quântica está na base do Universo. Para construir um ímã precisamos de um metal magnético ou então fazer passar corrente elétrica por um filamento condutor ao redor de um corpo metálico para que este gere um campo magnético, como em um eletroímã.

4.2.1 ELETROMAGNETISMO

O magnetismo explica como alguns minérios têm a capacidade de atrair outros metais. São poucos os metais que têm essas propriedades ferromagnéticas. Entretanto, um prego de alumínio, quando enrolado em um fio elétrico pelo qual flui uma corrente elétrica, automaticamente se torna um eletroímã - Figura 4.10.

Figura 4.10 – Ímã artificial: eletroímã



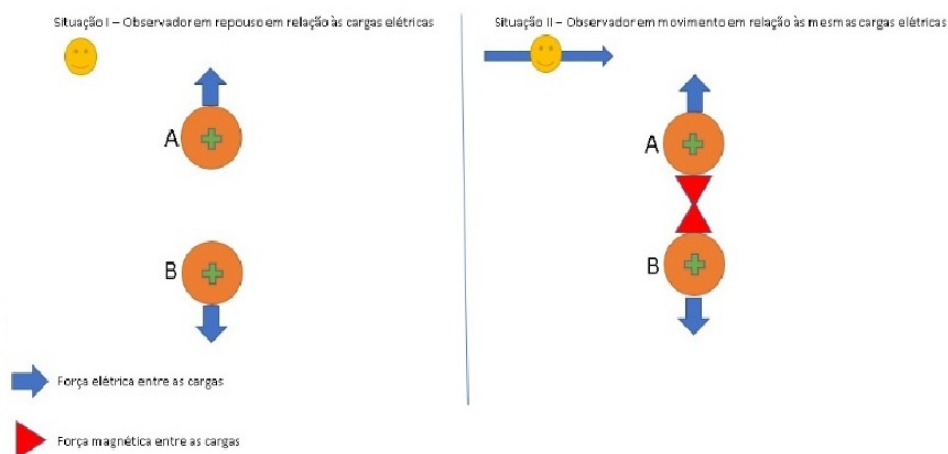
Fonte: SEEDPR (s.d.).

No entanto, o fenômeno relativístico não fica explícito nesse modesto exemplo. Metais como ferro, cobalto e níquel, podem se tornar ímãs permanentes; metais como cobre, alumínio e prata, não. Porém, ao se passar corrente elétrica por qualquer metal, este se torna um ímã, ou melhor, um eletroímã. E isto é consequência da teoria da relatividade especial (EINSTEIN, 1905). No artigo *On the electrodynamics of moving bodies*, Einstein apresentou suas investigações sobre a interação entre campos elétricos e magnéticos juntamente com as equações de Maxwell. E nessas famosas equações, existiam algumas inconsistências para abordar a mudança de referencial de corpos, uma vez que a mudança de referencial evidencia o fenômeno da força magnética, como ilustram os Exemplos 4.1 e 4.2.

Exemplo 4.1. Na Situação I ilustrada na Figura 4.11, o observador no canto superior esquerdo está em repouso, e a força de interação entre as cargas elétricas é regida pela lei de Coulomb (PARANÁ, 2003). Nesta, a força elétrica \vec{F}_{el} é calculada por $\vec{F}_{el} = \frac{k \cdot |Q_A| \cdot |Q_B|}{d^2}$, onde: k é a constante eletrostática do meio na qual as cargas estão inseridas (sendo k_0 a constante eletrostática no vácuo, dada por $9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$); Q_A e Q_B são as cargas elétricas dos corpos

A e B , em módulo, e dadas em Coulombs (C); d é a distância que separa os corpos A e B no espaço, em metros (m). A lei de Coulomb determina se a força entre os corpos será de atração ou repulsão, dependendo dos sinais de suas cargas elétricas. Como na Situação I os corpos A e B estão carregados positivamente, a força de interação entre eles é de repulsão.

Figura 4.11 – Ação da força magnética na mudança de referencial



Fonte: Autor.

Exemplo 4.2. Na Situação II ilustrada na Figura 4.11, o observador no canto superior esquerdo está em movimento, indicado pela seta. As cargas elétricas em movimento geram um campo magnético entre os corpos A e B , atraindo-os.

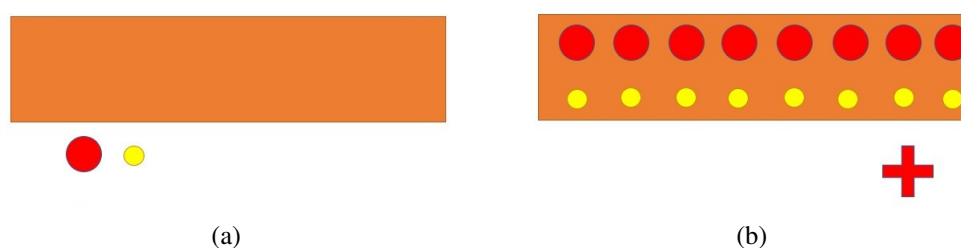
A questão ilustrada no Exemplo 4.2 intrigou Einstein, que em 1905, usando as equações de Maxwell e sua notável imaginação, conseguiu relacionar a força magnética com a dependência de um movimento para sua existência a um novo fenômeno, mais tarde denominado teoria da relatividade especial.

Diferentemente de nossa noção comum, comprimento e tempo não são grandezas absolutas, sendo percebidos de formas diferentes por observadores que estejam se movendo em relação a outros. Daí, a relatividade. Em medições extremamente precisas, observa-se que o tempo passa um pouco mais lentamente para um observador em movimento em relação a outro observador em repouso. Corpos em movimento também sofrem ação relativística, sendo contraídos em sua direção de movimento, pois quando um objeto está se movendo em relação a outro, ele ocupa um espaço menor do que quando está em repouso. É essa contração de comprimento que permite o funcionamento de um eletroímã. O Exemplo 4.3 ilustra a contração de comprimento.

Exemplo 4.3. Um filamento de cobre, representado na Figura 4.12(a), consiste de vários íons positivos de cobre imersos em uma quantidade muito maior de elétrons (PURCELL; MORIN, 2013). Contudo, o número de prótons e de elétrons no filamento condutor é igual e, dessa maneira, o filamento é um corpo eletricamente neutro. Ao se colocar um corpo carregado positivamente próximo ao filamento, o corpo não receberá nenhuma força proveniente do filamento. E mesmo

que houvesse uma bateria fornecendo diferença de potencial elétrico entre as duas extremidades do filamento, criando assim uma corrente elétrica, os elétrons apenas se deslocariam em um sentido; ao se seccionar o filamento, a densidade de cargas positivas e negativas continuaria sendo a mesma, mantendo o filamento ainda neutro e sem exercer nenhuma influência no corpo positivamente carregado colocado na sua vizinhança - Figura 4.12(b).

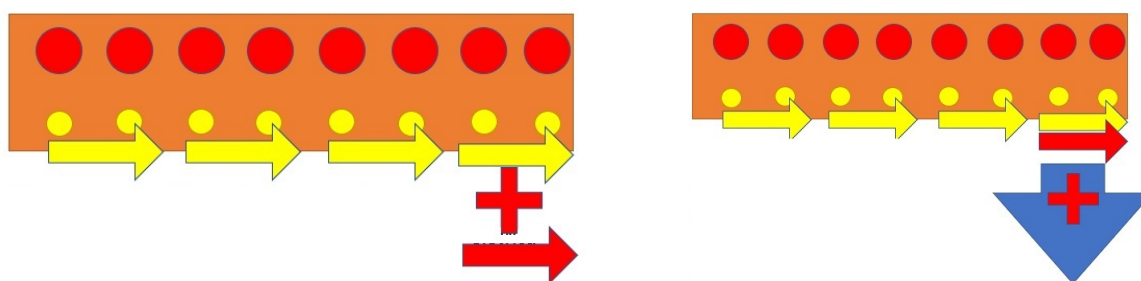
Figura 4.12 – (a) Filamento de cobre (retângulo laranja) e suas cargas elétricas: próton (+, vermelho) e elétron (–, amarelo); (b) filamento neutro com um corpo carregado positivamente em sua vizinhança



Fonte: Autor.

Porém, ao mover o corpo carregado positivamente na mesma direção, sentido e velocidade dos elétrons - Figura 4.13(a), o filamento, sujeito a uma diferença de potencial em seus terminais, ainda estaria neutro e então nenhuma força deveria agir sobre o corpo carregado que se move na sua vizinhança. Mas a força existe! O corpo carregado positivamente, quando em movimento próximo ao filamento, é repelido pela força magnética - Figura 4.13(b). Na visão de um observador externo, o corpo carregado positivamente é repelido devido ao campo magnético gerado pela passagem de corrente elétrica no filamento condutor (PARANÁ, 2003).

Figura 4.13 – (a) Corpo carregado positivamente em movimento sob a mesma direção, sentido e velocidade da corrente elétrica no filamento; (b) repulsão provocada pela força magnética

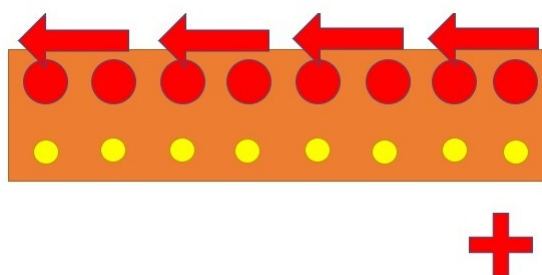


Fonte: Autor.

Observando a situação descrita anteriormente a partir do referencial do corpo carregado positivamente, são as cargas positivas que estão em movimento no sentido oposto à corrente elétrica por toda extensão do filamento de cobre - Figura 4.14 (PURCELL; MORIN, 2013). Logo, não existiria campo magnético. Entretanto, de acordo com a teoria da relatividade especial, a distância entre as cargas positivas no filamento será um pouco menor. Pela contração dos

corpos em movimento, esse caso também é conhecido como *contração de Lorentz* (VRIES, 2006): em repouso, os elétrons estão mais afastados uns dos outros, aumentando assim a densidade de cargas positivas na secção de qualquer parte do filamento. Portanto, o filamento não é mais neutro e sim carregado positivamente. Isto significa que um corpo carregado positivamente na proximidade do filamento sofrerá a ação de uma força elétrica repulsiva (PURCELL; MORIN, 2013).

Figura 4.14 – A partir do referencial do corpo carregado positivamente, os elétrons estão estáticos e as cargas positivas percorrem o filamento no sentido oposto à corrente



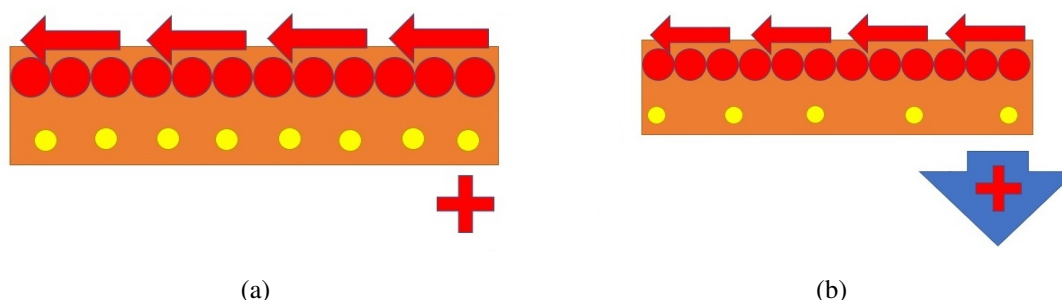
Fonte: Autor.

Resumindo: um corpo carregado, próximo a um filamento neutro por onde passa uma corrente elétrica, não sofre ação de força alguma; porém, quando o corpo é colocado em movimento próximo ao filamento, ocorre a repulsão. É este fenômeno, a força magnética, que causa a deflexão de uma bússola próxima a um filamento condutor percorrido por uma corrente elétrica.

Portanto, o campo magnético é um efeito relativístico do campo elétrico; em outras palavras, é um campo elétrico visto de outro referencial. E de forma análoga, a força magnética é somente uma força elétrica interpretada em outro referencial. Em ambos os casos, os resultados são idênticos, e dessa forma um eletroímã é um exemplo da relatividade especial em nosso cotidiano. Mesmo que os elétrons em um filamento tenham velocidade muito abaixo da velocidade da luz, há uma quantidade imensa de elétrons pelo fio, e a interação entre esses elétrons é tão intensa, que minúsculos efeitos da contração de Lorentz geram desequilíbrios significativamente expressivos de cargas, criando assim uma força notável (PURCELL; MORIN, 2013; VRIES, 2006).

Um corpo em movimento ocupa um espaço menor. Pela contração de Lorentz - Figura 4.15(a), as cargas positivas se agrupam em maior quantidade enquanto os elétrons ficam mais espaçados, alterando a densidade das cargas elétricas ao longo do filamento, mantendo-o carregado positivamente. Segundo a relatividade especial de Einstein, o filamento que era neutro, agora está carregado positivamente. Assim, o corpo carregado positivamente próximo ao filamento é lançado para longe pela força elétrica pois o condutor também está carregado positivamente - Figura 4.15(b).

