UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

MODELO DE BARRAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO LONGO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Kleber Gonçalves do Nascimento

Uberaba - Minas Gerais

26 de maio de 2022

MODELO DE BARRAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO LONGO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Kleber Gonçalves do Nascimento

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza

Uberaba - Minas Gerais

26 de maio de 2022

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

N195m

Nascimento, Kleber Gonçalves do

Modelo de barras na resolução de problemas ao longo do ensino fundamental / Kleber Gonçalves do Nascimento. -- 2022.

80 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2022

Orientadora: Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Modelo de barras. 3. Base Nacional Comum Curricular. I. Souza, Marcela Luciano Vilela de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51:373

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

KLEBER GONÇALVES DO NASCIMENTO

MODELO DE BARRAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO LONGO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração "Matemática"da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 26 de maio de 2022

Banca Examinadora

Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza – Orientadora
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Profa. Dra. Letícia Guimarães Rangel
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Ms. Sérgio Augusto Amaral Lopes
Centro Universitário Cerrado Patrocínio

de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021.

Documento assinado eletronicamente por **Leticia Guimarães Rangel**, **Usuário Externo**, em 28/06/2022, às 14:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021.

Documento assinado eletronicamente por **Sérgio Augusto Amaral Lopes**, **Usuário Externo**, em 28/06/2022, às 19:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0751957** e o código CRC **BC80C91B**.

Dedico esta conquista aos meus pais Nazareno Cândido Nascimento (in memoriam) e Silene Gonçalves do Nascimento grandes incentivadores na Educação. Ao meu irmão Genézio Cândido do Nascimento Neto (in memoriam) que estaria extremamente feliz em ver a conclusão deste trabalho. Ao meu irmão Kleiton Gonçalves do Nascimento inspirador e companheiro. A minha esposa Luana Cristina de Souza Freitas, incentivadora em realizar o PROFMAT, que esteve comigo ao longo desta trajetória. E ao meu pequeno Antônio que nasceu durante a caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço este trabalho, em primeiro lugar, a Deus, que meu deu saúde e forças para superar todos os momentos difíceis com os quais me deparei, permitindo chegar até aqui sem esmorecer, por me ajudar a acreditar no meu potencial.

À Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza, pelo apoio, estímulo e ensino. Pelo exemplo de conduta ética, pessoal e de pesquisa. Pela paciência e sabedoria, nos momentos difíceis, e por todo o conhecimento compartilhado.

Aos meus pais, Silene e Nazareno (in memoriam). Por todo amor dedicado aos filhos e empenho incondicional na promoção da educação e valores.

Aos meus irmãos, Kleiton, Genézio (in memoriam) e Raissa que encontram -se próximos fisicamente e a minha irmã Calla distante fisicamente. A minha cunhada Juliana pelas conversas compartilhadas sobre educação. Meu muito obrigado pelas palavras de incentivo e conforto.

À Luana, esposa, pelas palavras de incentivo, pela ajuda nos momentos de dificuldade e por sempre me trazer ao foco – terminar a dissertação.

As pessoas que, no dia a dia, torceram pela minha vitória, Glauco e família, Cristina e família, Renata e família.

Aos meus colegas de trabalho Gustavo Pimenta, Patrícia Carange pelo compartilhamento de experiências.

Á professora Vera Lúcia Gomes Caiado que, desde o Ensino Médio, incentivou a ser professor e contribuiu para minha formação e conduta profissional.

À professora Marilene Ribeiro Resende, pelos ensinamentos a respeito da Matemática e também pelo exemplo de professora comprometida com a aprendizagem dos alunos.

À Profa. Dra. Mônica Siqueira, pelas conversas sobre as demandas do ensino na Educação Básica.

As Professores Heron Félix, Danilo Marques, Nelson Inforzato, Rafael Peixoto e Rafael Ottoboni pela postura ética e compromisso com a aprendizagem.

Aos meus colegas de PROFMAT, em especial: Sérgio Alex, Paloma, Bruno, Sérgio Cunha, Patrícia, Raoni, Paula e Karina pelo convívio harmonioso, de aprendizado e descontrações.

À Yunelsy Nápoles Alvarez pela contribuição na editoração em Latex e por sugestões pontuais e pertinentes ao trabalho.

A todos que torceram pela minha vitória e partilharam direta ou indiretamente desta conquista, o meu muito obrigado!

“No intelecto não existe nada que não tenha estado antes nos sentidos.” Locke

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar o Modelo de Barras como proposta para o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas. Esta metodologia alcançou sucesso na transição do pensamento aritmético para o algébrico. No trabalho são apresentadas as teorias que fundamentam e norteiam o trabalho dos professores desde o letramento matemático até o final do Ensino Fundamental. São expostos exercícios em grau de dificuldade crescente para que os envolvidos na preparação de atividades de sala de aula conheçam a abordagem pictórica para resolução de problemas com palavras. É exposto a construção do Modelo de Barras com seus aspectos teóricos do currículo de Singapura. Este País introduziu e consolidou a resolução de problemas de palavras por meio do Modelo de Barras. O trabalho é finalizado com uma coletânea de exercícios extraídos e adaptados dos livros de Singapura e outros países para exemplificar a gama de problemas dos diversos assuntos que podem ser explorados com o Modelo de Barras. Em cada conjunto de problemas foram listadas as habilidades presentes na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) que o professor desenvolverá nas suas atividades de sala de aula.

Palavras-chave: Modelo de barras, resolução de problemas, BNCC, Ensino Fundamental.

ABSTACT

This dissertation aims to present the Bars Model as a proposal for teaching Mathematics through problem solving. This methodology has achieved success in the transition from arithmetic to algebraic thinking. The work presents the theories that underlie and guide the work of teachers from mathematical literacy to the end of Elementary School. Exercises of increasing difficulty are exposed so that those involved in the preparation of classroom activities become familiar with the pictorial approach to solving word problems. The construction of the Bars Model is exposed with its theoretical aspects of the Singapore curriculum. This country introduced and consolidated word problem solving through the Bars Model. Finished the work with a collection of exercises extracted and adapted from books from Singapore and other countries to exemplify the range of problems of the different subjects that can be explored with the Bars Model. (BNCC) that the teacher will develop in their classroom activities.

Keywords: Bar Model, problem solving, BNCC, Elementary School.

Lista de ilustrações

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Os anos dedicados ao magistério na Educação Básica permitiu a identificação da dificuldade dos alunos em resolver problemas matemáticos de diversos tipos. As notas baixas na área de Matemática e suas Tecnologias no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o desempenho ruim dos alunos brasileiros no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) confirmam o fato relatado.

A Matemática da Educação Básica apresenta grande diversidade de problemas tanto numéricos quanto algébricos nos currículos escolares no Brasil e ao redor do mundo. Torna-se importante o professor buscar estratégias que otimizem a capacidade de compreensão dos enunciados e a aquisição de estratégias de resolução de problemas baseadas no desenvolvimento do letramento matemático. A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) define Letramento Matemático como:

> Competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018, p. 266).

O PISA em sua matriz de referência define o letramento matemático:

> É a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (OCDE, 2019, p.77).

Das oito competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental destacamos três:

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

No atual contexto econômico e social em que o professor de matemática e os alunos estão inseridos surge o questionamento: Qual tipo de matemática os jovens precisarão para a inserção na sociedade?

Segundo Boaler (2019), a matemática aprendida na maioria das salas de aula não é aquela que as pessoas aplicarão nas demandas no mercado de trabalho e nos desafios da sociedade contemporânea. No mundo da criação de aplicativos e respostas rápidas às tecnológicas versáteis, os indivíduos precisam raciocinar e resolver problemas de todos os tipos, aplicando métodos flexíveis a novas situações. Decorar centenas de métodos-padrão, regras e modelos prontos para repetir em provas não contribuem para a formação integral dos indivíduos e dificulta a conquista do sucesso profissional e pessoal.

O professor na sua responsabilidade de intermediar a aprendizagem dos seus alunos necessita de meios para desenvolver seu trabalho no cotidiano das aulas. Escolher as metodologias que o auxiliam no seu planejamento de atividades em livros, artigos e materiais didáticos torna-se o caminho para o resultado efetivo da aprendizagem matemática.

Com a implantação da BNCC em 2018 surgiu a demanda por metodologias de resolução de problemas alinhadas com os objetivos deste documento:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018).

Os estudos de Onuchic *et al.* (2014) evidenciaram que o professor ao aplicar a Metodologia de Resolução de Problemas promove o desenvolvimento da criatividade, da autonomia, formação do pensamento crítico e a construção de conhecimentos a partir de trabalho em grupo. O aluno assume o papel de protagonista na aquisição da própria aprendizagem.

A Resolução de Problemas é uma habilidade essencial à qual se deve desenvolver nos alunos durante a trajetória escolar. Segundo Pozo e Angón (1998), um dos veículos mais acessíveis para levar os alunos a aprender a aprender é a solução de problemas. Esta, pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como, a utilização dos conhecimentos disponíveis para dar respostas a situações variáveis e diferentes. Ensinar os alunos a resolver problemas supõem dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder.

Ao longo do processo de resolução de problemas, os alunos irão usar suas habilidades para analisar, fazer ensaios de soluções, determinar as causas, avaliar possíveis estratégias ou soluções para enfrentar ou resolver os conflitos e, no final, implementar a solução mais eficaz (OSMAN *et al.*, 2018).

O estudo da Metodologia de Resolução de Problemas presente em Onuchic, Junior e Pironel (2017) revela que as capacidades dos alunos em resolução de problemas ainda exigem uma melhoria substancial. Relata-se como pontos de dificuldade para o avanço na capacidade de resolver problemas: contato com abordagem tradicional da Matemática baseada em rotinas, ensino centrado no professor, trabalho em sala de aula restrito a simples heurísticas em detrimento do tempo e do espaço escolar.

A Metodologia de Resolução de Problemas proposta pelo Sistema Educacional de Singapura torna-se alternativa para prospecção de ideias para professores e gestores brasileiros. Possui desenvolvimento baseado na troca de experiências entre professores e foco na aprendizagem efetiva dos alunos. O motor da metodologia é o Método Pictórico para resolver problemas de palavras. Este, tem início no terceiro ano de alfabetização e acompanha os estudantes até o fim do ensino fundamental, em Singapura. Assim, contribui para a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

Segundo Baldin e Silva (2017) o Modelo de Barras, inserido na Metodologia de Resolução de Problemas, é uma estratégia que auxilia a transição do pensamento aritmético para o abstrato, habilidade requerida na resolução de problemas da Álgebra. A compreensão da atribuição de significados aos símbolos no lugar de valores numéricos é a técnica de ensino aprendizagem da matemática desenvolvida no currículo de Singapura, especialmente nos anos finais do ensino fundamental.

Segundo Abreu, Diniz e Teixeira (2018), o Método Pictórico (modelo de barras), contribuiu para que os alunos da educação básica, de Singapura, alcançassem resultados significativos em avalições internacionais. As duas mais relevantes são: TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) desenvolvida de quatro em quatro anos pela International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) e o Programme for International Student Assessment (PISA), desenvolvido de três em três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

A proposta deste estudo é apresentar o Modelo de Barras para professores do Ensino Fundamental, de modo a contribuir com a tarefa de descobrir metodologias de ensino na resolução de problemas, visto que, tal metodologia ainda não se encontra presente nos livros didáticos brasileiros.

O conhecimento deste método realizar-se-á por meio de levantamento bibliográfico dos trabalhos científicos realizados no Brasil e exterior. Os problemas e suas resoluções apresentados serão extraídos ou adaptados dos materiais didáticos produzidos para professores de Singapura, Estados Unidos e Inglaterra.

O sucesso comprovado do Modelo de Barras como metodologia para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas numéricos e algébricos no ensino fundamental em Singapura, justifica o estudo, pois, proporciona aos professores o conhecimento da metodologia de ensino na sua essência, o trabalho permitirá que os alunos superem dificuldades e usufruam de sua capacidade criativa, permitindo a evolução do pensamento concreto para o abstrato.

Segundo a BNCC:

> a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos (BRASIL, 2018).

Esta dissertação está estruturada em 5 capítulos, com destaque para o Capítulo 2 – Referencial Teórico, o Capítulo 3 – Modelo de Barras e o Capítulo 4 – Problemas de aplicação do Modelo de Barras.

O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico do Modelo de Barras a partir de um levantamento bibliográfico de artigos no Portal da Capes, Web of Science e Science Direct. O estudo retrata as principais ideias das teorias de aprendizagem predominantes no Modelo de Barras presentes em pesquisas nacionais e internacionais. São descritos os elementos que determinam o modo como o professor desenvolve o raciocínio dos seus alunos e a sua aplicação na metodologia de resolução de problemas. Ao final, são relatados os estudos nacionais sobre a aplicação prática do Modelo de Barras em salas de aula.

O Capítulo 3 demonstra a origem do Modelo de Barras e a apresentação das principais características do currículo de Singapura. Para finalizar, apresentamos modelos que são utilizados na aplicação do modelo com exemplos de problemas resolvidos por meio de barras, baseados em orientações presentes nos livros didáticos de Singapura.

O Capítulo 4 mostra problemas adaptados de livros didáticos de Singapura, Estados Unidos e Reino Unido resolvidos pelo Modelo de Barras. Neste momento são inseridas as habilidades presentes na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) com objetivo de estabelecer um elo entre um currículo já estabelecido e outro em consolidação.

Esperamos, desta forma, auxiliar a divulgação do Modelo de Barras para profissionais de educação que trabalhem com a matemática na Educação Básica. Acrescentar o Modelo de Barras como estratégia de resolução de problemas aritméticos e algébricos, desenvolvendo mais habilidades nos estudantes. Por fim, contribuir para que o letramento matemático dos alunos seja atingido de maneira efetiva.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Para garantir a aprendizagem significativa de assuntos matemáticos pelos alunos, o professor deve a todo momento aprimorar seus conhecimentos a respeito dos fundamentos teóricos que estruturam a aprendizagem, as metodologias adequadas para condução das aulas e prospectar na literatura estratégias de ensino que promovam motivação e interesse de todos envolvidos no processo. A seguir, tem-se a exposição de elementos teóricos importantes para o trabalho com a Metodologia de Resolução de Problemas.

Inicia-se com a pergunta: O que é um problema?

A definição de problema tem sido relacionada às tarefas para as quais o indivíduo que procura resolver não conhece de início a maneira de obter a solução. Kantowski (1980) considera que um problema é a situação com que uma pessoa se depara e não tem um procedimento ou algoritmo que conduza à solução.

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) conceitua que:

> Um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (NCTM, 1991).

Pesquisas mais recentes, trazem a ideia de problema, atrelada à incerteza da solução e ao envolvimento do aluno numa tarefa matemática não procedimental ou sobre a qual o aluno não possui ideia inicial de como proceder para obter a solução (SERRAZINA, 2017).

Para Polya (1995) resolver um problema significa encontrar um caminho que ainda não é conhecido e que contorne um obstáculo para alcançar o objetivo traçado, por meios adequados.

Vigotsky citado em Delgado, Mayta e Alfaro (2018), define a resolução de problemas como "uma habilidade social aprendida nas interações sociais no contexto de atividades cotidianas" onde a criança, graças ao ambiente em que se encontra, adquire habilidades para resolver seus problemas. Da mesma forma, os professores proporcionam experiências motivadoras que potencializam o desenvolvimento de habilidades e competências que irão facilitar a obtenção do conhecimento de forma natural.

De acordo com Llivina (1999), a resolução de problemas matemáticos é uma habilidade específica que se desenvolve no processo de ensino-aprendizagem e que se configura na personalidade do indivíduo ao sistematizar, com uma certa qualidade e fazendo uso de metacognição, ações e conhecimentos que participam de sua resolução.

Brito (2006) enfatiza:

> A solução de problemas é, portanto, geradora de um processo através do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princí-

> pios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma re-organização conceitual cognitiva. (BRITO, 2006, p. 19).

O Ministério da Educação de Singapura, nos documentos curriculares, descreve a solução de problemas em termos do que ela abrange, e não como uma definição do que é a solução de problemas. Segundo Kho, Yeo e LIM (2009):

> A resolução de problemas matemáticos inclui o uso e a aplicação da matemática em tarefas práticas, em problemas da vida real e na própria matemática. Neste contexto, um problema cobre uma ampla variedade de situações de problemas matemáticos de rotina a problemas em contextos desconhecidos e investigações abertas que fazem uso da matemática relevante e processos de pensamento (KHO; YEO; LIM, 2009).

A resolução de problemas é fundamental para a aprendizagem da Matemática, envolve a aquisição e aplicação de conceitos, assim como habilidades em uma ampla gama de situações, incluindo problemas não rotineiros, abertos e do mundo real (KHO; YEO; LIM, 2009).

O professor deve conhecer os aspectos teóricos do processo de aprendizagem dos alunos, planejar de maneira coerente as atividades aplicadas e avaliar os resultados obtidos em práticas de sala de aula. Tornam-se indispensáveis, o estudo da forma como o aluno aprende e a busca por novas metodologias de promoção da aprendizagem matemática.

2.1 Fundamentação teórica do Método Pictórico em Singapura

O Método Pictórico é um elemento didático presente no currículo de Matemática de Singapura. Conforme explica Mei e Li (2014), a fundamentação teórica e os objetivos do currículo apoiam-se nas teorias de Jerome Bruner, Zoltan Paul Dienes, Richard Skemp, George Polya, James G. Greeno e Walter Kintsch.

2.1.1 Jerome Bruner: Abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA)

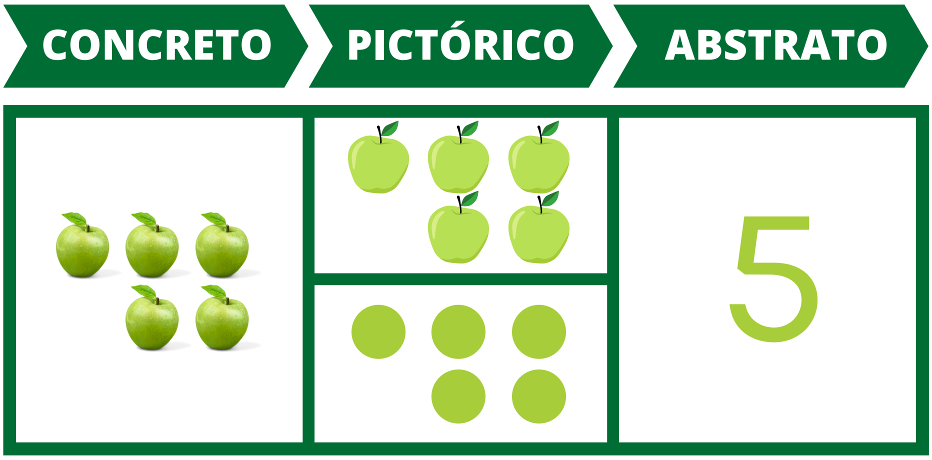
Na concepção de Bruner, o desenvolvimento do indivíduo é caracterizado pelo domínio progressivo da representação do conhecimento, a partir de três etapas de processamento da informação: ativo (concreto), icônico (pictórico) e simbólico (abstrato) (MEI; LI, 2014).

O primeiro processo, o concreto, está diretamente relacionado com a ação e a manipulação de objetos, sendo que, esta fase está condicionada aos mecanismos pelos quais a criança aprende e representa a realidade. Neste momento, prioriza-se o contato dos materiais com os quais os alunos podem brincar e introduzir os conceitos ou objetos que estão a estudar.

O segundo processo, correspondente à representação icônica (pictórica) da realidade, são introduzidas formas de traduzir para o pictórico o que já se sabe no concreto. A representação da compreensão dos problemas realiza-se por meio de imagens e esquemas. Neste momento, acontece o uso de barras (retângulos) com orientação dos professores aos alunos.

Por último, a representação simbólica (abstrata) corresponde a um processo mais elaborado e complexo, uma vez que, a linguagem simbólica, de caráter abstrato, utilizada nesta representação não tem qualquer relação direta com a realidade. Os conceitos são formalizados ou institucionalizados em regras, fórmulas ou definições, para gerar conhecimento matemático.

Figura 1 – Abordagem concreto-pictórico-abstrato



Fonte: Adaptado de Mei e Li (2014).

Na resolução de problemas, podemos encontrar aspectos dessa abordagem. Ao se deparar com uma situação problemática, o aluno se envolve em um contexto concreto, ou seja, real e próximo a ele, para então criar um diagrama que permite visualizar a forma de proceder na resolução. Por fim, encerrar o problema com a transição para o abstrato; seja de natureza aritmética ou algébrica (ZÚÑIGA, 2013).

Outro aspecto, da teoria de Bruner, presente no currículo de Singapura que apoia o Modelo de Barras é o plano de estudo em espiral. As ideias fundamentais devem ser desenvolvidas no currículo, repetidamente, construindo as teorias matemáticas até que o aluno compreenda todo o aparato formal inerente a esta. Os planos de estudos devem considerar que os alunos aprendem as várias vertentes da Matemática de acordo com a sua idade, incorporando atividades mais lúdicas nos primeiros anos de ensino, para posteriormente desenvolverem os conceitos e definições mais elaborados.

