



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Giorsan Wilker Cardoso Rios

**O Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci:
Potencialidades Didático-Pedagógicas na Educação
Básica**

Teresina - 2022



Giorsan Wilker Cardoso Rios

Dissertação de Mestrado:

**O Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci: Potencialidades
Didático-Pedagógicas na Educação Básica**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

Coorientador:

Prof. Dr. Roberto Arruda Lima Soares.

Teresina - 2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

R586n Rios, Giorsan Wilker Cardoso.
O número de ouro e a sequência de Fibonacci:
potencialidades didático-pedagógicas na educação básica /
Giorsan Wilker Cardoso Rios. – 2022.
63 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade
Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-
Graduação em Matemática - PROFMAT, Teresina, 2022.
“Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes”.
Coorientador: Prof. Dr. Roberto Arruda Lima Soares.

1. Número de Ouro. 2. Prática Pedagógica. 3. Ensino de
Matemática (Educação Básica). 4. Sequência de Fibonacci.
I. Lopes, Jurandir de Oliveira. II. Título.

CDD 510

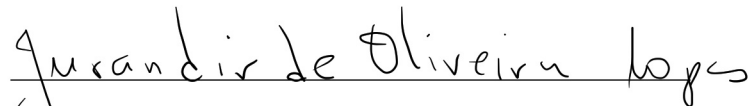
Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Giorsan Wilker Cardoso Rios

O Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci: Potencialidades Didático-Pedagógicas na Educação Básica

Dissertação submetida à banca examinadora
abaixo discriminada em defesa pública e apro-
vada em 22/02/2022.

BANCA EXAMINADORA



Jurandir de Oliveira Lopes (Orientador)

Universidade Federal do Piauí



Roberto Arruda Lima Soares (Coorientador)

Instituto Federal do Piauí



Vitaliano de Sousa Amaral

Universidade Federal do Piauí

Afonso Norberto da Silva

Afonso Norberto da Silva

Universidade Estadual do Piauí

Teresina - 2022

Dedico esse trabalho à minha mãe Graça Rios, ao meu pai Salvador Rios, aos meus irmãos Giordanny Wilkerson e Sanna Grasielly, aos meus sobrinhos Rhayka, Julya, Mariano Wilker e à Lua, com muito amor e harmonia.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e por abençoar a mim e minha família.

À minha querida mãe *Maria das Graças Cardoso Rios* e ao meu querido pai *Salvador Rios de Oliveira*, em especial à minha mãe, que sempre foi minha base e inspiração, um exemplo de amor e dedicação aos filhos, o maior presente e exemplo que eu poderia ter, que me ensina todo dia algo novo e como devemos lutar e viver a vida, que é efêmera.

Aos meus irmãos *Giordanny Wilkerson Cardoso Rios* e *Sanna Grasielly Cardoso Rios* pelo incentivo e apoio.

A todos os meus amigos e familiares, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade verdadeira e pelo suporte ao longo dessa caminhada.

Ao meu amigo e Professor Dr. *Jurandir Lopes*, por acreditar no meu trabalho, por aceitar ser meu Professor Orientador, pelos ensinamentos, pelas cobranças, pelo rigor nas demonstrações, pelo suporte e pela parceria.

Ao meu amigo e Professor Dr. *Roberto Arruda*, por aceitar ser meu Professor Coorientador desde a concepção deste trabalho, explorar bem as minhas qualidades, além de ter sido uma grande fonte de inspiração e um amigo sincero.

Ao meu amigo e Professor Dr. *Afonso Norberto*, por aceitar ser Professor desta Banca, que sempre contribuiu no passado e no presente com os seus valiosos ensinamentos e carisma, por ser um grande professor, um ídolo e um grande amigo.

Ao meu amigo *Daniel Cavalcante* (in memoriam), que sempre vai deixar sua alegria em nossas memórias.

À Lua, eterna companheira do LoboSolitario (Autor), pela cumplicidade nas noites e pelas conversas sob a sua luz revigorante, por me ajudar a viver um dia após o outro.

Enfim, agradeço a todos que participaram direta ou indiretamente dessa caminhada.

A mente é sempre a melhor arma. Seja sempre você mesmo. (LoboSolitario)

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

“O Senhor é meu pastor, nada me faltará...Ainda que eu ande pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu estás comigo.”

Salmo 23:1-4

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo sobre o fascinante Número de Ouro e suas potencialidades, a partir de um extenso contexto histórico mostrando suas propriedades e a sua relação com a Sequência de Fibonacci, assim como suas definições e aplicações e presença em outras áreas do conhecimento. Nesse estudo são demonstrados alguns métodos e fórmulas que permitem obter o Número de Ouro, através da Geometria ou pela Álgebra. Nesse sentido, buscou-se a possibilidade de aplicabilidade da Razão Áurea no desenvolvimento da disciplina de Matemática no Ensino Básico, com algumas sugestões de sequências didáticas como a criação de um algoritmo com o uso de software, a construção de fractais por meio de dobradura e corte, cálculo de limites de sequência específicos, com enfoque nas competências e habilidades elencadas na BNCC. O estudo tem como objetivo principal demonstrar as Potencialidades Didático-Pedagógicas do Número de Ouro e da Sequência de Fibonacci para o Ensino de Matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Número de Ouro, Sequência de Fibonacci, Potencialidades, Ensino de Matemática.

Abstract

The present work presents a study about the fascinating Golden Number and its potentialities, from an extensive historical context showing its properties and its relationship with the Fibonacci Sequence, as well as its definitions and applications and presence in other areas of knowledge. This study demonstrates some methods and formulas that allow obtaining the Golden Number, through Geometry or Algebra. In this sense, the possibility of applicability of the Golden Ratio was sought in the development of Mathematics in Basic Education, with some suggestions for didactic sequences such as the creation of an algorithm with the use of software, the construction of fractals through of folding and cutting, calculation of specific sequence limits, focusing on the competencies and skills listed in the BNCC. The main objective of the study is to demonstrate the Didactic-Pedagogical Potentialities of the Golden Number and the Fibonacci Sequence for the Teaching of Mathematics in Basic Education.

Keywords : Golden Number, Fibonacci Sequence, potentialities, Teaching of Mathematics.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
1 A HISTÓRIA DO NÚMERO DE OURO	3
1.1 Proporção Áurea ou Razão Áurea	3
1.2 Propriedades do Número de Ouro	6
1.3 O número de ouro e suas denominações	8
1.4 O Número de Ouro na geometria e a Sequência de Fibonacci	9
1.4.1 Retângulo áureo ou Retângulo de Ouro	9
1.4.2 Sequência de Fibonacci	11
1.4.3 A Espiral Áurea	14
1.4.4 Construção geométrica do Triângulo áureo e a espiral áurea	15
1.4.5 O Ângulo de Ouro	17
2 NÚMERO DE OURO: SUAS APLICAÇÕES	18
2.1 Número de Ouro e sua relação com a Natureza	18
2.1.1 Proporção áurea nos animais e seres vivos	21
2.2 Número de Ouro e sua relação com a Arquitetura	25
2.2.1 Na Arte	27
2.3 Número de Ouro e sua relação com a Música	30
2.4 Número de Ouro e sua relação com o Cosmo	32
2.4.1 Galáxias	33
3 NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: POTENCIALI-	

DADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS	35
3.1 Uso de Software para a representação da Sequência de Fibonacci	35
3.2 Construindo Fractais e sua relação com as Progressões	38
3.3 O Número de Ouro no Estudo de Limites de Sequências Específicas	42
3.4 O Número de Ouro e sua relação com algumas Frações e Progressões	45
4 CONCLUSÃO	48

Introdução

Na matemática alguns números são “enigmáticos”, como por exemplo, o número irracional π (pi), cujo valor é de 3,14159... , geralmente aproximado em 3,14, cujo o mesmo está relacionado ao perímetro p e ao diâmetro d de um círculo $\left(\frac{p}{d} = 3,14\dots\right)$. Outro número irracional, que segundo a literatura antecede a descoberta e o uso do π (pi), é o número de ouro ϕ (phi), cujo valor é de 1,6180339887... , geralmente aproximado em 1,618 que apesar de não ser tão conhecido, possui significado além da matemática. Esses dois números irracionais foram estudados desde a Antiguidade e despertam interesse até os dias atuais devido as suas aplicabilidades.

Porém, o número de ouro exerceu um fascínio não somente nos matemáticos, mas em estudiosos de todas as áreas de conhecimento, sendo conhecido como a “Divina Proporção”. Ainda no século III a.C, Euclides de Alexandria na busca das proporções, descobriu que ao dividir um segmento de reta AB em dois segmentos menores, sendo a razão entre o menor e o maior dos segmentos igual a razão entre o maior e o segmento todo, teríamos a secção áurea. Também conhecido como segmento áureo, proporção áurea, razão áurea e divina proporção, o número de ouro está relacionado ao conhecimento aritmético e algébrico, assim como algumas figuras geométricas.

O número de ouro, também foi estudado pelo italiano Leonardo de Pisa que através da resolução de um problema com o nascimento e crescimento de coelhos, encontrou a sequência numérica mais conhecida como Sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., sendo obtida através da razão entre seus termos consecutivos, onde chegaremos a uma aproximação do valor do número de ouro. Mas é na natureza, no conhecimento do universo, no corpo humano, nas obras arquitetônicas e nas artes que a proporção áurea se destaca, sendo amplamente defendida por estudiosos desse número magnífico, assim como questionada por outros pesquisadores como John Sharp, que a partir do mais clássico exemplo da Concha do Nautilus, constesta a sua proporção em relação à espiral de ouro, entendendo não ser perfeita como vastamente divulgada.

O presente trabalho aborda o número de ouro a partir do seu contexto histórico, suas propriedades e particularidades, apresentando, também, a relação intrínseca com a sequência de Fibonacci. Dentro desse contexto buscou estudar o fascínio e a realidade do número ϕ , demonstrando a sua presença em diferentes áreas de conhecimento assim como

no nosso próprio cotidiano. Com isso, o interesse em estudar o Número de Ouro ou “Razão áurea” tem relação com o conteúdo amplo e as diversas aplicabilidades desse número, porém não é tão explorado na Educação Básica e no próprio Ensino da Matemática. Assim, a pesquisa também apresenta propostas de sequências didáticas com aplicação na Educação Básica do Número de Ouro e da Sequência de Fibonacci.

O trabalho ficou dividido da seguinte forma. No capítulo 1, apresentamos o Número de Ouro e sua relação com a Sequência de Fibonacci, algumas propriedades interessantes e construções envolvendo o Número de Ouro, Retângulo de Ouro e a Espiral de Ouro e o Ângulo de Ouro. No capítulo 2, apresentamos situações reais da Natureza onde podemos encontrar relações com o Número de Ouro, pois ele proporciona beleza, harmonia e equilíbrio. Além disso, fizemos uma abordagem histórica e evolutiva do Número de Ouro, mostrando também sua relação com a Arquitetura, Música e o Cosmo. Esse trabalho também desmistifica a ideia erroneamente apresentada por alguns autores de que a espiral da concha do molusco Nautilus é um exemplo de Espiral de Ouro. No capítulo 3, apresentamos 3(três) Potencialidades Didático-Pedagógicas e uma curiosidade envolvendo o Número de Ouro, que podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula. No quarto e último capítulo, apresentamos as considerações finais acerca do trabalho.

Capítulo 1

A HISTÓRIA DO NÚMERO DE OURO

O saber matemático possui conceitos, métodos e ramificações que se modelam ao argumento dedutivo em seus diversos níveis, isto é, no processo argumentativo de demonstração onde a conclusão resulta das razões. Essa concepção formalista e universal dá a matemática uma compreensão autoritária, abstrata, neutra e aplicada, porém em sua dimensão humanística, em outra secção, temos outras configurações de poder em torno do pensamento matemático que estão historicamente relacionadas com a beleza e a harmonia, como é o caso da Razão Áurea.

De acordo com Cafezeiro em [7], os enunciados matemáticos não se restringem a ideias radicais e formulações. O fato de estar relacionado à álgebra e geometria, ou seja, aos números, as formas, medidas e grandezas na sua construção lógica, não torna o saber matemático limitado a resolução de problemas, mas amplia suas dimensões e conexões com o cotidiano em seus mais diversos setores.

Nesse sentido, discorre Prado em [24], que “a proporção áurea, se interliga com as mais diversas áreas do conhecimento, permitindo uma abordagem interdisciplinar através de uma extensa variedade dos tipos do conhecimento”. Diante dessa conjuntura, pensar a razão áurea somente no âmbito matemático seria manter limites que inexistem no contexto interdisciplinar da divina proporção.

1.1 Proporção Áurea ou Razão Áurea

A busca por proporções na natureza ainda na antiguidade despertou as mentes de diversos pensadores para a simetria das formas e manifestações da criação, evidenciando a existência da geometria em tudo ao nosso redor. Uma das primeiras referências clássicas que remete a proporção áurea, também conhecida como razão áurea, consta nos estudos do

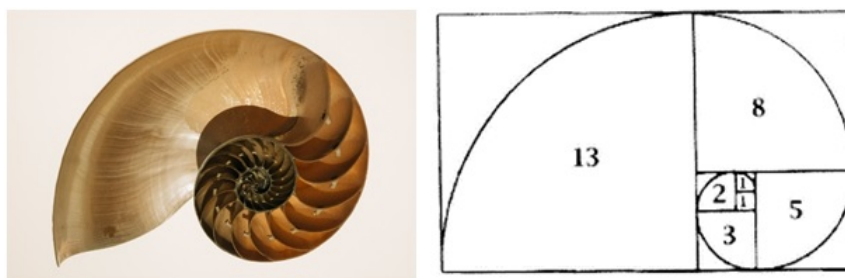
filósofo e matemático grego Pitágoras (570-500 a.C), conforme afirma Conte em [10] que “aprendeu a traçar as proporções humanas a partir dos princípios que regem a confecção de armas e utensílios (observando o pai que era ourives e um amigo que era armeiro) aplicando determinadas relações numéricas”. Notando a proporcionalidade entre o cabo e a lâmina, Pitágoras constatou tratar-se de proporção humana idealizada para o propósito, porém acreditava existir uma proporção para a natureza, como discorre Conte em [10]:

Observando a natureza, Pitágoras [...] certo dia, deparou-se com uma belíssima concha marinha (*Nautilus Pompilius*), trazida pelo eterno fluxo e refluxo das marés. Recolheu-a com cuidado, admirando a beleza de suas formas e a sua perfeição geométrica. Percebeu, então, de um relance, que ali estava a resposta que ele tanto procurava; as espirais perfeitas, as cores harmônicas, a simetria rigorosa daquela peça, não era obra humana, mas, um trabalho dos deuses (CONTE, p.147, 2006).

