Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Mestrado Profissional em Matemática

Sebastião da Silva Lima Junior

Um estudo sobre a Função Exponencial: propostas de atividades lúdicas

Vitória da Conquista-BA
2022

Sebastião da Silva Lima Junior

UM ESTUDO SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL: PROPOSTAS DE ATIVIDADES LÚDICAS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Fernando dos Santos Silva

Vitória da Conquista-BA
2022

L696e Lima Júnior, Sebastião da Silva.

Um estudo sobre a função exponencial: propostas de atividades lúdicas. / Sebastião da Silva Lima Júnior, 2022.

86f. il.

Orientador (a): Dr. Fernando dos Santos Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2022.

Inclui referências. 60 - 63.

1. Função exponencial. 2. Proposta de atividade. II. 3.Ensino-Atividade Lúdica. I. Silva, Fernando dos Santos. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510.3

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção-CRB 5/1890

Sebastião da Silva Lima Júnior

Um estudo sobre a função exponencial: propostas de atividades lúdicas

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva - UESB

Prof. Dr. Júlio César dos Reis - UESB

Prof. Dr. Daniel de Jesus Silva - UNEB

Vitória da Conquista – Ba, 03 de junho de 2022

Agradecimentos

A presente dissertação não poderia ser concluída sem o apoio de várias pessoas.

Em primeiro lugar, agradecer a Deus, “Porque dEle e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém.” (Romanos 11:36).

A minha esposa, Jéssica Tayaná Francisca Silveira, sem você seria impossível chegar aqui.

Não posso deixar de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Fernando, por toda a paciência e empenho nas orientações. Muito obrigado pelas correções quando necessárias.

Estendo os meus agradecimentos a professora Doutora Ana Paula Perovano, pela parceria e pelas inúmeras contribuições para a realização desse trabalho.

Desejo igualmente agradecer à banca examinadora, Dr. Daniel de Jesus Silva e Dr. Júlio Cesar dos Reis, bem como a todos os meus professores e colegas do mestrado.

Agradeço imensamente aos meus professores do ensino básico e superior, especialmente, Geza do primeiro ano de escolarização, Suzana do Ensino Médio, João de Deus e Patrícia Pina, respectivamente, meu orientador e coorientadora da graduação.

Agradeço a UESB e aos funcionários do módulo, especialmente a Marcionílio e Nice.

Quero agradecer à minha família pelo apoio incondicional que me deram, meus pais, sogros, irmãos, cunhados e sobrinhos.

Não deixar de agradecer às minhas mães de oração que me ajudaram a passar por mais essa etapa, sempre intercedendo e cuidando.

Por último, agradecer à todos os amigos que compartilharam desse momento comigo.

Resumo

No dia a dia, a sociedade está submetida a diversas situações em que a matemática se faz presente, como no recebimento de um troco no supermercado, na realização de uma transação bancária, no uso de aplicativos de celular, entre outros. Sendo um dos tópicos da matemática, a função exponencial está presente em situações como o cálculo do montante no regime de juros compostos, meia vida de uma substância e taxa de crescimento de doenças contagiosas. O presente trabalho tem como objetivo fazer um estudo da função exponencial, propondo aos professores atividades lúdicas, a partir da utilização de jogos e histórias em quadrinhos, para serem aplicadas em sala de aula, como uma maneira estratégica para complementar e facilitar o entendimento desse conteúdo aos alunos do Ensino Médio. A importância desse estudo se dá pela busca da compreensão sobre as possíveis contribuições que o diálogo entre teoria e prática podem proporcionar à experiência pedagógica do professor de Matemática. Como estratégia metodológica para o desenvolvimento deste trabalho, inicialmente, foi realizada uma busca pelas origens do conceito de função exponencial, e depois apresentadas, a partir de alguns teoremas e demonstrações, definição, características e algumas aplicações em situações cotidianas. Para enriquecer as discussões, foram destacados aspectos sobre o ensino da função exponencial, segundo alguns documentos norteadores, como a Base Nacional Comum Curricular e os Parâmetros Curriculares Nacionais, além de apresentadas algumas pesquisas desenvolvidas sobre o tema e submetidas ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Após essas reflexões, foi enfatizada a importância do uso de atividades lúdicas para o ensino de Matemática, sobretudo utilizando jogos e HQs, através da proposta de quatro sequências didáticas sobre função exponencial: Quebra-cabeça Exponencial, Cruza fácil Exponencial, Caça Exponencial e HQ Exponencial. Com a realização do trabalho, pode-se perceber que o processo de ensino aprendizagem é composto por sucessos e insucessos, mas a metodologia e os recursos adotados dizem muito acerca da construção do conhecimento, e faz com que a sala de aula se torne um espaço múltiplo e plural, despertando professores e alunos para as potencialidades dos saberes.

Palavras-chave: Função Exponencial; Ensino; Propostas de atividades.

Abstract

In everyday life, society is subjected to several situations in which mathematics is present, such as receiving change at the supermarket, carrying out a bank transaction, using cell phone applications, among others. Being one of the topics of mathematics, exponential function is present in situations such as calculation of amount in the compound interest regime, half-life of a substance and growth rate of contagious diseases. This work aims to make a study of exponential function, proposing to teachers playful activities, from the use of games and comics, to be applied in classroom, as a strategic way to complement and facilitate the understanding of that content to high school students. The relevance of this study is given by the search for understanding about possible contributions that the connection between theory and practice can provide to the pedagogical experience of Mathematics teacher. As a methodological strategy for the development of this work, initially, a search for the origins of exponential function concept was carried out, and then presented, from some theorems and demonstrations, definition, characteristics and some applications in everyday situations. To reinforce the discussions, it has been highlighted aspects about teaching of exponential function, according to some guiding documents, such as National Curricular Common Base and National Curricular Parameters, in addition to presenting some research developed on the subject and submitted to the Professional Master's in Mathematics in national network. After those reflections, it has been emphasized the importance of using playful activities for the teaching of Mathematics, especially using games and comics, through the proposal of four didactic sequences on exponential function: Exponential Puzzle, Exponential Easy Cross, Exponential Hunt and Exponential Comics. With the completion of the research, it can be seen that teaching-learning process is composed of successes and failures, but the methodology and resources adopted say a lot about the construction of knowledge, and makes the classroom become a space multiple and plural, awakening teachers and students to the potential of knowledge.

Keywords: Exponential Function; Teaching; Activities Proposals.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Matemática faz parte do nosso cotidiano, desde situações mais simples, como ir ao supermercado, quanto a situações mais complexas, como o efeito de um medicamento no corpo humano. Além disso, a Matemática, desde o seu surgimento até os nossos dias atuais, propõe um vasto número de temas a serem pesquisados e estudados: Geometria, Aritmética, Funções, Estatística e Probabilidade, dentre outras áreas de estudo.

Este trabalho trata especificamente da função exponencial, com o objetivo de fazer um estudo dessa função, a fim de propor para os professores atividades lúdicas para serem aplicadas em sala de aula, tomando essas atividades como uma maneira estratégica para facilitar o entendimento do aluno sobre o conteúdo.

Como professor de Matemática atuante nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio de escola pública, sei como o conteúdo de função é necessário para a formação dos nossos alunos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio destacam que:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. (BRASIL, 1999, p. 255)

Ou seja, o conceito de função exerce a interdisciplinaridade e está presente em situações do nosso dia a dia. E o porquê da escolha para função exponencial?

Pelo mesmo fato de estar presente em situações do cotidiano, como cálculos de montante em juros compostos, assim como cálculos de dívidas, crescimento populacional, decaimento radioativo, dentre outras. Dessa forma, permite ao professor apresentar ao aluno o conteúdo através de exemplos práticos. Para Oliveira (2014, p. 14-15):

> Muitos fenômenos naturais e sociais como o crescimento populacional, a meia-vida de uma substância, a medida da pressão atmosférica, o cálculo do montante num sistema de juros compostos, o resfriamento de um corpo, são exemplos que trazem problemas onde é importante a aplicação da função exponencial que devido a sua relação com outras ciências, tem seu estudo como parte relevante do currículo do Ensino Médio. Esta conexão com outras áreas do currículo e com a própria matemática faz com que o ensino e a aprendizagem ganhem mais e melhor sentido, pois cria

> a oportunidade na qual o aluno percebe a importância do conteúdo a ser trabalhado, o que faz da contextualização uma importante ferramenta de ensino para resolver problemas reais.

Dessa forma, como foi destacado, por ser um conteúdo que faz conexões com outras áreas do conhecimento e que possui aplicabilidade em situações cotidianas, percebemos a importância do ensino de funções exponenciais.

A exemplo da necessidade desse estudo, podemos destacar as situações de modelagem da transmissão da Covid-19[1], pois diariamente gráficos foram/são mostrados na mídia apresentando dados sobre o crescimento/decrescimento do vírus, durante esse período de pandemia.

A Matemática, nesse momento, tem sido um fator determinante para estudiosos e cientistas junto à Organização Mundial de Saúde (OMS) definirem protocolos e recomendações que devem ser seguidas de maneira segura pela população.

Assim, com base em estudos de modelagem matemática, principalmente gráficos de funções exponenciais, os cientistas puderam concluir que o número de infectados e de mortes causadas pelo vírus poderia diminuir consideravelmente se todos os países rigorosamente fizessem o isolamento social e uso de máscaras de proteção respiratória.

Diante desse momento delicado, há a necessidade no ensino de funções exponenciais e, principalmente, na interpretação dos seus gráficos, uma vez que o aluno, ao saber analisar e interpretar esses gráficos, poderá possuir informações como instrumentos que servirão na tomada de decisões em sua vida, portanto, contextualizando didaticamente a doença do Covid-19 à Matemática, apoiando-se no estudo dessa função.

Além de utilizar o quadro e o pincel em suas aulas, alguns professores sentem a necessidade de buscar estratégias e recursos que possam facilitar e/ou promover outras formas de aprendizagem do conteúdo. A exemplo disso, podemos citar alguns trabalhos que abordam o ensino de Matemática através da utilização de jogos (SILVA, 2015), sequências didáticas (ROZANSKI, 2015), (LIMA, 2016) e resolução de problemas (MARTINEZ, 2015), (TOLEDO, 2018), entre outros autores que apontam a ludicidade como uma ferramenta que pode facilitar o ensino das funções exponenciais. Segundo Carvalho (2009, p. 16):

> Nas duas últimas décadas, a investigação tem mostrado que, quando os alunos têm a possibilidade de trocar pontos de vista, de discutir resoluções, de verificar que a mesma tarefa pode ter desfechos diferentes, de assistir ao desenvolvimento de um argumento

[1]A COVID-19 é uma doença infectocontagiosa causada pelo coronavírus da síndrome respiratória aguda grave 2 (SARS-CoV-2). No Brasil, o registro do primeiro caso ocorreu em 26 de fevereiro de 2020 no estado de São Paulo, sendo essa pandemia um dos grandes desafios do século XXI. Nos dois primeiros anos de espalhamento, a pandemia matou cerca de 18,2 milhões de pessoas no mundo, no Brasil, segundo o Conselho Nacional dos Secretários de Saúde (Conass) o país agora possui 29.478.039 casos confirmados e 655.940 mortes pela Covid-19 (Dado de 17/03/2022). A ciência correu para criar uma vacina contra a doença, e os primeiros imunizantes ficaram prontos em meados de 2020. Até essa data, 17/03/2022, foram necessárias a utilização de 3 doses para a imunização.

> pessoal por um outro colega, ter de explicar como se descobriu um resultado, é benéfico para o desenvolvimento das suas competências.

Neste contexto, o presente trabalho apresenta propostas de atividades lúdicas direcionadas aos professores que desejam trabalhar o conteúdo de função exponencial, com a utilização de jogos (quebra-cabeças) e a partir de histórias em quadrinhos (HQs). Estas propostas podem ser utilizadas para introduzir e/ou complementar o conteúdo e serão apresentadas como um modelo para o professor aplicar em sua aula, de maneira coletiva e dinâmica.

Sobre a utilização dos jogos nas aulas de matemática, Grando (2008, p. 15) afirma:

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe propicie um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem.

Desse modo, podemos utilizar os jogos como estratégia para a construção do conhecimento, tendo em vista que estes representam um aliado no ensino da matemática.

Com relação à utilização das HQs como um recurso, podemos enfatizar que "a leitura compartilhada de quadrinhos na sala de aula pode ser uma forma de abrir "uma janela para o mundo" e despertar o interesse dos alunos por coisas novas" (VERGUEIRO; RAMOS, 2009, p. 79).

Para discutir essas questões no decorrer do trabalho, no capítulo 1, abordamos de maneira sucinta a história da função exponencial, a partir das pesquisas de vários estudiosos e matemáticos.

No capítulo 2, descrevemos a partir de teoremas e demonstrações, a definição, propriedades, características e o gráfico de uma função exponencial. Além disso, abordaremos a função tipo exponencial e suas características, apresentando ainda algumas aplicações desta em situações do nosso cotidiano.

Em seguida, no capítulo 3 destacamos sobre o ensino da função exponencial de acordo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, além de algumas pesquisas que já foram desenvolvidas sobre funções exponenciais no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) nos últimos sete anos, apresentando a metodologia, objetivo e resultados, levando em consideração o que eles ressaltam sobre o ensino dessa função.

No capítulo 4, enfatizamos a importância do uso de atividades lúdicas para o ensino de Matemática, principalmente com a utilização de jogos e histórias em quadrinhos, propondo quatro sequências didáticas sobre função exponencial: Quebra-cabeça Exponencial, Cruza fácil Exponencial, Caça Exponencial e HQ Exponencial.

Por fim, apresentamos as considerações finais de todo o trabalho realizado, que nos mostra a importância das atividades lúdicas no ensino de Matemática, sobretudo de funções exponencias.

Após as referências teremos disponível no apêndice as quatro sequências didáticas aqui relatadas para que os professores possam utilizar em suas aulas.

1 A história da Função Exponencial

Neste capítulo, abordaremos de maneira sucinta a história da função exponencial, abrangendo alguns momentos e estudos que nortearam o conceito que conhecemos hoje.

1.1 Uma breve explanação sobre as origens do conceito de Função Exponencial

A Matemática é antiga e surge a partir da própria necessidade do homem de medir e contar. Por conta dessa evolução é que vão surgindo termos como Álgebra e Geometria. Os nossos estudos serão direcionados para funções, em específico à função exponencial.

> Quando pensamos em função, duas coisas vêm à mente: a curva que a representa graficamente e sua expressão analítica. Em seguida, se fizermos um exercício mais formal, também nos lembraremos da ideia de correspondência, como uma máquina com entradas e saídas. Se nos fixarmos nessa última ideia, poderemos dizer que as tabelas babilônicas e egípcias já continham, de alguma forma, uma ideia de função, uma vez que tratavam justamente de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem esse número). Por essa razão, afirma-se algumas vezes que a noção de função tem sua origem na matemática antiga. (ROQUE, 2012, p. 295)

A partir disso, é possível perceber que o conceito de função também é antigo, se enriquecendo a partir da evolução e das próprias necessidades do homem, como compreensão de dados em tabelas e correspondências.

Especificamente sobre função exponencial, as pesquisas são também antigas e vários estudiosos contribuíram para nosso conhecimento de hoje. Podemos citar, por exemplo, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibnz, Leonhard Euler, Peter Gustav Lejune Dirichet, Arquimedes e Bonaventura Cavalieri. Para Santos (2018, p. 48):

> O conceito de exponencial como função foi desenvolvido por Bernoulli em 1697 com a obra Principia Calculi Exponentialum seu Percurrentium, onde apresenta diversos cálculos em que a variável da função é o expoente. Vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da notação exponencial até que René Descartes, em meados de 1937, nos deixou a notação de potência utilizada hoje, pela utilização de numerais como expoente de uma determinada base.

De maneira geral, podemos observar que nas diversas situações históricas as descobertas surgiram a partir de experimentos, erros e acertos realizados por várias pessoas. Inicialmente, os babilônicos, juntamente com os gregos, constataram a utilização de um sistema sexagesimal, onde posteriormente contribuiria para a conceituação da função exponencial. Segundo Boyer (1974, p. 22):

> Entre as tabletas babilônias encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas em que são dadas as dez primeiras potências para as bases 9, 16, 1,40 e 3,45 (todos quadrados perfeitos).

Depois desse conceito, ainda segundo os fatos que temos sobre História da Matemática, em 1360, Nicole Oresme[1] apresenta os primeiros registros com notações utilizando potências com expoentes racionais e irracionais. Já em 1484, Nicolas Chuquet[2] utiliza potências com expoente zero.

Como a sociedade na época se desenvolvia tecnologicamente e cientificamente, criou-se a necessidade de lidar com dados numéricos e cálculos envolvendo números muito grandes. Dessa forma, John Napier[3], a partir de trabalhos anteriores, inicia seus estudos sobre logaritmos e leva 20 anos para desenvolvê-lo. Ou seja, o estudo de logaritmo surge antes mesmo que a notação funcional de potência tivesse sido criada.

Segundo apresenta Hahn e Perazzoli (1991), inicialmente a função exponencial surge como um elo entre as posições aparentemente contraditórias de Heráclito de um lado, e Parmênides do outro, com a fórmula:

$$T(t) = exp\ (t.A).$$

Grande parte do significado dessa fórmula provém de duas propriedades:(Observação: as propriedades, teoremas e demonstrações citadas abaixo estão disponíveis em Hahn e Perazzoli (1991)).

1. Pela equação funcional $f(t+s) = f(t) \cdot f(s)$; esta atraía atenção desde a época de Napier, sendo sistematicamente explorada primeiramente por ele. No entanto, foi Augustin Louis Cauchy[4] quem a apresenta pela primeira vez de forma sistemática com um teorema.

[1] Nicole Oresme foi um economista, filósofo, matemático, físico, astrônomo, biólogo, psicólogo, musicólogo, teólogo e tradutor francês do período medieval.

[2] Nicolas Chuquet foi um matemático francês, inventou sua própria notação para conceitos algébricos e exponenciação e pode ter sido o primeiro matemático a reconhecer zero e números negativos como expoentes.

[3] John Napier era um proprietário escocês conhecido como um matemático, físico, e astrônomo, mais conhecido como o descobridor de logaritmos.

[4] Augustin-Louis Cauchy foi um matemático francês.

Teorema 1.1. O contínuo de soluções não trivial de valor complexo de $f(t+s) = f(t) \cdot f(s)$ na linha real são exatamente as funções $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi_a(t) = \exp(ta)$ com $a \in \mathbb{C}$.

Cerca de 70 anos depois que essa pergunta foi feita no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, por David Hilbert[5], fica provado, por Stefan Banach[6] e Waclaw Sierpinski[7], que é suficiente assumir a mensurabilidade de φ.

Teorema 1.2. Seja φ uma solução mensurável não trivial de $f(t+s) = f(t) \cdot f(s)$ na linha real, então existe um único $a \in \mathbb{C}$, tal que, $\varphi(t) = \exp(ta)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para saber se existia outras soluções para $f(t+s) = f(t).f(s)$, Georg Hamel[8], em 1905 apresenta a equação funcional $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Pelo resultado de Banach e Sierpinski, essa solução não pode ser mensurável. Assim, Hamel conclui que:

Teorema 1.3. Existem soluções de $f(t+s) = f(t).f(s)$ que não são mensuráveis. Além disso, todas as soluções de $f(t+s) = f(t).f(s)$ podem ser escritas na forma $\varphi = exp \circ f$, onde f resolve a equação funcional $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2. Pela equação diferencial $\dfrac{du(t)}{dt} = au(t)$;

   Até o momento, o conceito de função exponencial, que depende também do conceito de potência, está intensamente ligado ao conceito de logaritmo, pois até então, a função exponencial era considerada o inverso da função logarítmica, e não uma função independente. Quem começa a pensá-la como uma função explorando esses resultados anteriores e a propriedade 2 é Leonhard Euler, demonstrando que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$$

   Com

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   Motivado pelo trabalho de geometria de René Descartes[9], F. de Beaune[10] propõe o seguinte problema: encontre uma curva $y(x)$ tal que para cada ponto P as distâncias

[5]David Hilbert foi um matemático alemão, um dos mais notáveis matemáticos, e os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da matemática atual.

[6]Stefan Banach foi um matemático polonês. Sua principal contribuição foi a moderna análise funcional.

[7]Wacław Sierpiński foi um matemático polonês. Entrou para o departamento de física e matemática da Universidade de Varsóvia em 1899.

[8]Georg Karl Wilhelm Hamel foi um matemático alemão com interesse em mecânica, fundações da matemática e análise complexa.

[9]René Descartes foi um filósofo e matemático francês, criador do pensamento cartesiano.

[10]Florimond de Beaune foi um jurista e matemático francês, um dos primeiros seguidores de René Descartes.

entre V e T, a pontos em que a linha vertical e a tangente cortam o eixo x, são sempre iguais a uma dada constante a.

O problema permaneceu sem solução por quase 50 anos, apesar dos esforços de Descartes e Fermat[11]. Gottfried Wilhelm Leibniz[12] propôs uma construção passo a passo aproximada: Seja x, y um determinado ponto. Em seguida, aumente x em um pequeno incremento b, para que y aumente por $\frac{yb}{a}$.

Repetindo, obtemos uma sequência de valores:

$$y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)^3 y,\ ...$$

para as abscissas $x,\ x+b,\ x+2b,\ x+3b,\ \ldots$

Portanto:

$$f_k(t) = \left(1+\frac{t}{k}\right)^k$$

A partir dessa fórmula proposta por Leibniz, Euler[13] prova, não só por causa do problema de Debeaune, mas também com de outras situações envolvendo juros compostos, através de uma aplicação da fórmula binomial, a convergência desses termos quando $t = 1$.

$$e = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

Ele ainda complementa para o caso de $\frac{t}{k} = \frac{1}{n}$, constatando que:

$$f(t) = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{t}{k}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nt} =$$

$$e^t = exp\ (t)$$

Quando $\left(1+\frac{t}{k}\right)^k.\left(1-\frac{t}{k}\right)^k$ tende a 1 e $k \to \infty$, temos:

$$exp(t) = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{t}{k}\right)^{-k}$$

[11]Pierre de Fermat foi um magistrado, matemático e cientista francês.

[12]Gottfried Wilhelm Leibniz foi um proeminente polímata e filósofo alemão e figura central na história da matemática e na história da filosofia.

[13]Leonhard Paul Euler foi um matemático e físico suíço. Fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a teoria dos grafos, introduziu muitas das terminologias da matemática moderna e da notação matemática, particularmente na análise matemática, assim como no conceito de função matemática.

