



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS DE BLUMENAU
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Samuel Haag

**Novos Caminhos na Matemática do Ensino Médio com a Geometria de
Distâncias**

Blumenau/SC

2022

Samuel Haag

**Novos Caminhos na Matemática do Ensino Médio com a Geometria de
Distâncias**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Felipe Delfini Caetano Fidalgo

Blumenau/SC

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

HAAG, Samuel

Novos Caminhos na Matemática do Ensino Médio com a Geometria de Distâncias / Samuel HAAG ; orientador, Felipe Delfini Caetano Fidalgo, 2022.

71 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós Graduação em Matemática, Blumenau, 2022.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria de Distâncias. 3. Ensino Médio. 4. BNCC. I. Fidalgo, Felipe Delfini Caetano. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática. III. Título.

Samuel Haag

Novos Caminhos na Matemática do Ensino Médio com a Geometria de Distâncias

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) André Vanderlinde da Silva, Dr.(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Emerson Vitor Castelani, Dr.(a)
Universidade Estadual de Maringá

Prof.(a) Carlile Campos Lavor, Dr.(a)
Universidade Estadual de Campinas

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof.(a) Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.(a)
Orientador

Blumenau, 2022.

Dedicado especialmente para minha esposa Ketlyn Lais Haag, a quem espero aproveitar os louros de toda minha vida ao seu lado, obrigado por ser paciente, compreensiva e me ajudar em todos os momentos, te amo. A minha família, por se preocupar e me incentivar em todas as minhas escolhas. Ao meu orientador por compreender os momentos de dificuldade e me orientar mesmo em tempos difíceis ou fora do horário de trabalho. A Escola Feliciano Pires, em nome do diretor Carlos Eduardo Marinho, por receber a pesquisa de braços abertos. Aos professores que lerão este estudo e que, assim como eu, também se preocupam, buscam e se dedicam a melhorar a educação matemática.

“Conta-se que o jovem Tzu-Chang dirigiu-se um dia ao grande Confúcio e perguntou-lhe:

- Quantas vezes, ó esclarecido filósofo, deve um juiz refletir antes de sentenciar?

Respondeu Confúcio:

- Uma vez hoje; dez vezes amanhã.

Assombrou-se o príncipe Tzu-Chang ao ouvir as palavras do sábio. O conceito era obscuro e enigmático.

- Uma vez será suficiente - elucidou com paciência o Mestre - quando o juiz, pelo exame da causa, concluir pelo perdão. Dez vezes, porém, deverá o magistrado pensar, sempre que se sentir inclinado a lavrar sentença condenatória.

E concluiu, com sua incomparável sabedoria:

- Erra, por certo, gravemente, aquele que hesita em perdoar; erra, entretanto, muito mais ainda aos olhos de Deus, aquele que condena sem hesitar.”

(Malba Tahan, 1937)

Resumo

A Geometria de Distâncias é um campo de estudo relativamente recente para matemática e computação, possuindo uma grande área de aplicação. Os conteúdos de matemática do ensino médio são, em sua maioria, tradicionalmente antigos e pouco relacionados com a realidade do aluno. O objetivo deste trabalho consiste em determinar se é possível incluir problemas de Geometria de Distâncias nos estudos do Ensino Médio, como modernização do conteúdo, ensino orientado a resolução de problemas e com grande apelo ao uso de tecnologias como a computação atingindo as habilidades e competências previstas na BNCC. Para a área de pesquisa é importante difundir o campo de estudo para a sociedade e para os alunos é importante conseguir relacionar as aplicações com os conceitos matemáticos para seguirem motivados, ao mesmo tempo, alcançar as habilidades e competências da BNCC. Os resultados demonstraram-se positivos para o caso de estudo na escola Feliciano Pires de Brusque, Santa Catarina/Brasil, indicando a possibilidade dos professores incluírem em suas práticas algumas atividades e conceitos da Geometria de Distâncias, sendo benéfico para ambas as partes envolvidas com a aprendizagem do aluno de acordo com as competências que ele precisa alcançar.

Palavras-chave: Geometria de Distâncias. Ensino Médio. BNCC.

Abstract

Distance Geometry is a relatively recent field of study for mathematics and computing, having a large area of application. High school mathematics content is, for the most part, traditionally old and little related to the student's reality. The objective of this work is to determine whether it is possible to include Distance Geometry Problems in High School studies, such as content modernization, problem-solving oriented teaching and with great appeal to the use of technologies such as computing, reaching the expected skills and competences at BNCC. For the research area, it is important to spread the field of study to society and for students it is important to be able to relate applications with mathematical concepts to remain motivated, at the same time, to achieve the skills and competences of the BNCC. The results demonstrated positive for the case study at the Feliciano Pires school from Brusque, Santa Catarina/Brazil, indicating the possibility for teachers to include in their practices some activities and concepts of Distance Geometry, being beneficial for both parties involved with the student's learning according to the skills he needs to achieve.

Keywords: Distance geometry. High school. BNCC.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de um triângulo ABC com altura relativa ao vértice B	27
Figura 2 – Translação de três pontos no plano Cartesiano	30
Figura 3 – Rotação de três pontos no plano Cartesiano	31
Figura 4 – Reflexão de três pontos no plano Cartesiano	32
Figura 5 – Algumas características simétricas em moléculas	33
Figura 6 – Estrutura da água conhecendo as ligações interatômicas no Geogebra .	34
Figura 7 – 4 Soluções possíveis para a o problema de sincronização dos relógios . .	36
Figura 8 – Resolução gráfica da Trilateração	38
Figura 9 – Região circular de possíveis localizações do ponto C	41
Figura 10 – Realização de três distâncias para três objetos	43
Figura 11 – Mapa de Cybermath com a localização das torres A, B e C	50
Figura 12 – Exemplo de solução gráfica da atividade no Geogebra	50
Figura 13 – Respostas da Questão 6 (ENEM 2015)	55
Figura 14 – Respostas da Questão 7	56

Lista de tabelas

Tabela 1 – Problemas da Geometria de Distâncias e seus Acrônimos	20
Tabela 2 – Registros do Dispositivo (em cm)	49
Tabela 3 – Resultado da Aplicação do Jogo (3.2.4)	52
Tabela 4 – Respostas sobre a aplicação do plano de aula em percentual	54

Lista de abreviaturas e siglas

GD	Geometria de Distâncias
PGD	Problema de Geometria de Distâncias
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GPS	Sistema de Posicionamento Global
MDGP	Problema de Geometria de Distância Molecular
WSNL	Localização de Redes de Sensores Sem fio

Lista de símbolos

EM13MAT105 Código de habilidade da BNCC: (EM) Ensino Médio; (13) da 1ª série até 3ª série; (MAT) Matemática; (105) 5º habilidade da 1ª competência.

$\|\cdot\|$ Norma euclidiana

$\#\{x\}$ Número de elementos do conjunto de soluções da variável x .

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO DE LITERATURA	15
2.1	Geometria no Ensino Médio	15
2.2	Geometria de Distâncias	17
2.2.1	Complexidade Computacional do Problema de GD	20
2.2.2	Usando Matrizes em Geometria de Distâncias	21
2.3	Habilidades do Ensino Médio e suas Aplicações na Geometria de Distâncias	28
2.3.1	Habilidades da Primeira Competência	29
2.3.2	Habilidades da Terceira Competência	34
2.3.3	Habilidades da Quinta Competência	39
3	UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE ENVOLVENDO GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS PARA O ENSINO MÉDIO	45
3.1	Metodologia	45
3.2	Plano de Aula com a Aplicação de Atividade	46
3.2.1	Conhecimentos Matemáticos Prévios	47
3.2.2	Objetivos	47
3.2.3	Desenvolvimento Provável de Atividades	47
3.2.4	Jogo: Encontre o Jogador no País Cybermath	49
4	RELATO DE APLICAÇÃO	51
4.1	Resultados da Aplicação do Plano de Aula	51
4.2	Resultados do Questionário Estruturado	53
5	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	58
	ANEXO A – TCLE	63
	ANEXO B – TALE	65
	ANEXO C – QUESTIONÁRIO ESTRUTURADO	67
	ANEXO D – DECLARAÇÃO DE ANUÊNCIA	69

1 INTRODUÇÃO

A matemática ensinada nas escolas básicas do Brasil ainda remete ao formalismo clássico adotado pelos professores até o final da década de 50, isto é, ao modelo euclidiano e platônico, o qual parte de regras, definições, axiomas já existentes e consolidados para que o aluno apenas copie, memorize e repita (FIORENTINI, 1995).

Com o intuito de modificar este paradigma de prática pedagógica, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi homologada em 2017 no Brasil com o objetivo de servir como documento normativo a fim de fomentar o desenvolvimento de habilidades e competências nos alunos no lugar de conteúdos e memorização (BRASIL, 2018).

A chamada "reforma do Ensino Médio", que também está sendo implementada em paralelo com as novas demandas da BNCC desde a Medida Provisória 746/2016, tem por objetivo tentar corrigir algumas demandas como: quantidade excessiva de disciplinas, formação técnica e profissional alinhada com o mundo do trabalho e evasão escolar devido ao distanciamento da realidade do aluno (SILVA, 2018), onde é notório para professores e alunos a falta de motivação que reside nessa fase da educação, acarretando principalmente na evasão escolar (ALVES; LAVOR; PEREIRA, 2017).

Assim, este trabalho busca propor a inclusão da Geometria de Distâncias como conteúdo do Ensino Médio para explorar as habilidades da BNCC de uma forma que os alunos relacionem os conceitos estudados com situações reais e sigam motivados para alcançar as competências desejadas nessa fase da educação.

A Geometria de Distâncias (GD) pode ser entendida como uma abordagem diferente para a Geometria Euclidiana, onde distâncias são os itens primitivos ao invés de pontos, retas e planos (LIBERTI; LAVOR, 2017). Seu estudo ganhou força e forma definida na segunda metade do século XX, com o trabalho de Blumenthal (1953).

Além disso, as aplicações nessa área de pesquisa são inúmeras: em Astronomia com a posição de estrelas, em Bioquímica com a determinação de estruturas moleculares, em Robótica com a movimentação e posicionamento de robôs, em Telecomunicações com a localização de redes sem fio e Sistema de Posicionamento Global (GPS). Algumas dessas aplicações foram escolhidas como mais interessantes e detalhadas por Liberti et al. (2014).

Nesse sentido, ensinar a GD para alunos do ensino básico pode ser um novo caminho a ser explorado na disciplina de Matemática, dado que há uma aproximação com a realidade do aluno, a utilização de tecnologias na educação e o desenvolvimento de habilidades e competências previstas pela BNCC. Também tem potencial para contribuir com o desenvolvimento dessa área de pesquisa futuramente, formando uma nova geração

de alunos pensantes e prontos para alcançar novas descobertas e aplicações da Geometria de Distâncias.

França et al. (2016) inseriu conceitos da Geometria de Distâncias para trabalhar no Ensino Médio, porém, dadas as mudanças e obrigações determinadas pela BNCC faz-se necessário uma revisão da literatura em relação a esse novo documento normativo.

Para alcançar o objetivo geral deste trabalho vamos lançar mão dos seguintes objetivos específicos:

- Localizar o campo da Geometria de Distâncias dentro da Base Nacional Comum Curricular;
- Apresentar situações problema da Geometria de Distâncias e algumas aplicações;
- Propor problemas utilizando a Geometria de Distâncias no Ensino Médio;
- Elaborar e aplicar um plano de aula utilizando a Geometria de Distâncias no Ensino Médio;
- Relatar os efeitos da aplicação da Geometria de Distâncias do ponto de vista dos alunos.

Para completar, o presente trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo (2) tratará da Revisão de literatura sobre Geometria de Distâncias e Geometria do Ensino Médio de acordo com a BNCC; o Capítulo (3) aborda a elaboração, a aplicação e a avaliação dos resultados de uma atividade em sala-de-aula para o segundas e primeiras séries do Ensino Médio da Escola de Educação Básica Feliciano Pires envolvendo ideias baseadas na GD; o Capítulo (4) relatando a aplicação e apresentando os resultados obtidos; o Capítulo (5) fará a Conclusão discorrendo sobre os resultados encontrados e implicações futuras sobre a área de pesquisa e o ensino de matemática.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo se inicia com uma breve contextualização dos conceitos e habilidades que a BNCC traz sobre o ensino de Geometria no Ensino Médio. Em seguida, faz-se uma revisão um pouco mais detida de alguns dos principais conceitos de Geometria de Distâncias presentes na literatura, com seus problemas e algumas soluções envolvendo outros conceitos matemáticos além dos geométricos, como no caso de Matrizes e Determinantes. Por fim, realiza-se uma análise dos conceitos de GD que podem ser utilizados no Ensino Médio à luz da BNCC.

2.1 Geometria no Ensino Médio

Dependendo do contexto social, político ou econômico que o Brasil estava até se aproximar do século XXI, diferentes governos implementaram diferentes formas de ensino (FERRETI; SILVA, 2017). Essas formas de ensino foram se aprimorando e orientando os professores em sala de aula à sua maneira.

Atualmente, estamos vivenciando mais uma dessas modificações no Ensino Médio, iniciando um movimento que busca corrigir alguns problemas já mencionados anteriormente neste trabalho (SILVA, 2018).

A medida provisória citada na Introdução (1) foi assimilada pela Lei 13.415/2017 que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Atualmente, esse é um documento normativo que determina as aprendizagens essenciais que os alunos precisam adquirir na escola básica. Diferente de outros documentos anteriores, que eram apenas norteadores, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, ela é obrigatória e, por este motivo, esse trabalho toma a BNCC como referência para nortear as habilidades e competências do currículo de Matemática no Ensino Médio.

O conceito de competência utilizado na BNCC é derivado dos escritos de pensadores sobre a Educação do Brasil das últimas décadas, definindo de maneira clara e objetiva o que os alunos precisam “saber” e “saber fazer”.

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socio-emocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.8)

Ela divide as habilidades e competências em quatro áreas do conhecimento, são elas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza

e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (BRASIL, 2018).

Nesse sentido, a BNCC é um documento que define de maneira objetiva e obrigatória, verbalizada pelas habilidades, quais competências os alunos precisam ter para construir uma formação adequada ao desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica.

A área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio é uma continuação das habilidades e competências conquistadas no ensino fundamental. Nele, a Matemática é dividida em cinco áreas do conhecimento: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Essa divisão não acontece no Ensino Médio, porque o objetivo da BNCC nessa fase da educação é aproveitar todo o potencial do aluno, mobilizando-o a raciocinar, representar, comunicar e argumentar, e, esperando que os alunos estabeleçam relações entre as áreas da Matemática. Nesse sentido, os campos do Ensino Médio estão integrados em quatro ideias fundamentais: movimento e posição; variação e constância; certeza e incerteza; relações e inter-relações (BRASIL, 2018).

No caso do ensino de Geometria, as noções fundamentais mais importantes a serem ensinadas são **movimento e posição**. De acordo com BRASIL (2018, p.521):

Movimento e posição estão presentes na localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano Cartesiano e no espaço tridimensional; direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas) e padrões das distribuições de dados. O uso de mapas, GPS e de outros recursos implica a observação e estudo desse par de ideias.

Atividades investigativas com softwares dinâmicos que inter-relacionem movimento e posição podem também promover o desenvolvimento dessas ideias, importantes em cartografia e na movimentação diária do cidadão comum. Por vivermos em um mundo conectado com celulares às mãos, aparelhos de geolocalização, TVs a cabo, câmeras de vigilância etc., o estudo do movimento e posição tem muitas finalidades em diversas áreas.

Note que os conceitos matemáticos nessa área não possuem especificações de conteúdos, o que abre a possibilidade de trabalhar o que faz mais sentido para o aluno dentro de suas realidades e vivências. Assim, tais aplicações em situações cotidianas incitam modificações no padrão que os professores utilizam ao seguir uma sequência de conteúdos rígidos, mantido tradicionalmente nessa disciplina (BRASIL, 1997).

Há vários estudos relativamente recentes que unem o ensino de Geometria e a tecnologia por meio do Geogebra. É o caso, por exemplo, de Lopes (2013), Amado, Sanchez e Pinto (2015) e Faria e Maltempi (2019), mas poucos que utilizam a GD, por exemplo, França et al. (2016). Uma das possíveis razões deste cenário é o fato das escolas normalmente abordarem apenas as Geometrias Euclidianas Plana, Espacial e Analítica.

Propor uma abordagem Matemática diferente do tradicional, como a GD, pode ser um dos caminhos para conectar de maneira mais concreta a Matemática com as suas aplicações, conforme requer a BNCC, dada a riqueza dessa área principalmente com tecnologias conhecidas pelos alunos como, por exemplo, redes de sensores sem fio, GPS e *smartphones*.

2.2 Geometria de Distâncias

Nesta seção abordaremos uma revisão de literatura sobre de Geometria de Distâncias. Iniciando pela parte histórica e alguns conceitos primitivos que culminaram nessa área de pesquisa e suas aplicações.

Ao longo da história da Matemática observa-se diferentes momentos e abordagens que contribuíram para a área, como o Teorema de Heron de Alexandria (50AC), que calcula a área de um triângulo dado as suas arestas (Teorema 2.2.1), e que depois, foi generalizado por Cayley (1841) para calcular volume de *simplex* em qualquer dimensão.

Leonard Euler (1707 - 1783) conjecturou sobre a rigidez dos poliedros por meio de uma analogia dizendo que, se construímos um poliedro utilizando faces feitas de metal e as arestas feitas com dobradiças, então o poliedro será rígido. Essa conjectura foi provada por Cauchy (1813), sendo verdade apenas para poliedros convexos. Posteriormente, Connelly (1977) apresentou contra-exemplos de poliedros não-convexos demonstrando que eram flexíveis.

Já no início do século XX, Karl Menger (1902 - 1985) seguiu os estudos de Cayley (1841) e caracterizou conceitos geométricos como congruência e convexidade de conjuntos em termos de distâncias (MENGER, 1928). Os estudos desses dois matemáticos culminaram no que foi denominado de Determinante Cayley-Menger por Blumenthal (1953), que integra o cálculo da área ou volume de *simplex* dadas as suas arestas (veja Exemplo 2.2.1).