A partir de cálculos e medições das curvas e espirais, Pitágoras chegou à “lei biológica que regula o crescimento das coisas vivas”, conforme Conte em [10], percebendo que a concha fora projetada para crescer indefinidamente sem sofrer alterações, constituindo em si um padrão matemático, uma proporção.

Na construção da espiral da concha através de figuras quadradas e ângulos retos (Figura 1.1) segundo ordem progressiva, através de medidas foi obtida a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21..., (logo ficou conhecida como sequência de Fibonacci), a seguir:

Figura 1.1: Espiral da concha e sequência numérica

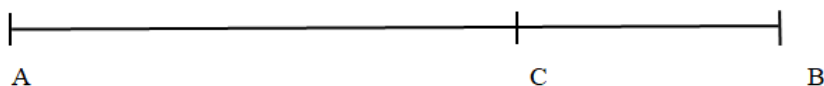


Fonte:Getty Images e Conte(2006).

Nessa sequência numérica está contido o que ficou conhecido como o enunciado da divina proporção: “o menor está para o maior, assim como o maior está para o todo”. A compreensão inicial do conceito de Razão áurea encontra-se no livro *Os Elementos* de Euclides de Alexandria (300 a.C). Euclides em [11] define a proporção áurea como a divisão de uma linha: “Uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor”.

O segmento como descrito por Euclides: “Seja o segmento finito dado AB ; é preciso, então, cortar a reta AB em extrema e média razão”, é representado conforme Figura 1.2, na página seguinte:

Figura 1.2: Segmento áureo como descrito por Euclides



Fonte: Autor.

Em explicação clara e simples dessa divisão de um segmento finito, como versa Lívio em [18], observa que o segmento AB é maior que o segmento AC , de modo que o segmento CB é menor que o segmento AC . E conclui “Se a razão do comprimento de AC para o comprimento de CB for igual à razão de AB para AC , então o segmento foi cortado na razão extrema e média, ou seja, numa Razão Áurea”. Em resumo, é a proporção $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Tomando como base a definição de Euclides, para estabelecer a razão áurea algebricamente, Lívio em [18] demonstra uma das maneiras de como se chegar ao valor exato da razão áurea a partir da Figura 1.3 a seguir:

Figura 1.3: Razão áurea do segmento AB



Fonte: Autor.

Com base na Figura 1.3, o autor sugere que tomemos o segmento menor CB como 1 unidade e o segmento maior AC como sendo x unidades, nesse caso o comprimento do segmento AB é $x + 1$. Nesse sentido, quando a razão entre x e 1 é a mesma entre $x + 1$ e x , o segmento foi cortado na razão extrema e média, podendo ser estabelecida a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

$$\frac{x + 1}{x} = \frac{x}{1}.$$

Ou seja, temos $x^2 = x + 1$, onde substituindo na equação obtemos $x^2 - x - 1 = 0$.

A partir dessa equação quadrática, temos as soluções:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398875\dots \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,61803398875\dots$$

Considerando que o comprimento de um segmento não pode ser negativo, temos que o número obtido x_1 através da razão áurea é o número de ouro ϕ .

Para Azevedo em [3], existem várias outras características aritméticas relacionadas ao número de ouro e muitas delas geram aproximações para o valor de ϕ . A seguir, mostraremos algumas propriedades do número de ouro.

1.2 Propriedades do Número de Ouro

Seja ϕ o número de ouro, a solução positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, a qual é equivalente a equação $x^2 = x + 1$, assim

$$\phi^2 = \phi + 1. \quad (1.1)$$

Dividindo a equação (1.1) por ϕ , temos que:

$$\frac{\phi^2}{\phi} = \frac{\phi}{\phi} + \frac{1}{\phi} \Rightarrow \frac{\phi}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\phi},$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1. \quad (1.2)$$

Mostraremos a seguir propriedades muito interessante sobre as potências de ϕ .

Propriedade 1. Para todo n inteiro vale que:

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}. \quad (1.3)$$

Vamos provar usando indução matemática sobre n em duas partes:

Parte I: Para todo $n \geq 2$ inteiro vale que:

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}.$$

Para $n = 2$, temos que:

$$\phi^2 = \phi^{2-1} + \phi^{2-2} = \phi + 1,$$

que é verdadeiro por (1.1).

Suponha que seja válido para $n = k$, ou seja,

$$\phi^k = \phi^{k-1} + \phi^{k-2}. \text{ (Hipótese de Indução)}. \quad (1.4)$$

Provaremos que é válido para $n = k + 1$, ou seja,

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \phi^{k-1}. \text{ (Tese)}.$$

De fato, $\phi^{k+1} = \phi^k \phi$, por (1.4) temos que $\phi^k = \phi^{k-1} + \phi^{k-2}$. Logo

$$\phi^{k+1} = \phi^k \phi = (\phi^{k-1} + \phi^{k-2})\phi = \phi^k + \phi^{k-1}.$$

Como queríamos demonstrar.

Parte II: Para todo $n \leq 1$ inteiro vale que:

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \tag{1.5}$$

Sendo $n \leq 1 \Rightarrow -n \geq -1$. Fazendo $p = -n$, então de (1.5) para todo $p \geq -1$ temos que:

$$\frac{1}{\phi^p} = \frac{1}{\phi^{p+1}} + \frac{1}{\phi^{p+2}}.$$

Assim, para $p = -1$, temos que:

$$\frac{1}{\phi^{-1}} = \frac{1}{\phi^{-1+1}} + \frac{1}{\phi^{-1+2}} \Rightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi},$$

que é verdadeiro por (1.2).

Suponha que seja válido para $p = k$, ou seja,

$$\frac{1}{\phi^k} = \frac{1}{\phi^{k+1}} + \frac{1}{\phi^{k+2}}. \text{ (Hipótese de Indução).} \tag{1.6}$$

Provaremos que é válido para $p = k + 1$, ou seja,

$$\frac{1}{\phi^{p+1}} = \frac{1}{\phi^{p+2}} + \frac{1}{\phi^{p+3}}. \text{ (Tese).}$$

De fato, $\frac{1}{\phi^{p+1}} = \frac{1}{\phi^k} \frac{1}{\phi}$, por (1.6) temos que $\frac{1}{\phi^k} = \frac{1}{\phi^{k+1}} + \frac{1}{\phi^{k+2}}$. Logo

$$\frac{1}{\phi^{p+1}} = \frac{1}{\phi^k} \frac{1}{\phi} = \left(\frac{1}{\phi^{k+1}} + \frac{1}{\phi^{k+2}} \right) \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^{k+2}} + \frac{1}{\phi^{k+3}}.$$

Como queríamos demonstrar.

Propriedade 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \phi.$

De fato,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \dots + \phi^{-n} + \dots .$$

A equação acima é a soma infinita de uma progressão geométrica (P.G.) de razão $\frac{1}{\phi}$, sendo

$0 < \frac{1}{\phi} < 1$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \frac{\frac{1}{\phi}}{1 - \frac{1}{\phi}} = \frac{\frac{1}{\phi}}{\frac{\phi-1}{\phi}} = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{\phi}{\phi-1} = \frac{1}{\phi-1} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} = \phi.$$

Propriedade 3. Considere as seqüências (x_n) e (y_n) , definidas por:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, \forall n \geq 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n}, \forall n \geq 0 \end{cases}.$$

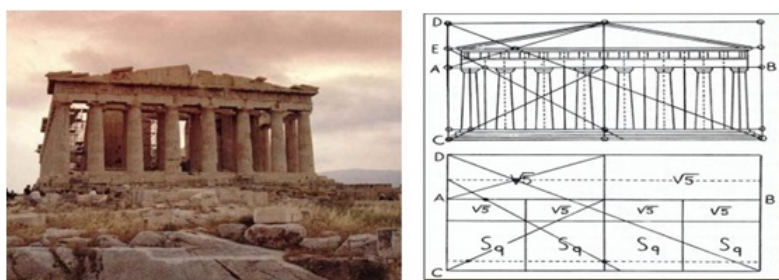
Então, ambas convergem para ϕ .

Uma ideia da demonstração pode ser encontrado no livro de Análise Real do matemático Elon Lages Lima em [16].

1.3 O número de ouro e suas denominações

O número de ouro ou proporção áurea é um número representado pela letra grega ϕ (se pronuncia “fi”). Seu nome foi uma homenagem a Phidias (lê-se Fídias, 490 - 430 a.C) arquiteto e escultor grego que dentre suas obras, estão as esculturas de “Athenas” no Parthenos e “Zeus” no templo de Olímpia, que se supõe terem sido projetadas utilizando os princípios matemáticos da Razão Áurea. A sua grande obra “O templo de Parthenon” (Figura 1.4), acredita-se conter a razão do número de ouro no retângulo da fachada.

Figura 1.4: Templo de Parthenon construído por Fídias (447 e 433 a.C)



Fonte: checkmath.files.wordpress.com/2011/08/patergon-grego.jpg

De acordo com Prado em [24] o número de ouro esteve presente desde a antiguidade nos projetos de construção das pirâmides de Gizé, no antigo Egito (2.550 a.C) nos monumentos da Grécia antiga, sendo representado por Platão (360 a.C.) como a “Chave da Física e do Cosmo”, ou seja, os antigos pensadores percebiam-no como representação da perfeição.

De acordo com Lívio em [18] a literatura matemática destaca que no princípio o sím-

bolo para Razão Áurea referia-se a letra grega tau (τ , do grego $\tau\omicron\mu\nu$, to-mi, que significa "o corte" ou "a seção"). Assim, a razão áurea ϕ passou a ser conhecido como "Número de Ouro" somente no século XX, através do matemático Mark Barr conforme Lívio e Prado em [18] e [24] em referência a Fídias, contudo desde a sua descoberta gerou-se grande fascínio às muitas gerações de matemáticos e estudiosos do número dourado.

Chamado de Razão extrema e média pelo matemático Euclides, também é conhecido como "Número Áureo" por Roger Herz-Fischler, "Proporção Áurea", "Secção Áurea" pelo matemático Martin Ohm, e "Proporção Divina" pelo astrônomo Johannes Kepler e pelo matemático Lucca Pacioli junto ao pintor Leonardo da Vinci que o reconheceram como uma "oferta de Deus", a designação mais usual é "Razão Áurea". Na introdução do livro "*Divina Proportione*" Pacioli discorre sobre a Razão áurea:

"É uma obra necessária para toda mente humana perspicaz e inquisidora, na qual todos que gostam de estudar filosofia, perspectiva, pintura, escultura, arquitetura, música e outras disciplinas matemáticas irão encontrar ensinamentos delicados, sutis e admiráveis e irão se deliciar em diversas questões que abarcam uma ciência muito secreta" (PACIOLI,1509, apud, PRADO, 2012, p.46).

Diante dessas intitulações e diversidade de estudiosos, nota-se que o número de ouro tem influenciado não somente o conhecimento matemático, mas também, as artes, a arquitetura, a Biologia, dentre outras áreas do conhecimento, ganhando o status de "mágico" e "harmonia universal", tornando-se enigmático e fascinante.

1.4 O Número de Ouro na geometria e a Sequência de Fibonacci

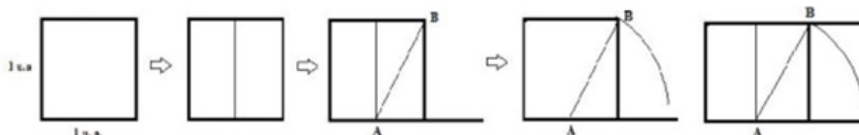
Nos estudos da Razão Áurea o elemento geométrico retângulo áureo e a representação da sequência numérica de Fibonacci foram importantes na difusão e aplicação do número de ouro. Existem diferentes métodos que possibilitam encontrar a proporção áurea ou número de ouro, dentre as mais difundidas estão o segmento áureo, o retângulo e triângulo isósceles, podendo ser relacionados aos números da sequência de Fibonacci.

1.4.1 Retângulo áureo ou Retângulo de Ouro

Partindo da premissa de que o retângulo áureo é esteticamente mais agradável, conforme cita Lívio em [18] e de que o mesmo compõe as proporções do corpo humano, *denomina-se como retângulo áureo um retângulo cuja razão do comprimento pela largura é igual a ϕ* , dando-lhe proporções harmoniosas, conforme Azevedo em [3] e Santos em [25].

Significa dizer que para construir um retângulo áureo a partir de um quadrado de lado igual a 1 unidade de medida, devemos determinar o ponto médio (A) do lado do quadrado. Em seguida, devemos unir A ao vértice (B) situado no outro lado do quadrado. Com a ponta seca do compasso em A e abertura igual ao comprimento de AB , determinar a interseção do prolongamento do lado que contém A com o arco realizado pelo compasso. O maior retângulo obtido é um exemplo de retângulo áureo (Figura 1.5).

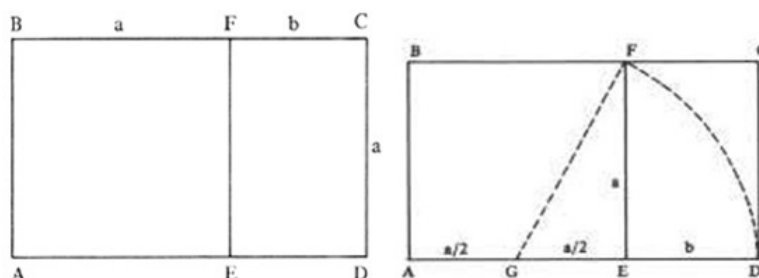
Figura 1.5: Construção do retângulo áureo a partir do quadrado



Fonte: Costa; Ramos; Romão, 2014.

Considerando o retângulo $ABCD$, ao retirar o quadrado $ABFE$, a parte restante que forma o retângulo $EFCD$ é semelhante ao retângulo original. Nesse caso, a razão do comprimento do lado do retângulo $ABCD$ para o comprimento do lado do retângulo $EFCD$ é ϕ .

Figura 1.6: Retângulo áureo



Fonte: Geraldo Ávila (<https://www.rpm.org.br/cdrpm/6/2.htm>).

Seja $AD = a + b$ o comprimento do lado maior do retângulo $ABCD$ e $DC = a$ o comprimento do lado maior do retângulo $CDEF$, teremos $\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DC} = \phi$ em que $a + b$ e a são os lados dos retângulos. Em sequência ao definirmos o ponto G que é o ponto médio do segmento AE , sendo G o centro traça-se o arco FD . Nesse caso, como $GF = GD = GE + ED = \frac{a}{2} + b$, aplicando-se o teorema de Pitágoras, temos

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Chegando-se à relação simplificada $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$, que é a definição de retângulo áureo, conforme Ávila em [2] (Figura 1.6).