Assim, a partir da curva de Debeaune com constante c, temos:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{c}.f(t).$$

Logo, a solução de $\dfrac{du(t)}{dt} = au(t)$ com $u(0) = u_0$ é:

$$u(t) = \exp(at) \cdot u_0.$$

Gottfried Leibniz faz a introdução do termo função para indicar quantidades geométricas que dependem de um ponto e uma curva, e é o primeiro a usar os termos variável, parâmetro e constantes. A partir disso, é que Johann Bernoulli[14] define função como uma quantidade composta de um modo qualquer de uma variável e algumas constantes. Para Roque (2012, p. 299):

> Apesar de terem pesquisado inúmeras relações funcionais, Leibniz e Newton não explicitam o conceito de função em suas obras. A falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável, motivou a definição de função, expressa pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli. No final do século XVII, Bernoulli já empregava essa palavra relacionando-a indiretamente a "quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes".

Assim, percebemos que ao longo de todo esse percurso, muitos estudiosos contribuíram para o que conhecemos hoje como função exponencial, de tal maneira que, a pesquisa de um complementava a do outro e formavam conceitos.

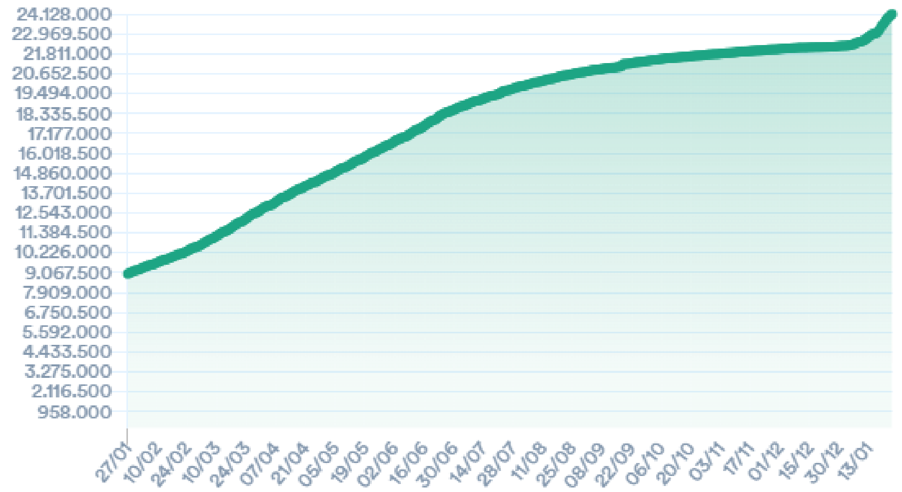
Atualmente, muito tem se falado sobre função exponencial, especialmente quando são apresentados os gráficos sobre a taxa de transmissibilidade da Covid -19.

Diariamente os telejornais apresentam esses gráficos demonstrando o crescimento ou decrescimento do coronavírus no Brasil.

Abaixo temos alguns exemplos retirados do site Coronavirus Brasil[15]:

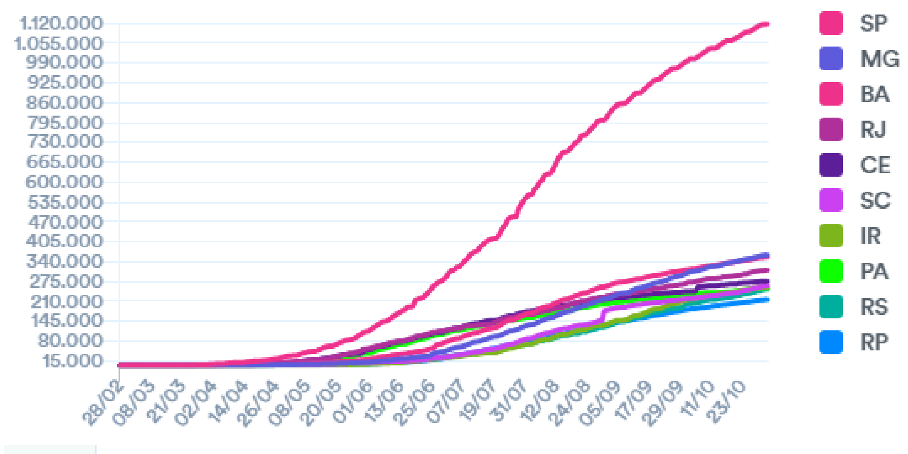
[14] Johann Bernoulli foi um matemático suíço, contribuiu em várias áreas da matemática aplicada.
[15] Disponível em: https://covid.saude.gov.br/. Acesso em: 25/01/2022.

Figura 1.1: Casos acumulados de COVID-19 por dados de notificação



Fonte: Coronavírus Brasil

Figura 1.2: Casos acumulados de COVID-19 por dados de notificação

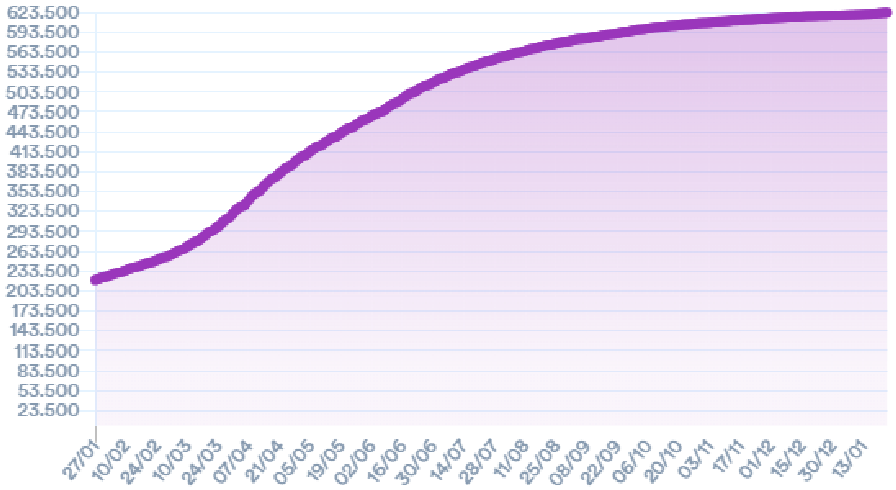


Fonte: Coronavírus Brasil

No primeiro gráfico temos dados de casos acumulados de Covid-19 entre os meses de janeiro do ano de 2021 a janeiro de 2022 em todo o Brasil, demonstrando estar em crescimento por todo esse período. No outro gráfico temos os mesmos dados, no entanto, especificando algumas regiões do país, sendo São Paulo o estado com maior taxa de casos ativos.

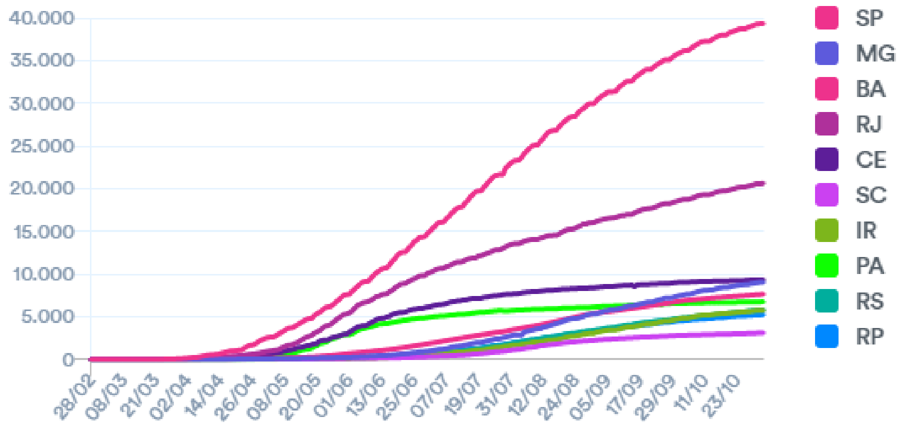
Paralelo a esses gráficos de casos ativos, temos abaixo os dados sobre o número de óbitos confirmados nesse mesmo período, causados pelo coronavírus. Notamos um alto número de óbitos, sendo a região de São Paulo com o maior número de mortes, uma vez que apresenta também o maior número de casos ativos. Nos demais estados, o número de mortes é proporcional a quantidade de casos, no entanto, o estado do Rio de Janeiro apresenta um número muito maior de óbitos com relação aos seus dados ativos.

Figura 1.3: Óbitos acumulados de COVID-19 por dados de notificação



Fonte: Coronavírus Brasil

Figura 1.4: Óbitos acumulados de COVID-19 por dados de notificação



Fonte: Coronavírus Brasil

A partir desses dados e gráficos, podemos potencializar com os alunos, conteúdos relacionados à função exponencial, como o comportamento do gráfico que é uma curva que cresce/decresce, apresentando esse conteúdo a partir de uma situação do seu cotidiano, promovendo assim um ensino mais significativo.

2 A Função Exponencial

Neste capítulo, baseado em Iezzi et al. (2010) e Lima (2013), apresentaremos definição, propriedades, características e como se comporta o gráfico de uma função exponencial. Além disso, abordaremos sobre a função tipo exponencial e suas características. Para finalizar o capítulo, apresentaremos algumas aplicações da função exponencial em situações do nosso cotidiano. Ao longo do texto, serão apresentadas demonstrações, teoremas e exemplos que julgamos necessárias para melhor compreensão do trabalho.

2.1 Definição da Função Exponencial

Definição 2.1. Em termos gerais, para Lima (2013), dados dois conjuntos A e B, por exemplo, diz-se função $f : A \to B$, uma regra em que seja possível associar a cada elemento $x \in A$ um elemento $y \in B$. Como estamos tratando, especificamente, da função exponencial, podemos definí-la da seguinte maneira:

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ definida por:

$$f(x) = a^x \text{ ou } y = a^x$$

As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição 2.1 são necessárias, pois:

- Para $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x (não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$).
- Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não existiria a^x em $\mathbb{R}$ (não teríamos uma função em $\mathbb{R}$).
- Para $a = 1$ e x qualquer número real, $a^x = 1$ (função constante).

Além disso, a função exponencial deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades:

1. $a^x.a^y = a^{(x+y)}$

   O produto de potências de mesma base é igual à potência desta base e o expoente é a soma dos expoentes dos fatores. Em outras palavras: em um produto de potências de mesma base, conserva-se a base e soma os expoentes.

2. $a^1 = a$

   Toda base elevada ao expoente um resulta em uma potência que é igual a essa mesma base.

3. Se $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e se $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$, ou seja, a função será crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

   Demonstração: Sejam x,$y \in \mathbb{R}$. Supondo que $x < y$, sem perda de generalidade. Então, tome, $p > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $y = x + p$.

   Assim $a^y - a^x = a^{(x+p)} - a^x = a^x(a^p - 1)$.

   Pela propriedade 1, temos $a^x > 0$. Logo, $a^x < a^y$ se, e somente se, $a^p > 1$.

   Como $p > 0$, a$^p > 1$ se, e somente se, $a > 1$. Conclui-se que $f(x) < f(y)$ se, e somente se, $a > 1$.

   Para a demonstração em caso decrescente, temos:

   Pela propriedade 1, temos $a^x > 0$. Logo, $a^y < a^x$ se, e somente se, $a^p < 1$.

   Como $p > 0$, $a^p < 1$ se, e somente se, $0 < a < 1$. Conclui-se que $f(x) > f(y)$ se, e somente se, $0 < a < 1$.

4. A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

   Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores negativos cada vez menores. Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores.

   Assim, se $a > 1$, então a^x torna-se cada vez maior quando x assume valores positivos e se $0 < a < 1$, então a^x torna-se cada vez maior quando x assume valores negativos.

   Tudo isso pode ser resumido dizendo-se que o conjunto imagem da função exponencial dada por $y = a^x$ é: $Im = \{\ y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

5. A função exponencial é contínua.

   Demonstração: Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $f(c)$ está definida. Temos também:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{h \to 0} f(c + h) = \lim_{h \to 0} a^{c+h} = \lim_{h \to 0} a^c a^h = a^c \lim_{h \to 0} a^h$$

   Como

$$\lim_{h \to 0} a^h = 1$$

   segue que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

6. A função exponencial f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

   Esta afirmação quer dizer que, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x = b$.

Portanto, ao longo do texto, trataremos função exponencial a partir da definição e dessas propriedades acima apresentadas.

2.2 Caracterização da Função Exponencial

Anteriormente, vimos as propriedades que definem uma função exponencial. Da mesma maneira, é preciso saber as propriedades que as caracterizam, ou seja, destacam as particularidades das funções exponenciais.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

3. $f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provar as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

Para mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2) observa-se inicialmente que a hipótese (1) ocasiona que, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Validamente, como $nr = m$, podemos escrever:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

Assim:

$$f(rx)^n = f(x)^m$$

Elevando ambos a $\dfrac{1}{n}$:

$$f(rx)^{(\frac{n}{n})} = f(x)^{(\frac{m}{n})}$$

Logo,

$$f(rx) = f(x)^{(\frac{m}{n})} = f(x)^r$$

Tomando $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Supondo que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$.

Admitindo, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$, tal que, $f(x) \neq a^x$, contando, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. Então, existe um número racional r, tal que, $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$.

Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ conclui-se que $x < r$.

Entretanto, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$.

Para mostrar que (2) $\Rightarrow$ (3): Sejam $x,y \in \mathbb{R}$, podemos escrever:

Se $f(x) = a^x$ então $f(x+y) = a^{(x+y)}$, pelas propriedades da potenciação, temos: $a^{(x+y)} = a^x.a^y = f(x).f(y)$.

Logo,

$$f(x+y) = f(x).f(y).$$

Para mostrar que (3) $\Rightarrow$ (1): Seja $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$f(nx) = f\,\underbrace{(x.x.x.\cdots.x)}_{n\ \text{vezes}} = \underbrace{f(x).f(x).f(x).\cdots.f(x)}_{n\ \text{vezes}}$$

Pela propriedade da multiplicação:

$$\underbrace{f(x).f(x).f(x).\cdots.f(x)}_{n\ \text{vezes}} = f(x)^n$$

Temos que $f(nx) = f(x)^n$.

Para $r = \dfrac{m}{n}$, com $r \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$:

Para $m > 0, f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$

Para $m < 0, f(0) = f(mx + (-mx)) = f(mx).f(-mx) = f(mx).f(x)^{(-m)}$,

Como $f(0) = 1,\ f(mx).f(x)^{(-m)} = 1$,

ou seja, $f(mx) = \frac{1}{f(x)^{(-m)}} = f(x)^m$.

Logo,

$$f(rx) = f(x)^r.$$

2.3 O Gráfico da Função Exponencial

O gráfico da função exponencial é representado por uma curva que cresce ou decresce acentuadamente acima do eixo das abscissas, ou seja, no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano.

Além disso, na função exponencial, cuja lei é $y = a^x$, temos: $x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1$, ou seja, o par ordenado (0,1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo a ($a > 0 \in a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico da função $y = a^x$ corta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

Demonstração: Primeiro, mostrar que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como efeito, nota-se que $f(0) = 1 \neq 0$.

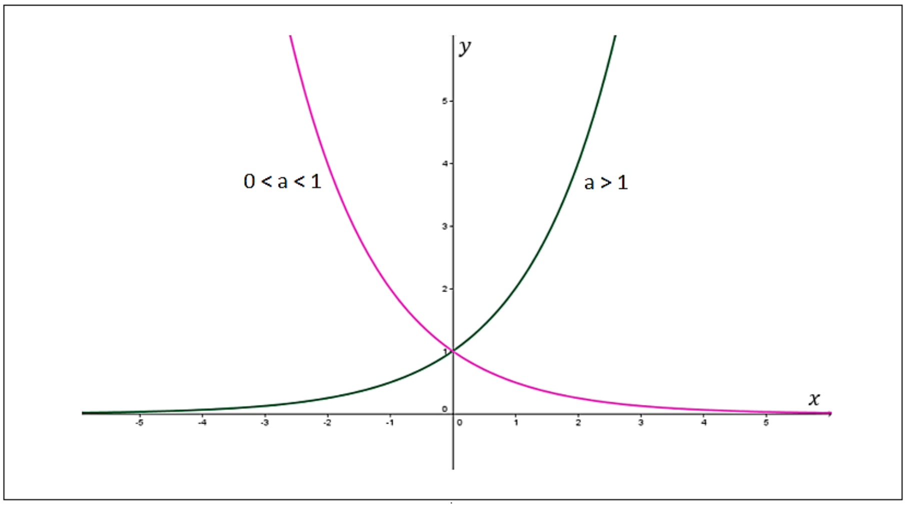
Supondo por absurdo, que $f(x) = a^x = 0$ para algum $x \neq 0$.

Por contradição, temos $0 = a^x a^{(-x+1)} = a > 0$.

Portanto $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como consequência disso $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, uma vez que $f(0) = a^0 = 1$.

Vamos observar o aspecto geral da Função Exponencial, para os casos da função crescente $a > 0$ e da função decrescente $0 < a < 1$, representados na Figura 2.1, a seguir.

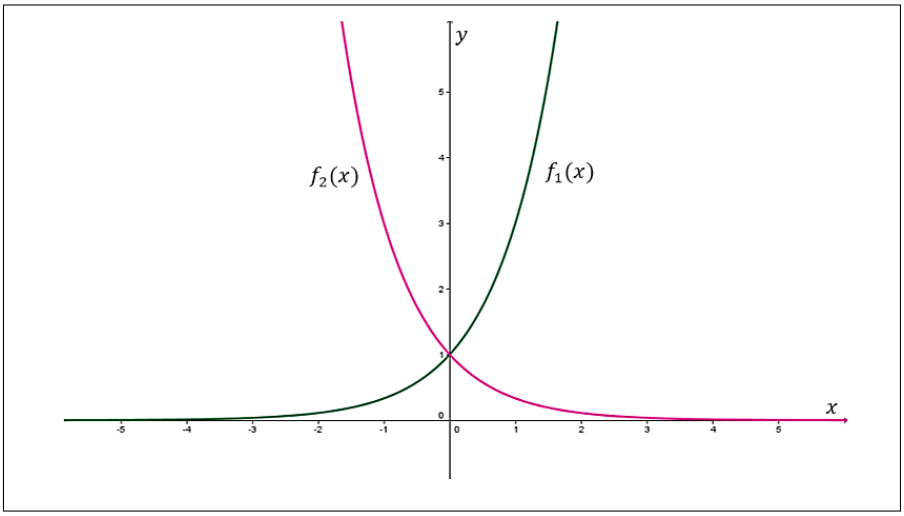
Figura 2.1: Gráfico da Função Exponencial $f(x) = a^x$.



Fonte: Elaboração do autor com o Geogebra.

Vejamos dois exemplos particulares na Figura 2.2 abaixo, sendo $f_1(x) = 3^x$ e $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Figura 2.2: Gráfico da Função Exponencial $f_1(x)$ e $f_2(x)$.



Fonte: Elaboração do autor com o Geogebra.

Para mais, o gráfico de uma função exponencial apresenta características como:

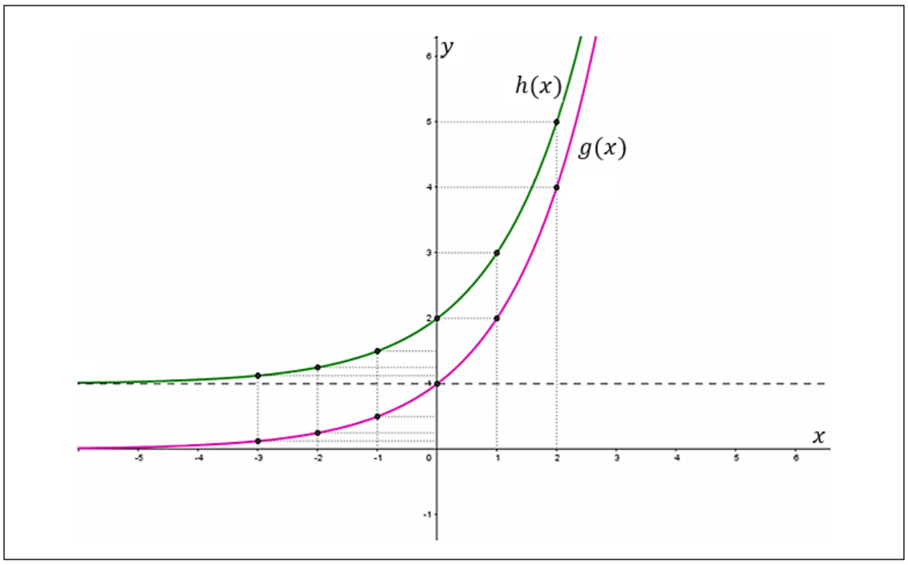
- $D(f) = \mathbb{R}, CD(f) = \mathbb{R}_+^*, Im(f) = \mathbb{R}_+^*, f(1) = a$ e $f(x_1 + x_2) = f(x_1).f(x_2)$;
- Uma figura chamada curva exponencial, passa pelo ponto (0,1) no plano cartesiano.
- Não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes III e IV.

- Para $a > 0$ a função é crescente.
- Para $0 < a < 1$, a função é decrescente.
- É sobrejetiva: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de a).
- É injetiva ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$), pois, ou ela é crescente ou decrescente.
- É bijetiva, logo, admite função inversa denominada $log_a(x)$.
- É ilimitada superiormente.

Sobre o gráfico da função exponencial, podemos ainda destacar os gráficos com translação, aqueles que se deslocam para cima ou para baixo no plano cartesiano.

Para ficar mais claro, vamos comparar dois exemplos quaisquer, os gráficos das funções $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 2^x + 1$. Temos:

Figura 2.3: Gráfico da função $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 2^x + 1$.



Fonte: Elaboração do autor com o Geogebra.

Observa-se que o gráfico da função do tipo $y = 2^x + 1$ é o gráfico da função $y = 2^x$ deslocado uma unidade no sentido positivo do eixo das ordenadas.

Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$, temos que $2^x + 1 > 0 + 1$, isto é, $y > 1$.

Assim, o conjunto imagem dessa função é $Im = \{\ y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$.

Dessa forma, o gráfico de uma função exponencial com translação $y = a^x + k$, sendo $a > 0$, $a \neq 1$ e k uma constante real, pode ser obtido a partir do gráfico $y = a^x$, deslocando-o $|k|$ unidades para cima ou $|k|$ unidades para baixo, conforme k seja positivo ou negativo, respectivamente.

2.4 Função Tipo Exponencial

Existem outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujas leis apresentam a variável x no expoente de alguma potência, com base positiva e diferente de 1. Essas funções têm como gráficos curvas exponenciais semelhantes às apresentadas anteriormente (Figura 2.1) e também serão tratadas como funções exponenciais.

Definição 2.2. Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = b.a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas.