O papel do professor torna-se fundamental na proposta de Bruner, gerar espaços que motivem o aluno a descobrir e relacionar conceitos com outros já adquiridos promove o processo de construção do conhecimento. Quando um processo matemático é negligenciado, as camadas elementares de conhecimento matemático, são facilmente perdidas. Um aluno, ao não perceber um determinado conteúdo, tentará construir novo conhecimento "em cima" de camadas deficitárias. Por não ter aprendido os conteúdos chaves necessários, ele ouve e trabalha um novo conceito sem que faça sentido, encontrando dificuldades. O autor defende a tese que resolução de problemas, o desenvolvimento do raciocínio matemático e a comunicação são prioridades no desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, deixando em segundo plano a memorização de regras e procedimentos.

2.1.2 Zoltán Dienes: Princípios de variabilidade matemática e variabilidade perceptiva

Zoltán Paul Dienes, matemático húngaro, estudou a construção de conceitos, os processos de formação do pensamento abstrato e o desenvolvimento das estruturas matemáticas nos primeiros anos de escolaridade. Destaca-se a teoria de variabilidade, que deve ser sistemática, propõe ao aluno enfrentar variedade de tarefas sem repeti-las ao longo do processo. Colaborou para a construção de currículos de vários países, incluindo Itália, Alemanha, Hungria e Estados Unidos. No currículo de Singapura, dois dos princípios da teoria são marcantes: variabilidade matemática e variabilidade perceptiva.

A variabilidade matemática busca aprimorar o aprendizado a partir da multiplicidade de procedimentos matemáticos do mesmo conceito. Ao usar uma determinada abordagem ou material, deve-se focar os atributos matemáticos necessários para compreensão do conceito. Por exemplo, os conceitos que envolvam variáveis devem ser aprendidos por meio das experiências que incluam o maior número possível de variáveis (SANTOS, 2019).

A variabilidade perceptiva integra as múltiplas representações do mesmo conceito, de forma que o aluno o perceba de maneiras diferentes. Consiste na utilização de diferentes materiais e de diferentes perspectivas para explorar um determinado assunto. Por exemplo, ao explorar as decomposições dos números, deve-se procurar diferentes abordagens com grupos de alunos, com lápis, com cubos de encaixe, com material dourado, com personagem de uma história (DINIZ; TEIXEIRA; PACHECO, 2019).

O professor, no ensino baseado na variabilidade possui um papel muito importante, deve estimular e aprimorar os processos de aprendizagem do aluno para que ele se envolva na tarefa, assim, ocorre uma construção real do conhecimento. Além disso, criar um espaço susceptível de aprendizagem, para que o aluno não apenas se comprometa com a constituição do conhecimento, mas perceba a necessidade de verbalizar os procedimentos para demonstrar o nível de real compreensão do que está executando.

O professor deve ter consciência da dinâmica do processo de aprendizagem, no que se refere tanto à turma como o individual, sendo necessário, um conhecimento geral sobre a turma e sobre cada aluno, sobre as suas potencialidades e dificuldades e, também, sobre as diferentes formas de aprendizagem. O papel de mediador torna-se imprescindível na condução do processo de ensino aprendizagem (DIENES, 1970).

2.1.3 Richard Skemp: compreensão instrumental versus compreensão relacional

O matemático e psicólogo Richard Skemp distingue, em seus estudos, dois tipos de compreensão: a compreensão instrumental (ou procedimental) e a compreensão relacional.

A compreensão instrumental (ou procedimental) consiste na aquisição de um conjunto de indicações, regras ou métodos, determinados e bem definidos, e na capacidade de utilizar em uma sequência de passos. O aprendiz conhece uma determinada regra ou algoritmo que executa de memória, sem ter uma percepção do motivo pelo qual está a utilizar num determinado contexto (DINIZ; TEIXEIRA; PACHECO, 2019).

Por outro lado, a compreensão relacional (ou conceitual) diz respeito a um conjunto de estruturas conceituais mais abrangentes que possibilitam a elaboração de planos que ajudam não só a relacionar métodos e estratégias, mas também, a sua adaptação em outros contextos, permitindo resolver uma grande variedade de tarefas e problemas. Nesta linha de pensamento, é possível adaptar e aplicar o mesmo método resolução em diferentes problemas (DINIZ; TEIXEIRA; PACHECO, 2019).

Embora seja mais difícil de aprender, pois coloca em inter-relação diferentes ideias, conceitos, regras e esquemas, a compreensão relacional provoca a aprendizagem mais duradoura e consistente. Neste sentido, as ideias básicas para a compreensão de um determinado tópico tornam-se fundamentais para a compreensão de outros conceitos mais complexos (CALDERÓN, 2014).

O desafio para os professores é tentar construir definições a partir de uma boa coleção de exemplos. Escolher uma coleção adequada é mais difícil do que parece, uma vez que, os exemplos devem ter em comum as propriedades que formam o conceito, mas não outras.

A escolha da coleção de exemplos plausíveis exige uma compreensão muito clara por parte do professor; do conceito a ser fundamentado. A maioria dos conceitos matemáticos é adquirida desde muito cedo, é necessário, que o educador constantemente medie, reafirme e/ou corrija, as atividades que levam à construção do conceito, pois se o aluno internaliza erroneamente um conceito, o aprendizado fica difícil de elementos mais abstratos, à medida que a escola avança (CALDERÓN, 2014).

Skemp (1980) defende que o professor seja mediador da ativação dos conceitos já apreendidos pelos alunos para enriquecer o novo a ser aprendido, estabelecendo desafios, que em primeiro momento, são alcançáveis pela maioria da turma. Percebe-se que uma resposta tem mais significado para alguém que já fez uma pergunta antes.

2.1.4 George Polya: aprendizagem por meio da resolução de problemas

Grande parte da metodologia usada no Método Pictórico usado em Singapura é apoiado nas bases teóricas de George Polya. O autor propõe uma série de estratégias para resolver problemas, facilitando assim o desenvolvimento dessa habilidade tanto no ensino como na aprendizagem da matemática. No seu estudo propõe quatro etapas básicas para resolução de um problema: as heurísticas necessárias para resolver e entender o problema, traçar um plano, executar o plano e revisar a solução. Em cada uma dessas etapas, a metacognição e a análise do processo devem ser promovidas por meio de perguntas.

Durante a compreensão, o professor apresentará um problema com nível intermediário de dificuldade, apresentando-o de forma que motive o aluno a resolvê-lo. Em seguida, responderá a cada uma das perguntas dos alunos para facilitar a compreensão. Além disso, o aluno deve ser capaz de repensar com suas próprias palavras (parafrasear).

Posteriormente, ocorrerá a identificação dos dados relevantes e estabelecerá claramente qual é o objetivo. Na etapa de elaboração ou configuração de um plano, o professor faz perguntas para estimular a busca de uma solução, estratégias são exploradas e relacionadas a experiências anteriores (problemas semelhantes).

Na fase de execução do plano, uma vez escolhida a estratégia, o aluno deve aplicá-la, verificando se todas as etapas realizadas estão corretas e coerentes. O professor irá motivar a reflexão dos procedimentos.

Na última etapa, serão feitas as demonstrações, a revisão será incentivada e a verificação dos resultados com discussão terá como foco as possíveis generalizações para solucionar novos problemas.

Segundo Mei e Li (2014), o Modelo de Barras é uma das muitas estratégias que os alunos de Singapura aprendem a aplicar na resolução de problemas, este método é uma variante específica da estratégia de desenhar uma imagem, presente no processo de resolução de problemas em quatro etapas proposto por George Polya.

1. Entenda o problema.
    - Você pode descrever o problema em suas próprias palavras?
    - Que informações são dadas?
    - O que você precisa achar?
    - Há informação que falta ou não é necessária?
2. O que você pode fazer para ajudá-lo a resolver o problema? Aqui estão algumas coisas que você pode fazer:
    - Desenhar uma imagem.
    - Fazer uma lista.
    - Escolher uma operação.
    - Fazer suposições e verificar.
    - Procurar um padrão.
    - Procurar um problema correlato.

- Usar um cenário antes e depois.
- Reformular o problema.
- Simplificar o problema.
- Resolver parte do problema.

3. Executar o plano.

    - Resolva o problema usando seu plano da etapa 2.
    - Se você não pode resolver o problema, faça outro plano.
    - Escreva a resposta.

4. Verificar o resultado.

    - Leia a pergunta novamente.
    - Você responde à pergunta?
    - Sua resposta faz sentido?
    - A sua resposta está correta?

Você pode usar os seguintes itens para ajudar a verificar sua resposta:

- Fatos familiares.
- Estimativa.
- Substitua o desconhecido no problema pela resposta.

2.1.5 James G. Greeno e Walter Kintsch

Kintsch e Greeno aplicaram a teoria do esquema à resolução de problemas matemáticos, em suas investigações dos processos de resolução de problemas, postularam que dois tipos de representações são formadas durante a resolução de problemas matemáticos, uma para o quantidades numéricas e relações no problema, e outra para o contexto da própria história (KINTSCH; GREENO, 1985). Este trabalho foi posteriormente verificado por pesquisadores que caracterizaram esta dupla representação como o "modelo de problema" e o "modelo de situação". A complexidade da solução de problemas com palavras é capturada neste modelo esquemático.

Kintsch e Greeno passaram a categorizar o número finito de situações-problema de palavras que os alunos do ensino fundamental normalmente enfrentam. Duas classificações-chave faziam parte de situações inteiras e situações de comparação. No desenho do modelo de barras, os alunos são solicitados a categorizar um problema de palavra como uma situação parte-todo ou uma situação de comparação. Diferentes modelos são desenhados para cada tipo de problema de palavra (HAR, 2010).

2.2 Modelo de Barras no Brasil

Os primeiros estudos brasileiros, do Modelo de Barras, foram realizados pela professora Yuriko Yamamoto Baldin, docente na Universidade Federal de São Carlos, a partir do ano de 2014. Difundiu o método por meio de palestras, oficinas para professores e orientações de dissertações, que aliavam a fundamentação teórica do método e a prática da resolução de problemas. Na obra "Resolução de problemas na sala de aula: uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de ensino da matemática", traz aplicação do método pictórico na resolução de problemas com foco na Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) em atividades para sala de aula.

Queiroz (2015) avaliou a transição da aritmética para a álgebra baseada na resolução de problemas, por meio de aplicação de atividades para alunos do ensino fundamental II. Planejou e executou 6 (seis) atividades utilizando a metodologia de Resolução de Problemas seguindo as orientações e George Polya, juntamente com a metodologia do Modelo de Barras seguindo as diretrizes do Currículo de Singapura. Concluiu que as aulas passaram a ser mais atrativas e com maior participação familiar nas atividades. Verificou um aumento do aprendizado matemático e ao final, contribuiu também com a produção de material didático para professores.

O estudo intitulado "O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7° ano do Ensino Fundamental", realizado por Gois (2014), observou durante o ano letivo, que os alunos demostraram maior argumentação sobre suas conjecturas e facilitou a compreensão do significado parte-total das frações e das operações básicas, desta forma, há construção significativa dos conceitos.

A pesquisa de Dotti (2016), selecionou materiais didáticos, aplicados no Sistema Educacional de Singapura, para alunos do 1°ano ao 6°ano da Educação Básica, concluiu que o Modelo de Barras pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico nas crianças do primeiro ciclo do ensino fundamental, desde que, acompanhada de uma proposta curricular coerente.

(CINTRA, 2017) apresentou e analisou as contribuições do Modelo de Barras, desenvolvido em Singapura, para o ensino de frações com foco em resoluções de problemas. As atividades propostas para os alunos de sétimo ano do Ensino Fundamental foram baseadas nos Livros "My Pals Are Here!" de Singapura e abordaram conceitos básicos de frações como identificação de numerador e denominador, obtenção de frações equivalentes e operações de adição e subtração de frações com mesmo denominador e denominadores distintos.

Santos (2019) abordou o conceito de fração e o Método Pictórico presente no currículo de Singapura. No trabalho citou os elementos das teorias que fundamentam a representação pictórica para resolução de problemas. Em seguida, aplicou o Método Pictórico no estudo de frações para alunos do 7° ano do ensino fundamental, enfatizando a abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato. O foco foi contribuir para construção de um ensino significativo e provocador no qual o aluno é o protagonista na aquisição do conhecimento e autônomo na capacidade de aprender. Ao final elencou uma coletânea de exercícios comentados sobre frações presentes nas provas da OBMEP e nas avalições nacionais PROVA BRASIL e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O estudo de Fontes (2019) apresentou, a partir de sete problemas, a aplicação da metodologia de resolução de problemas de George Polya aliada ao Modelo de Barras adotado pelo sistema de ensino de Singapura. No texto, trouxe uma breve discussão a respeito do processo de transição da aritmética para álgebra e também enfatizou a necessidade de o professor reconhecer as dificuldades que os alunos encontram neste processo. Após mostrar a resolução de problemas extraídos da OBMEP, concluiu que o Modelo de Barras propicia ao aluno compreender melhor os problemas, uma vez que, ao desenhar uma barra para descrever um dado, transforma o abstrato em algo concreto e mais próximo de sua realidade.

O Grupo de Tecnologia do Projeto Fundão Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, coordenado pela professora Letícia Rangel, pesquisa desde 2016, o potencial do Modelo de Barras. O objetivo é o desenvolvimento profissional permanente do professor e o ensino da disciplina matemática com investigação e divulgação de modelos e práticas de letramento matemático nas diferentes etapas da Educação Básica. O Modelo de Barras é apresentado aos professores por meio de oficinas e minicursos em encontros promovidos nas universidades. Em Rangel *et al.* (2017) é apresentado e discutido o Modelo de Barras como estratégia de resolução de problemas do Ensino Fundamental. No material distribuído aos participantes encontra-se uma seleção de exercícios sobre frações resolvidos com aplicação do método desenvolvido em Singapura. Os autores destacam:

> O Modelo de Barras é uma forma de dar significado a partir da representação pictórica para o que está sendo apresentado de forma retórica em um problema que envolve raciocínios aritmético e algébrico (RANGEL *et al.*, 2017).

A dissertação de Oliveira (2020) apresentou e discutiu o Modelo de Barras como estratégia para resolução de problemas de porcentagem para alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. Abordou elementos teóricos do método de resolução usando retângulos de diferentes tamanhos em atividades aplicadas em sala de aula, usando problemas de livros usados em Singapura, aplicados no SAEB e no PISA.

A Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica (ANPMat), em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), promove desde 2013 a realização de Simpósios da Formação do Professor de Matemática com objetivos de propor reflexões sobre a formação do Professor de Matemática e de debater propostas para melhoria da qualidade de ensino da educação básica. Em Lopes e Malta (2018) foi apresentado, na forma de um minicurso para professores, uma coleção de problemas resolvidos com a abordagem do Método Pictórico. Segundo os autores:

> O objetivo principal deste minicurso foi discutir o potencial da resolução de problemas a partir de representação pictórica e oferecer ao professor a possibilidade de novas estratégias de ensino e de abordagens para a resolução de problemas típicos do ensino fundamental (LOPES; MALTA, 2018).

Na obra de Souza, Lopes e Nascimento (2020) é sugerido o Método Pictórico como abordagem auxiliar ao ensino de Álgebra no Ensino Fundamental. O objetivo é contribuir, por meio da abordagem pictórica na resolução de problemas, na transição do pensamento aritmético para o algébrico. O texto mostra uma coleção de exercícios resolvidos pelo Modelo de Barras de Singapura, estes ilustram o uso de retângulos para representar quantidades conhecidas e desconhecidas nos problemas. São apresentadas resoluções contendo a abordagem pictórica paralela a algébrica com intuito de mostrar aos professores uma alternativa de resolução que explore mais a compreensão dos enunciados e o significado das operações envolvidas para os alunos.

Atualmente se tem abordado no contexto educacional a gamificação, uma técnica que usa jogos em situações que não são brincadeira. Os benefícios da utilização de Jogos na educação estão associados a desenvolver habilidades como atenção, tomada de decisões, planejamento de ações, quando jogamos aprendemos conceitos, traçamos estratégias e planejamos ações, refletimos diante de situações problemáticas e resolvemos problemas (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007).

O trabalho de Holetz (2019) apresentou o jogo chamado Problemix em que explorou as operações com frações no Ensino Fundamental. Para a construção do jogo baseou-se na Metodologia de Resolução de Problemas de Singapura na forma do Modelo de Barras. Após a criação e aplicação do jogo, observou-se que essa metodologia facilitou o entendimento dos problemas pelos educandos. Além disso, através da aplicação dos questionários e análise dos mesmos, concluiu que o jogo teve uma boa aceitação por parte dos alunos e favoreceu a aprendizagem colaborativa entre os mesmos.

Ao fazer a pesquisa bibliográfica desta seção contatou-se uma lacuna na literatura brasileira a respeito do Modelo de Barras aplicado a resolução de problemas. No material encontrado predominou dissertações de mestrado, textos produzidos para oficinas e minicursos e ebooks produzidos por instituições envolvidas na capacitação de professores. Em relação ao conteúdo dos materiais encontrados prevalece a elaboração de atividades para os alunos resolverem com ajuda dos professores em sala de aula. O assunto predominante é o de Frações. Há a necessidade de mais textos a respeito do Modelo de Barras e as teorias que o estruturam, artigos científicos que comprovem, na realidade brasileira, a eficiência da abordagem pictórica na resolução de problemas. O conhecimento de novas abordagens metodológicas desenvolvidas em outros países pode contribuir para a evolução da nossa aprendizagem matemática ao longo do Ensino Fundamental.

3 MODELO DE BARRAS

3.1 Histórico do Modelo de Barras

Em 1975, estudos realizados pelo Ministério da Educação de Singapura, revelaram que 25% dos alunos após seis anos de escola primária não atingiam o nível mínimo de letramento matemático definido pelo ministério. Resultados como os apresentados levaram o governo de Singapura, em agosto de 1978, a propor uma revisão do Sistema Educacional que resultou na formulação de uma novo sistema de educação (KHO; YEO; LIM, 2009).

Implementado em 1981, o Sistema objetivava fornecer educação aprimorada para cada criança, sendo como principal função o desenvolvimento de currículo e materiais de ensino. Estiveram envolvidos na implementação os programas e coleta sistemática de feedback em cada estágio da implementação, assim como revisões e refinamentos (KHO; YEO; LIM, 2009).

Entre as equipes desse projeto, destaca-se a equipe do Projeto de Matemática Primária, liderada pelo Dr. Kho, o qual foi encarregado de produzir materiais de instrução para o ensino e aprendizagem de matemática primária, com abordagens de ensino e desenvolvimento profissional de professores (KHO; YEO; LIM, 2009).

No presente ano, a equipe aplicou o diagnóstico, testes de habilidades básicas de matemática, para uma amostra de 17.000 alunos do ensino fundamental I (1° ao 4° ano). As descobertas foram desanimadoras com mais da metade dos alunos do 3° e 4° anos com desempenho insatisfatório (KHO; YEO; LIM, 2009).

Em 1981, no Instituto do desenvolvimento de Singapura, o Dr. Kho e equipe de redatores de currículos, professores experientes de escolas em conjunto com consultores e Ministério da Educação, produziram o novo currículo para matemática do ensino fundamental. O currículo adotou uma Abordagem Pictórica-Abstrata para o ensino e aprendizagem da matemática. Esta abordagem fornece aos alunos experiências de aprendizagem necessárias e contextos significativos, usando manipuladores concretos e representações pictóricas para construir conhecimento matemático abstrato desde as séries iniciais do ensino fundamental (KHO; YEO; LIM, 2009).

Como parte do novo currículo primário de matemática, o Método Pictórico foi introduzido como uma heurística para ajudar os alunos a resolver problemas de palavras. Em 1987, o primeiro artigo sobre o Método Pictórico foi apresentado pelo professor Kho e sua equipe. As características do método encontravam-se retratadas por modelos matemáticos na forma de representações pictóricas, compreendendo três modelos distintos e ilustrado com exemplos de como os modelos poderiam ser utilizados para resolver problemas de palavras (HAR, 2010).

A abordagem concreto-pictórico-abstrato permeou a concepção dos materiais e pedagogia do ensino de matemática no ensino fundamental, coerente com os três estágios de desenvolvimento cognitivo de Bruner, o estágio concreto, o estágio icônico e estágio simbólico. O método foi desenvolvido como uma distinta atividade intermediária que ativaria a fase icônica de aprendizagem (MEI; LI, 2014).

O trabalho de Zoltán Dienes forneceu uma base para o método, uma vez que pede aos alunos para construir diagramas ou fazer representações de problemas de palavras. O método usa um processo estruturado pelo qual os alunos são ensinados a visualizar relações matemáticas abstratas e suas estruturas de problemas variáveis através de pictóricas representações (FERRUCCI *et al.*, 2008).

3.2 Currículo de Singapura

No ambiente de transição dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN para a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) no Brasil, que iniciou no ano de 2017, conhecer experiências bem-sucedidas, como a de Singapura, pode nortear a construção desta nova fase brasileira.