1.4.2 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, nasceu em Pisa no ano de 1175 e ficou mais conhecido como Leonardo Fibonacci (sendo filho de Bonacci, do latim *filius Bonacci*, ou seja, da família Bonacci). Foi um matemático cujas contribuições relacionadas à Razão Áurea e ao número ϕ estão presentes em seu livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco 1202).

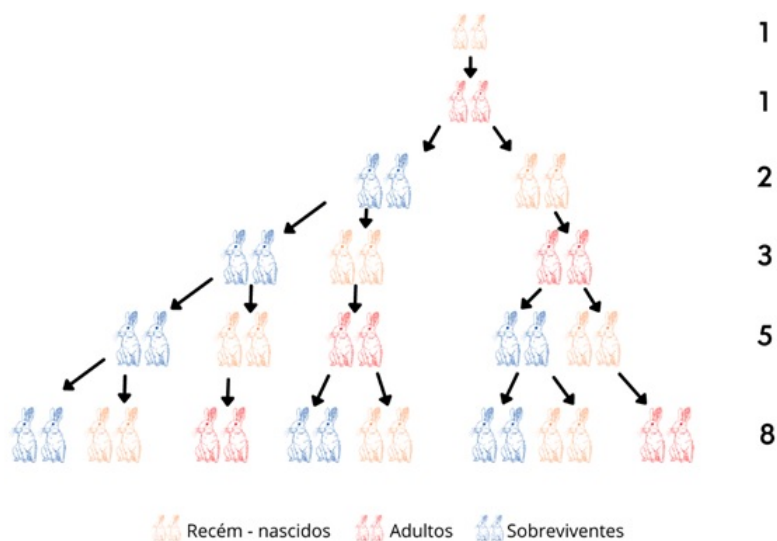
Lívio em [18] relata um problema bastante conhecido dos pares de coelhos que deu origem a importante sequência numérica de Fibonacci ou sequência de Fibonacci.

Problema. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (Capítulo XII do *Liber Abaci*).

A solução encontrada de acordo com a reprodução de cada período (Figura 1.7):

- No 1° mês de vida, temos um par de coelhos recém-nascidos. (1 casal - filhotes)
- No 2° mês de vida, temos o mesmo par de coelhos jovem que ainda não gerou nenhum coelho. (1 casal - adulto)
- No 3° mês de vida o casal de coelhos jovens, agora adultos gerou um casal de coelhos recém-nascido. Agora temos dois pares de coelhos. (2 casais - filhotes e adultos)
- No 4° mês de vida, o casal adulto gerou mais um casal de filhotes. Temos um casal adulto, um casal jovem que ainda não gerou e um casal recém-nascido. (3 casais)
- No 5° mês, temos dois casais adultos, dois casais filhotes gerados pelos adultos férteis e um casal jovem ainda não fértil. (5 casais)
- No 6° mês, temos três casais adultos férteis, três casais filhotes e dois casais jovens não férteis. (8 casais)
- No 7° mês, já são cinco casais adultos férteis, cinco casais de filhotes gerados pelos adultos férteis, respectivos, e três casais jovens ainda não férteis. (13 casais)

Figura 1.7: Casais de coelhos e reprodução mensal



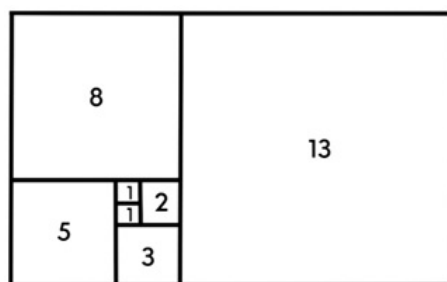
Fonte: Elaboração do autor.

Neste ponto, entendemos como proceder para obter o número de pares adultos, de pares filhotes e o total de pares nos sucessivos meses. Os resultados obtidos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... e seguindo a sequência ao continuarmos o processo são números da sequência Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., na qual cada termo (a partir do terceiro) é igual à soma dos dois termos anteriores. A sequência de Fibonacci é considerada recursiva (pode ser representada por fórmula matemática), sendo definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ em que $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$.

Segundo Lívio em [18], a razão $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ se aproxima de ϕ quando n aumenta (de acordo com a tabela abaixo):

n	F_n	$\frac{F_n}{F_{n-1}}$
1	1	
2	1	$\frac{1}{1} = 1$
3	2	$\frac{2}{1} = 2$
4	3	$\frac{3}{2} = 1,5$
5	5	$\frac{5}{3} = 1,666...$
6	8	$\frac{8}{5} = 1,6$
7	13	$\frac{13}{8} = 1,625$
8	21	$\frac{21}{13} = 1,615384...$
9	34	$\frac{34}{21} = 1,619047...$
10	55	$\frac{55}{34} = 1,617647...$
11	89	$\frac{89}{55} = 1,618181...$
12	144	$\frac{144}{89} = 1,617977...$
⋮	⋮	⋮

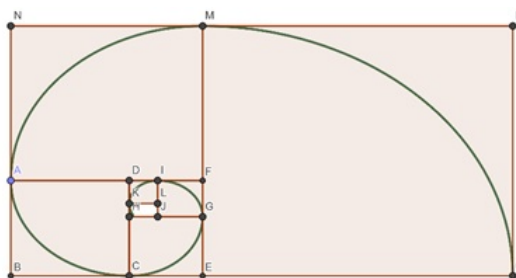
Figura 1.9: Retângulo áureo e números Fibonacci



Fonte: Elaboração do autor.

A partir da divisão de um retângulo áureo em um quadrado e outro retângulo, o retângulo resultante, também, será um retângulo áureo, seguindo uma sequência infinita de retângulos áureos. A fascinante relação entre o retângulo áureo com a sequência de Fibonacci é chamada espiral áurea (Figura 1.10) ou espiral de Fibonacci.

Figura 1.10: Espiral áurea



Fonte: Elaborado pelo autor com o software Geogebra.

Nesse caso, o retângulo ABEF mantém a razão áurea, em continuidade ao construir sucessivamente retângulos é possível desenhar a espiral áurea.

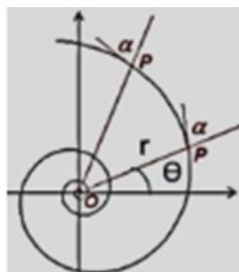
1.4.3 A Espiral Áurea

Conforme Lívio em [18], a espiral possui formas que se diferenciam de acordo com suas características. A espiral de Arquimedes é caracterizada pela distância entre os sucessivos encurvamentos, que permanece sempre a mesma. Segundo Queiroz em [27], Descartes em 1638, caracterizou a espiral equiangular, de acordo com o ângulo em que um raio vetor corta a curva, em qualquer ponto, sendo constante, seria posteriormente a espiral logarítmica .

Segundo o autor, o maior entusiasta da espiral logarítmica foi o matemático Jacques Bernoulli que compreendeu a razão áurea a partir da forma espiral *spira mirabilis* ou curva maravilhosa cuja “*propriedade fundamental exclusiva da espiral logarítmica é de que ela não altera seu formato à medida que seu tamanho aumenta. Esta característica é conhecida como autossimilaridade*”, isto é, ela parece a mesma sob qualquer ampliação.

Através da expressão em termos de coordenadas polares (Figura 1.11), temos a equação polar da espiral logarítmica sendo $r = a \cdot e^{b\theta}$ onde r é o raio associado a θ e dá a distância de um ponto de curva à origem O , com $a > 0$ e $b > 0$, conforme Prado em [24].

Figura 1.11: Espiral logarítmica



Fonte: PRADO (2012, p.143).

Sobre a espiral logarítmica, Lívio em [18] discorre:

“Aumentando pela acumulação dentro de si mesma (...) cresce cada vez mais, com a distância entre seus "encurvamentos" aumentando à medida que se afasta da fonte, conhecida como polo. Especificamente, dar voltas de ângulos iguais aumenta a distância do polo em proporções iguais” (p.138).

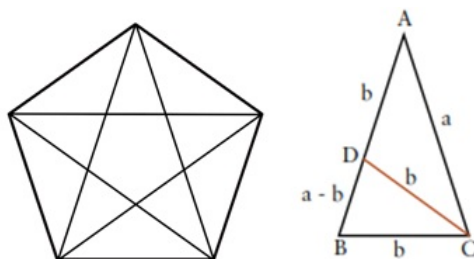
O autor reforça que a espiral logarítmica e a razão áurea estão intimamente relacionadas, podendo obtê-la através de um triângulo áureo. A partir dessa premissa, entende-se o fato da espiral áurea ser constantemente equiparada a espiral logarítmica, sendo um caso particular da logarítmica. Desse modo, a espiral áurea é uma espiral logarítmica, porém nem toda espiral logarítmica é uma espiral áurea.

1.4.4 Construção geométrica do Triângulo Áureo e a Espiral Áurea

Por razões estéticas, Pitágoras e a comunidade de pitagóricos buscaram a razão áurea, sendo aplicada em projetos de obras arquitetônicas na antiguidade com o ideal de proporções perfeitas. Entre os cinco sólidos pitagóricos, o pentagrama estrelado é um dos mais importantes, sendo usado como símbolo da irmandade, conforme afirma Lívio em [18].

A razão áurea descoberta no polígono regular que tem segmentos áureos onde uma diagonal intercepta outra a dividindo na proporção áurea DC (Figura 1.12), em seu interior estrelado se extrai um triângulo áureo. Se o ponto D é a divisão áurea ou média e extrema razão no lado AB; outro triângulo similar BCD pode ser originado do triângulo original.

Figura 1.12: pentágono regular e o ponto D

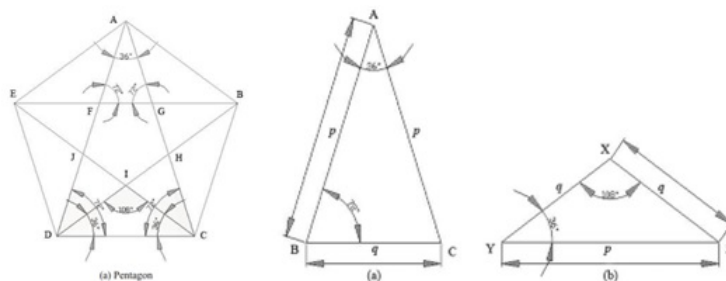


Fonte: Elaboração do autor & LAURO (2005).

Considerando o pentágono regular, a intersecção de duas diagonais forma o triângulo isósceles ABC. Conforme Akhtaruzzaman & Shafie em [1], o triângulo isósceles ABC, tem os dois ângulos da base de medida 72° e o ângulo do ápice de medida 36° , e a proporção entre qualquer um dos lados do triângulo isósceles áureo e sua base é exatamente igual ao valor de $\phi \cong 1,618$ com base na Figura 1.13 em que um triângulo áureo é construindo a partir de um pentágono regular, temos algebricamente:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{YZ}{XY} = \frac{p}{q} = \frac{p+q}{p} \cong 1,6180339887$$

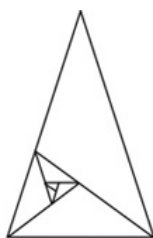
Figura 1.13: Geometria do Triângulo áureo



Fonte: AKHTARUZZAMAN & SHAFIE (2011).

Uma continuação a partir da bissetriz de um dos ângulos da base que divide o triângulo em dois novos triângulos isósceles pode formar triângulos áureos contínuos (Figura 1.14). Conforme Lauro em [14], assim como no retângulo áureo, identifica-se a propriedade de permitir que, ao traçarmos a bissetriz de um dos ângulos da base, o novo triângulo seja também de ouro. Repetindo este processo infinitamente, pode ser obtida pela continuação desta forma a espiral dourada ABCDEFO (Figura 1.15).

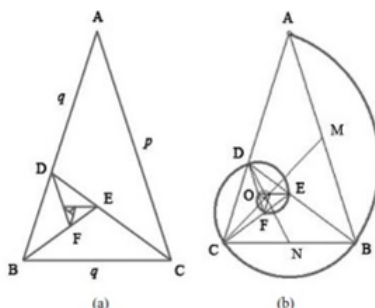
Figura 1.14: Triângulo isósceles áureo infinito



Fonte: LAURO (2005).

De acordo com Akhtaruzzaman & Shafie em [1], é possível construir uma espiral (ou elipse) áurea desenhada a partir do triângulo áureo (Figura 1.15).

Figura 1.15: Triângulo áureo e a espiral dourada



Fonte: AKHTARUZZAMAN & SHAFIE (2011).

1.4.5 O Ângulo de Ouro

O ângulo de Ouro ou Ângulo Dourado é uma descoberta dos botânicos irmãos Bravais, que nos estudo sobre o centro do caule e as folhas sucessivas, notaram que as novas folhas avançam no mesmo ângulo em volta do círculo, sendo esse chamado de ângulo de divergência medindo aproximadamente $137,5^\circ$.

Segundo Celuque em [8] a medida da divergência pode ser encontrada através da equação: $\phi = \frac{2\pi}{(1-r)} \cong 137,5^\circ$, onde $r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ é a Proporção Áurea e o ângulo $137,5^\circ$, o Ângulo Áureo.

Lívio em [18], discorre sobre o ângulo áureo e a razão áurea:

“O ângulo que divide uma volta completa numa Razão Áurea é $\frac{360^\circ}{\phi} = 222,5^\circ$. Como isto é mais da metade de um círculo (180°), deveríamos medi-lo indo na direção contrária no círculo. Em outras palavras, deveríamos subtrair $222,5^\circ$ de 360° , o que resulta em um ângulo observado de $137,5^\circ$ (às vezes chamado de Ângulo Áureo)” (p.132).

Desse modo, os ângulos de $137,5^\circ$ e $222,5^\circ$ são ângulos de ouro, à medida que dividem o círculo de 360° na razão áurea.

Capítulo 2

NÚMERO DE OURO: SUAS APLICAÇÕES

Baseado no enunciado de Pitágoras que ao observar que “algumas proporções ligadas a padrões harmônicos poderiam ser matematicamente descritas”, chega-se ao princípio pitagórico de que do material ao espiritual, “tudo são números” conforme versa Conte em [10]. Muitos fenômenos foram explicados através da aplicação dos números, assim como da representação desenvolvida através deles.

No caso do número de Ouro, na álgebra e geometria existem diferentes métodos de encontrá-lo e estabelecer sua relação com a sequência de Fibonacci. Muitos estudiosos com base em eventos e construções de obras na antiguidade atribuem à presença do Número de Ouro na arquitetura, na arte e literatura, na beleza e estética humana em suas proporções, assim como os números da sequência de Fibonacci presentes na natureza e nos padrões de crescimento de plantas e animais.