A título de ilustração de função do tipo exponencial, considere o exemplo a seguir, segundo (IEZZI et al., 2010):

Imagine que, em uma região litorânea, a população de certa espécie de alga tem crescido de modo que a área estimada da superfície coberta pelas algas aumenta 75% a cada ano, em relação à área da superfície coberta no ano anterior. Os biólogos estimam que, atualmente, a área coberta é de aproximadamente 4000 m². Mantido esse crescimento, qual será a área da superfície coberta pelas algas daqui a:

a) 2 anos? b) 3 anos? c) x anos?

Podemos então, pensar das seguintes maneiras:

- Daqui a um ano, a área correspondente, em m², será:

$$\underbrace{4000}_{\text{área atual}} + \underbrace{0{,}75.4000}_{\text{aumento}} = 1{,}75.4000$$

- Daqui a dois anos, haverá aumento de 75% em relação a 1,75 . 4000, e a área passará a ser:

$$\underbrace{1{,}75.4000}_{\text{área atual}} + \underbrace{0{,}75.1{,}75.4000}_{\text{aumento}} = (1+0{,}75).1{,}75.4000 = 1{,}75^2.4000$$

- Daqui a três anos, o aumento de 75% incidirá sobre $1{,}75^2.4000$, e a área coberta passará a ser:

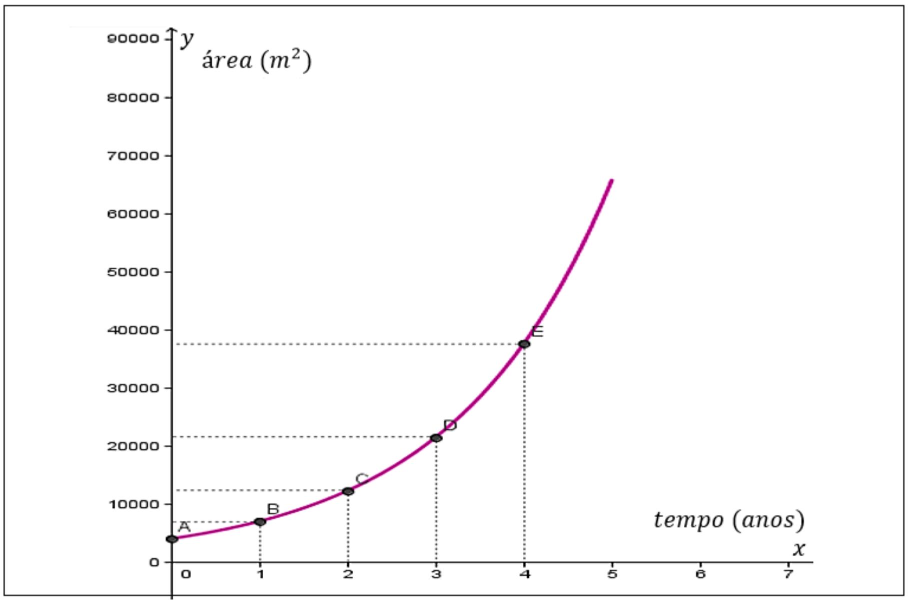
$$\underbrace{1{,}75^2.4000}_{\text{área atual}} + \underbrace{0{,}75.1{,}75^2.4000}_{\text{aumento}} = (1+0{,}75).1{,}75^2.4000 = 1{,}75^3.4000$$

- Daqui a x anos, a área (em m^2) passará a ser: $1{,}75^x.4000$

Logo, a função fica definida como $y = 1{,}75^x.4000$, um exemplo de função tipo exponencial.

Abaixo representamos graficamente as informações dessa situação:

Figura 2.4: Gráfico da função $y = 1{,}75^x.4000$.



Fonte: Elaboração do autor com o Geogebra.

Percebemos que é possível unir os pontos obtidos no gráfico, pois o aumento da superfície da área coberta pelas algas é contínuo.

Além disso, a função é crescente e seu gráfico é análogo ao gráfico de $y = a^x$, quando $a > 1$.

2.5 Caracterização da Função Tipo Exponencial

De maneira análoga ao subtópico 2.2, nesse momento, apresentaremos alguns teoremas e suas demonstrações para caracterizar as funções tipo exponencial.

Teorema 2.3. (Primeira caracterização das funções de tipo exponencial): Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (crescente ou decrescente), tal que, para $x,h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{[g(x+h) - g(x)]}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$ tem-se $g(x) = b.a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Pela hipótese, supomos que $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$, independe de x.

Substituindo $g(x)$ por $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, obtemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva.

Se:

$$f(x) = \frac{g(x)}{b}$$

$$g(x) = b.f(x)$$

$$g(x+h) = b.f(x+h)$$

Então,

$$\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$$

$$\varphi(h) = \frac{b.f(x+h)}{b.f(x)},$$

Cancelando b,

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)},$$

independente de x e com $f(0) = 1$.

Pegando $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$, para todo $h \in \mathbb{R}$.

Verificamos, assim, que a função monótona f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, segue do teorema que:

$$f(x) = a^x, \text{ logo } g(x) = b.f(x) = b.a^x.$$

Teorema 2.4. (Segunda caracterização de $b.a^t$): Para cada $b \in \mathbb{R}$ e cada $t \in \mathbb{R}$, suponha dado um número $f(b,t) > 0$ com as seguintes propriedades:

1. $f(b,t)$ depende linearmente de b e é monótona injetiva em relação a t.

2. $f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$.

Então, para $a = f(1,1)$, tem-se $f(b,t) = b.a^t$.

Demonstração: A função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $\varphi(t) = f(1,t)$, é monótona injetiva e cumpre:

$$\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1,s), t) = f(1,s).f(1,t) = \varphi(s).\varphi(t)$$

em virtude de 1) e 2) pois $f(1,s) = f(1,s).1$.

Pelo teorema de caracterização das funções exponenciais, tem-se $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1,1)$. Portanto:

$$f(b,t) = f(b.1,t) = b.f(1,t) = b.\varphi(t) = b.a^t.$$

A condição 2 do teorema acima, tem seu significado esclarecido quando se nota que $b = b.a^0 = f(b,0)$, ou seja, que b é o valor inicial da grandeza $f(b,t)$ no instante $t = 0$ (pensando em t como o tempo decorrido desde que a grandeza passou do valor $b = f(b,0)$ para o valor $f(b,t)$). Essa condição diz que, começar com o valor b e deixar passar o tempo $s+t$, é o mesmo que começar com o valor $f(b,s)$ e deixar transcorrer o tempo t.

2.6 Algumas aplicações da Função Exponencial

O crescimento exponencial é característico em algumas situações do nosso cotidiano e está presente em diversas ciências, como na Matemática Financeira, relacionado aos juros compostos; na Geografia, para explicar crescimentos populacionais; na Química envolvendo os estudos de radioatividade e na Biologia, com crescimento de bactérias, entre outras aplicações.

No entanto, de modo geral, não se apresenta na forma a^x, mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como:

$$f(x) = C.a^{kx}$$

onde C e k são constantes quaisquer.

Assim, nos subtópicos seguintes apresentamos três situações, demonstrando essa aplicabilidade da função exponencial com progressões, juros compostos e radioatividade.

2.6.1 Função Exponencial e progressões

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante diferente de 0, chamada razão da progressão geométrica.

A título de exemplificação, temos:

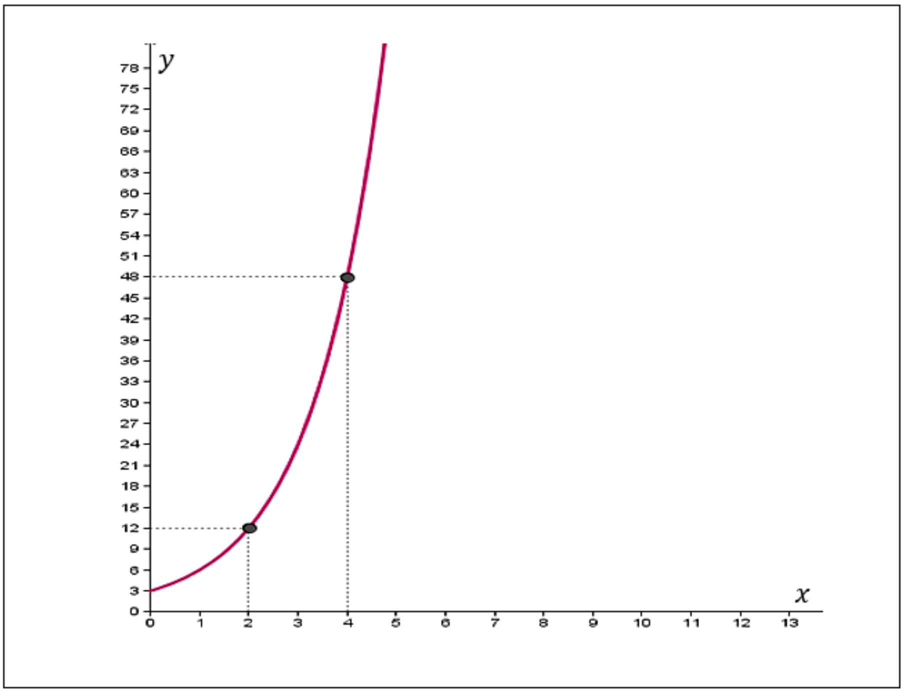
Considere uma função do tipo exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3.2^x$ e uma progressão aritmética (PA) dos números pares, $2, 4, 6, 8, 10, 12, ...,$ de razão 2. Assim podemos constatar que: $f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), f(12), \ldots$ é uma progressão geométrica, pois : $f(2) = 12$, $f(4) = 48$, $f(6) = 192$, $f(8) = 768$, $f(10) = 3072$, $f(12) = 12288...$

Logo, temos: $12, 48, 192, 768, 3072, 12288, ...$, uma progressão geométrica de razão 4, ou (2^2).

Demonstração: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$ e $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ é uma progressão aritmética (PA) de razão r, isto é, $x_{n+1} = x_n + r$, então os termos $f(x_1) = b.a^{x_1}, f(x_2) = b.a^{x_2}, ..., f(x_n) = b.a^{x_n}$, formam uma progressão geométrica (PG) de razão a^r.

Representando graficamente (Figura 2.5), vamos obter:

Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = 3.2^x$



Fonte: Elaboração do autor com o Geogebra.

Assim, podemos perceber que existe a relação entre função exponencial e progressão geométrica.

2.6.2 Função Exponencial e juros compostos

Os juros compostos são utilizados pelas instituições bancárias e/ou financeiras na cobrança e recebimento de juros nas opções de empréstimos, pagamentos, aplicações, financiamentos, investimentos, entre outros serviços do ramo, se configurando como a base do atual Sistema Financeiro.

Esse tipo de capitalização é acumulativo, ou seja, os novos juros são gerados com base nos juros anteriores, de modo que as variações tendam a aumentar com o decorrer dos intervalos, e é a partir desse conceito que podemos criar a relação com as funções exponenciais.

Nos juros compostos, o montante pode ser calculado pela fórmula $M = C.(1 + i)^t$, onde chama-se montante M a quantia que uma pessoa deve receber após aplicar um capital C, a uma taxa i durante um tempo t.

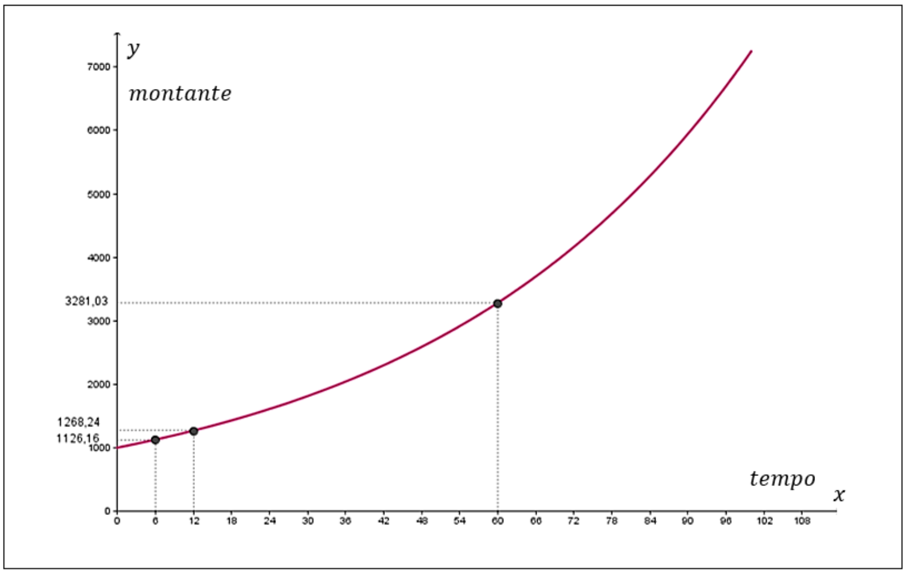
Considere o exemplo a seguir:

Num depósito a prazo efetuado em um banco, o capital acumulado ao fim de certo tempo é dado pela fórmula $C = D.(1 + i)^t$, onde C representa o capital acumulado, D o valor do depósito, i a taxa de juros ao mês e t o tempo de meses em que o dinheiro está aplicado. Nesse sistema, ao final de cada mês, os juros capitalizados são incorporados ao depósito. Para um depósito de R$ 1000,00, com taxa de 2% ao mês, qual o capital acumulado ao fim de 6 meses? E de 1 ano?

O capital acumulado no período de 6 meses será de R$ 1126,16 e em um ano R$ 1268,24.

Representando essas informações no Gráfico (Figura 2.6) temos:

Figura 2.6: Gráfico da função $C = 1000.(1 + 0{,}02)^t$



Fonte: Elaboração do autor com o Geogebra.

Além disso, observa-se que, no prazo de 60 meses, equivalente a 5 anos, o capital acumulado estará em R$ 3281,03. Ou seja, como a função é crescente, $a > 1$, quanto maior a taxa de variação, maior será o capital acumulado ou montante.

2.6.3 Função Exponencial e radioatividade

O ser humano sempre conviveu com a radioatividade. Ela está presente na natureza e é um fenômeno que pode ser natural ou induzido. Basicamente, esse fenômeno funciona da seguinte forma: se o núcleo do átomo tiver muito energético (átomos radioativos), ele tende a estabilizar-se, emitindo o excesso de energia na forma de partículas e ondas. O processo pelo qual essa energia é liberada é chamado decaimento radioativo.

Cada elemento radioativo se desintegra em um processo denominado meia-vida ou período de semidesintegração (P), uma medida de tempo em que o material se perde pela metade. O valor da meia vida para o mesmo elemento químico é sempre constante.

Dessa forma, a cada período de tempo P, a quantidade de material radioativo reduz-se à metade da anterior. Assim, é possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo com a quantidade inicial, por meio de uma função exponencial do tipo

$$N(t) = N_o.\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t}{p}\right)}$$

em que N_o é a quantidade inicial do material radioativo, t é o tempo decorrido e P é o valor da meia vida do material radioativo analisado.

Para exemplificar, considere a próxima situação segundo Iezzi et al. (2004, p. 182):

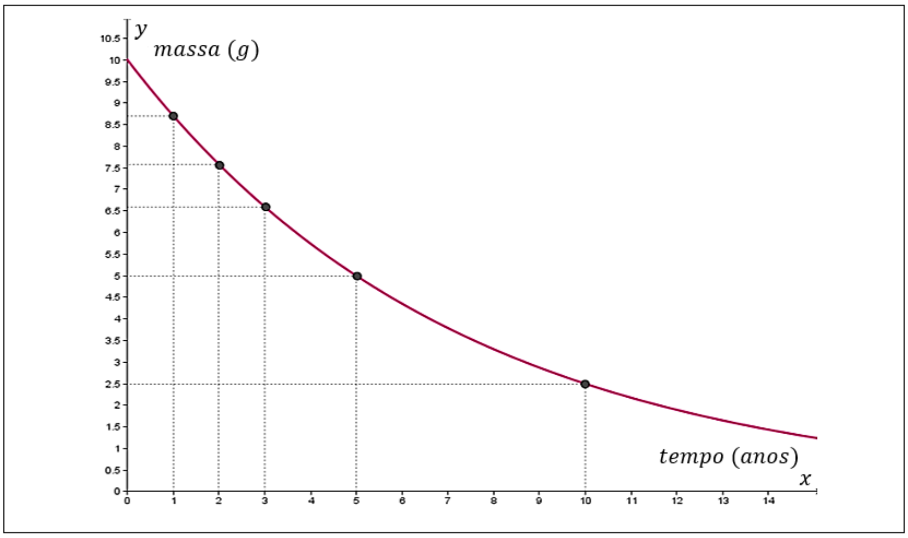
Meia-vida ou período de semidesintegração é o tempo necessário para a desintegração de metade dos átomos radioativos (ou metade da massa) de um certo isótopo de um elemento químico. A Química nos ensina que, na verdade, a massa desse isótopo não está sumindo: apenas está diminuindo pelo fato de o isótopo se transformar em outro isótopo. O cobalto 60, Co_{27}^{60}, tem meia vida de 5 anos. Ele é usado em hospitais na radioterapia, para tratamento de pacientes com câncer.

Consideremos, por exemplo, uma amostra inicial de $10g$ do cobalto 60. Tomando como base a lei inicial

$$N(t) = N_o.\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t}{p}\right)}$$

podemos determinar que para esse exemplo teremos uma função $y = 10.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$.

Figura 2.7: Gráfico da função $y = 10.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$



Fonte: Elaboração do autor com o Geogebra.

Analisando o gráfico acima (Figura 2.7), percebemos como a massa desse isótopo vai diminuindo à medida que o tempo passa. Em 10 anos a massa desse isótopo será de 2,5 gramas.

A partir dessa lei, podemos ainda concluir que daqui a 25 anos a massa desse isótopo será de $0{,}3125g$ e daqui a 1 século de $0{,}000009537g$.

3 Pesquisas sobre o ensino da Função Exponencial

Neste capítulo, enfatizaremos sobre o ensino da função exponencial no ensino médio, a partir de informações que estão disponíveis em alguns documentos curriculares oficiais. Apresentaremos algumas produções sobre função exponencial desenvolvidas no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), nos últimos sete anos, enfatizando o que eles ressaltam sobre o ensino dessa função.

3.1 O ensino da função exponencial segundo a BNCC, os PCNs e as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

O ensino médio no Brasil consiste na última etapa da educação básica e tem duração média de três anos. Além de garantir o prosseguimento nos estudos, essa fase deve preparar os estudantes para o mercado de trabalho cada vez mais competitivo e para o aprimoramento como cidadão.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do ensino médio normatiza um conjunto de competências, habilidades e aprendizagens essenciais que todo aluno deve desenvolver. Constitui-se na divisão por áreas do conhecimento e por itinerários formativos. Podemos destacar que:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, coloca em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, de modo a possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2018, p. 517)

Dessa forma, em continuidade às aprendizagens adquiridas no ensino fundamental, o currículo do ensino médio tem como foco uma visão integrada e aplicada às vivências e realidade dos estudantes.

O conteúdo de funções está presente em muitas situações cotidianas do aluno, como por exemplo: a taxa de transmissibilidade do Covid-19; o preço a pagar y em função de uma quantidade x de produtos comprados; a curva feita pela bola em uma cobrança de pênalti num jogo de futebol, dentre outros, ou seja, o conjunto central é o da contextualização. Dessa forma:

> O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. (BRASIL, 2000, p. 43)

Sob esse viés, percebemos que a escola de hoje não pode ficar restrita apenas ao ensino enciclopédico, mas promover um ensino que desenvolva habilidades de compreensão, investigação e contextualização. Ainda sobre funções, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN +), enfatizam que:

> O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). (BRASIL, 2006, p. 72)

Ou seja, os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final do assunto. Tradicionalmente, nota-se que, na maioria dos livros didáticos, o conteúdo segue um roteiro apresentando a função exponencial depois das funções afim e quadrática, fórmula genérica, crescente ou decrescente e construção gráfica, para posteriormente apresentar algumas situações contextualizadas. Assim:

> O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (BRASIL, 2002, p. 121)

Neste contexto, nas mídias e telejornais diariamente são apresentados dados sobre a pandemia do coronavírus, principalmente no formato de gráficos, constando crescimento e decrescimento das taxas de contágio e óbitos, dentre outras situações que demosntram aplicações das funções exponenciais, pois:

> Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/-decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções. (BRASIL, 2002, p. 72)

Dessa forma, torna-se mais significativo que o aluno tenha o conteúdo a partir de situações presentes em seu cotidiano, principalmente com relação aos gráficos, pois proporciona habilitação para entendê-los ou aplicá-los nas diversas maneiras que surgem em sua realidade.

Nesse processo, a função da Matemática, sobretudo do conteúdo de funções exponenciais, é preparar o educando para estender e aprofundar os conhecimentos que adquirem na escola à contextos do seu dia a dia.

3.2 Trabalhos desenvolvidos sobre Função Exponencial

Ao efetuar uma busca no *site* do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), encontramos 15 registros sobre função exponencial apresentados nos últimos sete anos.

Os trabalhos serão destacados, em ordem crescente, no Quadro abaixo, indicando a data de defesa, aluno, título da dissertação e a instituição submetida.

Quadro 3.1: Lista de trabalhos sobre função exponencial desenvolvidos para o PROFMAT

Data de defesa	Aluno	Título da Dissertação	Instituição
23/01/2015	Claudenor Ancelmo da Silva	A torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas	UFERSA
24/06/2015	Horacio Eufrasio Pereira	A função exponencial natural e aplicações	UFCA
25/06/2015	Anderson Oliveira Gadioli	Função exponencial: definição, caracterização e aplicações	UFES
26/06/2015	Daniela Alves Martinez	Função exponencial e seu ensino através da resolução de problemas	UNESP

05/08/2015	Emilene Funez Rozanski	Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas	UTFPR
08/07/2016	Rodrigo Felipe da Silva	Função exponencial e logarítmica	UNESP
23/07/2016	Mário Cesar Martins de Lima	Função exponencial natural e^x e número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades	UNIRIO
24/11/2016	Isabela Ramos da Silva de Sousa	Relação entre função exponencial e progressão geométrica	UENF
02/03/2017	Raimundo do Socorro Coelho Barra	Uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica	UFPA
20/12/2017	Lina Flávia Morete de Queirós Maia	Modelação matemática na sala de aula: o conceito de função exponencial numa sequência de atividades para o 1º ano do ensino médio	UFSCAR
23/02/2018	Jaqueline dos Santos	Introdução ao conceito da função exponencial: um olhar para a educação inclusiva	UTFPR
17/08/2018	Luciana Alcantara de Toledo	Ensino da função exponencial: análise de resultados	UNESP
06/11/2019	Carolini Cunha Silva Gioia	Função exponencial e logarítmica: um estudo interdisciplinar por meio da resolução de problemas	UENF
09/04/2020	Cristhian Pires da Costa	A abstração da função exponencial de interações entre engrenagens lego®	UFG
29/01/2021	Atílio Vieira Costa	Função Exponencial: uma abordagem guiada pela BNCC	UFAL

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir da análise do Quadro acima, observa-se que, os trabalhos são apresentados a partir de vários vieses: aplicações, fazendo uma ponte entre função exponencial, juros compostos, progressões, logaritmos, bem como, a análise a partir de alguns livros didáticos, jogos, etc., e também ressaltando a parte pedagógica, sobre o seu ensino com a utilização de modelagem matemática, resolução de problemas e análise de resultados, ou seja, é possível perceber que os trabalhos, perpassam uma linha de pesquisa parecida.