Outros estudos que podemos comentar são o de Gödel (1986) sobre relações de medidas geodésicas e o Teorema de Schoenberg (1935) que estabeleceu relações com matrizes de distâncias e matrizes positivas semidefinidas.

Todos os estudos supramencionados formalizaram conceitos importantes para o que chamamos de Problema de Geometria de Distâncias (PGD), que, inicialmente era resolvido apenas quando eram conhecidas todas as distâncias. Somente em 1978 que Yemini (1978) caracterizou uma definição mais contemporânea, que devido ao avanço computacional, permitiu uma generalização do conceito para qualquer conjunto de distâncias. Na época ele utilizou o termo “Problema de Posicionamento”:

“O Problema de Posicionamento surge quando é necessário localizar um conjunto de objetos geograficamente distribuídos usando medidas de distâncias entre alguns pares de objetos” (YEMINI, 1978).

A partir dessa generalização de Yemini (1978) que o problema fundamental da Geometria de Distâncias ganhou uma forma definida pela Teoria dos Grafos. Essa Teoria é uma vertente importante para a definição da GD, que surgiu no século XVII, advindo da resolução do Problema das Sete Pontes de Königsberg. O problema surgiu de uma pergunta muito simples sobre a rota de passagem pela cidade de Königsberg (atual Kaliningrado): é possível dar uma volta pela cidade passando por todas as sete pontes sem passar duas vezes pela mesma ponte? Euler (1741) resolveu esse problema estabelecendo as pontes como ligações (arestas) e os lugares da cidade como pontos (vértices), modelo de representação que se desenvolveu e deu origem a Teoria de Grafos (BIGGS; LLOYD; WILSON, 1986).

Para compreender a definição do problema fundamental da GD é necessário elucidar alguns conceitos básicos sobre grafos. Um grafo G é constituído por dois conjuntos, um de vértices (V) e outro de arestas (E) conectando alguns pares de vértices (LIBERTI et al., 2014). Um grafo é dito simples quando todas as arestas conectam vértices diferentes no conjunto V e é dito não direcionado quando as arestas entre dois vértices admitem comutatividade. Assim, com a teoria dos grafos, a definição do PGD é (LIBERTI et al., 2014, p. 5):

Seja um grafo simples e não direcionado $G = (V, E)$, em que $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ é um conjunto de n objetos e E um conjunto de pares não-ordenados (a, b) em V . Conhecendo as distâncias (d_{AB}) de E por uma função não-negativa $d : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, é possível determinar realizações $x : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ para qualquer $k > 0$ tal que:

$$\forall a, b \in E, \quad \|x_a - x_b\| = d_{AB} \quad ? \quad (2.1)$$

onde $\|\cdot\|$ representará a norma euclidiana durante todo o trabalho. Desse modo, entende-se que a geometria de distâncias busca determinar as posições de objetos em \mathbb{R}^k satisfazendo todas as restrições de distâncias conhecidas entre elas. Um conjunto S de todas as soluções para esse tipo de problema é denominado de **realização** e pode ser vazio, finito ou infinito não-enumerável (LIBERTI et al., 2014).

Sobre essa cardinalidade, a desigualdade triangular é um fator determinante de sua interpretação. Dadas as distâncias entre os pares não-ordenados, três a três, temos que:

1. S é Vazio quando algumas das distâncias dadas não satisfazem as desigualdades triangulares;
2. S é finito quando conhecemos todas as distâncias entre os pares não ordenados e, estas, não ferem a desigualdade triangular;
3. S é infinito não-enumerável quando não são conhecidas todas as distâncias e, dessa forma, alguns pares ficarão "livres", determinando infinitas possibilidades.

Note que, se existir uma solução para o problema, a congruência é uma transformação linear que consegue modificar as posições dos objetos sem alterar as distâncias entre eles, então teríamos infinitas soluções possíveis realizando translações, rotações e reflexões de uma única solução (DOLCE; POMPEO, 1993).

Assim, a congruência demonstra que, se há uma realização para o problema de geometria de distâncias, então temos infinitas realizações congruentes por meio dessas transformações, denominadas de isometrias. Sabendo disso, a PGD também necessita de estratégias para padronizar as realizações e fornecer uma estrutura útil para a solução do problema.

Nesse sentido, o PGD é um modelo abstrato e possui diversas aplicações relacionadas com a Matemática, ciência e engenharia, conforme destacado por Gonçalves (2020, p. 13). Algumas dessas aplicações são os seguintes problemas:

“O problema de sincronização de relógios (2011), a localização em redes de sensores (2007, 1978, 2010, 2006, 2010), a determinação de estruturas de proteínas a partir de dados experimentais (2013, 2018, 1995, 2010, 2013, 2008), algumas aplicações em processamento de sinais (2015) e em ciência de dados (2005, 2015, 2020), além da forte relação com rigidez de grafos e estruturas (2013, 1978, 1979, 2005, 1975, 2005, 1970).”

Cada área de pesquisa costumava atuar de forma independente, dada as diferentes aplicações, mas, em 2013, foi realizado o primeiro Workshop (ANDRIONI et al., 2013) específico para a geometria de distâncias, que proporcionou uma unificação dessas diferentes áreas de aplicações da GD. Antes, cada pesquisa era publicada e conhecida apenas dentro da sua respectiva área. A realização do evento contribuiu para o avanço dessa área de pesquisa, no sentido de compartilhar os métodos e explorar mais os problemas de GD.

As áreas supracitadas tem diferentes abordagens e métodos, perfazendo uma série de classificações da PGD, cujos nomes e acrônimos foram sintetizados por Liberti et al. (2014), conforme descreve a Tabela (1).

Note que o campo da geometria de distâncias é relativamente recente para a Matemática e muito fértil para um futuro desenvolvimento, o que corrobora com a intenção de apresentá-lo no Ensino Médio, fornecendo subsídios para os próximos pesquisadores desenvolverem e contribuir para a GD e para a sociedade.

Algumas das aplicações mencionadas serão exploradas quando em contato com a geometria do Ensino Médio, a revisão de literatura segue apresentando a complexidade dos problemas nessa área e algumas realizações e exemplos para melhor compreender suas características e resoluções Matemáticas.

Tabela 1 – Problemas da Geometria de Distâncias e seus Acrônimos

ACRÔNIMO (em inglês)	NOME COMPLETO
Geometria de Distâncias	
DGP	Problema de Geometria de Distâncias (1970)
MDGP	DGP Moleculares (em 3 dimensões) (1988)
DPGD	DGP Discretizável (2012a)
$DPGD_K$	DPGD de dimensão fixa (2012)
${}^K DMDGP$	MDGP Discretizável (2011)
$DMDGP_K$	DMDGP de dimensão fixa (2013)
DMDGP	$DMDGP_K$ com $K = 3$ (2012b)
i DGP	DGP Intervalar (1988)
i MDGP	MDGP Intervalar (1999)
i DMDGP	DMDGP Intervalar (2013)
Ordens de Vértice	
DVOP	Problema de Ordens de Vértice Discretizável (2011)
K-TOP	K-Problema de Ordem da Trilateração (2004)
Aplicações	
PSRD	Estruturas de proteínas a partir de dados brutos
MDS	Dimensionamento multidimensional (1982)
WSNL	Localização de redes de sensores sem fio (1978)
IKP	Problema Cinemático Inverso (2000)
Matemática	
GRP	Problema de Rigidez em Grafos (1979)
MCP	Problema de Completamento de Matrizes (2009)
EDM	Problema de Matriz de Distâncias Euclidianas (2012a)
EDMCP	MCP de Distâncias Euclidianas (1997)
PSD	Programação Semidefinida (2001)
PSDMCP	Programação Semidefinida de MCP (1997)

Fonte: Traduzido de Liberti et al. (2014, p. 12)

2.2.1 Complexidade Computacional do Problema de GD

O problema fundamental da GD (2.1) está escrito por meio da teoria de grafos e pode ser completo ou apresentar apenas algumas distâncias conhecidas.

Se o PGD é completo: todas as distâncias são conhecidas, então o conjunto E de distâncias é determinado pelo conjunto de pontos de V . É fácil ver por meio de análise combinatória realizando um arranjo $(A_{|V|,2})$, dado que $|V| = n$, temos $|E| = A_{n,2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ distâncias no PDG.

Se o PGD não é completo: então não são conhecidas todas as distâncias entre os vértices, nesses casos, o grafo admite uma $(k + 1)$ -lateração¹, onde é possível organizar os vértices iniciais formando o que é denominado de clique (subgrafo completo) e, a partir destes, determina-se os demais vértices que não possuem todas as distâncias relativas aos vértices do clique.

¹ k é dimensão em \mathbb{R}^k conforme a Definição (2.1) do PDG

Dado a rigidez dos grafos, é possível encontrar realizações nos dois casos, mas é notável a dificuldade que os problemas podem apresentar. Saxe (1979) provou que este tipo de problema, em relação ao inteiro k do problema fundamental (2.1), é NP-completo quando $k = 1$ e NP-Difícil para qualquer $k > 1$ (GAREY; JOHNSON, 1979).

Entendemos que essa classe de problemas não está no nível de resolução de alunos do Ensino Médio, nesse sentido busca-se encontrar problemas, exercícios e conceitos que resolvem em partes os problemas em GD, servindo como introdução para os alunos nessa fase da educação compreender os reais problemas e aplicações dessa área futuramente.

2.2.2 Usando Matrizes em Geometria de Distâncias

Nesta seção, abordaremos problemas de geometria de distâncias por meio de proposições, exercícios e um teorema para elucidar e exemplificar as realizações. O estudo de Gonçalves (2020) norteou as demonstrações e resoluções.

Proposição 2.2.1. *A intersecção de n esferas em \mathbb{R}^n , com centros afimemente independentes, resulta em no máximo 2 pontos. (GONÇALVES, 2020, p. 7)*

A definição de afimemente independentes é dada sobre um conjunto de pontos, no qual sempre haverá pelo menos um subconjunto de pontos que são linearmente independentes, ou seja, que não são colineares. Como esses pontos são centros de esferas, isto garante que as intersecções não irão se sobrepor e que as transformações lineares do tipo $y = ax + b$ não irão coincidir.

Demonstração. Sejam a_1, a_2, \dots, a_n os centros de k esferas em \mathbb{R}^n e $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}_+$ os respectivos raios dessas esferas e suponha que os centros sejam afimemente independentes.

Uma solução para a intersecção das esferas consiste em determinar $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça as equações não-lineares (a equação da esfera é quadrática) nas quais a distância de x seja igual ao respectivo raio de cada esfera.

$$\|x - a_i\|^2 = d_i^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

ou equivalente desenvolvendo o quadrado:

$$x^T x - 2x^T a_i + a_i^T a_i = d_i^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Vamos aplicar o método de decomposição ortogonal (QR), inicialmente transladando um dos centros para a origem do sistema (preferencialmente aquele com menor raio para a solução transladada ser a mais próxima da real). Sem perda de generalidade, na

demonstração tomamos a_n como a origem, dessa forma, podemos escrever os novos centros por uma matriz \hat{A} transladada de ordem $n \times (n - 1)$:

$$\hat{A} = [a_1 - a_n \quad \dots \quad a_{n-1} - a_n] .$$

Como supomos que os centros são afimemente independentes, por definição, temos que \hat{A} é posto completo, ou seja, é linearmente independente. Além disso, pela definição de afimemente temos que se x é solução, então $\bar{x} = x - a_n$ também será. Logo, substituindo \bar{x} em (2.2):

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - (a_i - a_n)\|^2 &= d_i^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \\ &\text{e} \\ \|\bar{x}\|^2 - 2\bar{x}^T(a_i - a_n) + \|a_i - a_n\|^2 &= d_i^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Note que

$$\|\bar{x}\|^2 = d_n^2, \tag{2.5}$$

então, substituindo (2.5) em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2\bar{x}^T(a_i - a_n) + \|a_i - a_n\|^2 &= d_i^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \\ (a_i - a_n)\bar{x}^T &= -\frac{1}{2}(d_i^2 - d_n^2 - \|a_i - a_n\|^2), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Que podemos escrever na forma matricial:

$$\hat{A}^t \bar{x} = b, \tag{2.7}$$

em que:

$$b = -\frac{1}{2}(d_i^2 - d_n^2 - \|a_i - a_n\|^2). \tag{2.8}$$

Aplicando a decomposição ortogonal (QR), sendo Q a matriz ortogonal e R uma matriz triangular superior de ordem $(n - 1) \times (n - 1)$, temos:

$$\hat{A} = Q \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix} .$$

Como a norma euclidiana não é modificada pela transformação ortogonal, podemos escrever x em função de $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $z \in \mathbb{R}$:

$$x = Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + a_n, \tag{2.9}$$

portanto:

$$\begin{aligned} \|y - r_i\|^2 + z^2 &= d_i^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \\ &\text{e} \\ \|y\|^2 + z^2 &= d_n^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde r_i é a i -ésima coluna de R . Note que podemos substituir as informações contidas em (2.9) na equação matricial (2.8) para obter solução única para y :

$$\begin{aligned} Q \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix} \bar{x} &= b, \\ Q \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} &= b, \\ \hat{R}^T y &= b. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Em (2.9), podemos substituir o vetor y que possui solução única em (2.11) que determinará por z a quantidade de soluções possíveis discriminadas pela radiciação:

$$\begin{aligned} \|y\|^2 + z^2 &= d_n^2, \\ z &= \pm \sqrt{d_n^2 - \|y\|^2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que:

$$\begin{aligned} d_n^2 - \|y\|^2 < 0 &\rightarrow \#\{x\} = 0, \\ d_n^2 - \|y\|^2 = 0 &\rightarrow \#\{x\} = 1, \\ d_n^2 - \|y\|^2 > 0 &\rightarrow \#\{x\} = 2. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a intersecção de n esferas em \mathbb{R}^n tem no máximo duas soluções possíveis.

□

Proposição 2.2.2. (GONÇALVES, 2020, p. 17). *Dadas três distâncias d_{AB} , d_{BC} e d_{AC} , haverá uma realização dos pontos A , B e C em \mathbb{R}^k se, e somente se, forem satisfeitas as desigualdades triangulares:*

$$\begin{aligned} d_{AB} &\leq d_{CA} + d_{BC}, \\ d_{BC} &\leq d_{AB} + d_{CA}, \\ d_{CA} &\leq d_{AB} + d_{BC}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Demonstração. Dadas as três distâncias d_{AB} , d_{BC} e d_{CA} , suponha, por absurdo, que uma das distâncias não satisfaz a desigualdade triangular:

$$d_{AB} > d_{BC} + d_{CA}. \quad (2.14)$$

Pela definição da geometria de distâncias, uma realização deve encontrar os pontos A , B e C tal que:

$$\begin{aligned} |x_A - x_B| &= d_{AB}, \\ |x_B - x_C| &= d_{BC}, \\ |x_C - x_A| &= d_{CA}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em (2.14) obtemos:

$$|x_A - x_B| > |x_B - x_C| + |x_A - x_C|, \tag{2.16}$$

como o módulo da soma é menor ou igual que a soma dos módulos, podemos colocar a soma em um único módulo:

$$\begin{aligned} |x_A - x_B| &> |x_B - x_C + x_C - x_A|, \\ |x_A - x_B| &> |x_B - x_A|. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Absurdo, pois $|x_A - x_B| = |x_B - x_A|$ e de maneira análoga pode-se inferir que nenhuma das distâncias poderia refutar as desigualdades triangulares, logo, haverá realização em \mathbb{R}^k se forem satisfeitas as desigualdades triangulares.

Por outro lado, se são dadas as três distâncias entre os pontos e elas satisfazem as desigualdades triangulares, então precisamos provar que existe uma realização dos pontos A , B e C em \mathbb{R}^k . Para isto, vamos construir uma realização, sem perda de generalidade, seguindo os passos a seguir como exemplo para duas dimensões:

- Localize o ponto A na origem do sistema;
- Dada a distância d_{AB} , localize o ponto $B = (d_{AB}, 0)$;
- Construa uma circunferência com centro em A e raio igual a d_{AC} ;
- Construa uma circunferência com centro em B e raio igual a d_{BC} ;
- Localize o ponto C em um local da intersecção das duas circunferências.

Note que as desigualdades triangulares garantem a existência de intersecção de pelo menos um ponto entre as circunferências. Também é fácil ver que para três dimensões (\mathbb{R}^3) é possível seguir a mesma construção, acrescentando mais uma coordenada nula para o ponto B e construindo duas esferas também teremos a mesma situação, com mais possibilidades de pontos de intersecção entre duas esferas para escolher o ponto C .

Nesse sentido, para \mathbb{R}^k infere-se que aumentaria a quantidade de opções para localizar o ponto C , que garantido pelas desigualdades triangulares, existirá, completando assim a realização dos pontos A , B e C .

□

Proposição 2.2.3. $|d_{BC} - d_{CA}| \leq d_{AB} \leq d_{BC} + d_{CA}$ se, e somente se, as condições da Proposição (2.2.2) são satisfeitas. (GONÇALVES, 2020, p. 17)

Demonstração. Dada a desigualdade enunciada, é possível perceber a primeira desigualdade triangular, $d_{AB} \leq d_{BC} + d_{CA}$. Para as outras desigualdades note que $|d_{BC} - d_{CA}| = |d_{CA} - d_{BC}| \leq d_{AB}$, das quais podemos obter somando as distâncias entre B e C de ambos os lados:

$$\begin{aligned} |d_{BC} - d_{CA}| \leq d_{AB} &\rightarrow d_{BC} \leq d_{AB} + d_{CA} \\ &\text{e} \\ |d_{CA} - d_{BC}| \leq d_{AB} &\rightarrow d_{CA} \leq d_{AB} + d_{BC}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Note que a diferença dos módulos é menor que o módulo da diferença, logo, a partir da desigualdade enunciada obtivemos as três desigualdades triangulares. Por outro lado, se forem dadas as desigualdades triangulares (2.15), podemos isolar a d_{AB} na segunda desigualdade e comparar em relação com a primeira desigualdade.

$$\begin{aligned} d_{AB} &\leq d_{CA} + d_{BC}, \\ d_{BC} \leq d_{AB} + d_{CA} &\rightarrow |d_{BC} - d_{CA}| \leq d_{AB}, \\ |d_{BC} - d_{CA}| &\leq d_{AB} \leq d_{CA} + d_{BC}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Note que ao subtrair d_{CA} de ambos os lados é utilizado a propriedade da diferença dos módulos novamente. Assim, dadas as desigualdades triangulares foi possível demonstrar a desigualdade enunciada:

$$|d_{BC} - d_{CA}| \leq d_{AB} \leq d_{BC} + d_{CA}.$$

□

Exercício 2.2.1. Calcule os determinantes de Cayley-Menger de três pontos para os três exemplos a seguir. (GONÇALVES, 2020, p. 18)

a) $d_{AB} = 4$, $d_{CA} = 2$ e $d_{BC} = 1$.

b) $d_{AB} = 3$, $d_{CA} = 2$ e $d_{BC} = 2$.

c) $d_{AB} = 4$, $d_{CA} = 2$ e $d_{BC} = 2$.