O Ministério da Educação de Singapura orienta a missão educativa pela máxima Thinking School, Learning Nation (Escola que Pensa, Nação que aprende), cujo objetivo é “de preparar uma geração de cidadãos empenhados que saibam pensar e que sejam capazes de contribuir para o contínuo crescimento e prosperidade de Singapura”.

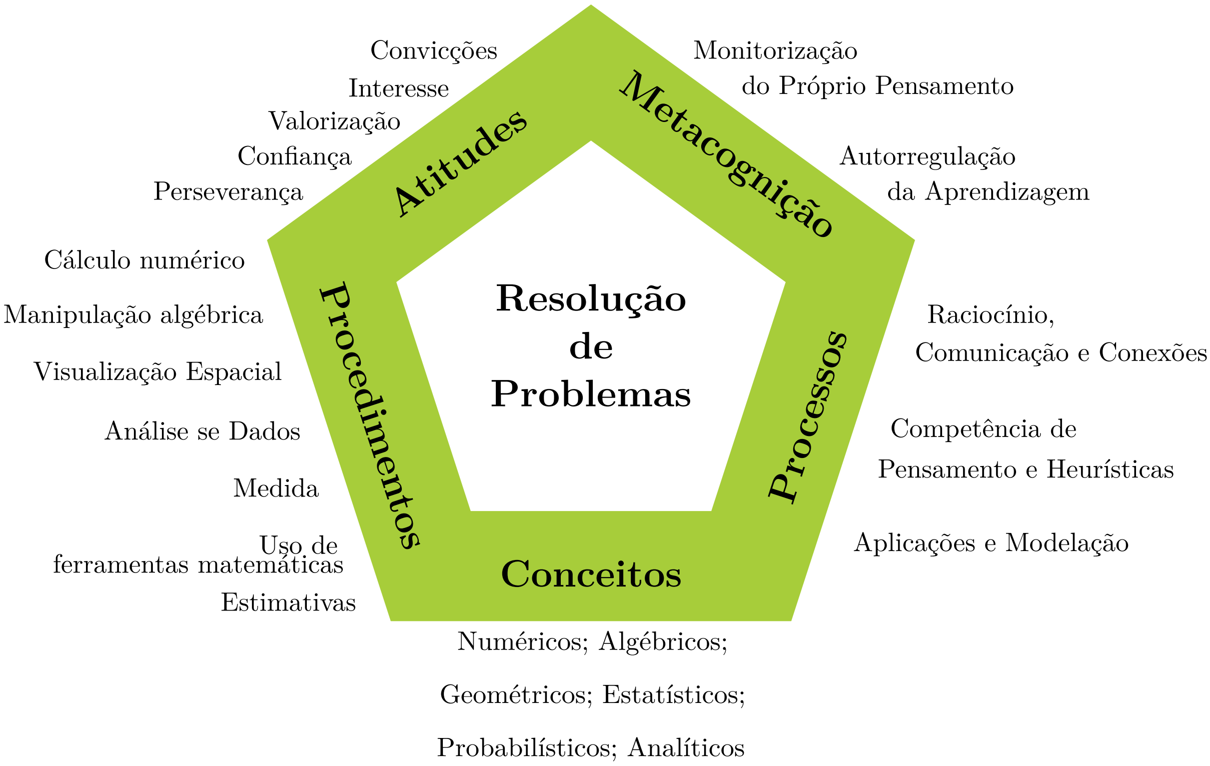
O documento Mathematics Syllabus – Primary One to Four, do Ministério da Educação de Singapura, sistematiza a estrutura curricular deste país, no que diz respeito ao ensino da Matemática. O quadro conceptual do Currículo de Matemática de Singapura foi publicado em 1990 e tem sido objeto de pequenos alinhamentos, sendo o último de 2013. As alterações pontuais aos programas são implementadas mediante feedback, após experimentação em contexto de sala de aula.

O Modelo Pentagonal do Currículo destaca os seis pilares que sustentam todo o percurso de aprendizagem do aluno.

A Resolução de Problemas ocupa uma posição central neste modelo e apresenta correlação com cinco componentes: os conceitos, os procedimentos, os processos, a metacognição e as atitudes. Este modelo retrata o ensino de Matemática em patamar no qual as crianças participam ativamente da aprendizagem.

A base do modelo pentagonal destaca os conceitos matemáticos com os quais os alunos devem desenvolver e explorar as ideias matemáticas em profundidade, com perspectivas de uma relação coerente e não com fatos isolados.

Figura 2 – Modelo Pentagonal



Fonte: Adaptado de (KHO; YEO; LIM, 2009).

Os Procedimentos matemáticos são conjuntos sequenciais de ações a executar (algoritmos). Devem ser realizados após os alunos adquirirem uma sólida compreensão dos conceitos. Estas competências devem ser desenvolvidas com enfoque nos princípios matemáticos que estão na base, entender o porquê fazer antes do como fazer ("*Why before How*").

Os Processos matemáticos são as competências envolvidas na aquisição e na aplicação de conhecimento, sendo o raciocínio matemático a capacidade de analisar situações e construir argumentos lógicos. Comunicação matemática: refere-se à capacidade de usar linguagem matemática para expressar ideias e argumentar de forma precisa, concisa e lógica. Conexões: referem-se à capacidade de visualizar e estabelecer pontes de ligação entre ideias matemáticas e outras áreas do saber; o cotidiano.

O estabelecimento de conexões permite aos alunos a percepção do significado. É um modelo que promove a compreensão dos alunos em relação às questões de resolução de problemas.

As atitudes referem-se aos aspetos afetivos da aprendizagem de Matemática, ou seja, às crenças sobre a Matemática e a sua utilidade; o interesse e o prazer em aprender Matemática; a apreciação da beleza e do poder da Matemática; a confiança no uso da Matemática; e a perseverança na resolução de um determinado problema.

Por fim, destaca-se a importância atribuída à metacognição, ou seja, à capacidade de controlarmos os nossos processos de pensamento, como, por exemplo, na seleção e aplicação de estratégias Resolução de Problemas. A metacognição inclui, portanto, a monitorização do próprio pensamento e a autorregulação da aprendizagem.

Em relação à metacognição, é possível desenvolver esta capacidade de reflexão nos alunos de diversas formas, tendo em conta a faixa etária em que se encontram. Esta capacidade de monitorização e autorregulação acerca das suas próprias aprendizagens pode ser feita através de uma reflexão oral, em grande ou pequeno grupo, de um desenho ou esquema ou da utilização de fichas de registo da reflexão.

Sendo o Método Pictórico uma abordagem visual, desenvolve o pensamento crítico nos discentes. Desenhando a barra retangular, os alunos podem extrair informações e procurar o padrão ou relação entre a barra e as informações fornecidas. Clark (2016) afirmou que as representações pictóricas ajudam na visualização das relações matemáticas abstratas.

Os alunos podem usar uma representação (desenho) para embasar sua compreensão de conceitos emergentes. Eles podem ver a relação entre as informações fornecidas e os requisitos da pergunta. Esta técnica de desenho de modelos tem como objetivo aumentar a compreensão conceitual do problema na tarefa e consequentemente proporcionar melhor visualização das resoluções e extração de informações adequadas ao desenhar a(s) barra(s). Portanto, o modelo de barras é uma estratégia de solução de problemas adequada para ensinar os problemas não rotineiros, pois é útil para os alunos transferirem as perguntas para uma forma mais simples e compreensível (NG; LEE, 2009).

3.3 Compreensão do Método

O Modelo de Barras fornece aos alunos a oportunidade de demonstrar a interpretação de problemas de palavras com associação de relações na forma visual. Isto auxilia a interpretação, identifica relações e desenvolve estratégias adequadas de resolução de problemas com palavras assim como registra informações à medida que resolve a palavra problema (NG; LEE, 2009).

O uso da barra retangular é justificada pela variedade de modos de representação de quantidades para divisão em partes iguais. É possível comparar usando a ideia de mais que ou menos que, além disso, pode-se desenhar retângulos um do lado do outro ou um abaixo do outro e ainda resolver problemas que envolvem mudança de valores ou com a ideia de quantas vezes maior ou quantas vezes menor. O círculo e a reta que são figuras comuns para representar dados em problemas não possuem a diversidade de possibilidades de aplicação do retângulo (RANGEL *et al.*, 2017).

É utilizada esta forma geométrica porque é a maneira mais fácil de desenhar, dividir, representar números e exibir relacionamentos (NG; LEE, 2009).

Diferentes comprimentos de barras retangulares são utilizados para representar diferentes números: barra retangular longa para um número conhecido e maior, barra curta para número conhecido e menor, também, barra de comprimento arbitrário para número desconhecido. Em alguns problemas, a barra é dividida em seções conhecidas e desconhecidas; em outros, os comprimentos de duas ou mais barras diferentes são comparados (BAO, 2016).

Chan e Foong (2013) explicam que o uso do modelo de barras modifica o foco dos resultados, com finalidade de ajudar os alunos a identificar as operações e etapas corretas necessárias para resolver o problema no processo de trabalho. De acordo com Ng e Lee (2009), o objetivo de desenhar as barras não é ensinar os alunos a seguir regras específicas, mas fornecer-lhes uma ferramenta para apoiar na compreensão da estratégia de elaboração da resposta.

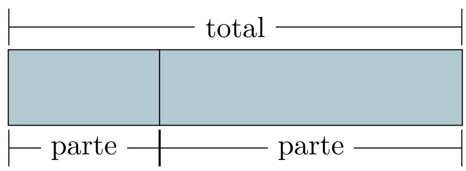
A grande vantagem do Modelo de Barras é sua flexibilidade e versatilidade de formas de representação das barras, os alunos podem usar essa representação de forma consistente, pois saberão que tipo de imagem desenhar a partir das informações contidas no enunciado. Torna-se importante o professor mostrar os diferentes desenhos realizados pelos alunos na solução dos problemas apresentados como tarefa. Cabe ao professor incentivar a resolução por desenhos diferentes e promover a troca de ideias a respeito das formas diferentes de solução dos problemas.

Os professores de Singapura preconizam três modelos de barras: parte – total; comparação e mudança (antes e depois).

3.3.1 O modelo parte-total

Um modelo parte-total torna-se ilustrativo quando um todo é composto de várias partes. O total pode ter duas ou mais partes. Quando as partes são dadas, os alunos podem determinar o total. Às vezes, o total e algumas partes são dadas e outras partes são desconhecidas. A representação concreta do método do modelo de uma parte desconhecida fornece uma excelente base para o pensamento algébrico, e o uso do método do modelo permite que os alunos entendam melhor as situações. A quantidade desconhecida pode ser encontrada usando as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão (HAR, 2010).

Figura 3 – Ilustração do modelo parte-total

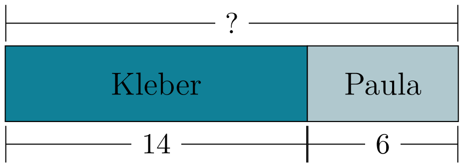


Fonte: Adaptado do Ministério da Educação de Singapura

Exemplo 1. *Kleber tem 14 lápis de cor em sua mochila enquanto Paula possui 6 lápis. Quantos lápis eles têm juntos para aula de artes?*

Solução: O total de lápis é dado pela soma $14 + 6$.

Figura 4 – Exemplo do modelo parte-total



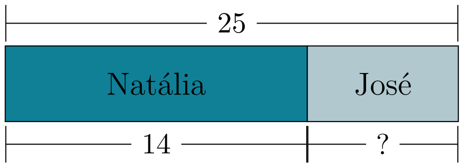
Fonte: O autor

Resposta: Kleber e Paula possuem 20 lápis. ✓

Exemplo 2. *Natália e José possuem 25 balas. Se Natália tem 14 balas, quantas balas José possui?*

Solução: O número de balas de José é dado pela diferença 25-14.

Figura 5 – Exemplo do modelo parte-total



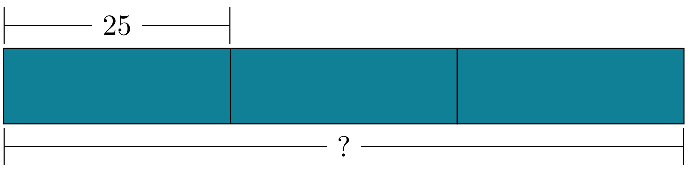
Fonte: O autor

Resposta: José possui 11 balas. ✓

Exemplo 3. *No Ensino Fundamental de uma escola existem 3 turmas de primeiro ano. Cada turma possui 25 alunos. Quantos alunos estudam no primeiro ano?*

Solução: Considere que cada retângulo equivale a 25 alunos.

Figura 6 – Exemplo do modelo parte-total



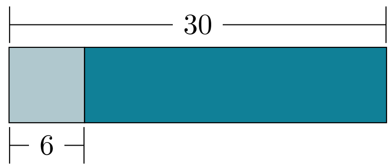
Fonte: O autor

Logo: $3 \times 25 = 75$.
Resposta: Estudam no primeiro ano 75 alunos. ✓

Exemplo 4. *Luana comprou um pacote com 30 biscoitos e pretende reparti-los em pratos com 6 biscoitos cada. Quantos pratos ela usará nesta tarefa?*

Solução: Quantos grupos de 6 existem?

Figura 7 – Exemplo do modelo parte-total



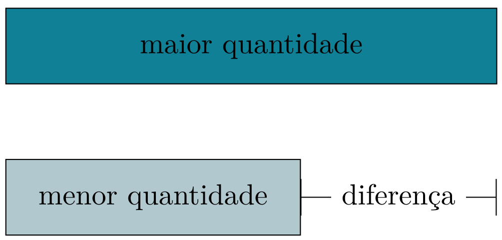
Fonte: O autor

O número de pratos é dado por $\frac{30}{6} = 5$.
Resposta: O número de pratos que Luana usará é 5. ✓

3.3.2 O modelo de comparação

O modelo de comparação demonstra a relação entre duas ou mais quantidades quando comparadas, contrastadas ou descritas por diferenças. Como no modelo parte-total, o modelo de comparação fornece um excelente trampolim para os alunos usarem na transição entre as habilidades de pensamento aritmético e algébrico. As barras horizontais são normalmente alinhadas verticalmente para mostrar a diferença nas quantidades. Os alunos calculam uma ou mais quantidades desconhecidas (ou diferenças entre as quantidades) usando os dados que eles escreveram no modelo (HAR, 2010).

Figura 8 – Ilustração do modelo de comparação

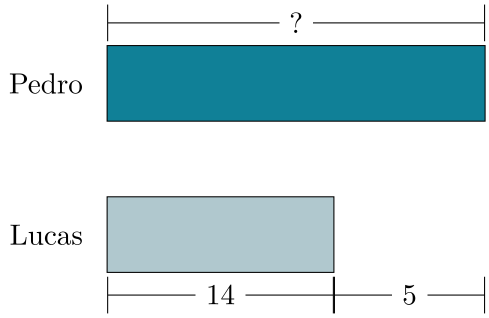


Fonte: Adaptado do Ministério da Educação de Singapura

Exemplo 5. *Lucas possui 14 canetas em seu estojo e Lucas possui 5 canetas a menos que Pedro. Quantas canetas Pedro possui?*

Solução: O total de canetas de Pedro é dado pela soma $14 + 5$.

Figura 9 – Exemplo do modelo de comparação



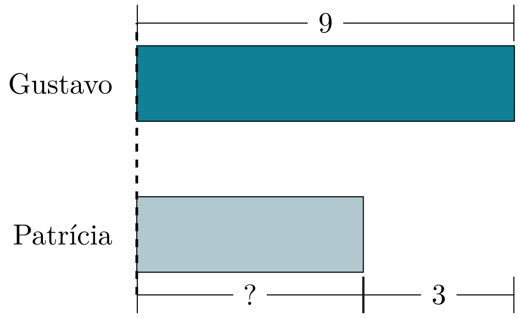
Fonte: O autor

Resposta: Pedro possui 19 canetas. ✓

Exemplo 6. *Gustavo tem 9 bolachas em sua lancheira. Sabe-se que Gustado tem 3 bolachas a mais que Patrícia. Quantas bolachas Patricia possui?*

Solução: O número de bolachas é dado por 9 - 3.

Figura 10 – Exemplo do modelo de comparação



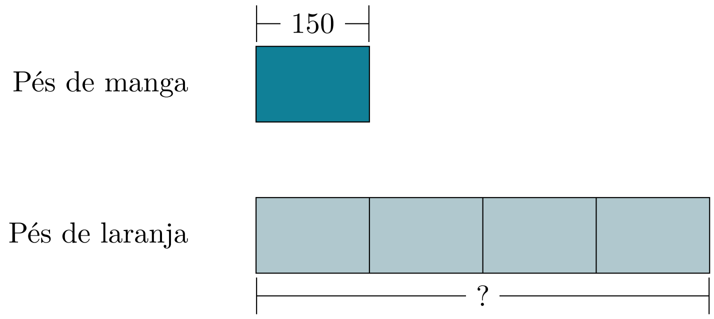
Fonte: O autor

Resposta: Patrícia possui 6 bolachas. ✓

Exemplo 7. *No pomar de uma fazenda há 150 pés de manga. Sabe-se que o número de pés de laranja é quatro vezes maior do que os pés de manga. Quantos pés de laranja existem?*

Solução: O número de pés de laranjas é dado por 150×4.

Figura 11 – Exemplo do modelo de comparação



Fonte: O autor

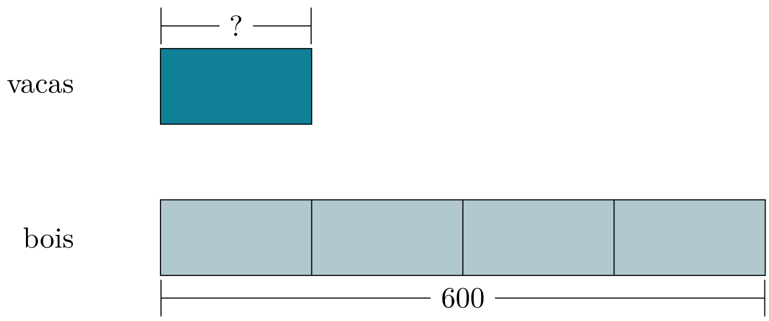
Resposta: O pomar possui 600 pés de laranja. ✓

Exemplo 8. *Um fazendeiro comprou 600 bois no leilão. Sabe-se que ele comprou quatro vezes a mais bois que que vacas. Quantas vacas ele comprou?*

Solução:

Sabe-se que 4 retângulos correspondem a 600 bois. O valor de 1 retângulo é dado por $\frac{600}{4} = 150$.

Figura 12 – Exemplo do modelo de comparação



Resposta: O fazendeiro comprou 150 vacas. ✓

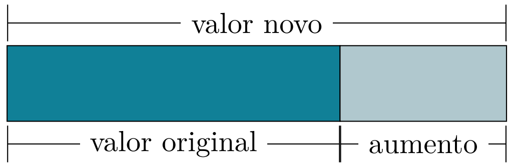
3.3.3 O modelo de mudança

O modelo de mudança fornece representações das relações entre o novo valor e seu valor original, situações referentes ao antes e depois, geralmente convergentes para aumento ou redução.

Reforçar o conceito de mudança é importante porque torna-se a base para aplicações do pensamento algébrico. Como resultado, os modelos de mudança generalizam-se de maneira robusta à medida que os alunos progridem na gama de esforços algébricos.

- Aumento expresso por uma quantidade.

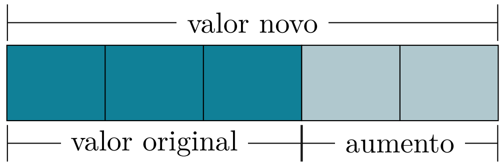
Figura 13 – Ilustração do modelo de mudança



Fonte: Adaptado do Ministério da Educação de Singapura

- Aumento expresso por uma fração.

Figura 14 – Ilustração do modelo de mudança

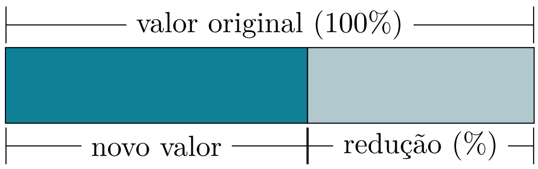


Aumento de 2/3 do valor original

Fonte: Adaptado do Ministério da Educação de Singapura

- Redução percentual

Figura 15 – Ilustração do modelo de mudança

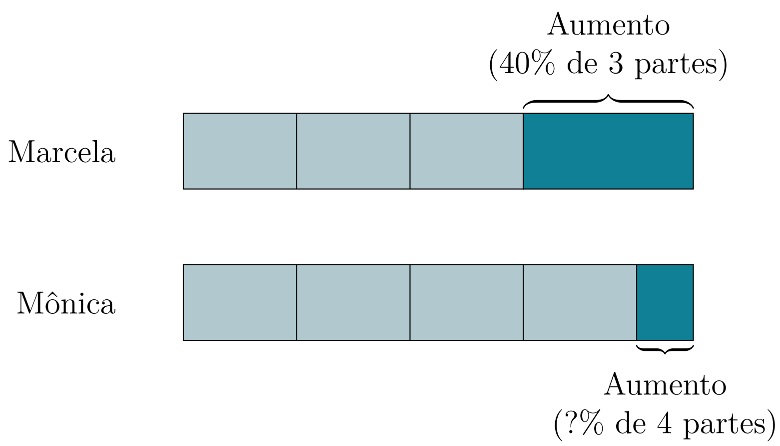


Fonte: Adaptado do Ministério da Educação de Singapura

Exemplo 9. *O salário de Marcela e o salário de Mônica estão na proporção 3:4. Se o salário da Marcela aumentar em 40%, em que percentual o salário da Mônica deve ser aumentado ou diminuído para que elas tenham o mesmo salário?*

Solução: O modelo a seguir mostra que o salário de Marcela é de 3 partes e o salário de Mônica é de 4 partes. Também mostra que seus novos salários são iguais.