Com base nisso, muitos estudos revelam que além das propriedades matemáticas, a razão áurea possui propriedades estéticas, harmônicas e artísticas.

2.1 Número de Ouro e sua relação com a Natureza

A proporção áurea pode ser encontrada em diversos elementos da natureza, e possuindo uma estreita relação com a sequência de Fibonacci, os números de Fibonacci aparecem em todo os lugares da natureza, conforme Lívio em [18], Akhtaruzzaman & Shafie em [1] e Prado em [24]. Alguns exemplos estão presentes na botânica e seres vivos.

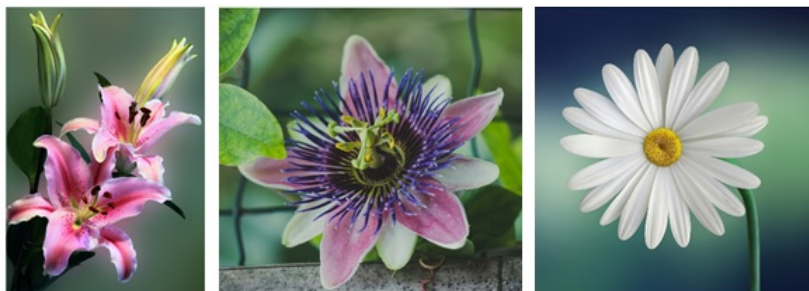
As proporções áureas e sequência numérica Fibonacci encontram-se no padrão de crescimento de plantas e animais, conforme Akhtaruzzaman & Shafie em [1]:

“Many flowers have the arrangement in petals that are to the Fibonacci numbers. Some display single or double petals. Three petals are more common like

Lilies and Iris. Some have 5 petals such as Buttercups, Wild Rose, Larkspur and Columbines. Some have 8, 13, 21, 34, 55 and even 89 petals. All these numbers are consecutive Fibonacci numbers. The petal counts of Field Daisies are usually thirteen, twenty-one or thirty-four. The seed heads also follow the Fibonacci spiral arrangement. Other flowers having four or six petals also have a deep relation with Fibonacci numbers where they can be grouped into two and three respectively having two members each. Passionflower also known as *Passiflora Incarnata* is a perfect example having the existence of the Fibonacci Numbers” (AKHTARUZZAMAN & SHAFIE, 2011, p.7).

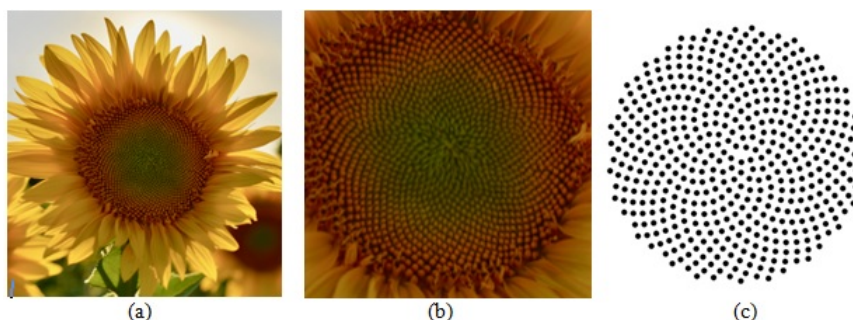
Segundo o autor algumas flores têm no seu arranjo de pétalas os números de Fibonacci, como é o caso dos Lírios (Figura 2.1) com agrupamento de 3 pétalas, e na flor do Maracujá (Figura 2.1) com agrupamento de 5 pétalas. Destaca-se, também, nas Margarida (Figura 2.1) que tem em torno de 13, 21 ou 34 pétalas e o arranjo em Espiral nas sementes da flor de Girassol (Figura 2.2 (a)). (As imagens da Figura 2.1 e Figura 2.2 fazem parte do banco de imagens do Canva).

Figura 2.1: Lírio, Flor de Maracujá e Margarida



Fonte: Banco de Imagens Canva.

Figura 2.2: Flor de Girassol e a Espiral de filotaxia de suas proporções áureas



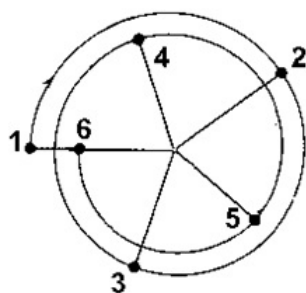
Fonte: Banco de Imagens Canva.

De acordo com Prado em [24], a estrutura espiral de flores como o Girassol (Figura 2.2 (b) e Figura 2.2 (c)), assim como o fruto pinha, segue a sequência dos termos de Fibonacci, formando dois ou mais conjuntos de espirais logarítmicas com sentidos contrários, cada conjunto tem uma quantidade de sementes: as sementes, distribuídas em espirais,

geralmente são em número de 34 no sentido horário e 21 no sentido anti-horário, ou 55 no horário e 34 no anti-horário, ou 89 no horário e 55 no anti-horário.

A partir do arranjo de folhas nos galhos e flores, a “phyllotaxis ” (filotaxia), Lívio em [18] discorre sobre as razões de termos da série numérica de Fibonacci enfatizando o crescimento das plantas. A disposição das folhas nos galhos (Figura 2.3) segue uma série regular e foi notada no sec. XV por Leonardo da Vinci que observou a existência de um padrão espiral nessa distribuição com razão filotáxicas de $2/5$ por volta.

Figura 2.3: Disposição das folhas vista de cima



Fonte: Banco de Imagens Canva.

No entanto, a relação entre a filotaxia e os números de Fibonacci estabelece-se somente no século XIX, através dos estudos “matemáticos” dos botânicos Karl Friedric Schimper e dos irmãos Bravais, que de acordo com Lívio, “os quocientes filotáxicos poderiam ser expressos por razões de termos da série de Fibonacci (como $2/5$ e $3/8$)”, correspondendo o ângulo por volta. De acordo com os irmãos Bravais, as novas folhas avançam mais ou menos no mesmo ângulo em volta do círculo (Figura 2.3), ou seja, o ângulo é constante entre as folhas, e este ângulo (ângulo de divergência) em geral é próximo de $137,5^\circ$.

Observando um padrão espiral no sentido bidirecional no aparecimento das folhas e sua disposição no caule, Lívio em [18] discorre sobre o arranjo de algumas plantas, imaginando uma curva que liga as folhas de 0 a 6, em que a quantidade importante que caracteriza a localização das folhas é o ângulo entre as linhas que ligam o centro do caule às folhas sucessivas.

No caso dos arranjos dos flósculos nos girassóis (Figura 2.2) e a sequência de Fibonacci:

“Nota-se padrões espirais tanto horários quanto anti-horários formados pelos flósculos. É evidente que os flósculos crescem de modo a assegurar a mais eficiente divisão de espaço horizontal. A quantidade dessas espirais em geral depende do tamanho do girassol. O mais comum é que existam 34 espirais em um sentido e 55 no outro, mas girassóis com quocientes de números de espirais de $89/55$, $144/89$ e até de $233/144$. [...] Nos maiores girassóis, a estrutura se

estica de um par de números de Fibonacci consecutivos para o seguinte maior, quando nos movemos do centro para a periferia” (LÍVIO, 2006, p.132).

As espirais visualizadas nos girassóis são cruzadas, cuja contagem depende da inclinação, com isso cada nova célula é formada em cada volta.

No crescimento de cada planta em que se nota o arranjo em sequência consecutiva dos números de Fibonacci, o desenvolvimento padrão em repetição e espiral tende a ser uma razão entre números sucessivos dessa sequência, como sugere Akhtaruzzaman & Shafie em [1], quando coloca que as plantas têm características distintas de Razão áurea, onde se estabelece a sequência de Fibonacci no número de folhas.

Notemos a espiral no repolho romano (Figura 2.4) e nas samambaias e cactos (Figura 2.5):

Figura 2.4: Repolho romanesco e espiral



Fonte: <https://bitly.com/UTXxxn> (Freepik).

Figura 2.5: Folha de samambaia e espiral Fibonacci (a). Cactus e a espiral. (b)



Fonte: Banco de imagens Canva.)

Contudo, a sequência numérica de Fibonacci e sua relação com a Razão áurea não se encontra somente nos arranjos das folhas, caules, raízes ou pétalas das flores, mas também, nas sementes e frutos.

2.1.1 Proporção áurea nos animais e seres vivos

São muitos os exemplos da proporção áurea encontrada em animais e outros seres vivos, na descrição do comprimento de seus corpos e na criação de alguns animais como

a armação de fios de seda nas teias de aranhas (Figura 2.6).

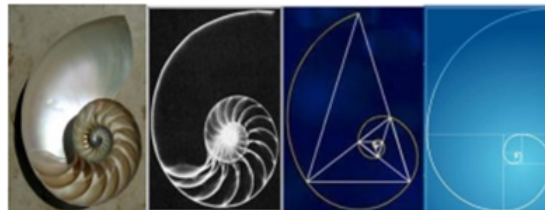
Figura 2.6: Cauda do camaleão em espiral e Teia orbe espiral



Fonte: Banco de imagens Canva.

A linha em espiral da teia orbe consiste nas linhas sobrepostas ao raio que segue uma espiral logarítmica. A geometria da teia de uma aranha orbitela nasce aos poucos, de pormenor em pormenor, produto da execução de atos repetitivos cuja natureza muda de uma etapa a outra, dentro da programação geral de construção. O comprimento da cauda do camaleão tem estrutura espiral, mesmo caso do cavalo marinho. O exemplo da espiral logarítmica encontra-se no padrão de crescimento dos animais como na Concha do Nautilus Pompilius, exemplo clássico, que foi estudado desde Pitágoras. De acordo com Prado em [24], é possível demonstrá-la a partir da sequência de Fibonacci, pelo triângulo áureo ou mesmo pelo retângulo áureo (Figura 2.7).

Figura 2.7: Corpo segmentado em espiral logarítmica do Nautilus



Fonte: PRADO (2006, p.161).

Conforme o autor, a partir do corpo segmentado em forma de espiral do molusco é possível encontrar o número de ouro através da razão entre o diâmetro de cada uma das espirais.

A espiral de uma concha de Nautilus realmente se encaixa na espiral Fibonacci definida pela proporção áurea?

Alguns pesquisadores e estudiosos como Falbo em [12], Peck em [23] e Bortolossi em [6] contestam a afirmação de que na natureza exista a perfeição proporcional da espiral Fibonacci, levando em consideração o exemplo clássico da concha do Nautilus.

Para o matemático Clement Falbo em [12], no seu artigo “I nautilus pompilius, o nautilus chambered” publicado em 1999 pela California Academy of Sciences in San

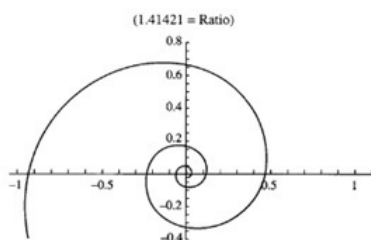
Francisco:

“The nautilus is definitely not in the shape of the golden ratio. Anyone with access to such a shell can see immediately that the ratio is somewhere around 4 to 3. In 1999, I measured shells of *Nautilus pompilius*, the chambered nautilus, in the collection at the California Academy of Sciences in San Francisco. The measurements were taken to the nearest millimeter, which gives them error bars of ± 1 mm. The ratios ranged from 1.24 to 1.43, and the average was 1.33, not D (which is approximately 1.618). Using Markowsky’s ± 2 allowance for D to be as small as 1.59, we see that 1.33 is quite far from this expanded value of D . It seems highly unlikely that there exists any nautilus shell that is within 2% of the golden ratio, and even if one were to be found, I think it would be rare rather than typical” (FALBO, 2005, p.127).

“O nautilus definitivamente não está na forma da proporção dourada. Qualquer pessoa com acesso a concha pode ver imediatamente que a proporção está em torno de 4 a 3. Em 1999, I nautilus pompilius, o nautilus chambered, na coleção do Academia de Ciências da Califórnia em São Francisco, as medidas foram tomadas para o milímetro mais próximo, o que fornece margens de erro de $\pm 1mm$. As proporções variavam de 1,24 a 1,43, e a média foi de 1,33, não D (que é aproximadamente 1,618). Usando Markowsky tem $\pm 2\%$ de D para ser tão pequeno quanto 1,59, vemos que 1,33 é bastante longe deste valor expandido de D . Parece altamente improvável que exista qualquer Nautilus de 2% da proporção de ouro, e mesmo que se encontrasse uma, eu acho que ele seria mais raro do que típico” (Tradução adaptada).

Falbo em [12], ainda, destaca que a espiral que se encaixa no formato espiral da concha do Nautilus tem proporção diferente, seria a proporção de prata $\sqrt{2}$ para 1 = 1.41421 ou raio prateado (silver ratio) (Figura 2.8).

Figura 2.8: Espiral com raio $\sqrt{2}$ para 1



Fonte: FALBO (2005, p.127).

A partir desse estudo sobre Proporção áurea e espiral Fibonacci, Peck em [23] realizou um experimento no qual dimensionava a espiral de Fibonacci (espiral áurea) sobre a concha do Nautilus através da ferramenta scale tool de um software de imagem, de modo que as imagens não combinavam, ou seja, a espiral não expande na mesma proporção que a concha do molusco.

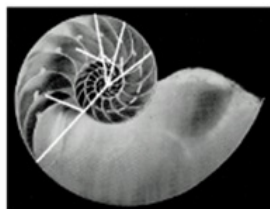
Figura 2.9: Seção transversal da concha do nautilus



Fonte: (<https://shallowsky.com/blog/science/fibonautilus.html>).

John Sharp em [26] descreve a espiral da concha do Nautilus como um mito da geometria sobre a proporção áurea, uma vez que não é uma espiral de Fibonacci. Tomando como base a explicação “que cada crescimento no comprimento da concha é acompanhado pelo crescimento proporcional do raio sem alterar sua forma”, Sharp diz que ao medirmos a concha para determinar a forma da espiral encontram-se distorções dimensionais devido a inúmeras dificuldades experimentais, dentre elas, a seção pode não estar na direção certa, a espessura da casca leva a um erro de medição e a dificuldade de determinar o centro da espiral. (Figura 2.9, Figura 2.10 e Figura 2.11).

Figura 2.10: Espiral da concha do nautilus



Fonte: SHARP (2002, p.79).

Figura 2.11: (a) Espiral Dourada forma proporcional (b) Espiral logarítmica com fator de multiplicação 3, correspondente a figura 17.

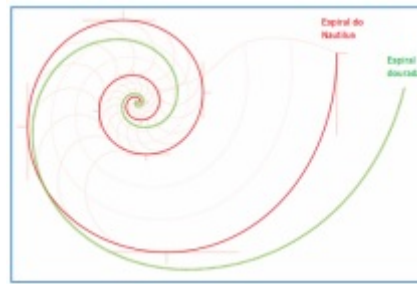


Fonte: SHARP (2002, p.80).