Portanto, por meio de alguns desses trabalhos mencionados, serão norteadas e referenciadas as discussões do tópico seguinte.

3.3 Análise de alguns trabalhos desenvolvidos nos últimos sete anos e o que dizem sobre o ensino da Função Exponencial

Para apresentar de maneira mais aprofundada os vieses de pesquisas sobre a função exponencial, apontaremos os estudos que foram desenvolvidas para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) nos últimos dez anos, apresentados no Quadro 3.1 no início desse capítulo, destacando objetivos, desenvolvimentos, resultados e opiniões dos autores sobre o ensino dessa função.

A pesquisa de Silva (2015), baseada no jogo da Torre de Hanói[1], demonstra que é possível estabelecer um elo entre o jogo e a função exponencial. Apresenta uma atividade lúdica em que o professor pode inserir os alunos numa situação problema em que envolva a criação de um exemplo matemático baseado na função exponencial. Entretanto, para Silva (2015, p. 23):

> Os professores que se dispuserem a trabalhar o conteúdo de função exponencial utilizando o jogo Torre de Hanói devem estar conscientes de que enfrentarão algumas dificuldades relacionadas ao domínio insuficiente dos conteúdos que são pré-requisitos para o estudo de função exponencial através da torre de Hanói. Assim, os professores devem estar conscientes de que os alunos já incorporaram as competências relacionadas à potenciação e suas propriedades, relação entre conjuntos, noção intuitiva de função, sistema cartesiano, funções e seus gráficos e progressão geométrica.

O trabalho apresenta propostas de atividades para aplicar aos alunos aproveitando-se dos fundamentos do jogo para introduzir a noção intuitiva de função exponencial, explorando a lenda que envolve o jogo, apresentando a teoria sobre função exponencial e propondo situações-problema.

Para concluir, Silva (2015) enfatiza que é possível introduzir função exponencial a partir da Torre de Hanói, pois o trabalho com jogos permite ao aluno e ao professor construírem juntos as ideias que contribuirão para o desenvolvimento do raciocínio lógico do discente, além de ajudá-lo a organizar os pensamentos, a tomar decisões, inferir hipóteses, etc.

Já Pereira (2015) apresenta, de maneira técnica, a partir de definições, teoremas e exemplos um estudo sobre as funções exponenciais, dando ênfase à função exponencial de

[1] A Torre de Hanói é um jogo que consiste de uma base contendo três pilares, formado por alguns discos colocados uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo é deslocar todos os discos de um pilar para outro qualquer,movendo apenas um disco por vez e um disco com diâmetro maior nunca pode ficar sobre um com diâmetro menor.

base e, também conhecida como função exponencial natural, assim como as suas inúmeras aplicações, que permeiam diversas áreas de conhecimento como: Economia, Biologia, Arqueologia, Demografia, Arquitetura, entre outras, fazendo dela, portanto, um objeto de interesse. O autor enfatiza que:

> [...] o grande desafio nessa disciplina é envolver os três componentes básicos do ensino, de forma a estimular o pensamento crítico e reflexivo por parte do aluno, para que esse, não somente entenda os conceitos e aprenda a fazer os cálculos, mas que seja também capaz de utilizá-los em situações práticas. Assim, justificamos a necessidade deste trabalho, nesta lacuna, já que a nossa preocupação é aliar os três componentes para melhor compreensão de um dos modelos matemáticos mais aplicados: as funções exponenciais. (PEREIRA, 2015, p. 11)

Para concluir, afirma que as funções exponenciais configuram-se como um dos modelos mais utilizados para resolver problemas elementares, portanto isto justifica e motiva a necessidade do estudo da função exponencial natural.

A pesquisa de Gadioli (2015) foi realizada através do minicurso "Função exponencial: Definição, Caracterização e Aplicações", aplicado para 18 alunos do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio de Administração do Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Cariacica, com uma carga horária de 16 horas presenciais e 6 horas não presenciais, através de testes diagnósticos e questões propostas sobre o conteúdo. Gadioli (2015, p. 15) enfatiza que:

> [...] a função exponencial ocupa uma posição de destaque no ensino da matemática, pois constitui a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de (crescimento ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento.

O autor conclui com a impressão de que esse conteúdo não despertou o interesse de vários dos alunos, pois os conceitos e aplicações sobre função exponencial não estavam bem definidos para todos. No entanto, durante a aplicação da metodologia, percebeu que esse recurso didático, no caso do minicurso, favoreceu as interações entre os alunos, o diálogo e o espaço para discussões, mostrando-se como um facilitador da aprendizagem conceitual. As várias aplicações da função exponencial também contribuíram significativamente para o desenvolvimento da aprendizagem.

Os estudos de Martinez (2015) têm como objetivo apresentar uma proposta de como ensinar os conceitos relacionados à Função Exponencial através da metodologia de resolução de problemas, a partir da teoria de Polya[2] e Onuchic, sugerindo duas situações para a

[2] O método de Polya consiste em três etapas: compreender o problema, designar um plano, executar o plano e retrospecto do problema.

primeira série do Ensino Médio, sendo que em uma delas é introduzida o uso do software Geogebra.

> Comparando os resultados de aprendizagem obtidos com a aplicação dessa proposta, com resultados anteriores quando foi ensinada a função exponencial sem o uso da metodologia de Resolução de Problemas, concluímos que os alunos entenderam melhor o conceito. Tornaram-se alunos investigativos que participavam mais da aula dando suas opiniões, sem medo de errar, até porque perceberam que o erro pode levar a uma resposta correta. (MARTINEZ, 2015, p. 42)

Além disso, Martinez (2015) ressalta que o uso do Geogebra deixou os alunos eufóricos à medida que compreendiam os comandos, bem como, entenderam melhor o comportamento do gráfico, principalmente o fato de se aproximar do eixo x e não cortá-lo.

A autora finaliza afirmando que teve dificuldade em preparar e ministrar as aulas, por ser necessária uma mudança de postura, sendo aquela professora que constrói os conceitos juntamente com os alunos. Apesar das dificuldades, aborda que nas avaliações foram colocados problemas e foi observado um melhor desempenho, ou seja, na visão da referida autora a proposta resultou em uma melhor aprendizagem dos alunos.

Rozanski (2015) apresenta uma proposta sobre função exponencial mais autônoma, que possibilite o desenvolvimento de habilidades interpretativas e criativas de potencial significado para os alunos, a partir de uma sequência didática estruturada à luz da teoria das situações didáticas de Brousseau[3] e dos registros de representação semiótica de Duval[4]. A pesquisa buscou proporcionar interações entre o aluno, o professor e o meio, em um ambiente de aprendizagem cooperativo, onde esses se sintam livres para expressar as suas ideias e para sugerir as suas próprias abordagens. A autora enfatiza que:

> [...] através de minha experiência como professora, pude perceber que os alunos sentem muita dificuldade em relação ao conteúdo de funções, principalmente no que diz respeito ao significado de função, a relação de dependência, variável dependente e independente. (ROZANSKI, 2015, p. 36)

[3] A Teoria das situações didáticas é uma teoria de aprendizagem desenvolvida por Guy Brousseau em contraposição aos trabalhos formalistas característicos da Matemática Moderna. Temcomo ideia básica aproximar o trabalho do aluno ao trabalho de um pesquisador, testando conjecturas, formulando hipóteses, provando, construindo modelos, conceitos, teorias e socializando os resultados, com o devido auxílio do professor, que deverá providenciar situações favoráveis para que o aluno aja sobre o saber, transformando-o em conhecimento para o mesmo.

[4] A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval. Ele chama de semiose, a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e de noese, a apreensão conceitual de um objeto. O termo Registro de Representação Semiótica é usado para indicar diferentes tipos de representação como, por exemplo, escrita em língua natural ou em língua materna, escrita algébrica, tabelas, gráficos cartesianos e figuras.

Inicialmente, foi realizada uma pesquisa a partir de relatos dos professores do 1° ano do ensino médio, de quatro escolas situadas no munícipio de Dois Vizinhos - PR. Posteriormente, uma sequência didática foi aplicada aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma dessas escolas:

> Os objetivos da sequência consistem em propor atividades que permitam ao aluno compreender o significado e comportamento da Função Exponencial, de forma a ser capaz de não apenas resolver um problema que envolva a função exponencial, mas também de criar um problema que seja modelado por uma função exponencial. (ROZANSKI, 2015, p. 58)

Para concluir, Rozanski (2015) enfatiza que, a princípio, o objetivo foi alcançado, respeitando o tempo de aprendizagem do aluno, bem como a metodologia à luz da teoria das situações didáticas. Análises dos registros dos alunos, observações e reflexões sobre os erros e obstáculos são de fundamental importância para a prática docente, e determinantes durante o processo de ensino aprendizagem dos discentes.

Silva (2016) realizou uma pesquisa com o objetivo geral de propor o ensino de funções (propriedades, ideias, definições e caracterizações) a partir de problemas/atividades contextualizadas, provando sua aplicabilidade em situações concretas do dia a dia.

> O ensino relacionado à função exponencial e logarítmica faz parte dos conteúdos a serem abordados no primeiro ano do Ensino Médio. O tema é considerado desafiador de ser apresentado, discutido e ensinado aos alunos, pois é complexo e árduo. Dessa maneira, denota-se que grande parte dos alunos demonstram dificuldades na aprendizagem/compreensão desses conteúdos. (SILVA, 2016, p. 19)

Para isso, a pesquisa se valeu de levantamento bibliográfico e documental acerca da temática abordada, buscando relacioná-las ao contexto do educando, propondo alguns exemplos de atividades, a partir da utilização do *BrOffice Calc* no ensino de potenciação com números irracionais; do jogo de xadrez; da mágica do baralho e da resolução de problemas, além de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Conforme o autor,

> Os estudos das funções exponenciais e logarítmicas podem ser utilizados como um tema transversal, explorando aplicações em áreas como Física, Química, Biologia ou Matemática Financeira, onde pode-se modelar situações através das funções. Contudo a resolução e desenvolvimento da resolução das mesmas pode-se utilizar diferentes métodos, como algébrico, geométrico ou através de softwares e jogos. (SILVA, 2016, p. 38)

Dessa forma, Silva (2016) conclui que as atividades propostas, a partir dos métodos mencionados, demonstram que o ensino do tema pode se tornar de fácil aplicação e desenvolvimento, a partir de ideias simples que se pautam no cotidiano do educando, tornando possível o ensino de função exponencial e logarítmica mais acessível, possibilitando maior assimilação de seus conceitos.

Fazendo uma análise do trabalho de Lima (2016), o autor aborda que:

> A motivação para o estudo dos modelos exponenciais reside na aplicabilidade de inúmeros fenômenos que se pode observar. Diante da observação, percebeu-se que a forma como a matéria é ministrada nas escolas de Ensino Médio não apresenta uma recepção adequada pelos discentes. É tida como bastante abstrata e pura, fazendo com que o aluno, de forma geral, não perceba a importância do assunto para a sua formação como cidadão e para o seu futuro profissional. (LIMA, 2016, p. 15)

Sob essa perspectiva, Lima (2016) tem como objetivo apresentar uma proposta diferente e inovadora da abordagem do conteúdo de funções exponenciais, bem como as funções exponenciais naturais para o Ensino Médio, através de uma sequência didática para ser aplicada em quatro aulas. Cada aula foi planejada para 2 tempos de 50 minutos para exposição da teoria, e mais um tempo de 50 minutos para aplicação de exercícios. Logo:

> [...] almejou-se deixar claro que o ensino de funções exponenciais sob uma ótica modelada, com algumas sugestões cronológicas de abordagens de conteúdos, pode tornar a compreensão mais efetiva e despertar o interesse e o gosto do discente pela matéria, realçando a sua importância no mundo onde está inserido. Ainda, ressalta-se que os modelos exponenciais foram escolhidos por possuírem relativo destaque na aplicabilidade no cotidiano social e em várias áreas afins. (LIMA, 2016, p. 75)

Portanto, para Lima (2016), sob um enfoque mais amplo, o ensino, através de uma perspectiva aplicada, pode obter melhores resultados quanto ao processo de ensino aprendizagem do aluno.

Já a dissertação de Sousa (2016) tem como objetivo demostrar a relação entre função exponencial e progressão geométrica, e a importância de se trabalhar de forma integrada esses dois conceitos. Para o autor:

> [...] um dos vários problemas encontrados nos livros didáticos é que, na sua maioria, não é apresentada explicitamente a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica, pelo contrário, os conceitos são apresentados de forma fragmentada, como se não possuíssem nenhuma relação. (SOUSA, 2016, p. 16)

Para fazer a análise e o estudo, os testes e a intervenção pedagógica foram submetidos na forma de uma sequência didática, com os alunos do 3º ano do Ensino Médio de um colégio situado no Rio de Janeiro - RJ. Sousa (2016) chama a atenção para o fato de que:

> Alguns alunos comentaram que não sabiam a diferença entre o gráfico da Função Exponencial e a Representação gráfica da Progressão Geométrica, para o gráfico da Função Exponencial era igual ao gráfico da Progressão Geométrica. Outra observação de vários alunos foi o fato de conseguirem resolver problemas de Função Exponencial apenas construindo a sequência de Progressão Geométrica, o que para eles foi bem mais simples. Outro ponto que alguns alunos discutiram foi a questão da base da Função Exponencial ser a razão da Progressão Geométrica. (SOUSA, 2016, p. 61)

Dessa forma, Sousa (2016) conclui que os alunos observaram que, apesar das definições distintas, a função exponencial e a progressão geométrica possuem comportamentos semelhantes e, por isso, poderia relacioná-las através de suas representações algébricas e gráficas. Além disso, as situações didáticas e as inter-relações entre conteúdos podem, e devem, ser utilizadas de modo a estabelecer uma aprendizagem completa.

Em seus estudos, Barra (2017) aborda que:

> Nesta proposta pretendo, com relação aos estudantes, dar condições para que os mesmos construam seus conhecimentos sobre os temas e percebam relações entre eles, com relação aos professores, oportunizar um material que poderá contribuir para um ganho significativo de tempo e de poder ensinar de forma simultânea esses temas. (BARRA, 2017, p. 10)

Neste trabalho, o autor tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino para alunos e professores, envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica, e chama a atenção para o fato de que:

> [...] comumente são apresentados nos livros didáticos de maneira separados, ou seja, de modo geral os temas aparecem assim: juros simples e juros compostos, estudo das funções: afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica e progressão aritmética e progressão geométrica. (BARRA, 2017, p. 54)

Dessa forma, a pesquisa se norteia a partir de comparações entre livros didáticos utilizados nas escolas do Brasil, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). São propostas atividades contextualizadas, relacionadas ao cotidiano dos estudantes do 1º ano do ensino médio do município de Cametá - PA, bem como de outras áreas do conhecimento.

No decorrer da proposta, trabalham-se as relações entre os temas, finalizando com um problema envolvendo os três temas de modo simultâneo, além disso, uma lista de questões do novo ENEM.

Barra (2017) conclui que a proposta oportuniza um ganho de tempo significativo, pois os temas serão trabalhados de forma integrada, contribuindo sobremaneira para minorar a recorrente reclamação por parte dos professores no que diz respeito ao pouco tempo para ensinar um grande número de conteúdo.

A pesquisa de Maia (2017) tem como objetivo apresentar uma sequência de atividades que tratem de situações reais que possam ser modeladas pela função exponencial, ou do tipo exponencial usando como método de ensino a Modelagem Matemática. O autor enfatiza que:

> A função exponencial é um objeto matemático explorado, muitas vezes, por meio de contextualizações inadequadas nos livros didáticos, que trazem problemas com dados fictícios que não traduzem situações reais. Logo, não devemos nos limitar ao uso único e exclusivo do livro didático nas aulas. (MAIA, 2017, p. 25)

Assim, propõe uma sequência de atividades composta em duas partes: na parte I são propostas oito situações modeladas pela função exponencial, as quais deverão ser desenvolvidas em duplas ou trios; na parte II é proposta a construção dos gráficos em planilhas eletrônicas de cálculo, referentes às oito situações desenvolvidas na parte I. A pesquisa traz a análise de alguns trechos de documentos curriculares, a Modelagem Matemática proposta por Bassanezi (2004) e os pressupostos da Modelação Matemática defendida por Biembengut e Hein (2016).

Para concluir, Maia (2017) enfatiza a importância de buscar outras fontes de consulta além do livro didático para a elaboração das aulas, pois situações que trazem dados e informações atuais a partir da utilização da modelação matemática como metodologia de ensino-aprendizagem, atende às etapas de estratégia de ensino-interação, matematização e modelo.

Santos (2018, p. 19), considera que, "baseada na experiência com Ensino Médio, alguns alunos apresentam muita dificuldade quando tratamos do ensino-aprendizagem de Função Exponencial. Dificuldade que pode ser agravada quando o aluno for portador de deficiência". Pensando sob essa perspectiva, a autora apresenta uma sequência didática para introduzir o conceito de função exponencial, aplicada com alunos regulares e inclusos.

Metodologicamente, a aplicação ocorreu em duas escolas da rede estadual de Santa Catarina. Optou-se por uma turma regular de 1ª série do Ensino Médio e dois alunos inclusos, um de cada escola, sendo um deficiente visual e outro deficiente mental no nível de ensino médio. A abordagem para os alunos inclusos foi feita a partir da utilização de materiais adaptados, como o Multiplano.

Santos (2018) constatou através de sua pesquisa que a inclusão, no Brasil, exige muito mais do que leis, e que apesar das dificuldades, a presença da deficiência não é barreira intransponível para o desenvolvimento matemático do educando, mas que os materiais adaptados, com a utilização do Multiplano, proporcionaram aos estudantes a compreensão dos tópicos de Função Exponencial contemplados.

A pesquisa de Toledo (2018) apresenta as análises dos resultados referentes ao ensino da função exponencial com o uso da metodologia de resolução de problemas, para os alunos do Ensino Médio.

Para isso, foram elaboradas quatro atividades, a partir da teoria proposta por Onuchic (1999), envolvendo problemas para introduzir os conceitos referentes à função exponencial no primeiro ano e verificar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos do segundo e terceiro anos. Essas atividades foram desenvolvidas aos alunos de uma escola particular do interior de São José do Rio Preto em São Paulo e aconteceram no primeiro semestre de 2018.

> Escolhemos trabalhar com a função exponencial por ser um conteúdo de ampla aplicação. Problemas que envolvem o crescimento populacional, seja de uma bactéria ou humano, o rendimento de um investimento ou dívida com bancos que cobram taxas a juros compostos, a meia-vida de um fármaco ou elemento radioativo são algumas das aplicações das funções exponenciais. Dessa forma, um conteúdo muito relevante já no ensino médio. (TOLEDO, 2018, p. 15)

Para concluir, Toledo (2018) constatou que os alunos do primeiro ano apresentaram melhor desempenho com esta nova abordagem de ensino baseada em soluções de problemas, e no segundo e terceiro anos apresentaram dificuldades com relação ao tópico de funções, mas, de maneira geral, percebeu que os alunos se sentiram mais motivados e participativos na dinâmica proposta.

Sob a perspectiva de resolução de problemas, temos também o trabalho de Gioia (2019), que teve como objetivo principal desenvolver um estudo sobre funções exponenciais e logarítmicas utilizando a resolução de problemas como metodologia de ensino.

Dessa forma, baseia-se em atividades que foram desenvolvidas para alunos do 2º ano do Ensino Médio, de um colégio estadual do município de Macaé, estado do Rio de Janeiro.

> [...] o estudo de funções é de extrema importância para a Matemática, e ganha ainda mais significado quando feito de forma contextualizada. Por isso, nesta pesquisa o estudo de Funções Exponenciais e Logarítmicas está aplicado a outras áreas do conhecimento, como por exemplo, a Física, Química, Biologia, e também dentro da própria Matemática, como nas progressões geométricas e na Matemática Financeira. (GIOIA, 2019, p. 17)

Gioia (2019) conclui enfatizando que apesar de dificuldades, como administrar o tempo em uma turma de muitos alunos, ao finalizar as atividades, foi possível perceber que o objetivo foi cumprido e que é possível fazer um estudo sobre funções exponenciais e logarítmicas de forma contextualizada.

Os estudos de Costa (2020) tem como objetivo principal a abstração da função exponencial, por meio do funcionamento do câmbio de 4 marchas, construído com o Kit LEGO® Mindstorms NXT, sendo este, objeto de estudo da sequência didática, aplicada como auxílio para o seu ensino. Esta sequência didática tem como público alvo alunos do primeiro ano do ensino médio.

> A proposta desta sequência didática tem como objetivo principal, abstrair a função exponencial, a partir das interações entre engrenagens, apontadas como excelente recurso no ensino da matemática por Papert, associadas à Robótica Educacional. Com foco no aprender fazendo, ideia muito associada ao Construcionismo e à Robótica Educacional, construindo o conceito da referida função com a interação do aluno com o câmbio a ser construído, ideia, esta, associada ao Construtivismo, pretende-se que a percepção e diferenciação de uma situação como exponencial, por parte do aluno, seja aprendida e consolidada durante e ao final da construção proposta. (COSTA, 2020, p. 81-82)

Costa (2020) notou que as dificuldades, como a falta de recursos tecnológicos digitais nas escolas, a falta de conhecimento para operá-las, e a falta de políticas públicas eficientes para essa integração de tecnologias digitais e educação, ainda são desafios a serem vencidos por todos os professores. Porém, de maneira geral, as engrenagens e suas interações são ótimas para serem modeladas por conceitos matemáticos, e mediante a referida abstração, são excelentes objetos de estudos a serem utilizados no ensino destes conceitos.

A pesquisa de Costa (2021) busca encontrar formas indicadas de trabalhar o conteúdo de função exponencial a partir da Base Nacional Comum Curricular. Para isso, após o estudo da BNCC, foi realizada uma pesquisa em livros e em trabalhos acadêmicos para fundamentação teórica, a fim de aplicar problemas relacionados com algumas habilidades listadas na BNCC.

Dessa forma, o autor propõe três atividades: a construção gráfica de um decrescimento quase exponencial, utilizando o experimento "eliminando quadrado"; análise de duas sequências de fractais, identificando as funções exponenciais e os gráficos relacionados a cada sequência; a utilização de uma folha em branco, tesoura e o preenchimento de duas tabelas, para realizar a construção gráfica de um crescimento e de um decrescimento exponencial. Nessas propostas o objetivo foi trabalhar os conteúdos com foco em algumas habilidades da BNCC.

Após apresentarmos essas produções, consideramos importante refletirmos sobre:

O que foi possível perceber pela análise dessas pesquisas? O que elas nos indicam?

A partir dessas dissertações apresentadas, foi possível perceber, que todas deixam explícita a importância do ensino e da compreensão da função exponencial, uma vez que aplica-se a situações do nosso cotidiano.

A maioria das pesquisas articulou o estudo da função exponencial com funções logarítmicas, progressões e com sequências didáticas utilizando os jogos e resolução de problemas como recurso para facilitar a aprendizagem, fatos já mencionados no início deste capítulo.

Além disso, revisando os trabalhos, podemos perceber algumas possíveis dificuldades encontradas pelos professorer para o ensino de função exponencial, como:

- Conseguir demonstrar a ligação dessa função com outros conteúdos e conceitos matemáticos (potenciação, sistema cartesiano, noção de função, etc.), algumas vezes pelo fato de não ter visto o conteúdo anteriormente dando uma sequência.
- Aplicá-lo com situações do dia a dia do aluno, por ser considerado complexo e abstrato.
- A maneira como vem estruturado nos livros didáticos, ou seja, após os estudos das funções afim, quadrática e modular.
- Disponibilidade de tempo para trabalhar os conteúdos, pois a quantidade de aulas por semana, ou por unidade/bimestre pode acabar não sendo suficiente para ver todo o planejamento.
- Uso de tecnologias em sala de aula, pois em algumas situações a escola não possui laboratório de informática, ou a quantidade de computadores não é suficiente para todos os alunos, somados ao fato de que nem todos os estudantes possuem um celular, *tablet* ou *notebook*.

No entanto, ao mesmo tempo que relata essas dificuldades, as pesquisas nos indicam que é possível trabalhar a função exponencial integrada a outros conteúdos, a partir da sua demonstração algébrica e geométrica, bem como, com a utilização de softwares e jogos, buscando alternativas que vão além do uso do livro didático em sala de aula.

A partir do que os autores expuseram em seus estudos, suas ideias nortearam a nossa pesquisa, contribuindo em alguns pontos para pensar e, especialmente apresentar propostas de atividades lúdicas para a utlização nas aulas de matemática que abordarão função exponencial.

Consideramos importante se basear no panorama que esses autores sugerem, como os resultados satisfatórios de se aplicar uma atividade coletiva, no formato de jogo, por exemplo, a importância de contextualizar o conteúdo a situações do cotidiano do aluno, dificuldade de administrar o tempo em sala de aula, permitir que o discente expresse sua opinião, entre outros.

4 Atividades lúdicas para o ensino de Matemática

Neste capítulo, abordaremos o uso de atividades lúdicas para o ensino de Matemática, especialmente a partir da utilização de jogos e histórias em quadrinhos, propondo quatro sequências didáticas, três com jogos e uma com HQ, sobre função exponencial.

O termo lúdico pode ser compreendido como um método interativo, que permite a aprendizagem a partir do contato com objetos de ensino. Para isso, podem ser utilizados jogos, brincadeiras ou outras atividades que estimulem e incentivem a participação dos alunos. Para Mendes e Sousa (2020, p. 154):

> Sabe-se que o lúdico é uma ferramenta que favorece a ajuda mútua entre os alunos, contribuindo assim para formação do conhecimento e possibilita também que o professor avalie seu trabalho e saber se realmente a metodologia utilizada surtiu efeito ou não, e a partir daí refazer seu planejamento, mas as atividades lúdicas sempre que bem planejadas, o resultado positivo é garantido, pois é uma técnica que estimula a participação dos alunos e facilita a aprendizagem.

Assim, percebe-se que desenvolver uma atividade lúdica em sala de aula, pode possibilitar que o professor avalie sobre seu planejamento e a metodologia aplicada para certo conteúdo, além de promover a interação entre os colegas, entre o aluno e o docente e facilitar a formação do conhecimento e a aprendizagem.

Na sala de aula, ouvimos alguns alunos relatarem dificuldades em aprender Matemática. Trabalhar com atividades lúdicas pode promover o gosto pela disciplina e, com isso, fazer com que os estudantes tenham êxito na atividade proposta, pois "a aprendizagem só será significativa se estiver contextualizada no dia-a-dia, no mundo onde o sujeito está inserido, e também ancorada em conhecimentos prévios, devendo ser, acima de tudo, lúdica e prazerosa" (ANDRADE, 2009, p. 160).

Portanto, vamos discutir a importância das atividades lúdicas no ensino de matemática a partir da utilização de jogos e HQs, para, posteriormente, propor sequências didáticas sobre função exponencial.

4.1 O uso de jogos e sua importância para o ensino de Matemática

De acordo com Neves, Funato e Henriques (2020, p. 198), “dentre os vários tipos de recursos didáticos existentes, os jogos têm características que estimulam à constituição do conhecimento matemático”. Desse modo, entendemos a importância de sua utilização em nossa prática. Em complemento, Garcia (2017, p. 33) ainda enfatiza que:

> Uma das abordagens diferenciadas em sala de aula são os jogos, que constituem uma importante ferramenta de ensino. Quando planejados dentro de propostas pedagógicas, trabalham as múltiplas competências, facilitando as diversas interações dentro do ambiente escolar, refletindo também na vida cotidiana dos estudantes.

Durante algum tempo os jogos eram vistos como um passatempo, uma forma de se divertir. No entanto, quando utilizado e bem planejado como proposta pedagógica, pode despertar o interesse do aluno para a disciplina, enriquecer o desenvolvimento intelectual e contribuir na aprendizagem e no gosto pela prática educativa, pois:

> A utilização de jogos no ensino da Matemática é apresentada como uma tendência que ressalta o despertar pelo gosto de aprender Matemática, causando nos alunos o interesse e envolvimento, que, no contexto educacional, favorece a interação social entre os mesmos. (SILVA; PEREIRA, 2019, p. 56)

Além disso, os jogos proporcionam que as atividades sejam realizadas coletivamente, de maneira lúdica, facilitando o processo de ensinar e aprender, já que:

> Quando se realizam tarefas de forma colaborativa na sala de aula, mais facilmente se discutem e explicam ideias, se expõem, avaliam e refutam pontos de vista, argumentos e resoluções, ou seja, criam-se oportunidades de enriquecer o poder matemático dos alunos pois cada um dos parceiros está envolvido na procura da resolução para a tarefa que tem em mãos. (CARVALHO, 2009, p. 15)

Sob essa perspectiva, no capítulo 3, discutimos sobre a pesquisa de Silva (2015) que trata o ensino da função exponencial a partir do jogo Torre de Hanói. Destacamos que o trabalho com jogos possibilita que o aluno e o professor construa juntos as ideias para o desenvolvimento do raciocínio lógico do discente, além de promover um estudo voltado para a realidade do aluno.

Nos trabalhos analisados anteriormente, não observamos propostas que utilizem quebra-cabeças, cruzadinhas ou caça-palavras relacionados ao ensino da função exponencial. No entanto, as pesquisas deixam evidentes a necessidade de utilizar recursos que facilitem o ensino desse conteúdo.

> O processo ensino-aprendizagem oferece muitos desafios para os envolvidos - educador-educando. A matemática tem sido vista, muitas vezes de forma rápida, como uma disciplina de difícil aproximação para o aluno. Em especial, quando tratamos da educação básica, um meio que pode colaborar na desmontagem dessa visão distorcida sobre a matemática é aplicação de jogos como atividades de ensino. O caráter lúdico dessas atividades, além de remover o aspecto desagradável dos exercícios matemáticos, desenvolve nos educandos habilidades de cooperação, prazer pela descoberta e a autonomia na construção do conhecimento. (CODINHOTO, 2017, p. 59)

Além disso, como nossa proposta é direcionada para adolescentes que estão no ensino médio, o uso de jogos em sala de aula se torna uma maneira lúdica e diferenciada de trabalhar o conteúdo de função exponencial, pois esses alunos, na maioria das vezes, em seu cotidiano, estão inseridos no "mundo dos *games*", e na escola anseiam por práticas mais dinâmicas e lúdicas.

Portanto, atividades a partir da utilização de jogos seguem como uma proposta lúdica que pode proporcionar o ensino da função exponencial de maneira mais divertida e envolvente.

4.2 O uso de HQs nas aulas de Matemática

De acordo com Vitti (1995, p. 89) "o ensino/aprendizagem da matemática pode e deve ser encarado de uma maneira prazerosa, tanto para professores como para alunos". Para isso, um dos recursos que podemos utilizar em sala de aula são as histórias em quadrinhos.

Durante um tempo, as HQs eram vistas apenas como um passatempo infantil, no entanto, hoje estão presentes nos livros didáticos, nos vestibulares, sendo utilizadas como uma ferramenta importante no processo de ensino aprendizagem, pois, "(...) gradativamente elas passavam a ser entendidas pela sociedade não mais como leitura exclusiva de crianças, mas, sim, como uma forma de entretenimento e transmissão de saber que podia atingir diversos públicos e faixas etárias" (VERGUEIRO; RAMOS, 2009, p. 09).

Assim, o uso de HQs nas aulas de matemática podem proporcionar uma prática menos abstrata, mais interessante, além de facilitar a aprendizagem. Vergueiro e Ramos (2009, p. 74) ainda enfatizam que:

> Infelizmente, apesar do esforço e boa vontade da maioria dos professores, grande parte de nossas crianças e adolescentes demonstra desinteresse pelos conteúdos trabalhados nas diferentes disciplinas escolares. A elaboração e a aplicação de projetos envolvendo o uso de histórias em quadrinhos na sala de aula podem ajudar a alterar essa situação e contribuir para um aprendizado mais envolvente.

Dessa forma, a utilização das histórias em quadrinhos, por possuírem uma linguagem híbrida, ou seja, mistura entre imagem e texto, facilita ao professor mostrar, e ao aluno visualizar as aplicações da matemática, deixando de ser vista como abstrata e desconectada do seu cotidiano. Ademais, promove uma aula interdisciplinar e ativa dos alunos no processo de leitura e escrita.

Matemática e histórias em quadrinhos são linguagens que podem se dialogar a partir das especificidades de cada uma, que quando juntas, podem proporcionar um ensino envolvente, que produza mais sentido ao discente, bem como, habilidades de leitura e escrita em seu dia a dia. Para Smole e Diniz (2001, p. 101):

> Recorrer á oralidade, ao desenho e á escrita para apresentar outras maneiras de resolver, discutir o que não foi compreendido no texto do problema, argumentar por uma ou outra possibilidade de novas perguntas ou, ainda, discutir em que medida um problema inventado está ou não bem-escrito, auxilia o aluno a evoluir em sua compreensão sobre o problema como texto e como relações matemáticas.

Sob esse viés, nesse momento, não poderíamos deixar de mencionar a experiência da professora Célia Barros Nunes, na cidade de Itabuna – BA, numa turma de 1ª série do Ensino Médio. A docente relata que, enquanto lecionava a disciplina de geometria, percebia seus alunos inquietos e desinteressados. Em determinada ocasião, durante as aulas, flagrou alguns discentes lendo gibis, a partir de então, surgiu a ideia de inseri-los em suas aulas. Como? Dividiu a turma em equipes, onde teriam um prazo de trinta dias para confeccionarem uma revista em quadrinhos com os conteúdos de geometria que foram estudados durante todo o ano letivo. Posteriormente, o trabalho seria exposto na feira de cultura. Como resultado, a professora enfatiza que, após esta experiência com gibis, as aulas de geometria tornaram-se mais prazerosas, interessantes e participativas (NUNES, 2004).

Além dessa experiência, a sequência didática que será proposta é uma adaptação de um trabalho com oficinas desenvolvido durante o período da graduação em 2014, na cidade de Caetité – Bahia.

Nos trabalhos analisados no capítulo 3, nenhuma proposta faz menção ao uso de HQs como recurso no ensino do conteúdo de função exponencial, mas sabemos que podem trazer benefícios nesse processo de ensinar/aprender, pois "os quadrinhos são uma mídia de fragmentos – um pouco de texto aqui, uma figura recortada ali -, mas quando dão certo, seus leitores combinam esses fragmentos conforme leem e experimentam sua história como um todo contínuo" (MCCLOUD, 2008, p. 129).

Além disso, como já exposto, os quadrinhos não são mais leituras apenas de público infantil, pelo contrário, pode e faz parte da leitura de qualquer faixa etária. Eles podem facilitar o processo de leitura e escrita de nossos alunos adolescentes.

Trabalhar Matemática e histórias em quadrinhos, pode proporcionar uma aula lúdica, através das habilidades de leitura e escrita, é possível o professor perceber em que nível houve a compreensão do conteúdo, e o discente refletir sobre o processo adotado na resolução, onde acertou/errou, o que foi compreendido ou não.

Portanto, a proposta tem a junção das linguagens matemáticas e quadrinísticas como um recurso que pode facilitar a aprendizagem, bem como proporcionar uma aula mais interativa.

4.3 Sequência Didática x Função Exponencial

Para Zabala (1998, p. 18), sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realizaçãoo de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Dessa forma, a partir das pesquisas e vivências na própria sala de aula, elaboramos quatro sequências didáticas sobre função exponencial a partir da utilização de jogos e histórias em quadrinhos, como um recurso que pode facilitar o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo.

No tópico seguinte apresentaremos apenas algumas ideias sobre essas sequências didáticas, bem como algumas justificativas. Elas serão apresentadas, no apêndice do trabalho, como um modelo/plano para o professor aplicar em sala de aula.

Destacamos que as mesmas podem ser usadas para introduzir e/ou complementar os conceitos sobre função exponencial, ou como um recurso para auxiliar na compreensão desses conceitos, como: lei de formação, função crescente e decrescente, gráfico de uma função exponencial, entre outros.

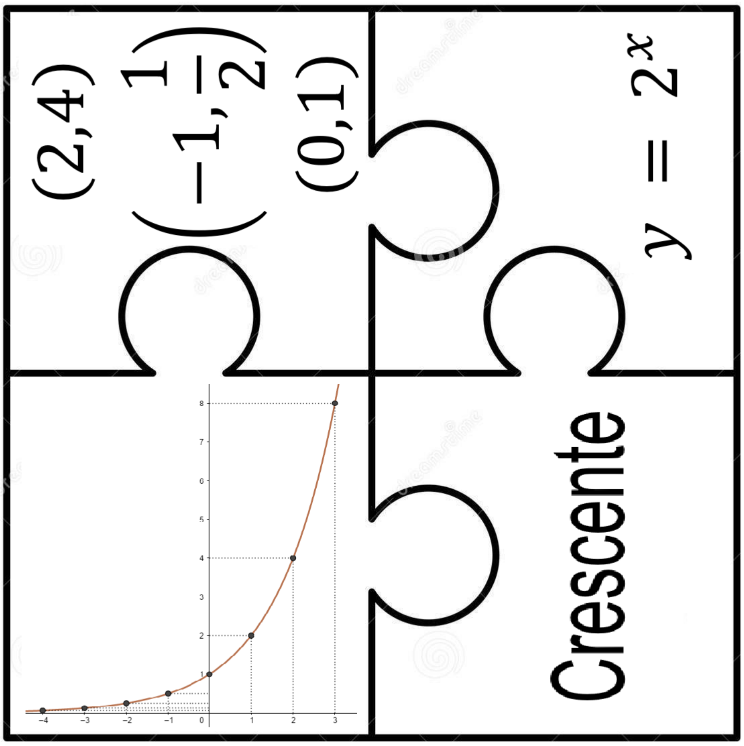
4.3.1 Sequência Didática – Jogo Quebra-cabeça Exponencial

Essa proposta é uma adaptação da atividade quebra-cabeça matemático[1]. Tem como objetivo trabalhar coletivamente o conteúdo de função exponencial a partir da sua lei de formação, representação gráfica e características como crescente ou decrescente, além de destacar pares ordenados pertencentes ao gráfico.

Após serem divididos em grupos, os jogadores se organizaram para juntar as peças e formar o quebra-cabeça, sendo cada um dos quebra-cabeças composto por 4 peças.

[1] Atividade quebra-cabeça matemático: disponível em: <https://sosprofessoratividades.com/quebra-cabeca-matematico/>. Acesso em: 08 de janeiro de 2021.

Figura 4.1: Modelo das peças de um Quebra-Cabeça Exponencial



Fonte: Elaborado pelo autor.

Todas as peças dos 6 quebra-cabeças serão disponibilizadas nos apêndices, bem como as regras do jogo, de maneira que possa ser feita a impressão para a utilização na sala de aula. A sugestão é que seja reservada 2 aulas de 50 minutos cada.

Para o início da atividade, é desejável que o professor já tenha explicado o conteúdo de função exponencial para a turma. Em seguida, deve-se dividir os alunos em grupos para montar o quebra-cabeça exponencial, a partir dos conhecimentos já adquiridos na explicação do conteúdo.

O professor também deverá disponibilizar uma folha de questionamentos, para que, durante a realização do jogo, os alunos façam anotações/registros do que foi observado sobre:

1. Qual a forma genérica de uma função exponencial?

2. Como é o formato do gráfico de uma função exponencial?

3. A partir da observação de alguns pares ordenados, é possível perceber como se comporta o gráfico de uma função exponencial no plano cartesiano?

4. De que maneira comporta-se o gráfico de uma função exponencial crescente?

5. E decrescente?

6. Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas?

7. Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas? Por quê?

Posteriormente, o professor deve discutir esses questionamentos com os alunos após a finalização do quebra-cabeça e das anotações que foram feitas por eles, tendo em vista que, conforme Carvalho (2009, p. 23):

> As interações entre o professor e os alunos e entre os próprios alunos, por estimularem a sua actividade criativa e os levarem a novas formas de compreensão das ideias matemáticas, são essenciais no processo de aprendizagem e um indicador do ambiente de aprendizagem que se vive numa sala de aula.

Por isso, a importância de atividades que proporcionem e estimulem a interação no ambiente escolar.

As possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos nessa atividade podem estar relacionadas à associação do gráfico com sua respectiva função, pois as peças não terão uma ordem no jogo, vão aparecer de maneiras distintas, e na maioria das atividades, estão familiarizados a construir o gráfico após a apresentação da função.

4.3.2 Sequência Didática – Jogo Cruza-fácil Exponencial

O jogo Cruza-Fácil Exponencial é adaptado da atividade Numeradinha[2] e tem como objetivo revisar o significado das palavras de alguns conceitos, propriedades e características do conteúdo de função exponencial.

Dessa forma, sugerimos que essa atividade seja aplicada após a explicação do conteúdo para a turma, com duração de uma aula de 50 minutos.

Para esta proposta, o aluno deverá preencher uma cruzadinha com 11 palavras de alguns conceitos relacionados à função exponencial.

Segue abaixo 11 frases, as quais as palavras em negrito completam a cruzadinha:

1. Não existe ponto de intersecção do gráfico com o eixo das **abscissas**.
2. Uma função exponencial é **crescente** quando $a > 1$.
3. O **gráfico** de uma função exponencial sempre estará no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano.
4. Não existe **zero** da função, pois não existe $y = 0$.
5. Uma função exponencial é **decrescente** quando $0 < a < 1$.
6. O x é conhecido como variável **independente**.

[2]Atividade Numeradinha: disponível em: <https://doutormatematico.blogspot.com/2015/12/cruzadinha-de-sistemas-de-equacoes-de-1.html?spref=pi>. Acesso em: 08 de fevereiro de 2021.

7. A **imagem** de uma função exponencial é $y > 0$.

8. O $f(x)$ pode ser descrito também como y, ele é conhecido como variável **dependente**.

9. O **domínio** de uma função exponencial é o conjunto dos números reais.

10. O par ordenado (0,1) é o ponto de **intersecção** do gráfico com o eixo das ordenadas.

11. Em sua lei de formação, a função exponencial ocorre quando a **variável** está no expoente.

Esses conceitos variam como características de uma função crescente e decrescente, lei de formação, domínio e imagem, dependência e independência de variáveis e representação do gráfico no plano cartesiano. Sobre atividades de escrita em aulas de Matemática podemos destacar que:

> Temos observado que escrever em matemática ajuda a aprendizagem dos alunos de muitas maneiras, encorajando a reflexão, clareando as ideias e agindo como um catalisador para as discussões em grupo. Também ajuda o aluno a aprender o que está sendo estudado. (CANDIDO, 2001, p. 24)

Assim, sugerimos que a proposta seja realizada em duplas, proporcionando que os alunos dialoguem e compartilhem seus conhecimentos, bem como, tirem suas dúvidas.

Uma possível dificuldade que os alunos podem ter nessa proposta, é não ter compreendido todas as informações necessárias durante a explicação do conteúdo para se lembrar dos termos que serão utilizados para completar a cruzadinha, mas trata-se de uma atividade simples e de fácil resolução.

4.3.3 Sequência Didática – Jogo Caça Exponencial

O jogo Caça Exponencial é semelhante à proposta anterior, Cruza-Fácil Exponencial, e tem por objetivo revisar o significado das palavras de alguns conceitos, propriedades e características do conteúdo de função exponencial.

Sugerimos a disponibilidade de uma aula de 50 minutos, de modo que a atividade seja aplicada após a explicação do conteúdo de função exponencial, tendo em vista que é desejável que os alunos conheçam os conceitos de lei de formação, características de uma função crescente e decrescente, base e expoente, domínio e imagem, representação do gráfico no plano cartesiano, sobrejetora, bijetora e função inversa da função exponencial.

Segue abaixo as frases completas, destacando em negrito as palavras que constarão no caça-palavras:

1. Na lei de formação de uma função exponencial $y = a^x$, a é **base** e x **expoente**.

2. Na função exponencial **natural**, $y = e^x$, o número e é conhecido como número de **Euler**.

3. Uma função exponencial é **crescente** quando $a > 1$ e **decrescente** quando $0 < a < 1$.

4. O **gráfico** de uma função exponencial sempre estará no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano e não existe nenhum ponto de intersecção com o eixo das **abscissas**.

5. O **domínio** da função exponencial é $\mathbb{R}$, o contradomínio e a **imagem** é $\mathbb{R}_+^*$.

6. Como o contradomínio e a imagem são iguais, a função é **sobrejetora**, ela também é injetora, logo a função exponencial é **bijetora**.

7. A inversa da função exponencial é a função **logarítmica**.

Para essa proposta, o aluno deve encontrar no Caça Exponencial as respostas que completem, corretamente, as 7 frases apresentadas. Para Chica (2001, p. 165):

> A palavra pode suscitar no aluno um processo imaginativo, uma situação de sua vida cotidiana que ele interpretará, transformará e transgredirá, na medida em que esta possa estimular iniciativas diversas e diferentes. È um ganho de autonomia que possibilita a expressão do imaginário e a construção do poder sobre a língua e a matemática.

Uma possível dificuldade que os alunos poderão apresentar nessa proposta, é a não compreensão de todas as informações necessárias durante a explicação do conteúdo, para se lembrar dos termos que completem as frases. No entanto, como os termos já estarão no caça palavras, eles necessitarão apenas localizá-los, se tornado uma atividade simples e de fácil resolução.

4.3.4 Sequência Didática – HQ Exponencial

Nessa proposta, o objetivo é trabalhar função exponencial a partir da junção das linguagens matemática e quadrinística.

Ao todo são 5 histórias em quadrinhos[3] diferentes , para serem utilizadas em três momentos/aulas, cada uma apresentando uma etapa na explicação do conteúdo.

Assim, sugerimos que a proposta seja realizada para introduzir o conteúdo de função exponencial, em 3 aulas de 50 minutos cada.

Na 1ª aula, a HQ fará uma introdução do conteúdo de função exponencial. Na 2ª aula, o objetivo é trabalhar a ideia de função exponencial a partir de duas situações contextualizadas. Na 3ª aula, conclui-se discutindo sobre função crescente, decrescente e lei de formação da função exponencial.

[3] As histórias em quadrinhos foram elaboradas com ilustração do *site* Pixton (disponível em: <https://www.pixton.com/>. Acesso em: 30 de janeiro de 2021.) e os textos são do autor.

A utilização de HQs em sala de aula promove uma aula interativa, além de proporcionar que o aluno expresse seus conhecimentos, pois:

> Seja porque constitui uma das variedades mais difundidas de texto entre as crianças, ou por mesclar harmonicamente recursos linguísticos e pictóricos, buscando a participação ativa do leitor por via assistemática, anedótica, emocional, a história em quadrinhos exerce um fascínio sobre os alunos e costuma ser um dos recursos de escrita nas aulas de matemática pelo qual eles podem expressar-se com bastante interesse e certa facilidade. (SMOLE, 2001, p. 63)

Uma provável dificuldade nessa proposta, é o aluno estranhar um pouco o formato de apresentação do conteúdo utilizando histórias em quadrinhos, pois, geralmente, os conteúdos são trabalhados de maneira expositiva no quadro, demonstrando a lei de formação, as características, crescente ou decrescente, formato do gráfico, seguido pela aplicação dos exercícios.

Após a sugestão dessas quatro sequências didáticas para trabalhar o conteúdo de função exponencial, é pertinente discutir as potencialidades ou limitações dessas propostas.

Pelo que foi exposto no início deste capítulo, as atividades lúdicas proporcionam o desenvolvimento de habilidades, favorece a socialização, estimula a criatividade, autocontrole, autorrealização, entre outros. Dessa forma, a ludicidade nas aulas de matemática é um recurso que facilita o processo de ensino aprendizagem, pois contribui para as interações professor-aluno e aluno-aluno.

No entanto, propor atividades lúdicas requer uma mediação eficiente por parte do professor, pois os alunos precisam compreender que não se trata apenas de uma brincadeira. Ademais, para que alcance o resultado desejado, é importante que todos participem e se envolvam.

Por isso, destacamos que o professor verifique o aparelho de *data-show*, se todos os alunos possuem acesso ao celular, ou se o laboratório comporta a turma para a realização da atividade, para que esses fatores não atrapalhem na execução e nos resultados.

Caso o professor tenha algum aluno com necessidades especiais, torna-se necessário também adaptar as propostas para a linguagem compreendida pelo estudante, pois a ludicidade proporciona um trabalho mais envolvente e variado com esses alunos, facilitando o saber e o aprender.

Considerações finais

É extremamente difícil concluir esse trabalho. Primeiro por sentirmos que ele não se finda aqui, pelo contrário, é apenas um começo. Depois, por perceber que ainda há muito a se fazer.

Durante toda a trajetória de estudos e pesquisas, experiências no dia a dia em sala de aula, observa-se que o conteúdo de função exponencial está aplicado a muitas situações do nosso cotidiano, como na capitalização monetária pelo método do juro composto, crescimentos populacionais, decaimento radioativo, crescimento populacional de bactérias, entre outros. Por isso, a importância de que os alunos compreendam os conceitos e características.

Além disso, percebemos que o ensino de Matemática em nossa sociedade atual requer métodos complementares para uma aula mais significativa e envolvente, pois os jovens que estão no Ensino Médio, em seu dia a dia, convivem com tecnologias e recursos mais lúdicos.

Dessa forma, o problema que fundamentou o trabalho, foi pensar e propor sequências didáticas sobre função exponencial a partir de atividades lúdicas, com a utilização de jogos e histórias em quadrinhos para facilitar esse processo de ensino aprendizagem.

Os jogos têm se tornado uma ferramenta importante nesse processo de construção do saber, além de promover a ludicidade, aproxima-se da realidade da maioria de nossos alunos.

Quanto às histórias em quadrinhos vivenciamos situações híbridas, a mistura de textos e imagens, cada vez mais em nosso dia a dia, dessa forma, é importante compreendermos as competências de leitura e escrita, uma característica dos quadrinhos, para produzir sentido a essas situações. Além desses fatores, por acreditar que as HQ podem ser um recurso utilizado para proporcionar um ensino de Matemática mais prazeroso e significativo.

É importante destacar que uma aula lúdica com a utilização de jogos e HQs precisam ser bem mediadas para que produza significado e atinja o objetivo na construção do conhecimento.

Sabemos que não existem fórmulas mágicas, mas a disposição tanto da nossa parte, como mediadores do conhecimento, quanto dos alunos tem um papel decisivo no processo de ensino e aprendizagem, não só em Matemática, mas em todas as áreas do conhecimento.

Quando elaboramos as sequências didáticas nos preocupamos em trabalhar com material de fácil acesso e baixo custo, além de pensar em atividades que sejam de possível aplicação, por isso, escolhemos os jogos e histórias em quadrinhos.

Devido a pandemia global que ainda estamos vivenciando, infelizmente, não foi possível a aplicação de nenhuma proposta em sala de aula, pois os protocolos de segurança não permitem atividades realizadas coletivamente e a distribuição ou manuseio de qualquer material.

No entanto, por tudo que foi discutido ao longo da pesquisa, acreditamos que trabalhar funções exponenciais com atividades lúdicas contribui e fortalece a compreensão dos alunos.

Dessa forma, esperamos que as sequências didáticas aqui apresentadas possam servir de suporte para que os professores utilizem em suas aulas. Inclusive, o trabalho não acaba por aqui, pois, assim que possível, o objetivo é realizar as propostas a fim de perceber se os resultados esperados foram alcançados.

Referências

ANDRADE, M. C. G. As inter-relações entre iniciação matemática e alfabetização. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Ed.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. p. 143–160.

BARRA, R. do S. C. **Uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica**. 2017. 80 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Do Pará, Belém - PA, 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo - SP: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília - DF: Ministério da Educação, 1999.

______. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2000. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 15-10-2021.

______. **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2002. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 15-10-2021.

______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2006. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 15-10-2021.

______. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CANDIDO, P. T. Comunicação em matemática. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Ed.). **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. p. 15–24.

CARVALHO, C. Comunicações e interações sociais nas salas de matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. O. (Ed.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. p. 15–34.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Ed.). **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. p. 152–173.

CODINHOTO, L. C. Os jogos como instrumento na metodologia do ensino de matemática na educação básica. In: CASTEJON, M.; ROSA, R. (Ed.). **OLHARES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO BÁSICA**. Uberaba: IFTM, 2017. p. 53–60.

COSTA, A. V. **Função exponencial: uma abordagem guiada pela BNCC**. 2021. 76 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2021.

COSTA, C. P. da. **A abstração da função exponencial de interações entre engrenagens lego®**. 2020. 196 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal De Goiás, Catalão - GO, 2020.

GADIOLI, A. O. **Função exponencial: definição, caracterização e aplicações**. 2015. 87 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, 2015.

GARCIA, D. F. A importância dos jogos matemáticos no processo ensino-aprendizagem da educação básica. In: CASTEJON, M.; ROSA, R. (Ed.). **OLHARES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO BÁSICA**. Uberaba: IFTM, 2017. p. 33–41.

GIOIA, C. C. S. **Função exponencial e logarítmica: um estudo interdisciplinar por meio da resolução de problemas**. 2019. 141 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2019.

GRANDO, R. C. **O Jogo e a Matemática no Contexto da Sala de Aula**. São Paulo: Paulus, 2008.

HAHN, T.; PERAZZOLI, C. A brief history of the exponential function. In: ENGEL KLAUS-JOCHEN. NAGEL, R. (Ed.). **One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**. Nova Iorque: Springer, 1991. p. 497– 508.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciências e aplicações – 1ª série**. São Paulo: Saraiva, 2004.

______. **Matemática: ciências e aplicações – 1: ensino médio**. São Paulo: Saraiva, 2010.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, M. C. M. de. **Função exponencial natural ex e número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades**. 2016. 96 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

MAIA, L. F. M. de Q. **Modelação matemática na sala de aula: o conceito de função exponencial numa sequência de atividades para o 1º ano do ensino médio**. 2017. 68 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São carlos, Sorocaba, 2017.

MARTINEZ, D. A. **Função Exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas**. 2015. 46 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2015.

MCCLOUD, S. **Desenhando quadrinhos**. São Paulo: M. Books do Brasil Editora LTDA, 2008.

MENDES, R. E.; SOUSA, S. R. S. O lúdico no ensino da matemática. **Revista Multidebates**, volume 4, n. 4, p. 151–166, 2020.

NEVES, L. X.; FUNATO, R. L.; HENRIQUES, A. Análise da constituição do jogo copos das frações sob perspectiva da abordagem instrumental. **INTERMATHS**, volume 1, n. 1, p. 197–212, 2020.

NUNES, C. B. **A geometria em quadrinhos**. [S.I]: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/RE65873300534.pdf>. Acesso em: 20 de agosto de 2021.

OLIVEIRA, M. N. A. de. **Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do Ensino Médio**. 2014. 126 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.

PEREIRA, H. E. **A função exponencial natural e aplicações** . 2015. 69 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro - RJ: Zahar, 2012.

ROZANSKI, E. F. **Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas** . 2015. 117 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.

SANTOS, J. dos. **Introdução ao conceito da função exponencial: um olhar para a educação inclusiva** . 2018. 92 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

SILVA, A. D. da; PEREIRA, L. B. D. Algumas contribuições do jogo vai e vem das equações no ensino de equações do 1º e do 2º grau. In: SILVA, E. C. (Ed.). **Ensino aprendizagem de Matemática**. Ponta Grossa: Atena Editora, 2019. p. 55– 67.

SILVA, C. A. da. **A torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas** . 2015. 64 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural Do Semi-Árido, Mossoró, 2015.

SILVA, R. F. da. **Função exponencial e logarítmica**. 2016. 121 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2016.

SMOLE, K. C. S. Textos em matemática: Por que não? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Ed.). **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. p. 30–67.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre - RS: Artmed Editora, 2001.

SOUSA, I. R. da Silva de. **Relação entre função exponencial e progressão geométrica**. 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016.

TOLEDO, L. A. de. **Ensino da função exponencial: análise de resultados**. 2018. 124 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2018.

VERGUEIRO, W.; RAMOS, P. **Quadrinhos na educação: da rejeição à prática**. São Paulo: Contexto, 2009.

VITTI, C. M. **Matemática com Prazer...A Partir da História e da Geometria**. Piracicaba: Editora Unimep, 1995.

ZABALA, A. **A prática educativa**. Porto Alegre - RS: ArtMed, 1998.

Apêndices

Apêndice A

Sequência Didática: Jogo Quebra-cabeça Exponencial

Objetivo: Trabalhar funções exponenciais, a partir da sua lei de formação, representação gráfica e características tais como, se a função é crescente ou decrescente, além disso, destacar pares ordenados pertencentes no gráfico.

Público:

- 1º Ano do Ensino Médio.

Conteúdos relacionados:

- Plano cartesiano e par ordenado;
- Lei de formação da função exponencial;
- Gráfico da função exponencial;
- Características de uma função exponencial crescente e decrescente;

Material necessário:

- Papel A4 (para impressão das peças do quebra-cabeça);
- Papel cartão ou cartolina (para colar as peças do quebra-cabeça impressas);
- Tesoura;
- Cola.

Tempo de duração:

- 2 aulas de 50 minutos cada.

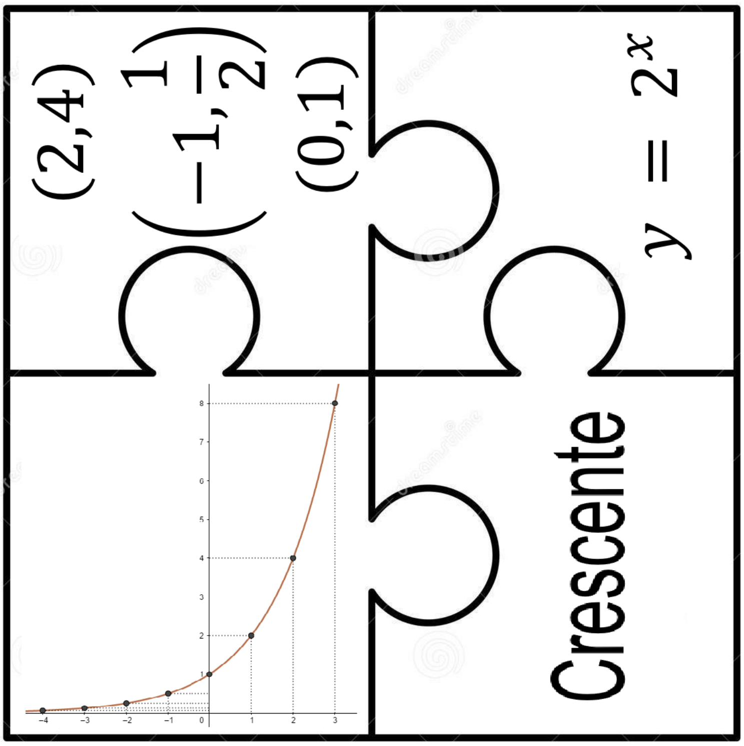
Entendendo o jogo quebra-cabeça exponencial

Sugerimos que a proposta seja realizada após a explicação do conteúdo de função exponencial.

Ao todo teremos 6 quebra-cabeças diferentes, cada um deles contendo 4 peças.

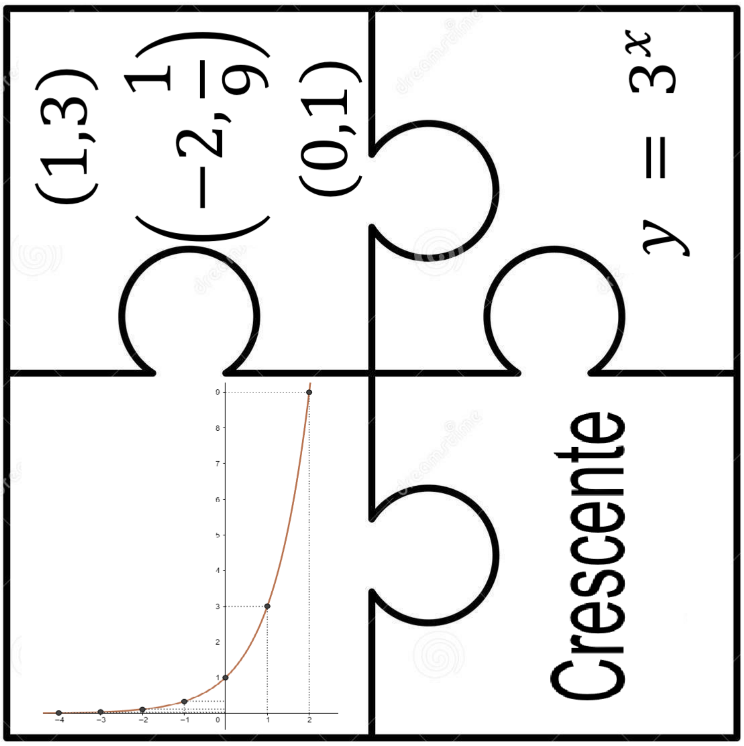
Nas figuras abaixo, apresentamos como será cada quebra-cabeça.

Figura 4.2: Quebra-Cabeça 1



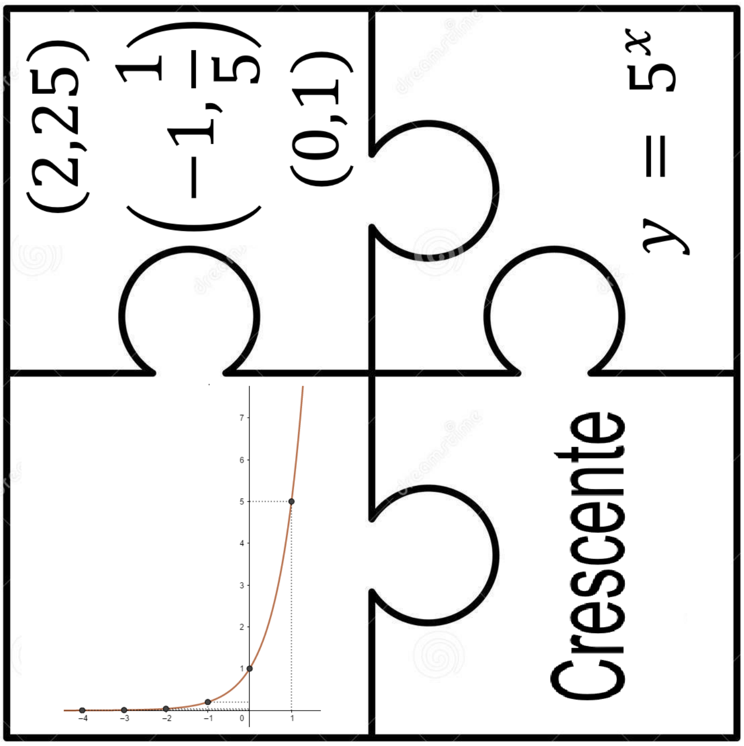
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.3: Quebra-Cabeça 2



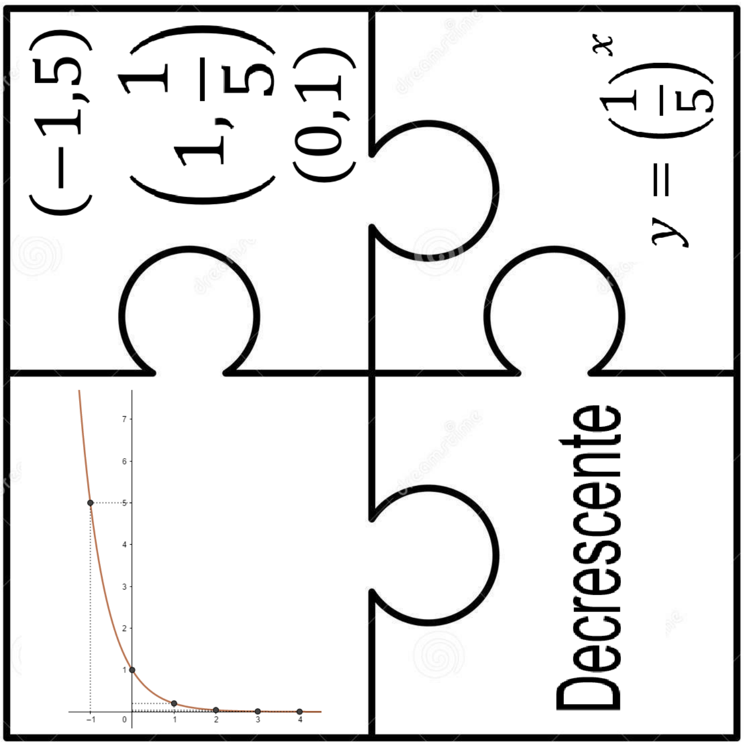
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.4: Quebra-Cabeça 3



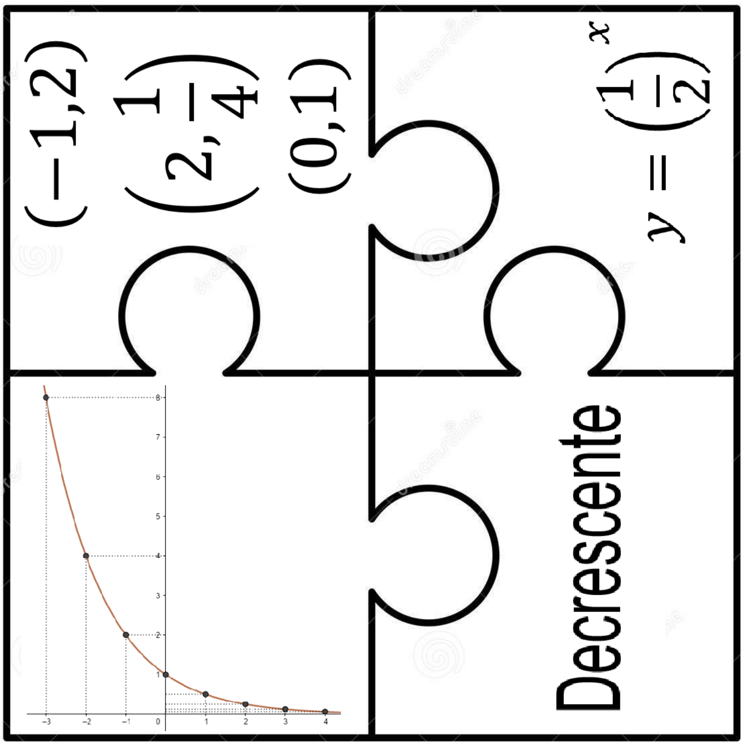
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.5: Quebra-Cabeça 4



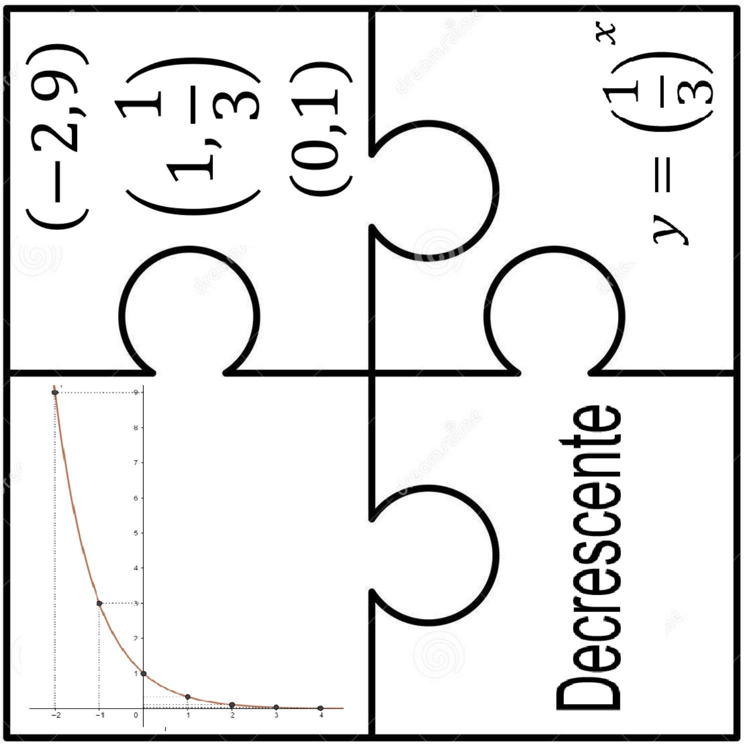
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.6: Quebra-Cabeça 5



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.7: Quebra-Cabeça 6



Fonte: Elaborado pelo autor.

Instruções para a realização do jogo quebra-cabeça exponencial

- Inicialmente recorte as peças do quebra-cabeça e cole-as, separadamente, no papel cartão ou cartolina;
- Divida a turma em grupos com 4 alunos (jogadores);
- Cada grupo recebe apenas 3 quebra-cabeças[4] com as peças (embaralhadas), para que a atividade não fique repetitiva e cansativa, além disso, para possibilitar ao professor escolher quebra cabeças diferentes para cada grupo;
- Distribua três peças para cada aluno;
- Sorteie o aluno que começará o jogo.
- O primeiro jogador escolhe uma peça qualquer e coloca sobre a mesa, continuando assim em sentido horário;
- O próximo jogador continuará colocando mais uma peça, de maneira que esta não somente encaixe, mas complete corretamente o conceito daquele quebra cabeça;

[4] O jogo é composto por 6 quebra cabeças de modo que o professor possa escolher 3 quebra cabeças diferentes para cada grupo.

- Caso o jogador da vez não tenha uma peça que complete o quebra cabeça corretamente, ele deve passar a vez;
- Para que não seja encaixada uma peça indevida, os componentes do grupo devem ficar atentos às características da função;
- Quando um jogador completar o primeiro quebra cabeça, ele continua o jogo iniciando um novo quebra cabeça e assim sucessivamente;
- Continua o jogo com as mesmas regras até que os três quebra-cabeças sejam compostos pelo grupo;
- Vence o jogador que acabou primeiro com as suas peças.

Assim que as peças do quebra-cabeça forem distribuídas para os alunos, entregue uma folha com as questões que seguem abaixo, para que o grupo registre o que percebeu durante a execução do jogo.

1. Qual a forma genérica de uma função exponencial?
2. Como é o formato do gráfico de uma função exponencial?
3. A partir da observação de alguns pares ordenados, é possível perceber como se comporta o gráfico de uma função exponencial no plano cartesiano?
4. De que maneira comporta-se o gráfico de uma função exponencial crescente?
5. E decrescente?
6. Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas?
7. Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas? Por quê?

Dessa forma, espera-se que os alunos relembrem e ratifique a lei de formação $y = a^x$ para toda função exponencial, com gráfico no formato de uma curva situada nos quadrantes 1 e 2 no plano cartesiano, além disso, crescente para os casos de $a > 1$ e, consequentemente, decrescente quando $0 < a < 1$, bem como, reconhecer pares ordenados que pertencem ao gráfico e o ponto (0,1) como intersecção do mesmo com o eixo das ordenadas. Com relação ao eixo das abscissas, o aluno deverá perceber que não existe nenhum ponto de intersecção, visto que o conjunto imagem de uma função exponencial é $Im = \{\ y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

As possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos nessa atividade podem estar relacionadas à associação do gráfico com sua respectiva função, pois as peças não terão uma ordem no jogo, vão aparecer de maneiras distintas, e na maioria das atividades, estão familiarizados a construir o gráfico após a apresentação da função.

Apêndice B

Sequência Didática: Jogo Cruza-fácil Exponencial

Objetivo: Revisar o significado das palavras de alguns conceitos, propriedades e características do conteúdo de função exponencial.

Público:

- $1^{\underline{o}}$ Ano do Ensino Médio.

Conteúdos relacionados:

- Função exponencial;
- Plano cartesiano.

Material necessário:

- Cruzadinha impressa.

Tempo de duração:

- 1 aula de 50 minutos.

Entendendo o jogo Cruza-fácil Exponencial

Para essa atividade o aluno deve preencher a cruzadinha abaixo, com 11 palavras de alguns conceitos relacionados à função exponencial. Esses conceitos variam como características de uma função crescente e decrescente, lei de formação, domínio e imagem, dependência e independência de variáveis e representação do gráfico no plano cartesiano.

Segue abaixo as 11 frases completas, destacando em negrito as palavras que completam a cruzadinha:

1. Não existe ponto de intersecção do gráfico com o eixo das **abscissas**.
2. Uma função exponencial é **crescente** quando $a > 1$.
3. O **gráfico** de uma função exponencial sempre estará no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano.
4. Não existe **zero** da função, pois não existe $y = 0$.
5. Uma função exponencial é **decrescente** quando $0 < a < 1$.
6. O x é conhecido como variável **independente**.
7. A **imagem** de uma função exponencial é $y > 0$.

8. O $f(x)$ pode ser descrito também como y, ele é conhecido como variável **dependente**.

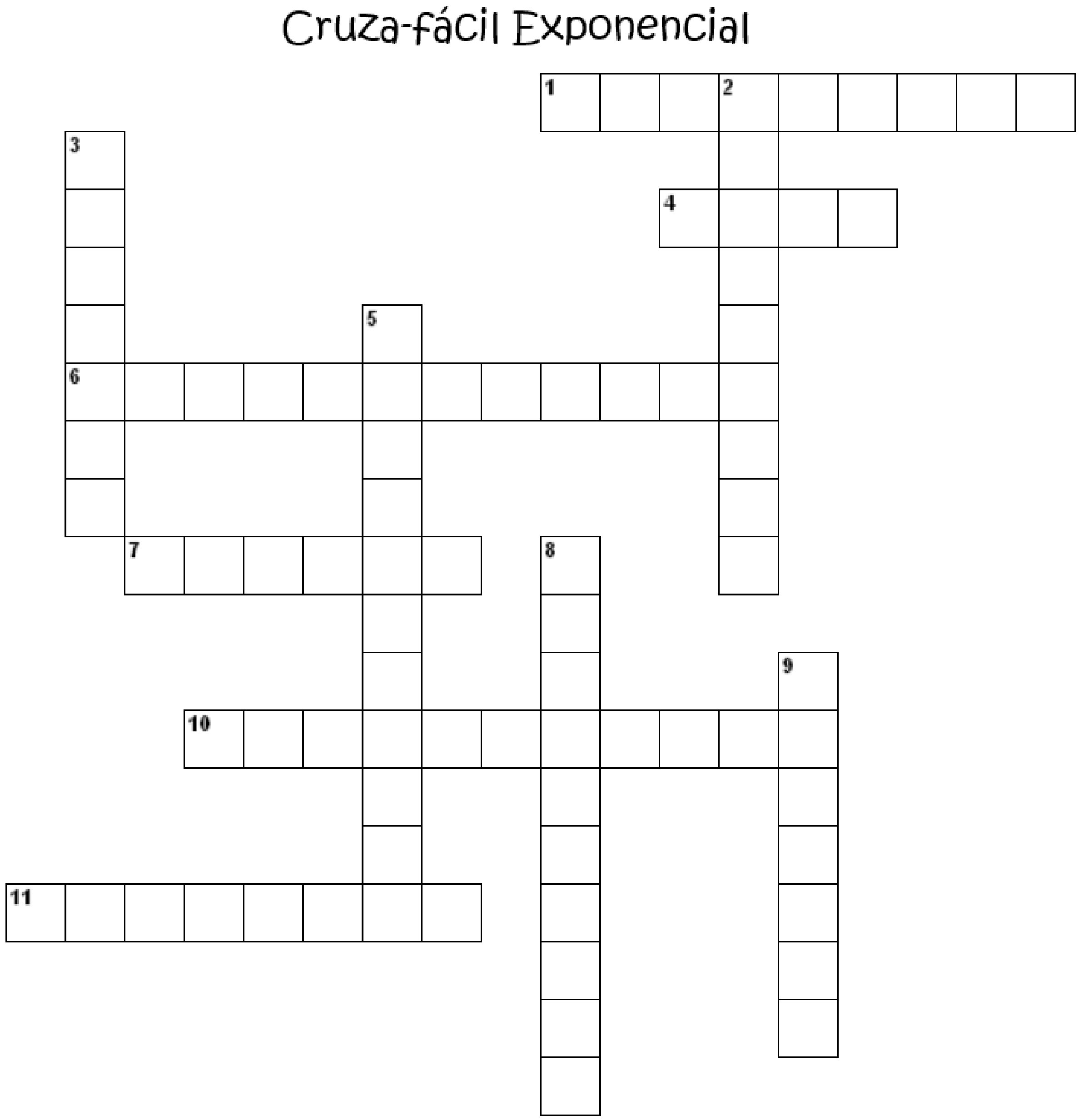
9. O **domínio** de uma função exponencial é o conjunto dos números reais.

10. O par ordenado (0,1) é o ponto de **intersecção** do gráfico com o eixo das ordenadas.

11. Em sua lei de formação, a função exponencial ocorre quando a **variável** está no expoente.

A Figura 4.8, a seguir, apresenta a Cruza-fácil Exponencial em formato de impressão para a utilização na sala de aula.

Figura 4.8: Cruza-fácil Exponencial



1. Não existe ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ________.
2. Uma função exponencial é ________ quando a > 1.
3. O _______ de uma função exponencial sempre estará no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano.
4. Não existe ________ da função, pois não existe y = 0.
5. Uma função exponencial é _______ quando 0 < a < 1.
6. O x é conhecido como variável ________.
7. A ________ de uma função exponencial é y > 0.
8. O f(x) pode ser descrito também como y, ele é conhecido como variável ________.
9. O ________ de uma função exponencial é o conjunto dos números reais.
10. O par ordenado (0,1) é o ponto de ________ do gráfico com o eixo das ordenadas.
11. Em sua lei de formação, a função exponencial ocorre quando a ________ está no expoente.

Fonte: Elaborado pelo autor com base na atividade Numeradinha.

Instruções para a realização do jogo Cruza-fácil Exponencial

Sugerimos empregar essa atividade após a explicação do conteúdo função exponencial, pois os alunos, para completar a cruzadinha deverão conhecer os conceitos de função exponencial crescente e decrescente, lei de formação, domínio e imagem, dependência e independência de variáveis e representação do gráfico no plano cartesiano.

- Divida a turma em duplas (para que os alunos dialoguem e compartilhem seus conhecimentos, bem como tirar dúvidas);
- Distribua a cruzadinha para a dupla;
- Oriente a preencher a cruzadinha com as palavras que completam, corretamente, as 11 frases;
- Após algum tempo, convidar os alunos para um diálogo a respeito da correção da atividade (explorando cada item de acordo com a necessidade da turma).

Uma possível dificuldade que os alunos pode ter nessa proposta é não ter compreendido todas as informações necessárias durante a explicação do conteúdo para se lembrar dos termos que serão usados para completar a cruzadinha, mas trata-se de uma atividade simples e de fácil resolução.

Apêndice C

Sequência Didática: Jogo Caça Exponencial

Objetivo: Revisar o significado das palavras de alguns conceitos, propriedades e características do conteúdo de função exponencial.

Público:

- 1º Ano do Ensino Médio.

Conteúdos relacionados:

- Potenciação;
- Plano cartesiano;
- Função exponencial.

Material necessário:

- Caça-palavras impresso.

Tempo de duração:

- 1 aula de 50 minutos.

Entendendo o jogo Caça Exponencial

Para essa proposta o aluno deve encontrar no caça-palavras abaixo, as respostas que completem, corretamente, as frases.

Esses conceitos variam como características de uma função crescente e decrescente, lei de formação, base e expoente, domínio e imagem, representação do gráfico no plano cartesiano, sobrejetora, bijetora e função inversa.

Segue abaixo as frases completas, destacando em negrito as palavras que estão no caça palavras:

1. Na lei de formação de uma função exponencial $y = a^x$, a é **base** e x **expoente**.
2. Na função exponencial **natural**, $y = e^x$, o número e é conhecido como número de **Euler**.
3. Uma função exponencial é **crescente** quando $a > 0$ e **decrescente** quando $0 < a < 1$.
4. O **gráfico** de uma função exponencial sempre estará no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano e não existe nenhum ponto de intersecção com o eixo das **abscissas**.
5. O **domínio** da função exponencial é $\mathbb{R}$, o contradomínio e a **imagem** é $\mathbb{R}_+^*$.

6. Como o contradomínio e a imagem são iguais, a função é **sobrejetora**, ela também é Injetora, logo a função exponencial é **bijetora**.

7. A inversa da função exponencial é a função **logarítmica**.

Instruções para a realização do jogo Caça Exponencial

Sugerimos que essa proposta seja realizada após a explicação do conteúdo, pois os alunos deverão saber conceitos de lei de formação, características de uma função crescente e decrescente, base e expoente, domínio e imagem, representação do gráfico no plano cartesiano, sobrejetora, bijetora e função inversa da função exponencial.

- Divida a turma em duplas (de maneira que um compartilhe com o outro o seu conhecimento);
- Distribua o caça-palavras para todos os alunos;
- Oriente os alunos a responder os espaços vazios nas frases;
- Depois procurar no caça-palavras cada uma das respostas;
- Após a resolução de todos os alunos, fazer a correção coletiva (explorando cada item de acordo com a necessidade da turma).

A Figura 4.9, abaixo, apresenta o caça-palavras em formato de impressão.

Já a Figura 4.10, logo depois, apresenta a localização das respostas no caça-palavras.

Figura 4.9: Caça Exponencial

Caça Exponencial

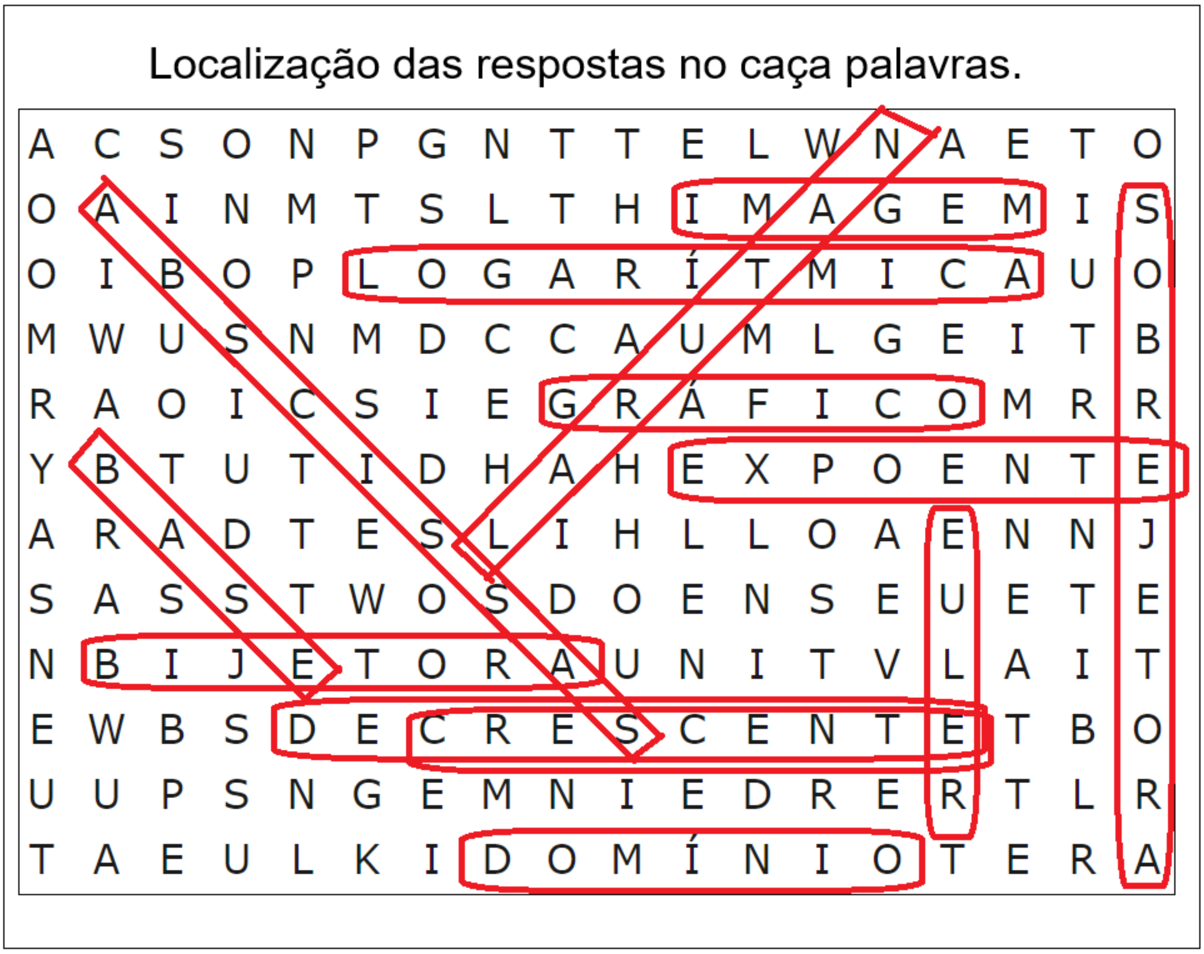
Encontre no caça palavras abaixo, as palavras que completam corretamente as frases.
As palavras estão escondidas na horizontal, vertical e diagonal, sem palavras ao contrário.

A	C	S	O	N	P	G	N	T	T	E	L	W	N	A	E	T	O
O	A	I	N	M	T	S	L	T	H	I	M	A	G	E	M	I	S
O	I	B	O	P	L	O	G	A	R	Í	T	M	I	C	A	U	O
M	W	U	S	N	M	D	C	C	A	U	M	L	G	E	I	T	B
R	A	O	I	C	S	I	E	G	R	Á	F	I	C	O	M	R	R
Y	B	T	U	T	I	D	H	A	H	E	X	P	O	E	N	T	E
A	R	A	D	T	E	S	L	I	H	L	L	O	A	E	N	N	J
S	A	S	S	T	W	O	S	D	O	E	N	S	E	U	E	T	E
N	B	I	J	E	T	O	R	A	U	N	I	T	V	L	A	I	T
E	W	B	S	D	E	C	R	E	S	C	E	N	T	E	T	B	O
U	U	P	S	N	G	E	M	N	I	E	D	R	E	R	T	L	R
T	A	E	U	L	K	I	D	O	M	Í	N	I	O	T	E	R	A

1. Na lei de formação de uma função exponencial $y = a^x$, a é _______ e x _______.
2. Na função exponencial _______, $y = e^x$, o número e é conhecido como número de _______.
3. Uma função exponencial é _______ quando $a > 0$ e _______ quando $0 < a < 1$.
4. O _______ de uma função exponencial sempre estará no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano e não existe nenhum ponto de intersecção com o eixo das _______.
5. O _______ da função exponencial é $\mathbb{R}$, o contradomínio e a _______ é $\mathbb{R}_+^*$.
6. Como o contradomínio e a imagem são iguais a função é _______, ela também é injetora, logo a função exponencial é _______.
7. A inversa da função exponencial é a função _______.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.10: Localização das respostas no Caça Exponencial



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma possível dificuldade que os alunos podem ter nessa proposta é não ter compreendido todas as informações necessárias durante a explicação do conteúdo para se lembrar dos termos que completem as frases, no entanto, como já estarão no caça palavras, facilita bastante, pois eles precisam apenas localizá-las, é uma atividade simples e de fácil resolução.

Apêndice D

Sequência Didática: HQ Exponencial

Objetivo: Trabalhar função exponencial a partir da junção das linguagens matemática e quadrinística.

Público:

- 1º Ano do Ensino Médio.

Conteúdos relacionados:

- Função exponencial;
- Potenciação;
- Medidas de comprimento;
- Plano cartesiano.

Material necessário:

- Histórias em quadrinhos impressas, sendo 5 HQs ao todo, cada uma em uma folha.
- Sugestão: Caso todos os alunos da turma tenham acesso a celular, o professor pode enviar as histórias em quadrinhos no formato digital.

Tempo de duração:

- 3 aulas de 50 minutos cada.

Entendendo a proposta HQ Exponencial

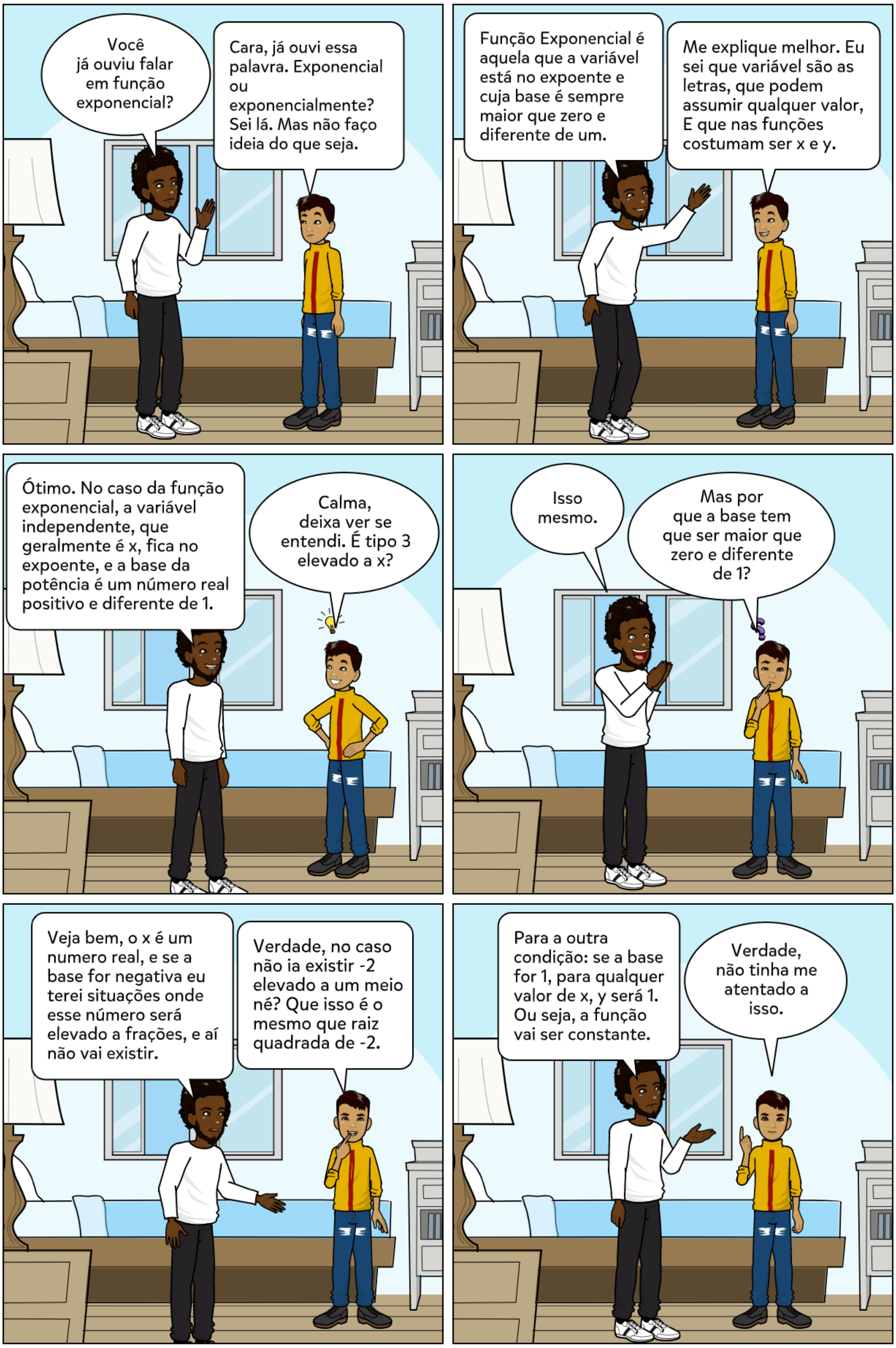
Sugerimos que a proposta seja realizada para introduzir o conteúdo de função exponencial.

Ao todo teremos 5 histórias em quadrinhos diferentes, para ser utilizada em três momentos/aulas, cada uma apresentando uma etapa na explicação do conteúdo.

1ª Aula:

O primeiro momento é destinado para que os alunos leiam a HQ abaixo, de modo a famialiarizar-se com alguns elementos que serão levados para discussão na apresentação do conteúdo. Para isso recomenda-se que os alunos leiam a HQ. Essa leitura pode ser indivual ou coletiva. É possível também convidar algum aluno para representar um personagem, ou seja, cabe aqui a critividade do professor na implementação dessa proposta.

Figura 4.11: HQ - Introdução à Função Exponencial



Fonte: Texto elaborado pelo autor/ Ilustração do *site* Pixton.

Depois dessa leitura questionar:

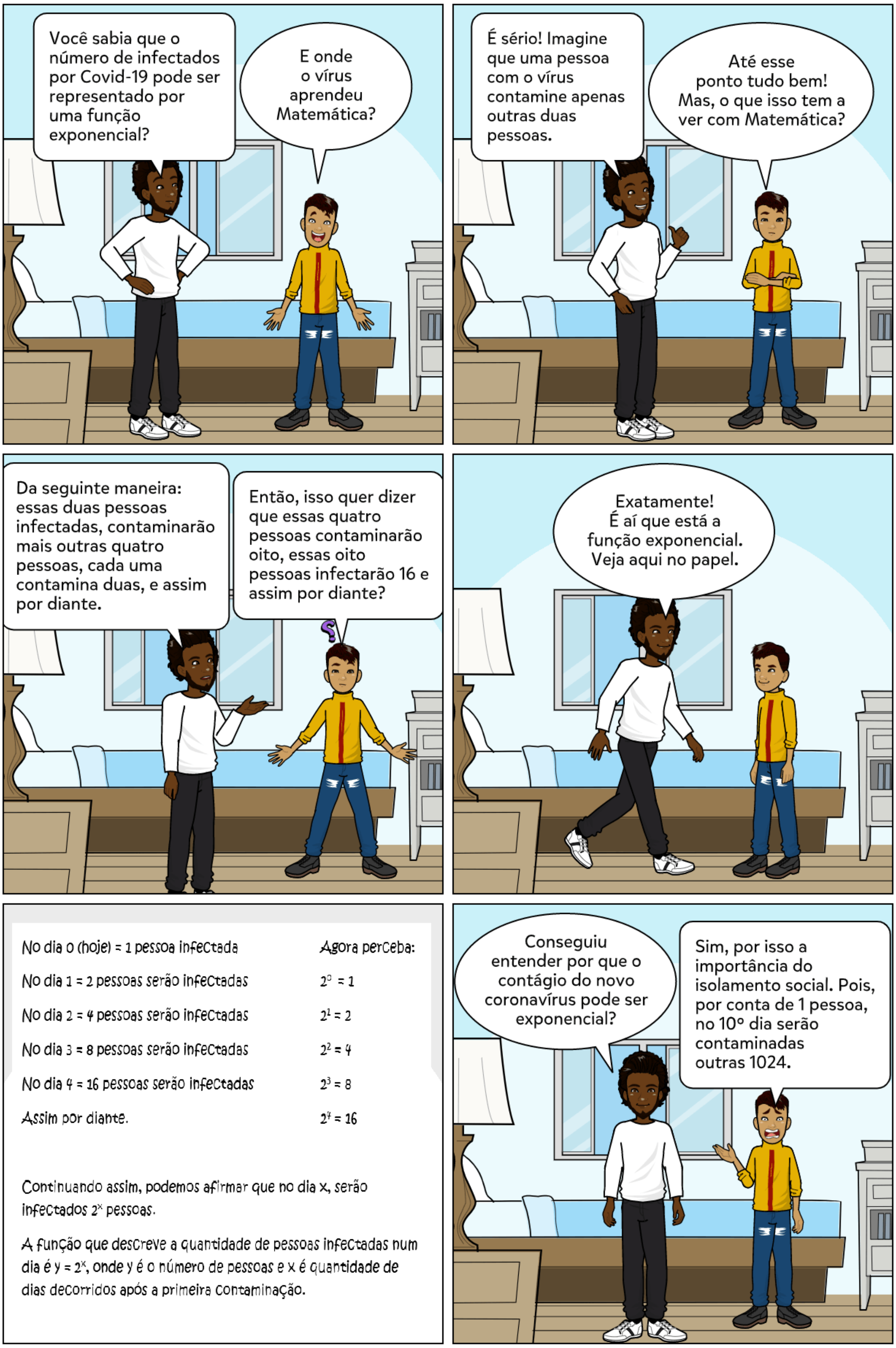
1. Já ouviram o termo exponencial ou exponencialmente?
2. O que é variável?
3. O que é base e expoente?
4. O que é um número real?
5. No 3º quadrinho, o personagem destaca 3 elevado a x como uma função exponencial. O que vocês acham?
6. Por que não temos em R a raiz quadrada de um número menor que 0, ou seja, negativo?
7. O que é função constante?
8. Podemos encontrar funções exponenciais em alguma situação do nosso cotidiano?

Espera-se, nesse momento, que os alunos apresentem suas experiências sobre o termo exponencial, variável, base e expoente. Além disso, o conceito de número real, bem como, porque não existe raiz quadrada de número negativo nesse conjunto, e finalizar com a ideia de função constante. Caso, os discentes não consigam se lembrar, o professor deverá fazer menção às questões de número real, função constante e porque não existe no conjutno dos números reais raiz quadrada de número menor que 0.

2ª Aula:

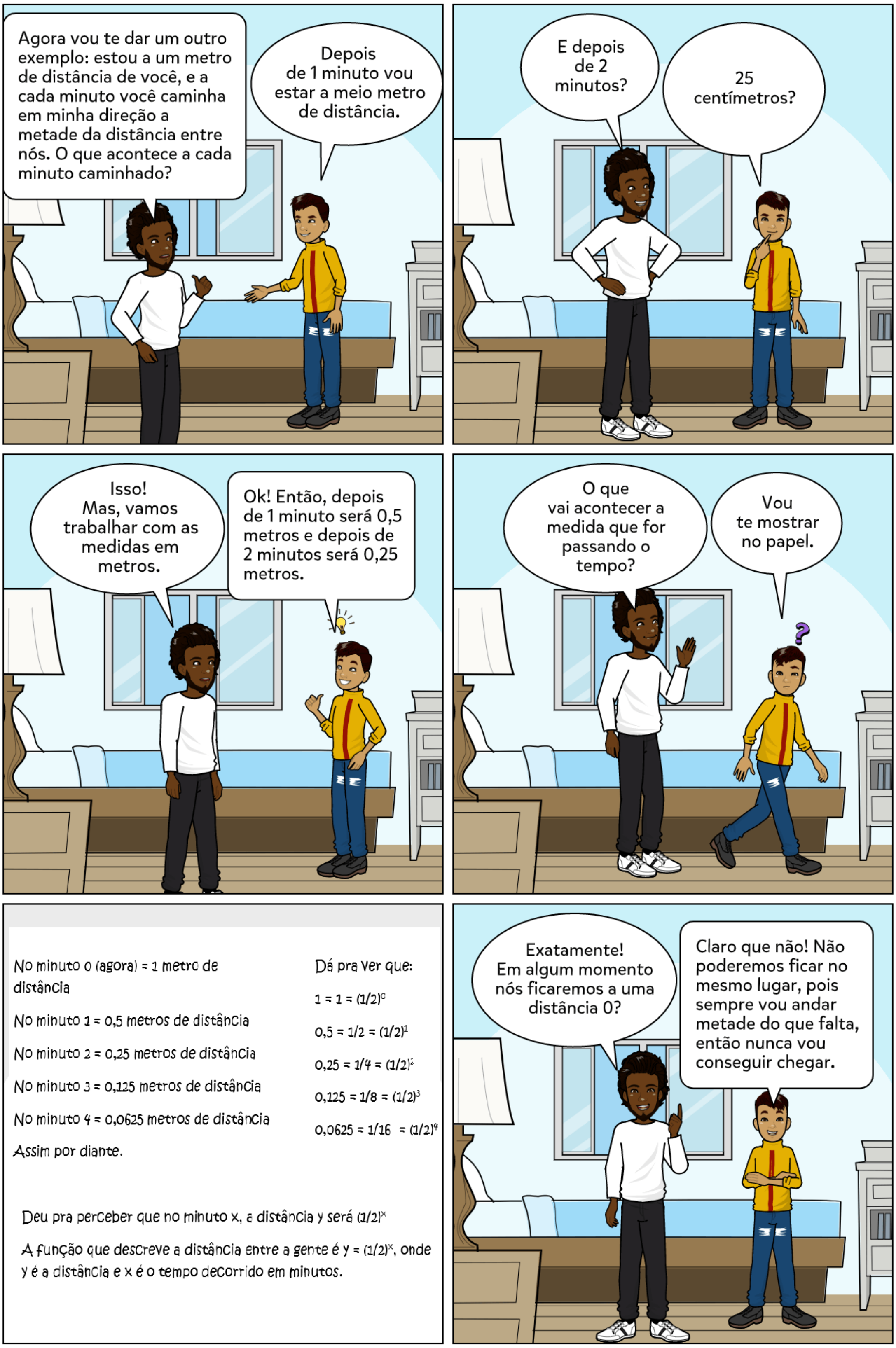
A partir das discussões da aula anterior, apresentar para os alunos as HQs: Covid-19 e a função exponencial e Função exponencial e a ideia de andar "só" a metade, ambas disponíveis abaixo.

Figura 4.12: HQ - Covid-19 e a Função Exponencial



Fonte: Texto elaborado pelo autor/ Ilustração do *site* Pixton.

Figura 4.13: HQ - Função Exponencial e a ideia de andar “só” a metade



Fonte: Texto elaborado pelo autor/ Ilustração do *site* Pixton.

Após a apresentação e leituras das HQs:

1. Discutir sobre as duas situações apresentadas, elementos como: relação da taxa de contágio do Covid-19 e a distância de uma pessoa para a outra com a função exponencial, situação do cotidiano relacionado com a função exponencial, dentre outras que achar necessária.

2. No exemplo da Covid-19 pedir aos alunos que completem o que está descrito no papel do 5º quadrinho até o 10º dia de contágio.

3. O que é base e expoente? (Espera-se que o aluno consiga chegar no 10º dia de contágio com o número de 1024 pessoas infectadas, já exposto no 6º quadrinho).

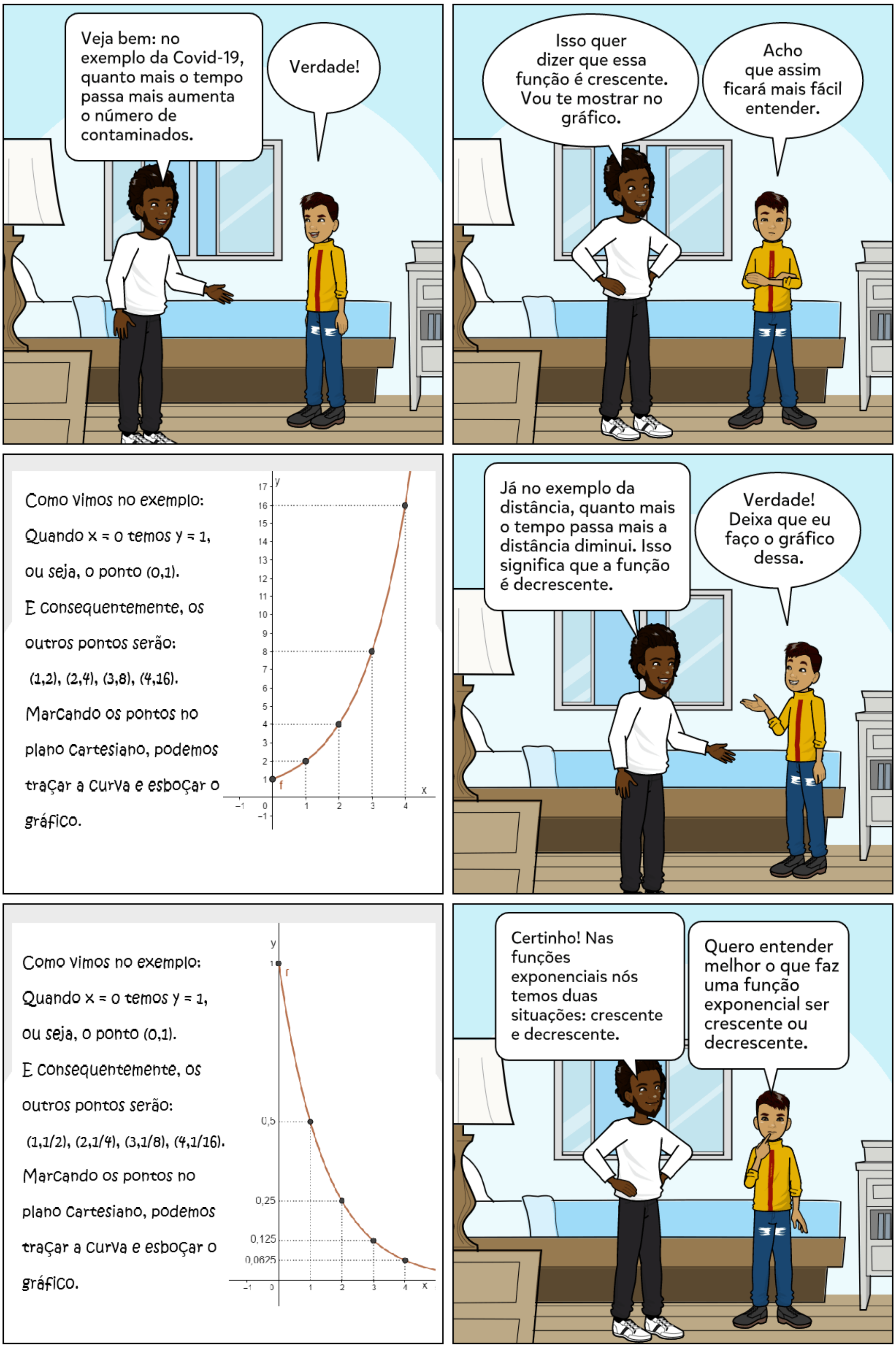
4. No exemplo da distância, da mesma maneira, pedir que completem o papel do 5º quadrinho para o minuto 10. (Espera-se que o aluno consiga chegar no minuto 10 com o número 0,0009765625 metros de distância).

5. Por que não é possível que os personagens se encontrem no mesmo ponto, em algum momento? (Espera-se que o aluno perceba que sempre vai ter uma distância, por menor que seja, entre eles dois, logo, nunca vão se encontrar).

3ª Aula:

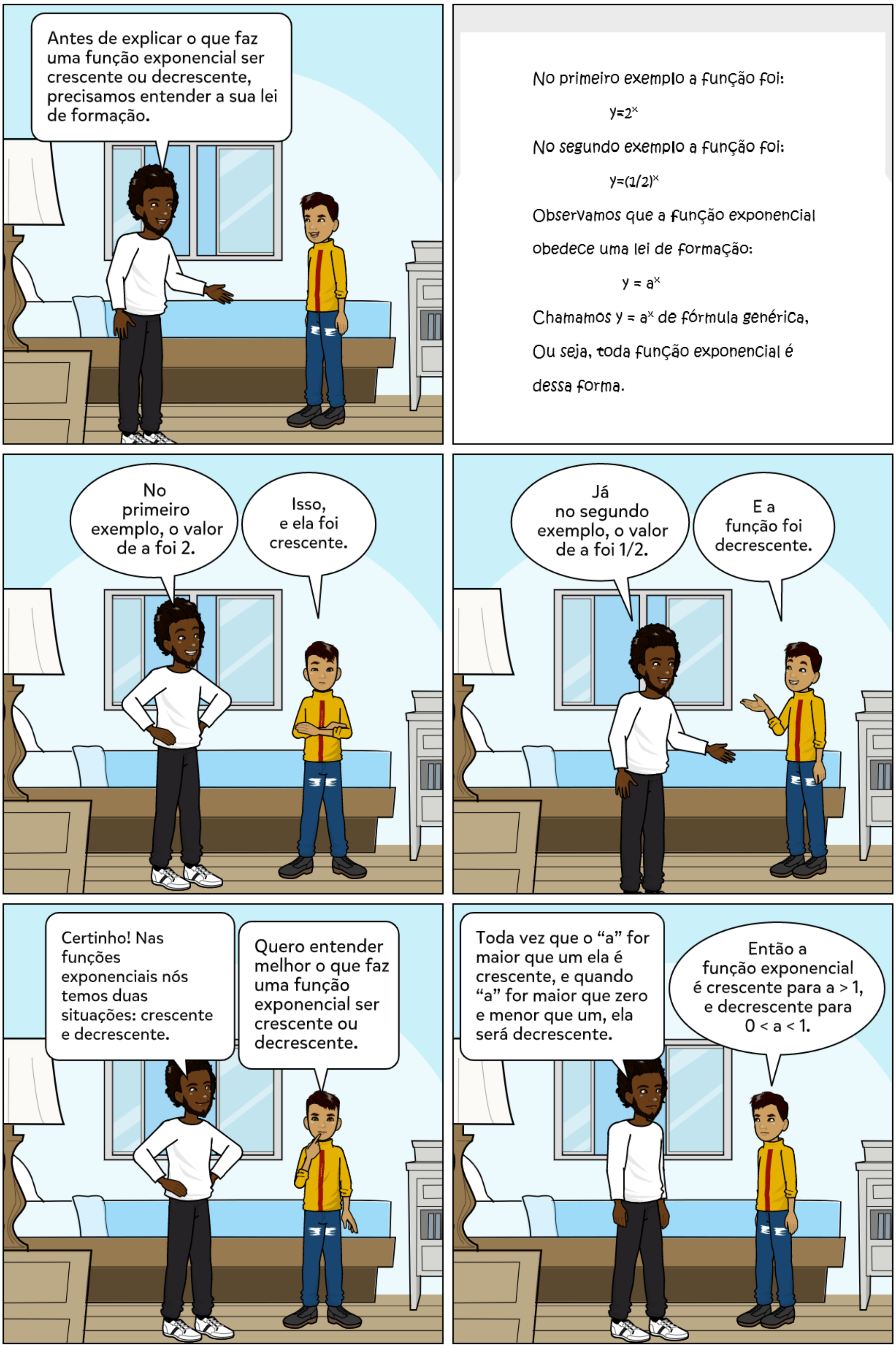
Apresentar para os alunos as HQs: Função exponencial: crescente e decrescente (Figura 4.14) e O que faz a função ser crescente ou decrescente (Figura 4.15) que seguem abaixo:

Figura 4.14: HQ - Função Exponencial: crescente e decrescente



Fonte: Texto elaborado pelo autor/ Ilustração do *site* Pixton.

Figura 4.15: HQ - O que faz a função ser crescente ou decrescente



Fonte: Texto e gráficos elaborado pelo autor/ Ilustração do *site* Pixton.

Após a apresentação, discutir as questões:

1. Quais as condições de existência para essa lei de formação?
2. Como é o formato do gráfico de uma função exponencial?
3. De que maneira comporta-se o gráfico de uma função exponencial crescente?
4. E decrescente?
5. Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas?
6. Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas? Por quê?

Espera-se que os alunos ratifiquem a lei de formação $y = a^x$ para toda função exponencial, com gráfico no formato de uma curva situada nos quadrantes 1 e 2 no plano cartesiano, além disso, crescente para os casos de $a > 0$ e, consequentemente, decrescente quando $0 < a < 1$, além disso que o ponto (0,1) é a intersecção do mesmo com o eixo das ordenadas. Com relação ao eixo das abscissas, o aluno deverá perceber que não existe nenhum ponto de intersecção, visto que não é possível ter $y = 0$.

Uma provável dificuldade nessa proposta é o aluno estranhar um pouco o formato de apresentação do conteúdo utilizando histórias em quadrinhos, geralmente são expostos de maneira expositiva no quadro demonstrando a lei de formação, as características, crescente ou decrescente, formato do gráfico, seguido pela aplicação dos exercícios.