Figura 16 – Exemplo do modelo de mudança



Fonte: O autor

Aumento no salário de Marcela $= 40\% \times 3$ partes $= 1,2$ partes.

Aumento no salário de Mônica $= 1,2$ partes -1 parte $= 0,2$ parte.

Resposta: Aumento percentual $= \frac{0,2}{4} \times 100\% = 5\%$. ✓

4 PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO MODELO DE BARRAS

Com o Modelo de Barras podemos estudar as estruturas de vários problemas de palavras. O modelo mostra explicitamente a estrutura do problema e as quantidades conhecidas e desconhecidas (números inteiros, frações ou decimais) envolvidas em um problema. Ele fornece uma ferramenta visual que permite que os alunos determinem qual operação (adição, subtração, multiplicação ou divisão) usar para resolver o problema.

Os problemas abaixo ilustram situações para a aplicação gradual do Modelo de Barras na sua resolução. O nível de dificuldade é gradual e tem o objetivo do estudante adaptar com a representação dos dados e da pergunta por meio de barras.

O Modelo de Barras adotado no Currículo de Singapura foi escolhido como referência para seleção dos problemas.

O Modelo de Barras é um processo sintético. Quando os alunos usam o Modelo de Barras para resolver um problema, eles constroem um modelo pictórico para descrever e interpretar a situação do problema, para entender a estrutura do problema e para processar e analisar as informações fornecidas. Em seguida, eles usam o modelo para planejar e desenvolver uma sequência de passos lógicos para a solução do problema (NG; LEE, 2009).

4.1 Problemas aritméticos

Nesta seção serão trabalhados os seguintes problemas:

- Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar).

- Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida.

- Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita.

- Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais.

Os problemas podem ser propostos para o desenvolvimento das habilidades presentes na BNCC:

- (EF02MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até três ordens, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando estratégias pessoais. Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação).

- (EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável. Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.

- (EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

- (EF03MA05) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito, inclusive os convencionais, para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais. Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades.

- (EF03MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental. Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida.

- (EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.

- (EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.

- (EF04MA03) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado.

- (EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.

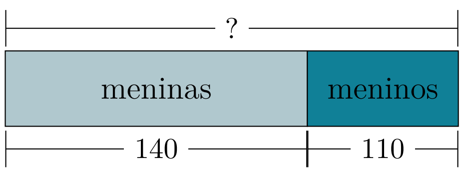
- (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo. Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida.

- (EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
- (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
- (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
- (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
- (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
- (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

Problema 1. *140 meninas e 110 meninos participaram de uma olimpíada escolar. Quantas crianças participaram da competição?*

Solução: Aqui, uma barra é desenhada para representar o todo (número total de crianças).

Figura 17 – Ilustração do problema 1.



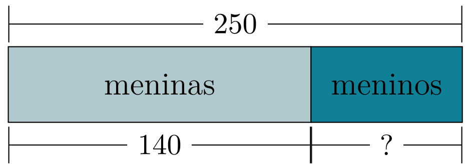
Fonte: O autor

Está dividido em duas partes, representando o número de 140 meninas e o número de 110 meninos, respectivamente. A partir do modelo, os alunos podem encontrar o total (representado pelo símbolo “?”). Adicionando as duas partes $140 + 110 = 250$.
Resposta: 250 crianças participaram da olimpíada escolar. ✓

Problema 2. *250 crianças participaram de uma olimpíada escolar. Se houvesse 140 meninas, quantos meninos haveria?*

Solução: Neste problema, o todo e uma parte (o número de meninas) são dados como mostra a figura.

Figura 18 – Ilustração do problema 2.



Fonte: O autor

A outra parte (o número de meninos) pode ser encontrada subtraindo a parte dada (140) do todo (250),

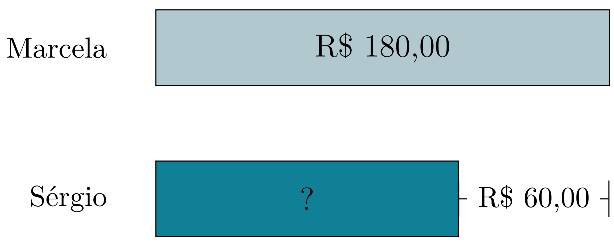
$$250 - 140 = 110.$$

Resposta: Havia 110 meninos. ✓

Problema 3. *Marcela economizou 180 reais. Sabe-se que Sérgio economizou 60 reais a menos que Marcela. Quanto o Sérgio economizou?*

Solução: Aqui, duas barras são desenhadas para representar a economia de Marcela e a economia de Sérgio.

Figura 19 – Ilustração do problema 3.



Fonte: O autor

No modelo de comparação, uma barra é mais comprida que a outra, mostrando que Marcela economizou mais que Sérgio. No modelo, os participantes podem encontrar a menor quantidade subtraindo a diferença (R$60,00) da maior (R$180,00), R\$180,00 - R\$60,00 = R\$120,00.

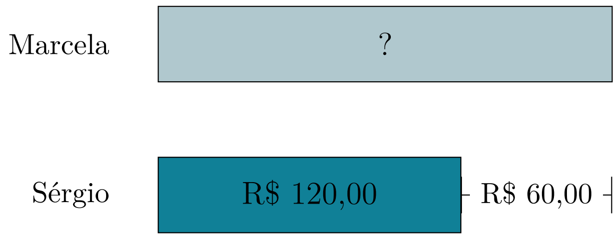
Resposta: Sérgio economizou 120 reais. ✓

Problema 4. *Sérgio economizou 120 reais durante o mês de setembro. Sabendo que Sérgio economizou 60 reais a menos que Marcela. Quanto Marcela economizou?*

Solução:

Nesse problema, a quantidade menor (poupança de Sérgio) e a diferença são dadas.

Figura 20 – Ilustração do problema 4.



Fonte: O autor

A maior quantidade (economia da Marcela) pode ser encontrada somando a menor quantidade (R\$120,00) e a diferença (R\$60,00),

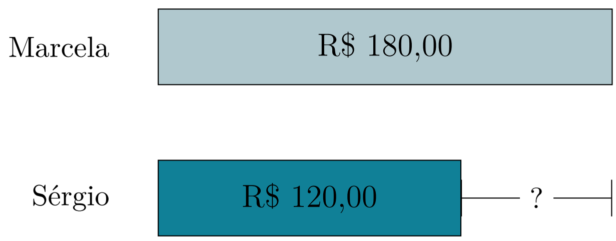
$$120 + 60 = 180.$$

Resposta: Marcela economizou R\$180,00. ✓

Problema 5. *Marcela economizou 180 reais e Sérgio economizou 120 reais. Quanto menos que Marcela o Sérgio economizou?*

Solução: Neste problema, ambas as quantidades são fornecidas.

Figura 21 – Ilustração do problema 5.



Fonte: O autor

Subtraindo a quantidade menor (R\$120,00) da quantidade maior (R\$180,00) dá a diferença:

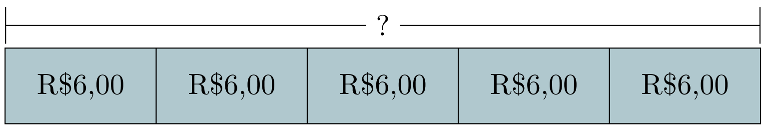
$$180 - 120 = 60$$

Resposta: Sérgio economizou 60 reais a menos que Marcela. ✓

Problema 6. *5 crianças dividiram igualmente o custo de um presente. Cada uma delas pagou 6 reais. Qual foi o custo do presente?*

Solução: Aqui, uma barra é desenhada para representar o total (custo do presente). Está dividido em 5 partes iguais, cada uma representando R$6,00.

Figura 22 – Ilustração do problema 6.



Fonte: O autor

A partir do modelo, os alunos podem encontrar o todo multiplicando uma parte (R$6,00) e o número de partes (5),

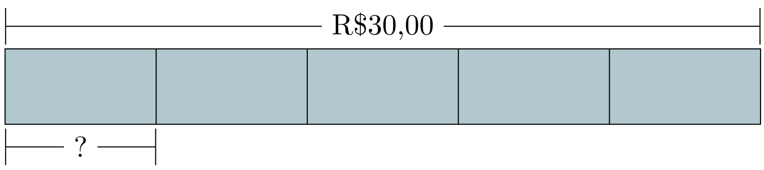
$$5 \times 6 = 30$$

Resposta: O custo do presente foi de 30 reais. ✓

Problema 7. *5 crianças compraram um presente por R$30,00. Elas dividiram o custo igualmente. Quanto cada criança pagou?*

Solução: No problema, sabe-se o todo e a quantidade de partes.

Figura 23 – Ilustração do problema 7.



Fonte: O autor

Os estudantes podem encontrar uma parte dividindo o todo (R$30,00) pelo número de partes (5),

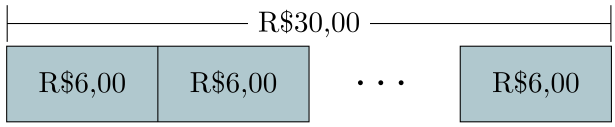
$$30 \div 5 = 6$$

Resposta: Cada criança pagou 6 reais. ✓

Problema 8. *Um grupo de crianças comprou um presente que custou R$30,00. Sabe-se que cada criança pagou R$6,00. Quantas crianças havia no grupo?*

Solução: Se conhece o todo e uma parte, mas o número de peças é desconhecido como indica a seção quebrada na barra.

Figura 24 – Ilustração do problema 8.



Fonte: O autor

O aluno pode encontrar o número de partes dividindo o todo (R$30,00) por uma parte (R$6,00)

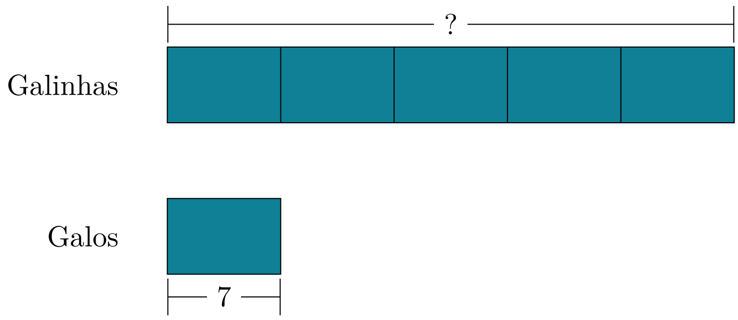
$$30 \div 6 = 5$$

Resposta: Havia 5 crianças no grupo. ✓

Problema 9. *Um fazendeiro tem 7 galos. Ele tem 5 vezes mais galinhas do que galos. Quantas galinhas o fazendeiro tem?*

Solução: Aqui, duas barras, de comprimentos de 5 partes e 1 parte, são desenhadas para representar o número de galinhas e galos, respectivamente.

Figura 25 – Ilustração do problema 9.



Fonte: O autor

O modelo mostra que o número de galinhas é 5 vezes o número de galos. Dado o número de galos (1 parte = 7 galos), os alunos podem encontrar o número de galinhas (5 partes) por multiplicação,

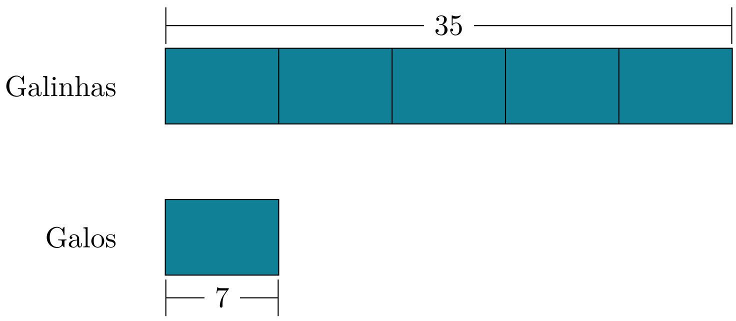
$$5 \times 7 = 35.$$

Resposta: O fazendeiro tem 35 galinhas. ✓

Problema 10. *Um fazendeiro tem 35 galinhas. Ele tem 5 vezes mais galinhas do que galos. Quantos galos o fazendeiro tem?*

Solução: No problema, é dado o número de galinhas (5 partes = 35).

Figura 26 – Ilustração do problema 10.



Fonte: O autor

Os alunos podem encontrar o número de galos (1 parte) por divisão,

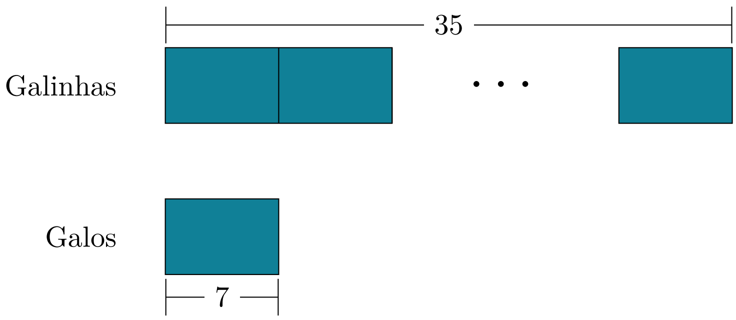
$$35 \div 5 = 7.$$

Resposta: O fazendeiro tem 7 galos. ✓

Problema 11. *Um fazendeiro possui 7 galos e 35 galinhas. Quantas vezes mais galinhas do que galos o fazendeiro tem?*

Solução: A seção quebrada na barra maior a seguir indica que o número de pedaços é desconhecido.

Figura 27 – Ilustração do problema 11.



Fonte: O autor

Dadas as duas quantidades, os alunos podem encontrar o múltiplo por divisão,

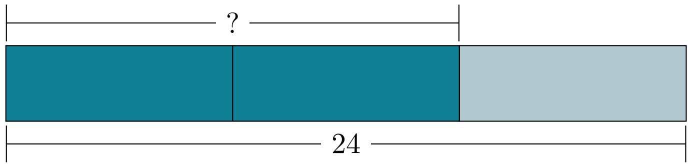
$$35 \div 7 = 5.$$

Resposta: O fazendeiro tem 5 vezes mais galinhas do que galos. ✓

Problema 12. *Silene comprou 24 flores, sendo que 2/3 delas eram brancas. Quantas flores brancas Silene comprou?*

Solução: Aqui, o modelo parte-total é usado para ilustrar 2/3 do total. A fração 2/3 significa 2 pedaços de 3 pedaços.

Figura 28 – Ilustração do problema 12.



Fonte: O autor

Para encontrar o número de flores brancas (2 pedaços), os alunos encontram o valor de 1 pedaço primeiro:

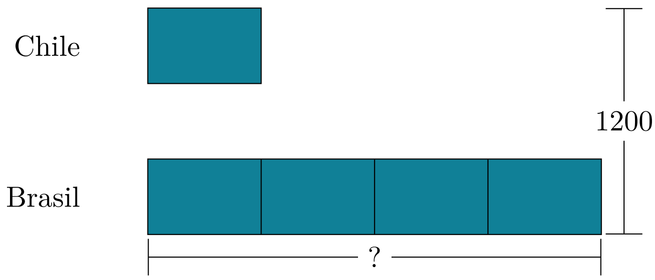
$$\begin{aligned} 3 \text{ pedaços} &= 24, \\ 1 \text{ pedaço } &= 24 \div 3 = 8, \\ 2 \text{ pedaços} &= 2 \times 8 = 16. \end{aligned}$$

Resposta: Havia 16 flores brancas. ✓

Problema 13. *Paulo arrecadou um total de 1200 selos. Ele colecionou 4 vezes mais selos do Brasil do que selos do Chile. Quantos selos do Brasil ele colecionou?*

Solução 1: O modelo de comparação mostra que o número total de selos (5 partes) é 1200.

Figura 29 – Ilustração do problema 13.



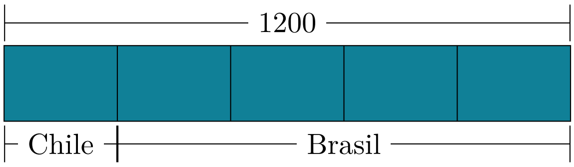
Fonte: O autor

A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram o número de selos do Brasil (4 partes).

$$\begin{aligned} 5 \text{ partes} &= 1200, \\ 1 \text{ parte } &= 1200 \div 5 = 240, \\ 4 \text{ partes} &= 4 \times 240 = 960. \end{aligned}$$

Solução 2:

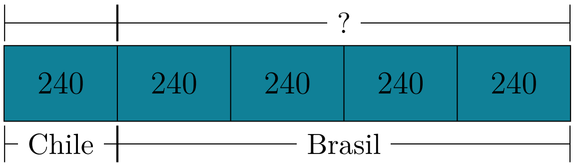
Figura 30 – Ilustração do problema 13.



Fonte: O autor

$$1200 \div 5 = 240.$$

Figura 31 – Ilustração do problema 13.



Fonte: O autor

$$4 \times 240 = 960.$$

Resposta: Foram 960 selos do Brasil. ✓

O texto escrito por Lopes e Malta (2018) apresenta uma coleção de problemas aritméticos com o objetivo de apresentar a resolução de problemas usando o Modelo de Barras.

4.2 Problemas de proporção

Nesta seção serão trabalhados os seguintes problemas:

- Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

- Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Os problemas podem ser propostos para o desenvolvimento das habilidades presentes na BNCC:

- (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.

- (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

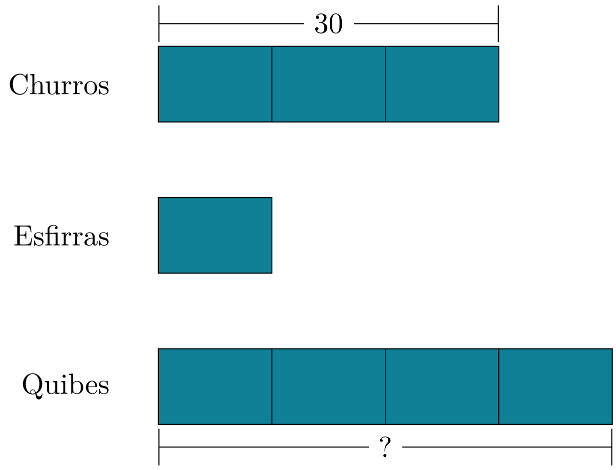
- (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

- (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Problema 14. *A razão entre o número de churros e o número de esfirras com o número de quibes é de 3: 1: 4. Se houver 30 churros, quantos quibes existem?*

Solução: Aqui, três barras são desenhadas para representar o número de churros (3 partes), esfirras (1 parte) e quibes (4 partes), respectivamente. O modelo de comparação mostra a proporção 3: 1: 4.

Figura 32 – Ilustração do problema 14.



Fonte: O autor

Dado o número de churros (3 partes), os alunos podem encontrar o número de quibes (4 partes) usando o método unitário:

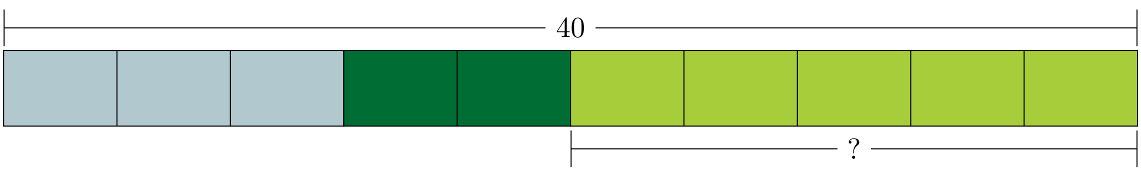
$$\begin{aligned} 3 \text{ partes} &= 30, \\ 1 \text{ parte } &= 30 \div 3 = 10, \\ 4 \text{ partes} &= 4 \times 10 = 40. \end{aligned}$$

Resposta: Existem 40 quibes. ✓

Problema 15. *Mônica cortou um pedaço de fita de 40 m de comprimento em três pedaços na proporção 3: 2: 5. Qual o comprimento do pedaço maior?*

Solução: Aqui, o modelo parte-total mostra um todo dividido em três partes na proporção 3: 2: 5.

Figura 33 – Ilustração do problema 15.