O matemático Humberto Bortolossi em [6] resume que uma espiral áurea é uma espiral logarítmica com valor específico para o fator de crescimento b , onde a é o fator de escala, partindo de sua curva em que $r = a \cdot b^\theta$, sendo a e b constantes não-negativas (Figura 2.12).

$$\text{Assim, } b = \frac{\ln(\theta)}{90} \text{ se } \theta \text{ é medido em graus e } b = \frac{\ln(\theta)}{\pi/2} \text{ se } \theta \text{ é medido em radianos.}$$

Figura 2.12: Curvas de crescimento da espiral do Nautilus e Áurea



Fonte: BORTOLOSSI.

Porém, Bortolossi em [6] contesta sobre as espirais em concha do Nautilus, visto que não tem o formato da espiral áurea, mas logarítmica. Toda espiral áurea é uma espiral logarítmica mas nem toda espiral logarítmica é uma espiral áurea.

2.2 Número de Ouro e sua relação com a Arquitetura

Conforme alguns autores, a arquitetura antiga teve como provável base a Razão áurea, atribuída as esculturas e arquitetura das obras da Grécia antiga e as pirâmides do antigo Egito, como a pirâmide Quéops em Gisé (Figura 2.13) acredita-se que foi construída com base na razão áurea, tendo a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide sendo igual ao número de ouro ϕ .

Figura 2.13: Pirâmide Quéops e o número de ouro



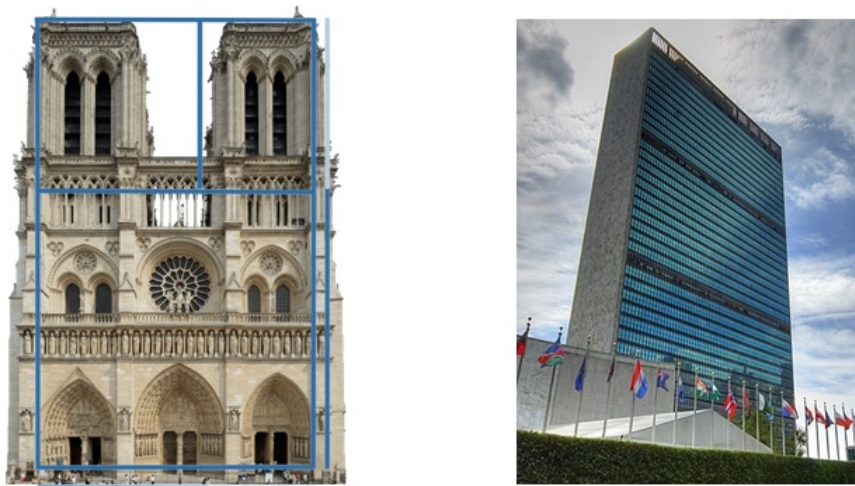
Fonte: PRADO (2012, p.33).

A geometria mais relacionada ao número de ouro na antiguidade é o retângulo dourado, em referência ao Parthenon de Atenas (Figura 1.4) construído por Fídias. O retângulo áureo representa a perfeição geométrica, a divina proporção matemática da beleza, sendo relacionado a diversas arquiteturas da antiguidade e do mundo contemporâneo.

A Catedral de Notre Dame na França, construída entre 1163-1345, tem relação com a proporção áurea em sua geometria especial nas proporções de sua fachada e nas duas torres (Figura 2.14), tendo como base de projeto o retângulo áureo. De mesmo modo, podem-se perceber as perspectivas e proporção áurea projetos arquitetônicos mais

modernos e atuais com os três retângulos áureos horizontais no edifício-sede da ONU - Organização das Nações Unidas) (Figura 2.14):

Figura 2.14: Catedral de Notre Dame e Retângulo Áureo e Sede da ONU (NY)



Fonte: png.wing, adaptações do autor e <https://bitly.com/HNKiLU>.

Outras grandes obras arquitetônicas possuem suas dimensões definidas com base na Proporção Áurea, como o Taj Mahal construído em 1632 na Índia, o Arco do Triunfo em Paris, a fachada da Universidade de Salamanca, dentre outros remetem ao retângulo áureo.

A espiral logarítmica, também, inspirou construções com a forma espiral. De acordo com Lívio em [18] a Spira Mirabilis (espiral milagrosa) de Jacques Bernoulli estava associada a razão áurea, cuja curva representa o vigor e a constância. O autor cita, também, o livro *Curvas da Vida* (1914) de Theodore Andrea Cook que estudou sobre as espirais na natureza e na arte, analisando-a nas escadas (Figura 2.15).

Figura 2.15: Escada em espiral logarítmica



Fonte: Banco de imagens Canva – Escada do museu do Vaticano.

Prado em [24] enfatiza que a espiral milagrosa de Bernoulli mantinha a sua forma quando submetida às mudanças de escala, cuja propriedade denomina-se auto similaridade. Ou seja, após haver uma mudança, uma transformação de um corpo ou objeto a

sua forma permanece a mesma. Isto também é chamado de fractal. As escadas espirais logarítmicas se abrem em um extremo, se fechando em outro, diferente das escadas em espiral helicoidal que mantenha uma constância em distâncias e seguem o padrão da espiral de Arquimedes.

De acordo com Queiroz em [27], a principal característica na arquitetura era criar espaços proporcionais, de modo que o observador possa compreender a lei que o organiza de qualquer ângulo visual. Desde a antiguidade nas esculturas e arquiteturas buscava-se a harmonia nas obras, mesmo sem ter consciência geométrica representavam a beleza nas formas de suas proporções.

Ressalta-se que, embora, a proporção áurea seja comprovadamente utilizada em obras, e atualmente, no design e estética, na antiguidade não se comprova que as medidas tinham relação consciente com o número de ouro. Para Markowsky em [19] as associações da proporção áurea com a construção das pirâmides no Egito e do Parthenon são equivocadas, mostrando que os egípcios apenas mantiveram uma uniformidade entre as medidas dos lados e altura, assim como as proporções de 4:9 entre os lados do retângulo no Parthenon.

Falbo em [12] utiliza um exemplo dado por Markowsky em [19], no encaixe do retângulo áureo na pintura de São Jerônimo, não conseguiu o encaixe perfeito posto que a razão áurea não é determinante nas proporções das obras de arte. Porém, produz medidas muito mais harmoniosas, bonitas e agradáveis.

2.2.1 Na Arte

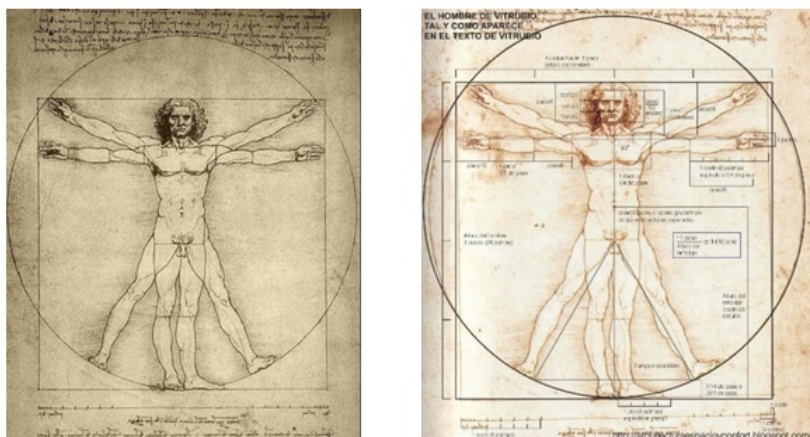
O universo da arte, também, encontra-se as propriedades da proporção áurea aplicadas às obras de artes clássicas e contemporâneas. Tomando como base o livro “Divina Proporção” (1509) de Luca Pacioli e Leonardo da Vinci que é dedicado aos estudiosos da filosofia, arquitetura, artes, música e das disciplinas matemáticas, nele se ressalta que a proporção divina era o segredo das formas harmônicas, conforme versa Lívio em [18] e Prado em [24].

De acordo com Lívio em [18], na segunda parte do livro, Pacioli trata sobre as proporções na arquitetura e nas dimensões do corpo humano, inspirado pelo trabalho do arquiteto Marcus Vitruvius Pollio que descreve “no corpo humano, o ponto central no umbigo” e a circunferência e retângulo que o corpo produz com os braços esticados.

A partir desse conceito Leonardo da Vinci desenhou o “Homem Vitruviano” (Figura 2.23), podendo visualizar na figura os contornos circulares e o quadrado, assim como as distâncias com os braços erguidos. Segundo Prado em [24] outros pintores e arquitetos representaram as proporções e simetria do corpo humano, como também a projeção de grandes obras através do Tratado de Vitruvius, como recurso geométrico de representação

arquitetônica e artística. Por exemplo, Mariano Di Jacopo Detto, Francesco di Giorgio Martini, Cesariano Di Lorenzo e Albrecht Dürer que não ressaltou a beleza em si, mas as características de cada corpo (Figura 2.16).

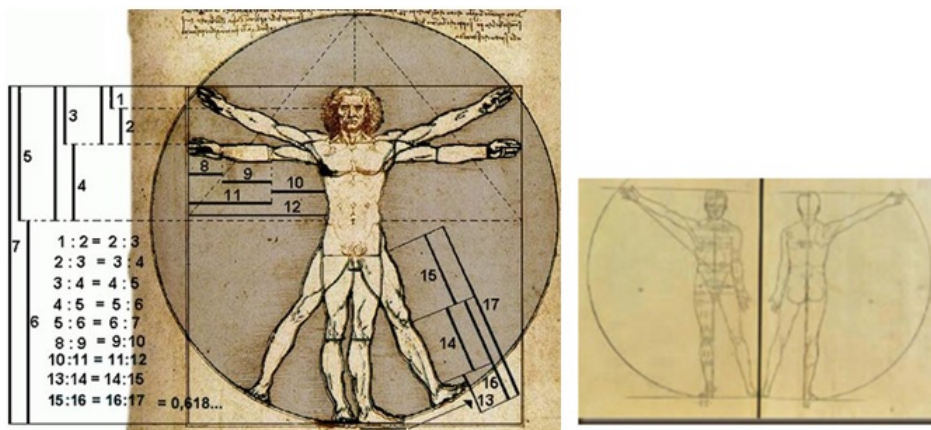
Figura 2.16: Homem Vitruviano e Contorno de Vitruvius



Fonte: pngwin.

As proporções e simetrias com base na proporção áurea aplicadas a percepção e concepção de beleza humana, foram dimensionadas na Figura 2.17:

Figura 2.17: Proporcionalidades do Homem Vitruviano e Proporções do corpo humano de Dürer



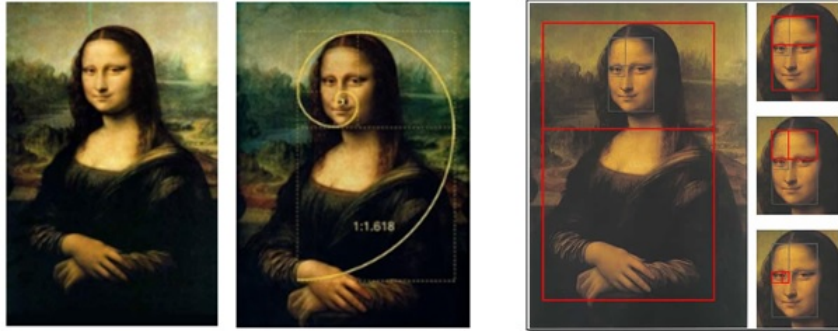
Fonte: <https://bityli.com/QDoXM6> e PRADO (2012, p.219).

A aplicação das propriedades da proporção áurea, também, foi identificada nas pinturas renascentista, como é o caso da famosa Monalisa de Leonardo da Vinci e dos quadros de Pieter Cornelis Mondrian (1872-1944) que com base na proporção áurea encontrou na matemática a harmonia e a representação da beleza.

Na pintura de Monalisa, a proporção áurea está entre a cabeça e o tronco, como também na composição do rosto (Figura 2.18). Ao construir o retângulo na proporção do

rosto, encontra-se a proporção áurea do retângulo dourado (Figura 2.18), assim como na linha dos olhos e nas dimensões do quadro.

Figura 2.18: Monalisa e Proporção áurea e Monalisa e retângulo áureo



Fonte: PRADO (2012, p.234-235) e (<https://bityli.com/an0Zuc>).

De acordo com Queiroz em [27], Piet Mondrian utilizava nas suas composições o número de ouro, chegando ao retângulo áureo que foi referência da maioria de suas obras. Na busca de harmonia e beleza, suas últimas composições eram geometricamente perfeitas, como as composições: Composition With Grey, Red and blue e Composition with Red, Blue and Yellow (Figura 2.19).

Figura 2.19: Retângulo Áureo em Mondrian



Fonte: (<https://citaliarestauro.com/arte-e-matematica>).

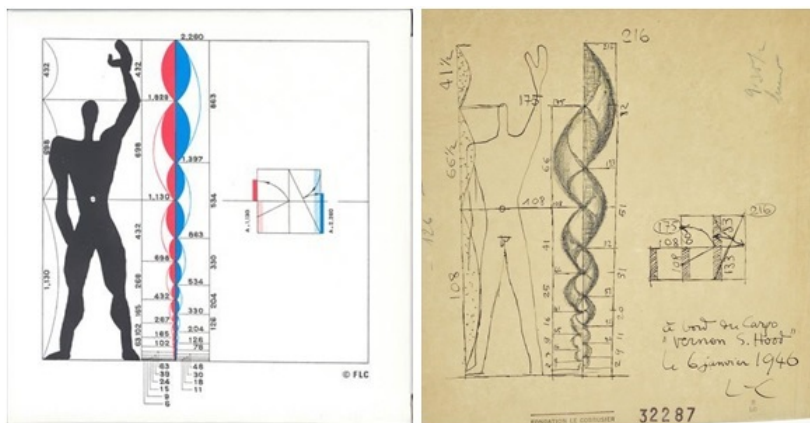
Segundo Lívio em [18] quando Montrian assumiu o estilo geométrico “neoplasticismo”, parte de sua arte caracterizou-se por composições que envolvem apenas linhas verticais e horizontais, retângulos e quadrados, usando apenas cores primárias. Porém, o que se especula sobre a aplicação das propriedades da proporção áurea nas suas obras não foi afirmada pelo artista, mas reforçada pelos contemporâneos franceses pela forte influência do retângulo áureo.