Figura 4.15 – (a) Contração de Lorentz; (b) força elétrica repulsiva



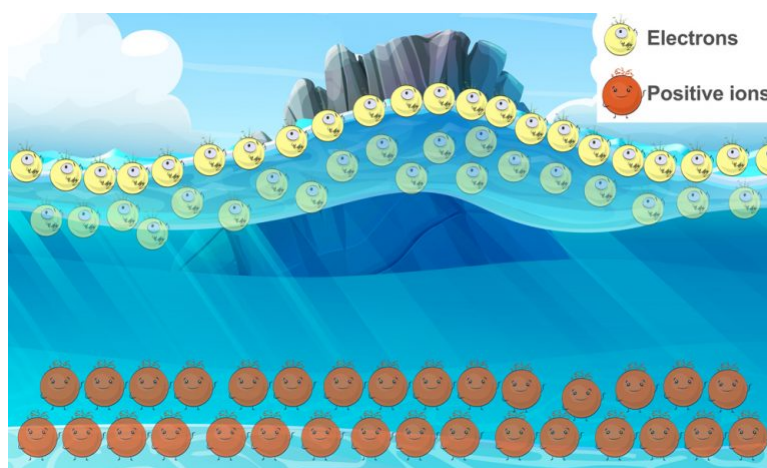
Fonte: Autor.

Desta forma, a interação ilustrada pelo Exemplo 4.3 é um fenômeno promovido por um campo elétrico ou por um campo magnético, dependendo apenas do referencial adotado. Para manipular todos esses conceitos de forças eletromagnéticas é necessário utilizar ferramentas matemáticas de análise tensorial, contempladas pela geometria de Riemann.

4.3 METAIS

Metais são, em sua grande maioria, ótimos condutores de eletricidade e calor. Isso ocorre porque, nas ligações entre vários átomos iguais de um mesmo metal, sobram elétrons nas camadas de valência e existe uma força muito pequena de atração entre esses elétrons quase dispersos e os núcleos dos átomos. Ao se moverem na presença dessa quantidade enorme de átomos que concebem um corpo metálico, todos esses elétrons juntos formam o chamado mar ou nuvem de elétrons - Figura 4.16, que fluem pela superfície de qualquer metal (PARANÁ, 2003).

Figura 4.16 – Mar ou nuvem de elétrons



Fonte: Alves (2021).

Quando uma onda eletromagnética como a luz atinge um metal, os campos elétricos e magnéticos perturbam esse mar de elétrons que, ao se moverem, formam uma nova onda. No metal, ao absorver parte da energia da luz, os elétrons desse mar passam a vibrar na mesma

frequência da luz absorvida e, em grande parte dos metais, a energia absorvida corresponde à parte ultravioleta (UV) das ondas eletromagnéticas. As partículas carregadas eletricamente interagem entre si, originando um campo elétrico; este, formado pelo movimento dos elétrons da nuvem, forma uma nova onda de luz - Figura 4.17, o que mantém o campo elétrico no metal nulo. É essa onda que sai do metal com o aspecto mais brilhante. O metal reflete a luz, misturando os comprimentos de onda de todas as cores de espectro visíveis, exceto o ouro e alguns outros poucos metais, como cobre e césio.

Figura 4.17 – Reflexão da luz nos metais



Fonte: Autor.

4.3.1 O BRILHO DOURADO DO OURO

O ouro - Figura 4.18, é um metal de transição, de excelente condutibilidade elétrica e térmica, sendo o mais maleável e dúctil dos metais: um grama de ouro pode ser esticado por quilômetros com espessura mínima, ou perfazer lâminas de mais de um metro quadrado e extremamente delgadas. O núcleo de um átomo de ouro (*Au*) tem 79 prótons e 118 nêutrons e, na eletrosfera, os 79 elétrons estão divididos nos 6 primeiros níveis de energia: $K = 2$, $L = 8$, $M = 18$, $N = 32$, $O = 18$ e $P = 1$; os subníveis de energia são: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$, $3d^{10}$, $4s^2$, $4p^6$, $4d^{10}$, $4f^{14}$, $5s^2$, $5p^6$, $5d^{10}$, $6s^1$.

Por possuir massa atômica de $197u$, onde u é a unidade de massa atômica, o núcleo do átomo de ouro é muito denso, o que atrai todos os elétrons da eletrosfera, principalmente os das camadas mais internas, que para não serem engolidos pela atração eletrostática, devem girar mais rápido em suas órbitas ao redor do núcleo.

Os elétrons da primeira camada ($K = 1$ ou $1s^2$) ao redor do núcleo têm velocidade de cerca de $1,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, o que é equivalente a aproximadamente 50% da velocidade c da luz. É nesse contexto que a relatividade está presente. Quando a velocidade de um elétron em sua órbita aumenta, ao ponto de ser comparada a $\frac{c}{2}$, esse elétron sofre um aumento relativístico de massa, pois $E = m \cdot c^2$. E assim, a massa dos elétrons em um átomo de ouro sofre um ganho de aproximadamente 20% (LOEBICH, 1972).

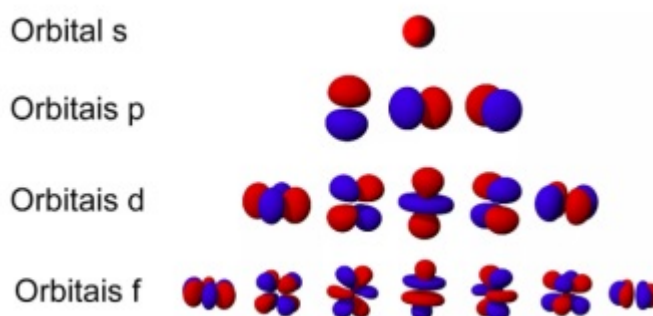
Figura 4.18 – Ouro e mercúrio



Fonte: Oliveira (2015).

Com o aumento da velocidade e da massa do elétron, o caminho que o mesmo percorrerá em sua órbita diminui, graças à contração relativística. Portanto, o raio da órbita e a massa de um elétron são inversamente proporcionais, e é essa a razão do brilho amarelado do ouro.

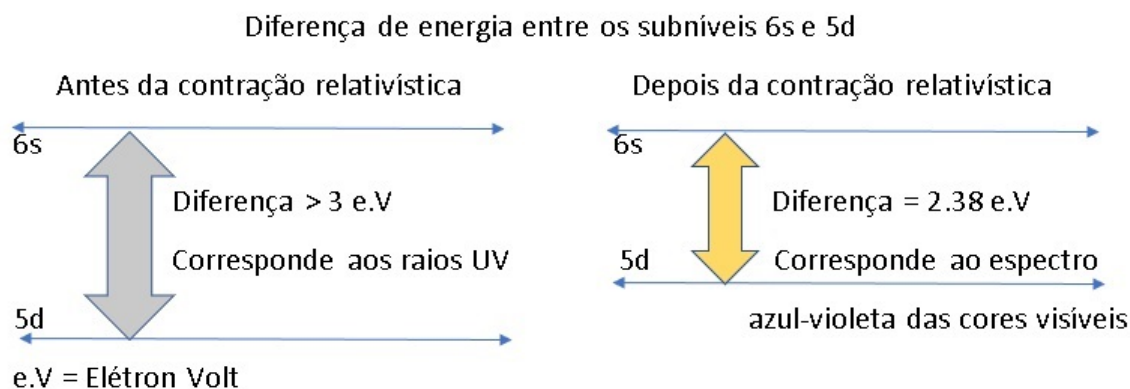
As nuvens de elétrons são as regiões com a maior probabilidade de se encontrar um elétron na eletrosfera. Os orbitais s , p , d e f têm formatos distintos - Figura 4.19; o orbital s tem forma esférica e, dessa forma, experimenta uma atração maior do núcleo atômico. Com isso, todo orbital s de um átomo de ouro é atraído para mais perto do núcleo, sendo que o orbital $6s^1$ tem uma contração relativística de cerca de 17% em seu volume esférico.

Figura 4.19 – Orbitais s , p , d , f e sua representação

Fonte: Brondani (2019).

A aproximação do orbital $6s^1$ do núcleo e a menor atração deste sobre os demais orbitais resulta em uma diminuição da distância entre os orbitais $6s^1$ e $5d^{10}$ - Figura 4.20. Desta maneira, os átomos de ouro absorvem uma parte da energia recebida pela luz; a parte absorvida corresponde à região violeta/azul do espectro visível da luz. A onda refletida é composta por todas as cores visíveis, com exceção de todo espectro entre violeta e azul. O brilho do ouro é dourado porque os comprimentos de onda das cores visíveis estão entre os espectros vermelho e verde, e ao misturar esses comprimentos de onda, tem-se o amarelo (WALKER, 2006; LOEBICH, 1972).

Figura 4.20 – Diferença de energia antes e depois da contração relativística



Fonte: Autor.

Existem metais com núcleo mais denso do que o ouro, como mercúrio e chumbo. Porém, estes não têm brilho dourado, e a razão está na relatividade e na mecânica quântica.

4.3.2 O ESTADO FÍSICO DO MERCÚRIO

O mercúrio - Figura 4.18, é o único metal líquido. Às Condições Normais de Temperatura e Pressão ($0^{\circ}C = 273,15 K$ e $1 ATM = 100000 Pa$), o mercúrio, cujo número de massa é $200 u$, tem pontos de fusão e de ebulição respectivamente iguais a $-38^{\circ}C$ e $356^{\circ}C$, valores estes muito baixos para um metal. Um átomo de mercúrio (*Hg*) tem em seu núcleo 80 prótons e 120 elétrons; na eletrosfera, há 80 elétrons distribuídos nos 6 primeiros níveis de energia: $K = 2$, $L = 8$, $M = 18$, $N = 32$, $O = 18$ e $P = 2$; os subníveis de energia são: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$, $3d^{10}$, $4s^2$, $4p^6$, $4d^{10}$, $4f^{14}$, $5s^2$, $5p^6$, $5d^{10}$, $6s^2$ (PARANÁ, 2003).

Analogamente ao ouro, os átomos de mercúrio também têm núcleos muito densos: os elétrons da primeira camada ($K = 1$ ou $1s^2$) ao redor do núcleo têm velocidade de aproximadamente 60% da velocidade da luz, aumentando assim relativisticamente a massa dos elétrons ali presentes. E com o aumento da velocidade e da massa dos elétrons, o caminho a ser percorrido na órbita atômica também diminui, como efeito direto da relatividade.

No mercúrio, o orbital $6s^2$ é preenchido por elétrons, o que o torna semelhante ao de um gás nobre. Isso interfere na força das ligações entre os átomos de mercúrio: os elétrons da camada de valência não interagem com os elétrons de outros átomos, mesmo todos sendo átomos de um mesmo elemento químico. Essas frágeis ligações tornam o mercúrio líquido em temperatura ambiente (LOEBICH, 1972).

4.4 LUZ

A luz nos conecta com o Universo e possibilita que visualizemos corpos e objetos ao nosso redor e até mesmo estrelas distantes; a luz nos permite refletir sobre nossa existência. A

luz é um feixe de fótons, sendo o fóton uma partícula elementar indivisível que não possui um tamanho real; o fóton representa a menor quantidade de energia que pode ser transportada.

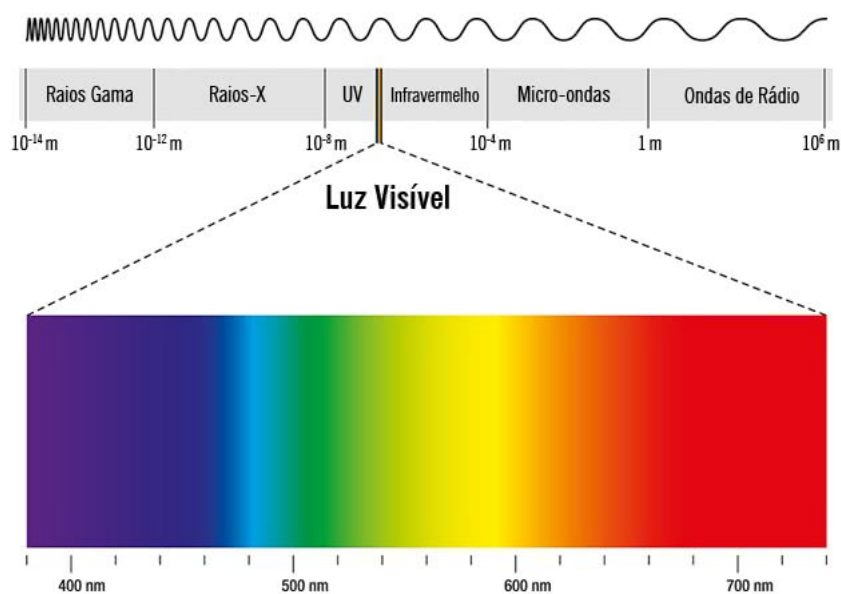
Na física moderna, um feixe de luz é um feixe de partículas, isto é, um feixe de fótons. O comportamento coletivo desse feixe de partículas é ondulatório. No estudo do comportamento da luz, o importante é conhecer as regras que regem a passagem do caráter individual da luz (corpúscular) para o coletivo (ondulatório). Ou seja, a luz pode ser considerada com caráter dual: pode ser compreendida como onda, um conjunto, quando vista à distância, mas só pode ser compreendida em todas as suas características quando vista de perto, de acordo com sua natureza corpúscular e estatística.