Demonstração. Dadas as distâncias d_{AB} , d_{CA} e d_{BC} , a matriz das distâncias associada será dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & d_{AB} & d_{CA} \\ d_{AB} & 0 & d_{BC} \\ d_{CA} & d_{BC} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Definimos o determinante de Cayley-Menger por:

$$CM(d_{AB}, d_{CA}, d_{BC}) = \begin{vmatrix} D(d_{AB}, d_{CA}, d_{BC}) & 1 \\ 1^T & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & d_{AB}^2 & d_{CA}^2 & 1 \\ d_{AB}^2 & 0 & d_{BC}^2 & 1 \\ d_{CA}^2 & d_{BC}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.21)$$

substituindo os valores do problema, obtemos:

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4^2 & 2^2 & 1 \\ 4^2 & 0 & 1^2 & 1 \\ 2^2 & 1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 16 & 4 & 1 \\ 16 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16^2 + 4^2 + 1^2 - 2(16 \cdot 4 + 16 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 105 > 0. \quad (2.22)$$

b)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3^2 & 2^2 & 1 \\ 3^2 & 0 & 2^2 & 1 \\ 2^2 & 2^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9^2 + 4^2 + 4^2 - 2(9 \cdot 4 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = -63 < 0. \quad (2.23)$$

c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4^2 & 2^2 & 1 \\ 4^2 & 0 & 2^2 & 1 \\ 2^2 & 2^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 16 & 4 & 1 \\ 16 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16^2 + 4^2 + 4^2 - 2(16 \cdot 4 + 16 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = 0. \quad (2.24)$$

□

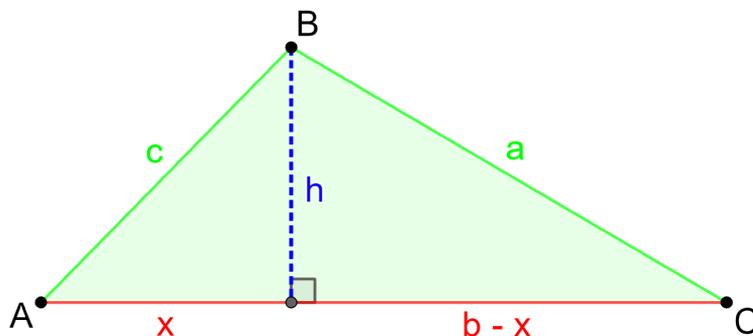
Teorema 2.2.1. (*Fórmula de Heron*). Considere um triângulo de área $A \geq 0$ cujas medidas dos lados valem a , b e c . Então:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (2.25)$$

em que p é o semiperímetro, ou seja, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Demonstração. Dado um triângulo ABC e as medidas de seus respectivos lados opostos aos vértices a , b e c . Sem perda de generalidade, tome h como a altura relativa ao maior lado (b), dividindo-o em duas medidas (x) e $(b - x)$, conforme indicado na Figura (1).

Figura 1 – Exemplo de um triângulo ABC com altura relativa ao vértice B



Pelo teorema de Pitágoras aplicado nos triângulos internos obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b - x)^2, \\ h^2 &= a^2 - b^2 + 2bx - x^2 \\ &\text{e} \\ c^2 &= h^2 + x^2, \\ x &= \sqrt{c^2 - h^2}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

substituindo:

$$h^2 = a^2 - b^2 + 2b\sqrt{c^2 - h^2} - (\sqrt{c^2 - h^2})^2, \tag{2.27}$$

desenvolvendo:

$$\begin{aligned} 2b\sqrt{c^2 - h^2} &= -a^2 + b^2 + c^2, \\ \sqrt{c^2 - h^2} &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}, \\ c^2 - h^2 &= \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}\right)^2, \\ h^2 &= c^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Com a fórmula da área de um triângulo qualquer elevada ao quadrado, vamos substituir o resultado final da Equação (2.26) e desenvolver a expressão algebricamente:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{b^2 \cdot h^2}{4}, \\ A^2 &= \frac{b^2(c^2 - (\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b})^2)}{4}, \\ A^2 &= \frac{b^2(\frac{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4b^2})}{4}, \\ A^2 &= \frac{(2bc)^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{16}, \\ A^2 &= \frac{(2bc + (-a^2 + b^2 + c^2))(2bc - (-a^2 + b^2 + c^2))}{16}, \\ A^2 &= \frac{((b^2 + 2bc + c^2) - a^2)(a^2 - (b^2 - 2bc + c^2))}{16}, \\ A^2 &= \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{16}, \\ A^2 &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c)}{16}, \\ A^2 &= \frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(b+c-a)}{2} \cdot \frac{(a-b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Dado o valor do semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$ note que:

$$\begin{aligned}\frac{b+c-a}{2} &= \frac{b+c-a+(a-a)}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2} = p - a, \\ \frac{a-b+c}{2} &= \frac{a-b+c+(b-b)}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2b}{2} = p - b, \\ \frac{a+b-c}{2} &= \frac{a+b-c+(c-c)}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Substituindo (2.30) em (2.29), obtemos a fórmula de Heron:

$$\begin{aligned}A^2 &= \frac{(b+c+a)}{2} \cdot \frac{(b+c-a)}{2} \cdot \frac{(a-b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2}, \\ A^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c), \\ A &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

□

2.3 Habilidades do Ensino Médio e suas Aplicações na Geometria de Distâncias

Nesta seção, abordaremos algumas habilidades da BNCC que estão relacionadas com a Geometria de Distâncias. O objetivo principal desta seção é introduzir seus conceitos e mostrar algumas aplicações que podem ser utilizadas como conteúdo de Matemática para aplicar no Ensino Médio. Cabe salientar que essa análise não leva em conta o alcance completo de cada habilidade, mas sim a possibilidade de usar a GD nesta fase.

A primeira competência específica está relacionada com a interpretação e compreensão da realidade. No que tange a GD, temos as habilidades 3 e 5 cujos objetivos consistem em analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas juntamente com suas unidades de medida.

A segunda competência específica tem o objetivo de articular os conhecimentos relativos à sustentabilidade, sociedade e ética, mais voltada para a parte de pesquisa social e educação financeira, sobre o qual não associa-se a geometria de maneira geral.

A terceira competência específica busca utilizar os conceitos da Matemática do ensino fundamental para aprimorar as habilidades sobre os campos - Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística - sendo uma das competências que possui habilidades com maior afinidade com a GD.

A quarta competência específica apresenta a parte de funções e representações no plano Cartesiano na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. No caso da GD aborda-se principalmente as funções do 2º grau, no caso das circunferências e esferas, porém, no escopo dessa competência seriam apenas as funções polinomiais, o que não é o caso dos problemas na GD.

A quinta e última competência específica irá realizar investigações e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos, por meio de reconhecimento de padrões e utilização de tecnologias para validar as conjecturas formalizadas. Nessa competência temos habilidades que buscam investigar o comportamento de variáveis e conjecturar os padrões observados, muito semelhante ao que é necessário para resolver um PGD.

As habilidades de cada competência serão mencionadas ao início de cada seção, seguindo a ordem da BNCC, observa-se que apenas as competências 1, 3 e 5 trazem conceitos geométricos e algébricos relativos a Movimento e Posição, que é a área da GD conforme visto na Seção (2.2). Nesse sentido, cada uma das próximas subseções desse referencial abordará uma competência específica da BNCC para explorar os conceitos da geometria de distâncias que podem ser introduzidos no Ensino Médio.

2.3.1 Habilidades da Primeira Competência

(EM13MAT103) Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade. (BRASIL, 2018, p. 525)

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 525)

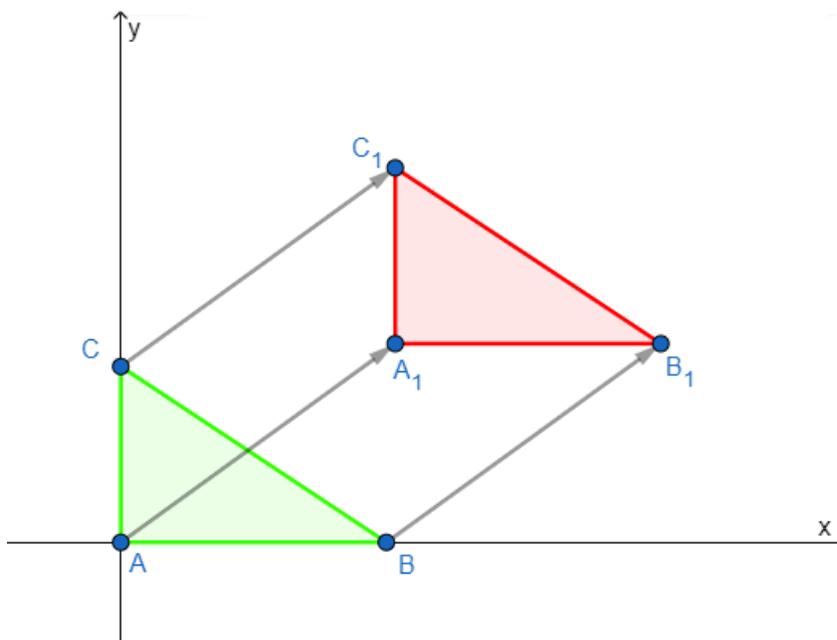
Transformações isométricas são os conceitos de congruências, que já foram comentados dentro desse referencial na parte de GD. Em Matemática é abordado esse assunto em meados do 8º ano do ensino fundamental (EF08MA18) (BRASIL, 2018), mas nesse momento não são analisados elementos da natureza e diferentes produções humanas, sendo a extensão acrescentada para o Ensino Médio.

Compreender os tipos de congruências são conceitos necessários para essa habilidade, sendo eles a translação, a reflexão e a rotação. Em GD, esse conhecimento é importante para compreender os diferentes resultados possíveis de uma única realização, sendo um dos conceitos iniciais para compreender e buscar soluções nesse campo de estudo.

A translação é uma congruência que adiciona um mesmo vetor a todos os objetos, fazendo com que cada coordenadas de \mathbb{R}^k seja modificada com a mesma intensidade e direção. A Figura (2) demonstra um exemplo de três pontos realizando uma translação de um triângulo em \mathbb{R}^2 , assim como a representação do vetor de deslocamento por translação.

A rotação é uma congruência que modifica os objetos em uma mesma quantidade angular sobre círculos concêntricos. A Figura (3) exemplifica uma rotação de 90° em sentido anti-horário de três objetos sobre círculos concêntricos na origem. É importante

Figura 2 – Translação de três pontos no plano Cartesiano



salientar que a denominação círculo é relativo ao \mathbb{R}^2 , para realizar uma rotação para \mathbb{R}^k temos que generalizar a ideia desse lugar geométrico: o conjunto de todos os pontos equidistantes de um centro, assim, teríamos a esfera para o \mathbb{R}^3 seguido de mais uma informação angular.

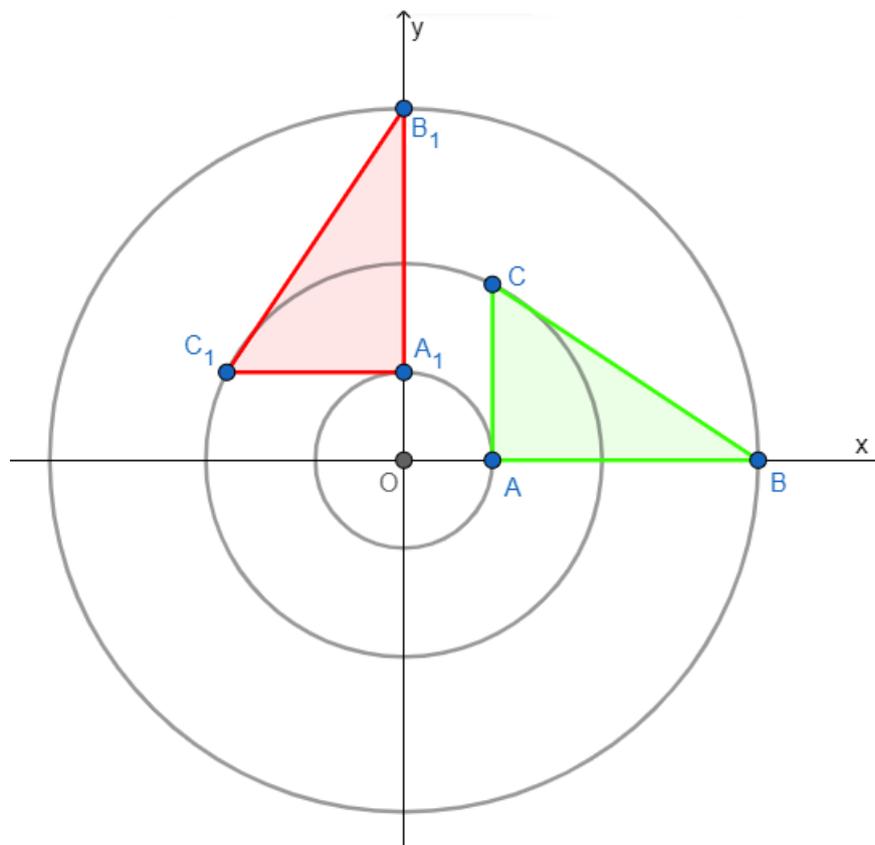
A reflexão é uma congruência que modifica o objeto para um lugar simétrico ortogonalmente em relação a outro de dimensão menor. Logo, para \mathbb{R}^k temos um objeto de reflexão de dimensão $n < k, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ em \mathbb{R}^{k-n} . Note que, normalmente tomamos $n = 1$ para realizar a reflexão. Conforme mostra a Figura (4), uma reflexão em \mathbb{R}^2 de um triângulo (duas dimensões) em relação a uma reta (uma dimensão, ou seja, $k - 1$ dimensões) por meio de segmentos congruentes e perpendiculares sobre os vértices correspondentes. De maneira análoga, podemos pensar nessa reta como um espelho da figura, refletindo a mesma imagem recebida em outro lugar geométrico.

Um estudo recente publicado em seminário de Matemática de Antunes e Campos (2021) trás aplicações dessas transformações isométricas para o Ensino Médio de acordo com a BNCC e aplicadas por meio do software Geogebra.

A partir da compreensão da simetria é possível abordar a parte da habilidade que diz respeito a analisar diferentes elementos da natureza com a Geometria de Distâncias Moleculares (MPGD) (CRIPPEN; HAVEL et al., 1988), no sentido de explorar o contexto de diferentes estruturas de proteínas e suas simetrias, mostrando aos alunos a importância dessa área para a bioquímica e farmacologia.

A MPGD surge quando a ciência detecta qual a forma das estruturas de uma molécula dada por sua fórmula atômica. Assim, eles buscaram identificar as formas de

Figura 3 – Rotação de três pontos no plano Cartesiano



como os mesmos átomos estavam ligados entre si por meio de ligações químicas (LIBERTI et al., 2014).

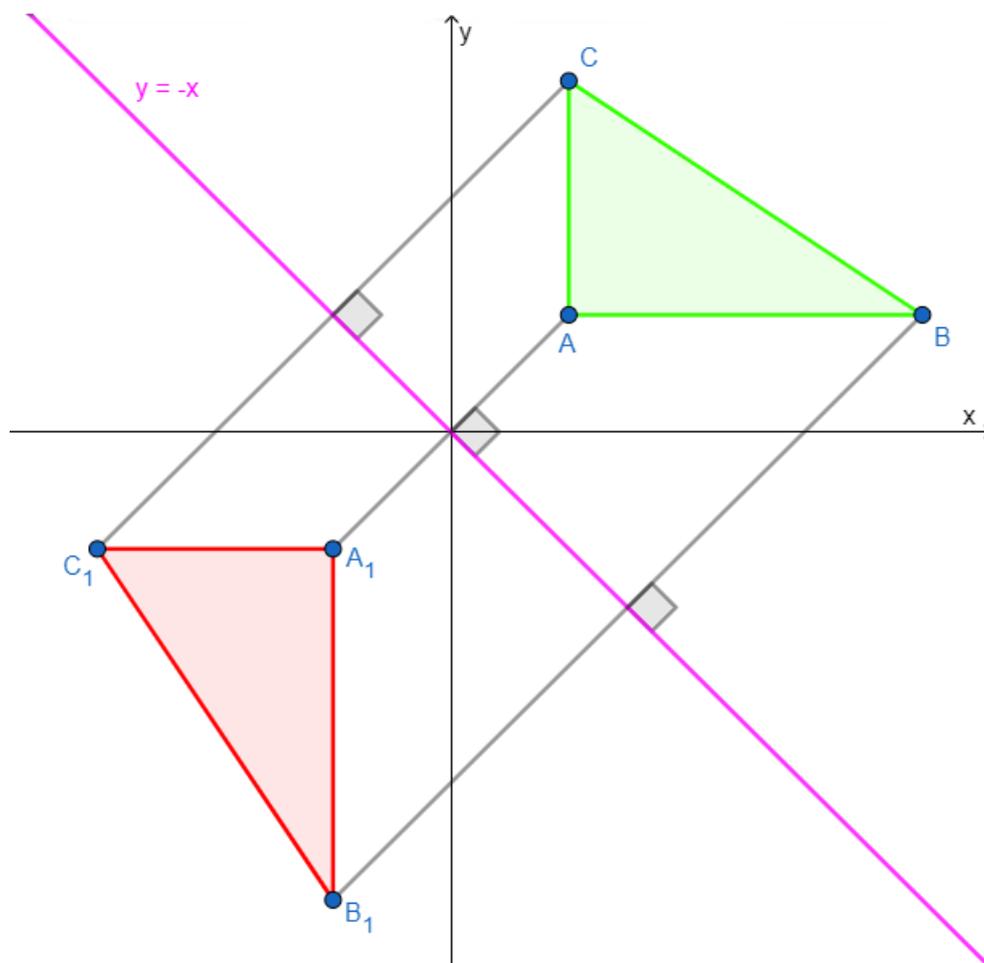
A intenção de relacionar o MPGD com o Ensino Médio é utilizar essas estruturas moleculares para compreender o conceito de simetria, fazendo uma ligação entre a química e a Matemática, no qual cada conceito consegue trabalhar dentro da sua respectiva área.