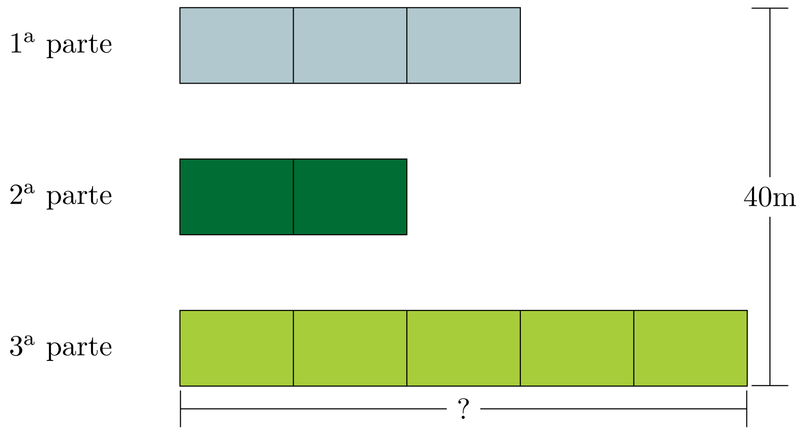


Fonte: O autor

As três partes representam as três peças de fita de 3 pedaços, 2 pedaços e 5 pedaços respectivamente.

Alternativamente, os alunos podem desenhar o modelo de comparação:

Figura 34 – Ilustração do problema 15.



Fonte: O autor

Dado o comprimento total (10 pedaços), os alunos podem encontrar o comprimento da peça mais longa (5 pedaços) usando o método unitário:

$$\begin{aligned} 10 \text{ pedaços} &= 40\text{m}, \\ 1 \text{ pedaços} &= 40 \div 10 = 4, \\ 5 \text{ pedaços} &= 5 \times 4 = 20\text{m}. \end{aligned}$$

Resposta: O comprimento da peça mais longa era de 20m. ✓

O texto escrito por Souza, Lopes e Nascimento (2020) apresenta uma coleção de exercícios de razão e proporção resolvidos pelo Modelo de Barras.

4.3 Problemas de porcentagem

Nesta seção é importante explicar que o desenho das barras vem acompanhado de linhas, estas importantes para a correspondência que existe entre as quantidades absolutas e a porcentagem que representam. A linha tem o papel de estabelecer a relação entre as quantidades absolutas que estão na barra e os valores porcentuais que estão nas linhas. Independente do tipo de problema, as linhas serão necessárias para relacionar as quantidades absolutas e as quantidades relativas escritas em porcentagem.

Nesta seção serão trabalhados os seguintes problemas:

- Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três".
- Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples.

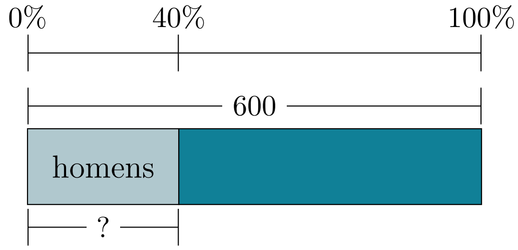
Os problemas podem ser propostos para o desenvolvimento das habilidades presentes na BNCC:

- (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
- (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
- (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- (EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Problema 16. *Havia 600 atletas em um campeonato de xadrez. 40% deles eram homens. Quantos homens estavam no campeonato?*

Solução 1: Aqui, uma barra é desenhada para representar o todo (600 pessoas).

Figura 35 – Ilustração do problema 16.



Fonte: O autor

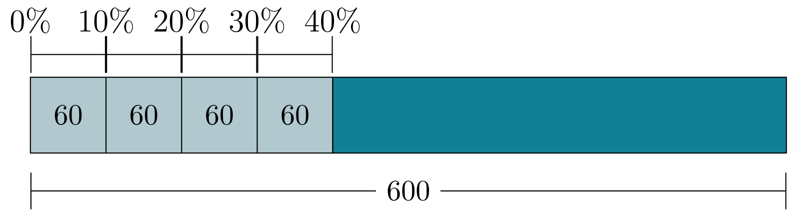
A parte colorida (azul claro), que é 40% do total, representa o número de homens. O percentual de 40% significa 40 partes em 100 partes. Os alunos podem encontrar o número de homens (40 partes) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 100 \text{ partes} &= 600, \\ 1 \text{ parte } &= 600 \div 100 = 6, \\ 40 \text{ partes} &= 40 \times 6 = 240. \end{aligned}$$

Solução 2 (proposta pelo Grupo de Estudo do Projeto Fundão - UFRJ):

Usando o método parte-total tem-se que cada parte equivale a 10% do total.

Figura 36 – Ilustração do problema 16.



Fonte: O autor

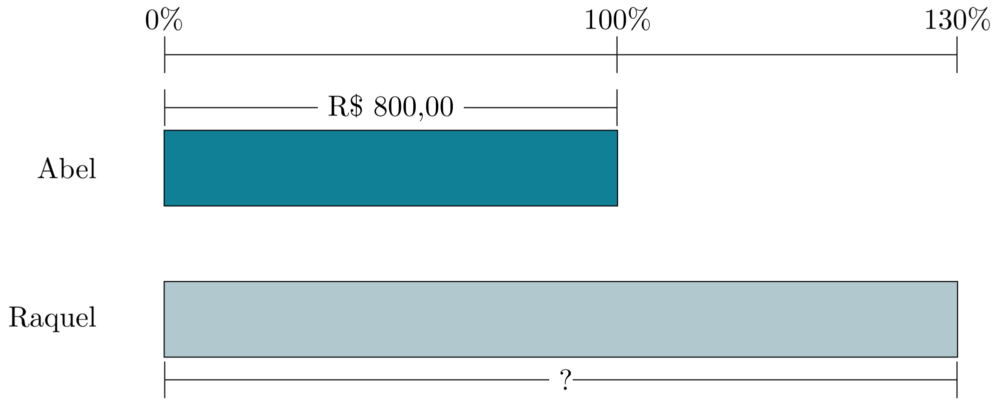
$$\begin{aligned} 100\% &\text{ equivale a } 600 \text{ atletas,} \\ 10\% &\text{ equivale a } 600 \div 10 = 60 \text{ atletas,} \\ 40\% &\text{ equivale a } 4 \times 60 = 240 \text{ homens.} \end{aligned}$$

Resposta: Há então 240 homens. ✓

Problema 17. *Abel tem 800 reais. Raquel tem 30% mais dinheiro que Abel. Quanto dinheiro Raquel tem?*

Solução: No problema, o dinheiro de Abel é tomado como base (100%). O dinheiro de Raquel é 30% maior que o de Abel. Portanto, o dinheiro de Raquel é 130% de Abel.

Figura 37 – Ilustração do problema 17.



Fonte: O autor

A porcentagem de 130% significa 130 partes para 100 partes. Dado que o dinheiro de Abel (100 partes) é de R$800,00, os alunos podem encontrar o dinheiro de Raquel (130 partes):

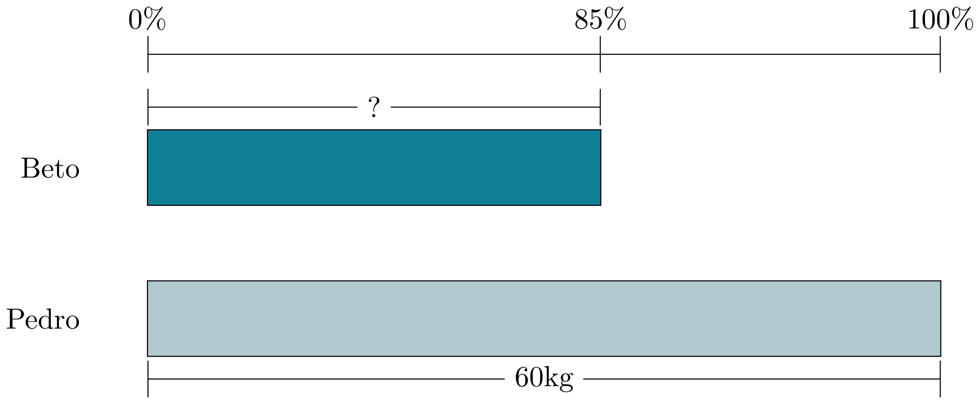
$$\begin{aligned} 100 \text{ partes} &= \text{R\$}800,00, \\ 1 \text{ parte } &= 800 \div 100 = \text{R\$}8,00, \\ 130 \text{ partes} &= 130 \times \text{R\$}8,00 = \text{R\$}1040,00. \end{aligned}$$

Resposta: Raquel tem R$1040,00. ✓

Problema 18. *A massa corporal de Pedro é 60 kg. A massa de Beto é 15% menor do que a do Pedro. Determine a massa de Beto.*

Solução 1: O modelo a seguir mostra que a massa do Beto é 85% da do Pedro. Ou seja, o Beto é 15% mais leve que o Pedro.

Figura 38 – Ilustração do problema 18.



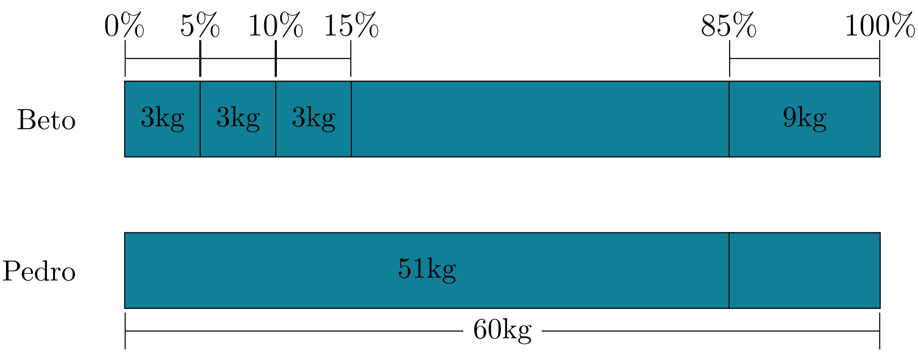
Fonte: O autor

A massa de Pedro é tomada como base (100%). A porcentagem de 85% significa 85 parte de 100 partes. Dado que a massa de Pedro (100 partes) é 60kg, os alunos podem encontrar a massa de Pedro (85 partes) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 100 \text{ partes} &= 60\text{kg}, \\ 1 \text{ parte } &= 60 \div 100 = 0,6\text{kg}, \\ 85 \text{ partes} &= 85 \times 0,6 = 51\text{kg}. \end{aligned}$$

Solução 2: (proposta pelo Grupo de Estudo do Projeto Fundão - UFRJ): Cada parte equivale a 5% do total.

Figura 39 – Ilustração do problema 18.



Fonte: O autor

$$
\begin{aligned}
100\% &\text{ equivale a } 60 \text{ kg},\\
10\% &\text{ equivale a } 60 \div 10 = 6\text{kg},\\
5\% &\text{ equivale a } 6 \div 2 = 3\text{kg},\\
15\% &\text{ equivale a } 3 \times 3 = 9\text{kg},\\
85\% &\text{ equivale a } 60\text{kg} - 9\text{kg} = 51\text{kg}.
\end{aligned}
$$

Resposta: A massa de Beto é 51kg. ✓

O trabalho de Oliveira (2020) abordou de forma específica o ensino de porcentagem por meio do Modelo de Barras. Além de apresentar os aspectos teóricos da abordagem pictórica, disponibilizou uma coletânea de questões para colaborar com o professor que desejar utilizar o Modelo de Barras nas suas aulas de porcentagem.

4.4 Problemas com frações

Nesta seção serão trabalhados os seguintes problemas:

- Frações: significados (parte/total, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.
- Problemas que tratam da partição de um total em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o total.
- Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

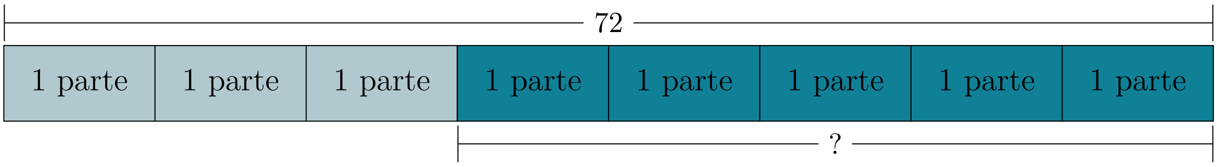
Os problemas podem ser propostos para o desenvolvimento das habilidades presentes na BNCC:

- (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
- (EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
- (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

Problema 19. *72 crianças foram ao shopping Super Mart. 3/8 delas eram meninas. Quantos meninos estavam lá?*

Solução: Aqui, uma barra é desenhada para representar o total (número total de crianças).

Figura 40 – Ilustração do problema 19.



Fonte: O autor

As três partes em azul claro representam o número de meninas (3/8 do total) e as outras 5 partes representam o número de meninos (5/8 do total). O modelo parte-total mostra que o total (8 pates) é 72. A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram o número de meninos (5 partes).

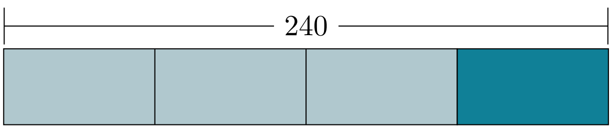
$$\begin{aligned} 8 \text{ partes} &= 72, \\ 1 \text{ parte } &= 72 \div 8 = 9, \\ 5 \text{ partes} &= 5 \times 9 = 45. \end{aligned}$$

Resposta: São 45 meninos. ✓

Problema 20. *A dona Marta fez 240 bolos. Ela vendeu 3/4 deles e deu 1/3 do restante para seu vizinho. Quantos bolos restou na cozinha da dona Marta?*

Solução 1: Aqui, uma barra é desenhada para representar o total (240 bolos). 3/4 do total representa o número de bolos vendidos.

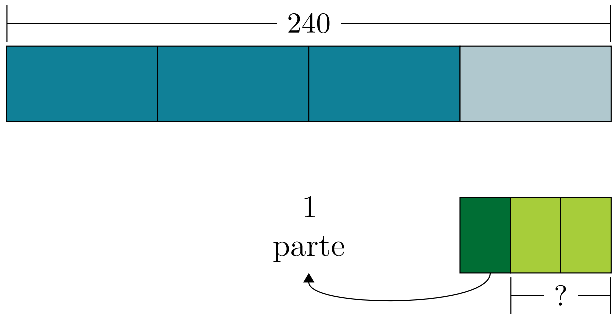
Figura 41 – Ilustração do problema 20.



Fonte: O autor

O 1/4 restante é dividido em 3 partes. O número de bolos doados é 1 parte e o número de bolos restantes é 2 partes.

Figura 42 – Ilustração do problema 20.



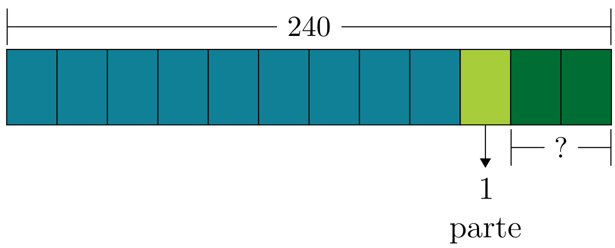
Fonte: O autor

A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram o número de bolos restantes (2 partes).

$$\begin{aligned} 3 \text{ partes} &= 240 \div 4 = 60, \\ 1 \text{ parte } &= 60 \div 3 = 20, \\ 2 \text{ partes} &= 2 \times 20 = 40. \end{aligned}$$

Solução 2: Aqui, a barra é dividida nas mesmas partes e o total é de 12 partes.

Figura 43 – Ilustração do problema 20.



Fonte: O autor

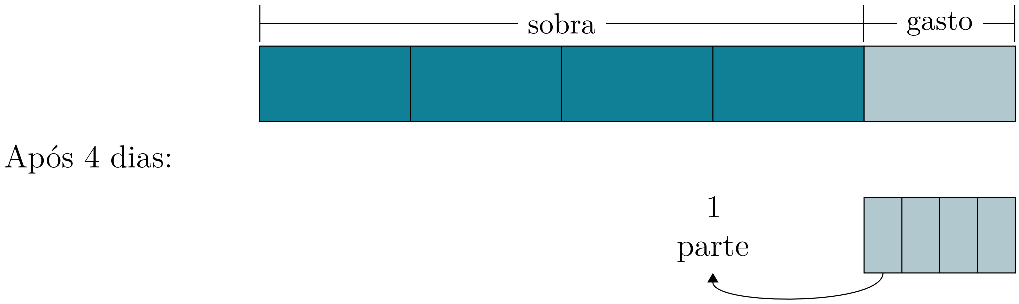
$$\begin{aligned} 12 \text{ partes} &= 240, \\ 1 \text{ parte } &= 240 \div 12 = 20, \\ 2 \text{ partes} &= 2 \times 20 = 40. \end{aligned}$$

Resposta: Dona Marta tinha 40 bolos restantes. ✓

Problema 21. *Mônica gastou a mesma quantia de dinheiro todos os dias. Após 4 dias, ela tinha 4/5 de seu dinheiro sobrando. Após mais 10 dias, ela tinha R$90,00 restantes. Quanto dinheiro ela tinha no início?*

Solução: Aqui é desenhada uma barra para representar o todo (a quantidade de dinheiro que Mônica tinha no início). 4/5 do total representa a quantidade de dinheiro restante. O 1/5 restante representa a quantidade de dinheiro gasta em 4 dias.

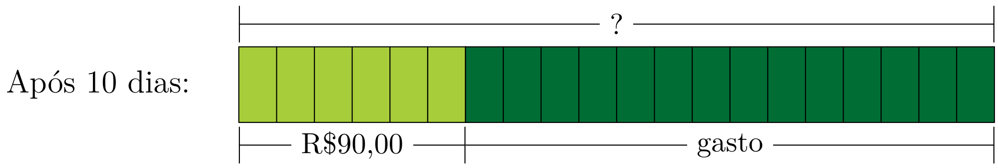
Figura 44 – Ilustração do problema 21.



Fonte: O autor

A quantidade de dinheiro gasta a cada dia é de 1 parte. Para resolver o problema, a barra é dividida nas mesmas partes. A quantidade de dinheiro gasta após 14 dias é de 14 partes. A quantidade de dinheiro restante (R$90,00) é de 6 partes.

Figura 45 – Ilustração do problema 21.



Fonte: O autor

A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram a quantidade total de dinheiro (20 partes).

$$
\begin{aligned}
6 \text{ partes} &= \text{R\$ } 90,00, \\
1 \text{ parte } &= 90 \div 6 = \text{R\$ } 15,00, \\
20 \text{ partes} &= 20 \times \text{R\$ } 15,00 = \text{R\$ } 300,00.
\end{aligned}
$$

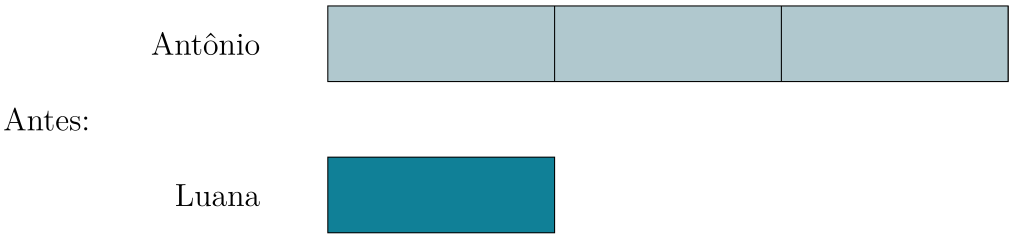
Resposta: Mônica tinha R$300,00 no início. ✓

Problema 22. *Antônio tinha 3 vezes mais dinheiro do que Luana. Depois que Antônio gastou R$120,00 e Luana R$20,00, os dois ficaram com a mesma quantia em dinheiro. Quanto dinheiro Antônio tinha no início?*

Solução 1: Este problema envolve uma situação antes e uma situação depois. Na situação anterior, Antônio tinha 3 vezes mais dinheiro que Luana. Na situação posterior, cada um deles tinha uma quantidade igual de dinheiro restante.

Duas barras são desenhadas para representar o dinheiro de Antônio e o dinheiro de Luana, que são 3 partes e 1 parte respectivamente, na situação anterior.