Lívio em [18], por outro lado, também discorre sobre um dos defensores da proporção áurea na arte e na arquitetura, o arquiteto Charles-Édouard Jeanneret (1887-1965), mais

conhecido como Le Corbusier, que burlou o misticismo da Secção áurea e agregou os sistemas proporcionais de Juan Gris aos seus estudos sobre formas e estruturas básicas.

O “Modulador” (Figura 2.20) é sistema proporcional cuja médias harmônicas para escala humana poderia ser aplicável a arquitetura e a mecânica.

Figura 2.20: Le Modulor



Fonte: <http://www.fondationlecorbusier.fr/>

Para o arquiteto a escala de medida unificada baseada no corpo humano poderia fornecer inúmeras combinações para aplicações com expressões matemáticas e geométricas, sobretudo, harmoniosas.

2.3 Número de Ouro e sua relação com a Música

A Música é outra ramificação que se interliga com o número de ouro, uma vez que os estudos matemáticos e de geometria aplicam-se a essa área.

Partindo da premissa da incomensurabilidade do número Phi visto que sua razão não pode ser expressa por um número racional (razão entre dois números inteiros), a música constitui-se de uma progressão harmônica que seguem a proporção de números inteiros simples consecutivos (1:2, 2:3, 3:4 etc.), conforme versa Prado em [24].

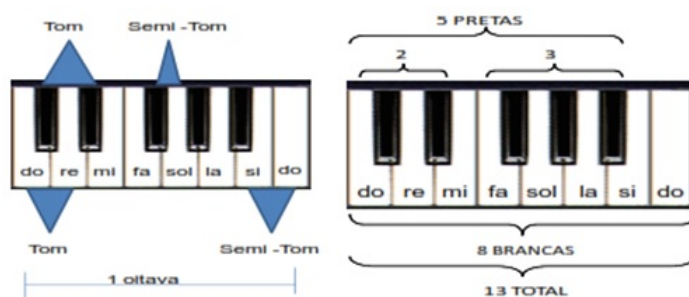
De acordo com Lívio em [18], a progressão harmônica nas escalas de nota musical faz parte dos estudos de Pitágoras, ao observar que os intervalos musicais e o tom das notas correspondiam aos comprimentos relativos das cordas que vibravam.

“Quando duas notas musicais arbitrárias são tocadas juntas, o som resultante costuma ser áspero (dissonante) ao ouvido. Apenas algumas combinações produzem sons agradáveis. Pitágoras descobriu que essas consonâncias raras são obtidas quando as notas são produzidas por cordas similares, cujos comprimentos estão em proporções dadas pelos primeiros números inteiros (LÍVIO, 2006, p.41 - 42).

A música e a harmonia tinham relação que poderia ser descrita matematicamente. Verificando o uso da proporção áurea e a sequência de Fibonacci na música, pode-se observar sua aplicação nas composições e instrumentos musicais.

No desenvolvimento da música é necessário se adequar a uma escala musical, que é um conjunto de notas musicais reunidas em ordem crescente e decrescente que produzem parte de uma obra musical, como afirma Prado em [24]. O autor descreve que a distância entre duas notas separadas por uma única nota é chamada de Tom e a distância entre duas notas vizinhas é chamada de Semitom, exemplificando através das teclas de um piano (Figura 2.21) que é o instrumento mais associado aos números de Fibonacci:

Figura 2.21: Teclado preto e branco do piano



Fonte: PRADO (2012, p.88).

Desse modo, existe uma relação matemática em que a frequência de notas de um mesmo intervalo será sempre igual, ou seja, as proporções entre a frequência de duas notas (distantes) de um semitom será sempre a mesma numa escala temperada. Por conseguinte, estabelecendo uma relação das frequências musicais com os números de Fibonacci e a razão áurea, discorre o autor:

“a escala é compreendida por 8 notas, sendo que a 1^a. nota é chamada raiz e as notas fundamentais para todos os acordes são as 3^a. e 5^a. notas que são definidas a partir de 2 tons da raiz. Numa escala maior, a 5^a. nota é chamada de “dominante”, sendo também a 8^a. nota a partir da raiz, de um total de 13 notas, ou seja, $8/13 = 0,6153$, aproximadamente igual à ϕ (phi), mostrando que as notas musicais têm uma forte relação com a razão áurea” (PRADO, 2012, p.88-89).

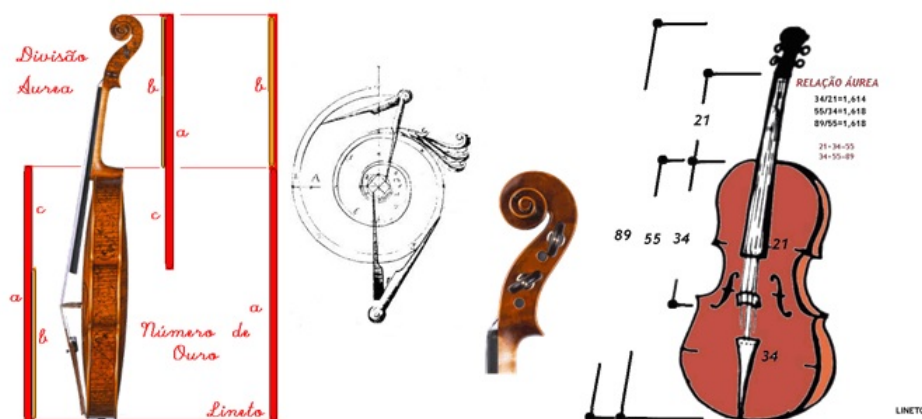
O intervalo oitavo a que o autor se refere é um intervalo entre dois tons e é obtida dividindo-se uma corda em duas partes iguais, sendo posicionada em 2 notas pretas, 3 notas pretas, 5 notas pretas totais, 8 notas brancas e 13 notas totais. Em linhas menores, os números 2, 3, 5, 8 e 13 seguem os termos da sequência de Fibonacci. A divisão da música em períodos de tempo está relacionada com as razões de Fibonacci.

Em relação as composições, diversos estudiosos relacionam a proporção áurea nas composições de músicas clássicas como as Sonatas de Mozart, mas Lívio em [18] contesta

com base nos estudos do matemático John F. Putz que as composições e sonatas de Mozart não refletem a Proporção áurea. Porém, outros compositores usaram a Razão áurea como Claude Debussy, Béla Bartók, Eric Satir e, também, nos Cantos Gregorianos.

No que se refere aos instrumentos musicais, a concepção de violinos (Figura 2.22) está associada a Proporção Áurea.

Figura 2.22: Dimensões do Violino e a proporção áurea



Fonte: (<https://bityli.com/k09E12>).

Afirma Lívio em [18], que na caixa de som do violino que contém doze ou mais arcos de curvatura (que fazem as curvas do violino) de cada lado, o arco plano na base quase sempre é centrado no ponto da Seção Áurea, a partir da linha do centro. Nesse contexto, Antonio Stradivari (1644-1737) é o mais famoso projetor e construtor de violinos, o Stradivarius, que possui estrutura e posições determinadas pela Proporção áurea, proporcionando um equilíbrio estético.

2.4 Número de Ouro e sua relação com o Cosmo

Muitos filósofos especularam sobre mundo à sua volta, debatendo sobre as argumentações e os princípios gerais da ciência e o que encontramos no universo.

Na cosmologia, existe uma ordem que pode ser expressa em termos matemáticos, e foi estudada por Pitágoras e pelos pitagóricos que estabeleceram uma relação entre a matemática e o cosmo. Em Platão esse conhecimento está alinhado à Geometria plana e sólida com os cinco sólidos platônicos, inspirado nos cinco poliedros de Pitágoras. A esfera, um dos geométricos sólidos, representava para Pitágoras a mais perfeita de todas as formas, sendo a origem de todas as coisas, inclusive dos demais poliedros (CONTE, 2005).

Nesse contexto, Klug (2002) em [13] discorre que Pitágoras cunhou o termo cosmo e o associou aos números:

“A harmonia está ligada ao número (...) O Um, que representa Deus, a origem de todos os números impõem um limite ao material primordial ilimitado do mundo, o caso, convertendo o ilimitado em números. A partir do momento em que o ilimitado recebe limites, surge a ordem, o cosmo. Essa ordem entrelaça o mundo, portanto, Cosmo significa, também, definição, perfeição, beleza”.

A aplicação matemática ao conceito de ordem estabelece-se com suas propriedades aritméticas, geométricas e harmoniosa, sendo o Um a divindade, o todo. Para Pitágoras, o universo possuía características associadas aos números, tendo os elementos do cosmo um movimento regular e sujeito a ordem específica, como versa Lívio em [18]. A esse movimento dos elementos do cosmo se deu o nome de “harmonia das esferas” que foi estudada e ampliada pelo astrônomo Johannes Kepler.

Kepler desenvolveu as três leis do movimento planetário dando origem ao livro *Mistério Cósmico* (*Mysterium Cosmographicum*, 1597), descobrindo que o planeta Marte, gira realizando o movimento de elipse e não circular como cogitou Tycho Brahe. Na busca em obter a órbita de Marte através de figura geométrica, Kepler usou a geometria relacionada a Razão Áurea, segundo Lívio em [18].

A relação entre a sequência Fibonacci e a Razão Áurea foi uma das descobertas de Kepler ao observar e estudar a forma de um floco de neve de seis pontas. O astrônomo acreditava que a Razão Áurea serviu como um instrumento fundamental de Deus na criação do universo. Conforme Lívio em [18], discorre que essa concepção da natureza matemática é chamada de “Visão Platônica” e dentre seus defensores temos o lógico Kurt Gödel (1906-1978) que ao discorrer sobre a eficácia da matemática em explicar a natureza expõe uma visão platônica ampliada, considerando que as leis físicas são expressas em equações matemáticas, a estrutura do universo é fractal, galáxias se organizam em espirais logarítmicas, e assim por diante, porque a matemática é a “linguagem do Universo”.

2.4.1 Galáxias

As galáxias são aglomeradas de astros, estrelas e gás, com estruturas em Espirais, Elípticas, Lenticulares e Irregulares. Abaixo, seguem algumas exemplos de galáxias espirais (Figura 2.23 e Figura 2.24):

Figura 2.23: Galáxia Espiral NGC 6217 e Galáxia espiral barrada M83



Fonte: Fascínio do Universo (2010).

Figura 2.24: Galáxia espiral Via Láctea e Galáxia espiral Andrômeda



Fonte: Fascínio do Universo (2010).

As galáxias de estrutura espiral exibem esse formato devido ao disco galáctico (gás, pó e estrelas) inteiro que gira em torno do seu centro.

A espiral aparece em inúmeros elementos da natureza, a partir desse entendimento Lívio conclui que a natureza ama espirais logarítmicas. De girassóis, conchas do mar e redemoinhos a furacões e galáxias espirais gigantes, parece que a natureza escolheu esta forma magnífica como seu "ornamento" favorito.

Capítulo 3

NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: POTENCIALIDADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS

As potencialidades de utilização do Número de Ouro e da Sequência de Fibonacci na Educação Básica são relevantes, seja na forma direta ou indireta, e aqui elencamos algumas sugestões de estratégias que podem ser utilizadas pelo professor de Matemática em suas aulas, trazendo a aprendizagem significativa, com maior satisfação e envolvimento dos alunos na abordagem dessas habilidades.

3.1 Uso de Software para a representação da Sequência de Fibonacci

Nessa proposta de sequência didática, iremos criar um algoritmo utilizando o software VisuAlg que nos forneça os termos da Sequência de Fibonacci. Assim, possibilitará ao aluno compreender linguagem de programação, estrutura e raciocínio lógicos, assim como os conteúdos matemáticos pertinentes à Sequência de Fibonacci. Na página seguinte, seguem a Competência Específica e Habilidade referente a esta sequência didática:

Figura 3.1

Competência Específica	Habilidade
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados e problemas.	(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Sequência Didática

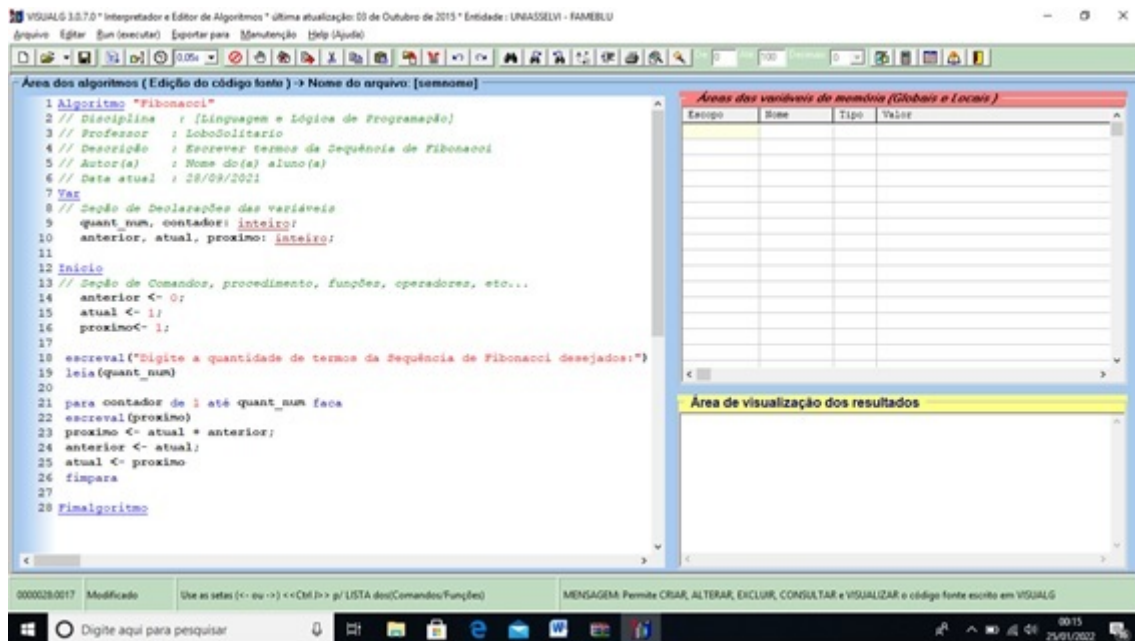
1. Apresentação do conceito: Para ambientar os alunos, o professor convidará os alunos a irem juntos ao Laboratório de Informática, a fim de apresentar o conteúdo da aula, será utilizado recurso digital (slides) e exibido um vídeo curto da plataforma youtube sobre o tema (Sequência de Fibonacci). Durante a apresentação do vídeo, o professor poderá fazer pausas, formular perguntas e propor reflexões a respeito das situações e imagens apresentadas.

2. Apresentação do Software: O professor inicialmente realizará perguntas sobre o pré-conhecimento dos alunos sobre softwares matemáticos educativos e tempo de relacionamento dos mesmos com algum software. O professor irá apresentar o software VisuAlg, abrindo a sua interface juntamente com os alunos, apresentando seus comandos básicos e mostrará a implementação de alguns algoritmos simples no seu ambiente de desenvolvimento.

3. Apresentação de uma situação problema: (Proposta de elaboração de um algoritmo simples que escreva uma quantidade desejada de termos da Sequência de Fibonacci, usando o software VisuAlg). Identificar que a base para escrever o algoritmo será a condição de que cada termo da sequência a partir do terceiro é igual à soma de seus dois termos anteriores e a partir daí fazer uma generalização a utilização de condicionais corretamente na interface do próprio software. O professor irá criar um algoritmo que escreva qualquer termo de uma Progressão Aritmética e em seguida, proporá a elaboração de um software que escreva uma quantidade desejada de termos da Sequência de Fibonacci, de preferência com a colaboração ativa do professor(a) da área de Computação, trabalhando a interdisciplinaridade.

Exemplo de um algoritmo à página seguinte(Figura 3.2):

Figura 3.2: Algoritmo da Sequência de Fibonacci



Fonte:Elaboração do autor com o software VisuAlg.

Procedimento: Primeiramente, disponibilizar um computador desktop com o software VisuAlg instalado, para que os alunos acompanhem de maneira proativa a atividade.

1º Passo: Escrever o formato básico do pseudocódigo (título do algoritmo, a disciplina, o nome do professor, nome do autor aluno e a data de realização das atividades);

2º Passo: Escrever o nome das variáveis (quant_num, contador, anterior, atual e próximo) e sua declaração, definindo que são inteiras, ou seja, sem casas decimais;

3º Passo: Atribuir valores às variáveis (anterior, atual e próximo);

4º Passo: Escrever o que o usuário deseja que apareça na tela de execução do programa e que variável(is) seja(m) lida(s);

5º Passo: Especificar o valor máximo que pode ser atribuído a variável contador

6º Passo: Escrever a interdependência entre as variáveis, usando o comando de repetição para e definir o valor do contador;

7º Passo: Indicar o fim de sequência de comandos a serem repetidos;

8º Passo: Escrever o fim do algoritmo;

9º Passo: Compilar (Rodar) o algoritmo;

10º Passo: Salvar o arquivo e copiar os comandos para o Microsoft Word ou Adobe Acrobat.

11º Passo: Realizar uma pesquisa qualitativa diagnóstica de envolvimento, satisfação e resultados acerca da aula.

12º Passo: Propor uma discussão com os alunos e a elaboração de novos algoritmos que serão digitalizados e enviados para o Professor como um algoritmo para a Sequência de Lucas (1,3,4,7,...) (Sequência que teve o nome atribuído devido ao grande matemático Edouard Lucas que a construiu por processos de recorrência).

Um algoritmo esperado na página seguinte (Figura 3.5)

Figura 3.3: Algoritmo da Sequência de Lucas

The image shows the VisuAlg 3.0.7.0 interface. The main window displays the code for the Lucas sequence algorithm. The code includes comments in Portuguese, variable declarations, and a loop that calculates the sequence terms. A separate window titled 'Áreas das variáveis de memória (Globais e Locais)' shows the state of global variables: QUANT_NUM (10), CONTADOR (1), ANTERIOR (1), ATUAL (123), and PROXIMO (199). A console window shows the user input '10' and the program output of the sequence terms: 10, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123. The program ends with the message '>>> Fim da execução do programa !'.

```
1 Algoritmo "Lucas"
2 // Disciplina : [Linguagem e Lógica de Programação]
3 // Professor : LoboSolitario
4 // Descrição : Escrever termos da Sequência de Lucas
5 // Autor(a) : Nome do(a) aluno(a)
6 // Data atual : 28/09/2021
7 Var
8 // Seção de Declarações das variáveis
9 quant_num, contador: inteiro;
10 anterior, atual, proximo: inteiro;
11
12 Inicio
13 // Seção de Comandos, procedimento, funções, operadores, etc...
14 anterior <- 2;
15 atual <- 1;
16 proximo <- 3;
17
18 escreval("Digite a quantidade de termos da Sequência de Lucas desejado:");
19 leia(quant_num)
20
21 para contador de 1 até quant_num faça
22 escreval(proximo)
23 proximo <- atual + anterior;
24 anterior <- atual;
25 atual <- proximo
26 fimpara
27
28 Fimalgoritmo
```

Nome	Valor
GLOBAL QUANT_NUM	10
GLOBAL CONTADOR	1
GLOBAL ANTERIOR	1
GLOBAL ATUAL	123
GLOBAL PROXIMO	199

Console simulando e modo texto do MS-DOS

Digite a quantidade de termos da Sequência de Lucas desejado:

10

3

4

7

11

18

29

47

76

123

>>> Fim da execução do programa !

Fonte:Elaboração do autor com o software VisuAlg.

3.2 Construindo Fractais e sua relação com as Progressões

Nessa proposta de sequência didática, iremos construir o fractal Cartão de Sierpinsky por meio de dobradura e corte, possibilitando ao aluno identificar e perceber a presença das Progressões Geométricas e das características dos fractais em fenômenos naturais do mundo real de um modo mais simplificado e harmonioso. Na página seguinte, seguem a Competência Específica e Habilidade referente a esta sequência didática:

Figura 3.4

Competência Específica	Habilidade
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformação isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Sequência Didática

1. Apresentação do conceito: Para ambientar os alunos e apresentar o conteúdo da aula, será utilizado recurso digital (slides) e exibido um vídeo curto da plataforma youtube sobre o tema (Fractais). Durante a apresentação do vídeo, o professor poderá fazer pausas, formular perguntas e propor reflexões a respeito das situações e imagens apresentadas.

2. Apresentação do Fractal Triângulo de Sierpinsky: O professor irá apresentar o triângulo de Sierpinsky e promover uma discussão proativa com os alunos na busca de uma generalização acerca da quantidade de triângulos que serão gerados partir de cada nível/interação e sua relação com as progressões geométricas (nesse caso), bem como o cálculo da área e do perímetro do triângulo, compreensão do cálculo da dimensão de um fractal e apresentação das respostas em uma tabela. 3. Apresentação de uma situação problema (Proposta de construção do fractal Cartão de Sierpinsky): Propor aos alunos que construam o fractal cartão por meio de dobraduras e cortes, de preferência com a colaboração ativa do professor(a) de Artes, trabalhando a interdisciplinaridade.

Procedimento:

Primeiramente, distribua uma folha de papel A4 para cada aluno e solicitar que eles acompanhem o processo de iteração. 1° Passo: Dobre a folha ao meio na direção da sua largura;

2° Passo: Com a folha dobrada, marque o ponto médio na parte dobrada;

3° Passo: Dobre o papel entre os cortes sobre a face superior e inferior para criar duas marcas e retorne;

4° Passo: Abra a folha e dobre o corte do meio para dentro da folha;

5° Passo: Repita o processo descrito nos passos anteriores quantas vezes forem possíveis;

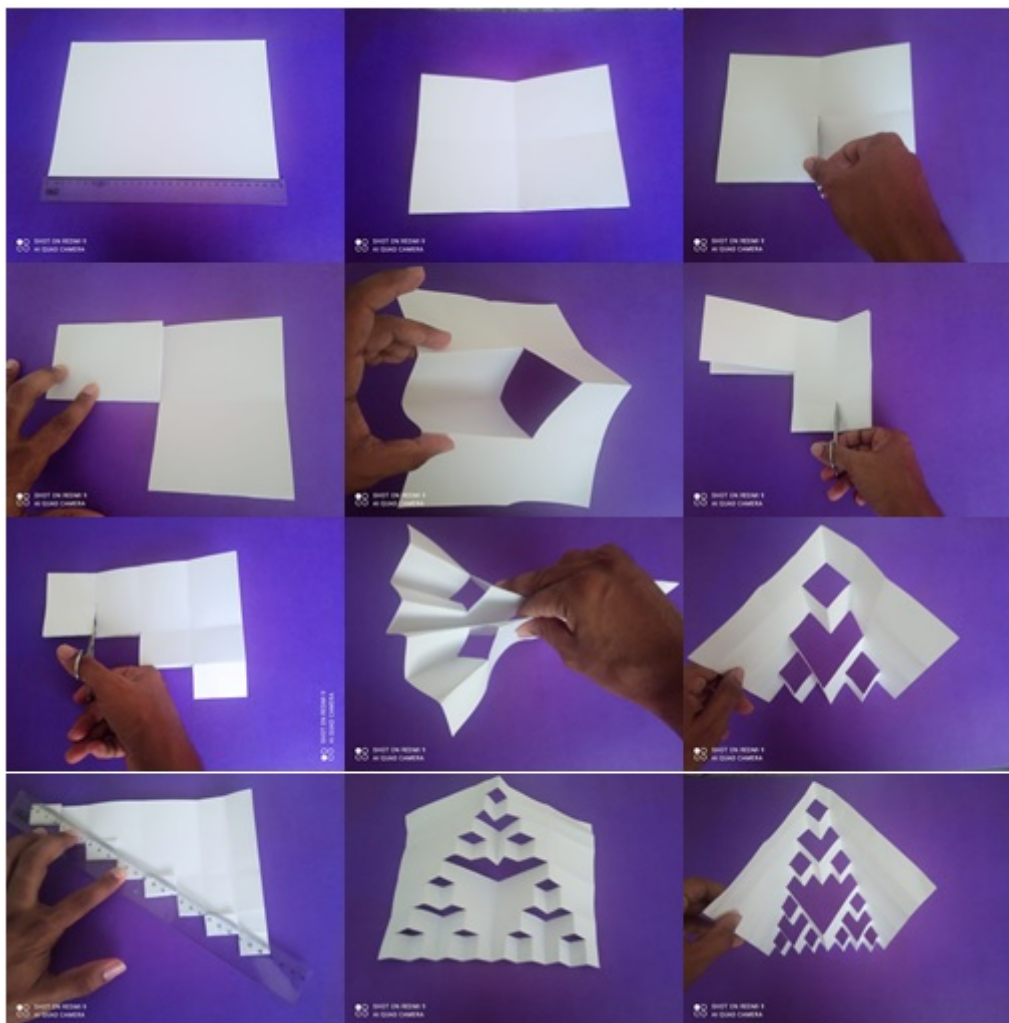
6° Passo: Ao final do processo, coloque atrás do fractal outro papel de cor diferente, permitindo evidenciar a beleza do mesmo e de suas características;

7º Passo: Fazer comparações com outros fractais apresentados na aula, analisando semelhanças e diferenças;

8º Passo: Entregar um questionário aos alunos e propor a discussão em sala de aula;

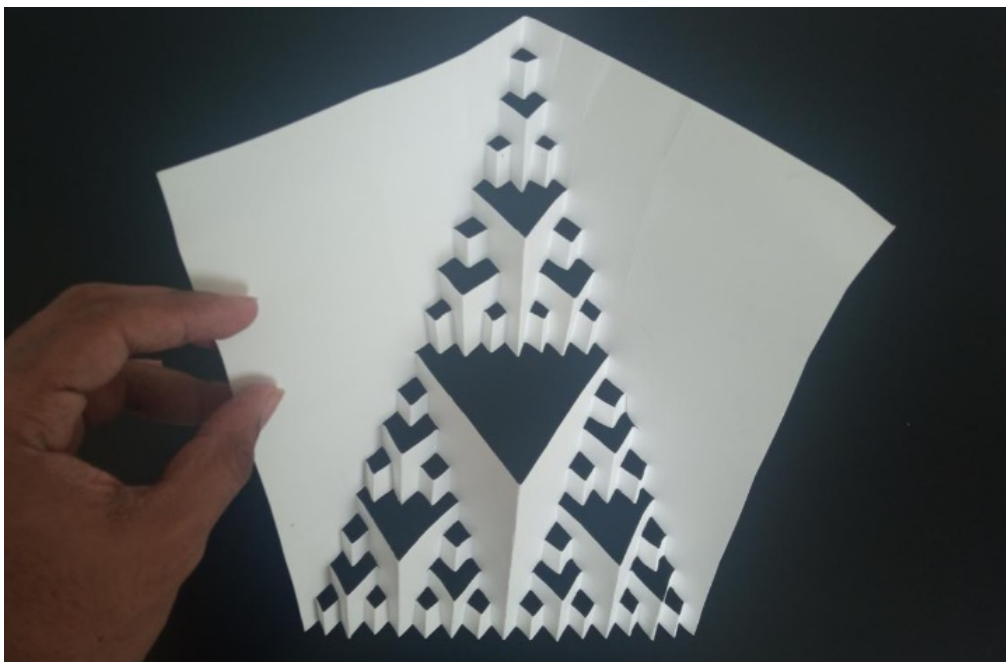
9º Passo: Realizar uma pesquisa qualitativa diagnóstica de envolvimento, satisfação e resultados acerca da aula.

Figura 3.5: Mosaico de fotos: construindo o fractal Cartão de Sierpinsky



Fonte:Autor.

Figura 3.6: Mostra o Cartão de Sierpinsky em seu 4° nível/iteração



Fonte:Autor.

QUESTIONÁRIO

1. Reflita e responda:

a) Cite pelo menos 2(duas) características dos fractais?

Autossimilaridade,
Complexidade infinita.

b) Qual o nome de fractal que você construiu?

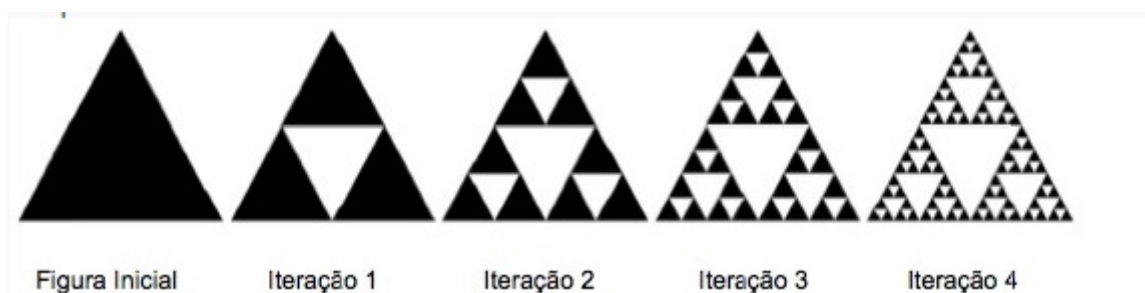
Cartão de Sierpinsky

c) Cite outros tipos de fractais.

Resposta pessoal

2. Sobre o fractal Triângulo de Sierpinsky na figura abaixo, responda:

Figura 3.7: Fractal Triângulo de Sierpinsky



Fonte:Google

Qual a quantidade de triângulos pretos e de triângulos brancos do Triângulo de Sierpinky em cada nível?

3. Qual é a medida do lado, da área e do perímetro dos triângulos pretos em cada nível?

4. Você consegue identificar algum padrão nesses resultados? Qual?

Ao final do questionário, o Professor deverá acompanhar os alunos e estimular a participação deles para que façam uma generalização da fórmula do lado, da área, área total e do perímetro dos triângulos pretos em cada nível/iteração do fractal, organizando os dados obtidos em um quadro, como na Figura 3.8, na página seguinte:

Figura 3.8: Tabela

Nível/iteração	0	1	2	...	n
Nº de Triângulos Pretos	1	3^1	3^2	...	3^n
Área de cada Triângulo Preto (S)	S	$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot S$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S$...	$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot S$
Área Total (A)	A	$\left(\frac{3}{4}\right) \cdot A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A$...	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$
Lado (l)	l	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{4}$...	$\frac{l}{2^n}$
Perímetro (P)	3l	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot l$	$9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot l$...	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot l$

Fonte:Autor.

3.3 O Número de Ouro no Estudo de Limites de Sequências Específicas

O Número de Ouro no Estudo de Limites de Sequências Específicas

Nessa proposta, iremos deduzir algebricamente que o número de ouro é igual ao limite do quociente de termos consecutivos de certas sequências específicas, permitindo ao aluno conhecer que essa relação depende da fórmula de recorrência dessas sequências. Abaixo, seguem a Competência Específica e Habilidade referente a esta sequência didática:

Figura 3.9

Competência Específica	Habilidade
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

A sequência Fibonacci é uma recorrência linear de ordem 2, a qual é definida por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{para todo } n \geq 0, \quad (3.1)$$

sendo $F_0 = F_1 = 1$. Assim, de acordo com Lima et al. em [15], a equação de recorrência (3.1) está associada a equação característica $x^2 - x - 1 = 0$, cujas as raízes são:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Logo, a recorrência tem a sua fórmula geral, dada por:

$$F_n = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (3.2)$$

Agora, precisamos encontrar valores de a e b que satisfaçam a definição da sequência de Fibonacci $F_0 = F_1 = 1$. Assim, fazendo $n = 0$ e $n = 1$ em (3.2), teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b & = 1 \\ a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) & = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos,

$$a = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} \text{ e } b = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}.$$

Portanto, a fórmula geral do termo da sequência de Fibonacci é dada por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad \forall n \geq 0. \quad (3.3)$$

Fazer os alunos perceberem que apesar de "estranho", é interessante saber que o resultado de F_n é sempre um número inteiro não-negativo e que são gerados por essa fórmula, apesar da presença do radical no denominador.

De posse dessa fórmula (3.3), iremos calcular o limite da expressão abaixo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Primeiramente vamos desenvolver o quociente $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, assim

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]}.$$

Reescrevendo a equação acima, temos que:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}}{1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}}. \quad (3.4)$$

Usaremos os seguintes resultados que podem ser encontrados de acordo com Muniz Neto em [21].

- (i) Como $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$.
- (ii) Como $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| > 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n = +\infty$. Consequentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} = 0$.

Finalmente, usando os resultados acima e propriedades do limite de Muniz Neto em [21], obtemos de (3.4) que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}}{1 - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi$, como havíamos comentado no Capítulo 1, Seção 4, Subseção 2 (página 12).

Agora, fazer os alunos perceberem que o resultado encontrado ϕ é o mesmo para qualquer sequência (R_n) que obedeça a seguinte fórmula de recorrência:

$$R_{n+2} = R_{n+1} + R_n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Assim, o limite da sequência de Lucas (a qual foi assim denominada em homenagem ao matemático e professor François Édouard Anatole Lucas que nasceu na França no século XIX e cujos termos são 1, 3, 4, 7, 11, 18, ..., também é ϕ , apesar da diferença notória entre os termos dessa sequência e os termos da sequência de Fibonacci.

Frisamos que o professor deve utilizar uma abordagem adequada desses conteúdos e adaptada à realidade da Educação Básica.

3.4 O Número de Ouro e sua relação com algumas Frações e Progressões

Aqui temos uma curiosidade, onde os termos da Sequência de Fibonacci aparecem em determinadas frações e que podem ser relacionadas a uma função polinomial do 2 grau. No entanto, essa curiosidade pode ser trazida para os alunos para promover uma análise e discussão pois conteúdos matemáticos relevantes como Progressão Geométrica e Somatório. Abaixo, seguem a Competência Específica e Habilidade referente a esta curiosidade.

Figura 3.10

Competência Específica	Habilidade
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Questão extraída do Livro do Maurício Zahn em [28].

Observe as seguintes frações:

$$\frac{100}{89} = 1,123550561797752808987640449438202247191011235955056179775280898876404494382022471910112\dots$$

$$\frac{10000}{9899} = 1,0102030508132134559046368320032326497626022830588948378624103444792403273057\dots$$

$$\frac{1000000}{998999} = 1,0010020030050080130210340550891442333776109885995881877759637397034431465897363260\dots$$

$$\frac{100000000}{99989999} = 1,00010002000300050008001300210034005500890144023303770610098715972584418167660947\dots$$

⋮

Note que a medida que as frações são escritas da forma que consideramos, os algarismos das aproximações decimais vão gerando os termos da sequência de Fibonacci, aumentando em 5 a quantidades desses termos, a cada nova fração.

É possível existir uma função que explique o fato?

Pimeiramente, considere a função $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{(-1+\sqrt{5})}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Observe que f nos valores de x tal que $|x(1+x)| < 1$ pode ser escrita por:

$$f(x) = \frac{1}{1-x(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} [x(1+x)]^n \quad (3.5)$$

Essa fórmula é equivalente a soma dos termos de uma Progressão Geométrica (P.G.) infinita de 1º termo igual a 1 e razão $x(1+x)$, com $|x(1+x)| < 1$, onde escrevemos os seu termos abaixo:

$$(1, x(1+x), (x(1+x))^2, (x(1+x))^3, (x(1+x))^4, \dots, (x(1+x))^n, \dots).$$

Defina S o somatório em (3.5), desenvolvendo, temos que:

$$\begin{aligned} S &= 1 + x(1+x) + (x(1+x))^2 + (x(1+x))^3 + (x(1+x))^4 + \dots \\ &= 1 + x + x^2 + x^2(1+2x+x^2) + x^3(1+3x+3x^2+x^3) + x^4(1+4x+6x^2+4x^3+x^4) + \dots \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 + x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^6 + x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 4x^7 + x^8 + \dots \\ &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots \end{aligned}$$

Note que os coeficientes dos monômios são termos consecutivos da Sequência de Fibonacci.

$$S = F_1 + F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + F_5x^4 + F_6x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Assim, para $x = 0,1 = \frac{1}{10}$, temos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}-\frac{1}{100}} = \frac{100}{89}$$

Pela forma da série infinita determinada em (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1 + 0,1 + 2(0,1)^2 + 3(0,1)^3 + 5(0,1)^4 + 8(0,1)^5 + 13(0,1)^6 + \dots \\ &= 1,1235505617977528089876404494382022471910112359550561\dots \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{100}{89} = 1,1235505617977528089876404494382022471910112359550561\dots$$

Para $x = 0,01 = \frac{1}{100}$, temos:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x-x^2)} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}-\frac{1}{10000}} = \frac{10000}{9899}.$$

Também pela forma da série infinita determinada em (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} f(0,01) &= 1 + 0,01 + 2(0,01)^2 + 3(0,01)^3 + 5(0,01)^4 + 8(0,01)^5 + 13(0,01)^6 + \dots \\ &= 1,0102030508132134559046368320032326497626022830\dots \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{10000}{9899} = 1,0102030508132134559046368320032326497626022830\dots$$

Podemos facilmente observar uma igualdade entre os quocientes e os resultados obtidos pelas séries através da função analisada.

$$\frac{10000}{9899} = 1,0102030508132134559046368320032326497626022830\dots$$

Capítulo 4

CONCLUSÃO

O Número de Ouro pode ser estudado em diferentes contextos desde a Antiguidade até a atualidade, a partir dos números e geometrias na Matemática até na Natureza, o que torna seu conteúdo amplo e fascinante, despertando o interesse de diversos estudiosos sobre sua origem e aplicação. Porém, estudar o número de ouro, razão áurea ou proporção áurea também abrange suas complexidades, apesar da harmonia e beleza relacionadas a ele.

Ao se compreender seu conceito é preciso entender a matemática, visto que o conceito algébrico e geométrico do número ϕ (phi) estão intrinsicamente ligados à Sequência de Fibonacci, mas são assuntos pouco ou superficialmente desenvolvidos em sala de aula. Desse modo, sua aplicabilidade no Ensino da Matemática em sala de aula, principalmente no Ensino Básico, tem seus percalços. É preciso compreender desde a construção geométrica aos padrões harmônicos, visto que no nosso cotidiano está repleto de referências onde o Número de Ouro está relacionado.

Ao propor as atividades para Matemática no Ensino Básico com o número de ouro e a sequência Fibonacci, busca-se trabalhar as construções geométrica apresentadas durante todo o texto de forma simplificada, de modo a estimular o aluno a perceber o conteúdo e aplicação na realidade, na sua vivência, ao seu redor.

Ao se apresentar conteúdos sobre Número de Ouro, Sequência de Fibonacci e Fractais, deve-se considerar não somente o contexto, mas a forma de abordagem e o modo de transmissão do conteúdo. Quando se propõe discutir sobre o conteúdo de Fractais apresentado somente através de vídeo, não se assegura que o conteúdo será compreendido pelos alunos, porém quando se propõe a observação e construção passo a passo do modelo Fractal, nota-se que esse estímulo fortalece a construção do conhecimento dos alunos, facilitando e promovendo o aprendizado.

Em outras palavras, seria interessante trabalhar com a presença dos fractais na natureza, pois este conteúdo desperta interesse por parte do aluno, por causa da harmo-

nia e beleza. Na potencialidade, onde foi decidido utilizar dobradura e corte, buscou-se permitir o entendimento do aluno ao observar a determinação dos padrões presentes em cada figura, estimulando assim a criatividade e o protagonismo do aluno, favorecendo o desenvolvimento de novos fractais a partir de figuras preexistentes.

Finalmente, entende-se que a matemática faz parte do nosso cotidiano, mas ainda carrega as dificuldades de ser vista como uma disciplina complexa e de difícil entendimento. Mas ao pensarmos o Ensino da Matemática trazendo assuntos que podemos identificar na natureza, na arte, no corpo humano e nas obras construídas em diversos lugares, como por exemplo, o aproveitamento da relação entre Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci, aproxima-se o conteúdo do aluno, que pode vivenciar e compreender melhor a temática.

Referências Bibliográficas

- [1] AKHTARUZZAMAN, Md; SHAFIE, Amir A. Geometrical substantiation of Phi, the golden ratio and the baroque of nature, architecture, design and engineering. *International Journal of Arts*, v. 1, n. 1, p. 1-22, 2011.
- [2] ÁVILA, G. Euclides, Geometria e Fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 45, p. 1- 5. 2002.
- [3] AZEVEDO, Natália de Carvalho de. O número de ouro e construções geométricas [manuscrito]. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013, 46p.
- [4] Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. 2018.
- [5] BELLINI, Marcelo Manechini. A razão áurea e a sequência de Fibonacci. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Instituto de Matemática e Computação, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos, 2015, 67p.
- [6] BORTOLOSSI, Humberto. O número de ouro em conchas de náutilos. Verdade ou Mentira? Niterói.
- [7] CAFEZEIRO, Isabel et al. Qual é a contribuição do seu trabalho para o o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia? (O mágico e o biscoiteiro). *Avaliação*, Campinas; Sorocaba, SP, v.24, n.1, pp. 234-256, mar, 2019.
- [8] CELUQUE, Leonardo. A Série de Fibonacci: Um Estudo um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências UFBA /UEFS. Salvador: Ufba, 2004. 99p.
- [9] DAMINELI, Augusto; STEINER; João. (Org.) *O Fascínio do universo*. – São Paulo: Odysseus Editora, 2010.
- [10] CONTE, C. B. Pitágoras: Ciência e Magia na Grécia Antiga. São Paulo: Madras, p. 147-155. 2006.

- [11] EUCLIDES. Os Elementos. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. - São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [12] FALBO, Clement. The Golden Ratio-A Contrary Viewpoint, The College Mathematics Journal, Vol. 36, No. 2, (March 2005), pp. 123-13.
- [13] KLUG, S. U. Catedral de Chartres: A geometria sagrada do cosmos. 1.ed. São Paulo: Madras, 2002.
- [14] LAURO, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. Exacta, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005.
- [15] LIMA, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C.. A matemática do ensino médio (Vol. 2). SBM, 1997.
- [16] LIMA, Elon Lages. Análise real. Rio de Janeiro: Impa, 2004.
- [17] MAGALHÃES, Leonardo. "O número PHI" em Só Matemática. Virtuoso Tecnologia da Informação, 1998-2021. Acesso em 21/11/2021.
- [18] LIVIO, M. Razão Aurea: A história de FI, um número surpreendente. Rio de Janeiro, Brasil: Record, 2006.
- [19] MARKOWSKY, G. Misconceptions About The Golden Ratio. College Mathematics Journal, vol. 23, n. 1, pp. 2-19, 1992.
- [20] MORAES, W. A.; COLE, Ariane Daniela. Proporção Áurea: Natureza Estética e Design. IX JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA. 9, São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2013.
- [21] MUNIZ NETO, A. C. Fundamentos de cálculo. SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).
- [22] OLIVEIRA, José Jackson de. Sequências de Fibonacci: Possibilidade de aplicações no ensino básico. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. PROFMAT - Universidade Federal da Bahia – UFBA, Salvador, 2013, 28p.
- [23] PECK, Akkana. The Fibonacci Spiral and the Nautilus. 2007.
- [24] PRADO, Cláudio A. Número Phi, A Ponte Cósmica. -São Paulo: 1ª edição – 2012.
- [25] SANTOS, Gilberto Vieira. Explorando a Matemática do Número Φ , o Número de Ouro. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro: [s.n.], 2013. 71 p.
- [26] SHARP, JOHN. 1997. Spirals and the Golden Section. NEXUS NETWORK JOURNAL – VOL. 4, NO. 1, 2002, pp. 59-82.

Referências Bibliográficas

- [27] QUEIROZ, R. M. Razão áurea: a beleza de uma razão surpreendente. 39 f. — Secretaria do Estado da Educação - SEED, Londrina - PR, 2007.
- [28] ZAHN, Maurício. Frações que Geram a Sequência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, n. 74, p. 06-08, 2011.