A Figura (5) demonstra algumas das principais ligações químicas de acordo com Crippen, Havel et al. (1988), as quais foram coloridas para melhor identificar as transformações simétricas entre os átomos.

A primeira molécula da Figura (5) mostra um isomerismo de dupla ligação de carbonos em um grupo metil. A segunda imagem mostra um gliceraldeído com um claro exemplo de reflexão (imagem espelhada). A terceira faz uma rotação das ligações de um átomo de carbono, demonstrando que essas moléculas são quirais, ou seja, uma molécula congruente pode ter funções ou efeitos diferentes devido a modificação da sua estrutura pela reflexão (mais informações sobre quirais em Flack (2003)).

Esse tipo de situação pode ser estendido para outras estruturas moleculares de acordo com o interesse do aluno e do professor. O que diz respeito a identificar essas características de simetria é o que interessa para a Matemática e, além de uma introdução ao MPGD, é também uma interdisciplinaridade com a química, podendo ser um dos

Figura 4 – Reflexão de três pontos no plano Cartesiano



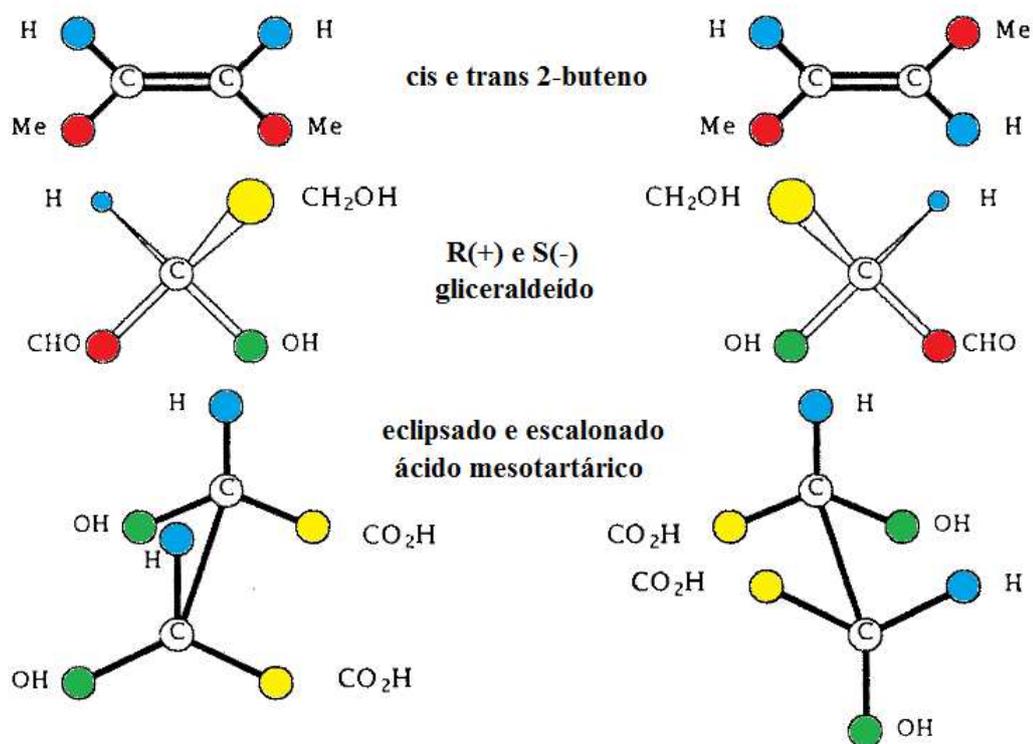
caminhos para alcançar essa habilidade.

O princípio de conhecer as estruturas moleculares de proteínas especificamente serve para projetar medicamentos para curar uma doença específica, sabendo o que uma determinada proteína pode fazer a um organismo. É claro que no Ensino Médio é difícil chegar a tal compreensão, mas uma introdução de como é o funcionamento disso pode ser elucidado.

Como as proteínas estão conectadas com determinados locais nas células, seus efeitos são dependentes dessas conexões, logo, a sua estrutura posicional determina a sua função no organismo. As proteínas são conjuntos de átomos, e como tal, possuem ligações químicas, cujas distâncias interatômicas podem ser medidas por experimentos como a ressonância magnética nuclear (RMN), que utiliza unidades de medida microscópicas (aprox. 5×10^{-10} metros) (LIBERTI; LAVOR, 2017).

Vamos utilizar a água como exemplo prático. Supondo que temos dois átomos de hidrogênio ligados a um átomo de oxigênio por uma distância de 0,0965 nm e formando um ângulo de $104,5^\circ$, é possível com essas informações reconhecer essa estrutura atômica?

Figura 5 – Algumas características simétricas em moléculas



Fonte: Adaptado de Crippen, Havel et al. (1988)

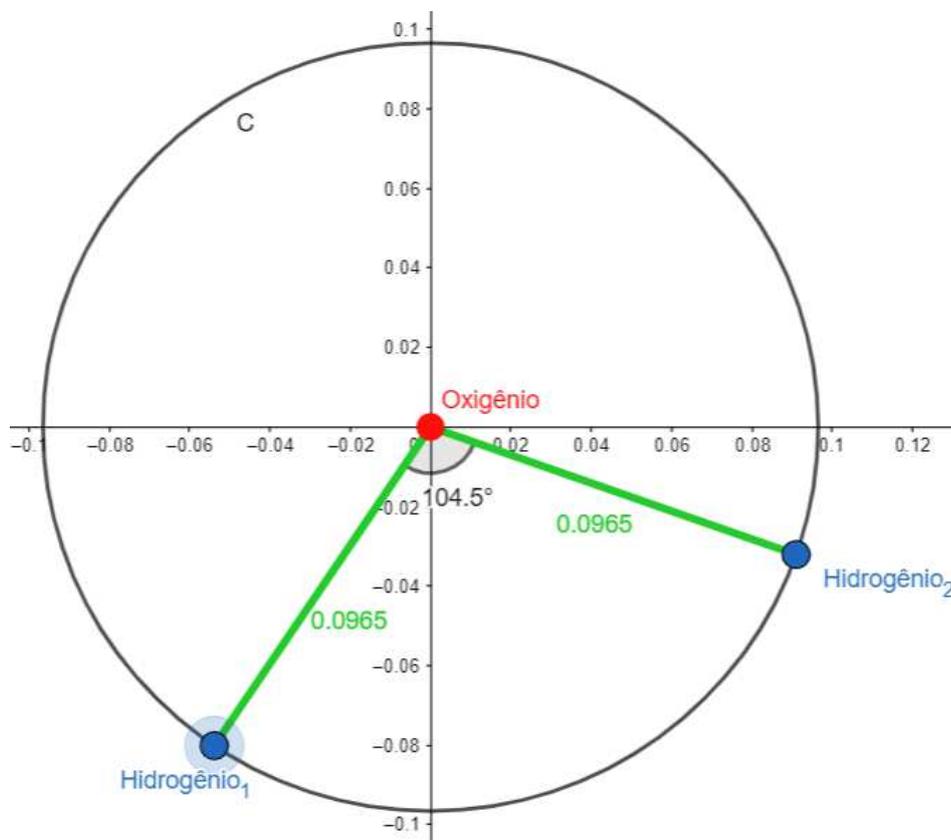
Explorando as informações no plano Cartesiano utilizando o software do Geogebra, vamos fixar o átomo de oxigênio na origem do sistema. Note que a localização do primeiro átomo de hidrogênio pode estar em qualquer lugar da circunferência com raio de 0,0965 nm. Após escolher sobre a circunferência o primeiro átomo de hidrogênio, o segundo átomo estará sobre a mesma circunferência distando um arco de $104,5^\circ$, conforme demonstra a Figura (6) em que C é o lugar geométrico dos átomos de hidrogênio.

De acordo com a construção feita no Geogebra, é possível arrastar o primeiro átomo de hidrogênio e demonstrar as possíveis rotações dessa estrutura. Note que nesse exemplo foram abordadas noções importantes da MPGD utilizando distâncias microscópicas ligadas aos avanços tecnológicos analisando diferentes elementos da natureza por meio de transformações isométricas no plano Cartesiano utilizando tecnologias digitais, alinhado ao objetivo da pesquisa.

Da mesma forma com que utilizamos a molécula de água como exemplo, pode-se expandir para outros elementos da natureza e analisar de forma com que seja mais atrativo e interessante para o aluno pois está relacionado com a sua realidade.

Um dos benefícios de explorar as habilidades de Matemática por intermédio dos PGDs é proporcionar o conhecimento básico sobre esta área de pesquisa, o que pode implicar em uma nova geração de pesquisadores com maior base teórica que poderão contribuir

Figura 6 – Estrutura da água conhecendo as ligações interatômicas no Geogebra



com os estudos, principalmente em MPGD, DMPGD e PSRD, conforme acrônimo da Tabela (1).

As habilidades dessa seção possuem o objetivo voltado para a compreensão e análise de situações geométricas e de grandezas e medidas. A parte algébrica será explorada nas próximas seções conforme requerem as habilidades de cada competência da Matemática.

2.3.2 Habilidades da Terceira Competência

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 528)

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p. 529)

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma. (BRASIL, 2018, p. 529)

Resolver e elaborar problemas é rotineiro para a disciplina de Matemática, contudo, problemas relacionados com a GD não são comuns a ponto do aluno nem chegar a conhecer essa área ao terminar o ensino básico.

Um dos problemas de cotidiano que pode ser resolvido por ferramentas da PGD e aborda as três habilidade em conjunto, é conhecido como o de Sincronização do Relógio (SINGER, 2011):

Exercício 2.3.1. *Alice apenas disse que seu relógio está errado em 5 minutos, Bob falou que o seu está errado em 7 minutos em relação ao de Alice e o de Charles em 3 minutos em relação ao de Alice e 4 minutos ao de Bob. Exasperado, você verifica o site público do relógio atômico para descobrir que são exatamente 16:27. Você consegue descobrir que hora é em cada um desses relógios? Se possível, existe apenas uma solução ou pode haver muitas? (LIBERTI; LAVOR, 2017, p. 3)*

Demonstração. Vamos nomear os relógios da Alice, do Bob, do Charles e atômico por x_A, x_B, x_C e x_S , respectivamente. Assim temos as seguintes informações do problema na forma de equações lineares modulares:

$$|x_A - x_B| = 7, \tag{2.32}$$

$$|x_A - x_C| = 3, \tag{2.33}$$

$$|x_A - x_S| = 5, \tag{2.34}$$

$$|x_B - x_C| = 4, \tag{2.35}$$

$$x_S = 16 : 27. \tag{2.36}$$

A situação pode ser resolvida por meio de uma árvore de possibilidades semelhante ao método *Branch and Prune* (LIBERTI; LAVOR; MACULAN, 2008), tomando a Alice como referência em relação ao horário do relógio atômico, temos duas possibilidades: ou o relógio dela está atrasado ou adiantado em 5 minutos, ou seja, é uma resolução por substituição de (2.36) em (2.34) e com os resultados obtidos para x_A substituir em (2.32) e (2.33), com os resultados de x_B e x_C substituir em (2.35).

$$|x_A - x_S| = 5 ,$$

$$x_A - 16 : 27 = \pm 00 : 05 ,$$

$$x_A - 16 : 27 = +00 : 05 \quad \Rightarrow \quad x_A = 16 : 33 ,$$

$$x_A - 16 : 27 = -00 : 05 \quad \Rightarrow \quad x_A = 16 : 22 .$$

Logo, temos que no relógio de Alice ou é 16:33 ou é 16:22. Realizando as demais substituições encontramos 4 soluções possíveis:

- Alice = 16:22, Bob = 16:15 e Charles = 16:19
- Alice = 16:22, Bob = 16:29 e Charles = 16:25
- Alice = 16:32, Bob = 16:25 e Charles = 16:29
- Alice = 16:32, Bob = 16:39 e Charles = 16:35

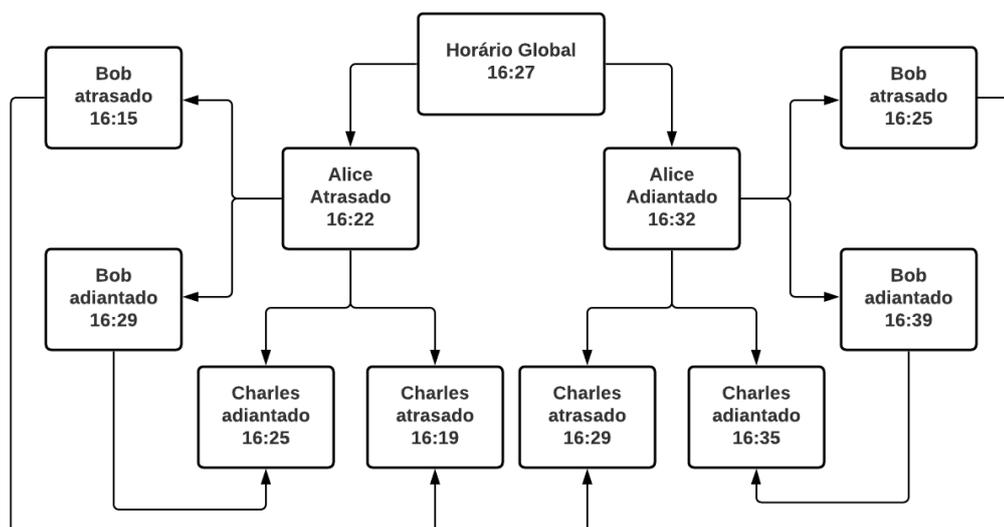
□

Essa resolução pode ser feita de maneira intuitiva sobre as possibilidades de tempo para cada relógio em ordem, construindo o fluxograma ou árvore de possibilidades conforme demonstrado pela Figura (7).

Note que, tanto de maneira intuitiva quanto por meio de um algoritmo de substituição é possível resolver esse sistema de equações, que transmite uma reflexão sobre a área de geometria de distâncias em uma dimensão, sobre a qual pode ser ampliada para duas dimensões com outras aplicações como localização em redes de sensores sem fio, que é uma vertente muito importante em sistemas de posicionamento global ou veículos autônomos subaquáticos (LIBERTI; LAVOR, 2017).

De acordo com França et al. (2016), as redes de sensores sem fio (RSSF) são usadas em muitos cenários que utilizam medidas de distâncias recebidas por sensores, com aplicações:

Figura 7 – 4 Soluções possíveis para a o problema de sincronização dos relógios



- militares: através de funções de monitoramento, rastreamento, segurança, controle e manutenção. Por exemplo, detectar movimentos inimigos, explosões, presença de material perigoso como gás venenoso ou radioativo, etc;
- industriais: nas funções de monitoramento;
- ambientais: através do monitoramento e controle de condições ambientais numa floresta, oceano ou num planeta;
- em serviços públicos: como monitoramento de serviços de saúde, rastreamento ativos, serviços de emergência, detecção de intrusos, rastreamento de força de trabalho, localização de amigos ou pontos de referência. (FRANÇA et al., 2016, p. 61)

Em relação à localização, a trilateração é uma importante técnica utilizada para determinar a posição de objetos dadas três distâncias conhecidas de pontos fixos. O exemplo a seguir explica e contextualiza essa situação:

Exercício 2.3.2. *Trilateração: Determinada cidade possui 3 antenas fixas conhecidas as suas coordenadas (pontos R , S e T) e não colineares. Um sensor (C), que podemos chamar de celular, mede a sua distância em relação a cada uma das antenas (d_{CR} , d_{CS} e d_{CT}). Você consegue determinar a localização do celular com essas informações? Se possível, existe apenas uma solução ou pode haver muitas?*

Demonstração. Para resolver esse problema constrói-se circunferências com centro em cada uma das antenas com o raio da distância entre elas e o celular, formando o sistema de equações quadráticas (2.37).

$$\begin{cases} (x_C - x_R)^2 + (y_C - y_R)^2 = (d_{CR})^2 \\ (x_C - x_S)^2 + (y_C - y_S)^2 = (d_{CS})^2 \\ (x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2 = (d_{CT})^2 \end{cases} \quad (2.37)$$

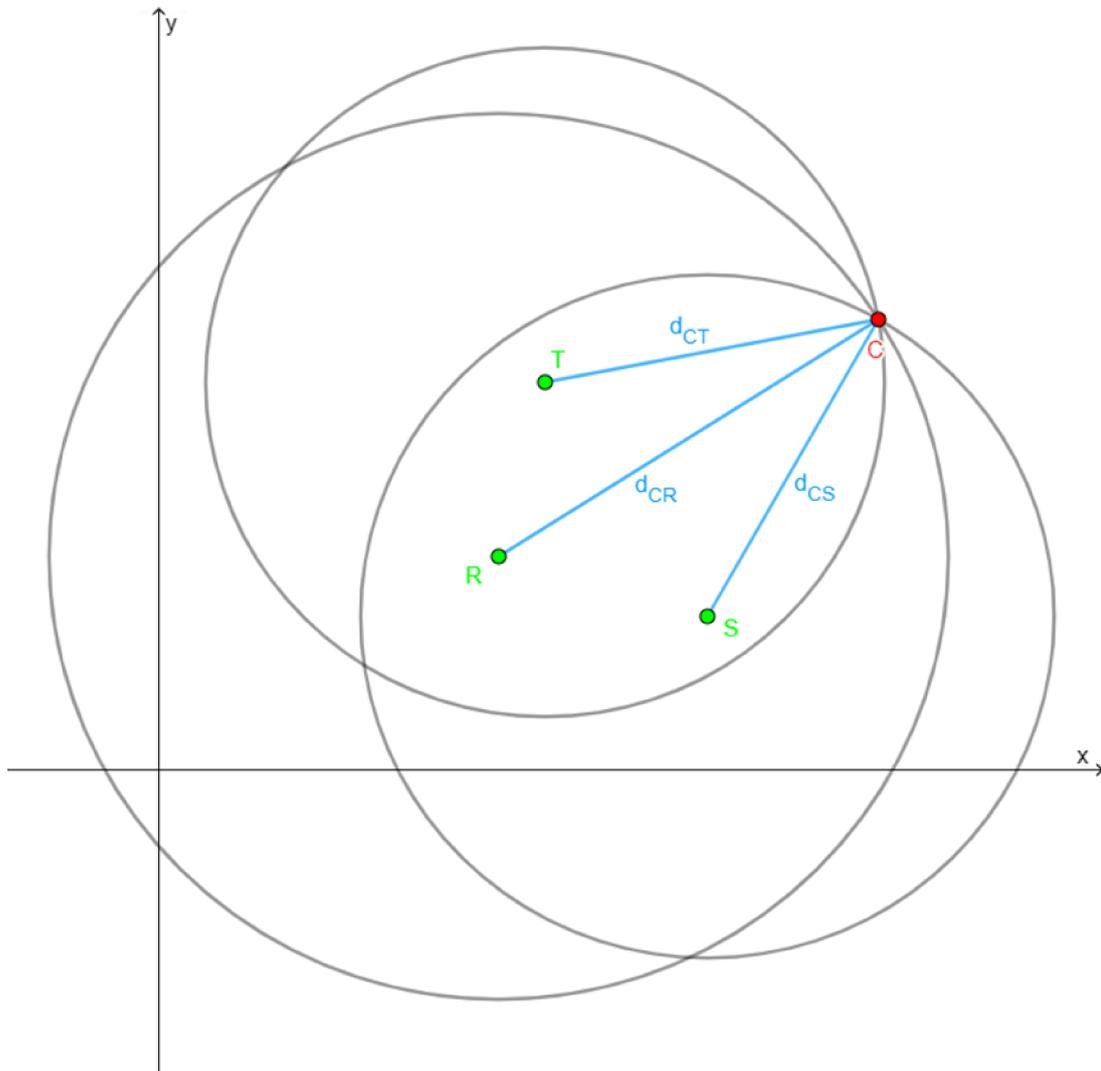
A resolução do sistema é a intersecção das três circunferências que, por não serem colineares, possuirá solução única sendo o local onde estará o celular (ponto C) (FRANÇA et al., 2016).