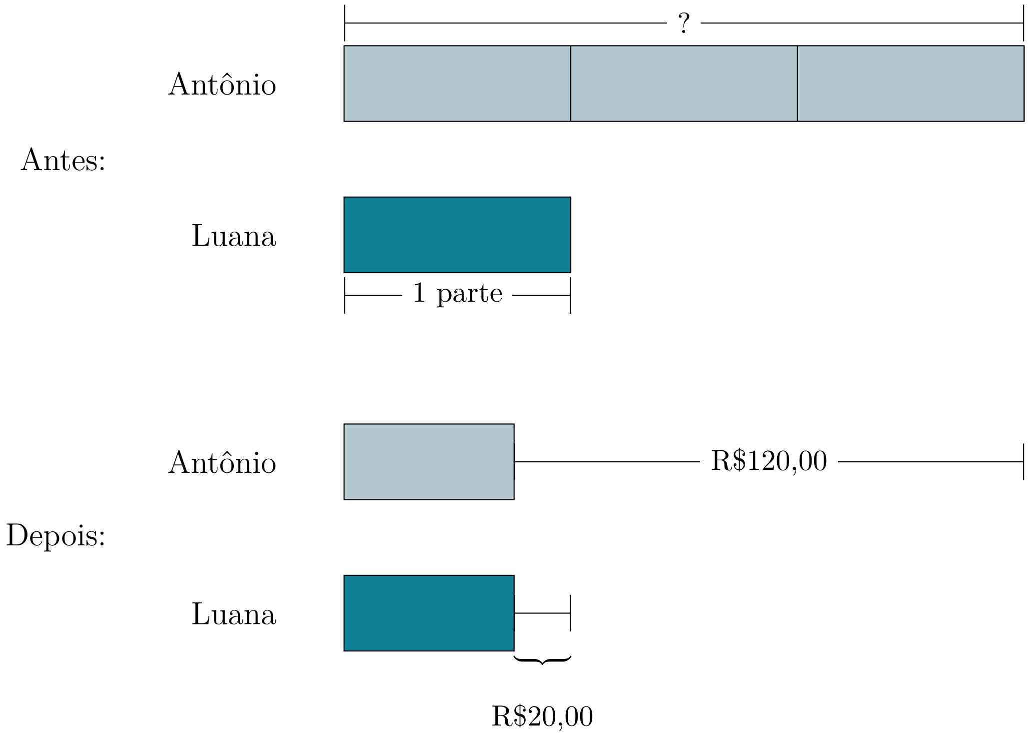
Figura 46 – Ilustração do problema 22.



Fonte: O autor

Na situação posterior, o modelo de comparação é composto por duas barras iguais que mostram que Antônio e Luana ficaram com a mesma quantidade de dinheiro cada um. A situação do antes e do depois se conectam para mostrar que Antônio gastou 120 reais e Luana gastou 20 reais.

Figura 47 – Ilustração do problema 22.



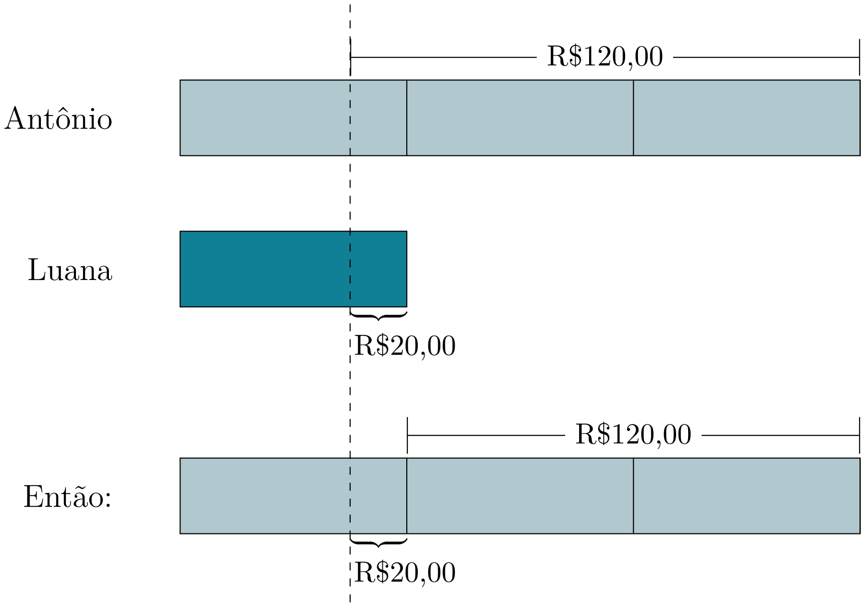
Fonte: O autor

A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram a quantidade de dinheiro que Antônio teve primeiro (3 partes).

$$\begin{aligned} 2 \text{ partes} &= R\$120,00 - R\$20,00 = R\$100,00, \\ 1 \text{ parte} &= 100 \div 2 = R\$50,00, \\ 3 \text{ partes} &= 3 \times R\$50,00 = R\$150,00. \end{aligned}$$

Solução 2:

Figura 48 – Ilustração do problema 22.



Fonte: O autor

$$
\begin{aligned}
2 \text{ partes} &= \text{R\$}120,00 - \text{R\$}20,00 = \text{R\$}100,00,\\
1 \text{ parte} &= \text{R\$}100 \div 2 = \text{R\$}50,00,\\
3 \text{ partes} &= 3 \times \text{R\$}50,00 = \text{R\$}150,00.
\end{aligned}
$$

Resposta: Antônio tinha R$150,00. ✓

Problema 23. *Numa caixa 3/5 das bolas são verdes. O resto são bolas cinzas e bolas azuis. Existem duas vezes mais bolas verdes do que bolas cinzas. Existem mais 30 bolas cinzas do que bolas azuis. Encontre o número total de bolas verdes e bolas cinzas.*

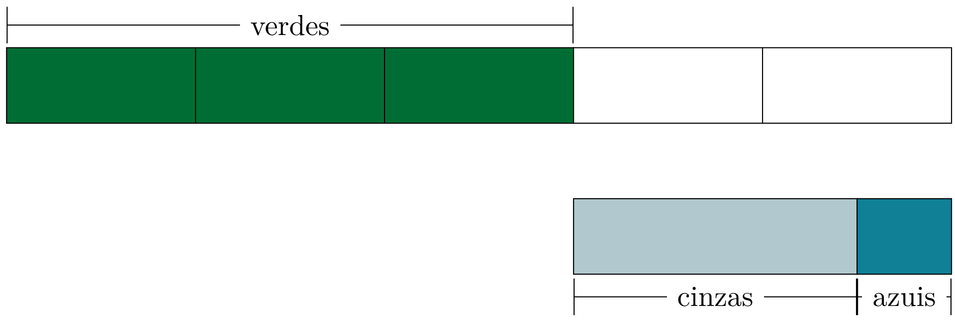
Solução: Aqui, uma barra é desenhada para representar o total (o número total de bolas na caixa). 3/5 do total representam o número de bolas verdes. Os 2/5 restantes representam o número total de bolas cinzas e azuis.

Figura 49 – Ilustração do problema 23.

Fonte: O autor

Os próximos 2/5 do todo são subdivididos de modo que as bolas verdes sejam o dobro das bolas cinzas.

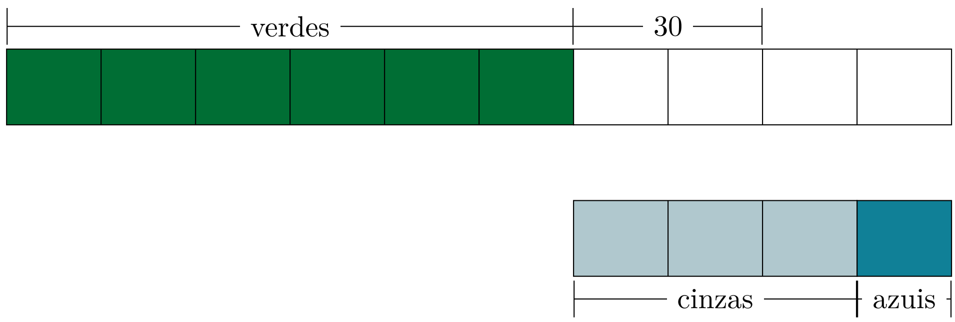
Figura 50 – Ilustração do problema 23.



Fonte: O autor

Considere o número de bolas azuis como 1 parte. O número de bolas cinzas e o número de bolas verdes são 3 partes e 6 partes, respectivamente.

Figura 51 – Ilustração do problema 23.



Fonte: O autor

A diferença entre o número de bolas cinzas e o número de bolas azuis é de 2 partes. A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram o número total de bolas verdes e cinzas (9 partes).

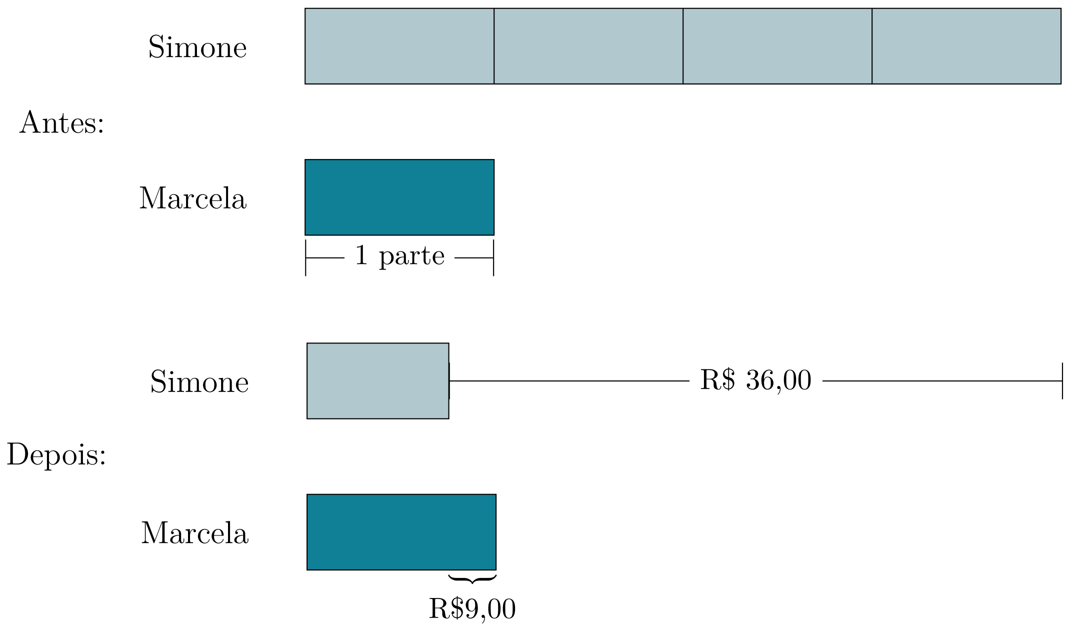
$$\begin{aligned} 2 \text{ partes} &= 30 \text{ bolas}, \\ 1 \text{ parte } &= 30 \div 2 = 15 \text{ bolas}, \\ 9 \text{ partes} &= 9 \times 15 = 135 \text{ bolas}. \end{aligned}$$

Resposta: O número total de bolas verdes e bolas cinzas é 135. ✓

Problema 24. *A razão entre o dinheiro de Simone e o de Marcela era de 4: 1. Depois de gastar R$36,00, Simone tinha R$9,00 a menos que Marcela. Quanto dinheiro Simone tinha no início?*

Solução: O modelo a seguir representa as situações antes e depois. Na situação anterior, a proporção do dinheiro de Simone em relação ao de Marcela era de 4:1. Na situação posterior, o dinheiro de Marcela permaneceu inalterado, e o dinheiro de Simone tornou-se R$9,00 menos do que o de Marcela. As duas situações estão conectadas para mostrar que Simone gastou R$36,00.

Figura 52 – Ilustração do problema 24.



Fonte: O autor

A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram a quantidade de dinheiro que Simone tinha inicialmente (4 partes).

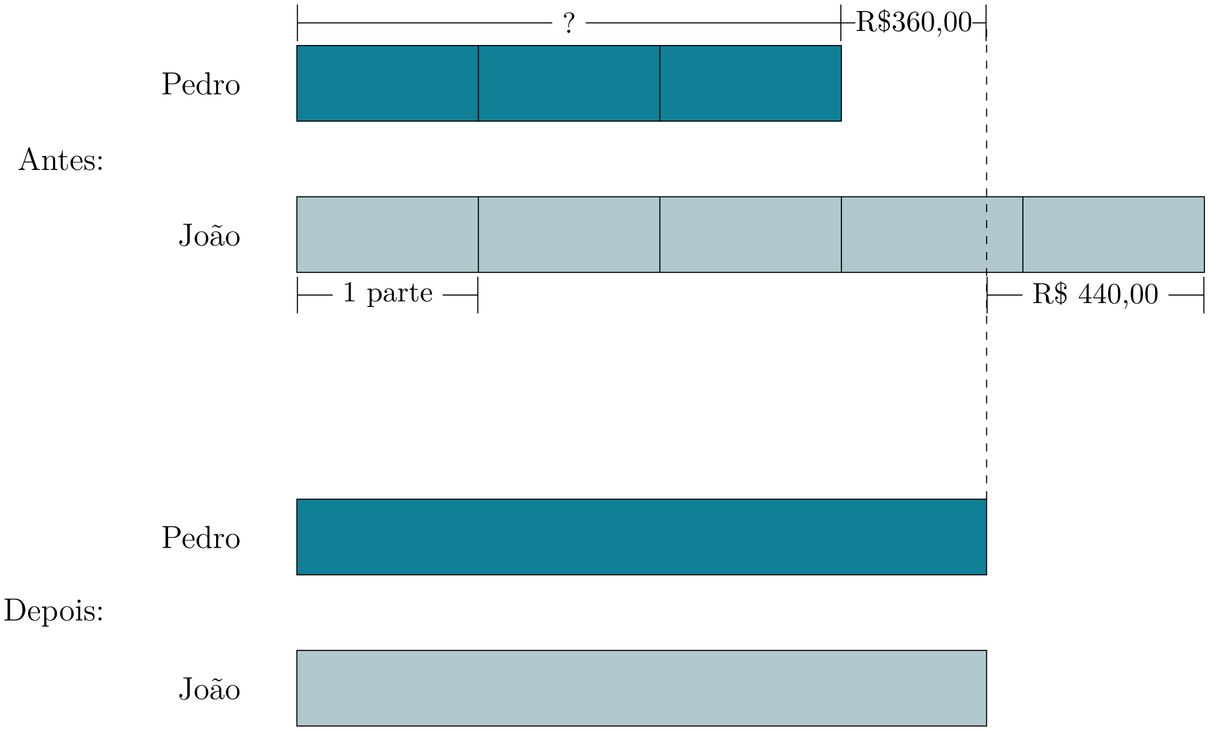
$$\begin{aligned} 3 \text{ partes} &= \text{R\$ } 36,00 - \text{R\$ } 9,00 = \text{R\$ } 27,00, \\ 1 \text{ parte } &= 27 \div 3 = \text{R\$ } 9,00, \\ 4 \text{ partes} &= 4 \times \text{R\$ } 9,00 = \text{R\$ } 36,00. \end{aligned}$$

Resposta: Simone tinha R$36,00 no início. ✓

Problema 25. *A proporção do dinheiro de Pedro para o dinheiro de João era de 3: 5 no início. Depois que o dinheiro de Pedro foi aumentado em R$360,00 e o dinheiro de João diminuiu em R$440,00, cada um deles teve uma quantia igual. Quanto dinheiro Pedro tinha no início?*

Solução: O modelo a seguir representa as situações antes e depois. Na situação anterior, a proporção do dinheiro de Pedro em relação ao dinheiro de João era de 3: 5. Na situação posterior, Pedro e João tinham, cada um, uma quantia igual. As duas situações estão conectadas para mostrar que o dinheiro de Pedro foi aumentado em R$360,00 e o de João diminuiu em R$440,00.

Figura 53 – Ilustração do problema 25.



Fonte: O autor

A partir do modelo, os alunos encontram o valor de 1 parte e, portanto, encontram a quantidade de dinheiro que Pedro tinha inicialmente (3 partes).

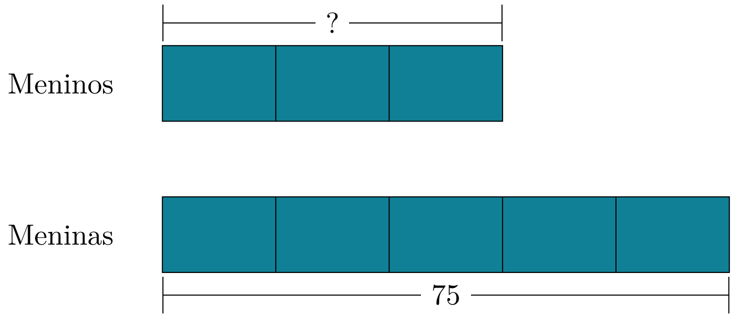
$$\begin{aligned} 2 \text{ partes} &= \text{R\$ } 360,00 + \text{R\$ } 440,00 = \text{R\$ } 800,00, \\ 1 \text{ parte} &= \text{R\$ } 800,00 \div 2 = \text{R\$ } 400,00, \\ 3 \text{ partes} &= 3 \times \text{R\$ } 400,00 = \text{R\$ } 1200,00. \end{aligned}$$

Resposta: Pedro tinha R$1200,00 no início. ✓

Problema 26. *Numa sala, o número de meninos é igual a 3/5 do número de meninas. Se há 75 meninas, quantos meninos estão na sala?*

Solução: É dado o número de meninas (5 partes).

Figura 54 – Ilustração do problema 26.



Fonte: O autor

Os alunos podem encontrar o número de meninos (3 partes) usando o método unitário (ou seja, encontrando o valor de 1 parte primeiro):

$$\begin{aligned} 5 \text{ partes} &= 75, \\ 1 \text{ parte } &= 75 \div 5 = 15, \\ 3 \text{ partes} &= 3 \times 15 = 45. \end{aligned}$$

Resposta: São 45 meninos. ✓

Os trabalhos de Santos (2019) e Cintra (2017) abordaram a contribuição que o Modelo de Barras traz para o ensino de frações no Ensino Fundamental. Ambos focaram na aplicação de atividades em sala de aula para aplicar o Modelo de Barras na resolução de problemas com frações. Os textos trazem exemplos de problemas resolvidos em sala de aula e as considerações a respeito do aproveitamento dos alunos pelos autores.

4.5 Problemas de álgebra

Esta seção demonstra como o Modelo de Barras ajuda os estudantes a compreender e visualizar um problema para que possam formular uma equação algébrica para resolvê-lo.

Nesta seção serão trabalhados os seguintes problemas:

- Linguagem algébrica: variável e incógnita.
- Equações polinomiais do 1º grau.
- Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.

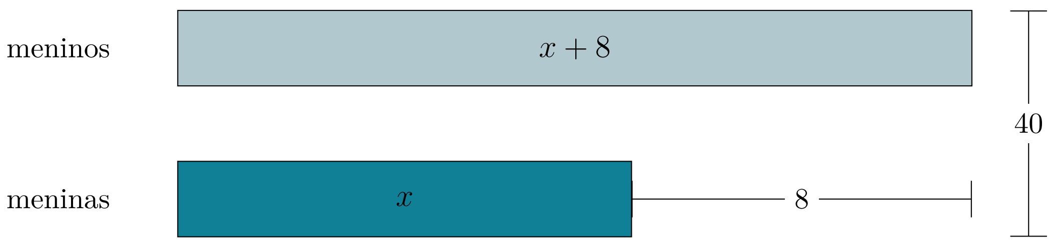
Os problemas podem ser propostos para o desenvolvimento das habilidades presentes na BNCC:

- (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.
- (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Problema 27. *Há 40 crianças no grupo de teatro. Se houver 8 meninos a mais do que meninas, quantas meninas existem?*

Solução: Considere x o número de meninas.

Figura 55 – Ilustração do problema 27.



Fonte: O autor

Montamos a equação:

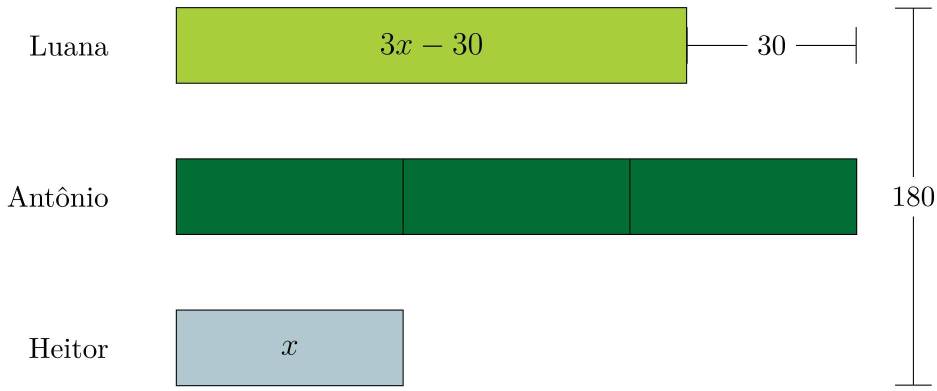
$$\begin{aligned} x + (x + 8) &= 40 \\ 2x &= 32 \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Resposta: São 16 meninas. ✓

Problema 28. *Kleber pretende dividir 180 reais entre os alunos Luana, Antônio e Heitor. Se Luana receberá R$30,00 a menos que Antônio, e Antônio receberá 3 vezes mais que Heitor, quanto dinheiro Heitor receberá?*

Solução: Adote que Heitor receberá x reais.

Figura 56 – Ilustração do problema 28.



Fonte: O autor

Assim formamos a equação:

$$
\begin{aligned}
(3x - 30) + 3x + x &= 180 \\
7x &= 210 \\
x &= 30.
\end{aligned}
$$

Resposta: Heitor receberá 30 reais. ✓

Problema 29. *No mês de abril os irmãos Paulo, Pedro e Luís ganharam quantias da seguinte forma:*

(i) Paulo ganhou 3 vezes mais dinheiro do que Pedro.

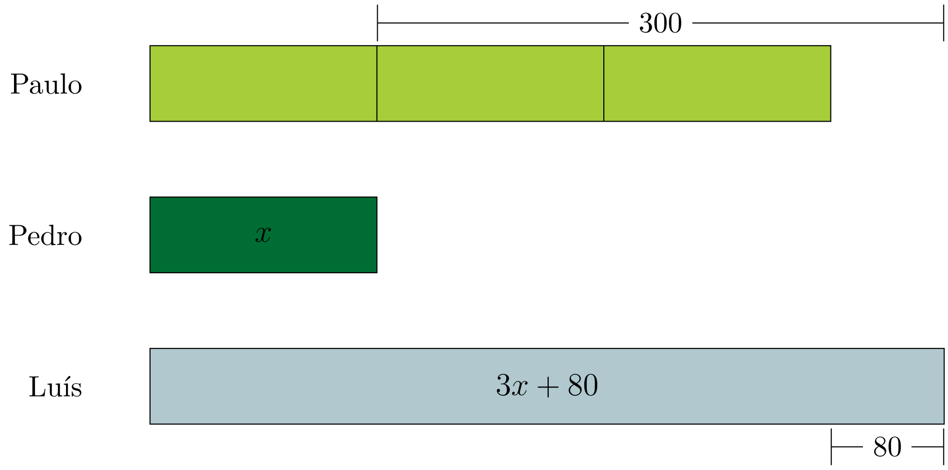
(ii) Pedro ganhou 300 reais a menos que Luís.

(iii) Luís ganhou 80 reais a mais que Paulo.

Descubra a quantidade total de dinheiro que Paulo, Pedro e Luís ganharam:

Solução 1: Considere que Pedro ganhou x reais.

Figura 57 – Ilustração do problema 29.



Fonte: O autor

A partir do desenho temos a equação:

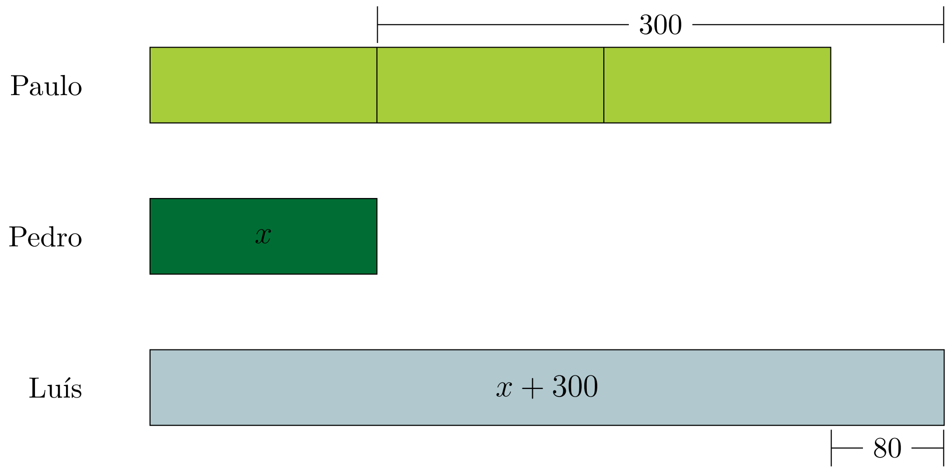
$$\begin{aligned} (3x+80) - x &= 300 \\ 2x &= 220 \\ x &= 110. \end{aligned}$$

A quantidade total de dinheiro é obtida pela expressão

$$3x + x + 3x + 80 = 850.$$

Solução 2: Considere

Figura 58 – Ilustração do problema 29.



Fonte: O autor

A partir do desenho temos a equação:

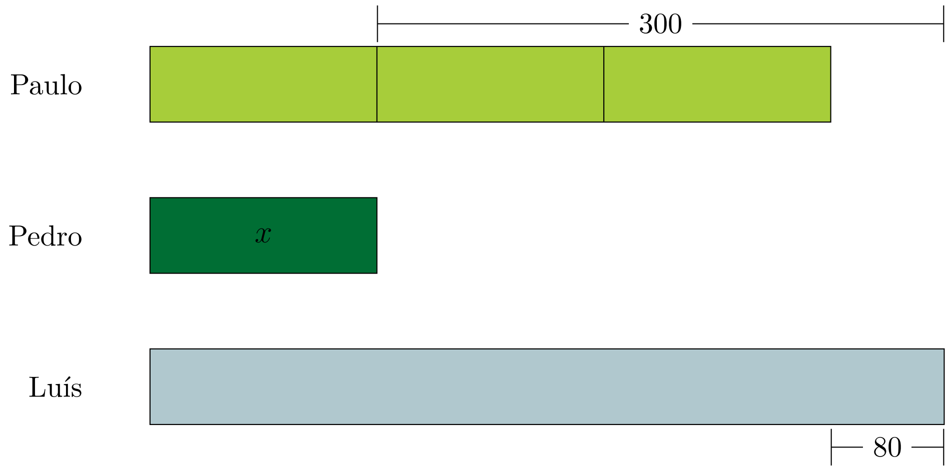
$$\begin{aligned}(x+300)-3x &= 80\\ 2x &= 220\\ x &= 110.\end{aligned}$$

A quantidade total de dinheiro é obtida pela expressão:

$$x+x+300+3x = 850.$$

Solução 3: Considere

Figura 59 – Ilustração do problema 29.



Fonte: O autor

A partir do desenho temos a equação:

$$\begin{aligned}2x+80 &= 300\\ 2x &= 220\\ x &= 110.\end{aligned}$$

A quantidade total de dinheiro é obtida pela expressão:

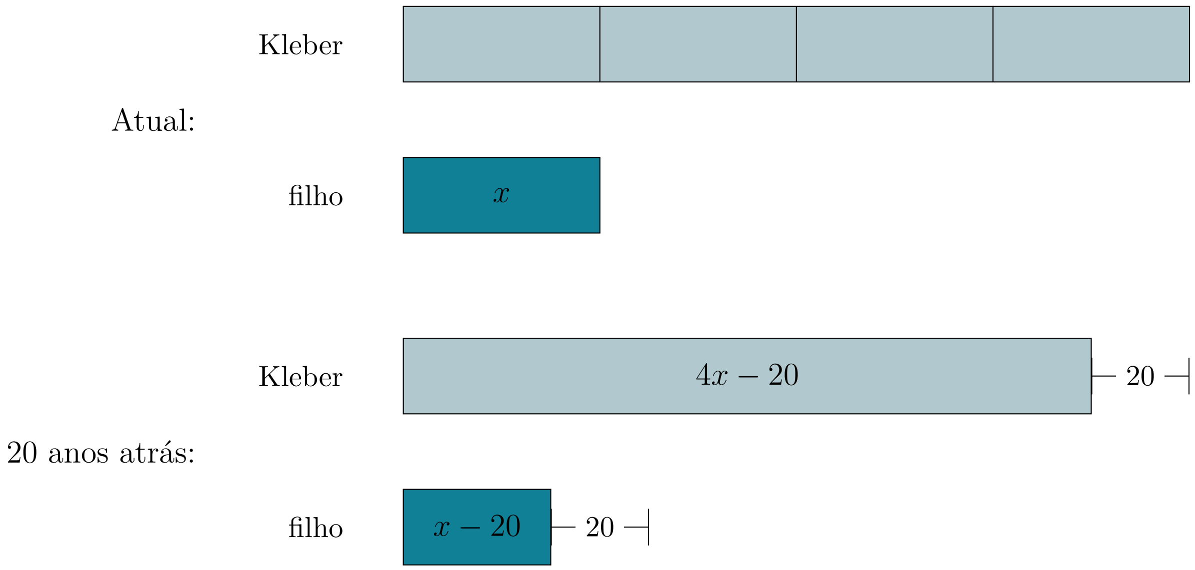
$$x+x+300+3x = 850.$$

Resposta: O total é 850 reais. ✓

Problema 30. *A idade de Kleber é 4 vezes maior do que a idade do seu filho. Se há 20 anos o total das idades de pai e filho era 50, determine as idades de Kleber e seu filho.*

Solução: Considere a idade atual do filho de Kleber igual a x. Há 20 anos as idades são dadas por $4x - 20$ e $x - 20$.

Figura 60 – Ilustração do problema 30.



Fonte: O autor

Assim montamos a equação:

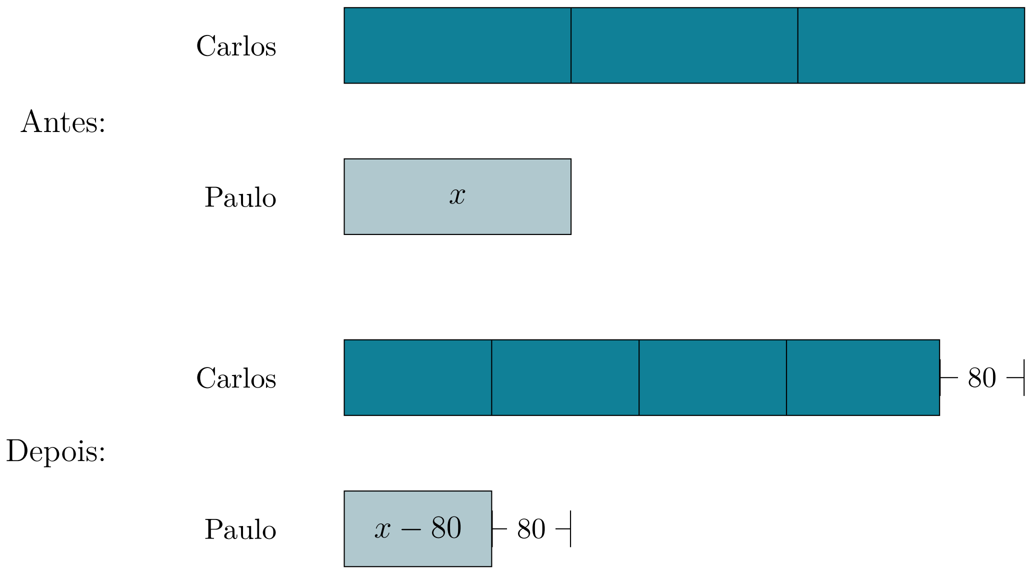
$$\begin{aligned} 4x - 20 + x - 20 &= 50 \\ 5x &= 90 \\ x &= 18. \end{aligned}$$

Resposta: A idade do Kleber é $4 \times 18 = 72$ e a do seu filho é 18. ✓

Problema 31. *Carlos tinha 3 vezes mais dinheiro que Paulo. Depois de gastar 80 reais cada um, Carlos tinha 4 vezes mais dinheiro que Paulo. Quanto dinheiro Carlos tinha inicialmente?*

Solução: Considere que a quantia inicial de Paulo é de x reais. Após gastar 80 reais cada um, temos os valores $3x - 80$ para Carlos e $x - 80$ para Paulo.

Figura 61 – Ilustração do problema 31.



Fonte: O autor

Assim temos a equação:

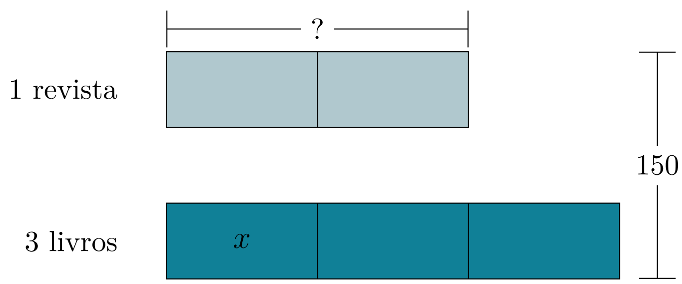
$$3x - 80 = 4(x - 80)$$
$$-x = -240$$
$$x = 240.$$

Resposta: A quantia inicial de Carlos é de $3 \times 240 = 720$ reais. ✓

Problema 32. *Vicente pagou 150 reais por 3 livros e uma revista. A revista custava o dobro de cada livro. Qual foi o preço da revista?*

Solução: O valor de cada livro é x reais e da revista $2x$.

Figura 62 – Ilustração do problema 32.



Fonte: O autor

Daí temos a equação:

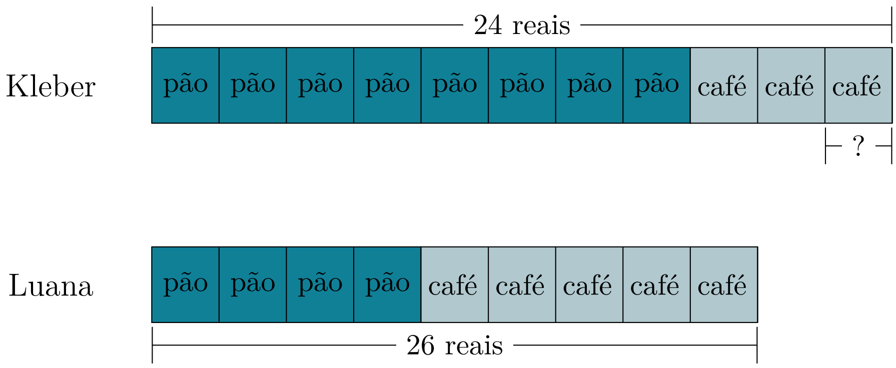
$$\begin{aligned} 3x + 2x &= 150 \\ 5x &= 150 \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Resposta: O valor de casa livro é 30 reais, assim o valor da revista é $2 \times 30 = 60$ reais. ✓

Problema 33. *Na terça-feira, Kleber comprou 8 pães de queijo e 3 xícaras de café no Zebu Café e gastou 24 reais. Na quarta-feira, Luana gastou 26 reais por 4 pães de queijo e 5 xícaras de café. Quanto o Zebu Café cobra pela xícara de café?*

Solução: Usando o Modelo de Barras:

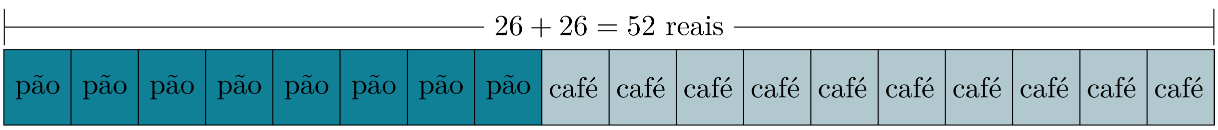
Figura 63 – Ilustração do problema 33.



Fonte: O autor

Sabe-se que 4 pães e 5 cafés custam 26 reais, logo 8 pães e 10 cafés custam 52 reais.

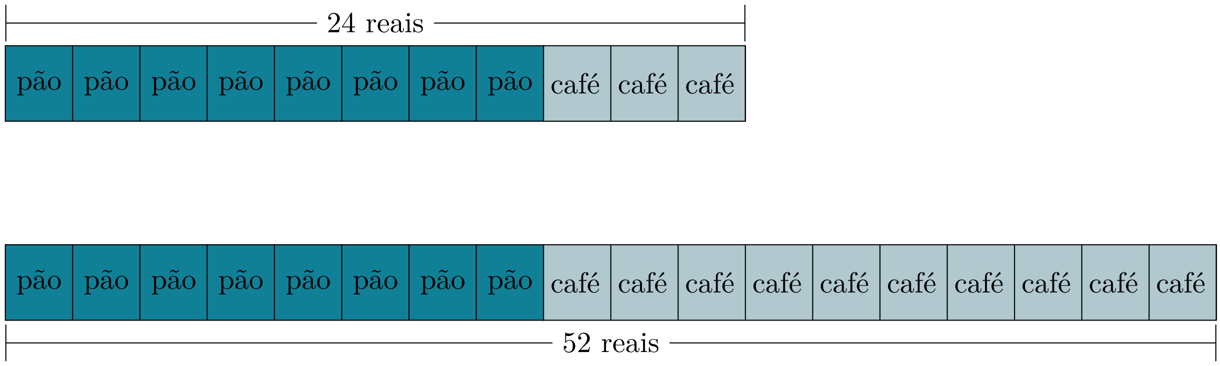
Figura 64 – Ilustração do problema 33.



Fonte: O autor

Então, temos que 8 pães e 3 cafés custam 24 reais e 8 pães e 10 cafés custam 52 reais. Veja a ilustração:

Figura 65 – Ilustração do problema 33.



Fonte: O autor

Daí, o valor de 7 cafés é dado por

$$52 - 24 = 28 \text{ reais.}$$

Logo, o valor de cada café é obtido por

$$28 \div 7 = 4 \text{ reais.}$$

Resposta: A xícara de café custa 4 reais. ✓

Nota: Este problema ilustra a capacidade do Modelo de Barras de promover a transição do pensamento numérico para o algébrico. As barras de cores diferentes ou de tamanhos diferentes representam os valores desconhecidos do enunciado.

A resolução por meio da álgebra é obtida do sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas:

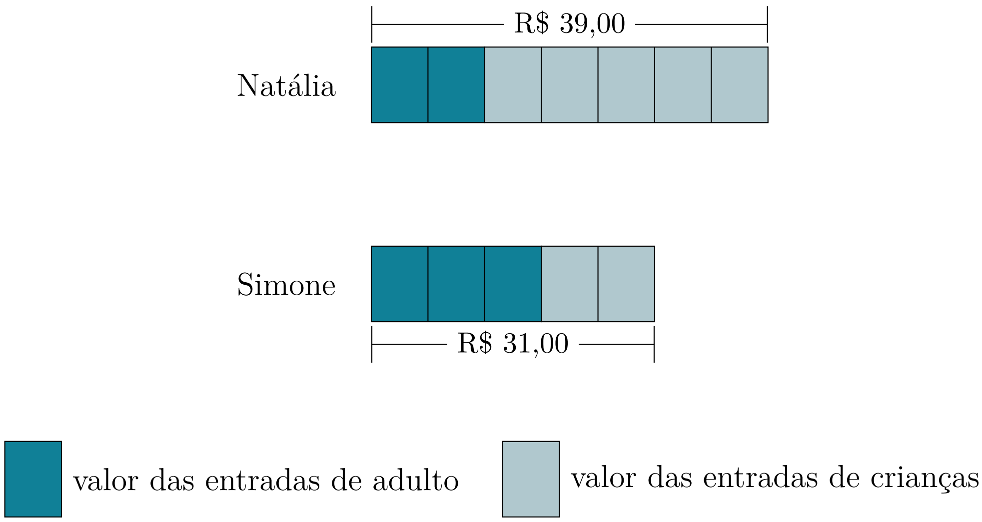
$$\begin{cases} 8x + 3y = 24, \\ 4x + 5y = 26, \end{cases}$$

onde a incógnita x representa o valor do pão e a incógnita y o valor da xícara de café.

Problema 34. *Dois grupos de pais e filhos foram ao cinema no final de semana. Natália comprou 2 ingressos para adultos e 5 ingressos para crianças, pagando um total de 39 reais. Simone comprou 3 ingressos para adultos e 2 ingressos para crianças para o mesmo filme e pagou 31 reais. Qual é o valor gasto para comprar de 2 ingressos para adultos mais 3 ingressos para crianças?*

Solução:

Figura 66 – Ilustração do problema 34.



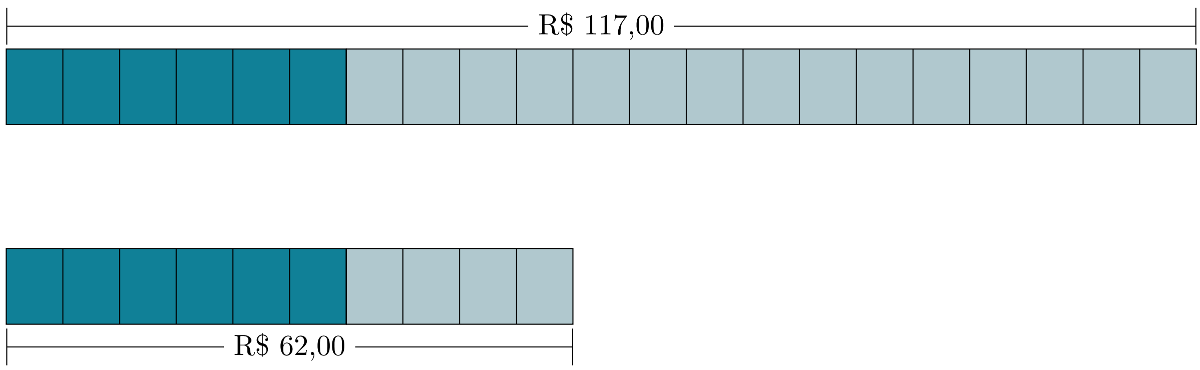
Fonte: O autor

Sabe-se que 2 ingressos de adultos mais 5 ingressos de crianças custam 39 reais, logo 6 ingressos de adultos mais 15 ingressos de crianças custam 117 reais.

Sabe-se também que 3 ingressos de adultos mais 2 ingressos de crianças custam 31 reais, logo 6 ingressos de adultos mais 4 ingressos de crianças custam 62 reais.

Veja a ilustração a seguir:

Figura 67 – Ilustração do problema 34.