Deve-se salientar que fótons são partículas sem massa e que não estão em repouso; o seu comportamento é diferente do de projéteis estudados na mecânica clássica. Eles têm apenas energia e quantidade de movimento e só existem com a velocidade da luz (PARANÁ, 2003, p. 322).

No cotidiano, ao nos referirmos à luz, intuitivamente pensamos apenas na porção visível aos nossos olhos: o espectro visível da luz, que é uma pequena parcela de todo o espectro eletromagnético, é energia na forma de radiação magnética (PARANÁ, 2003).

A radiação magnética consiste de uma variedade de ondas de diferentes frequências e comprimentos de onda - Figura 4.21. No espectro magnético, os raios gama possuem o menor comprimento de onda por serem fótons de maior energia. Esses raios têm, em sua maioria, comprimentos de onda de 10 picômetros ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$), medida muito menor do que um átomo de hidrogênio.

Figura 4.21 – Espectro magnético das ondas



Fonte: Giovanini (s.d.).

A parte visível do espectro magnético, onde se encontra a luz, tem comprimentos de onda variando de 400 a 700 nanômetros ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$), medida equivalente ao tamanho

de algumas bactérias. E na outra extremidade do espectro eletromagnético, as ondas de rádio podem ter comprimentos de onda de 100 quilômetros ($1\text{ km} = 10^3\text{ m}$), enquanto os maiores comprimentos de onda conhecidos variam de 10.000 km a 100.000 km, medidas estas superiores aos raios da Terra e de Júpiter, respectivamente.

Para a física, todas as ondas eletromagnéticas são iguais, pois viajam à velocidade da luz e obedecem a ideia da dualidade, ou seja, comportam-se ora como onda ora como partícula, e se diferenciam por seus comprimentos de onda e frequências. O fenômeno da dualidade da luz é explicado pela física quântica (STARK, 2021).

Os olhos humanos têm a capacidade de captar a luz no espectro eletromagnético. Contudo, isso não é uma coincidência. A luz visível é o único conjunto de radiação magnética que se propaga com facilidade na água, de onde não por acaso, evoluíram a milhões de anos os primeiros seres vivos.

De onde vem a luz? Uma vasta quantidade de ondas eletromagnéticas é criada quando átomos ou moléculas alteram seu estado energético. Um elétron, ao perder energia, emite-a na forma de radiação. Microscopicamente, o espectro visível ocorre quando esse elétron salta entre duas camadas da eletrosfera e a variação de energia é percebida. Macroscopicamente, a carga do elétron cria um campo magnético oscilante que gera um campo elétrico também oscilante e perpendicular ao primeiro; ambos os campos se deslocam pelo espaço transferindo energia de um local a outro e carregando consigo informações sobre sua origem.

A maneira mais rápida de se deslocar no espaço é à velocidade da luz. E todo espectro eletromagnético se move com essa rapidez. Qualquer partícula sem massa viaja à velocidade da luz, sem aceleração, desde a sua criação.

4.4.1 A LUZ FAZ CURVAS?

A luz não somente interage com a matéria, como também pode ser modificada e utilizada para interpretar informações sobre o mundo ao nosso redor com quase nenhum atraso, algo de grande utilidade à sobrevivência. A luz possui algumas propriedades características: propagação, independência e reversibilidade (PARANÁ, 2003).

Quanto à propagação, a luz sempre se propaga em linha reta em qualquer meio onde esteja imersa, podendo sofrer desvios/reflexões e dispersão/difração, fenômenos que proporcionam, por exemplo, a formação das sombras; a independência por sua vez indica a não interferência de raios de luz que se sobrepõem no espaço, os quais mantêm sua composição (frequência, comprimento de onda) e trajetória; a reversibilidade mostra como a luz percorre o mesmo trajeto ao incidir em um corpo que a reflita, conceito comumente percebido em espelhos, principalmente em espelhos retrovisores de veículos.

É importante notar que a Terra, em nossa perspectiva, é um corpo muito grande que está no espaço. Porém, quando comparada a outros corpos do Universo, a Terra perde essa

grandiosidade. Também é bom lembrar que não há nada na Terra com massa igual ou maior do que a própria Terra.

Os conceitos da ótica geométrica clássica já eram conhecidos há muito tempo quando Einstein utilizou, pela primeira vez, a teoria da relatividade geral para provar a precessão da órbita de mercúrio (PIATTELLA, 2020; MIRANDA, 2019). Após isso, Einstein previu que corpos de massas extremamente grandes, também chamados de corpos massivos, podiam alterar a geometria de sua vizinhança fazendo os raios de luz se curvarem no espaço. Esses corpos massivos podem ser buracos negros, estrelas e também o astro de maior massa mais próximo da Terra, o Sol. Agora Einstein precisava comprovar sua previsão, e graças a um eclipse solar em 1919, ele teve a oportunidade perfeita.

4.4.2 O ECLIPSE SOLAR DE 1919

Em 29 de maio de 1919, privilegiados tiveram a oportunidade de vivenciar, por alguns minutos, o eclipse solar mais importante para toda ciência moderna (PIVETTA; ANDRADE, 2019). Nessa ocasião, dois grupos de estudiosos foram designados para fotografar e analisar o aguardado fenômeno: um grupo, comandado pelo astrônomo e diretor do Observatório de Cambridge, o britânico Arthur Eddington (1882–1944), foi à Ilha do Príncipe, na costa oeste da África; o segundo grupo, coordenado à distância por Frank Watson Dyson (1868-1939) e integrado por Charles Rundle Davidson (1875-1970) e Andrew Claude de la Cherois Crommelin (1865-1939), ambos membros do observatório de Greenwich, foi ao nordeste brasileiro, mais precisamente à cidade de Sobral no interior do Ceará.

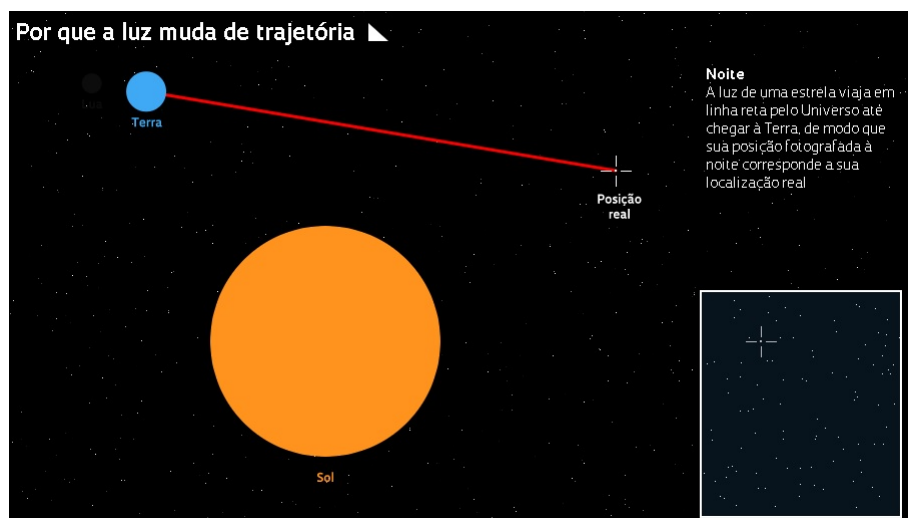
Na data do eclipse, as condições climáticas para o grupo que realizou a expedição à Ilha do Príncipe não foram favoráveis à experiência. O dia nublado fez com que somente duas de todas as fotos tiradas fossem úteis. Contudo, naquela mesma manhã em Sobral, que também amanheceu com o céu encoberto, logo as nuvens deram lugar ao céu limpo.

“O dia também amanheceu nublado em Sobral”, conta o astrônomo Carlos Veiga, da Coordenação de Astronomia e Astrofísica do Observatório Nacional. “Aos poucos, porém, as nuvens se dissiparam e um clarão se abriu entre elas.” Pouco antes das 9 horas da manhã na cidade cearense, o disco da Lua começou a sobrepor-se ao do Sol, encobrindo-o por completo minutos depois. O eclipse durou 5 minutos e 13 segundos (PIVETTA; ANDRADE, 2019).

O Exemplo 4.4 ilustra como a luz pode se curvar, fenômeno previsto por Einstein e comprovado no eclipse de 1919.

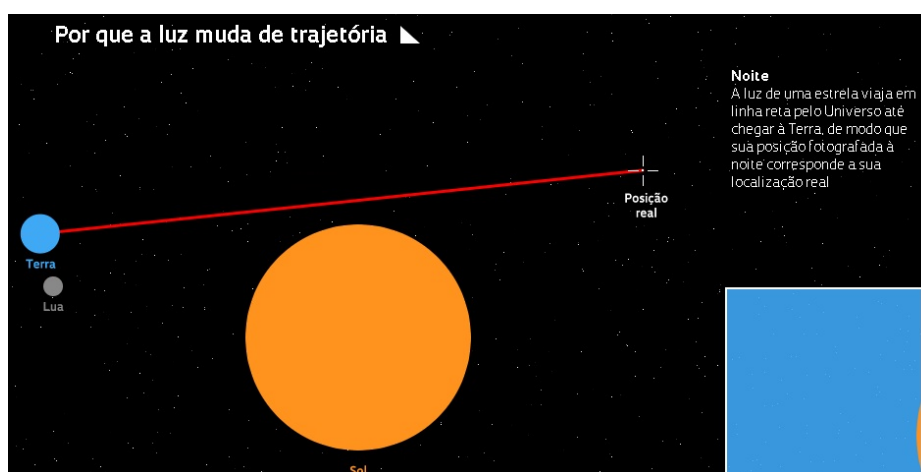
Exemplo 4.4. *A Terra “observa” uma constelação de estrelas (no ponto +), sem que nenhum obstáculo interfira - Figura 4.22. No quadrado inferior direito da imagem, aparece a mesma constelação sob o referencial de um observador na Terra, durante a noite. Durante o dia, há incidência dos raios de luz na superfície da Terra e, com o céu claro, o observador na Terra não consegue ver a constelação - quadrado inferior direito na Figura 4.23.*

Figura 4.22 – Observação de uma constelação por um observador na Terra à noite



Fonte: Pivetta e Andrade (2019).

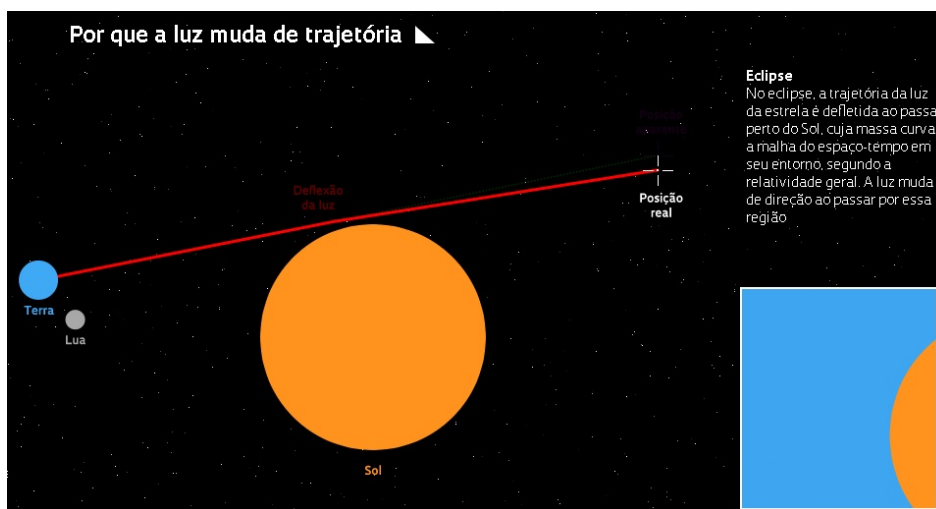
Figura 4.23 – Observação de uma constelação por um observador na Terra durante o dia



Fonte: Pivetta e Andrade (2019).