Sabemos que resolver um sistema com três equações quadráticas no Ensino Médio não seria uma tarefa fácil, o que nos leva a uma solução mais atrativa para a educação por meio de gráficos utilizando tecnologias como o Geogebra.

No software Geogebra, seguindo os passos a seguir podemos resolver o problema de forma gráfica, conforme demonstra a Figura (8):

- Localize as antenas R , S e T nas suas respectivas coordenadas;
- Crie uma circunferência com centro em R com raio medindo d_{CR} ;
- Crie uma circunferência com centro em S com raio medindo d_{CS} ;

Figura 8 – Resolução gráfica da Trilateração



- Crie uma circunferência com centro em T com raio medindo d_{CT} ;
- Localize o ponto C no encontro das três circunferências.

□

Note que, embora sejam partes e conceitos da geometria de distâncias, consegue-se estabelecer situações Matemáticas que tem o potencial de trabalhar as habilidades dessa competência, pois temos que resolver e elaborar problemas que envolvem equações simultâneas (porém, não lineares), utilizando tecnologias digitais por meio de estratégias diversas como gráficos, fluxogramas, algoritmos ou diagramas de árvore.

Esses conceitos e habilidades são de grande importância para as áreas de estudo de K-TOP, WSNL, IKP (veja Tabela 1), que utilizam métodos derivados da trilateração para determinar localização de sensores, equipamentos e realizar movimentações autônomas.

2.3.3 Habilidades da Quinta Competência

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano Cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (BRASIL, 2018, p. 533)

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (BRASIL, 2018, p. 533)

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos. (BRASIL, 2018, p. 533)

A quinta competência tem a premissa de conjecturar sobre padrões e expressar relações algébricas e geométricas. Nesse sentido a GD pode ser um caminho interessante para ser explorado após os alunos já dominarem algumas partes do arcabouço teórico matemático das competências anteriores.

Não necessariamente os conceitos da própria GD, mas os conceitos matemáticos de geometria (por exemplo, desigualdade triangular, distância entre pontos, teorema de Pitágoras e transformações isométricas) porque, a partir desses conhecimentos de base, pode-se conjecturar as formas geométricas que aparecem na PGD, principalmente por meio do plano Cartesiano.

Dessa forma, buscaremos conjecturar formas geométricas e algébricas partindo da perspectiva da PGD, onde são conhecidas as distâncias e a partir delas determinar a sua forma.

Iniciaremos com alguns exercícios da PGD a partir da quantidade mínima de informação possível para existir distâncias no plano Cartesiano, aumentando a quantidade de informação a cada exemplo.

Exercício 2.3.3. *Dada a distância entre dois pontos, A e B , no plano Cartesiano. Qual o lugar geométrico das possíveis localizações desses pontos?*

Demonstração. Para explorar a realização desse exercício vamos limitar as infinitudes de realizações por congruência fixando o ponto A na origem do sistema. Sabendo a distância entre eles e utilizando o Teorema de Pitágoras, forma-se um triângulo retângulo no qual as coordenadas de B são catetos e a distância entre os pontos é a hipotenusa. Isto pode ser traduzido na equação reduzida da circunferência (2.38).

$$(x_B)^2 + (y_B)^2 = (d_{AB})^2. \quad (2.38)$$

Nesse sentido, a distância entre dois pontos em \mathbb{R}^2 forma uma circunferência de possíveis realizações, podendo o professor utilizar essa forma de conjecturar ou deduzir para compreender a equação da circunferência.

□

No próximo exercício, vamos incrementar um ponto e uma distância, com o objetivo de verificar as possibilidades de realizações utilizando a Geometria e Álgebra numa região plana.

Exercício 2.3.4. *Dados três pontos e duas distâncias entre eles em \mathbb{R}^2 . Qual é o lugar geométrico das possíveis realizações desses três pontos?*

Demonstração. Seguindo o mesmo princípio para evitar a infinidade de possibilidades por congruência, fixamos o ponto A na origem, obtendo dois casos de possíveis distâncias:

Caso 1: Dadas as duas distâncias a partir do ponto fixado (A) até os outros dois pontos (B e C).

Caso 2: Dada a distância de A até B e depois de B até o ponto C .

No Caso 1, as realizações remetem ao Exercício (2.3.3), no qual os pontos B e C estarão localizados sobre as circunferências de centro em A e raio com a medida da sua distância, d_{AB} e d_{AC} , respectivamente. Então o lugar geométrico das realizações desse caso são calculados por duas equações de circunferências com variáveis independentes.

$$\begin{cases} (x_B)^2 + (y_B)^2 = (d_{AB})^2, \\ (x_C)^2 + (y_C)^2 = (d_{AC})^2. \end{cases}$$

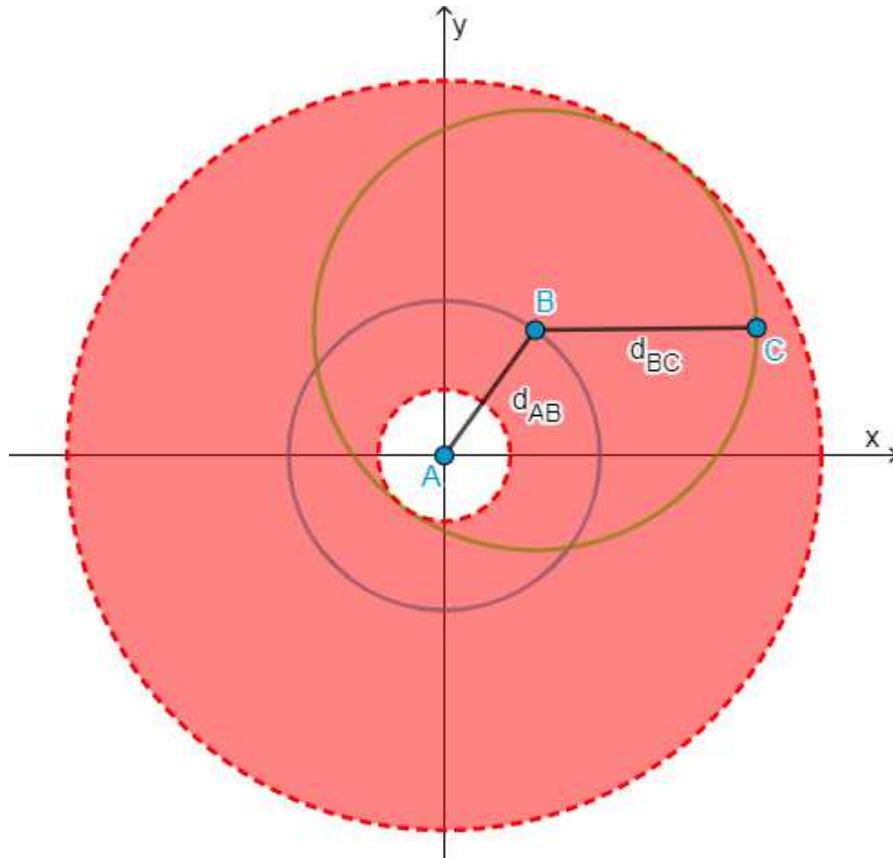
Note que esse sistema possui duas equações e quatro variáveis, sendo indeterminado, ou seja, os pontos B e C podem estar em qualquer lugar das duas circunferências.

O segundo caso difere do primeiro porque temos duas circunferências com centros distintos. Para encontrar realizações nesse caso tomemos como base o Exercício (2.3.3), no qual o ponto B está sobre uma circunferência (2.38) e, por sua vez, será o centro do lugar geométrico do ponto C com raio igual a distância entre eles (d_{BC}).

Essa situação descreve uma circunferência com centro móvel sobre outra circunferência. Assim, podemos ter dois tipos de regiões já conhecidas para determinar o ponto C , dependendo das distâncias dadas:

(i) Se $d_{AB} = d_{BC}$, então temos uma região circular de possíveis coordenadas para o ponto C .

Figura 9 – Região circular de possíveis localizações do ponto C



(ii) Se $d_{AB} \neq d_{BC}$, então temos uma região denominada de coroa circular para possíveis realizações do ponto C .

Ambas as situações que representam uma região para o ponto C podem ser descritas por um sistema de inequações (2.39), sendo o alcance máximo possível a soma das distâncias e o mínimo a diferença entre elas, que são as situações onde os três pontos serão colineares.

$$\begin{cases} (x_C)^2 + (y_C)^2 \leq (d_{AB} + d_{BC})^2, \\ (x_C)^2 + (y_C)^2 \geq (d_{AB} - d_{BC})^2. \end{cases} \quad (2.39)$$

Nesse sentido, as possíveis realizações do ponto B estão sobre uma circunferência e do ponto C estão numa coroa circular, conforme mostra a Figura (9). Note que essa figura mostra a região da coroa circular formada quando as distâncias dadas são diferentes, pois não haveria círculo interno no caso da igualdade entre elas.

□

Exercício 2.3.5. *Dados três pontos e três distâncias entre eles em \mathbb{R}^2 . Qual é o lugar geométrico das possíveis realizações desses três pontos?*

Note que, foi acrescentado apenas uma distância ao problema, ou seja, uma informação primitiva para o PGD que limitará o campo de realizações em relação a coroa circular que vimos no Exercício (2.3.4).

Demonstração. Como são conhecidas todas as distâncias entre os três pontos (A , B e C), é indiferente qual dos casos do Exercício (2.3.4) for tomado como base para explorar essa resolução.

Note que, pelo Exercício (2.3.3), podemos fixar o ponto B sobre o eixo das abscissas, sem perda de generalidade por meio de isometrias, logo, a d_{AB} também ficaria sobre o mesmo eixo.

Os pontos arbitrários após fixar a d_{AB} são: $A = (0, 0)$, $B = (d_{AB}, 0)$ e $C = (x_C, y_C)$. Formando assim as equações das circunferências com centros em A e B e raio com as distâncias até o ponto C , descrevendo o sistema de equações quadráticas (2.40).

$$\begin{cases} (x_C)^2 + (y_C)^2 = (d_{AC})^2 \\ (x_C - d_{AB})^2 + (y_C)^2 = (d_{BC})^2 \end{cases} \quad (2.40)$$

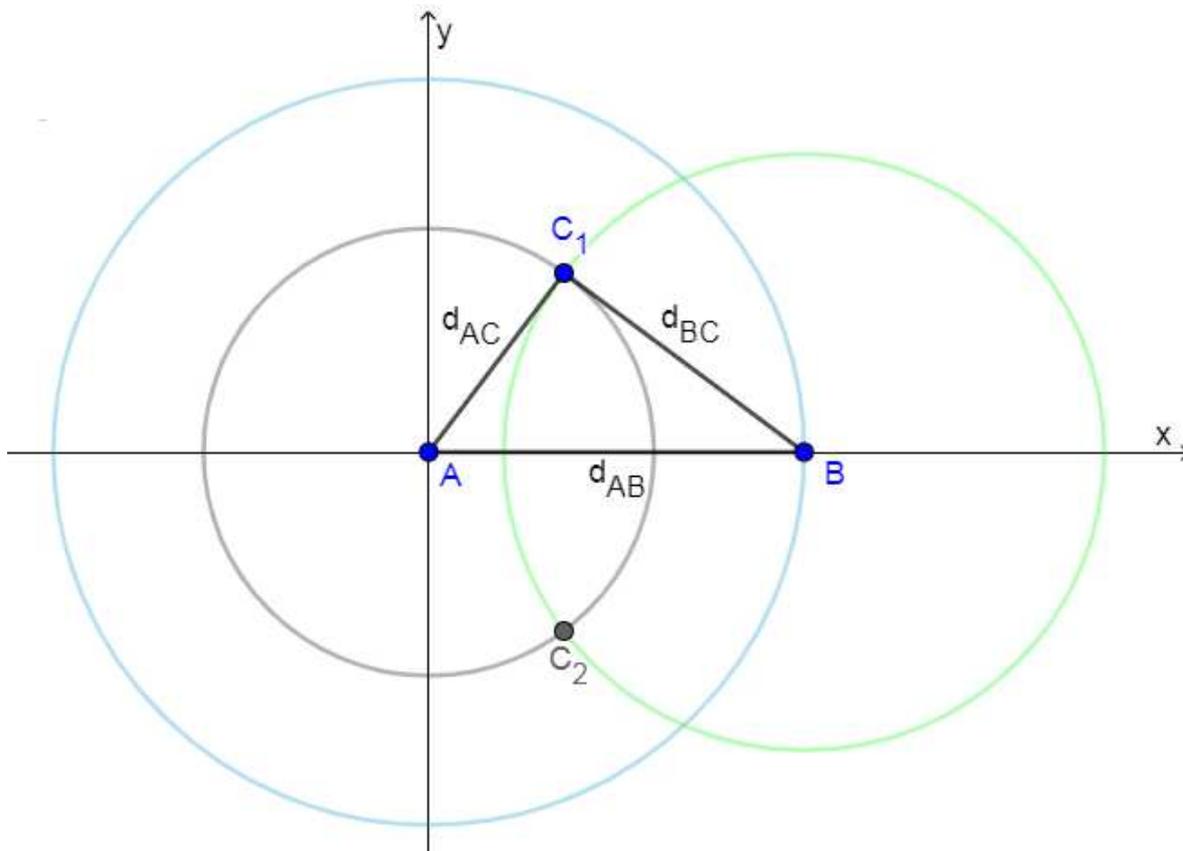
Esse sistema possui solução porque escolhemos fixar uma das distâncias, mas poderia ser generalizado por meio de transformações isométricas conforme já visto nesse referencial. Para resolver o sistema, primeiro desenvolva o produto notável e depois substitua a igualdade da primeira equação, determinando o valor de x_C :

$$\begin{aligned} (x_C - d_{AB})^2 + y_C^2 &= d_{BC}^2, \\ x_C^2 - 2x_C d_{AB} + d_{AB}^2 + y_C^2 &= d_{BC}^2, \\ -2x_C d_{AB} &= d_{BC}^2 - d_{AC}^2 - d_{AB}^2, \\ x_C &= \frac{d_{AC}^2 - d_{BC}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Substituindo (2.41) em (2.40) para determinar y_C :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d_{AC}^2 - d_{BC}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}\right)^2 + (y_C)^2 &= (d_{AC})^2, \\ y_C^2 &= (d_{AC})^2 - \left(\frac{d_{AC}^2 - d_{BC}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}\right)^2, \\ y_C^2 &= \left(d_{AC} + \frac{d_{AC}^2 - d_{BC}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}\right)\left(d_{AC} - \frac{d_{AC}^2 - d_{BC}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}\right), \\ y_C^2 &= \left(\frac{2d_{AB}d_{AC} + d_{AC}^2 - d_{BC}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}\right)\left(\frac{2d_{AB}d_{AC} - d_{AC}^2 - d_{BC}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}\right), \\ y_C^2 &= \left(\frac{(d_{AB} + d_{AC})^2 - d_{BC}^2}{2d_{AB}}\right)\left(\frac{d_{BC}^2 - (d_{AB} - d_{AC})^2}{2d_{AB}}\right), \\ y_C^2 &= \left(\frac{(d_{AB} + d_{AC} + d_{BC})(d_{AB} + d_{AC} - d_{BC})}{2d_{AB}}\right)\left(\frac{(d_{BC} + d_{AB} - d_{AC})(d_{BC} - d_{AB} + d_{AC})}{2d_{AB}}\right), \\ y_C^2 &= \left(\frac{(d_{AB} + d_{AC} + d_{BC})(d_{AB} + d_{AC} - d_{BC})(d_{BC} + d_{AB} - d_{AC})(d_{BC} - d_{AB} + d_{AC})}{4d_{AB}^2}\right), \\ y_C &= \pm \frac{\sqrt{(d_{AB} + d_{AC} + d_{BC})(d_{AB} + d_{AC} - d_{BC})(d_{BC} + d_{AB} - d_{AC})(d_{BC} - d_{AB} + d_{AC})}}{2d_{AB}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Figura 10 – Realização de três distâncias para três objetos



Note que, no cálculo da raiz quadrada para determinar o y_C é fundamental a validade das desigualdades triangulares, pois o resultado dessa multiplicação precisa ser positivo para que haja solução em \mathbb{R} . Tomando esses produtos como positivos, podemos deduzir as desigualdades triangulares (2.43).

$$\begin{cases} d_{AB} < d_{AC} + d_{BC} \\ d_{AC} < d_{AB} + d_{BC} \\ d_{BC} < d_{AB} + d_{AC} \end{cases} \quad (2.43)$$

Caso $d_{AC} = d_{BC}$, significa que os pontos estão sobre uma mesma reta e o ponto C terá apenas um local possível de coordenadas, calculado pelas Equações em (2.41) e (2.42), expresso por $C = (\frac{d_{AB}}{2}, 0)$.