Fonte: O autor

Daí temos que 11 ingressos de crianças é obtido por

$$117 - 62 = 55.$$

Logo, o valor do ingresso para criança é dado por

$$55 \div 11 = 5 \text{ reais},$$

o valor de 2 ingressos de adultos é obtido por

$$39 - 25 = 14 \text{ reais,}$$

e o valor de 3 ingressos de crianças é dado por

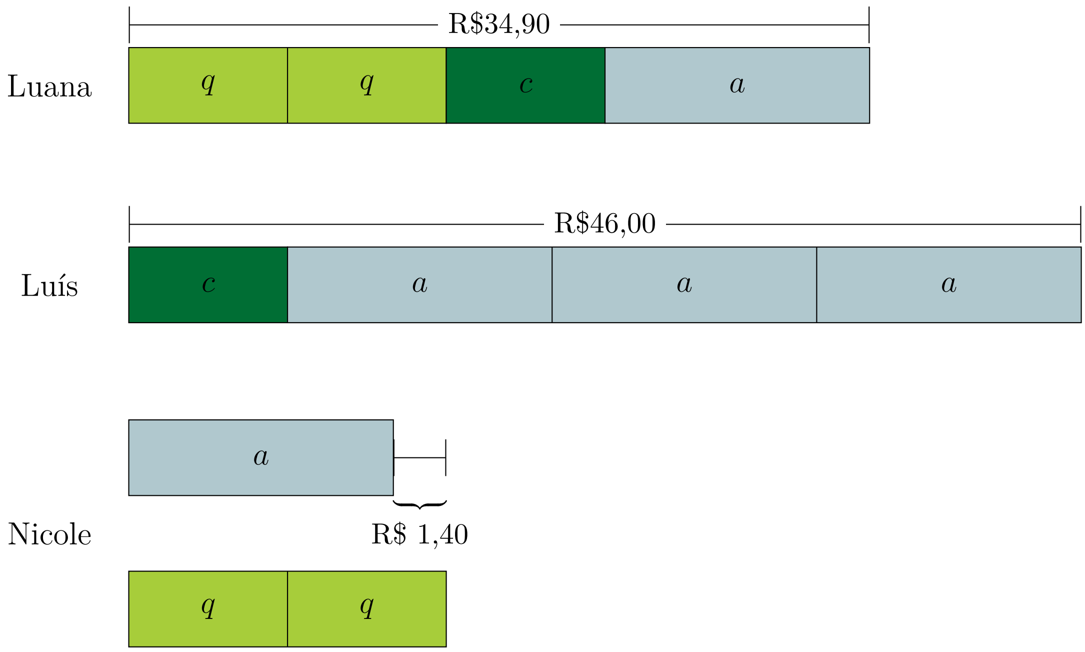
$$3 \times 5 = 15 \text{ reais.}$$

Resposta: O custo total para dois ingressos de adultos e três de crianças é de 29 reais. ✓

Problema 35. *Na Casa da Pizza, Luana comprou 2 pizzas de queijo, 1 pizza de calabresa e 1 pizza de atum por um total de R$ 34,90. Luís comprou 3 pizzas de atum e 1 pizza de calabresa por um total de R$ 46,00. Nicole disse a eles que sabia que a pizza de atum custava R$ 1,40 a menos que 2 pizzas de queijo, mas ela não sabia o custo da pizza de calabresa. Determine o valor de cada pizza de calabresa.*

Solução: Usando o Modelo de Barras para traduzir os dados do problema:

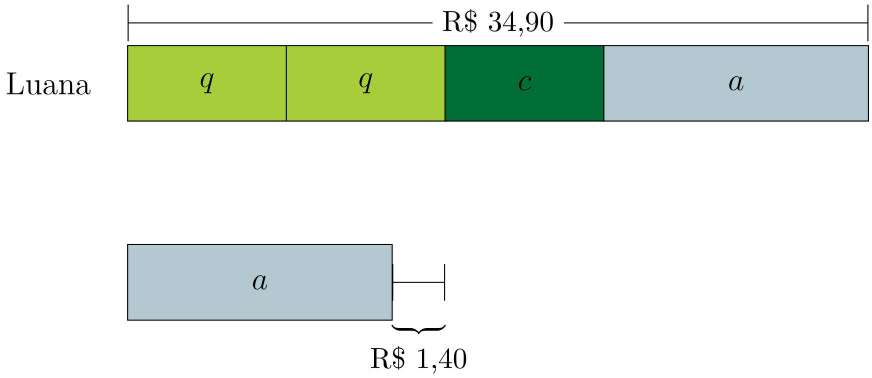
Figura 68 – Ilustração do problema 35.



Fonte: O autor

Da ilustração temos que a pizza de atum custa o valor de 2 pizzas de queijo menos R$1,40. Logo:

Figura 69 – Ilustração do problemas 35.

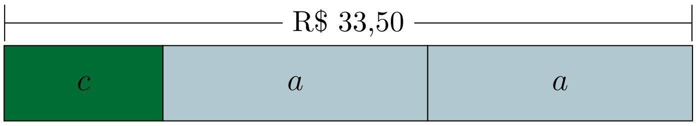


Fonte: O autor

Daí, o valor de 2 pizzas de atum mais 1 de calabresa é

$$\text{R\$ } 34,90 - \text{R\$ } 1,40 = \text{R\$ } 33,50.$$

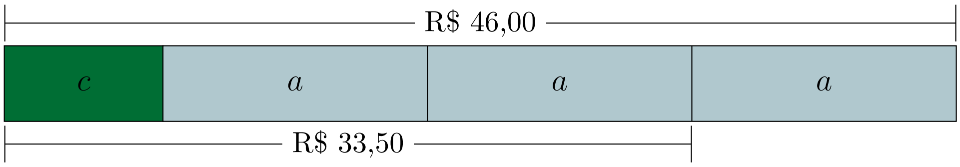
Figura 70 – Ilustração do problema 35.



Fonte: O autor

Dessa informação e da informação de Luís temos o seguinte ilustração:

Figura 71 – Ilustração do problema 35.



Fonte: O autor

Assim o valor da pizza de atum é dado por

$$\text{R\$ } 46,00 - \text{R\$ } 33,50 = \text{R\$ } 12,50,$$

o valor de duas pizzas de atum é obtido por

$$\text{R\$ } 12,50 \times 2 = \text{R\$ } 25,00,$$

e, por fim,

$$\text{R\$ } 33,50 - \text{R\$ } 25,00 = \text{R\$ } 8,50.$$

Resposta: O valor da pizza de calabresa é R$ 8,50. ✓

Nota: A abordagem pictórica é uma alternativa à resolução algébrica do sistema de equações de primeiro grau:

$$\begin{cases} 2q + c + \ \ a = 34 \\ \qquad c + 3a = 46 \\ 2q \qquad - \ \ a = 1{,}40 \end{cases}$$

O trabalho de Queiroz (2015) apresentou atividades de sala de aula aliando a metodologia de resolução de problemas de Polya com o Modelo de Barras. O texto apresenta aspectos teóricos do ensino de álgebra e o desenvolvimento das atividades aplicadas aos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa de Dotti (2016) mostra exemplos de problemas presentes nos livros didáticos de Singapura. Os problemas algébricos são apresentados após a autora ilustrar o Modelo de Barras a partir de problemas aritméticos. O objetivo é motivar o uso do Modelo de Barras para introduzir o ensino de álgebra ao longo do Ensino Fundamental.

O estudo de Fontes (2019) abordou o Modelo de Barras como alternativa metodológica para resolução de problemas algébricos. O texto apresenta a resolução de sete problemas com a metodologia proposta por George Polya aliada ao Modelo de Barras. Ao final apresenta uma breve discussão a respeito da transição da aritmética para álgebra.

O Modelo de Barras é recomendado para estudantes com dificuldades em resolver problemas no Ensino Fundamental. Ao desenvolver a capacidade de ilustrar por meio de uma figura o que entendeu do enunciado e por meio de operações elementares responder a pergunta, o estudante desenvolve as diversas habilidades presentes na Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

Apesar do grande número de problemas que o Modelo de Barras é adequado para o desenvolvimento da solução, por exemplo, multiplicação com o significado de soma de parcelas iguais e divisão com o significado de equipartição, divisão na razão de mesma espécie, torna-se inadequado para problemas de multiplicação que envolvem área.

O Modelo de Barras como metodologia de resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Computacional(PC), definido pela Sociedade Brasileira de Computação (SBC) como: "capacidade de compreender, definir, modelar, comparar, solucionar, automatizar e analisar problemas (e soluções) de forma metódica e sistemática, através da construção de algoritmos" (SBC, 2019).

Segundo Brackmann (2017) o Pensamento Computacional (PC) é uma habilidade que qualquer pessoa deveria saber, independentemente da área de conhecimento ou atividade profissional, assim como ler, escrever e calcular. Ao contrário do que o nome sugere, o PC não envolve apenas conceitos de Computação para solução de problemas em suas raízes, pois também agrega práticas de projetar sistemas, entender o comportamento humano e o pensamento crítico.

O Pensamento Computacional é um processo de resolução de problemas que inclui (mas não está limitado a) as seguintes características:

- Formulação de problemas de forma que nos permita usar um computador e outras ferramentas para nos ajudar a resolvê-los;
- Organização e análise lógica de dados;
- Representação de dados através de abstrações, como modelos e simulações;
- Automatização de soluções através do pensamento algorítmico (uma série de etapas ordenadas);
- Identificação, análise e implementação de possíveis soluções com o objetivo de alcançar a combinação mais eficiente e efetiva de etapas e recursos;
- Generalização e transferência deste processo de resolução de problemas para uma grande variedade de problemas.

Essas habilidades são apoiadas e reforçadas por uma série de qualidades ou atitudes que são dimensões essenciais do Pensamento Computacional.

Essas qualidades ou atitudes incluem:

- Confiança em lidar com a complexidade;
- Persistência ao trabalhar com problemas difíceis;
- Tolerância para ambiguidades;
- A capacidade de lidar com os problemas em aberto;
- A capacidade de se comunicar e trabalhar com outros para alcançar um objetivo ou solução em comum.

Ao analisar as habilidades e atitudes que o Pensamento Computacional explora, pode-se concluir que o Modelo de Barras, como metodologia de resolução de problemas, é um caminho para o seu desenvolvimento a partir das séries inciais do Ensino Fundamental até o início do Ensino Médio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente, o grande problema do professor de matemática é trazer para a realidade dos estudantes a imensa gama de benefícios que a Matemática traz com sua forma de entender e resolver os diversos tipos de problemas do mundo. As grandes corporações, as instituições públicas e a sociedade necessitam de estudantes com letramento matemático consolidado, que tenham a capacidade de usar o pensamento algébrico e o pensamento crítico para resolver os mais diversos tipos de problemas.

Estudar o Método Pictórico permitiu compreender os caminhos da aprendizagem matemática dos estudantes ao longo do Ensino Fundamental. É fato que a Metodologia de Resolução de Problemas inserida nos diversos currículos contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico e do pensamento crítico dos estudantes.

No trabalho foi apresentado o Modelo de Barras como uma oportunidade de expor os aspectos teóricos que o fizeram ter destaque ao redor do mundo e também mostrar a resolução de problemas baseada na ação do estudante e a organização da aprendizagem pelo professor. E observa-se que tal abordagem matemática permite a sistematização com melhor compreensão dos conceitos por trabalhar uma abordagem visual e concreta que antecede a aprendizagem formal, simplificando as tradicionais fórmulas prontas e repetição de regras e métodos.

Na confecção de atividades para sala de aula, os problemas que são resolvidos usando o Modelo de Barras promovem a autonomia do aluno, uma vez que, ao desenhar o que se entende no enunciado propicia que o aluno defina sua rota de resolução, resgata o cálculo mental e desenvolve a verificação da resposta por meio da estimativa e da operação inversa.

A Matemática de Singapura não utiliza a repetição. Esta ocupa-se de explicar a adição, subtração, multiplicação e divisão através de exemplos visuais contextualizando a aprendizagem, propiciando significativo letramento matemático para o aluno.

Este trabalho objetiva apresentar a abordagem pictórica na resolução de problemas de palavras para que o professor orientado pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC) busque por novas metodologias de ensino, assim como, conheça os fundamentos do letramento matemático e as estratégias metodológicas para sua efetiva aquisição.

As demandas sociais do XXI impõe aos profissionais de educação inovar nas suas metodologias e buscar teorias que promovam o letramento matemático efetivo dos estudantes.

Para que vejam a Matemática como uma disciplina de aprendizagem, os estudantes precisam de atividades e problemas matemáticos que permitam a aquisição de habilidades e competências para o enfrentamento dos desafios da sociedade.

Referências

ABREU, J.; DINIZ, R.; TEIXEIRA, R. Experiências na construção e gestão de materiais pedagógicos inspirados no Método de Singapura na Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino Básico. **Jornal das Primeiras Matemáticas, Guimarães**, n. 11, p. 65–106, 2018. Disponível em: <https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/4943>. Acesso em: 28 set. 2019.

BALDIN, Y.; SILVA, A. F. **Resolução de problemas na sala de aula**: uma proposta da obmep para capacitação de professores em estratégias de ensino da matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/a25843me6wowk.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2022.

BAO, L. The effectiveness of using the model method to solve word problems. **Australian Primary Mathematics Classroom**, v. 21, n. 3, p. 26–31, 2016. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1115069.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2021.

BOALER, J. **O que a Matemática tem a ver com isso?**: Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da Matemática e inspirar sucesso. Porto Alegre: Editora Penso, 2019.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 6 mai. 2022.

BRASIL (Ministério da Educação). **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 28 set. 2018.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Ed.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006.

CALDERÓN, P. E. L. **Percepciones de los y las docentes del primer ciclo básico, sobre la implementación del método Singapur en el colegio Mario Bertero Cevasco de la comuna de isla de Maipo**. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidad de Chile, Santiago, 2014. Disponível em: <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/130579>. Acesso em: 20 dez. 2021.

CHAN, E. C. M.; FOONG, P. Y. A conceptual framework for investigating pupils' model development during the mathematical modelling process. **The Mathematics Educator**, Singapore, v. 15, n. 1, p. 1–29, 2013. Disponível em: <https://repository.nie.edu.sg/handle/10497/16838>. Acesso em: 10 abr. 2022.

CINTRA, C. C. **Proposta para o ensino de frações para o 7º ano**: do diagnóstico à aprendizagem mediada por Modelo de Barras. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT) — Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/10005>. Acesso em: 18 fev. 2020.

CLARK, A. **Problem solving in Singapore Math**. 2016. Disponível em: <https://www.sau39.org/cms/lib/NH01912488/Centricity/Domain/244/MIF%20Problem%20Solving.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2020.

DELGADO, M. R.; MAYTA, E. I.; ALFARO, M. L. **Efectividad del "Método Singapur" en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes del tercer grado de primaria de una institución educativa privada del distrito de Villa El salvador**. Dissertação (Mestrado em Educação) — Pontificia Universidad Católica Del Perú, Lima, 2018. Disponível em: <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/13286>. Acesso em: 15 mar. 2021.

DIENES, Z. **Aprendizado Moderno de Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DINIZ, J. R. J. V.; TEIXEIRA, R. C.; PACHECO, S. M. Os Princípios Orientadores do Método de Singapura e a Aprendizagem da Matemática no 1º Ciclo do Ensino Básico. **Jornal das Primeiras Matemáticas**, v. 13, p. 5–36, 2019. Disponível em: <https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/5405>. Acesso em: 15 jan. 2022.

DOTTI, T. **Um estudo do Modelo de Barras nos livros didáticos da Matemática de Singapura**: fundamentação da álgebra no ensino fundamental 1º Ciclo. Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/2304>. Acesso em: 10 mar. 2020.

FERRUCCI, B. J.; KAUR, B.; CARTER, J. A.; YEAP, B. Using a model approach to enhance algebraic thinking in the elementary school mathematics classroom. In: GREENES, C. E.; RUBENSTEIN, R. (Ed.). **Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics**. USA: NCTM, 2008. p. 195–209.

FONTES, G. O. **O modelo de barras como recurso na resolução de problemas algébricos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019.

GOIS, R. C. **O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7º ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4472>. Acesso em: 10 mar. 2020.

HAR, Y. B. **Bar modeling**: a problem-solving tool from research to practice an effective singapore math strategy. Singapore: Marshall Cavendish Education, 2010.

HOLETZ, M. S. **Utilizando a gamificação e a metodologia de ensino de Singapura para trabalhar com as operações matemáticas básicas nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado profissional em educação e novas tecnologias) — Centro Universitário Internacional, Curitiba, 2019. Disponível em: <https://repositorio.uninter.com/handle/1/491>. Acesso em: 5 mai. 2022.

KANTOWSKI, M. G. Some thoughts on teaching for problem solving. In: REYS, R. E. (Ed.). **Problem solving in school mathematics**. Reston: NCTM, 1980.

KHO, T. H.; YEO, S. M.; LIM, J. **The Singapore model method for learning mathematics**. Singapore: Marshall Cavendish education, 2009.

KINTSCH, W.; GREENO, J. Understanding and solving word arithmetic problems. **Psychological review**, Washington, v. 92, n. 1, p. 109–29, 1985. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/3983303/.> Acesso em: 26 abr. 2022.

LLIVINA, M. **Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos**. Tese (Doutorado em Ciencias Pedagógicas) — Universidad Pedagógica "Enrique José Varona", La Habana, 1999. Disponível em: <https://zdocs.pub/doc/miguel-jorge-llivina-lavigne-xop0r3dm3zpy>. Acesso em: 15 fev. 2022.

LOPES, S. A.; MALTA, G. H. Resolução de problemas pelo método pictórico. In: SIMPÓSIO DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORTE, 2., 2017, Santarém. **E-book [...]**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018. Disponível em: <https://anpmat.org.br/ebooks-dos-simposios.> Acesso em: 28 set. 2021.

MEI, L.; LI, S. **Mathematical problem solving**: the Bar Model Method: a professional learning workbook on the key problem solving strategy used by global top performer. Singapore: Scholastic Education International, 2014.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar**. Lisboa: APM & IIE, 1991.

NG, S. F.; LEE, K. The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 40, n. 3, p. 282–313, 2009. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40539338>. Acesso em: 10 abr. 2022.

OCDE (Organização para a Cooperação Econômica e Desenvolvimento). **PISA 2018 assessment and analytical framework**. Paris, 2019. Disponível em: <https://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2018-assessment-and-analytical-framework_b25efab8-en>. Acesso em: 26 mar. 2022.

OLIVEIRA, R. M. A. **Uma experiência de abordagem de porcentagem no 8º ano com o auxílio do Modelo de Barras**. Dissertação (Mestrado Profissional em rede nacional PROFMAT) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NUGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

OSMAN, S.; YANG, C. N. A. C.; ABU, M. S.; ISMAIL, N.; JAMBARI, H.; KUMAR, J. A. Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation technique. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 13, n. 3, p. 273–279, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.12973/iejme/3919>. Acesso em: 20 jan. 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, J. I.; ANGóN, Y. P. **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

QUEIROZ, J. M. d. S. **Resolução de problemas da pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com auxílio do Modelo de Barras**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4473>. Acesso em: 10 set. 2021.

RANGEL, L.; MEIRELLES, R.; CUPOLILLO, R.; SAJNIM, C.; ALMEIDA, L. F. A representação pictórica na resolução de problemas: explorando o modelo de barras. In: BIENAL DE MATEMÁTICA, 8., 2017, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

SANTOS, J. C. M. **Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura**. Dissertação (Mestrado Profissional em rede nacional PROFMAT) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

SERRAZINA, L. Espaço GTI: Contributos da investigação para a aprendizagem da matemática: uma visão global. **Educação e Matemática**, n. 144-5, p. 2–8, 2017. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/145/198.> Acesso em: 17 abr. 2022.

SKEMP, R. **Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas**. Madrid: Ediciones Morata, 1980.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Cadernos do Mathema: Ensino Fundamental**: Jogos de matemática de 6º a 9º ano. Porto Alegre: Artmed Editora, 2007.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO. **Diretrizes da Sociedade Brasileira de Computação para o Ensino de Computação na Educação Básica**. Brasília, 2019. Disponível em: <http://seer.upf.br/index.php/rbecm/article/view/11841/114115548>. Acesso em: 6 mai. 2022.

SOUZA, M. L. V.; LOPES, S. A.; NASCIMENTO, K. G. Álgebra: Proposta da unidade temática na BNCC e desafios por sua trajetória ao longo dos nove anos do ensino fundamental. In: SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 4., 2020, Rio de Janeiro, RJ. **E-book [...]**. Rio de Janeiro: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica, 2020. Disponível em: <https://anpmat.org.br/ebooks-dos-simposios>. Acesso em: 20 mar. 2022.

ZÚÑIGA, P. G. **Metodología Singapur**: el caso del Método del Modelo de Barras. Una mirada Socioepistemológica. Dissertação (Mestrado em Educação) — Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, 2013. Disponível em: <http://repositorio.conicyt.cl/bitstream/handle/10533/184370/ZUNIGA_>. Acesso em: 20 mar. 2022.