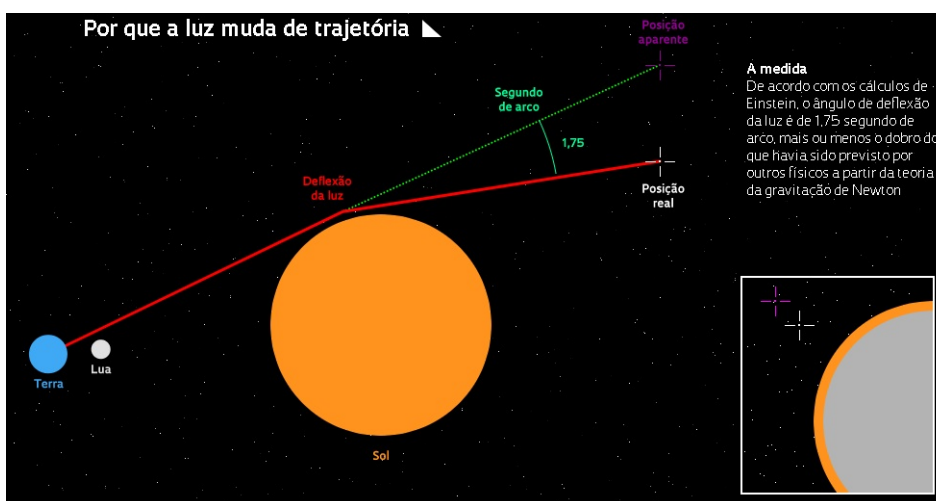
Para enxergarmos as estrelas durante o dia é necessário que algo cubra o Sol, para que assim o brilho das mesmas seja visível. A única forma disso ocorrer é durante um eclipse solar. A Figura 4.24 mostra o instante em que a constelação (que está no ponto +) sofre um leve desvio, indicado pelo pontilhado muito próximo à linha vermelha. Esse pontilhado indica para um observador na Terra a posição aparente da constelação. Já a Figura 4.25 ilustra o momento máximo do eclipse solar, quando todo o Sol está coberto pela sombra da lua. No quadrado na parte inferior direita da imagem, vemos o Sol coberto pela sombra da lua e o céu estrelado, da mesma forma que os observadores puderam ver no eclipse de 29 de maio de 1919 em Sobral. Nesse exato instante, vemos no céu as estrelas em sua posição aparente, indicada pelos pontilhados na imagem. Esse conjunto de estrelas está atrás do Sol, e somente é possível vê-las da Terra devido à curvatura gravitacional provocada pela massa do Sol, que deforma todo o espaço ao seu redor.

Figura 4.24 – Desvio na posição da constelação observada da Terra



Fonte: Pivetta e Andrade (2019).

Figura 4.25 – Desvio que o Sol provoca nos raios de luz vindo das estrelas durante o ápice do eclipse solar



Fonte: Pivetta e Andrade (2019).

Mais de cinco meses depois do eclipse solar, Eddington e Dyson comunicaram em 06 de novembro de 1919, em uma reunião da Real Sociedade de Astronomia em Londres, que as previsões de Einstein estavam corretas. E pela primeira prova experimental da teoria da relatividade, Einstein ganhou notoriedade mundial (PIVETTA; ANDRADE, 2019).

5 EXPERIMENTOS

Ao trabalhar com física ou outras ciências em sala de aula, podemos contar atualmente com recursos que eram inimagináveis há vinte anos atrás. As tecnologias disponíveis na segunda década do século XXI, tais como celulares, *tablets* e internet móvel, tornaram os laboratórios físicos das instituições educacionais obsoletos, por mais investimentos que as mesmas realizem para gerenciá-los. Algumas instituições de ensino já deram um passo rumo ao futuro implementando laboratórios virtuais. Estes utilizam softwares gratuitos para utilização em computadores, como é o caso do *PhETColorado* (PHET, 2022), ou fazem uso de realidade aumentada, com óculos de realidade virtual, como nos laboratórios online *VRLabsAcademy* (VRLAB, 2022).

Sendo os experimentos reais ou virtuais, o importante é a essência dos mesmos: promover a imersão dos estudantes na ciência, instigando-os à observação e estimulando a curiosidade. Assim, apresentamos neste capítulo três experimentos para explorar algumas ideias da relatividade e de geometrias não Euclidianas. O primeiro experimento é prático, proposto em Steer (2007), enquanto os outros dois são computacionais.

5.1 CALCULANDO A VELOCIDADE DA LUZ

1. Objetivo

Estimar o valor da velocidade da luz.

2. Pré-requisitos

Conceitos básicos de ondulatória: comprimento de onda, frequência e velocidade de onda.

3. Materiais necessários

Micro-ondas; prato fundo e liso; refratário liso; trena; barra de chocolate com no mínimo 15cm de comprimento - Figura 5.1.

Figura 5.1 – Comprimento da barra de chocolate utilizada no experimento



Fonte: Autor.

O micro-ondas empregado tem uma frequência na emissão de ondas de 2450 MHz - Figura 5.2, que equivale a $2,45 \text{ GHz} = 2,45 \times 10^9 \text{ Hz}$.

Figura 5.2 – Informações sobre o micro-ondas usado no experimento



Fonte: Autor.

4. Roteiro descritivo

O experimento consiste em aquecer uma barra de chocolate em um micro-ondas, cujo prato giratório é substituído por um prato fundo e liso ou um refratário liso. A distância entre os pontos de derretimento no chocolate e a frequência das ondas do micro-ondas permitem estimar a velocidade c da luz (STEER, 2007).

O experimento é dividido em duas etapas distintas: na primeira, investiga-se a influência da altura em que uma barra de chocolate mais espessa fica dentro do micro-ondas na distância entre os pontos de derretimento; na segunda, determina-se a distância entre os pontos de derretimento em uma barra de chocolate mais delgada.

Figura 5.3 – Conceitos básicos de ondulatória: comprimento de onda e os nós



Fonte: Autor, com base em Martins (2022).

No interior do micro-ondas são geradas ondas como a ilustrada na Figura 5.3, sendo que o encontro dessas ondas tridimensionais ocorre nos nós. Na primeira parte da experiência,

a barra mais espessa ficará derretida nas extremidades do comprimento de onda λ ; já na segunda parte, a barra delgada derreterá também no nó que divide o comprimento de onda exatamente ao meio.

Como utilizamos a trena para medir distâncias, um instrumento pouco preciso, determinamos ao término da experiência um valor aproximado para a velocidade da luz. Para determinar um valor mais preciso, são necessários um laboratório de metrologia¹ e instrumentos apropriados para medir comprimentos.

Na primeira parte do experimento, retira-se do micro-ondas o prato giratório e em seu lugar se coloca um prato liso e fundo, de cabeça para baixo, inutilizando dessa forma o sistema de rotação. Em seguida, coloca-se sobre o prato invertido uma barra de chocolate mais espessa e aciona-se o micro-ondas fechado por cerca de 45 segundos. Ao término do tempo de funcionamento, retira-se a barra de chocolate e mede-se a distância linear entre os pontos derretidos. O teste é realizado para duas alturas distintas entre a barra de chocolate e a base do micro-ondas - Figuras 5.4 e 5.5.

Figura 5.4 – Barra de chocolate acomodada a 1cm da base do micro-ondas



Fonte: Autor.

Figura 5.5 – Barra de chocolate acomodada a 8cm da base do micro-ondas



Fonte: Autor.

¹ Ciência que engloba os aspectos teóricos e práticos da medição.

Na segunda parte do experimento, coloca-se sobre um refratário liso uma barra de chocolate mais delgada e aciona-se o micro-ondas fechado por cerca de 25 segundos. Ao término, retira-se a barra de chocolate e mede-se a distância entre os pontos derretidos.

Para calcular a velocidade da luz, que é uma onda eletromagnética assim como as micro-ondas emitidas pelo aparelho, empregamos a relação

$$v = \lambda \cdot f, \quad (5.1)$$

onde v é a velocidade da onda em metros por segundo (m/s), λ é o comprimento de onda em metros (m) e f é a frequência da onda em hertz (Hz).

Em (5.1), λ corresponde à distância entre os pontos de derretimento da barra de chocolate, enquanto f é a frequência com que as micro-ondas se propagam no interior do aparelho. Essa frequência consta na etiqueta do aparelho - Figura 5.2.

5. Execução

Na primeira parte do experimento, testamos duas alturas distintas (1 cm e 8 cm) para verificar se a distância entre os pontos de derretimento é influenciada por essa altura. Constatamos, em ambos os casos, que a distância foi de aproximadamente 0,122 m - Figuras 5.6 e 5.7.

Figura 5.6 – Barra de chocolate a 1 cm da base e a distância entre os pontos derretidos



Fonte: Autor.

Figura 5.7 – Barra de chocolate a 8 cm da base e a distância entre os pontos derretidos



Fonte: Autor.

Na segunda parte do experimento, colocamos uma fina barra de chocolate - Figuras 5.8 e 5.9, sobre um refratário liso na base do micro-ondas.

Figura 5.8 – Comprimento da barra de chocolate utilizada na segunda parte do experimento



Fonte: Autor.

Figura 5.9 – Espessura da barra de chocolate utilizada na segunda parte do experimento



Fonte: Autor.

Nesta etapa, testamos três posições distintas para a barra de chocolate dentro do aparelho de micro-ondas: horizontal, oblíqua e vertical - Figuras 5.10 a 5.12.

Figura 5.10 – Barra de chocolate na posição horizontal



Fonte: Autor.

Figura 5.11 – Barra de chocolate na posição oblíqua



Fonte: Autor.

Figura 5.12 – Barra de chocolate na posição vertical



Fonte: Autor.

Após o funcionamento de aproximadamente 25 segundos do aparelho de micro-ondas, constatamos que a distância entre os pontos de derretimento foi de cerca de $0,061\text{ m}$ nas três posições testadas - Figuras 5.13 a 5.15.

Figura 5.13 – Distância entre os pontos de derretimento na posição horizontal



Fonte: Autor.

Figura 5.14 – Distância entre os pontos de derretimento na posição oblíqua



Fonte: Autor.

Figura 5.15 – Distância entre os pontos de derretimento na posição vertical



Fonte: Autor.

6. Conclusão

Na primeira parte do experimento, observamos que a distância entre os pontos de derretimento do chocolate foi de aproximadamente $0,122\text{ m}$; já na segunda parte, verificamos que essa distância foi de cerca de $0,061\text{ m}$, o que corresponde a meio comprimento de onda.

Desta forma, empregando $\lambda = 0,122\text{ m}$ e $f = 2,45 \cdot 10^9\text{ Hz}$ em (5.1), concluímos que:

$$\begin{aligned} v &= 0,122\text{ m} \cdot 2,45 \cdot 10^9\text{ ciclos/s}; \\ v &= 298.900.000\text{ m/s}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

O resultado em (5.2) difere da velocidade da luz, que é $c = 299.792.458\text{ m/s}$, em cerca de $0,3\%$. Esta diferença ocorre devido ao uso de instrumentos de medida imprecisos, como a trena.

7. Comentários

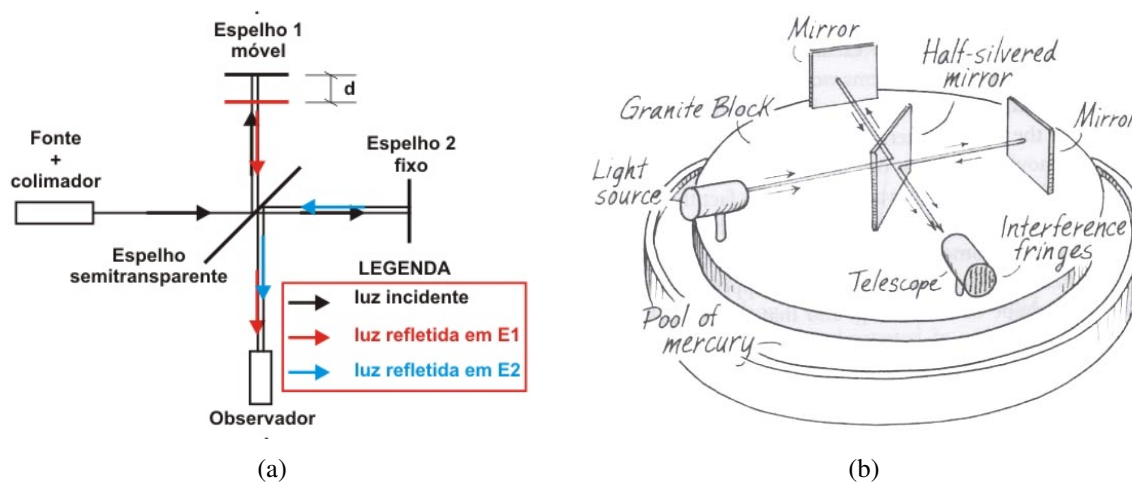
Na barra de chocolate mais espessa não foi possível observar o nó central do comprimento de onda porque este ocorreu na parte interna da barra, não sendo visível devido à espessura da mesma. Já na barra mais delgada, observamos somente a distância entre dois nós consecutivos (metade do comprimento de onda) devido ao posicionamento da barra de chocolate no interior do aparelho de micro-ondas. Adotando uma posição privilegiada e/ou usando uma barra de maior superfície, observaríamos vários nós consecutivos distando cerca de $0,061\text{ m}$ um do outro.

5.2 USANDO O INTERFERÔMETRO DE MICHELSON

O interferômetro de Michelson - Figura 5.16(a), foi idealizado em 1881 por Albert Abraham Michelson (1852-1931) para provar a existência de um fluido que preencheria o Universo, tanto os espaços interplanetários quanto os intermoleculares, denominado éter luminífero, através do qual as ondas eletromagnéticas da luz se propagariam. Acreditava-se até então que todas as ondas precisavam de um meio material para se propagarem pelo espaço, maneira pela qual a luz do Sol chegava à Terra. Já se sabia que havia uma diferença significativa entre a velocidade de translação da Terra ao redor do Sol (30 km/s) e a velocidade da luz ($\approx 300.000\text{ km/s}$) (DIAS; CASTRO; COELHO, 2021).

O interferômetro de Michelson é composto de um fonte luminosa monocromática e um colimador (ou colineador), cuja função é produzir raios luminosos paralelos. No centro do aparato, há um espelho semitransparente que reflete parte da luz incidente e permite que a outra parte o atravesse. Ambos os feixes luminosos encontram em suas trajetórias novos espelhos, um fixo e um móvel, que refletem novamente os feixes de luz. Estes feixes são superpostos sobre um anteparo, produzindo uma interferência detectada por um observador. O interferômetro de

Figura 5.16 – Interferômetro: (a) de Michelson; (b) de Michelson-Morley



Fonte: (a) Alhanati (2020); (b) IFSC (s.d.).

Michelson pode ser empregado para medir com precisão pequenas distâncias, assim como a velocidade da luz (ALHANATI, 2020).

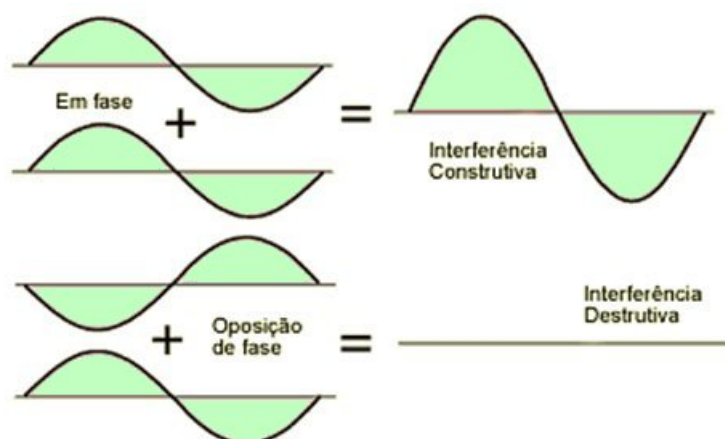
Como as medidas da velocidade da luz realizadas com o Interferômetro de Michelson interferiram na formulação da Teoria da Relatividade?

Um dos postulados da Teoria da Relatividade afirma que a velocidade da luz no vácuo é uma constante que não depende do referencial. A comprovação experimental deste postulado foi realizada em experimentos onde utilizou-se o Interferômetro de Michelson. Foram realizadas medições da velocidade da luz em localidades diferentes do planeta na direção do paralelo terrestre, no sentido de rotação da Terra e no sentido contrário; realizaram medidas na direção do meridiano terrestre no sentido sul – norte e no sentido contrário. Ficou demonstrado experimentalmente que a velocidade de propagação da luz não depende do movimento da Terra, sendo portanto independente do referencial (ALHANATI, 2020).

A interferência é um fenômeno caracterizado pela superposição física de duas ou mais ondas em um mesmo ponto, podendo ser construtiva (reforço) ou destrutiva (aniquilação) - Figura 5.17. Quando os feixes de luz do interferômetro colidem em fase, ocorre a interferência construtiva, na qual aparecem circunferências mais claras; quando os feixes de luz colidem em fases opostas, ocorre a interferência destrutiva, na qual surgem circunferências mais escuras. Esse padrão de circunferências concêntricas claras e escuras é denominado franja. A Figura 5.18 ilustra um padrão de franjas circulares claras.

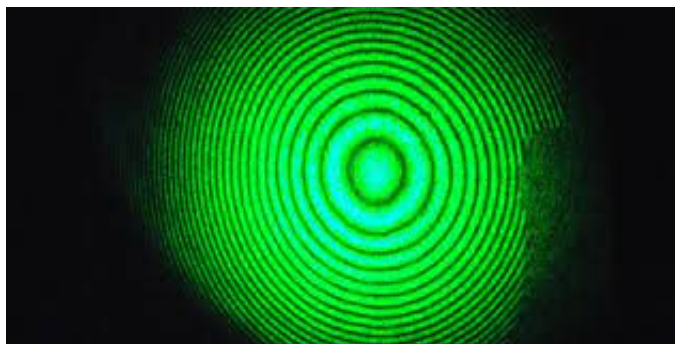
Michelson ganhou o prêmio Nobel de física em 1907, sendo o primeiro norte-americano a receber tal premiação (ÓTICA, 2022). Para que seu interferômetro fosse realmente preciso, a distância entre os espelhos, denominada braço do interferômetro, deveria ter em torno de 11m de comprimento. E para testar a precisão do interferômetro, a cada pequena movimentação do espelho móvel, verificava-se pequenas mudanças no padrão luminoso das franjas de interferência.

Figura 5.17 – Interferências construtivas e destrutivas



Fonte: Morellato (2018).

Figura 5.18 – Interferências construtivas: franjas claras em círculos concêntricos



Fonte: Departamento de Física UFMG (2022).

Devido a fatores relacionados à vibração, o primeiro interferômetro de Michelson não forneceu informações precisas. Assim, o experimento foi recriado em 1887 em um aparato, o interferômetro de Michelson-Morley (Edward Williams Morley (1838-1923)), que consistia de uma base fixa e robusta de granito que girava sem atrito em uma piscina de mercúrio (DIAS; CASTRO; COELHO, 2021) - Figura 5.16(b). Para Michelson e Morley, caso o éter luminífero existisse, ao se girar todo o interferômetro as franjas mudariam de fase, de claro para escuro, isto devido à velocidade do éter em relação à velocidade da Terra em seu movimento em torno do Sol.

1. Objetivo

Reproduzir a experiência de Michelson-Morley com o uso de um computador, sem a necessidade de um laboratório de metrologia e seus aparatos.

2. Pré-requisitos

Conceitos de ondulatória: elementos de uma onda, interferências entre ondas, velocidade de onda.

3. Materiais necessários

Computador com internet e navegador de internet instalado.

4. Roteiro descritivo

Para aplicar o experimento, podemos utilizar dois interferômetros virtuais, disponíveis em:

- a) <<https://fisica.fe.up.pt/michelson/indice.html>>;
- b) <<https://www.laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/interferometro-de-michelson>>.

O primeiro interferômetro foi desenvolvido por estudantes da Universidade do Porto em Portugal, é gratuito e sua última atualização ocorreu em 2009. Para utilizá-lo, basta fazer o *download* do arquivo de execução. Em algumas versões de sistema operacional, talvez os botões do programa não fiquem visíveis. Porém, no manual há uma lista de comandos para utilizar o software via teclado - Figura 5.19.

Figura 5.19 – Interferômetro virtual da Universidade do Porto



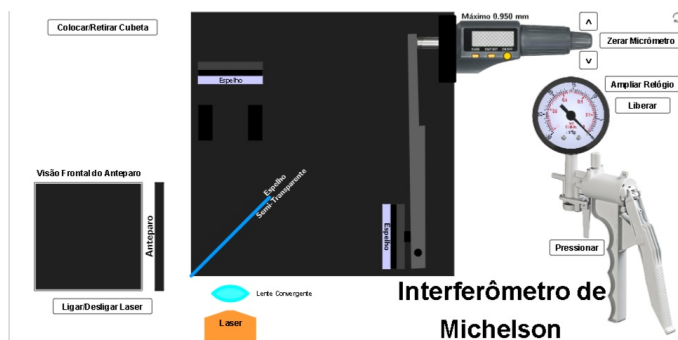
Fonte: Teixeira, Pereira e Carvalho (2009).

O segundo interferômetro foi desenvolvido recentemente pela Universidade Federal do Ceará e funciona na plataforma GeoGebra (GEOGEBRA, 2022), não sendo necessário nenhum outro programa além do navegador de internet. O programa é interativo e há na parte inferior da tela comandos para operá-lo com o *mouse* - Figura 5.20.

5. Conclusão

O padrão de interferências circulares, as franjas, surgem por ter sido utilizada uma lente divergente na saída do feixe de luz. Assim, a luz diverge e cada fração da mesma percorre distâncias diferentes; ao se encontrarem após a separação pelo espelho semitransparente, originam as interferências construtivas e destrutivas. Esse padrão das franjas pode ser alterado por pequenas vibrações no sistema, que ocorrem quando o espelho móvel é deslocado ou quando a velocidade da luz sofre uma alteração, como por exemplo, quando o feixe de luz passa por uma pequena câmara de ar comprimido.

Figura 5.20 – Interferômetro virtual da Universidade Federal do Ceará



Fonte: Castro e Dias (2021).

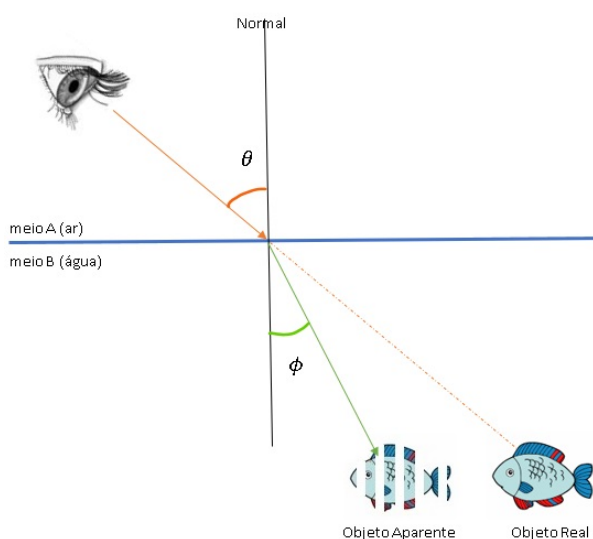
Durante a propagação, um raio de luz sofre um desvio angular quando muda de meio material. Além disso, há alteração de sua velocidade na troca de meio material. Esse fenômeno é denominado refração - Figura 5.21. A velocidade v da luz refratada, sempre menor do que a velocidade c da luz, é calculada por:

$$v = \frac{c}{n};$$

$$c = v \cdot n, \quad (5.3)$$

onde n é o índice de refração no meio em que a luz incidiu. Esse meio material pode ser ar comprimido, vidro, acrílico, água etc.

Figura 5.21 – Refração da luz: o raio de luz saindo do ar para a água



Fonte: Autor.

Quanto mais denso e refrativo é o meio no qual o raio luminoso penetra, menor é a velocidade de propagação do raio de luz e seu desvio é acentuado, aproximando-se da reta normal. Exemplificando, na Figura 5.21 o observador que está no meio A (ar) percebe o objeto (peixe) no meio B (água) em um local diferente de onde ele realmente está devido à

refração da luz. Este fenômeno é equacionado pela lei de Snell-Descartes:

$$n_A \cdot \text{sen } \theta = n_B \cdot \text{sen } \phi,$$

onde: θ é o ângulo de incidência do raio incidente com a reta normal; ϕ é o ângulo de refração que surge entre o raio refratado e a normal; n_A é o índice de refração do meio A e n_B é o índice de refração do meio B.

Quando o raio de luz incide perpendicularmente à superfície do novo meio de propagação, coincidindo com a reta normal, não há desvio angular e somente alteração na velocidade.

À época de Michelson e Morley acreditava-se na existência do éter luminífero e que esta substância envolvia todo o Universo. Como a Terra se move em torno de si mesma e ao redor do Sol, pensava-se que esses movimentos interferiam na velocidade da luz. Segundo Pereira (2022), o interferômetro de Michelson-Morley foi testado em várias regiões da Terra e em diversas épocas do ano. Nesses testes, não se constatou diferenças significativas na velocidade dos raios de luz após a separação pelo espelho semitransparente. Caso os feixes de luz apresentassem velocidades diferentes nas duas direções de propagação, isso seria registrado pelo interferômetro - vídeo inserido na Figura 5.22.

Figura 5.22 – QR-Code para um vídeo ilustrativo sobre o interferômetro de Michelson-Morley



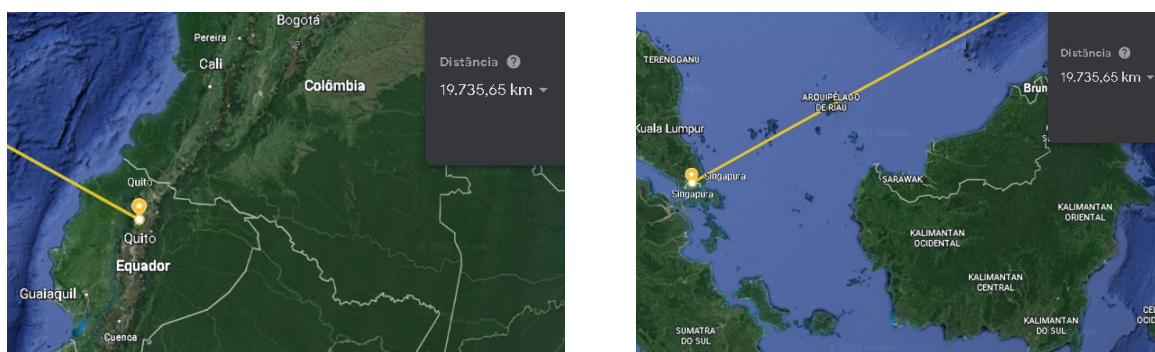
Fonte: Autor, baseado em Pereira (2022).

5.3 EXPLORANDO O GOOGLE EARTH

O *Google Earth* (GOOGLE, 2022) é um *software* que se conecta aos satélites de localização GPS, permitindo a geolocalização em tempo real a partir de qualquer ponto da superfície terrestre. O *software* usa como referência as coordenadas geográficas dos pontos na superfície terrestre, o que possibilita medir a distância entre dois pontos quaisquer e, conseqüentemente, traçar as rotas a serem percorridas em viagens, passeios e atividades físicas, tais como caminhadas, corridas e ciclismo. Essa tecnologia é comum em aparelhos *smartphone* e *notebooks*, e é amplamente utilizada no rastreamento de veículos em sistemas de *delivery* e aplicativos de transporte urbano.

Como o *Google Earth* é uma ferramenta gratuita e de fácil acesso, podemos empregá-la para fazer uma “prova real” em questões que envolvam o cálculo da distância aproximada entre algumas cidades da Terra, como por exemplo, entre Quito, no Equador, e Singapura, na Malásia - Figura 5.23. O cálculo dessa distância constou na Questão 55 do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) da Prova 1 - Amarela, página 21, de 2002.

Figura 5.23 – Localização de Quito e Singapura no *Google Earth*



Fonte: *Google Earth* (2022).

Questão 55 - As cidades de Quito e Singapura encontram-se próximas à linha do Equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Singapura em aproximadamente:

- (A) 16 horas.
- (B) 20 horas.
- (C) 25 horas.
- (D) 32 horas.
- (E) 36 horas.

Para solucionar a questão do ENEM, empregamos a relação para o cálculo do comprimento C de uma circunferência²:

$$C = 2\pi r, \quad (5.4)$$

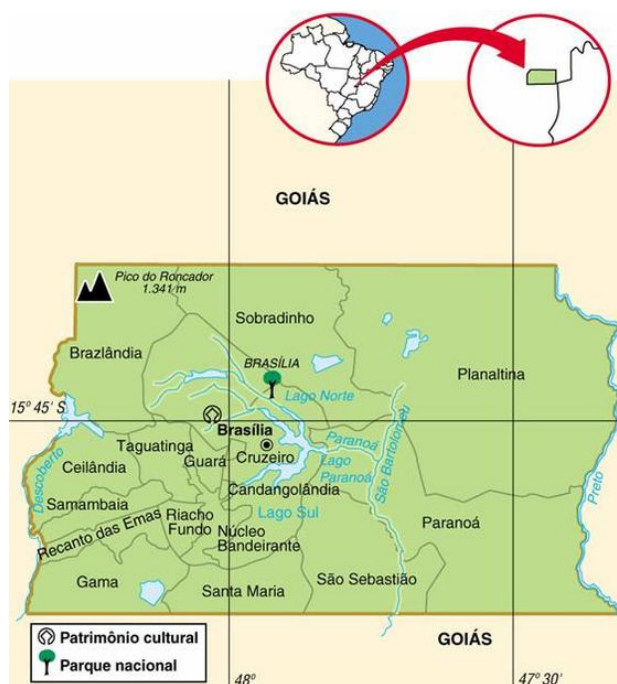
onde r é a medida do raio da circunferência. Empregando $\pi \approx 3,14$ e $r = 6370 \text{ km}$ em (5.4), determinamos $C = 40.003,6 \text{ km}$. Contudo, C é o comprimento completo da circunferência; a distância entre as cidades diametralmente opostas é dada por $d = \frac{C}{2}$. Logo, a distância de Quito a Singapura equivale a $d = 20.001,8 \text{ km}$. Da equação (3.4) decorre que $\Delta t = \frac{d}{v_m}$. Assim, $\Delta t = \frac{20001,8}{800} \approx 25 \text{ h}$. Portanto, a solução correta da questão do ENEM é dada pela alternativa C.

Além de calcular distâncias entre pontos na superfície terrestre, o *Google Earth* também calcula a área de um polígono convexo. Para tanto, é necessário demarcar o polígono pelos seus

² A circunferência é a reta na geometria esférica (MOTTA, 2018).

vértices. Contudo, são poucas as localidades cuja extensão territorial pode ser bem demarcada com poucos pontos. No Brasil, o mapa do Distrito Federal tem um formato quase retangular quando observado em uma escala pequena. Todavia, em uma escala maior, constata-se que a extensão territorial é um polígono com muitos lados - Figura 5.24. O mapa do estado norte americano do Colorado - Figura 5.25, pode ser demarcado no *Google Earth* com poucos pontos.

Figura 5.24 – Mapa do Distrito Federal



Fonte: Mendes (2011).

Figura 5.25 – Mapa do estado do Colorado - EUA



Fonte: Loeffler e Dietz (2021).

Atividade 1

1. Objetivo

Calcular a distância entre as cidades antípodas (diametralmente opostas) de Quito e Singapura com o *Google Earth*.

2. Pré-requisitos

Conhecimentos de geometria esférica.

3. Materiais necessários

Computador com internet e navegador de internet instalado.

4. Roteiro descritivo

Inicialmente, localizamos no *Google Earth* as cidades de Quito e Singapura fornecendo as coordenadas geográficas de ambas (DATEANDTIME.INFO, s.d.).

Quito

Latitude: $0^{\circ}13'31''$ Sul

Longitude: $78^{\circ}31'29''$ Oeste

Singapura

Latitude: $1^{\circ}16'60''$ Norte

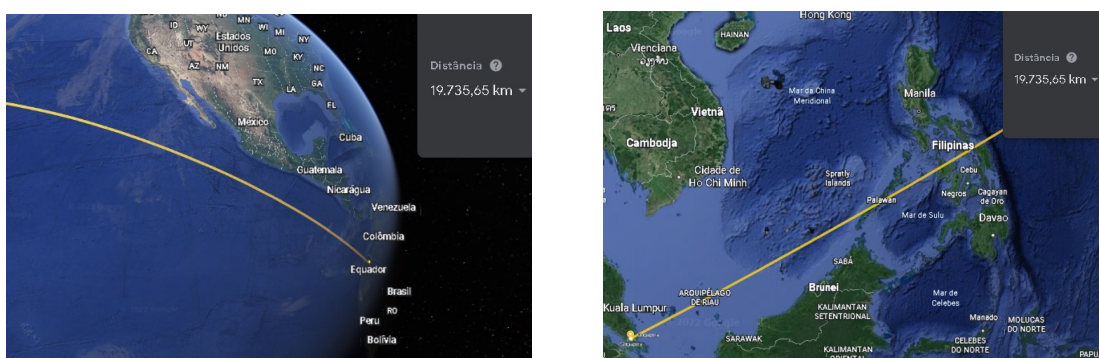
Longitude: $103^{\circ}51'0''$ Leste

Em seguida, salvamos na seção “pesquisa” os pontos referentes às duas cidades. Após isso, usamos a ferramenta “medir distância e área” para determinar a distância entre ambas.

5. Conclusão

O *Google Earth* indica que a distância entre Quito e Singapura é de $19.735,65 \text{ km}$ - Figura 5.26, valor relativamente próximo àquele calculado para solucionar a questão do ENEM. A diferença entre os valores para essa distância é devida às irregularidades do solo, aos instrumentos de aferição de distâncias e ao fato de que a Terra não tem formato perfeitamente esférico.

Figura 5.26 – Distância entre as cidades de Quito e Singapura segundo o *Google Earth*



Fonte: *Google Earth* (2022).

Na atividade, podemos calcular via *Google Earth* a distância entre outras cidades antípodas na superfície terrestre, tais como Curitiba-Brasil e Uruma-Japão (MOTTA, 2018), Xangai-China e Buenos Aires-Argentina, Cuiabá-Brasil e Manila-Filipinas, Montevideu-Uruguai e Seul-Coreia do Sul. Segundo SRL (2022), o ponto antípoda de Curitiba ocorre no Oceano

Pacífico; a cidade de Uruma, uma província de Okinawa no Japão, é a cidade mais próxima a esse ponto. Já o ponto antípoda de Uruma ocorre em Palmas-PR no Brasil, uma cidade a aproximadamente 370 *km* de distância de Curitiba.

Atividade 2

1. Objetivo

Calcular o perímetro e a área do estado norte americano do Colorado com o *Google Earth*.

2. Pré-requisitos

Conhecimentos de geometria esférica.

3. Materiais necessários

Computador com internet e navegador de internet instalado.

4. Roteiro descritivo

Inicialmente, demarcamos no *Google Earth* os vértices do quadrilátero que define a extensão territorial do estado do Colorado - Figuras 5.27 a 5.30, usando as informações fornecidas pelo *Google Earth* (2022). Em seguida, usamos as ferramentas “pesquisa” e “medir distância e área” para, respectivamente, salvar a localização e determinar o perímetro e a área do estado do Colorado.

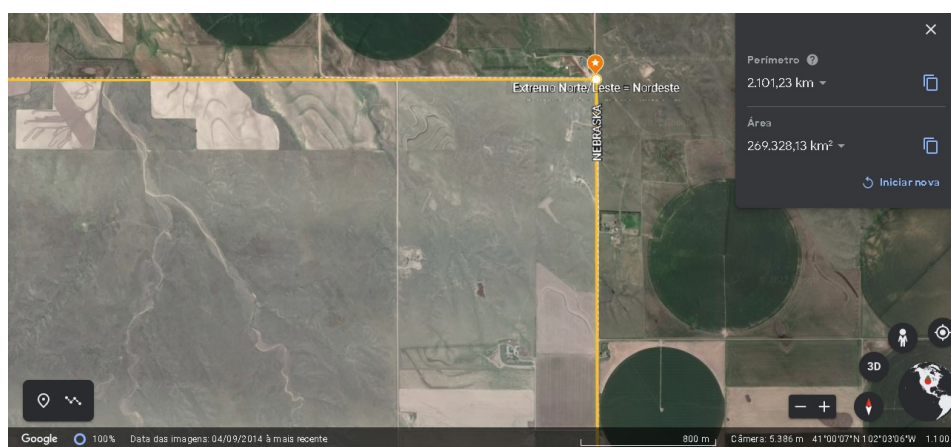
Nordeste: 41°00'08" Norte 102°03'05" Oeste

Noroeste: 41°00'02" Norte 109°03'02" Oeste

Sudoeste: 36°59'56" Norte 109°02'42" Oeste

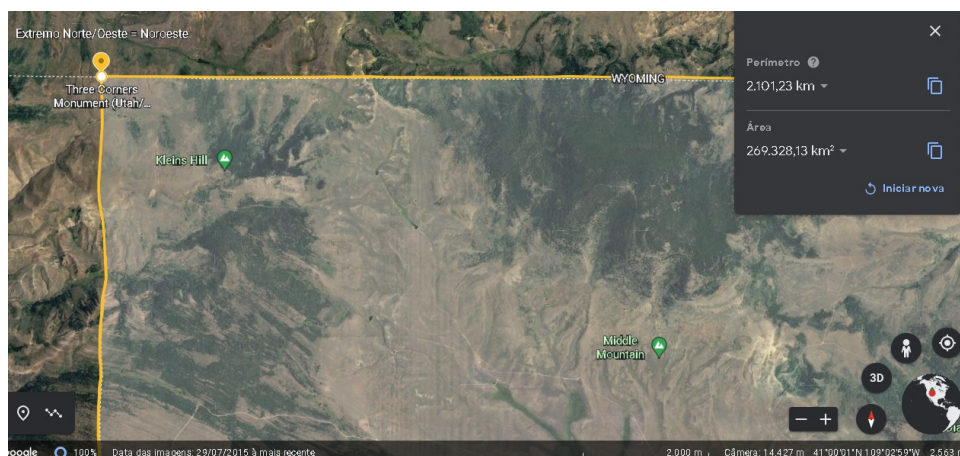
Sudeste: 36°59'34" Norte 102°02'31" Oeste

Figura 5.27 – Demarcação do extremo nordeste do estado do Colorado



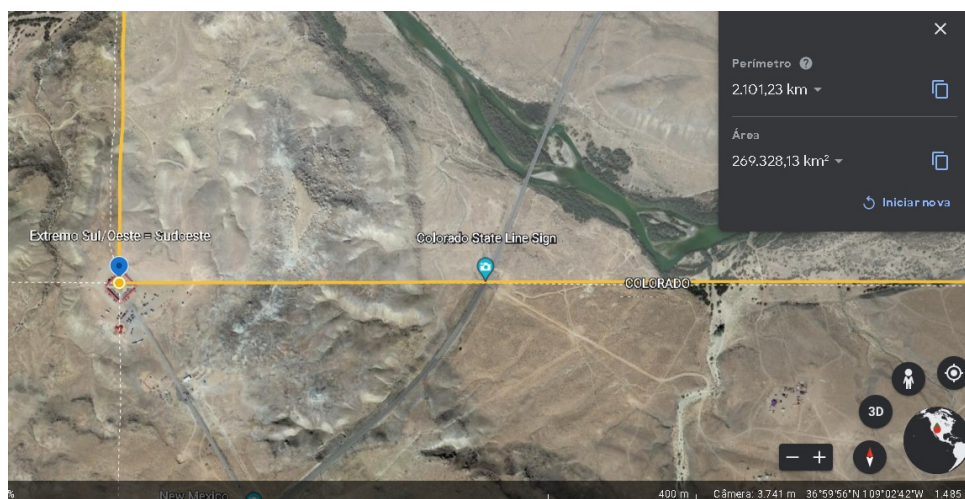
Fonte: *Google Earth* (2022).

Figura 5.28 – Demarcação do extremo noroeste do estado do Colorado



Fonte: *Google Earth* (2022).

Figura 5.29 – Demarcação do extremo sudoeste do estado do Colorado



Fonte: *Google Earth* (2022).

Figura 5.30 – Demarcação do extremo sudeste do estado do Colorado



Fonte: *Google Earth* (2022).

5. Conclusão

O *Google Earth* estabelece que o estado do Colorado tem perímetro e área respectivamente iguais a 2.101,23 km e 269.328,13 km² - Figura 5.31. Segundo Loeffler e Dietz (2021), a área do estado do Colorado é de 269.603 km². A diferença entre os valores para a área ocorre devido às irregularidades do solo, aos instrumentos de medida e ao fato de que a Terra não é perfeitamente esférica.

Figura 5.31 – Perímetro e área do estado do Colorado segundo o *Google Earth*



Fonte: *Google Earth* (2022).

O *Google Earth* é uma ferramenta fascinante e de manuseio simples, cujas medições auxiliam no plantio, na colheita e no controle do desmatamento em grandes áreas, bem como dão suporte a profissionais da aviação e da marinha no cálculo de rotas de viagem.

6 CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho aspectos históricos do desenvolvimento das geometrias não Euclidianas e as ideias que fundamentam a teoria da relatividade de Einstein. Quanto a esta, sintetizamos o texto de Richard Wolfson: “Simplesmente Einstein: a relatividade desmistificada” (WOLFSON, 2005). Além disso, mencionamos aplicações da teoria da relatividade e descrevemos alguns experimentos para explorar conceitos pertinentes à mesma.

Para o autor, a parte mais interessante na execução do trabalho foi a investigação histórica sobre os grandes matemáticos e físicos que, durante vários séculos de estudos, ajudaram a criar um incrível universo de saberes cujas aplicações nos propiciam usufruir diariamente de recursos tecnológicos cada vez mais avançados.

As maiores dificuldades à execução do trabalho foram a seleção de referências bibliográficas adequadas, principalmente em Língua Portuguesa, e a elaboração dos roteiros de atividades/experimentos.

Esperamos que o trabalho contribua à formação dos professores da Educação Básica, tanto de física quanto de matemática, motivando estes a elaborar material didático para uso em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- AFP. **O que o relógio mais preciso do mundo pode dizer sobre a Terra e o cosmos?** São Paulo: Revista Exame, 2021. Disponível em: <<https://exame.com/pop/o-que-o-relogio-mais-preciso-do-mundo-pode-dizer-sobre-a-terra-e-o-cosmos/>>. Acesso em: 15 nov. 2021. 66
- ALBON, A. J. D. **A geometria do disco de Poincaré**. 93 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Licenciatura em Matemática) — UTFPR, Curitiba, 2021. 28
- ALHANATI, L. S. **Interferência**. [s.l.]: Alfaconnection, 2020. Disponível em: <<https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/ondas/interferencia-difracao-e-polarizacao/interferencia/>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 94
- ALVES, G. **Por que o ouro é dourado?** São Paulo: dicasecuriosidades.net, 2021. Disponível em: <<https://www.dicasecuriosidades.net/2021/10/por-que-o-ouro-e-dourado.html>>. Acesso em: 02 dez. 2021. 77
- ARCARI, I. **Um texto de geometria hiperbólica**. 127 f. Monografia (Dissertação de Mestrado) — Unicamp, Campinas, 2008. 36
- BAMONTI, N. **La nascita dell'universo dal NULLA : possibile?** Itália: cronachedalsilenzio.it, 2020. Disponível em: <<https://www.cronachedalsilenzio.it/2020/02/05/la-nascita-delluniverso-dal-nulla-possibile/>>. Acesso em: 05 set. 2021. 63
- BARBOSA, M. B. **Superparamagnetismo em jacobsitas sintéticas**. 83 p. Monografia (Dissertação de Mestrado) — UFRN, Natal, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/18600/1/MateusBB_DISSERT.pdf>. 71
- BBCNEWSBRASIL. **Albert Einstein: quem foram seus filhos e o que aconteceu com eles?** São Paulo: g1.globo.com, 2021. Disponível em: <<https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2021/03/14/albert-einstein-quem-foram-seus-filhos-e-o-que-aconteceu-com-eles.ghtml>>. Acesso em: 26 abr. 2022. 16
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p. 23, 31, 32, 33, 34, 37, 39
- BRASIL, M. d. E. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasil: Ministério da Educação, 2018. 576 p. 21
- BRONDANI, P. B. **Ligações químicas**. Blumenau: UFSC, 2019. Disponível em: <<https://patyqmc.paginas.ufsc.br/files/2019/07/Ligac%CC%A7o%CC%83es-Qui%CC%81micas-Hibridizac%CC%A7a%CC%83o-Polaridade-Efeitos-Qui%CC%81micos.pdf>>. Acesso em: 02 dez. 2021. 79
- BURTON, D. M. **The history of mathematics: an introduction**. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011. 806 p. 23, 25, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37
- CARAÇA, R. da S. Efeitos relativísticos sobre observadores uniformemente acelerados. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n. 4, p. e4301–1–e4301–9, 2017. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/cLKz7WySMTkcBkZ5YCwG3Nr/?lang=pt&format=pdf>>. Acesso em: 02 jun. 2022. 53

- CASTRO, G. dos S.; DIAS, N. L. **Interferômetro de Michelson**. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2021. Disponível em: <<https://www.laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/interferometro-de-michelson>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 23, 97
- COSTANTINI, A. **Você sabe como funciona o relógio de quartzo?** São José do Rio Preto: Grife Relógios, 2015. Disponível em: <<https://www.griferelogios.com.br/blog/voce-sabe-como-funciona-o-relogio-de-quartzo.html>>. Acesso em: 15 nov. 2021. 64, 65
- DATEANDTIME.INFO. **Coordenadas geográficas**. Rússia: dateandtime.info, s.d. Disponível em: <<https://dateandtime.info/pt/citycoordinates.php?id=3652462>>. Acesso em: 02 mar. 2022. 101
- DIAS, N. L.; CASTRO, G. dos S.; COELHO, A. de A. **Simulação interativa do interferômetro de Michelson usando o GeoGebra**. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2021. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/SqgvTHG3pRk7kxwcbzzRRCr/?lang=pt>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 93, 95
- DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. **Eclipse de Sobral: há 100 anos, evento comprovava a teoria de Einstein**. São Paulo: Revista Galileu, 2019. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Revista/noticia/2019/05/eclipse-de-sobral-ha-100-anos-evento-comprovava-teoria-de-einstein.html>>. Acesso em: 01 out. 2021. 60
- EINSTEIN, A. **On the electrodynamics of moving bodies**. 23 p. Monografia (Article) — none, Germany, 1905. 73
- EINSTEIN, A. **A teoria da relatividade especial e geral**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999. 132 p. 17, 20
- EMSPAK, J. **8 ways you can see Einstein's theory of relativity in real life**. United States: livescience.com, 2017. Disponível em: <<https://www.livescience.com/58245-theory-of-relativity-in-real-life.html>>. Acesso em: 10 nov. 2021. 64
- EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. 593 p. 25, 26
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1997. 844 p. 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 38
- FERNANDES, N. **Gravidade quântica em loop: a teoria em que espaço e tempo não existem**. São Paulo: Revista Galileu, 2017. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2017/04/gravidade-quantica-em-loop.html>>. Acesso em: 05 set. 2021. 57
- FÍSICA, D. de. **Interferômetro de Michelson**. Belo Horizonte: UFMG, 2022. Disponível em: <<http://demonstracoes.fisica.ufmg.br/demo/195/6D40.10-Interferometro-de-Michelson>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 95
- GAMA, G. **Nova imagem confirma estudos sobre o primeiro buraco negro já fotografado**. São Paulo: Jornal da USP, 2021. Disponível em: <<https://jornal.usp.br/ciencias/nova-imagem-confirma-estudos-sobre-o-primeiro-buraco-negro-ja-fotografado/>>. Acesso em: 12 jul. 2021. 61
- GARBI, G. G. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. 346 p. 37, 38, 39

GEOGEBRA. **GeoGebra - Aplicativos matemáticos**. [s.l.]: GeoGebra, 2022. Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR>. Acesso em: 20 fev. 2022. 96

GIACOMELLI, A. C. **Teoria da relatividade: uma proposta didática para o Ensino Médio**. 194 p. Monografia (Dissertação de Mestrado) — UPF, Passo Fundo, 2016. Disponível em: <<http://tede.upf.br/jspui/handle/tede/573>>. 21, 22

GIOVANINI, A. **Espectro eletromagnético: o que é e para que serve?** [s.l.]: [s.e.], s.d. Disponível em: <<https://adenilsongiovanini.com.br/blog/espectro-eletromagnetico/>>. Acesso em: 28 jan. 2022. 81

GOOGLE. **GoogleEarth**. EUA: Google, 2022. Disponível em: <www.earth.google.com>. Acesso em: 02 mar. 2022. 23, 98, 99, 101, 102, 103, 104

GOTO, M. **Introdução à teoria da relatividade**. Londrina: portal.uel.br, s.d. Disponível em: <<http://www.uel.br/pessoal/mariogoto/pages/introducao-a-teoria-da-relatividade.php>>. Acesso em: 28 abr. 2022. 17, 19

HELERBROCK, R. **Campo magnético**. São Paulo: Brasil Escola UOL, s.d. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/fisica/campo-magnetico.htm>>. Acesso em: 26 nov. 2021. 69

HELERBROCK, R. **Relógio atômico**. São Paulo: Mundo Educação UOL, s.d. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/relogio-atomico.htm>>. Acesso em: 15 nov. 2021. 65, 66

IFSC. **Interferômetro**. São Carlos: IFSC-USP, s.d. Disponível em: <<https://www.ifsc.usp.br/~lavfis/index.php/apostilas-fcm0153/18-interferometro-de-michelson>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 94

INFORMAÇÃO, V. T. da. **GPS - O que é, como funciona**. São Paulo: SóFísica, s.d. Disponível em: <<https://www.sofisica.com.br/conteudos/curiosidades/gps.php>>. Acesso em: 15 nov. 2021. 67

LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. 311 p. 23

LINCOLN, D. **A new ideia might help scientists understand the big bang better**. Jersey City: Forbes, 2019. Disponível em: <<https://www.forbes.com/sites/drdonlincoln/2019/11/12/a-new-idea-might-help-scientists-understand-the-big-bang-better/?sh=1dbec6946d99>>. Acesso em: 26 mar. 2022. 40

LOBO, M. A. d. S. **Relógios atômicos: medindo o segundo**. Rio de Janeiro: IF-UFRJ, 2018. Disponível em: <<http://www.cienciaexplica.com.br/2018/04/09/relogios-atomicos-medindo-o-segundo/>>. Acesso em: 22 dez. 2021. 65

LOEBICH, O. **The optical properties of gold**. Germany: DEGUSSA, 1972. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF03215148.pdf>>. Acesso em: 02 dez. 2021. 78, 79, 80

LOEFFLER, M. J.; DIETZ, J. L. **Colorado: facts e stats**. Chicago: Enciclopedia Britanica, 2021. Disponível em: <<https://www.britannica.com/facts/Colorado-state>>. Acesso em: 11 mar. 2022. 100, 104

MACDONALD, F. **Personagens que mudaram o mundo: os grandes cientistas**. Porto Alegre: Editora Globo, 1993. Albert Einstein. 64 p. 14, 19, 23

MARTINS, L. **Ondulatória (ondas)**. Florianópolis: InfoEscola, 2022. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/fisica/ondulatoria-ondas/>>. Acesso em: 28 fev. 2022. 87

MEC. **Pseudoesfera**. Curitiba: Secretaria da Educação do Estado do Paraná, s.d. Disponível em: <<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=531&evento=3>>. Acesso em: 22 mar. 2022. 36

MENDES, L. **Distrito Federal: aspectos geográficos e socioeconômicos do Distrito Federal**. Brasil: Enciclopédia Geral, 2011. Disponível em: <<http://www.megatimes.com.br/2011/11/distrito-federal-df-aspectos.html>>. Acesso em: 11 mar. 2022. 100

MERRIAM, A. **Something interesting about Albert Einstein's Ph.D. thesis**. [s.l.]: CantorParadise.com, 2021. Disponível em: <<https://www.cantorsparadise.com/something-interesting-about-albert-einsteins-ph-d-thesis-a7bf1869059e>>. Acesso em: 26 abr. 2022. 17

MIRANDA, O. D. **Avanço do periélio de mercúrio: o primeiro sucesso da teoria da relatividade geral de Einstein**. São José dos Campos: INPE, 2019. Disponível em: <<http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1670>>. Acesso em: 06 fev. 2022. 83

MORELLATO, F. **Interferências: cabos metálicos x fibras ópticas (Parte 1)**. Porto Alegre: blog.ipv7, 2018. Disponível em: <<https://www.blog.ipv7.com.br/tecnica/interferencias-cabos-fibras-opticas/>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 95

MOTTA, G. P. **Geometrias não-Euclidianas no plano e geometria esférica**. 115 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Licenciatura em Matemática) — UTFPR, Curitiba, 2018. 28, 38, 99, 101

MUNDOESTRANHO. **Como funciona o relógio atômico?** São Paulo: Revista Super Interessante, 2011. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-funciona-o-relogio-atomico/>>. Acesso em: 15 nov. 2021. 65

NETO, M. B. d. S. **Magnetismo**. Rio de Janeiro: IF-UFRJ, 2009. Disponível em: <<https://www.if.ufrj.br/~elis/topicos/Marcello.pdf>>. Acesso em: 26 nov. 2021. 69, 70, 71, 72

NEWTON, I. **Principia mathematica philosophiae naturalis**. California: Cajori, 1962. 46

NOBELLECTURES. **Albert Einstein biographical**. Amsterdam: Elsevier Publishing Company, 1967. Disponível em: <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1921/einstein/biographical/>>. Acesso em: 26 abr. 2022. 16

NOGUEIRA, S. **Entenda de uma vez: o que é a gravidade?** São Paulo: Grupo Abril, 2019. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/ciencia/entenda-de-uma-vez-o-que-e-a-gravidade/>>. Acesso em: 28 abr. 2022. 20

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Eugenio Beltrami**. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, 2000. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Beltrami/>>. Acesso em: 05 set. 2021. 36

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **János Bolyai**. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, 2004. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolyai/>>. Acesso em: 05 set. 2021. 32

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Johann Christian Martin Bartels**. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, 2009. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bartels/>>. Acesso em: 06 set. 2021. 31

OLIVEIRA, A. J. d. **Eclipse de Sobral: há 100 anos, evento comprovava a teoria de Einstein**. São Paulo: Revista Galileu, 2019. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Revista/noticia/2019/05/eclipse-de-sobral-ha-100-anos-evento-comprovava-teoria-de-einstein.html>>. Acesso em: 01 out. 2021. 60

OLIVEIRA, J. G. **Qual a relação entre ouro, mercúrio e relatividade?** Belo Horizonte: Saber Atualizado, 2015. Disponível em: <<https://www.saberatualizado.com.br/2016/05/qual-relacao-entre-outro-mercurio-e.html>>. Acesso em: 04 dez. 2021. 79

OST, L. **Relatividade de Einstein é testada em escala humana**. São Paulo: Inovação Tecnológica, 2010. Disponível em: <<https://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=relogios-atomicos-teoria-relatividade-escala-humana&id=010830100924#.YZGUymDMLIU>>. Acesso em: 15 nov. 2021. 67

ÓTICA, L. de Ensino de. **Albert Michelson**. Campinas: Unicamp, 2022. Disponível em: <<https://sites.ifi.unicamp.br/laboptica/albert-michelson/>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 94

PARANÁ, D. N. da S. **Física**. 6. ed. São Paulo: Editora Ática, 2003. 400 p. 70, 72, 73, 75, 77, 80, 81, 82

PEREIRA, R. V.; MIZUKOSHI, J. K. **Relatividade restrita**. São Carlos: IFUSP/UFABC, 2022. Disponível em: <<https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/relatividade-restrita/relatividade-restrita/>>. Acesso em: 02 maio 2022. 47, 98

PHET. **Interactive simulations for science and math**. Boulder: University of Colorado, 2022. Disponível em: <<https://phet.colorado.edu/>>. Acesso em: 20 fev. 2022. 86

PIATTELLA, O. F. Introdução à relatividade geral. **Cadernos de Astronomia**, v. 1, n. 1, p. 30–39, 2020. Disponível em: <<https://periodicos.ufes.br/astrofotografia/article/download/30827/21242/93078>>. Acesso em: 05 fev. 2022. 83

PIVETTA, M.; ANDRADE, R. d. O. **Quando a luz se curvou**. São Paulo: FAPESP, 2019. Disponível em: <<https://revistapesquisa.fapesp.br/quando-a-luz-se-curvou/>>. Acesso em: 06 fev. 2022. 83, 84, 85

PURCELL, E. M.; MORIN, D. J. **Electricity and magnetism**. 3rd ed. Massachusetts: Harvard University, 2013. 853 p. 68, 70, 74, 75, 76

RIBEIRO, R.; GRAVINA, M. Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no Geogebra. **Professor de Matemática Online**, v. 1, n. 1, p. 53–67, 2013. Disponível em: <https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/03/art5_vol1_2013_SBM_PMO.pdf>. Acesso em: 01 out. 2021. 35

RIBOLDI, B. M. **A construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) para ensinar relatividade utilizando animações e o game a slower speed of light.** 145 p. Monografia (Dissertação de Mestrado) — UFSCar, São Carlos, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8039/DissBMR.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. 21, 22

ROMERO, L. **O eclipse de Sobral: como a teoria da relatividade foi comprovada no Ceará.** São Paulo: Revista Super Interessante, 2019. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/ciencia/o-eclipse-de-sobral-como-a-teoria-da-relatividade-foi-comprovada-no-ceara/>>. Acesso em: 01 out. 2021. 60

ROONEY, A. **A história da matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito.** São Paulo: M.Books do Brasil, 2012. 216 p. 23, 28

SANTOS, C. V. P. dos; SOUZA, J. S. de. **Mecânica ondulatória.** [s.l.]: O mundo da química, 2022. Disponível em: <https://www.omundodaquimica.com.br/academica/org1_mec_ondulatoria>. Acesso em: 28 mar. 2022. 45

SEEDPR. **Eletroímã.** Paraná: SEED-PR, s.d. Disponível em: <<http://www.fisica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=1162&evento=2>>. Acesso em: 16 nov. 2021. 73

SRL, A. S. **Antipodes map.** Romênia: AntipodesMap.com, 2022. Disponível em: <<https://www.antipodesmap.com/>>. Acesso em: 10 mar. 2022. 101

STARK, G. **Quantum mechanics.** Chicago: Enciclopedia Britannica, 2021. Disponível em: <<https://www.britannica.com/science/light/Quantum-mechanics>>. Acesso em: 05 fev. 2022. 82

STEER, M. **Mid morning experiment: speed of light.** United Kingdom: University Gate East, 2007. Disponível em: <https://www.null-hypothesis.co.uk/science/item/measure_speed_light_microwave_chocolate/>. Acesso em: 20 fev. 2022. 86, 87

TEIXEIRA D. D.; PEREIRA, F. J. L.; CARVALHO, J. F. B. d. **Simulação do interferômetro de Michelson.** Portugal: Universidade do Porto, 2009. Disponível em: <<https://fisica.fe.up.pt/michelson/indice.html>>. Acesso em: 01 mar. 2022. 23, 96

UNICAMP. **Como funciona o sistema de posicionamento global (GPS).** Campinas: Unicamp, s.d. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/>>. Acesso em: 15 nov. 2021. 67

VRIES, H. d. **The simplest, and the full derivation of magnetism as a relativistic side effect of electrostatics.** Netherlands: Chip-architect, 2006. Disponível em: <http://chip-architect.com/physics/Magnetism_from_SR.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2021. 76

VRLAB. **Virtual laboratories.** London: VRLAB Academy, 2022. Disponível em: <<https://www.vrlabacademy.com/>>. Acesso em: 20 fev. 2022. 86

WADE, E. **O gênio de Einstein mudou a percepção da gravidade em ciência.** [s.l.]: [s.n.], 2018. Disponível em: <<https://medium.com/@eltonwade/o-gênio-de-einstein-mudou-a-percepç~ao-da-gravidade-em-ciência-4d6455453019>>. Acesso em: 05 abr. 2022. 58

WADE, E. **O que é um buraco de minhoca?** [s.l.]: [s.n.], 2018. Disponível em: <<https://medium.com/@eltonwade/o-que-é-um-buraco-de-minhoca-fa5c73a62087>>. Acesso em: 11 abr. 2022. 62

WALKER, J. **What gives gold that mellow glow?** Switzerland: fourmilab.ch, 2006. Disponível em: <https://www.fourmilab.ch/documents/golden_glow/>. Acesso em: 02 dez. 2021. 79

WOLFF, J. F. de S. **O ensino da teoria da relatividade especial no nível médio: uma abordagem histórica e conceitual.** 174 p. Monografia (Dissertação de Mestrado) — UFRGS, Porto Alegre, 2005. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/7235>>. 21

WOLFSON, R. **Simplesmente Einstein: a relatividade desmistificada.** São Paulo: Globo, 2005. 325 p. 21, 23, 40, 41, 42, 46, 47, 51, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 105

ÍNDICE

- Adição relativística da velocidade, 52
- Ano-luz, 48
- Astrônomos
 - Copérnico, 40, 42
 - Crommelin, 83
 - Davidson, 83
 - Dyson, 83
 - Eddington, 83
 - Galileu Galilei, 42
 - Kepler, 42
 - Tycho Brahe, 42
- Big Bang, 40
- Buracos de minhoca, 62
- Buracos negros, 40, 59, 61
- Contração de comprimento, 50
- Contração de Lorentz, 76
- Cristais, 71
- Curvaturas do Universo, 63
- Diagrama espaço-tempo, 50
- Dilatação do tempo, 47
- Dilatação temporal gravitacional, 61
- Disco de Poincaré, 35
- Eletrosfera, 70
- Eletroímã, 73, 74
- Energia relativística, 53
- Engenheiros
 - Besso, 15
 - Marconi, 44
 - Marrison, 64
- Eter luminífero, 45, 93
- Fator relativístico, 50
- Flutuação livre, 55
- Força magnética, 73
- Físicos
 - Coulomb, 43
 - Einstein, 14, 38, 41, 45
 - Faraday, 43
 - Hertz, 44
 - Hulse, 59
 - Katori, 65
 - Kleiner, 17
 - Maric, 15
 - Michelson, 93
 - Newton, 41, 46
 - Taylor, 59
 - Volta, 43
 - Ye, 65
 - Öersted, 43
- Geodésica, 57
- GeoGebra, 96
- Geomagnetismo, 69
- Geometria Euclidiana
 - noções comuns, 26
 - o quinto postulado, 26, 30
 - postulados, 25
- Geometrias não Euclidianas
 - geometria do espaço-tempo, 40, 53, 56, 61
 - geometria elíptica, 34, 38
 - geometria esférica, 38
 - geometria hiperbólica, 28, 34, 35
 - geometria Riemanniana, 39
- Google Earth, 98
- GPS, 64
 - Trilateração, 68
- Gravidade, 56
- Hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso, 28, 30

- Horizonte de eventos, 61
- Interferômetro
 - de Michelson, 93
 - de Michelson-Morley, 95
- Intervalo do espaço-tempo, 54
- Laboratórios virtuais, 86
- Lei
 - de Coulomb, 73
 - de du Fay, 74
 - de Newton
 - primeira, 42
 - segunda, 42
 - terceira, 42
 - de Snell-Descartes, 98
- Limbo temporal, 50
- Luz, 82
 - refração, 97
- Magnetismo, 68
- Matemáticos
 - Aristóteles, 57
 - Beltrami, 28, 36
 - Bolyai, 32
 - Dirichlet, 39
 - Euclides, 25
 - Gauss, 30
 - Grossmann, 15
 - Khayyan, 28
 - Klein, 33
 - Lambert, 29
 - Legendre, 29
 - Lobachevsky, 31
 - Maxwell, 44
 - Minkowski, 53
 - Playfair, 26, 30
 - Poincaré, 34
 - Riemann, 37
 - Saccheri, 27
 - Weber, 15
- Metais
 - ferromagnéticos, 69
 - mercúrio, 80
 - ouro, 78
- Periélio de Mercúrio, 20, 58
- Princípio
 - da equivalência, 55
- Pseudoesfera, 36
- Pulsares, 59
- Queda livre, 55
- Químicos
 - Morley, 95
- Spin, 69
- Teoria da relatividade
 - especial, 17, 52, 54, 74
 - geral, 18, 38, 55, 59
- Velocidade de fuga, 60