Caso a desigualdade triangular for satisfeita, há dois lugares possíveis para o ponto $C(x_C, y_C)$ determinados pelas mesmas Equações (2.41 e 2.42). □

A Figura (10) mostra essa situação indicando os pontos C_1 e C_2 como as regiões possíveis de solução. Concluindo que as realizações de três distâncias dadas em três pontos determinam duas possíveis localizações de triângulos em \mathbb{R}^2 .

Essas habilidades da quinta competência objetivam desenvolver a capacidade analí-

tica dos alunos e investigar padrões criando fórmulas e generalizações de um problema, que são conhecimentos associados ao problema geral da geometria de distâncias (PGD), fornecendo a base sobre o pensamento inverso característico da GD: determinar localizações por meio de distâncias conhecidas.

É interessante comentar que, embora exista uma vasta gama de estudos sobre matrizes dentro da PGD (GRP, MCP, EDM, EDMCP, PSD e PSDMCP, veja Tabela 1), não há qualquer habilidade na BNCC que possui em seu escopo a representação ou cálculo envolvendo matrizes, podendo ser uma lacuna para futuras pesquisas sobre a BNCC e os motivos que levaram a remoção de um conhecimento tão importante na disciplina de Matemática e com tantas aplicações. Inclusive observa-se um movimento dos professores para incluir esse conteúdo novamente no currículo.

Assim, comparando as normas e objetivos da BNCC para a disciplina de Matemática no Ensino Médio, documentalmente demonstrou-se que há conteúdos da geometria de distâncias alinhados com as habilidades e competências propostas, sendo apenas necessário adaptar de maneira adequada aos interesses dos estudantes, dos professores e da sociedade.

Salientamos que esse estudo não busca substituir o modelo tradicional já difundido entre os professores, mas sim, fornecer novos caminhos e fontes de conteúdos que estão engajados com as pesquisas e com alguma vivência ou realidade do aluno, para que este possa compreender a importância do estudo e da Matemática e seguir com maior motivação para aprendê-la.

3 UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE EN- VOLVENDO GEOMETRIA DE DISTÂN- CIAS PARA O ENSINO MÉDIO

Este capítulo apresenta a metodologia da pesquisa, tratando dos dados da amostra e informações pertinentes ao tipo de estudo que foi realizado, e um plano de aula elaborado com base nos conceitos de GD com uma proposta de atividade para aplicar no Ensino Médio.

3.1 Metodologia

De acordo com Yin (2015), a pesquisa caracteriza-se como um estudo de caso aplicado, com abordagem qualitativa dos dados.

A aplicação desse estudo foi realizada na Escola de Educação Básica Feliciano Pires, localizada na cidade de Brusque/SC, cuja seleção foi feita por acessibilidade do autor, resultando numa amostra não probabilística de alunos de primeira série (44 alunos) e segunda série (53 alunos) do ensino médio, totalizando 97 alunos do ensino médio.

Vale salientar que os alunos da primeira série estão frequentando o novo modelo do ensino médio, com a nova disposição de disciplinas obrigatórias e eletivas. Os alunos da segunda série estão no modelo tradicional de disciplinas.

Critérios de inclusão (na amostra): ser estudante de primeira ou segunda fase do Ensino Médio na Escola de Educação Básica Feliciano Pires e o respectivo responsável terem preenchido e assinado o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexos A e B), respectivamente.

Critérios de exclusão (na amostra): o respectivo aluno (a) ou o seu responsável legal não ter assinado o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexos A e B), respectivamente, e, portanto, não ter assentido com a participação do estudante na pesquisa.

Os estudantes excluídos¹ devido ao critério supramencionado, mas que são integrantes da turma em que se aplicará as atividades dessa pesquisa, assistiram e participaram normalmente da aula e das atividades propostas, mas sem ter suas informações utilizadas.

Pretende-se aplicar o plano de aula (3.2), que explora os conceitos de geometria de

¹ Aproximadamente 20 alunos, os motivos são ausência dos termos assinados ou ausência do participante na aplicação

distâncias, conforme previsto na Revisão de Literatura (2), utilizando o software Geogebra em sala de aula, corroborando com o incentivo da BNCC para o uso de novas tecnologias. Nesse plano de aula também há uma atividade dinâmica com o uso do Geogebra, no qual foram coletado dados referente ao conhecimento sobre a GD.

Após a aplicação do plano de aula, o Questionário Estruturado (Anexo C) será respondido pelos alunos da amostra, sobre o qual pretende-se averiguar o alcance das habilidades e a opinião dos alunos sobre o tema (Bloco 2 - Anexo C).

A análise dos dados será realizada de maneira qualitativa sobre o desenvolvimento dos alunos durante a aplicação do plano de aula e da aquisição de conhecimentos e opiniões coletadas pelo Questionário, sendo a atividade e o Questionário documentos impressos e preenchidos pelos alunos em sala de aula.

Como a amostra é por acessibilidade, não será possível inferir os resultados para todos os alunos de escolas públicas da região, todavia, isso não fere o objetivo do estudo que consiste em verificar a inserção e aceitação do tema pelos alunos do ensino médio, assim como o alcance das habilidades propostas, pois dessa forma entende-se que a GD tem a possibilidade de ser inserida no currículo de matemática de acordo com as habilidades da BNCC.

3.2 Plano de Aula com a Aplicação de Atividade

Serão apresentados problemas e atividades de matemática que envolvem partes do conhecimento sobre a geometria de distâncias. Para motivar os alunos a respeito do conteúdo serão comentadas as situações reais de aplicações da geometria de distâncias como vistos na Seção (2.2): posicionamento de estrelas, determinar estruturas de proteínas, mecânica e cinemática com a movimentação de robôs e localização de sensores em redes sem fio.

Em cada situação será comentado de maneira superficial os assuntos matemáticos tangíveis, como: plano cartesiano, sistemas lineares, matrizes, desigualdades triangulares, quadriláteros, tetraedros, distância entre dois pontos, círculos e esferas, com o objetivo de relacionar a matemática com a sua aplicação no mundo atual. Os problemas que foram aplicados com os alunos tiveram maior ênfase no problema de localização de sensores em redes sem fio.

Como recurso didático foi utilizado o projetor para espelhar a imagem do computador utilizando o software Geogebra.

3.2.1 Conhecimentos Matemáticos Prévios

Alguns conhecimentos do Ensino Fundamental são necessários para compreender as atividades propostas por este plano de aula, são eles:

- Localização de pontos no plano cartesiano.
- Distância entre dois pontos.
- Desigualdade triangular.
- Posição relativa entre círculos no plano.

3.2.2 Objetivos

- Reconhecer o problema da geometria de distâncias.
- Demonstrar realizações simples para problemas com geometria de distâncias.
- Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais (EM13MAT301)(BRASIL, 2018).
- Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (EM13MAT501)(BRASIL, 2018).
- Localizar um ponto em um plano cartesiano dadas três distâncias entre três outros pontos conhecidos.

Salienta-se que as habilidades da BNCC supramencionadas não serão contempladas plenamente apenas por esse plano de aula, para o alcance total dessas habilidades será necessário explorar conceitos algébricos de equações e funções do 1º grau que não serão utilizados nesse plano de aula, mas que podem ser explorados dentro do conceito de geometria de distâncias.

3.2.3 Desenvolvimento Provável de Atividades

1º MOMENTO: Apresentar o problema fundamental da geometria de distâncias como o inverso ao cálculo da norma euclidiana conforme o exemplo:

Exercício 3.2.1. *Dadas as distâncias entre três pontos no plano cartesiano (\mathbb{R}^2): $d_{AB} = 3$, $d_{BC} = 4$ e $d_{AC} = 5$. Determine um conjunto de coordenadas possíveis para os pontos A , B e C no plano cartesiano.*

Demonstração. Demonstrar a existência de solução pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}d_{AB} &< d_{BC} + d_{AC}, \\d_{BC} &< d_{AB} + d_{AC}, \\d_{AC} &< d_{AB} + d_{BC}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Localizar de maneira aleatória os pontos no plano cartesiano para formar uma realização de solução. Passos para realizar no Geogebra:

- 1) Localizar o ponto A em qualquer coordenada;
- 2) Reconhecer o local geométrico (círculo) de B, com raio d_{AB} e centro em A;
- 3) Localizar o ponto B aleatoriamente sobre o círculo e reconhecer o local geométrico do ponto C que faz intersecção de dois círculos: um com centro em B e raio d_{BC} e outro com centro em A e raio d_{AC} .
- 4) Localizar o ponto C em um dos locais possíveis para formar o triângulo correspondente aos três vértices (ABC);
- 5) Enfatizar o caso de que fixando os dois primeiros vértices do triângulo, somente temos duas opções possíveis para o terceiro vértice, dado que a desigualdade triangular está satisfeita;
- 6) Mostrar que essa realização pode ser modificada por congruência, o que levaria a ter infinitas soluções a partir desse exemplo.

A Figura (2.40) ilustra essa situação resolvida fixando o ponto A na origem e o ponto B sobre o eixo das abscissas, demonstrando que uma realização desse problema forma um triângulo. \square

2º MOMENTO: Relacionar a situação-problema exemplificada no 1º momento com o problema de sincronização do relógio utilizando o mesmo problema descrito em (2.3.1).

Demonstração. De maneira análoga às circunferências no plano cartesiano, a situação pode ser resolvida realizando uma árvore de possibilidades. Tomando a Alice como referência em relação ao horário do relógio atômico e os demais em relação a própria Alice, assim constrói-se as possibilidades, conforme visto no Exercício (2.3.1).

Logo, conclui-se que há 4 soluções para o problema. Nesse momento, o professor deve enfatizar a dinâmica binária das soluções possíveis, comparando ao local possível para o ponto C no 1º momento, que também poderia ser localizado em apenas duas posições possíveis dados A e B fixos. \square

3º MOMENTO: Relacionar as situações resolvidas nos momentos anteriores com os problemas mais comuns e aplicados existentes na geometria de distâncias como: posição de

estrelas, estruturas de proteínas, análise do movimento de robôs, localização de sensores em redes sem fio, GPS, localização e controle de submarinos (LIBERTI et al., 2014).

Destacar o problema de localização de sensores de rede sem fio, pois talvez seja de maior interesse por parte dos alunos (FRANÇA et al., 2016), mostrando o funcionamento da trilateração por meio do Exercício (2.3.2).

Enfatizar que a solução é única dado que as antenas são não colineares. Desse modo, pretende-se aplicar um jogo, que se utilizará desse tipo de resolução gráfica para determinar a localização de um celular em local fictício por meio do software de geometria dinâmica Geogebra. O professor também deverá mostrar que é necessário ter no mínimo 3 antenas em um mesmo plano para poder localizar o celular, pois com apenas duas poderíamos ter dois lugares possíveis dada a intersecção de dois círculos.

4º MOMENTO: Explicar o jogo (atividade aplicada) conforme descrito na Subseção (3.2.4).

3.2.4 Jogo: Encontre o Jogador no País Cybermath

Descrição do problema do jogo: Um país fictício chamado Cybermath possui, em montanhas estratégicas, três torres nos pontos A (3, 7), B (9, 8) e C (10, 2). Um jogador desse país possui um dispositivo capaz de medir a sua distância em relação a cada uma das torres. Ao se aventurar pelo país, esse jogador realizou um registro do seu dispositivo enquanto passava por alguns locais, porém, não anotou o nome do local pelo qual estava passando no momento do registro. Ajude o jogador a determinar em qual cidade ele estava de acordo com as distâncias do registro de seu dispositivo.

Tabela 2 – Registros do Dispositivo (em cm)

Registro	1	2	3	4	5	6
Torre A	3,2	9,1	6,7	2,0	5,0	6,4
Torre B	7,3	3,0	4,0	6,7	1,4	6,3
Torre C	11,3	6,3	2,2	7,6	5,4	3,0

Em sequência apresentamos um mapa² sobre um plano cartesiano que indica as posições das antenas. Essa atividade foi construída como material didático no site do software Geogebra³.

A aplicação desta atividade foi por meio do uso do software Geogebra. Movendo controles deslizantes foi possível estabelecer as distâncias (informações primitivas) e localizando pela intersecção das três circunferências formadas em qual cidade ou lugar o Jogador estava no momento de cada registro.

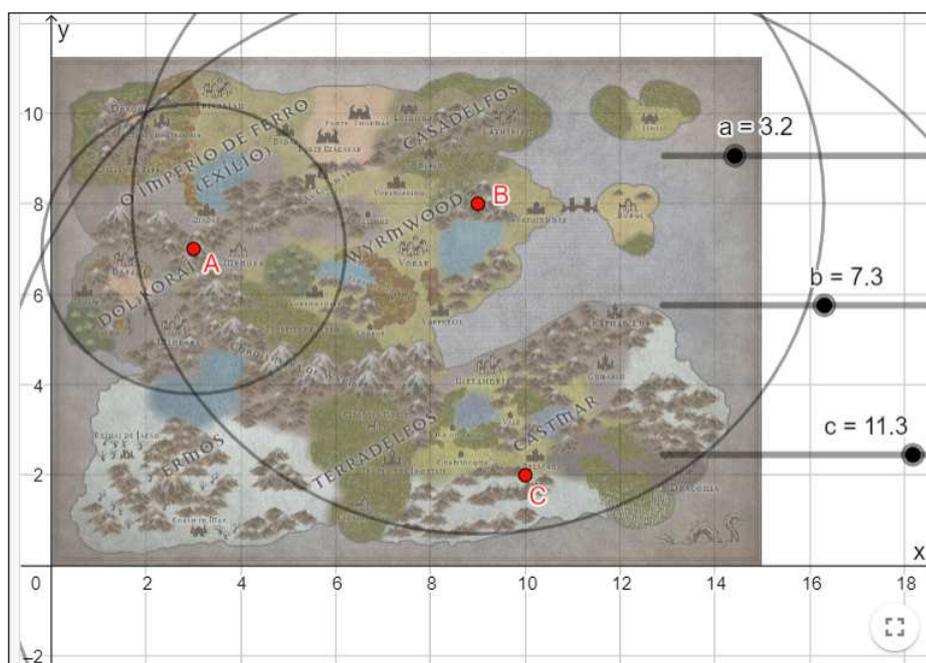
² Adaptado de Leonardo Schabbach. Disponível em: <[http://schabbach.com.br/Map%20\(1\).jpg](http://schabbach.com.br/Map%20(1).jpg)>. Acesso em: 22/10/2021.

³ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bwnqkag6>

Figura 11 – Mapa de Cybermath com a localização das torres A, B e C



Figura 12 – Exemplo de solução gráfica da atividade no Geogebra



A Figura (12) mostra a solução do Registro 1, no qual o jogador está no encontro das três circunferências, numa cidade chamada Braghir do mapa. As outras respostas do jogo podem ser encontradas na Tabela (3) do Capítulo (4).

4 RELATO DE APLICAÇÃO

Nesta seção, apresentamos os resultados da aplicação da pesquisa em sala de aula, iniciando com a análise das aulas propostas pelo plano de aula da Subseção (3.2), seguido da aplicação da atividade por meio do software Geogebra e por fim os resultados do Questionário Estruturado (Anexo C).

4.1 Resultados da Aplicação do Plano de Aula

Inicialmente, foi apresentado aos alunos o problema fundamental da Geometria de Distâncias, porém sem utilizar a teoria dos grafos como apresentado na Equação (2.1). Ao invés disso, abordou-se um exemplo do cálculo inverso do teorema de Pitágoras aplicado no plano cartesiano, junto com as desigualdades triangulares, para a existência de solução para três pontos, pois esses são conhecimentos do ensino fundamental.

Os alunos, notoriamente, tinham pouco ou nenhum conhecimento sobre o teorema de Pitágoras, assim como vários conceitos matemáticos como a desigualdade triangular e a posição relativa entre círculos. Mesmo após a explicação do aplicador/autor, eles alegaram não ter esse conhecimento no ensino fundamental.

Tal dificuldade e falta de conhecimento matemático podem ser efeitos de mudanças no ensino dos últimos anos como as aulas a distância, porém, é necessário que se faça novos estudos para investigar tais efeitos e a situação da educação matemática ocasionada após a pandemia.

Assim, uma recapitulação sobre esses conhecimentos matemáticos prévios se fez necessária e, posteriormente, foi demonstrada a realização de três pontos em \mathbb{R}^2 utilizando o Geogebra (3.2.1). Concluiu-se nesse momento que a Geometria de Distâncias busca, por meio das distâncias conhecidas, as localizações dos objetos (no caso, pontos no plano cartesiano).

No segundo momento do plano de aula, aplica-se o problema da sincronização dos relógios (LIBERTI; LAVOR, 2017), resolvido e compreendido sem dificuldade aparente dos alunos por meio do fluxograma, conforme a Figura 7.

No terceiro momento da aplicação, notou-se, particularmente ao mencionar o celular e os sensores de rede sem fio, maior atenção dos alunos na aula, corroborando com a afirmação de França et al. (2016) de que esse seria um assunto de maior interesse por parte dos alunos.

O 3º momento da aplicação foi realizado sem contratempos, e, ao relacionar as

aplicações sobre a posição de estrelas, estruturas de proteínas, análise do movimento de robôs, localização de sensores em redes sem fio, localização e controle de submarinos (LIBERTI et al., 2014), observou-se alguns comentários¹ expressando que o conteúdo da GD está sendo reconhecido e relacionado com a sua realidade.

O quarto momento da aplicação envolveu a atividade do jogo (3.2.4) para verificar se os alunos aprenderam os conceitos básicos apresentados para localizar um ponto por meio da trilateração (8). O percentual de acertos e as respostas do jogo estão descritos na Tabela 3.

Observou-se que, imediatamente após a explicação quando os alunos iniciaram a atividade, praticamente todos compreenderam e acertaram a localização. Na medida em que continuaram a resolver os problemas de trilateração, a taxa de acertos foi decrescente, indicando que a repetição do mesmo processo na atividade provocou desinteresse ou desatenção na resolução.

Mesmo com esse evidente decréscimo de acertos, é notório que a maioria dos alunos compreendeu os conceitos apresentados pelo plano de aula (3.2), com uma média geral de 93,75% de acertos.

Tabela 3 – Resultado da Aplicação do Jogo (3.2.4)

Ordem: Localização	Acertos (%)	Erros (%)
1: Draghir	99	1
2: Borgs	97,9	2,1
3: Melandria	96,9	3,1
4: Minkares	93,8	6,2
5: Vorak	90,6	9,4
6: Templo dos Imortais	84,4	15,6

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, entende-se que é possível propor problemas com Geometria de Distâncias para o Ensino Médio, elaborando e aplicando um plano de aula no qual os alunos compreendem conceitos matemáticos e adquiram conhecimentos relacionados com as habilidades e competências da BNCC.

As habilidades em questão são:

EM13MAT301: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais (BRASIL, 2018).

EM13MAT501: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando

¹ Aluno X: — Ah, então é assim que o celular funciona!

conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (BRASIL, 2018).

Conforme mencionado no plano de aula, a atividade desenvolvida não abrange totalmente as habilidades supracitadas. No caso da habilidade (EM13MAT301) não foram resolvidas equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas. Isso pode ser uma lacuna para futuras pesquisas, isto é, encontrar e demonstrar PGDs que possam ser resolvidos com equações lineares aplicáveis no nível de Ensino Médio.

No caso da habilidade (EM13MAT501) seria possível continuar a aplicação desenvolvendo a representação algébrica das circunferências no plano cartesiano, reconhecendo que não é uma equação linear e criando conjecturas para resolvê-las, conforme demonstrado no Capítulo da Quinta Competência (2.3.3). Nesse sentido, talvez seja possível atingir completamente essa habilidade por meio da Geometria de Distâncias.

A análise segue para o questionário estruturado (Anexo C), avaliando a opinião dos alunos sobre o tema e confirmando a aprendizagem dos conceitos do PGD.

4.2 Resultados do Questionário Estruturado

O primeiro bloco do questionário estruturado identificou características sociodemográficas da amostra. Destacamos aqui que cada turma teve uma quantidade próxima de participantes com idade escolar dentro da faixa de sua respectiva série. Em questão de gênero e trabalho se pode afirmar que há proporcionalmente participantes mulheres e homens, assim como alunos que trabalham ou não, sendo uma amostra bem estratificada, reduzindo algum viés sobre as repostas advindo de grandes grupos semelhantes dentro da amostra.

O segundo bloco do questionário está estruturado com 7 questões em escala Likert de 5 pontos sobre a opinião dos participantes e duas questões verificadoras de conhecimento sobre os conceitos da Geometria de Distâncias.

Para verificar a consistência interna do questionário estruturado será aplicado alfa de Cronbach (CRONBACH, 1951), que verifica a consistência interna de um questionário analisando a relação entre a soma dos quadrados das variâncias (S_i) de cada questão com o quadrado da variância total (S_t) do questionário, conforme descreve a Equação (4.1).

$$\alpha = \frac{k}{k+1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{S_t^2} \right), \quad (4.1)$$

onde k representa a quantidade de questões, no caso da presente pesquisa temos $k = 9$. O cálculo das variâncias será considerado para a escala os valores de -2 até +2 e, para as

questões de escolha, o número 1 para acertos e 0 para erros, obtendo assim as variâncias quadradas, conforme Equação (4.2).

$$\alpha = \frac{9}{9+1} \left(1 - \frac{0,73 + 1,07 + 0,24 + 0,76 + 0,8 + 0,88 + 0,84 + 0,03 + 0,01}{462,32} \right) = 0,89 \quad (4.2)$$

De acordo com Landis e Koch (1977) um coeficiente alfa² maior que 0,8 possui uma consistência interna quase perfeita, indicando que é possível medir um mesmo constructo de opiniões entre os participantes por meio deste questionário.

Os resultados percentuais de cada item da escala estão apresentados na Tabela (4).

Tabela 4 – Respostas sobre a aplicação do plano de aula em percentual

Questão/Afirmação	Escala (%)				
	1	2	3	4	5
As aulas sobre esse assunto despertaram meu interesse pela matemática.	4,1	7,2	41,2	28,9	18,6
Eu aprendi os conceitos básicos sobre Geometria de Distâncias que foram abordados.	3,1	14,4	10,3	46,4	25,8
Conhecidas três distâncias fixas de um determinado lugar é possível determinar a sua localização.	1	1	8,2	49,5	40,2
Consigo utilizar o software do Geogebra para localizar pontos e a distância entre eles.	0	7,2	12,4	29,9	50,5
Consigo resolver problemas simples de geometria de distâncias como o da sincronização de relógios.	4,1	15,5	29,9	38,1	12,4
Consigo resolver problemas de localização simples baseado no que aprendi com Geometria de Distâncias.	1	10,3	27,8	35,1	25,8
Gostaria que a Geometria de Distâncias fosse ensinada na disciplina de matemática.	3,1	5,2	14,4	32	45,4

Fonte: Elaborado pelo autor.

A primeira questão argumenta sobre o interesse dos alunos pela matemática em relação ao que foi aprendido por meio da Geometria de Distâncias. A maioria dos alunos (41,2%) demonstrou indiferença em relação ao seu interesse pela matemática.

Em conjunto com a sétima questão, que verifica a opinião dos alunos quanto a incluir a GD na disciplina de matemática, podemos entender que, mesmo não apresentando interesse imediato pela matemática na primeira questão, a maioria dos alunos (45,4%) concorda totalmente a respeito de adicionar a GD na disciplina de matemática.

A segunda, terceira, quarta e sexta questões se referem aos conceitos de Geometria de Distâncias que foram abordados, sendo consideradas as relações entre três distâncias,

² Os valores apresentados foram calculados utilizando-os integralmente pelo software Excel, arredondado para duas casas decimais apenas na apresentação dos valores no texto.

utilização do software Geogebra e localização de vértices no plano cartesiano. A maioria dos alunos concorda que compreendeu os conceitos abordados sobre a Geometria de Distâncias.

Essas questões estão indicando uma possível validação do objetivo geral da pesquisa, pois constata-se que os alunos gostariam de ter esse conteúdo de matemática ao mesmo tempo que alcançam habilidades e competências, conforme descrito nas seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, por meio de problemas da Geometria de Distâncias.

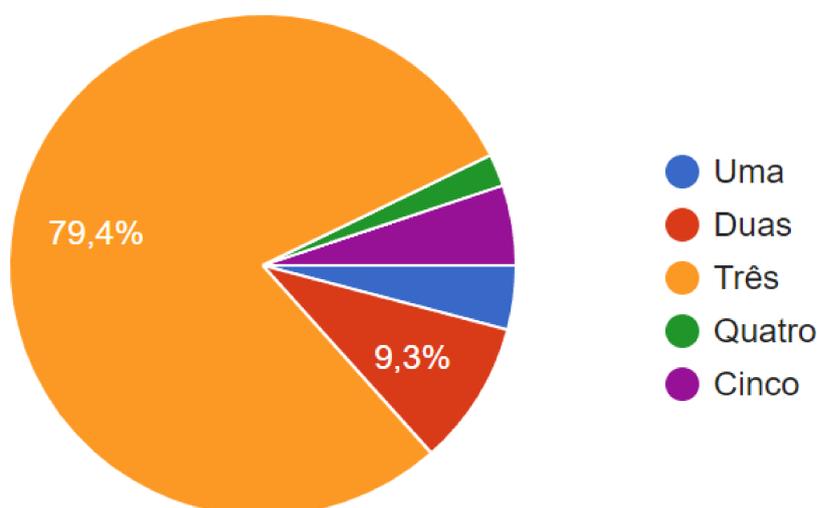
A quinta afirmativa está associada com o problema de sincronização de relógios, na qual houve uma resolução intuitiva por meio de um algoritmo binário. Durante a aplicação foi perceptível a participação dos alunos e a compreensão na resolução do problema. Porém, ao responder o questionário, não houve uma concordância sobre o tema, embora haja um grande percentual que concorda (38,1%), outra grande parte discorda ou está indeciso sobre o problema.

As últimas duas questões são verificadoras, determinando se as respostas das afirmações (2, 3, 4 e 6) estão de acordo, ou seja, se os alunos compreenderam os conceitos da Geometria de Distâncias, então eles devem conseguir responder corretamente questões sobre o assunto.

A Figura (13) apresenta as respostas confirmando que a maioria dos alunos (79,4%) respondeu corretamente a questão, compreendendo que são necessárias três distâncias relativas para localizar um ponto no plano.

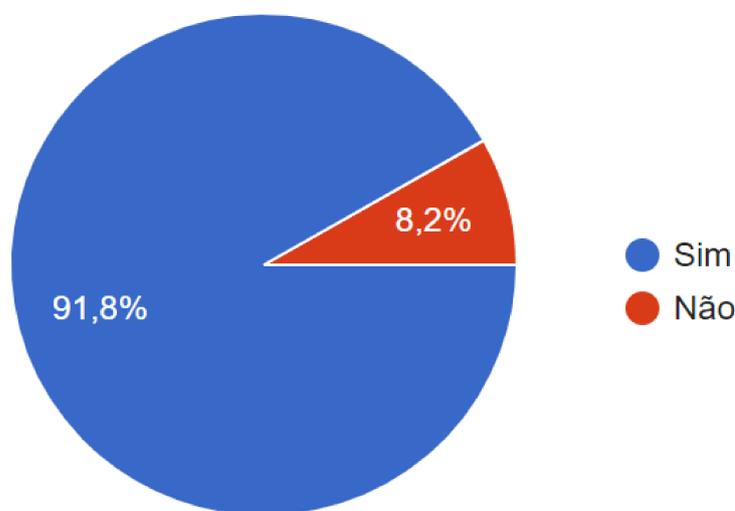
A Figura (14) apresenta a questão 6 confirmando que a maioria dos alunos realmente compreendeu os conceitos básicos que foram ensinados pelo plano de aula elaborado e aplicado.

Figura 13 – Respostas da Questão 6 (ENEM 2015)



Nesse sentido, revisitando os objetivos específicos, foram propostos problemas de

Figura 14 – Respostas da Questão 7



Geometria de Distâncias para os alunos, por meio de um plano de aula elaborado e aplicado, relatando os efeitos da aplicação e a opinião do ponto de vista dos alunos sobre essa área de pesquisa.

De acordo com o que foi proposto na revisão de literatura sobre Geometria de Distâncias (2.2), sua compatibilidade com as habilidades apresentadas na Seção (2.3) e no plano de aula (3.2), constatou-se que é possível inserir a Geometria de Distâncias como proposta de conteúdo de matemática e, por meio dela, desenvolver habilidades e competências da BNCC utilizando tecnologias ativas com o uso do Geogebra.

Note que, atingir o objetivo geral deste estudo implica concluir que alguns conteúdos da GD são aplicáveis no Ensino Médio de acordo com o atual documento normativo da educação. Logo, se faz necessário iniciar estudos que inferem esse resultado para outras regiões do Brasil, afim de consolidar a área na educação brasileira e incluí-la no ensino de Matemática.

Todavia, este trabalho já indica que a Geometria de Distâncias é uma área fértil para os pesquisadores buscarem e adaptem conceitos matemáticos que estão presentes nas realidades e vivências dos alunos para que sejam utilizados pelos professores em sala de aula, de modo com que as novas tecnologias sejam evidentes e interessantes para os alunos.

5 CONCLUSÃO

A BNCC traz a luz todas as habilidades e competências necessárias para a nossa sociedade atual, fornecendo de maneira clara o objetivo da Matemática no processo de aprendizagem. Contudo, os conteúdos e práticas dos professores continuam, em grande parte, semelhantes ao que eram antes deste documento, sendo necessário refletir sobre como ensinar Matemática com significado e incorporar algumas práticas que se demonstram bem-sucedidas (DANTE, 2021).

A Geometria de Distâncias é uma área da Matemática que possui muitas aplicações na sociedade moderna e já é conhecida superficialmente pelos alunos, servindo como ponte entre as realidades e vivências dos alunos com a Matemática da escola. Nesse sentido, este trabalho propôs inserir a GD no currículo de Matemática do Ensino Médio, de modo que alcance os objetivos da BNCC e esteja relacionado com situações reais para motivar os alunos em sua aprendizagem. Além disso, a GD possui sua base fundada na matemática e na computação, sendo ideal para utilização de novas tecnologias digitais em sala de aula, prática que está em grande evidência na BNCC, inclusive como competência geral.

Na Revisão de Literatura (2) foi possível perceber que há alguns conteúdos da Geometria de Distâncias que estão alinhados com alguns conteúdos de acordo com a BNCC, logo, foi possível localizar a GD por meio de habilidades e elaborar um plano de aula considerando conhecimentos prévios para aplicar no Ensino Médio.

Os Resultados (4) demonstraram-se positivos para a amostra, indicando que a Geometria de Distâncias pode compor algumas habilidades da BNCC e ser utilizada no Ensino Médio. Desse modo, buscar, elaborar e sintetizar problemas dessa área para utilizar em sala de aula poderia contribuir para ambas as partes interessadas: para os alunos conseguirem relacionar a Matemática com situações e reais e seguirem motivados nos estudos; e para a área de pesquisa que receberá novos pensadores e pesquisadores com um arcabouço teórico sobre GD muito mais rico.

Este resultado foi verificado por meio de um estudo de caso, logo, não se pode inferir que a GD é aplicável em qualquer Escola do Ensino Médio. É indicado que outras pesquisas busquem aplicar essa área tão rica em aplicações a fim de verificar e possivelmente inserir formalmente a GD na própria BNCC.

Referências

- ALFAKIH, A. Y. Universal rigidity of bar frameworks in general position: a euclidean distance matrix approach. In: *Distance Geometry*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 3–22.
- ALIPANAHI, B.; KRISLOCK, N.; GHODSI, A.; WOLKOWICZ, H.; DONALDSON, L.; LI, M. Determining protein structures from noesy distance constraints by semidefinite programming. *Journal of Computational Biology*, Mary Ann Liebert, Inc. 140 Huguenot Street, 3rd Floor New Rochelle, NY 10801 USA, v. 20, n. 4, p. 296–310, 2013.
- ALVES, C. C.; LAVOR, L. A. M. de; PEREIRA, H. P. Evasão escolar: um desafio para a educação na atualidade. *Revista de Pesquisa Interdisciplinar*, v. 2, n. 1, 2017.
- AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de euler. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 29, p. 637–657, 2015.
- ANDERSON, B. D.; SHAMES, I.; MAO, G.; FIDAN, B. Formal theory of noisy sensor network localization. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, SIAM, v. 24, n. 2, p. 684–698, 2010.
- ANDRIONI, A.; FREITAS, R. de; LAVOR, C.; LIBERTI, L.; MACULAN, N.; MUCHERINO, A. *Workshop on Distance Geometry and Applications 2013*. [S.l.]: Federal University of Amazonas, 2013.
- ANTUNES, F. d. S. L.; CAMPOS, F. A. B. de. Transformações geométricas no ensino médio: mediação com o geogebra. *Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 15, n. 1, p. 1–13, 2021.
- ASIMOW, L.; ROTH, B. The rigidity of graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 245, p. 279–289, 1978.
- ASIMOW, L.; ROTH, B. The rigidity of graphs, ii. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 68, n. 1, p. 171–190, 1979.
- BIGGS, N.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. *Graph Theory, 1736-1936*. [S.l.]: Oxford University Press, 1986.
- BILLINGE, S. J.; DUXBURY, P. M.; GONÇALVES, D. S.; LAVOR, C.; MUCHERINO, A. Recent results on assigned and unassigned distance geometry with applications to protein molecules and nanostructures. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 271, n. 1, p. 161–203, 2018.
- BISWAS, P.; LIAN, T.-C.; WANG, T.-C.; YE, Y. Semidefinite programming based algorithms for sensor network localization. *ACM Transactions on Sensor Networks (TOSN)*, ACM New York, NY, USA, v. 2, n. 2, p. 188–220, 2006.
- BLUMENTHAL, L. *Theory and Applications of Distance Geometry*. [S.l.]: Oxford: at the Clarendon Press, 1953.

- BLUMENTHAL, L. M. *Theory and applications of distance geometry*. [S.l.]: Chelsea Publishing Company, Incorporated, 1970. v. 242.
- BORG, I.; GROENEN, P. J. *Modern multidimensional scaling: Theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005.
- BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.
- BRASIL, S. Parâmetros curriculares nacionais: matemática/secretária de educação fundamental. *Brasília: MEC/SEF*, 1997.
- CAUCHY, A. L. Sur les polygones et polyedres. *J. Ec. Polytechnique*, v. 16, p. 87–99, 1813.
- CAYLEY, A. A theorem in the geometry of position. *Cambridge mathematical journal*, v. 2, p. 267–271, 1841.
- CONNELLY, R. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, v. 47, p. 333–338, 1977.
- CONNELLY, R. Generic global rigidity. *Discrete & Computational Geometry*, Springer, v. 33, n. 4, p. 549–563, 2005.
- CRIPPEN, G. M.; HAVEL, T. F. et al. *Distance geometry and molecular conformation*. [S.l.]: Research Studies Press Taunton, 1988. v. 74.
- CRONBACH, L. J. Coefficient alpha and the internal structure of tests. *psychometrika*, Springer, v. 16, n. 3, p. 297–334, 1951.
- CUNNINGHAM, J. P.; GHAMRANI, Z. Linear dimensionality reduction: Survey, insights, and generalizations. *The Journal of Machine Learning Research*, JMLR. org, v. 16, n. 1, p. 2859–2900, 2015.
- DANTE, L. R. *Ensino de Matemática de Bolso: Reflexões sobre como ensinar Matemática com significado, de acordo com a BNCC*. [S.l.]: Editora do Brasil, 2021.
- DOKMANIC, I.; PARHIZKAR, R.; RANIERI, J.; VETTERLI, M. Euclidean distance matrices: essential theory, algorithms, and applications. *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE, v. 32, n. 6, p. 12–30, 2015.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar. *Geometria plana*, v. 9, p. 252, 1993.
- EREN, T.; GOLDENBERG, O.; WHITELEY, W.; YANG, Y. R.; MORSE, A. S.; ANDERSON, B. D.; BELHUMEUR, P. N. Rigidity, computation, and randomization in network localization. In: IEEE. *IEEE INFOCOM 2004*. [S.l.], 2004. v. 4, p. 2673–2684.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, p. 128–140, 1741.
- FARIA, R. W. S. d. C.; MALTEMPI, M. V. Intradisciplinaridade matemática com geogebra na matemática escolar. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 33, p. 348–367, 2019.

- FERRETI, C. J.; SILVA, M. R. d. Reforma do ensino médio no contexto da medida provisória n o 746/2016: estado, currículo e disputas por hegemonia. *Educação & Sociedade*, SciELO Brasil, v. 38, p. 385–404, 2017.
- FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no brasil. *Zetetiké*, v. 3, n. 1, 1995.
- FLACK, H. D. Chiral and achiral crystal structures. *Helvetica Chimica Acta*, Wiley Online Library, v. 86, n. 4, p. 905–921, 2003.
- FRANÇA, E. A. C. S. et al. Geometria de distâncias no ensino médio. 2016.
- GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and intractability*. [S.l.]: freeman San Francisco, 1979. v. 174.
- GLUCK, H. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In: *Geometric topology*. [S.l.]: Springer, 1975. p. 225–239.
- GÖDEL, K. On the isometric embeddability of quadruples of points of \mathbb{R}^3 in the surface of a sphere. *Kurt Gödel: collected works*, Oxford University Press Oxford, v. 1, p. 276–279, 1986.
- GONÇALVES, D. S. Geometria de distâncias: aspectos teóricos e computacionais. São Carlos, SP : SBMAC, Notas em Matemática Aplicada, v. 91, p. 106, 2020.
- HAVEL, T. F.; WÜTHRICH, K. An evaluation of the combined use of nuclear magnetic resonance and distance geometry for the determination of protein conformations in solution. In: *Nmr In Structural Biology: A Collection of Papers by Kurt Wüthrich*. [S.l.]: World Scientific, 1995. p. 305–318.
- JACKSON, B.; JORDÁN, T. Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Elsevier, v. 94, n. 1, p. 1–29, 2005.
- KRISLOCK, N.; WOLKOWICZ, H. Explicit sensor network localization using semidefinite representations and facial reductions. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 20, n. 5, p. 2679–2708, 2010.
- LAMAN, G. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering mathematics*, Kluwer Academic Publishers, v. 4, n. 4, p. 331–340, 1970.
- LANDIS, J. R.; KOCH, G. G. The measurement of observer agreement for categorical data. *biometrics*, JSTOR, p. 159–174, 1977.
- LAURENT, M. Cuts, matrix completions and graph rigidity. *Mathematical Programming*, Springer, v. 79, n. 1, p. 255–283, 1997.
- LAURENT, M. Polynomial instances of the positive semidefinite and euclidean distance matrix completion problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, SIAM, v. 22, n. 3, p. 874–894, 2001.
- LAURENT, M. Matrix completion problems. *Encyclopedia of Optimization*, v. 3, p. 221–229, 2009.

- LAVOR, C.; LEE, J.; JOHN, A. L.-S.; LIBERTI, L.; MUCHERINO, A.; SVIRIDENKO, M. Discretization orders for distance geometry problems. *Optimization Letters*, Springer, v. 6, n. 4, p. 783–796, 2012.
- LAVOR, C.; LIBERTI, L.; MACULAN, N.; MUCHERINO, A. The discretizable molecular distance geometry problem. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 52, n. 1, p. 115–146, 2012.
- LAVOR, C.; LIBERTI, L.; MUCHERINO, A. The interval branch-and-prune algorithm for the discretizable molecular distance geometry problem with inexact distances. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 56, n. 3, p. 855–871, 2013.
- LAVOR, C.; MUCHERINO, A.; LIBERTI, L.; MACULAN, N. Discrete approaches for solving molecular distance geometry problems using nmr data. *International Journal of Computational Biosciences*, Citeseer, v. 1, n. 1, p. 88–94, 2010.
- LEEuw, J. de; HEISER, W. 13 theory of multidimensional scaling. *Handbook of statistics*, Elsevier, v. 2, p. 285–316, 1982.
- LIBERTI, L. Distance geometry and data science. *Top*, Springer, v. 28, n. 2, p. 271–339, 2020.
- LIBERTI, L.; LAVOR, C. *Euclidean distance geometry*. [S.l.]: Springer, 2017. v. 133.
- LIBERTI, L.; LAVOR, C.; MACULAN, N. A branch-and-prune algorithm for the molecular distance geometry problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 15, n. 1, p. 1–17, 2008.
- LIBERTI, L.; LAVOR, C.; MACULAN, N.; MUCHERINO, A. Euclidean distance geometry and applications. *SIAM review*, SIAM, v. 56, n. 1, p. 3–69, 2014.
- LIBERTI, L.; LAVOR, C.; MUCHERINO, A. The discretizable molecular distance geometry problem seems easier on proteins. In: *Distance Geometry*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 47–60.
- LIBERTI, L.; MASSON, B.; LEE, J.; LAVOR, C.; MUCHERINO, A. On the number of solutions of the discretizable molecular distance geometry problem. In: SPRINGER. *International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*. [S.l.], 2011. p. 322–342.
- LOPES, M. M. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software geogebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 27, n. 46, p. 631–644, 2013.
- MENGER, K. Untersuchungen über allgemeine metrik. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 100, n. 1, p. 75–163, 1928.
- MORÉ, J. J.; WU, Z. Distance geometry optimization for protein structures. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 15, n. 3, p. 219–234, 1999.
- MUCHERINO, A.; LAVOR, C.; LIBERTI, L. The discretizable distance geometry problem. *Optimization Letters*, Springer, v. 6, n. 8, p. 1671–1686, 2012.

- SAXE, J. B. Embeddability of weighted graphs in k-space is strongly np-hard. In: *Proc. of 17th Allerton Conference in Communications, Control and Computing, Monticello, IL*. [S.l.: s.n.], 1979. p. 480–489.
- SCHOENBERG, I. J. Remarks to maurice frechet’s article“sur la definition axiomatique d’une classe d’espace distances vectoriellement applicable sur l’espace de hilbert. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 724–732, 1935.
- SILVA, M. R. D. A bncc da reforma do ensino médio: o resgate de um empoeirado discurso. *Educação em revista*, SciELO Brasil, v. 34, 2018.
- SINGER, A. Angular synchronization by eigenvectors and semidefinite programming. *Applied and computational harmonic analysis*, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 20–36, 2011.
- SO, A. M.-C.; YE, Y. Theory of semidefinite programming for sensor network localization. *Mathematical Programming*, Springer, v. 109, n. 2, p. 367–384, 2007.
- TOLANI, D.; GOSWAMI, A.; BADLER, N. I. Real-time inverse kinematics techniques for anthropomorphic limbs. *Graphical models*, Elsevier, v. 62, n. 5, p. 353–388, 2000.
- WU, D.; WU, Z.; YUAN, Y. Rigid versus unique determination of protein structures with geometric buildup. *Optimization Letters*, Springer, v. 2, n. 3, p. 319–331, 2008.
- YEMINI, Y. *The positioning problem-a draft of an intermediate summary*. [S.l.], 1978.
- YEMINI, Y. Some theoretical aspects of position-location problems. In: IEEE. *20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1979)*. [S.l.], 1979. p. 1–8.
- YIN, R. K. *Estudo de Caso-: Planejamento e métodos*. [S.l.]: Bookman editora, 2015.

ANEXO A – TCLE

**Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para Responsáveis Legais de Participantes
Menores de Idade**

Prezado (a) Sr. (a),

Convidamos o/a estudante _____ para participar da pesquisa “Novos Caminhos para a Matemática no Ensino Médio com a Geometria de Distâncias”, sob a responsabilidade e orientação do Prof. Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina – Campus de Blumenau. Essa pesquisa pretende inserir novos assuntos para a disciplina de matemática do ensino médio, buscando ser mais concreto e interessante para os alunos.

A participação do/da estudante é voluntária e se dará a partir da participação de três aulas sobre o assunto, resolução de uma atividade e respondendo um questionário com a opinião própria sobre a aplicação. As aulas, a atividade e o questionário serão aplicados em sala de aula pelo pesquisador e autor do estudo Samuel Haag.

Os riscos de participação nesta pesquisa são mínimos, inclui eventual sensação de cansaço durante a atividade e da aplicação do questionário. Se em algum momento o/a estudante se sentir constrangido ou não se sentir à vontade participar da atividade ou de responder alguma pergunta do questionário, poderá optar por não fazer e não responder, sem prejuízo ao estudante. Durante toda a aplicação, caso o/a estudante se sentir cansado (a), poderá realizar pausas quando julgar necessário para se restabelecer. Salientamos que estará sentado para esse procedimento, a fim de que esse risco seja minimizado.

Mesmo depois de assinar este termo você tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta dos dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo ao estudante.

Os resultados da pesquisa serão analisados e publicados, mas a identidade do/a estudante não será divulgada, sendo guardada em sigilo. O/A estudante não terá nenhuma despesa, em caso do/a estudante ter algum prejuízo material ou imaterial devidamente comprovado em decorrência da participação nesta pesquisa, este/a será ressarcido (a) de seus gastos (compensação material, exclusivamente de despesas do participante e seus acompanhantes, quando necessário, tais como materiais didáticos, transporte e alimentação) ou indenizado (a) (em espécie, para caso de qualquer outro dano decorrente da participação) nos termos da legislação vigente, conforme os itens IV.3.g e IV.3.h da Resolução CNS 466/12.

Para qualquer outra informação, você poderá entrar em contato com o pesquisador responsável, Felipe Delfini Caetano Fidalgo, no PROFMAT/UFSC – Campus de Blumenau – SC, Rua João Pessoa, 2750, Bairro Velha, CEP 89036-256, pelo telefone (47) 3232-5136 ou pelo e-mail felipe.fidalgo@ufsc.br, ou com o comitê de ética em pesquisa com seres humanos da Universidade Federal de Santa Catarina - CEPESH-UFSC, localizado no Prédio Reitoria II, 7º andar, sala 701, na Rua Desembargador Vitor Lima, nº 222, Trindade, Florianópolis-SC, CEP 88.040-400, Contato: (48) 3721-6094, e-mail cep.propesq@contato.ufsc.br.

Os pesquisadores declaram conhecer e cumprir os requisitos da Lei Geral de Proteção de Dados (Lei Nº 13.709, de 14 de agosto de 2018) quanto ao tratamento de dados pessoais e dados pessoais sensíveis que serão utilizados para a execução do presente projeto de pesquisa.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, fui informado (a) sobre o que o pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo e permito que o (a) menor sob minha responsabilidade participe do projeto, sabendo que não vai ganhar nada e que pode desistir quando quiser. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

Brusque/SC, _____ de _____ de 2022.

ANEXO B – TALE

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido Para Participantes Menores de Idade

Prezado (a) estudante,

Convidamos você para participar da Pesquisa “Novos Caminhos para a Matemática no Ensino Médio com a Geometria de Distâncias”, sob a responsabilidade e orientação do Prof. Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina – Campus de Blumenau. Essa pesquisa pretende inserir novos assuntos para a disciplina de matemática do ensino médio, buscando ser mais concreto e interessante para você.

Sua participação é voluntária e se dará a partir da participação de três aulas sobre o assunto, resolução de uma atividade e respondendo um questionário com sua opinião sobre o assunto. As aulas, a atividade e o questionário serão aplicados em sala de aula pelo pesquisador e autor do estudo Samuel Haag.

Os riscos de participação nesta pesquisa são mínimos, inclui eventual sensação de cansaço durante a atividade e da aplicação do questionário. Se em algum momento você se sentir constrangido ou não se sentir à vontade participar da atividade ou de responder alguma pergunta do questionário, poderá optar por não fazer e não responder, sem prejuízo a sua pessoa. Durante toda a aplicação, caso sinta-se cansado (a), poderá realizar pausas quando julgar necessário para se restabelecer. Salientamos que você estará sentado para esse procedimento, a fim de que esse risco seja minimizado.

Se depois de assinar este termo você desistir de participar, tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta dos dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo a sua pessoa.

Os resultados da pesquisa serão analisados e publicados, mas sua identidade não será divulgada, sendo guardada em sigilo. Você não terá nenhuma despesa, em caso de se sentir prejudicado de alguma maneira, material ou imaterial, devidamente comprovado em decorrência da sua participação nesta pesquisa, você será ressarcido (a) de seus gastos (compensação material, exclusivamente de despesas do participante e seus acompanhantes, quando necessário, tais como materiais didáticos, transporte e alimentação) ou indenizado (a) (em espécie, para caso de qualquer outro dano decorrente da participação) nos termos da legislação vigente, conforme os itens IV.3.g e IV.3.h da Resolução CNS 466/12.

Para qualquer outra informação, você poderá entrar em contato com o pesquisador responsável, Felipe Delfini Caetano Fidalgo, no PROFMAT/UFSC – Campus de Blumenau – SC, Rua João Pessoa, 2750, Bairro Velha, CEP 89036-256, pelo telefone (47) 3232-5136 ou pelo e-mail felipe.fidalgo@ufsc.br, ou com o comitê de ética em pesquisa com seres humanos da Universidade Federal de Santa Catarina - CEPESH-UFSC, localizado no Prédio Reitoria II, 7º andar, sala 701, na Rua Desembargador Vitor Lima, nº 222, Trindade, Florianópolis-SC, CEP 88.040-400, Contato: (48) 3721-6094, e-mail cep.propesq@contato.ufsc.br.

Os pesquisadores declaram conhecer e cumprir os requisitos da Lei Geral de Proteção de Dados (Lei Nº 13.709, de 14 de agosto de 2018) quanto ao tratamento de dados pessoais e dados pessoais sensíveis que serão utilizados para a execução do presente projeto de pesquisa.

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, fui informado (a) sobre o que o pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em participar do projeto, sabendo que não vou ganhar nada e que posso desistir quando quiser. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo aplicador, ficando uma via com cada um de nós.

Brusque/SC, _____ de _____ de 2022.

ANEXO C – Questionário Estruturado

Bloco 1 – Características Sociodemográficas

- 1) Qual a sua idade? _____
- 2) Qual foi o sexo atribuído ao seu nascimento? () Masculino () Feminino () Não informar
- 3) Qual a série do ensino médio que você está cursando? () 1ª Série () 2ª Série () 3ª Série
- 4) Atualmente você está trabalhando? () Sim () Não () Não informar

Bloco 2 – Dados da Pesquisa

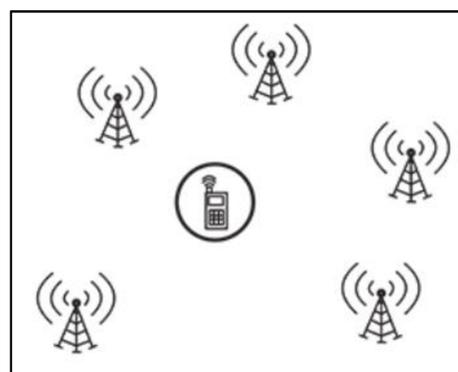
- 5) Complete a tabela assinalando apenas um número para cada afirmação, de acordo com a sua opinião concordando ou discordando sobre as afirmações a seguir, considerando a escala:

1 = Discordo totalmente 2 = Discordo 3 = Indeciso 4 = Concordo 5 = Concordo totalmente

Afirmação	1	2	3	4	5
As aulas sobre esse assunto despertaram meu interesse pela matemática.					
Eu aprendi os conceitos básicos sobre geometria de distâncias que foram abordados.					
Conhecidas três distâncias fixas de um determinado lugar é possível determinar a sua localização.					
Consigo utilizar o software do Geogebra para localizar pontos e a distância entre eles.					
Consigo resolver problemas simples de geometria de distâncias como o da sincronização de relógios.					
Consigo resolver problemas de localização simples baseado no que aprendi com geometria de distâncias.					
Gostaria que a geometria de distâncias fosse ensinada na disciplina de matemática.					

- 6) (Questão 88 - ENEM 2015): Para obter a posição de um telefone celular, a polícia baseia-se em informações do tempo de resposta do aparelho em relação às torres de celular da região de onde se originou a ligação. Em uma região, um aparelho está na área de cobertura de cinco torres, conforme o esquema.

Considerando que as torres e o celular são puntiformes e que estão sobre um mesmo plano, qual o número mínimo de torres necessárias para se localizar a posição de telefone celular que originou a ligação?



- a) Uma b) Duas c) Três d) Quatro e) Cinco

- 7) (Adaptado de GASPAROTO; PAIM; MENTA, 2009): Uma pessoa está no Brasil à 1750km de Teresina, no Piauí, à 1133km de Cuiabá, no Mato Grosso e à 1020km da cidade de São Paulo. É possível determinar em qual cidade está essa pessoa?

() Sim () Não

ANEXO D – Declaração de Anuência

DECLARAÇÃO DE ANUÊNCIA

DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins e efeitos legais que, objetivando atender as exigências para a obtenção de parecer do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, e como representante legal da Instituição EEB Feliciano Pires, tomei conhecimento do projeto de pesquisa: “Novos Caminhos para a Matemática no Ensino Médio com a Geometria de Distâncias”, e cumprirei os termos da Resolução CNS 466/12 e suas complementares, sob responsabilidade de Samuel Haag e como esta instituição tem condição para o desenvolvimento deste projeto, autorizo a sua execução nos termos propostos.

Brusque, 07/02/2022.

ASSINATURA: 

NOME: *Carlos Eduardo Marinho de Silva*

CARGO: *Diretor*

CARIMBO DO/A RESPONSÁVEL: