Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Júlio Ribeiro de Carvalho

Cálculo Numérico de Raízes e sua Aplicação no Ensino Básico

Belo Horizonte
2022

Júlio Ribeiro de Carvalho

CÁLCULO NUMÉRICO DE RAÍZES E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Carlos Magno Martins Cosme

Banca Examinadora
Carlos Magno Martins Cosme
Weversson Dalmaso Sellin
Pedro Henrique Pereira Daldegan
Luciano Coutinho dos Santos

Belo Horizonte
2022

Carvalho, Júlio Ribeiro de
C331c Cálculo numérico de raízes e sua aplicação no ensino básico / Júlio Ribeiro de Carvalho. – 2022.
89 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Carlos Magno Martins Cosme.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Cálculos numéricos – Teses. 2. Educação básica – Teses. 3. Métodos interativos (Matemática) – Teses. 4. Computação – Matemática – Teses.
I. Cosme, Carlos Magno Martins. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 519.6

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Júlio Ribeiro de Carvalho

CÁLCULO NUMÉRICO DE RAÍZES E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 26 de maio de 2022.

Júlio Ribeiro de Carvalho
(Autor)

Carlos Magno Martins Cosme
(Orientador)

Belo Horizonte
2022

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu filho, meu amigão, e à minha esposa por ter me incentivado a caminhar para frente sempre!

Agradecimentos

Agradeço em especial ao meu orientador Carlos Magno, pois quando não acreditei em mim mesmo ele dedicou seu precioso tempo para me encorajar a continuar meu trabalho. Agradeço à minha turma de colegas e amigos do PROFMAT pela extrema doação e competência, em especial ao amigo Thiago Serafim, que além de um aluno brilhante é um ser humano fantástico que me ajudou muito durante todo o curso. Agradeço a todos os professores do curso, a Deus e a todos que torceram por mim!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Considerando a importância do Cálculo Numérico como ferramenta matemática, neste trabalho estudamos algumas das principais técnicas para aproximação de raízes de funções reais e exploramos sua aplicação para o ensino desse tema na Educação Básica (EB). Após a teorização de três dos principais métodos numéricos para cálculo de raízes de funções reais, exploramos algumas de suas potencialidades para aplicação em sala de aula da EB. Para isso, além de lançarmos mão de ambientes informatizados na construção das aulas, levamos em conta habilidades relacionadas ao pensamento computacional sob a perspectiva da BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Depois, analisamos um recorte de produções do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), com o intuito de investigar como esse programa de pós-graduação produz para a EB, focando no tema do cálculo de raízes de funções e técnicas numéricas de aproximação. Por fim, apresentamos nosso produto final, uma proposta de Sequência Didática, composta por planos de aula que trabalham habilidades relacionadas ao pensamento computacional através de ambientes informatizados e concluímos que as atividades compostas têm relevância para trazer o assunto Cálculo Numérico para a sala de aula da EB.

Palavras-chave: Cálculo Numérico. Educação Básica. Métodos Iterativos. Pensamento Computacional.

Abstract

Considering the importance of Numerical Calculus as a mathematical tool, in this paper we study some of the main techniques for approximating roots of real functions and explore their application for teaching this subject in Basic Education (BE). After the theorization of three of the main numerical methods for calculating roots of real functions, we explore some of their potential for application in the BE classroom. For this, besides using computer environments in the construction of the classes, we took into account skills related to computational thinking from the perspective of the NCCB (National Common Curriculum Base). Then, we analyze a selection of productions the PROFMAT (Professional Master in Mathematics in National Network), in order to investigate how this post-graduate program produces for the BE, focusing on the topic of calculus of function roots and numerical approximation techniques. Finally, we present our final product, a proposal for a Didatic Sequence, composed of lesson plans that work as skills related to computational thinking through computerized environment. We conclude that the composite activities have relevance to bring the subject of Numerical Calculus to the BE classroom.

Keywords: Numerical Calculus. Basic Education. Iterative Methods. Computational Thinking.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Uma das características do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), programa de pós-graduação onde se insere este trabalho, é o de que a escolha do tema e elaboração do projeto de conclusão de curso se dá no segundo e derradeiro ano. No nosso caso particular, o orientador foi escolhido antes mesmo de se ter muita clareza sobre o tema de pesquisa.

Somente após algum tempo definimos que dissertar sobre "Métodos Iterativos para o cálculo ou aproximação de raízes" teria grande potencial tanto para o estudo quanto para o ensino de Matemática, e portanto encontramos nossa direção e o início de uma série de desafios.

Ainda mais considerando que o orientando e principal autor deste trabalho, apesar de professor de Matemática da Educação Básica (EB) há mais de duas décadas, tanto de cursos regulares quanto de pré-vesrtibulares, não teve em sua formação acadêmica um curso de cálculo, que, de certa maneira, forma a base da teoria Matemática aqui apresentada. Para completar o desafio, sua graduação em Ciências com Habilitação em Matemática havia sido completada em 2001, próximo de quando começou a lecionar.

Assim, a pesquisa que se materializou nesta dissertação cumpre o papel de aprofundar os conhecimentos de um experiente professor de Matemática da EB e também o de fazê-lo refletir sobre sua prática docente.

Então, após algumas reuniões, decidimos abordar aqui o funcionamento de três métodos iterativos para se calcular raízes de funções reais e, como produto final, apresentamos uma proposta de Sequência Didática com atividades para aplicação de dois desses métodos na EB. Os métodos estudados e apresentados são, em ordem, Método da Bissecção, Método do Ponto Fixo e o Método de Newton.

Considerando a função principal dos métodos abordados, exploramos tanto na composição do trabalho quanto na proposta educacional, o cálculo aproximado de raízes de funções reais, especialmente de funções cujas raízes sejam números irracionais, raízes de polinômios de graus maiores ou iguais a três e de funções mais complexas, como logarítmicas, exponenciais ou ainda uma composição dessas, podem ser aproximadas por métodos iterativos.

Dentro deste contexto, o estudo de Métodos Iterativos, o uso de tecnologias ganhou destaque naturalmente, seja para esboçar o gráfico de uma função, facilitar o cálculo de alguns valores ou para levantar conjecturas acerca de sua convergência. Assim, consideramos relevante na composição da proposta de Sequência Didática levar em conta atividades para a EB que lancem mão de ambientes informatizados, especialmente através de planilhas de cálculo e do *software* GeoGebra.

Definido o objetivo final, o de criar atividades que envolvam o cálculo de raízes para a EB através de ambientes informatizados, habilidades relacionadas ao pensamento computacional emergiram também de forma natural, o que neste contexto se dá explorando-se maneiras como o computador pode aproximar raízes. Adiantando a discussão do Capítulo 3, "Pensamento Computacional no Ensino de Matemática", destacamos que pensamento computacional "É a maneira na qual pessoas pensam, e não os computadores", como afirmam Barcelos e Silveira no artigo "Pensamento Computacional e Educação Matemática: Relações para o Ensino de Computação na Educação Básica" [1]. Dito de outra forma, é a maneira como nós usamos os computadores para resolver problemas, o que envolve processos e tomadas de decisão que não são automáticos.

Compondo as atividades, percebemos que o uso dos Métodos Iterativos na sala de aula possibilita a transversalidade, ou seja, através deles pode-se trabalhar habilidades de várias áreas distintas dentro da própria Matemática. Para ilustrar, podemos considerar o problema do cálculo da raiz da função $f(x) = p - x^2$, onde p é um número primo. No Capítulo 4 vamos sugerir o uso de métodos iterativos para resolver o caso particular para $p = 11$, o que nos dá como resultado tanto uma aproximação para uma raiz da função f, quanto uma aproximação para o irracional $\sqrt{11}$, possibilitando o estudo de temas como primalidade, irracionalidade e cálculo de raízes de funções reais.

Entretanto, antes de abordarmos o tema do ponto de vista de sua aplicação em sala de aula, nosso trabalho realiza o estudo dos métodos, apresentando a teoria Matemática necessária e as condições para a convergência de cada um, além de algoritmos para organizar sua implementação, apresentados no Capítulo 2. Os resultados se apoiam nos livros "Análise Numérica" [2], "Um curso de cálculo" [3] e "Fundamentos de Cálculo" [4].

E mesmo que durante todo o trabalho relacionamos os Métodos Iterativos e a Educação Básica, tal discussão ganha mais corpo no Capítulo 3, onde sob o viés da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), iniciamos uma discussão sobre o Pensamento Computacional no Ensino de Matemática, destacando a importância que ambientes informatizados podem ter nesse contexto.

Para ampliar a discussão, consideramos também no artigo "A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados" [5], que discute como ferramentas tecnológicas podem desempenhar um importante papel no ensino de Matemática, exemplificando algumas delas. Apoiamo-nos também na dissertação "A planilha como recurso didático" [6], que, como o nome sugere, explora potencialidades das planilhas eletrônicas por um professor de Matemática, e também na dissertação "Algoritmos como ferramenta no ensino de matrizes" [7], reforçando a discussão sobre a relação entre pensamento computacional e os métodos iterativos para cálculo de raízes.

Com o propósito de nos direcionar para a elaboração do produto final, a proposta de Sequência Didática, finalizamos o Capítulo 3 com uma análise de produções do PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

De modo mais específico, fazemos uma análise de cinco dissertações relacionadas ao cálculo numérico de raízes direcionada pelos questionamentos "quantas se embasam em referenciais da Educação e/ou Ensino de Matemática ?", "quantas propõem atividades para a EB?", " quantas aplicam alguma das atividades propostas?" e "quantas propõem atividades através de *softwares*?". Considerando o relativo baixo número de dissertações analisadas, nos apoiamos também no artigo "Criptografia na educação básica: um cenário das pesquisas do PROFMAT." [8], dos autores Serafim, Ferreira e Amorim, que analisaram pouco mais de cem dissertações do mesmo programa sob os mesmos direcionamentos. Dessa forma obtemos um recorte sobre a produção voltada para a EB desse programa, investigando o potencial impacto de seus produtos na sala de aula e guiando a construção do nosso trabalho.

Por fim, apresentamos nosso produto, a proposta de Sequência Didática, materializada no Capítulo 4. O tema do projeto foi escolhido, como dito, levando-se em conta o potencial de métodos iterativos para o ensino de Matemática, em particular na EB, de modo que para compor nossa proposta exploramos habilidades relacionadas ao pensamento computacional através de aproximação de raízes de funções reais.

2 Métodos Iterativos para o Cálculo de Raízes de Funções

O ensino sobre o cálculo de raízes de funções se inicia, segundo a BNCC [9], a partir do nono ano do Ensino Fundamental (EF), com equações lineares do tipo $ax + b = 0$. A resolução desse tipo de equação tem um caráter em geral mais intuitivo e um grau de complexidade relativamente pequeno, diferentemente do que pode ocorrer quando se resolve outros tipos de equações, como as quadráticas e logarítmicas, estudadas ao longo do Ensino Médio (EM) e cujas resoluções muitas vezes dependem de artifícios algébricos e assim de maior abstração. Ainda mais, suponha que desejássemos verificar se a função $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 3$ possui raízes reais. O que fazer se nesse caso não podemos recorrer à fórmulas diversas, como a fórmula de Bháskara para equações do segundo grau ou as relações de Girard?

Assim, o ponto central deste trabalho é o de se explorar equações cujas soluções não são triviais, apesar de existentes. Como é esperado que estudantes do EM já tenham desenvolvido habilidades relacionadas à resolução de variados tipos de equações, torna-se importante fazê-los notar também que algumas soluções não são tão diretas ou simples de se obter. Para citar mais um exemplo, é muito usado em atividades dessa etapa de ensino que $\log_{10} 2 \approx 0{,}30$. Pode ser interessante propor a resolução da equação $x = \log_{10} 2$ ou $10^x - 2 = 0$, criando-se um cenário propício para a relevância de se utilizar métodos iterativos para aproximação de raízes e explorando-se habilidades relacionadas ao pensamento computacional, fato que raramente é explorado na Educação Básica (EB).

Um caminho possível para se resolver ou se obter uma solução aproximada para as equações apresentadas é o que será abordado neste capítulo. Apresentaremos três métodos iterativos para o cálculo de raízes de funções, ou seja, métodos para solucionar equações ou para conseguirmos uma solução aproximada. Iniciaremos com o Método da Bissecção, depois o Método do Ponto Fixo e, por fim, o Método de Newton. Em cada caso apresentaremos a teoria Matemática que sustenta os resultados e respectivos algoritmos que sintetizam cada método.

Por algoritmo, consideramos o que sintetiza Burden e Faires, [2]:

> Um algoritmo é um procedimento que descreve, sem ambiguidades, uma sequência finita de passos a serem executados, em uma ordem específica. O objetivo do algoritmo é implementar um procedimento para resolver um problema ou obter uma solução aproximada para esse problema.

Apesar da complexidade teórica relacionada aos métodos iterativos que aqui estudaremos, eles têm um caráter mais geral, um apelo geométrico e um raciocínio algorítmico que permite uma abordagem também na EB. Pode-se, por exemplo, explorar como um *software* calcula as raízes de uma função como a do exemplo mostrado no primeiro parágrafo sem que exista uma fórmula para tal, a partir de um algoritmo preestabelecido.

E apesar de que os próprios métodos, como ferramentas matemáticas, são algoritmos que apresentam fórmulas como parte de seu procedimento, uma abordagem através de registros e cálculos em planilhas pode diminuir o tempo e energia que costumam demandar dos estudantes de forma a sobrar espaço para uma análise e melhor compreensão dessas fórmulas. Além do mais, algum *software* como o GeoGebra pode fornecer uma visualização geométrica de como tais métodos iterativos funcionam, exibindo cada aproximação do problema de acordo com o número de iterações.

Esse *software* tem a característica de ser intuitivo e não exigir muitos pré-requisitos para seu uso e pode ser baixado para computadores, *smartphones* ou *tablets* gratuitamente através do site https://www.geogebra.org/?lang=pt, e há também a opção de se usar o GeoGebra diretamente do navegador, sem precisar instalá-lo. Todos os gráficos exibidos aqui foram feitos com este *software*. Além disso o uso de planilhas eletrônicas apresenta-se como outra ferramenta de extrema importância para construção de pequenos comandos algorítmicos e para o cálculo das aproximações das raízes através das iterações propostas em cada um dos métodos a serem trabalhados aqui nesta dissertação. No Capítulo 3 aprofundaremos as discussões sobre como essas ferramentas podem ser interessantes na prática docente, analisando-as também sob o ponto de vista da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.1 Teoria Matemática Preliminar

Todos os três métodos que estudaremos neste trabalho dependem de propriedades de funções contínuas e dois deles, o Método do Ponto Fixo e o Método de Newton, exigem que as funções sejam diferenciáveis em um certo intervalo. Apesar de o Método do Ponto Fixo não apresentar diretamente a diferenciabilidade no seu algoritmo, tal propriedade é decisiva para garantir a unicidade de ponto fixo no intervalo e também sua convergência. Já o método de Newton depende diretamente da derivada da função em um certo intervalo. Recomendamos os livros "Análise numérica "[2] e "Um curso de cálculo" [3] como referência para o que apresentaremos na sequência.

De maneira informal, a continuidade garante que à medida que nos aproximamos de um ponto x_0 no domínio da função f, os valores da imagem se aproximam de $f(x_0)$ tanto quanto se queira. De um modo mais rigoroso, temos a seguinte definição.

Definição 2.1 (Continuidade): Dizemos que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in D$ se:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

2. $\lim\limits_{x \to a} = f(a)$.

Caso uma das condições anteriores não seja satisfeita, dizemos que $f(x)$ é descontínua no ponto a.

A primeira das condições da Definição 2.1 implica em que os limites laterais sejam iguais, ou seja

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Para melhor compreensão da continuidade, vamos abordar um exemplo de uma função que não satisfaz a segunda das condições.

Considere a função $g(x)$ definida por sentenças da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, \quad \text{se} \quad x \neq 2 \\ 3, \quad \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

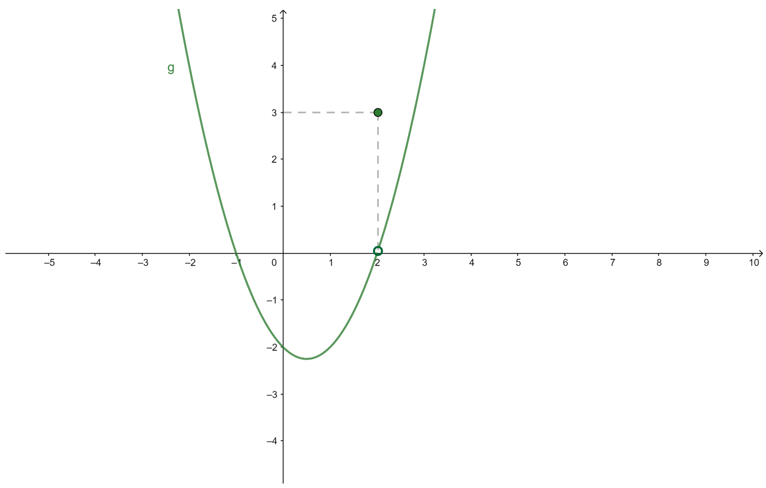
É possível demonstrar que os limites laterais dessa função quando x se aproxima de

2 são tais que:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^+} g(x) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

Entretanto, temos que $g(2) = 3$, ou seja, a função é **descontínua** em $a = 2$.

Figura 2.1: Descontinuidade no ponto $x_0 = 2$ da função $g(x)$.



Fonte: Criado pelo autor através do GeoGebra.

Para qualquer outro ponto do domínio de g é possível mostrar que há continuidade, apesar de não se tratar sempre de uma tarefa simples. Usando que todo monônio do tipo $h(x) = x$ é contínuo em $\mathbb{R}$ e que o produto de funções contínuas é também contínua, podemos facilitar muitas dessas demosntrações. Obtemos, por exemplo, que todo polinômio é contínuo em $\mathbb{R}$.

Notemos que a continuidade é uma propriedade definida ponto a ponto. Entretanto, aplicações da continuidade acontecem em casos em que a função é contínua em um intervalo de um domínio. Como veremos, as próprias funções aqui estudadas nos diversos exemplos de aplicações dos métodos iterativos precisam ser contínuas em intervalos reais. Assim, é natural a seguinte definição.

Definição 2.2 (Continuidade em um intervalo real): Se a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos x de um intervalo I, diremos que f é contínua em I ou, quando não houver ambiguidades, diremos simplesmente que f é contínua.

A diferenciabilidade de uma função nos garante que pelo menos em um intervalo ela se comporta "suavemente", ou seja, não há surpresas como mudanças abruptas no seu comportamento. De maneira mais formal, segue a definição de derivada.

Definição 2.3 (Derivada): Considere a função $f(x)$ de domínio D. Dizemos que f é derivável ou diferenciável em $x \in D$ se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que:

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Existindo o limite acimda definido, escreveremos $f'(x) = L$. Se a função f for diferenciável em todo um intervalo aberto D, diremos que f é derivável em D.

É possível mostrar que toda função derivável em D é também contínua em D mas a volta nem sempre é verdade, ou seja, uma função contínua em D não é necessariamente derivável neste intervalo. Um exemplo é a função $f(x) = |x|$, que é contínua em $\mathbb{R}$, porém não é derivável no ponto $x = 0$.

Os próximos três lemas nos auxiliam na determinação de derivadas de polinômios.

Lema 2.4: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis em D. Se $s(x) = f(x) + g(x)$, então $s'(x) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Demonstração. Como, por hipótese, as funções f e g são deriváveis, temos que existem números reais L e M tais que

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad M = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Assim:

$$s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}.$$

Do último quociente, temos $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ e assim:

$$s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = L + M.$$

Então $s'(x) = f'(x) + g'(x)$, finalizando a prova. □

Ou seja, provamos que a derivada da soma de duas funções em um ponto é a soma das derivadas de cada uma dessas funções neste mesmo ponto. Vamos também demosntrar que a derivada do produto de uma constante e uma função é o produto dessa contante com a derivada da função no ponto.

Lema 2.5: Seja f derivável em x e uma constante $a \in \mathbb{R}$. Então $(af(x))' = af'(x)$

Demonstração. Seja $g(x) = af(x)$ e $L = f'(x)$. Então temos:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{af(x+h) - af(x)}{h}.$$

Como $\frac{af(x+h)-af(x)}{h} = a \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, concluímos que $g'(x) = a \cdot L$, e portanto $(af(x))' = af'(x)$. $\square$

Seguimos agora para o último lema necessário para demonstrar a derivada de um polinômio.

Lema 2.6: Seja $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo x real.

Demonstração. Para demonstrar o resultado vamos inicialmente organizar o quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ou seja, $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Para isso, usando o Binômio de Newton para expandir $(x+h)^n$, temos:

$$(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x)^{n-i} h^i$$

$$(x+h)^n = x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (x)^{n-i} h^i = x^n + h \cdot S.$$

Assim,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x^n + h \cdot S - x^n}{h} = S.$$

Agora, notemos que

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (x)^{n-i} h^i}{h}$$

pode ser reescrito como

$$S = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (x)^{n-i} h^{i-1} = \binom{n}{1} x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} (x)^{n-i} h^{i-1} = nx^{n-1} + Ph,$$

onde $Ph = \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} (x)^{n-i} h^{i-1}$, com $P \in \mathbb{R}$. Então:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+Ph=nx^{n-1}+P\cdot 0$$

de onde concluímos que $f'(x)=nx^{n-1}$, encerrando a demonstração.

□

Unidos, os três resultados anteriores, 2.4, 2.5 e 2.6, facilitam o cálculo da derivada de um polinômio, o Teorema 2.7, além de servir como um bom exemplo de que trabalhar com as propriedades de derivadas é mais fácil do que diretamente com a definição envolvendo o limite.

Antes de demonstrá-lo, precisamos mostrar que a derivada de uma constante real a é igual a 0. Mas, fazendo $f(x)=a$ e aplicando a definição de derivada, temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h}=0.$$

Teorema 2.7: Seja um polinômio $p(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_2x^2+c_1x+c_0$, onde cada c_i é uma constante real.

Demonstração. Como a derivada da soma é a soma das derivadas, de acordo com o Lema 2.4, podemos derivar cada parcela c_ix^i. Para $1\le i\le n$, aplicando os Lemas 2.5 e 2.6, obtemos ic_ix^{i-1}, e para a parcela constante c_0, sua derivada é nula. Assim

$$p'(x)=nc_nx^{n-1}+(n-1)c_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2c_2x+c_1,$$

finalizando a demomnstração. □

Já o seguinte resultado, o Teorema 2.8, dá condições para que uma função contínua em um certo intervalo possua ao menos uma raiz real. Assim, trata-se de um importante primeiro resultado, pois nos dá condições suficientes para iniciar as iterações através do Método da Bissecção, ou seja, garante a existência de uma ou mais raízes reais. Além do mais, dele resultam outros importantes teoremas. Para demonstrá-lo, usaremos a propriedade dos intervalos encaixantes, a qual enunciaremos a seguir mas não demonstraremos, e o leitor interessado poderá consultar o apêndice 1 do livro do Guidorizzi, "Um Curso de Cálculo" [3].

Teorema 2.8 (Intervalos encaixantes): Sejam a_n e b_n sequências tais que:

1. $[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \cdots$.

2. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - a_n| < \epsilon$.

Então existe um único real c tal que c pertence a todos os intervalos $[a_n,b_n]$, ou seja, $a_n \leq c \leq b_n$.

Teorema 2.9 (Teorema de Bolzano): Considere a função $f(x)$, contínua no intervalo fechado $[a,b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração. Como por hipótese $f(a) \cdot f(b) < 0$, então temos ou $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ ou $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, e assim podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$. Seja b_1 o ponto médio de $[a_0, b_0]$. Como $f(b_1) \geq 0$ ou $f(b_1) \leq 0$, podemos supor também sem perda de generalidade que $f(b_1) \geq 0$. Denotando a por a_1, temos $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) \geq 0$. Seja a_2 o ponto médio de $[a_1,b_1]$ e suponha, novamente sem perda de generaliade, $f(a_2) \leq 0$. Denotando por b_2, temos $f(a_2) \leq 0$ e $f(b_2) \geq 0$. Continuando as construções dessa forma, criamos intervalos tais que

$$[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \cdots$$

e também que, dado um real $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - a_n| < \epsilon$, satisfazendo as propriedades de intervalos encaixantes, O Teorema 2.8. Além do mais, $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim existe um único elemento c que pertence a $[a_n,b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então ou $f(c) \geq 0$ ou $f(c) \leq 0$.

Supondo $f(c) > 0$, temos que $a_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $f(a_n) \leq 0$, de modo que $|a_n - c| \geq r$, onde $r \in \mathbb{R}$. Mas, como c pertence a todos intervalos $[a_n,b_n]$, devemos ter $|b_n - c| < \epsilon_1$ a partir de um n_1, e também, como já mostrado, $|a_n - b_n| < \epsilon_2$, a partir de um n_2. Portanto

$$|a_n - b_n| + |b_n - c| < \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Da desigualdade triangular temos

$$|(a_n - b_n) + (b_n - c)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c| \Rightarrow |a_n - c| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c|.$$

Tome, agora, $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Para todo $n > N$, onde N é o maior entre n_1 e n_1, temos:

$$|a_n - c| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = r \Rightarrow |a_n - c| < \epsilon$$

o que é absurdo. Supondo $f(c) < 0$ chegaríamos em um absurdo de forma análoga. Portanto, concluímos que $f(c) = 0$, finalizando a prova. □

Do resultado anterior, segue como corolário outro importante teorema, o Teorema do Valor Intermediário, 2.10.

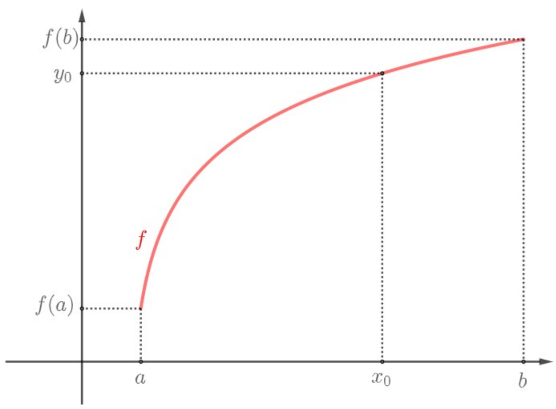
Teorema 2.10 (Teorema do Valor Intermediário - TVI): Considere $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Se y_0 é tal que $f(a) < y_0 < f(b)$, então existe ao menos um $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Demonstração. Seja a função $g(x) = f(x) - y_0$. Como f é contínua em $[a,b]$, então g também é contínua neste mesmo intervalo, pois g é a soma de f com a constante $-y_0$. Além do mais, temos que se $g(x) < 0$ então $f(x) < y_0$ e se $g(x) > 0$ então $f(x) > y_0$. Como por hipótese $f(a) < y_0 < f(b)$, então $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$. Como $g(a) \cdot g(b) < 0$, podemos usar o Teorema de Bolzano para esta função e afirmar que existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$. Logo

$$g(c) = f(c) - y_0 \Rightarrow 0 = f(c) - y_0 \Rightarrow f(c) = y_0.$$

Ou seja, existe $x_0 = c$, x_0 entre a e b, tal que $f(x_0) = y_0$. □

Figura 2.2: Exemplo do TVI para uma função contínua f.



Fonte: Criado pelo autor.

Outro conceito importante no estudo dos métodos iterativos é o de convergência de sequências. Uma vez mais, optamos por não defini-lo aqui, reportando o leitor à referência Fundamentos de Cálculo [4] para mais detalhes.

Quando tratarmos sobre a convergência dos métodos aqui estudados, estaremos justamente interessados em saber quando e como as sequências de números reais produzidas por cada iteração irão convergir para as raízes procuradas.

2.2 O Método da Bissecção

Agora que já temos o necessário para apresentarmos o Método da Bissecção, iniciaremos a discussão sobre seu funcionamento. Trata-se de um procedimento que objetiva aproximar ou encontrar uma raiz de uma função contínua f em um intervalo $[a,b]$, caso exista. Inicialmente precisamos investigar se f possui raiz neste intervalo, e o fazemos através do Teorema de Bolzano. Assim, inicia-se o método de fato, baseado no resultado do teorema aplicado.

A primeira iteração é feita verificando-se se o ponto médio de $[a,b]$ é uma raiz de f ou quão próximo está dela. Já na iteração seguinte os procedimentos são repetidos, mas desta vez com um subintervalo de $[a,b]$, e assim sucessivamente. Basicamente, trata-se uma iteração que constrói intervalos cada vez menores contidos em um intervalo inicial, a partir de pontos médios formados pelos extremos de cada um dos intervalos, garantindo que em cada um desses intervalos haja uma mudança de sinal da função. A iteração se encerra seguintes casos: ou quando a raiz for algum dos pontos médios ou quando o número de passos do processo chegue a um limite predeterminado ou ainda caso cheguemos a uma aproximação também predeterminada.

Com mais detalhes, se f é uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o Teorema de Bolzano nos garante que f possui ao menos uma raiz real entre os pontos a e b, que denotaremos por p. Suponha que queiramos estimar o valor da raiz em até n passos. O presente método usa como primeira estimativa para p a média aritmética simples entre a e b, ou seja, o ponto $p_0 = \frac{a+b}{2}$. Caso $f(p_0) = 0$, paramos e $p = p_0$. Caso $f(p_0) \neq 0$, verificamos se $f(p_0) > 0$ ou $f(p_0) < 0$. Suponha $f(p_0) < 0$. Então, novamente pelo Teorema de Bolzano, temos que existe raiz de f entre p_0 e b. Logo, a próxima estimativa para p será $p_1 = \frac{b+p_0}{2}$. Caso $f(p_1) = 0$, então paramos o procedimento. Caso não, suponhamos $p_1 > 0$. Assim, existe raiz da função entre p_1 e p_0.

Seja, então, $p_2 = \frac{p_1+p_0}{2}$. Podemos ter $f(p_2) = 0$ e assim o processo é interrompido, pois chegamos a uma raiz de f, ou então, suponhamos, $f(p_2) > 0$. Assim existe raiz da função f entre p_2 e p_0.

Continuamos essa iteração até p_n, completando n passos, podemos ter $f(p_n) = 0$ ou $f(p_n) \neq 0$, de modo que ou encontramos p ou encontramos uma aproximação para p.

Podemos nos perguntar se esse processo sempre convergirá a uma solução. Para responder a esta pergunta vamos primeiramente analisar uma relação entre os intervalos construídos.

Seja I_k o k-ésimo intervalo construído e $|I_k|$ o comprimento de I_k, para $k \geq 0$. No nosso exemplo temos $I_0 = [a,b]$, $I_1 = [p_0,b]$, $I_2 = [p_0,p_1]$, $I_3 = [p_0,p_2]$, $\ldots$ e $|I_0| = b - a$, $|I_1| = b - p_0$, $|I_2| = p_1 - p_0$, $|I_3| = p_2 - p_0$, $\ldots$, $|I_k| = p_{k-1} - p_w$ $\ldots$, onde $w \in \mathbb{N}$ e $w < k-1$.

De um modo mais geral, como os intervalos são construídos através dos pontos médios de intervalos consecutivos, cada intervalo tem a metade do comprimento do intervalo anterior, ou seja

$$|I_k| = \frac{|I_{k-1}|}{2^1} = \frac{|I_{k-2}|}{2^2} = \cdots = \frac{|I_{k-k}|}{2^k} = \frac{|I_0|}{2^k} = \frac{b-a}{2^k}.$$

Como a raiz $p \in I_k$, depois de k iterações encontramos p_k tal que $|p - p_k| \leq |I_k|$. Em outras palavras:

$$|p - p_k| \leq \frac{b-a}{2^k}.$$

Dado um $\epsilon > 0$, sempre é possível escolher $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2^K}{b-a} \geq \frac{1}{\epsilon}$ e assim, para todo $k > K$, temos $\frac{2^k}{b-a} > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{b-a}{2^k} < \epsilon$. Portanto temos que

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p.$$

O método descrito anteriormente para a construção da sequência p_k é o **Método da Bissecção**. Provamos assim o seguinte teorema.

Teorema 2.11: Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o Método da Bissecção gera uma sequência que converge para um p tal que $f(p) = 0$.

Vamos agora organizar os passos do presente método em um algoritmo.

Inicialmente alimentamos o algoritmo com os dados necessários, a entrada das

Algoritmo 2.2.1 Algoritmo da Bissecção

Entrada: Uma função contínua f; dois reais distintos a e b tais que $f(a) \cdot f(b) < 0$; uma tolerânia ϵ; o número máximo de iterações N.

Saída: Uma aproximação para a raiz p.

```
k ← 1; FA ← f(a)
para (1 ≤ k ≤ N) faça
    p ← (a+b)/2
    FP ← f(p)
    se FP = 0 então
        retorna FIM. A raiz é p.
    senão
        se |b−a|/2 < ϵ então
            retorna FIM. A raiz aproximada é p.
        senão
            k ← k + 1
            se FA · FP>0 então
                a ← p   e   FA ← FP
            senão
                b ← p
            fim se
        fim se
    fim se
fim para
retorna O procedimento falhou após N iterações.
```

informações iniciais, ou seja, a função f, o intervalo $[a,b]$, além da tolerância ϵ e do número máximo de iterações N. Claro que a função tem de ser contínua no intervalo escolhido de modo que possamos usar o Teorema de Bolzano. A saída contempla os resultados esperados, que são ou uma raiz p ou sua aproximação, ou ainda uma mesagem de erro decorrente do fato de que a quantidade de passos estipulados não produziu uma aproximação satisfatória como resultado.

Para melhor ilustrar os outros passos, vamos apresentá-los através do Exemplo, 2.2.1.

Exemplo 2.2.1: Imaginando uma abordagem na Educação Básica, pode ser mais interessante aproximar a raiz do exemplo em questão do que usar as Relações de Girard para obtê-la exatamente.

Seja $f(x) = x^3 - 5x - 5$, $a = 1$, $b = 4$ e $\epsilon = 0{,}2$. Perceba que $f(1) \cdot f(4) < 0$. Podemos determinar o número mínimo de iterações usando a desigualdade seguinte, que advém da discussão da convergência do presente método, ou seja:

$$\frac{4-1}{2^N} \leq 0{,}2 \Rightarrow \frac{3}{2^N} \leq \frac{2}{10} \Rightarrow \log 3 - N \log 2 \leq \log 2 - 1 \Rightarrow N \geq \frac{1 + \log 3 - \log 2}{\log 2},$$

onde *log* está na base 10. Como $\log 2 \approx 0{,}3$ e $\log 3 \approx 0{,}48$, temos que $n \geq 3.93$, de modo que o número mínimo para obtermos a aproximação desejada é $n = 4$.

Então, no passo 1, o contador k, que representa a quantidade de iterações recebe o valor inicial 1 e FA recebe o valor $f(1) = -9$.

Já no segundo passo é instruído que os comandos seguintes, até a linha 19, serão seguidos desde que k não exceda 10. Na linha 3 temos que p recebe o valor $\frac{1+4}{2} = 2{,}5$ e em seguida, na linha 4, a variável FP recebe o valor de $f(2{,}5) = -1{,}875$.

Como $f(2{,}5) \neq 0$ e o tamanho do intervalo ainda é maior que o erro predefinido, ou seja, $\frac{b-a}{2} = 1{,}5 > 0{,}2$, então vamos para o procedimento da linha 11. Neste ponto, k recebe mais uma unidade, ou seja, estamos nos preparando para a segunda iteração.

Depois verificamos que $f(1) \cdot f(2{,}5) > 0$ e que $f(2{,}5) \cdot f(4) < 0$ e assim o intervalo $[2{,}5{,}4]$ satisfaz o Teorema de Bolzano. Então p recebe o valor de a e todo o procedimento é repetido a partir da linha 2, agora com $k = 2$.

Para simplificar, sintetizamos os passos na seguinte tabela:

k	a	b	$(b-a)/2$
1	1	4	1,5
2	2,5	4	0,75
3	2,5	3,25	0,375
4	**2,5**	**2,875**	**0,1875**
5	2,5	2,6875	0,09375

Tabela 2.1: Sequência gerada no Exemplo 2.2.1.

Perceba que a cada novo valor de k os valores das variáveis a e b são atualizados de modo que no k-ésimo passo tenhamos o intervalo I_k da iteração. Perceba também que na quarta linha o valor de $\frac{b-a}{2}$ é menor que $\epsilon = 0{,}2$ e assim o processo é finalizado. Ou seja, conseguimos uma aproximação de p com quatro passos. Note que, nas iterações anteriores à quarta, $\frac{|b-a|}{2} > \epsilon$ e portanto as iterações continuam. Na quarta iteração temos $\frac{|b-a|}{2} < \epsilon$, finalizando as repetições.

Para finalizarmos esta seção, vamos introduzir mais uma aplicação usando o Método da Bissecção. Vamos aproximar a raiz de $f(x) = \mathrm{e}^x - 3$, o que será abordado no

Exemplo2.2.2.

Para realizar as aproximações deste exemplo e outros que virão, usamos o *software* de computação numérica *Scilab* e com o intuito de dimimuir o tempo gasto com demasiados cálculos. De certa forma colocamos em prática parte das discussões que serão tratadas no Capítulo 3, quando usamos a tecnologia para facilitar cálculos, testar/conjecturar resultados. Esta aplicação está disponível para *download* para computadores no link https://www.scilab.org/download/scilab-6.1.1. Uma leve noção de programação é necessária para utilizá-lo.

Exemplo 2.2.2: Traremos neste exemplo uma função exponencial que usualmente é explorada no Ensino Médio. Pode ser interessante tratar o problema de encontrar ou aproximar sua raiz de maneira independente do logaritmo.

Considere a função $f(x) = \mathrm{e}^x - 3$. Tomando $a = 0$ e $b = 2$, notemos que $f(0) \cdot f(2) < 0$ e assim, pelo Teorema de Bolzano 2.9, temos que existe uma raiz em [0,2]. Considerando uma aproximação de no mímino $\epsilon = 0.001$, temos os resultados na Tabela 2.2. Perceba que nesta tabela estamos exibindo para cada aproximação p_k a sua imagem, ou seja $f(p_k)$.

Para determinar o número mínimo de iterações, usamos novamente que $\frac{b-a}{2^N} \leq \epsilon$ e assim

$$\frac{2-0}{2^N} \leq 0.001 \Rightarrow 2^{1-N} \leq 10^{-3}.$$

Da desigualdade anterior temos:

$$\log(2^{1-N}) \leq \log(10^{-3}) \Rightarrow (N-1) \cdot \log 2 \geq 3$$

e, por fim, $N \geq \frac{3}{\log 2} + 1$. Como $\log 2 \approx 0.30$, temos que $N \geq 11$.

Para provar a unicidade da raiz podemos argumentar que a equação $\mathrm{e}^x - 3 = 0$ possui apenas uma solução, dado que a função e^x é injetiva, ou seja, existe apenas um $p \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{e}^p = 3$ e assim apenas um p tal que $\mathrm{e}^p - 3 = 0$.

O Método da Bissecção tem sua vantagem na relativa simplicidade e na garantia de que nossas iterações convergem para um resultado, e assim, do ponto de vista didático, tem potencial abordagem na EB, de modo que uma proposta nesse sentido é apresentada no Capítulo 4. Porém, agora sob um viés técnico, a convergência para uma solução ou

k	p_k	$f(p_k)$	$\frac{\lvert p_k - p_{k-1}\rvert}{2}$
1	1	-0.281718	1
2	1.5	1.48169	0.5
3	1.25	0.490343	0.25
4	1.125	0.0802168	0.125
5	1.0625	-0.106404	0.0625
6	1.09375	-0.014551	0.03125
7	1.10938	0.032463	0.015625
8	1.10156	0.008863	0.0078125
9	1.09766	-0.002867	0.00390625
10	1.09961	0.002993	0.00195313
11	1.09863	$6.1572 \cdot 10^{-5}$	0.000976563

Tabela 2.2: Aproximando a raiz de $f(x) = \mathrm{e}^x - 3$ através do *Scilab*

aproximação pode ser muito lenta, a depender da função, como será exemplificado na Seção 2.5. Para mais detalhes, recomendamos a consulta ao livro Análise Numérica [2].

2.3 Método do Ponto Fixo

Nesta seção analisaremos uma maneira de se encontrar raízes de funções contínuas a partir do Método do Ponto Fixo. Um ponto fixo de uma função é um ponto tal que o valor da função é o mesmo valor da abscissa aplicada. Mais formalmente temos a definição que se segue.

Definição 2.12: Dizemos que p é um ponto fixo de uma função $g(x)$ se $g(p) = p$.

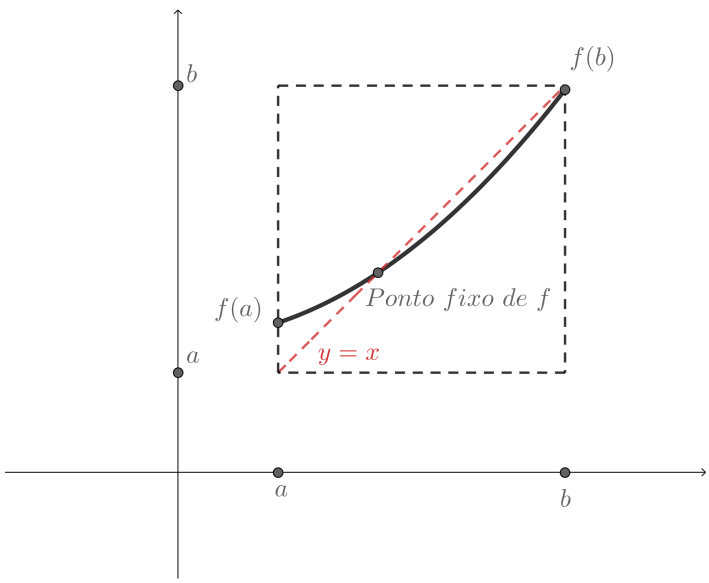
O ponto que mais nos interessa neste método é como ele se relaciona com a obtenção de raízes, o qual utilizaremos muitas vezes. Há mais de uma maneira de se obter tal relação. Seja $f(x)$ uma função com raiz p e $g(x)$ uma função com ponto fixo p. Então $f(p) = 0$ e $g(p) = p$ de modo que a função $h(x) = f(x) + g(x)$ também possui um ponto fixo em p, pois $h(p) = f(p) + g(p) = p$. Por outro lado, definindo uma função $t(x) = x - g(x)$, então $t(p) = 0$ e assim esta função possui uma raiz igual a p. Ou seja, podemos relacionar funções com pontos fixos e a resolução de problemas de aproximação de raízes. As definições de $h(x)$ e $t(x)$ não são únicas. Por exemplo, fazendo $h(x) = r \cdot f(x) + g(x)$, temos uma família de funções diferentes para cada r com ponto fixo em p, pois $h(p) = r \cdot f(p) + g(p) \Rightarrow h(p) = r \cdot 0 + p = p$, e fazendo $t(x) = r(x - g(x))$, temos $t(p) = r(p - g(p)) \Rightarrow t(p) = r(p - p) = 0$, ou seja, p é raiz de cada função t, para cada $r \in \mathbb{R}$.

A fim de se garantir a existência de pontos fixos para funções contínuas, precisaremos inicialmente mostrar o teorema que se segue.

Teorema 2.13 (Garantia da existência do ponto fixo): Se f é uma função contínua em $[a,b]$ cujas imagens pertencem ao intervalo $[a,b]$, então existe ao menos um ponto $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = p$.

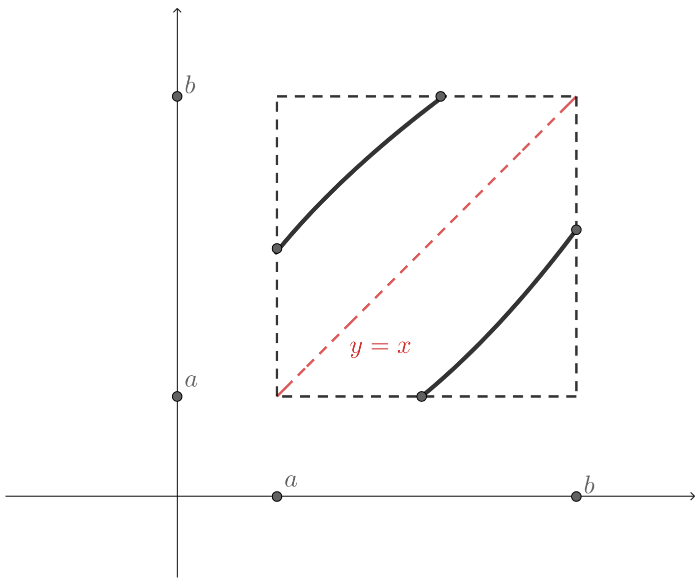
Demonstração. Considere uma função f contínua em $[a,b]$ tal que $a \leq f(x) \leq b$. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, então f tem um ponto fixo em a ou b, respectivamente. Suponha que não seja este o caso. Então $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Defina $g(x) = f(x) - x$. Então g é contínua em $[a,b]$, pois é uma soma de funções contínuas neste intervalo. Como $f(a) > a$ temos $f(a) - a > 0$ e assim $g(a) = f(a) - a > 0$, e, analogamente, como $f(b) < b$, $f(b) - b < 0$ e assim $g(b) = f(b) - b < 0$. Como $g(b) < 0 < g(a)$ então, pelo Teorema do Valor Intermediário 2.10, existe $p \in [a,b]$ tal que $g(p) = 0$. Mas assim $g(p) = f(p) - p = 0 \Rightarrow f(p) = p$. □

Figura 2.3: Existência do ponto fixo.



Fonte: Criado pelo autor.

Figura 2.4: Não existência do ponto fixo.



Fonte: Criado pelo autor.

No fim da argumentação anterior também poderíamos usar o Teorema de Bolzano para assegurar o resultado. Partindo de $g(b) < 0 < g(a)$ e do fato de g ser contínua, este teorema também garante a existência de $p \in [a,b]$ tal que $g(p) = 0$.

Se além da existência de um ponto fixo quisermos garantir também sua unicidade, precisaremos de mais hipóteses sobre a função f, como sua diferenciabilidade no intervalo (a,b). Vamos supor também que exista $f'(x)$ para todo $x \in (a,b)$. A partir disso provaremos os dois teoremas que se seguem. O primeiro, o Teorema de Rôlle, servirá como um lema para provarmos o seguinte, o Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.14 (Teorema de Rôlle): Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável em (a,b). Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Por ser contínua, a função f é limitada no intervalo $[a,b]$. Ou seja, existe $m \in [a,b]$ tal que $f(m)$ é máximo. Suponhamos inicialmente que $m \in (a,b)$. Então $f(x) \leq f(m)$ para todo $x \in [a,b]$. Então, se x é tal que $a \leq x < m$ temos que

$$\frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0$$

e se $m < x \leq b$ temos que

$$\frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0.$$

Então, quando $a \leq x < m$ teremos

$$\lim_{x \to m^+} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0,$$

e quando $m < x \leq b$ teremos

$$\lim_{x \to m^-} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0.$$

Ora, mas como por hipótese f é derivável em (a,b), os limites acima devem coincidir, e assim

$$\lim_{x \to m} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} = 0 \Rightarrow f'(m) = 0.$$

Agora, se $m = a$ ou $m = b$, então $f(m) = f(a) = f(b)$. Assim ou a função é constante ou existe n tal que $f(n)$ é mínimo no intervalo (a,b), pois f é limitada. Se f for constante, temos que $f(x) = c$ e como consequência $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ garantindo a existência de $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Se existir n tal que $f(n)$ é mínimo, a argumentação é análoga ao caso de m ser o máximo de f em $[a,b]$.

Em todos os casos fica provado que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. $\square$

Teorema 2.15 (Teorema do Valor Médio): Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Para provarmos o teorema, vamos construir uma função $g(x)$ a partir de $f(x)$ tal que g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rôlle, e assim garantiremos a existência de $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Fazendo

$$g(x) = f(x) - \frac{b - x}{b - a} f(a) - \frac{x - a}{b - a} f(b),$$

temos que g é contínua em $[a,b]$, pois é formada por produto e por soma de funções contínuas neste intervalo. Pelo mesmo motivo g é derivável em (a,b), de modo que podemos aplicar o Teorema de Rôlle. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Mas

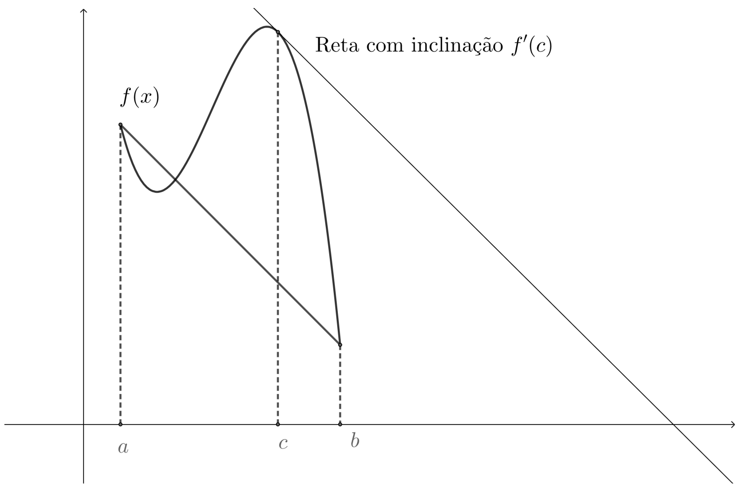
$$g'(x) = f'(x) + \frac{f(a)}{b - a} - \frac{f(b)}{b - a},$$

de modo que, para $x = c$, teremos

$$0 = f'(c) + \frac{f(a)}{b-a} - \frac{f(b)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

completando a demosntração. □

Figura 2.5: Teorema do Valor Médio.



Fonte: Criado pelo autor.

Agora podemos adicionar uma hipótese para garantir a unicidade do ponto fixo, como se segue.

Teorema 2.16 (Unicidade do ponto fixo): Seja f é uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Se existir p em $[a,b]$ tal que $f(p) = p$ e $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in (a,b)$, então p é o único ponto fixo de f em $[a,b]$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existam p e q em $[a,b]$ tais que $f(p) = p$ e $f(q) = q$. Assim, supondo sem perda de generalidade que $p < q$, pelo Teorema do Valor Médio temos que existe c tal que $p < c < q$ e $f'(c) = \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$. De acordo com a hipótese, teremos

$$|f'(c)| < 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{f(q) - f(p)}{q-p}\right| < 1 \Longleftrightarrow |f(q) - f(p)| < |q-p|.$$

Entretanto, por serem p e q pontos fixos, teremos $|f(q) - f(p)| = |q - p|$. Assim chegamos em um absurdo.

Portanto, com as condições dadas, o ponto fixo é único. □

Considerando uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) tal que p é o único ponto fixo de f neste intervalo, vamos abordar um método iterativo para se encontrar p ou ao menos chegar em uma aproximação.

A ideia inicial é começarmos por um ponto $p_0 \in [a,b]$. Caso $f(p_0) = p_0$, então, pela unicidade do ponto fixo, $p = p_0$ e a iteração acabou. Caso $f(p_0) \neq p_0$, então tome $p_1 = f(p_0)$ e calcule $f(p_1)$. Novamente, caso $f(p_1) = p_1$, então a iteração está finalizada. Caso contrário, calculemos $f(p_2)$, onde $p_2 = f(p_1)$, e assim por diante, definindo a sequência $p_{k+1} = f(p_k)$.

Entretanto, de modo similar ao Método da Bissecção, precisamos estabelecer uma quantidade máxima de iterações N e uma tolerância ϵ, e assim, caso $|f(p_i) - p_i| < \epsilon$ para $1 \leq i \leq N$, então a iteração para. Agora, caso após N iterações não encontremos alguma solução de acordo com a tolerância ϵ dada, então o processo falhou. Os detalhes estão organizados no Algoritmo 2.3.1.

Algoritmo 2.3.1 Algoritmo do Ponto Fixo

Entrada: Uma função f cuja existência de um ponto fixo esteja assegurada no intervalo $[a,b]$; os reais a e b tais que; uma tolerânia e; o número máximo de iterações N; uma aproximação inicial p_0

Saída: Um ponto fixo p; uma aproximação p; uma mensagem de falha.

$k \leftarrow 1$
para $(1 \leq k \leq N)$ **faça**
    $p \leftarrow f(p_0)$
    se $f(p) = p$ **então**
        retorna FIM. O ponto fixo é p.
    senão
        se $|p - p_0| < e$ **então**
            retorna FIM. Uma aproximação para o ponto fixo é p.
        senão
            $k \leftarrow k + 1$
            $p_0 = p$
        fim se
    fim se
fim para
retorna O procedimento falhou após N iterações.

Interessante notar que os Teoremas 2.13 e 2.16 fornecem condições suficientes mas não necessárias para a existência e unicidade do ponto fixo, respectivamente. Vamos verificar, como exemplo, que a função $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 3$ possui um ponto fixo p no intervalo $[-3, -1]$ e outro ponto fixo r no intervalo $[1,2]$. Depois usaremos o Algoritmo do Ponto Fixo 2.3.1 para encontrar uma aproximação de p. Já para r, veremos que o algoritmo gera uma sequência divergente de modo que nos faz questionar quando pode tal método funcionar.

Exemplo 2.3.1 (Convergência e divergência através do Método do Ponto Fixo): Mostre que a função $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 3$ possui um ponto fixo p no intervalo $[-3, -1]$ e outro ponto fixo r no intervalo [1,2]. Depois use o Algoritmo do Ponto Fixo 2.3.1 para verificar, se possível, uma aproximação de p e r.

Antes de adentrarmos na demonstração, importante notar que a função em questão, por ser uma combinação entre exponencial e polinomial, não permite ao aluno do Ensino Básico o uso de artifícios como a Fórmula de Bháskara para o cálculo de suas raízes, quando existirem, ou até mesmo para verificar sua inexistência em $\mathbb{R}$. Deste modo, o estudo de aproximação de raízes por métodos iterativos com o uso de ferramentas computacionais mostra-se importante para tais abordagens.

Iniciando a demonstração, notemos que $f(-3) \approx 0{,}04$ e $f(-1) \approx -1{,}63$, de maneira que $[f(-1), f(-3)]$ não está contido em $[-3, -1]$ e, assim, não podemos usar o Teorema da Existência do Ponto Fixo 2.13 para garantir a existência de algum ponto fixo de f em $[-3{,}1]$.

Para analisar se podemos usar o Teorema da Unicidade do Ponto Fixo 2.16, vamos verificar quando $|f'(x)| < 1$, sendo que $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Teremos que

$$|f'(x)| < 1 \Rightarrow -1 < \mathrm{e}^x - 1 < 1$$

. Da desigualdade esquerda temos que $\mathrm{e}^x > 0$, o que é sempre verdadeiro. Já da desigualdade direita, temos $\mathrm{e}^x < 2 \Rightarrow x < \ln 2 \approx 0{,}69$. Como $x \in [-3, -1]$, podemos apenas usar o Teorema 2.16 para garantir, caso exista, que o ponto fixo é único.

Iremos verificar por outro caminho a existência de p tal que $f(p) = p$. Mas isso é o mesmo que resolver a equação $\mathrm{e}^p - p - 3 = p$ ou $\mathrm{e}^p - 2p - 3 = 0$, que é o mesmo que verificar se $\mathrm{e}^x - 2x - 3 = 0$, ou seja, se a função $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 3$ possui alguma raiz real entre -3 e -1. Observando que $g(-3) > 0$ e $g(-1) < 0$ podemos utilizar o Teorema de Bolzano para garantirmos a existência de p tal que $g(p) = 0$. Logo, estão garantidas a existência e a unicidade de p.

Sabendo-se da existência e da unicidade de p em $[-3, -1]$, vamos iniciar uma busca por uma aproximação de p através do método do ponto fixo. Para isso, considere um erro

$\epsilon = 0.001$ e um aproximação inicial $p = -2$. A Tabela 2.3 mostra alguns resultados de aproximações do ponto fixo p da função f, onde k é o número de iterações.

k	p	k	p	k	p
1	-0.8646647	7	-1.2926364	13	-1.3594816
2	-1.7141425	8	-1.4328176	14	-1.3837245
3	-1.1057394	9	-1.3285468	15	-1.3656322
4	-1.5632945	10	-1.4065913	16	-1.3791485
5	-1.2272605	11	-1.3484318	17	-1.3690586
6	-1.4796451	12	-1.3919211	18	-1.3765951

Tabela 2.3: Convergência através do Método do Ponto Fixo feita pelo *Scilab*.

O ponto fixo com doze casas decimais é igual a -1.373374545349, e a aproximação final com os dados fornecidos, com dezoito iterações, é igual a -1.3765951.

Vamos agora analisar o que ocorre com o outro ponto fixo de f. Notemos inicialmente que $f(1) \approx -1{,}28$ e $f(2) \approx 2{,}38$, de maneira que $[f(1),f(2)]$ não está contido em $[1,2]$ e novamente não podemos usar o Teorema da Existência do Ponto Fixo 2.13.

De modo análogo à verificação da existência do primeiro ponto fixo, analisar se existe r com a propriedade $f(r) = r$ é o mesmo que verificar se a função $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 3$ possui alguma raiz real entre 1 e 2. Verificando que $g(1) < 0$ e $g(2) > 0$, podemos usar o Teorema de Bolzano e garantir a existência de r tal que $g(r) = 0$ e assim $f(r) = r$.

Já argumentamos que apenas podemos usar o Teorema da Unicidade do Ponto Fixo, 2.16, para $x < \ln 2 \approx 0{,}69$. Como temos no intervalo atual que $x > \ln 2$, não podemos usá-lo neste caso. Para argumentar sobre a unicidade de r no intervalo, suponha que exista q tal que $g(q) = 0$ e suponhamos, sem perda de generalidade, $q < r$ Assim,

$$\mathrm{e}^r - 2r - 3 = \mathrm{e}^q - 2q - 3 \Rightarrow \frac{\mathrm{e}^r - \mathrm{e}^q}{r - q} = 2.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, $h'(m) = 2$ onde $h(x) = \mathrm{e}^x$ e $q < m < r$. Mas $h'(x) = \mathrm{e}^x$ e então $2 = \mathrm{e}^m \Rightarrow m = \ln 2$. Entretanto, estamos supondo r e q pertencentes ao intervalo $[1,2]$, ou seja, $1 \leq q < m < r \leq 2$ e $m = \ln 2 < 1$, o que é uma contradição. Portanto, para $x \in [1,2]$, o ponto fixo r é único.

Agora, sabendo-se da existência e da unicidade de r em $[1,2]$, veremos empiricamente que uma busca por uma aproximação de r através do Método do Ponto Fixo para a função f não funciona. Sejam então, um erro $\epsilon = 0{,}01$ e uma aproximação inicial $p_0 = 1{,}5$.

k	p	k	p	k	p
1	-0.0183109	7	-1.2272967	13	-1.3484378
2	-1.9998334	8	-1.4796195	14	-1.3919166
3	-0.8648088	9	-1.2926562	15	-1.3594850
4	-1.7140591	10	-1.4328032	16	-1.3837220
5	-1.1058077	11	-1.3285577	17	-1.3656341
6	-1.5632488	12	-1.4065833	18	-1.3791471

Tabela 2.4: Convergência através do Método do Ponto Fixo feita pelo *Scilab*.

Perceba que o que ocorreu foi que a sequência gerada pelo método convergiu para o ponto fixo p ao invés do ponto fixo r.

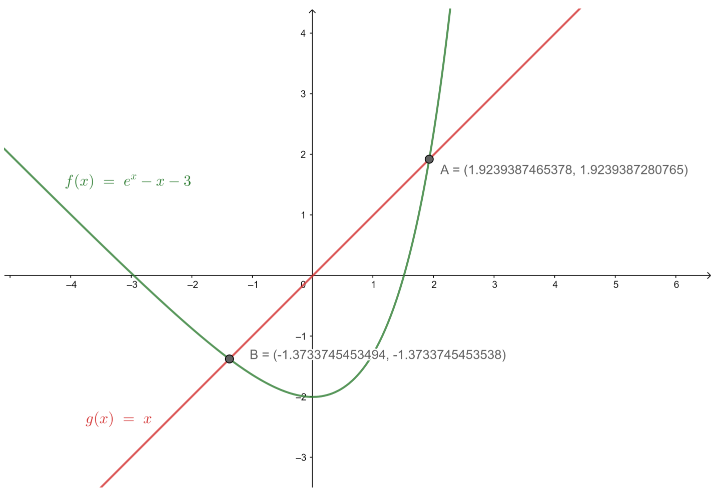
Caso a aproximação inicial fosse $p_0 = 1.95$ ao invés de 1.5, teríamos, para as quatro primeiras iterações, os resultados apresentados na Tabela 2.5.

k	1	2	3	4	5
p		2.9152830	12.538751	278924.25	Inf

Tabela 2.5: Divergência através do Método do Ponto Fixo feita pelo *Scilab*

A partir da quinta iteração o valor já é suficientemente alto de modo que o programa usado para executar o algoritmo, *Scilab*, retorna uma mensagem de erro, ou seja, o método usado gera uma sequência divergente. Através do *software* de geometria dinâmica GeoGebra podemos verificar a existência dos pontos fixos p e r. A Figura 2.6 ilustra o exemplo discutido, onde p e r correspondem respectivamente às abscissas dos pontos B e A.

Figura 2.6: Pontos fixos da função $f(x) = e^x - x - 3$.



Fonte: Criado pelo autor.

Depois da análise da função f no Exemplo 2.3.1, é pertinente nos perguntarmos quando a iteração através do método do ponto fixo vai convergir para uma aproximação. O teorema a seguir baseia-se no Teorema da Unicidade do Ponto Fixo 2.16 para dar condições de convergência usando o presente método.

Teorema 2.17 (Convergência da Iteração do Método do Ponto Fixo): Seja f contínua em $[s,t]$, com $|f'| \leq k < 1$, e suponha que existe p em $[s,t]$ tal que $p = f(p)$. Então, para qualquer ponto $p_0 \in (s,t)$ a sequência definida por $p_n = f(p_{n-1})$ converge para o único ponto fixo em $[s,t]$.

Demonstração. A unicidade de p advém do Teorema 2.16. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $p_n = f(p_{n-1})$, então

$$p = f(p) \Rightarrow |p_n - p| = |f(p_{n-1}) - f(p)|. \tag{2.1}$$

Usando o TVM temos que existe um ponto c_{n-1} entre p e p_{n-1} tal que $f'(c_{n-1}) = (f(p_{n-1}) - f(p)) \,/\, (p_{n-1} - p)$. Ou seja $|f'(c_{n-1})| \cdot |p_{n-1} - p| = |f(p_{n-1}) - f(p)|$ e da equação 2.1 temos

$$|p_n - p| = |f(p_{n-1}) - f(p)| = |f'(c_{n-1})| \cdot |p_{n-1} - p|$$

e usando a hipótese de que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in (s,t)$, teremos que

$$|p_n - p| = |f'(c_{n-1})| \cdot |p_{n-1} - p| \Rightarrow |p_n - p| \leq k \cdot |p_{n-1} - p|.$$

Recurssivamente, teremos

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq k^3|p_{n-3} - p| \cdots \leq k^n|p_0 - p|. \tag{2.2}$$

Agora, como $|k| < 1$ então $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ Assim:

$$|p_n - p| \leq k^n|p_0 - p| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p|.$$

Portanto, temos que

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq 0 \cdot |p_0 - p| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0,$$

e assim $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, finalizando a demonstração. □

Portanto, as condições para convergência para aproximação de um ponto fixo p de uma certa função são bem restritivas. Retomando o Exemplo 2.3.1, podemos entender agora o porquê da divergência quando usamos o Algoritmo 2.3.1 para tentar aproximar r. No intervalo [1,3] teremos sempre que $|f'(x)| > 1$, e assim o teorema anterior não garante a convergência. Para finalizar, analisaremos mais um exemplo de aplicação do atual método.

Exemplo 2.3.2: Verifique que a função $f(x) = \ln(x^2 - x + 8) - x + 1$ possui um ponto fixo p entre $a = 1.3$ e $b = 2$ e use o Algoritmo 2.3.1 para obter uma aproximação para p.

Novamente trata-se de uma função cuja determinação ou verificação da existência de raízes reais por abordagens convencionais na Educação Básica pode ser insuficiente, mostrando novamente o potencial dos métodos iterativos através de recursos computacionais.

Inicialmente notemos que $x^2 - x + 8$ é sempre positivo e assim a função f está bem definida. Depois notemos que $f(1.3) \approx 1.827$ e $f(2) \approx 1.302$, de modo que podemos aplicar o Teorema da Existência do Ponto Fixo, 2.13, e garantir a existência de ao menos um ponto fixo p no intervalo [1.3,2]. Ademais, temos que $f'(x) = \frac{-x^2+3x-9}{x^2-x+8}$, e pode-se demonstrar que, no intervalo em questão

$$|f'| < 1 \Rightarrow -1 < f' < 1 \quad \text{e assim} \quad -1 < \frac{-x^2+3x-9}{x^2-x+8} < 1.$$

Analisando a desigualdade esquerda, teremos: $-1 < \frac{-x^2+3x-9}{x^2-x+8}$, e então

$$\frac{-x^2+3x-9}{x^2-x+8} + 1 > 0, \quad \text{de onde temos que} \quad \frac{2x-1}{x^2-x+8} > 0.$$

Verificando que o discriminante do denominador da fração algébrica é negativo, temos que não existem raízes reais para $x^2 - x + 8$, que portanto é sempre positiva. Fazendo

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0{,}5$. Conclui-se que

$$-1 < \frac{-x^2 + 3x - 9}{x^2 - x + 8} \quad \text{e então} \quad x > 0{,}5.$$

Analisando agora a desigualdade direita, teremos:

$$\frac{-x^2 + 3x - 9}{x^2 - x + 8} < 1 \quad \text{e então} \quad \frac{-x^2 + 3x - 9}{x^2 - x + 8} - 1 < 0 \quad \text{logo,} \quad \frac{-2x^2 + 4x - 17}{x^2 - x + 8} < 0.$$

Os discriminantes de ambos membros da última fração algébrica são negativos, e como consequência o numerador é sempre negativo enquanto o denominador é sempre positivo. Portanto, tal fração é sempre negativa. Após a análise das desigualdades, podemos concluir que

$$|f'(x)| < 1 \Rightarrow x > 0.5$$

e assim podemos usar o Teorema da Unicidade do Ponto Fixo 2.16 para garantir um único ponto fixo p no intervalo em questão. Além do mais, com tais hipóteses podemos usar o Algoritmo do Ponto Fixo 2.3.1, pois neste caso as iterações convergirão. Na tabela a seguir, para algumas iterações k são exibidas aproximações p_k do ponto fixo, assim como o respectivo erro ϵ_k.

k	1	5	10	15	20
p_k	1.5552479	1.5826447	1.5991332	1.5950814	1.5960761
ϵ_k	0.0947521	0.0307956	0.00755921	0.00185626	0.000455784

Tabela 2.6: Aproximação do ponto fixo de f através do *Scilab*.

No último exemplo, usamos o Algoritmo 2.3.1 para mostrarmos que a função $f(x) = \ln(x^2 - x + 8) - x + 1$ possui um ponto fixo, ou seja, mostramos que p é raiz da função $g(x) = f(x) - x = \ln(x^2 - x + 8) - 2x + 1$ no intervalo $[1.3{,}2]$. Isso porque $g(p) = f(p) - p$ e, como $f(p) = p$, temos $g(p) = 0$. Analogamente, no Exemplo 2.3.1, usamos o mesmo algoritmo e verificamos que a função $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 3$ possui um ponto fixo p no intervalo $[-3, -1]$, ou seja, a função $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 3$ possui uma raiz neste intervalo.

2.4 O Método de Newton

Para o terceiro e último método iterativo que apresentaremos, o Método de Newton, escolhemos uma abordagem gráfica para introduzi-lo. Assim como os outros métodos, este também tem o objetivo de determinar ou aproximar raízes de funções. De maneira simplificada, supondo que certa função possua uma raiz real e seja diferenciável pelo menos em um intervalo contínuo que contenha esta raiz, as aproximações são geradas tomando-se as interseções com o eixo x das retas tangentes ao gráfico da função nos sucessivos pontos de aproximação.

Sendo mais precisos, considerando uma função f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), com uma raiz neste intervalo, tomamos como primeira aproximação $p_0 = \frac{a+b}{2}$. Se $f(p_0) = 0$, então encontramos a raiz. Caso contrário, iniciamos a primeira iteração. Considere r_1 a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p_0,f(p_0))$. Então r_1 pode ser definida da seguinte forma:

$$r_1 : \quad \frac{y - f(p_0)}{x - p_0} = f'(p_0) \Rightarrow y = f'(p_0) \cdot (x - p_0) + f(p_0).$$

Se $f'(p_0) \neq 0$, então r_1 corta o eixo x em um ponto p_1, que será nossa segunda aproximação. Caso $f(p_1) = 0$, então encontramos a raiz. Caso $f(p_1) \neq 0$, consideramos r_2, a reta tangente ao gráfico de f pelo ponto $(p_1,f(p_1))$. Novamente, se $f'(p_1) \neq 0$, a próxima iteração terá como aproximação p_2, a interseção desta reta com o eixo x e, assim, sucessivamente. Para melhor compreensão, vamos ilustrar o método através do Exemplo 2.4.1 e depois argumentar sobre a convergência do processo.

Exemplo 2.4.1: Considere a função contínua e infinitamente derivável $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2 - 2$. Note que $f(0) \cdot f(2) < 0$, de maneira que podemos invocar novamente o Teorema de Bolzano 2.9 para garantir a existência de p tal que $0 < p < 2$ e $f(p) = 0$.

Vamos iniciar as iterações ilustrando o processo através de f e sua raiz. Tomemos como primeira aproximação para p o valor $p_0 = 1$. Como $f(1) \neq 0$, então vamos à próxima etapa do procedimento.

Para isso, considere r_1, a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(p_0,f(p_0))$. Então a equação de r_1 satisfaz $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, onde $m = f'(p_0)$, $x_0 = p_0$ e $y_0 = f(p_0)$.

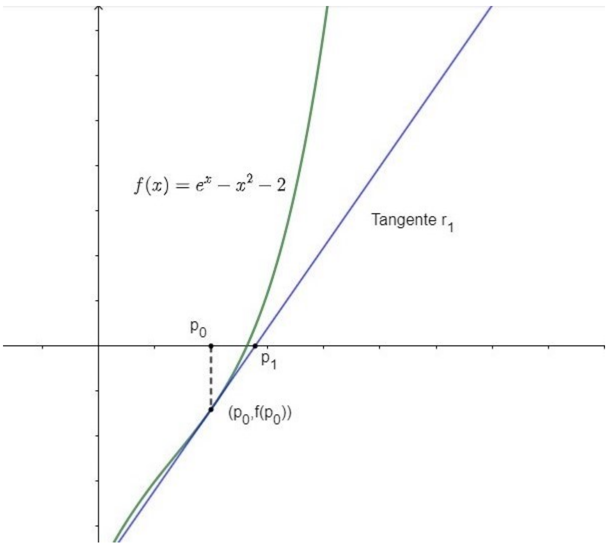
Denotando y por $g_1(x)$ teremos:

$$r_1 : g_1(x) = f'(p_0) \cdot (x - p_0) + f(p_0).$$

Considere então x tal que $g_1(x) = 0$. Assim teremos $x = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$. Nossa segunda aproximação para p será $x = p_1$, ou seja:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}.$$

Figura 2.7: Uma primeira aproximação para a raiz de $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2 - 2$.



Fonte: Criado pelo autor.

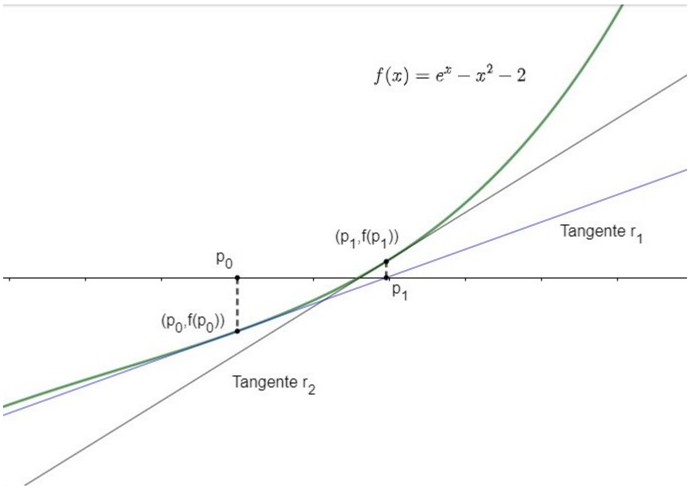
Novamente temos $f(p_1) \neq 0$ e então vamos ao próximo passo. Analogamente ao passo anterior, tomemos r_2 a tangente ao gráfico de f no ponto $(p_0, f(p_0))$, ou seja

$$r_2 : g_2(x) = f'(p_1) \cdot (x - p_1) + f(p_1),$$

e tome $g_2(x) = 0$ e então $x = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}$. Assim nossa terceira aproximação para p será $p_2 = x$.

O valor de p com seis casas decimais é de 1.319073 enquanto $p_2 = 1.323233$, ou seja, o erro já é menor a que 0.01. Para uma melhor aproximação, repetimos o processo descrito mais duas vezes, conforme consta na Tabela 2.7, que mostra as quatro primeiras aproximações e a função f aplicada em cada uma delas. Além do mais, há nesta tabela também o módulo da diferença entre aproximações consecutivas. Assim podemos notar que as aproximações ficam melhores, pois o módulo da diferença entre aproximações consecutivas diminui rapidamente enquanto se aproximam da raiz procurada, pois f aplicada em cada uma delas fica cada vez mais próxima de zero.

Figura 2.8: Duas aproximações para a raiz de $f(x) = e^x - x^2 - 2$.



Fonte: Criado pelo autor.

k	p_k	$f(p_k)$	$\|p - p_0\|$
0	1	≈ -0.281718	$-$
1	≈ 1.392211	≈ 0.085485	≈ 0.392211
2	≈ 1.323233	≈ 0.004597	≈ 0.068978
3	≈ 1.319087	≈ 0.000014	≈ 0.004146
4	≈ 1.319073	≈ 0.000001	≈ 0.000014

Tabela 2.7: Exemplo para o Método de Newton feito através do *Scilab*

A partir da discussão e do exemplo mostrados anteriormente, definimos a iteração do Método de Newton. Seja p_0 uma aproximação inicial. Então, como visto, p_1 é o valor da interseção da reta tangente ao gráfico da função f pelo ponto $(p_0,f(p_0))$ e o eixo x, ou, em outras palavras, p_1 é a raiz de $y = f'(p_0) \cdot (x - p_0) + f(p_0)$, ou seja:

$$\text{De} \quad f'(p_0) \cdot (x - p_0) + f(p_0) = 0 \quad \text{temos que} \quad x = p_0 - \frac{p_0}{f'(p_0)} \quad \text{e assim} \quad p_1 = p_0 - \frac{p_0}{f'(p_0)}.$$

Procedendo a iteração, teremos que

$$p_k = p_{k-1} - \frac{p_{k-1}}{f'(p_{k-1})}.$$

O Algoritmo do Método de Newton 2.4.1 sintetiza as iterações através deste método.

Algoritmo 2.4.1 Algoritmo do Método de Newton

Entrada: Uma função f; dois reais distintos a e b; uma tolerância ϵ; o número máximo de iterações N; uma aproximação inicial p_0

Saída: Uma raiz p; uma aproximação p_k; uma mensagem de falha.

$n \leftarrow 1$
para $(1 \leq n \leq N)$ **faça**
    $p \leftarrow p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$
    se $f(p) = 0$ **então**
        retorna FIM. A raiz é p.
    senão
        se $|p - p_0| < e$ **então**
            retorna FIM. Uma aproximação para a raiz é p.
        senão
            $k \leftarrow k + 1$
            $p_0 = p$
        fim se
    fim se
fim para
FIM. O procedimento falhou após N iterações.

Descrito o método, podemos tratar agora de garantir as condições para sua convergência. Para isso, vamos usar uma argumentação similar à argumentação usada no Teorema da Convergência do Ponto Fixo, 2.17. Notemos que a função $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ é contínua no intervalo $[a,b]$ desde que $f'(x)$ também o seja. Como $f(p) = 0$, temos que $g(p) = p$, considerando por ora que $f'(x) \neq 0$, de sorte que g tem ponto fixo em p e p é raiz de f. Ou seja, determinar e argumentar sobre a existência do ponto fixo p da função g e sua convergência significa argumentar sobre a convergência e existência da raiz de f. Para garantir a continuidade de g, vamos usar que a soma e o quociente de funções contínuas em um dado intervalo é também uma função contínua, desde que esteja bem definida. Por hipótese f é contínua no intervalo em questão e a função $h(x) = x$ também o é, e daí concluímos que g é também contínua neste intervalo.

Por fim, adicionando a hipótese de que $g'(x)$ exista em $[a,b]$ e $|g'(x)| < 1$, temos o suficiente para invocar o Teorema da Convergência do Ponto Fixo e garantir que a sequência $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$ gerada a partir da função g convirja para o ponto fixo p.

Há, contudo, dois casos que merecem atenção. O primeiro, diz respeito a encontrarmos um valor p_k tal que $f'(p_k) = 0$ para algum $p_0 \neq p$. Ocorrendo tal caso, podemos redefinir o intervalo $[a,b]$ para um intervalo $[p-\delta, p+\delta]$ com $\delta > 0$, onde $p_k \notin [p-\delta, p+\delta]$, de forma a nos livrarmos do problema de se encontrar uma derivada nula de f. O outro caso pode ocorrer quando $f'(p) = 0$. Na prática, a sequência de aproximações p_n seria tal que para algum natural k teríamos um erro ao se calcular $g(p_k)$. Assim, calculando-se $f(p_k)$, obteríamos 0 ou um valor não nulo. Caso $f(p_k) = 0$,temos que $p_k = p$, finalizando o problema de se encontrar a raiz de f. Agora, caso $f(p_k) \neq 0$, então poderíamos restringir o intervalo tal como no primeiro caso.

Por fim vamos analisar as condições para que $|g'(x)| < 1$. Como $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, teremos que

$$g'(x) = (x)' - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' \quad \text{e então} \quad g'(x) = 1 - \left(\frac{f'(x)^2 - f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right).$$

O que, de forma mais sintética, nos fornece:

$$g'(x) = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Portanto

$$\text{De} \quad |g'(x)| < 1 \quad \text{termos} \quad \left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1 \quad \text{e então} \quad |f(x)\cdot f''(x)| < |f'(x)|^2.$$

Compilando o que foi abordado, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.18 (Convergência do Método de Newton): Seja f contínua em (a,b) tal que f' e f'' existam para todo $x \in (a,b)$, com $|f(x)\cdot f''(x)| < f'(x)^2$. Se existir p tal que $f(p) = 0$ com $a \leq p \leq b$, então a sequência $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$ converge para p seja qual for a aproximação inicial p_0.

Vamos, a seguir, estudar mais um exemplo de aplicação Método de Newton.

Exemplo 2.4.2 (Determinando ponto fixo da função $f(x) = \cos x$ com o Método de Newton): Verifique que a função $f(x) = \cos x$ possui um ponto fixo p e calcule uma aproximação para p usando o Método de Newton.

Como $\cos 0 = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, temos pelo Teorema da Existência do Ponto Fixo 2.13 que existe ao menos um ponto fixo p de f no intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$. Como $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{implica em} \quad -1 < -\operatorname{sen} x < 0 \quad \text{e assim} \quad |f'(x)| < 1,$$

temos pelo Teorema da Unicidade do Ponto Fixo 2.16 que p é único no intervalo. O Método de Newton é uma ferramenta para aproximar raízes, então para usá-lo aqui precisamos de uma função auxiliar $h(x) = cos(x) - x$, pois note que $h(p) = cos(p) - p = 0$. Assim, podemos fazer $g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$. Usando o Algoritmo do Método de Newton 2.4.1 e supondo um erro $\epsilon = 0.0001$, e um valor inicial $p_0 = \frac{\pi}{4}$, obtemos uma rápida convergência, conforme mostra a tabela 2.8.

k	p_k	$g(p_k)$	ϵ
1	0.785398	-0.0782914	0.045862
2	0.739536	-0.000754875	0.000450955
3	0.739085	-7.51299^{-8}	4.48908^{-8}

Tabela 2.8: Determinando ponto fixo através do Método de Newton usando o *Scilab*

Para fechar esta seção, vamos retomar três exemplos citados anteriormente, sendo um já resolvido pelo Método do Ponto Fixo, outro já resolvido pelo Método da Bissecção e, por fim, um exemplo de um problema citado e não resolvido.

Iniciaremos por aproximar o ponto fixo p da função $f(x) = \ln(x^2 - x + 8) - x + 1$, como no Exemplo 2.3.2, usando agora o Método de Newton ao invés do Método do Ponto Fixo.

Exemplo 2.4.3 (Determinando ponto fixo da função $f(x) = \ln(x^2 - x + 8) - x + 1$ com o Método de Newton):

Primeiro, precisamos fazer uma pequena alteração, de modo que nosso problema torne-se um problema direto de determinação de raiz. Mas calcular o ponto fixo de f é o mesmo que calcular uma raiz da função $g(x) = \ln(x^2 - x + 8) - 2x + 1$, pois de $x = \ln(x^2 - x + 8) - x + 1$ teremos $\ln(x^2 - x + 8) - 2x + 1 = 0$.

Vamos considerar aqui também o intervalo [1.3,2] e o valor inicial $p = 1.65$. Aplicando o Método de Newton para um erro $\epsilon = 0.0001$, obtemos com três iterações o valor $p_3 = 1.59588$. Usando o GeoGebra para determinar a raiz de g neste intervalo, obtemos

$p \approx 1.5958800023958$, enquanto com vinte iterações, usando o Método do Ponto Fixo obtemos $p_{20} = 1.5960761$. Assim, o Método de Newton se mostra uma ferramenta muito poderosa, convergindo muito mais rapidamente. Como veremos mais à frente, calcular raízes no *GeoGebra* é uma tarefa simples, e nos serve como uma ferramenta auxiliar, ajudando a levantar conjecturas e a verificar cálculos.

Entretanto, para utilizar o Método de Newton deveríamos antes verificar as condições do Teorema 2.18, mais especificamente, deveríamos verificar se, no intervalo [1.3,2], a seguinte inequação é satisfeita:

$$|g(x) \cdot g''(x)| < |g'(x)|^2,$$

o que é equivalente a mostrar que

$$\left|(\ln(x^2 - x + 8) - 2x + 1) \cdot \frac{-2x^2 + 2x + 15}{(x^2 - x + 8)^2}\right| < \left|\frac{-2x^2 + 4x - 17}{x^2 - x + 8}\right|.$$

Não é uma tarefa simples verificá-la sem o uso de recursos computacionais. Calculando para alguns valores do intervalo em questão, a saber, seus extremos, 1.3 e 2, e a primeira aproximação, 1.65, obtemos os valores dispostos na Tabela 2.9.

x	$\|g(x) \cdot g''(x)\|$	$\|g'(x)\|^2$
1.3	≈ 0.89	≈ 3.27
1.65	≈ 0.77	≈ 2.89
2.0	≈ 0.13	≈ 3.05

Tabela 2.9: Verificando para alguns valores a desigualdade $|g(x) \cdot g''(x)| < |g'(x)|^2$
.

Note que a desigualdade é verificada para os valores em questão, e, apesar de não ser uma prova, é um indício de que tal desigualdade é verdadeira. Em situações como esta, onde verificar a desigualdade é uma tarefa demasiadamente complicada e onerosa, poderíamos verificar se a relação é válida para cada p_k ao invés de tentar prová-la.

Agora, vamos aproximar a raiz da função $f(x) = x^3 - 5x - 5$, retomando o Exemplo 2.2.1, usando agora o Método de Newton ao invés do Método da Bissecção.

Exemplo 2.4.4 (Determinando a raiz da função $f(x) = x^3 - 5x - 5$ com o Método de Newton):

Tal qual no Método da Bissecção, tomamos como valor inicial $p_0 = 2.5$. A Tabela 2.10 mostra as dez primeiras aproximações e a função f aplicada em cada uma delas. Os cálculos foram feitos em planilha eletrônica.

Número de iterações	Raiz aproximada	$f(x)$
1	2.50000000000000	-1.87500000000000
2	2.63636363636364	0.14199849737040
3	2.62740544127405	0.00063397979838
4	2.62736508552899	0.00000001283680
5	2.62736508471183	0.00000000000000
6	2.62736508471183	-0.00000000000001
7	2.62736508471183	0.00000000000000
8	2.62736508471183	-0.00000000000001
9	2.62736508471183	0.00000000000000
10	2.62736508471183	-0.00000000000001

Tabela 2.10: Aproximando raiz da função $f(x) = x^3 - 5x - 5$ através do Método de Newton.

.

Mais uma vez, o Método de Newton se mostrou muito mais rápido nas aproximações, visto que no Exemplo 2.2.1 através do Método da Bissecção com cinco iterações obteve-se uma aproximação de 2.6875 e com cinco iterações através de Newton, obteve-se 2.62736508471183. Calculando a raiz através do comando "Raiz(f)"no GeoGebra, obtemos 2.6273650847118, o que é relativamente simples, e se faz após inserirmos a função nesse *software* digitando $f = x^3 - 5x - 5$ na entrada e depois escrevendo "Raiz(f)". Automaticamente, se existirem raízes para a função em análise, elas serão exibidas.

Os exemplos anteriores são amostras de como o Método de Newton é poderoso, fornecendo uma rápida convergência se comparado aos outros dois métodos. Na próxima seção, onde encerramos este capítulo comparando novamente os métodos e analisando mais fatores relacionados a convergência destes, observaremos mais uma vez que o Método de Newton se mostra muito eficaz.

Para finalizar, retomaremos o exemplo citado na introdução deste capítulo que consiste em determinar $\log 2$.

Exemplo 2.4.5 (Aproximando log 2 através do Método de Newton.):

Para isso, escrevemos a equação $x = \log 2$ que corresponde à equação $10^x - 2 = 0$, ou seja, é o mesmo problema de se determinar a raiz da função $f(x) = 10^x - 2$, onde podemos aplicar a teoria do Método de Newton.

Calculando f', teremos:

$$f'(x) = (10^x - 2)' = (10^x)' - 2' = (10^x)'.$$

Da fórmula de derivação $\frac{d}{dx}a^u = u' \cdot a^u \cdot \ln a$, onde u é função de x, teremos que, como $a = 10$ e $u = x$:

$$f'(x) = x' \cdot 10^x \cdot \ln 10 \Rightarrow f'(x) = 10^x \cdot \ln 10$$

Portanto, a sequência que usaremos para a iteração fica:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \Rightarrow p_n = p_{n-1} - \frac{10^{p_{n-1}} - 2}{10^{p_{n-1}} \cdot \ln 10}.$$

Para determinar o ponto incial das iterações, vamos estimar a solução de $10^x = 2$ considerando que, se ao invés de 10 tivéssemos 8, teríamos $x = 1/3 = 0.333\ldots$ como solução, já que $8^{1/3} = 2$. Assim, tomemos como ponto de partida a aproximação $p_0 = 0.3$ A Tabela 2.11 mostra as dez primeiras aproximações e a respectiva aplicação de f, feitos através de planilha eletrônica.

Número de iterações	Raiz aproximada	$f(x)$
1	0.300000000000000	-0.00473768503112
2	0.301031218026109	0.00000562919355
3	0.301029995665701	0.00000000000792
4	0.301029995663981	0.00000000000000
5	0.301029995663981	0.00000000000000
6	0.301029995663981	0.00000000000000
7	0.301029995663981	0.00000000000000
8	0.301029995663981	0.00000000000000
9	0.301029995663981	0.00000000000000
10	0.301029995663981	0.00000000000000

Tabela 2.11: Aproximando $\log 2$ através do Método de Newton.

.

Perceba que para 15 casas decimais 4 iterações já se mostram suficientes.

Uma interessante variante do método de Newton é o Método da Secante, que evita o cálculo da derivada da função, substituindo-a por uma aproximação dada pelo coeficiente angular da reta secante definida pelos dois pontos de aproximação anteriores. Ao invés da sequência $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$, usa-se no Método da Secante outra sequência que parte da aproximação de $f'(p_{n-1})$. Da definição da derivada de f no ponto p_{n-1}, temos:

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}.$$

Se p_{n-2} for próximo de p_{n-1}, podemos fazer

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}.$$

Por fim, substituindo $f'(p_{n-1})$ na sequência do Método de Newton, ou seja, em $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$, obtemos a sequência do Método da Secante:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1}) \cdot (p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

2.5 Comparativo entre os métodos

Nesta seção, vamos comparar os três métodos a partir do problema de se aproximar raízes quadradas de números primos. Mais precisamente, se p é um natural primo, partiremos do problema de se resolver a equação $x^2 = p$ para o problema de se resolver a equação $x^2 - p = 0$.

Um aspecto interessante desse problema é que a solução é sempre um número irracional, como será mostrado no resultado 2.19. Assim, além de comparar os três métodos, possibilita-se um cenário para discussão da irracionalidade, da primalidade e da radicialização em particular no Ensino Básico, dando ênfase ao modelo computacional, uma vez que na prática podemos apenas aproximar o resultado e nunca encontrá-lo exatamente.

De $x^2 = p$, se $x > 0$, então $x = \sqrt{p}$ e assim $x^2 - p = 0$. Ou seja, é o mesmo problema de se determinar alguma raiz real de $f(x) = x^2 - p$ ou de $f(x) = p - x^2$. A aproximação inicial para a $\sqrt{p}$ é uma limitação inferior a e outra superior b, ou seja, $a < \sqrt{p} < b$ com $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ e a^2 e b^2 são respectivamente o maior quadrado perfeito menor que p e o menor quadrado perfeito maior que p. Por exemplo, se $p = 11$ então $a = 3$ e $b = 4$ pois $a^2 = 9$ e $b^2 = 16$. Portanto

$$9 < 11 < 16 \Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4.$$

Essa linha de raciocínio pode ser um gatilho para que o estudante perceba que a raiz quadrada de um número primo não pode ser um número inteiro. Durante uma sequência didática, abre-se caminho para a discussão sobre a irracionalidade de $\sqrt{p}$ partindo-se por exemplo do questionamento sobre o "fim" das iterações em algum momento. Discutiremos isso no Capítulo 4, em nossa proposta de Sequência Didática. Caso seja conveniente, pode-se usar o Lema 2.19 para provar a irracionalidade de $\sqrt{p}$, talvez no caso mais familiar de $\sqrt{2}$.

Lema 2.19 (Irracionalidade da raiz quadrada de um primo): Se $p \in \mathbb{N}$ é primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

Demonstração. Faremos a demonstração por absurdo e usaremos propriedades da divisibilidade no conjunto dos números Naturais. Entre elas, dados x e y pertencentes a $\mathbb{N}$, afirmar que "x divide y" é o mesmo que dizer que y é múltiplo de x. Com efeito, supondo que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, então existem naturais não nulos r e q tais que $\sqrt{p} = \frac{r}{q}$ e r e q não possuem divisores em comum, pois podemos considerar a fração irredutível. Além do mais $q \neq 1$ pois p é primo. Assim

$$\sqrt{p} = \frac{r}{q} \Rightarrow p = \frac{r^2}{q^2} \Rightarrow r^2 = p \cdot q^2.$$

Temos, da última igualdade, que p divide r^2 e assim **p divide r**, pois p é primo. Então $r = p \cdot k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo

$$r^2 = p \cdot q^2 \Rightarrow p^2 \cdot k^2 = p \cdot q^2 \Rightarrow p \cdot k^2 = q^2.$$

Da última igualdade podemos concluir que p divide q^2 e, novamente pelo fato de p ser primo, temos que **p divide q**. Mas isso seria uma absurdo, pois r e q são primos entre si, logo, não possuem fatores primos em comum. Assim temos um absurdo. Concluímos que $\sqrt{p}$ é irracional. □

A compreensão da argumentação anterior parte de alguns pressupostos e entre eles do entendimento de que todos os racionais possuem uma forma fracionária irredutível. Mesmo que inicialmente esse argumento não seja levado para a sala de aula, é relevante que o professor tenha conhecimento dele para, abrindo-se uma oportunidade, mostrá-lo à turma. Uma argumentação alternativa pode surgir das próprias interações em sala de aula, quando o assunto for discutido à luz da utilização dos métodos iterativos.

Para as análises aqui feitas, vamos comparar o comportamento dos três métodos na determinação ou aproximação da raiz da função $f(x) = x^2 - 11$. Para isso, consideramos o intervalo inicial [3,4] para o Método da Bissecação e uma aproximação inicial $p = 3.5$ para os Métodos do Ponto Fixo e de Newton, o que significa que na prática todos os três métodos partem da aproximação inicial 3.5, pois, como já estudado na Seção 2.2, o Método da Bissecção parte do ponto médio do intervalo inicial como primeira aproximação. Obtemos em ambos os Métodos de Newton e do Ponto Fixo na terceira iteração, $p_3 = 3.31662826420891$, com $|p_3^2 - 11| < 0.0001$. Já através do Método da Bissecção, após oito iterações, obtemos $p_8 = 3.316406250000$.

Para fins de comparação, consideramos interessante calcular o módulo da diferença $p_j^2 - 11$ para cada iteração, para se ter um mesmo parâmetro de comparação entre os métodos. Isso porque se p_k é uma aproximação, então p_k^2 deve ser próximo de 11. Assim, escolhemos não tratar sobre os erros específicos de cada método. Perceba que o Método de Newton e do Ponto Fixo se mostraram bastante eficazes, pois com poucas iterações já nos dão aproximações bastante razoáveis de $\sqrt{11}$, o que não ocorre com o Método da Bissecção .

Para se determinar ou aproximar a raiz de f através do Método do Ponto Fixo encontramos um problema inicial, porque tal método não determina diretamente a raiz. Precisamos, portanto, ajustar a função antes. Para isso, determinamos uma função g tal que $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = x$. Um modo de fazê-lo é, a partir da equação $x^2 - 11 = 0$, dividir todos os seus termos por x, considerando $x > 0$, obtendo $x^2/x = 11/x$ e assim $x = 11/x$. Agora, adicionando x em cada lado da equação, temos $x + x = 11/x + x$, o que nos dá $2x = 11/x + x$ e por fim, $x = 1/2(11/x + x)$ e então podemos definir $g(x) = 1/2(11/x + x)$.

Para que as iterações convirjam, precisamos assegurar que $|g'| < 1$ de acordo com o Teorema 2.17. Como $g(x)' = (11 - x^2)/2(11 + x^2)^2$, teremos que a desigualdade se verifica verdadeira para todo real $x \geq 3$, em particular no intervalo [3,4], satisfazendo o Teorema 2.17.

Para o problema particular de se aproximar $\sqrt{11}$, verificamos que o Método de Newton e do Ponto Fixo são igualmente eficazes. Isso porque a sequência $p_{n+1} = p_n - (p_n^2 - 11)/(2p_n)$ do Método de Newton é gerada pela função $h(x) = x - (x^2 - 11)/2x$, de acordo com o Teorema 2.18 e a sequência do Método do Ponto Fixo $p_{n+1} = 1/2(11/p_n + p_n)$ é gerada a partir da função $g(x) = 1/2(11/x + x)$. E notemos que

$$h(x) = x - \frac{x^2 - 11}{2x} = \frac{2x^2}{2x} - \frac{x^2 - 11}{2x} = \frac{x^2 + 11}{2x}.$$

E também que

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{x} + x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{x} + \frac{x^2}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11 + x^2}{x}\right) = \frac{x^2 + 11}{2x}.$$

Ou seja, $f(x) = g(x)$, de modo que as sequências geradas pelos dois métodos são idênticas, neste caso.

Em geral, o Método de Newton e outros métodos que variam deste costumam apresentar uma convergência mais rápida. Convém fazer uma análise mais geral de cada método para o problema apresentado para que possamos entender melhor sua aplicação no caso de se aproximar raízes quadradas.

Retomando o Teorema 2.17 da Seção 2.3, Método do Ponto Fixo, a convergência através do Método o Ponto Fixo depende da existência de um real k tal que $0 < k < 1$ e $|g(x)'| < k$ no intervalo de interesse. Quanto mais próximo de 1, menor a velocidade de convergência, quanto mais próximo de 0, maior a velocidade de convergência. Ainda mais, a referência [2] mostra que, caso a função satisfaça as hipóteses do dito teorema, então

$$|p - p_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|,$$

o que nos dá um limite para o erro.

Analisando de forma mais geral o Método do Ponto Fixo na determinação da raiz de um primo p, teríamos que determinar a raiz de $f(x) = x^2 - p$, ou seja:

$$x^2 - p = 0 \Rightarrow x^2 = p \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\frac{p}{x} + x).$$

Portanto, definindo $g(x) = 1/2(p/x + x)$, determinar uma raiz p de f é o mesmo que se determinar um ponto fixo de g. Depois devemos escolher um intervalo I tal que $x \in I$ satisfaça $|g'(x)| < 1$.

Usando o Método de Newton, para se calcular ou estimar a raiz quadrada de um primo p é necessário que f satisfaça o Teorema da Convergência do Método de Newton.

Como $f(x) = x^2 - p$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$, temos que:

$$|f(x) \cdot f''(x)| < |f'(x)|^2 \Rightarrow |x^2 - p| \cdot 2 < 4x^2 \Rightarrow -2x^2 < x^2 - p < 2x^2.$$

Resolvendo a desigualdade esquerda, temos

$$-2x^2 < x^2 - p \Rightarrow 3x^2 - p > 0 \Rightarrow (x + \sqrt{p/3})(x - \sqrt{p/3}) > 0,$$

que é satisfeita quando $x > \sqrt{p/3}$ ou $x < -\sqrt{p/3}$. Já a desigualdade direita nos dá

$$x^2 - p < 2x^2 \quad \text{e assim} \quad x^2 > -p,$$

o que é sempre satisfeito. Assim, para se usar o Método de Newton com êxito, considerando que estaremos interessados em valores positivos, devemos escolhermos um intervalo $[a,b]$ tal que $x \in [a,b]$ satisfaça $x > \sqrt{p/3}$. No caso particular de se estimar $\sqrt{11}$ usamos o intervalo $[3,4]$ que satisfaz a condição, pois $p = 11$ e assim $\sqrt{11/3} < \sqrt{12/3} = 2$.E, como vimos, as iterações chegam rapidamente na aproximação de acordo com o erro especificado.

Para que seja possível utilizar o Método da Bissecção é necessário que $f(a) \cdot f(b) < 0$, de acordo com o Teorema 2.11. Com efeito, temos $f(x) = x^2 - p \Rightarrow f(x) = (x + \sqrt{p})(x - \sqrt{p})$ e, por hipótese, $0 < a < \sqrt{p} < b$, o que nos garante que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Portanto o Método da Bissecção também se mostra aplicável nesta situação, e, de fato, houve uma convergência nas iterações.

De maneira geral, a medida da velocidade de convergência de um método iterativo é feita através do cálculo do limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p}{(p_n - p)^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Se tal limite existe, dizemos que a sequência converge para p com ordem de convergência α. Na referência "Análise Numérica" [2] mostra-se que a sequência do Método da Bissecção e a sequência do Método do Ponto Fixo são sequências designadas como *sequências de ordem 1*, ao passo que a sequência do Método de Newton em geral, tem ordem de convergência 2. Na prática, quanto maior a ordem de uma sequência mais rapidamente ela converge. Portanto, em geral, o Método de Newton é o que apresenta convergência mais rápida.

Para as atividades que serão propostas no Capítulo 4, consideramos interessante utilizar o Método da Bissecção para o mesmo problema, isto é, o de se aproximar a raiz quadrada de um número primo, apesar de o Método de Newton se mostrar mais eficiente. Isso porque nosso interesse não é exatamente na velocidade da convergência, e sim em outros aspectos, como trabalhar habilidades relacionadas a propriedades da primalidade, da irracionalidade e de funções quadráticas, tanto em sua forma algébrica quanto em sua forma gráfica.

3 Pensamento Computacional no Ensino de Matemática

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [9], documento normativo que direciona os currículos regionais implementados nas escolas de Educação Básica do Brasil, pontua que as tecnologias digitais e a computação estão fortemente presentes no nosso cotidiano, seja nos escritórios, nas escolas, nos nossos bolsos, nas cozinhas, nos automóveis, nas roupas, etc, além de que grande parte da produção humana está armazenada digitalmente. Assim, segundo consta nesse documento:

> É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais. (Brasil [9], 2018, pag. 473)

Portanto entre as competências que se almeja desenvolver através dessa base curricular, estão habilidades relacionadas ao pensamento computacional, que, por sua vez:

> [$\cdots$] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos. (Brasil [9], 2018, pag. 474)

Levando isso em consideração, entendemos que as ferramentas computacionais constituem um importante mecanismo facilitador para o ensino de Matemática, em especial, para o ensino de temas relacionados ao cálculo de raízes. Desta forma, nesse capítulo pretendemos abordar elementos que entrelacem os temas matemáticos abordados no capítulo anterior com a prática da sala de aula.

Para isso, além de propormos reflexões sobre como o uso de ambientes informatizados pode melhorar os processos de se ensinar e se aprender Matemática, tendo como base o trabalho de Gravina [5] e nos apoiando também em direcionamentos da BNCC fazemos uma análise de cinco dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do qual também pertence este mesmo trabalho, tomando como base o artigo de Serafim, Ferreira e Amorim [8]. Essas reflexões foram decisivas para a elaboração da sequência didática, pois permitiram melhor compreensão sobre como são as produções do PROFMAT, em particular sobre Métodos Iterativos, e como contribuem para a EB.

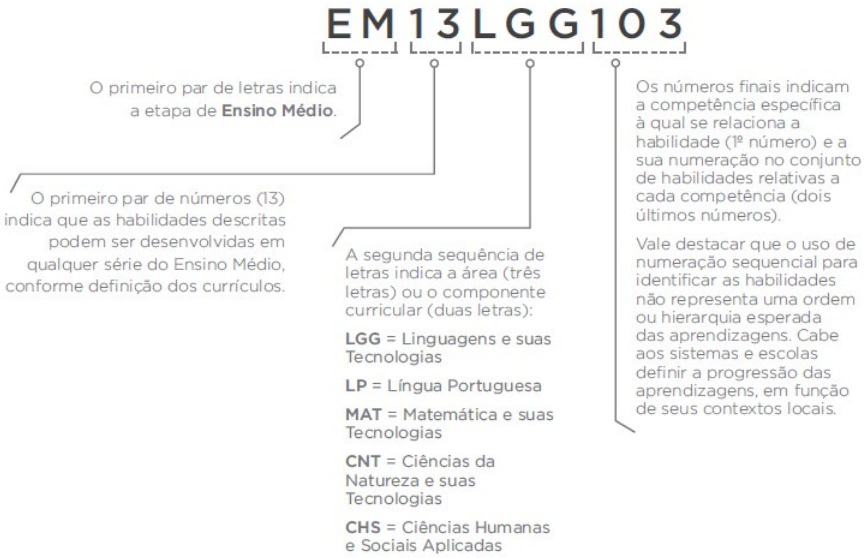
3.1 A BNCC

A BNCC [9] lista cinco competências específicas para a área de Matemática e Suas Tecnologias para o EM (página 531) descritas a seguir.

> **Competência 1** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> **Competência 2** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> **Competência 3** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> **Competência 4** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> **Competência 5** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Mostra-se na Figura 3.1 um exemplo de um código de uma habilidade e como se pode localizar qual sua competência. De forma simplificada, “As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares." (Brasil [9], 2018, p. 29)

Figura 3.1: Exemplo de habilidade da BNCC.



Fonte: Base Nacional Comum Curricular.

Mesmo que as habilidades trabalhadas em sala aula possam constantemente estarem ligadas a várias competências, exploramos aqui especialmente três, a saber as competências 3, 4 e 5, que estão mais ligadas ao cálculo de raízes, uso de algoritmos, investigação gráfica do problema e uso de planilhas e *softwares*.

Quando após usar um algoritmo, que é um modelo, verifica-se a plausibilidade de seus resultados e adequação das soluções ou da solução, habilidades que envolvem a Competência 3 estão em jogo. Utilizar os três métodos descritos no Capítulo 2 comparando-os, ou apenas um deles para se determinar a raiz de uma equação e verificando-se as aproximações, se são satisfatórias dentro de uma margem de erro ou não, se convergem ou se divergem, pode ser um bom exemplo dentro do nosso contexto. Um outro modelo a ser analisado para se verificar tal plausibilidade poderia ser o gráfico da função em questão, pois assim a visualização da raiz ajudaria a definir se as aproximações são de fato razoáveis.

A verificação de um resultado satisfatório ou não como descrito na Competência 3 e no parágrafo anterior pode ser uma possibilidade para se levantar conjecturas sobre propriedades matemáticas, como sugere a Competência 5, através da verificação de padrões, exprimentações e diferentes tecnologias. Antecipando a discussão que se dará na seção seguinte e novamente apelando a um exemplo dentro do cálculo de raízes através dos métodos descritos no capítulo anterior, as experimentações se fazem mais facilmente através de recursos computacionais, como calculadoras, planilhas e de *softwares* como o *GeoGebra* e o *Scilab*, por exemplo. E, ainda sobre a quinta competência, as aproximações podem sugerir a irracionalidade do resultado, dando margem para uma discussão mais rigorosa do assunto em sala de aula. Isso porque na prática nenhum computador reprepresenta precisamente os números irracionais e sim alguma aproximação de acordo com uma tolerância pré-definida que se relaciona com quantidade de casas decimais exibidas.

Quando se busca representar e trabalhar didaticamente o mesmo problema matemático de diferentes formas em sala de aula, explora-se em particular habilidades relacionadas à Competência 4. O problema de se aproximar ou de se calcular raízes parte de propriedades algébricas, enquanto pode-se representar o gráfico da função em questão. Ainda mais, representar as aproximações em planilhas nos dá, além de outra representação, outra maneira de se comunicar os resultados, remetendo novamente a habilidades relacionadas à quarta competência.

Enfatizando a importância de tais competências, o artigo "Pensamento Computacional e Educação Matemática: Relações para o Ensino de Computação na Educação Básica " de Barcelos e Silveira [1], problematiza o baixo número de graduados na área de computação, contrariando a grande demanda do mercado e as tendências atuais. Apontam que não só no Brasil mas em outras regiões do mundo há uma considerável evasão e desinteresse crescente por cursos dessa área, o que poderia ter como causa a falta de domínio suficiente de conhecimentos matemáticos de alunos egressos da Educação Básica. Esse apontamento torna o ensino de Matemática através de habilidades relacionadas ao pensamento computacional mais relevante tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Os mesmos autores apontam características do pensamento computacional que, de forma sintética, destacamos:

- Reduzir grandes problemas em problemas menores;
- Trata-se de uma habilidade fundamental e não mecânica, visto que os computadores fazem parte do cotidiano;
- É uma maneira de organizar problemas para que os computadores possam resolvê-los, mas não deixa de ser a maneira de pessoas pensarem e não uma simulação dos

processos computacionais envolvidos;

- Gera ideias e não necessariamente programas ou artefatos;

- Pode ser útil para todos, em variados contextos.

Destacam também que organizar e compreender um problema matemático através de algoritmos e assim, de habilidades relacionadas ao pensamento computacional, pode permitir uma transição mais suave entre a linguagem discursiva e a abstração matemática, além de poder permitir uma maior capacidade em reconhecer padrões e também a criar e organizar modelos, como tabelas e gráficos, para melhor apresentar resultados, fazer análises e levantar conjecturas, convergindo novamente às competências 3, 4 e 5 da BNCC.

3.2 Ambientes informatizados no ensino de matemática

A opção de se abordar as ções didáticas através de ferramentas tecnológicas possibilita criar ambientes que potencializam o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pensamento computacional. Essa abordagem vai de encontro ao que propõe a BNCC, que constantemente sugere o uso de ferramentas tecnológicas nos processos de se ensinar e aprender Matemática. Além do mais, como sugere Gravina [5], que analisa potencialidades de ambientes informatizados no ensino de Matemática sob uma perspectiva construtivista, o uso de ferramentas tecnológicas nas aulas de Matemática possibilita uma melhor transição entre o concreto e o abstrato, e assim uma melhor construção de significados para os elementos Matemáticos. Entre outras características de ambientes informatizados, as autoras destacam também o dinamismo que se pode obter explorando *softwares* de geometria dinâmica, de maneira que se extrapola as representações estáticas em aulas tradicionais ou em livros didáticos através de recursos como a manipulação em tempo real sobre objetos matemáticos, por exemplo, arrastando pontos sobre funções e modificando parâmetros.

Apesar de o citado artigo esclarecer que não houve o propósito de analisar ferramentas mais gerais, como planilhas de cálculo, e sim de ferramentas criadas deliberadamente com o propósito pedagógico (como é o caso do GeoGebra), acreditamos que se propor o uso de planilhas e calculadoras pode ir de encontro à ideia de uma abordagem potencialmente enriquecedora para o ensino e aprendizagem de matemática. Isso porque depende, dentre outros fatores, do professor, agindo como um orientador e curador, oferecer e criar condições para os estudantes explorarem de maneira direcionada variados recursos tecnológicos nas aulas de Matemática a fim de se aprender substancialemente os conteúdos abordados. Assim, mesmo que planilhas tenham em sua gênese um propósito mais amplo, um professor pode usá-la de forma direcionada em suas aulas. Nesse sentido, dissertando sobre possibildades de se usar planilhas eletrônicas nas aulas de matemática, Rocha [6] elenca motivos que favorecem seu uso.

Começa por enfatizar que planilhas eletrônicas são de fácil manuseio. Assim, mesmo que seja possível se explorar ferramentas avançadas e mais complexas, não deixam de possuir uma interface amigável para iniciantes.

Outro ponto benéfico para sua utilização em salas de aula, levantado pelo autor, é o fato de estarem disponíveis em praticamente todos computadores, nas casas, escolas e empresas, tornando seu acesso relativamente fácil. O próprio fato de sua vasta disponibilidade sugere também sua importância. Entretanto, apenas sua disponibilidade não garante que professores façam seu uso, de modo que considerá-la no planejamento parte de conhecimentos e incentivos.

Outro fator que favorece o uso de planilhas eletrônicas no ensino de Matemática é interatividade: similar à representação geométrica não estática que o GeoGebra possibilita, as células das planilhas podem representar variáveis que mudam e atualizam valores em tempo real, favorecendo a compreensão algébrica.

A disposição de várias informações na tela do computador, como variáveis e fórmulas, pode facilitar comparações, verificação de erros e a compreensão da Matemática envolvida, e similar ao uso de calculadoras, utilizar planilhas eletrônicas nas aulas de matemática pode melhorar a gestão do tempo em sala de aula, alocando mais tempo ao fazer matemática - investigando, comparando, etc. - e menos tempo para cálculos repetitivos e muitas vezes cansativos.

Por fim, Rocha [6], apoiado em seus referenciais, ressalta que planilhas podem ser poderosas ferramentas para modelagem, resolução de problemas e para a abstração Matemática, indo de encontro ao que propõe [5] sobre outras ferramentas tecnológicas.

Além dos já citados benefícios do uso de recursos nas aulas de Matemática, podemos acrescentar outros que derivam de estudos do pesquisador Seymour Papert, e que foram sintetizados por Kalile [7] em sua dissertação de mestrado.

Inicialmente, podemos afirmar que o ambiente informatizado cria outras possibilidades para o estudante calcular, representar e apresentar seus resultados que em geral são diferentes das possibilidades criadas com a escrita. Parafraseando Kalile [7], o rigor matemático se torna natural em ambientes informatizados quando se está programando, pois o computador precisa compreender o algoritmo que foi construído, ou seja, precisa compreender claramente os comandos, correndo-se o risco de não se alcançar os resultados desejados. Inspecionar os próprios erros nestes comandos pode criar possibilidades de aprendizado, tanto de matemática quanto das habilidades computacionais em si.

As planilhas podem ser tanto usadas para armazenar informações e exibir resultados quanto para se realizar cálculos. Assim, os estudantes devem entender, além do algoritmo utilizado para solucionar o problema e a Matemática relacionada, os comandos básicos para cálculos em planilhas e sua estrutura básica. Há, portanto, variadas representações para o mesmo problema, que parte de representações algébricas para representações nas planilhas de cálculo.

3.3 Análise de dissertações do PROFMAT

Com o objetivo de nos orientarmos sobre como as produções que envolvem métodos iterativos são tratadas e nos guiarmos na nossa produção, durante o desenvolvimento deste trabalho foram analisadas e catalogadas cinco dissertações do PROFMAT. Inicialmente haviam sido catalogados os títulos, autores e o ano de publicação de dez dissertações, todas disponíveis no repositório de dissertações do PROFMAT, como uma tarefa da disciplina "Trabalho de Conclusão de Curso" que ocorreu entre os meses de janeiro e abril de 2021 neste mesmo programa de mestrado. Porém, alguns meses depois, entre outubro e novembro de 2021, retomando as dissertações para aprofundar a análise, apenas cinco foram encontradas, existindo um problema que impediu o acesso ao site do repositório por muito tempo, inviabilizando uma espera maior.

Para analisar as cinco dissertações, tomamos como base o artigo Criptografia na Educação Básica: um cenário das pesquisas do PROFMAT [8] que catalogou e analisou pouco mais de cem dissertações do mesmo programa de pós graduação sobre o tema "Criptografia". As cinco dissertações foram catalogadas e o questionamento "como as dissertações do PROFMAT abordam temas relacionados a métodos iterativos na Educação Básica" guiou a análise. Procurou-se verificar quantas delas se embasam em referenciais da Educação e/ou Ensino de Matemática, quantas propõem atividades para a EB, quantas aplicam alguma das atividades propostas e, por fim, quantas propõem atividades através de *softwares*. Para tal, foram lidos os resumos, os sumários, os referenciais teóricos e, quando foi o caso, as atividades propostas para a EB e as análises das aplicações. Também foi feita uma leitura panorâmica de todas as dissertações. Os dados foram sintetizados na Tabela 3.1.

Quantas se embasam em referenciais da Educação e/ou Ensino de Matemática?	2
Quantas propõem atividades para a EB?	4
Quantas aplicam alguma das atividades propostas?	2
Quantas propõem atividades através de *softwares*?	3

Tabela 3.1: Análise de cinco dissertações do PROFMAT

Fonte: Criado pelos autores.

De forma sintetizada, apesar de o recorte aqui apresentado ser relativamente pequeno, dado que apenas cinco dissertações foram analisadas, verifica-se que assim como no artigo Criptografia na Educação Básica: um cenário das pesquisas do PROFMAT [8] nem todas as dissertações dialogam diretamente com a EB, seja propondo atividades ou se baseando em leituras sobre Educação e Ensino de Matemática. Nota-se, em contrapartida, sempre uma preocupação com o rigor matemático, tornado-se este o enfoque principal de tais produtos. Não há dúvidas sobre a importância da formalidade Matemática, especialmente em um curso que dá ao egresso o título de mestre em Matemática, entretanto o espaço destinado ao ensino é muitas vezes pouco ou nem existente.

Isso pode se dar por diversas razões, mas destacam-se especialmente duas. Considerando que um dos objetivos do PROFMAT é melhorar a prática dos professores egressos em salas de aula da EB e que o produto final produzido por estes deve ter impacto na sala de aula com temáticas relacionadas também à EB, Serafim, Ferreira e Amorim afirmam, sobre as 104 dissertações que analisaram, que:

> [...] retomando o objetivo do curso e lembrando que 22 dos trabalhos analisados não sugerem atividades e não apresentam leituras relacionadas à docência, podemos inferir que as diretrizes do curso muitas vezes não são seguidas. E, apesar de haver uma quantidade relativamente alta de trabalhos que propõem atividades para a Educação Básica, mais de sua quarta parte não utiliza de referenciais teóricos consolidados da Educação Matemática, principalmente aqueles relacionados, especificamente, com abordagens e estratégias para o Ensino dessa ciência. Pode ser tanto um reflexo da grade curricular, que como dito, se compõe prioritariamente de disciplinas da matemática pura ou um baixo número de orientadores que pesquisam sobre o Ensino de Matemática, de forma que seus orientandos

> podem assim não considerar essa linha de pesquisa. (Serafim, Ferreira e Amorim, 2021, pg. 13)

Compreendendo a importância nacional deste programa de pós-graduação como uma formação continuada do professor de Matemática, a análise aqui feita e apresentada sobre as cinco dissertações tornou-se decisiva para guiar especialmente a construção das discussões relacionadas à prática em sala de aula e a construção das atividades. Ou seja, a análise das cinco dissertações que tratam de métodos iterativos sob a perspectiva da análise das 104 dissertaçõs por Serafim, Ferreira e Amorim [8] e sob as diretrizes do PROFMAT nos fez ter uma preocupação maior com o impacto em sala de aula que este trabalho pode ter.

Assim, a pesquisa e as variadas leituras e reflexões que culminaram na discussão teórica apresentada no capítulo anterior e nas atividades da sequência didática proposta no capítulo seguinte são frutos dessa preocupação em se criar um produto que condiz aos propósitos do curso e também à realidade em que este professor de Matemática atua. Para tal, visto que o tema métodos iterativos abre espaço para se usar tecnologias, estas se fizeram presentes nos direcionamentos teóricos e na sequência didática através de calculadoras, planilhas de cálculo e do *software* GeoGebra, indo de encontro ao que propõem a BNCC para se explorar e exercitar habilidades relacionadas ao pensamento computacional, como também discutimos no Capítulo 3.

Abriu-se, então, espaço para a criação de uma proposta de sequência didática para aplicação em turmas do Ensino Médio, discutindo suas possíveis abordagens e embasamentos. Para isso, foi feito especialmente um estudo sobre as habilidades da BNCC que se relacionam com métodos iterativos e como essa base curricular sugere o uso de tecnologias. Para um maior aprofundamento, estudamos uma abordagem possível para ambientes informatizados proposto por Gravina [5]. A seguir apresentamos a proposta de Sequência Didática e variadas observações sobre o que se espera dos discentes e dos professores durante sua aplicação.

4 Proposta de Sequência Didática

Neste capítulo estão dispostas as aulas que compõem a proposta da Sequência Didática, cada uma em uma seção diferente. No preâmbulo de cada aula destacam-se as habilidades que se pretende trabalhar de acordo com a BNCC e os materiais necessários. Também no preâmbulo são sugeridos um tempo de 50 minutos para cada aula, além de destacar a qual público alvo se destina.

As atividades aqui propostas destinam-se a estudantes da etapa Ensino Médio (EM) e do final da Educação Básica (EB), visando aprimorar o letramento matemático desenvolvido durante esta etapa. Para isso, os estudantes se envolverão na **construção de um modelo** que possibilite **investigar** que a raiz de um número primo não é um número inteiro, além de **resolver o problema** de se aproximar a raiz quadrada desse número primo, usando a planilha tanto como ferramenta para aprimorar e estimular o raciocínio, quanto para **representar e comunicar os resultados**. Além do mais, há o uso de um *software* de geometria dinâmica para se estimular outras representações do problema e relacionar a álgebra com a geometria. E a fim de se criar um ambiente que potencialize o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pensamento computacional, consideramos interessante compor as atividades através de recursos computacionais. Assim, propomos o uso de calculadoras na Atividade 4.1.2, de planilhas nas Atividades 4.1.3 e 4.2.3 e do *software* GeoGebra na Atividade 4.2.1.

Destacaremos que, apesar de indicarmos a série específica, nada impede que o professor adeque à sua realidade de ensino e seu planejamento. As próprias habilidades mostram essa flexibilidade, de acordo com a Figura 3.1. As orientações aos professores e aos estudantes estão separadas, sendo que faz-se comentários para o professor em caixas de texto, de modo a melhor esclarecer alguns comandos.

De maneira sintética, se p é um natural primo, a proposta pedagógica propõe atividades que estimulem os estudantes a:

- Compreender através de registros e análises que $\sqrt{p} \notin \mathbb{N}$;

- Conjecturar por meio das iterações ou provar com mais rigor que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$;
- Aproximar ou estimar a raiz quadrada de um número primo através do Método da Bissecção e usando planilhas. Por exemplo, seguindo a lógica

  $$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4,$$

  a primeira aproximação será 3.5. Como $3.5^2 = 12.25 > 11$, então $3 < \sqrt{11} < 3.5$ e a segunda aproximação será 3.25.
- Relacionar por meio de diferentes registros a determinação de $\sqrt{p}$ com a raiz da função $f(x) = p - x^2$ e plotar o gráfico no *GeoGebra*.

A escolha deste problema possibilita ao professor trabalhar com os alunos vários temas de maneira integrada, a saber, primalidade, irracionalidade e cálculo de raízes, além de possibilitar lançar mão de recursos computacionais para isso. Essa abordagem transversal de vários temas traz, a nosso ver, um importante ganho para os alunos, ao mostrar que assuntos diversos estão relacionados, não sendo elementos soltos, compartimentados, a serem aprendidos.

As atividades foram divididas em dois grupos, tanto por conta das séries indicadas quanto por conta da progressão de raciocínio que estas propõem, mesmo que de forma não rígida. O primeiro grupo de atividades está disposto na Seção 4.1, composto pelas Atividades 1, 2 e 3, sugeridas para estudantes a partir do 9^o ano do EF. Já o segundo grupo de atividades está disposto na Seção 4.2, composto pelas atividades de 4 a 8, sugeridas para estudantes do EM.

4.1 Grupo 1 de Atividades

Nesta seção apresentamos o Grupo 1 de atividades, com o público alvo sugerido de estudantes a partir do 9^o do EF. Enfatizamos que trata-se de uma sugestão, pois as atividades podem ser usadas para anos anteriores do EF, de modo que o docente adapte-as a seu contexto sempre que necessário.

A primeira das aulas retoma a noção de primalidade como ponto de partida e propõem a investigação de raízes quadradas de primos. Mais especificamente, deseja-se estimular a percepção de que tais raízes quadradas são irracionais a partir das aproximações feitas.

Na segunda atividade, elaborada como uma continuação da Atividade 1, mas que pode ser considerada de modo independente, os objetivos são semelhantes aos da anterior, entretanto, nela adota-se o Método da Bissecção para se fazer a aproximação das raízes quadradas. Ou seja, há uma progressão no sentido de organizar melhor o raciocínio com um método mais bem delimitado.

Por fim, a Atividade 3 tem um vínculo maior à Atividade 2, pois trata-se de uma atividade semelhante porém com o uso de planilhas para organizar os dados, calcular as operações, registrar e comunicar os resultados. Após as três atividades apresentamos sugestões sobre o uso de fórmulas e outras ferramentas de planilhas para se usar o Método da Bissecção.

4.1.1 Atividade 1

Conteúdo: Números primos, aproximação de raízes irracionais

Público alvo: Alunos a partir do 9° ano do EF

Materiais: Impressão das atividades, quadro e pincel.

Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- As atividades devem ser realizadas preferencialmente em duplas ou trios, a fim de se estimular uma colaboração mútua entre os estudantes.
- Para esta aula, pode-se usar apenas o quadro e cadernos ou imprimir a atividade.
- Pode ser interessante relembrar noções de quadrados perfeitos e primalidade.

Para os estudantes: A atividade a seguir deve ser feita em duplas ou trios. Discutam e elaborem juntos as respostas!

1. Liste os seis primeiros quadrados perfeitos e os números primos entre eles, organizando a lista em ordem crescente. Destaque os números primos com marca texto ou escreva-os com outra cor.

Uma possibilidade é a seguinte lista 1,2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 36

2. Determine o valor aproximado da raiz quadrada de cada um desses primos.

Uma sugestão é fazê-lo sem o uso de calculadoras ou outros softwares, a fim de se explorar o raciocínio do estudante. É esperado que o item anterior motive-os a limitar uma aproximação a partir de raízes exatas. Por exemplo, como $4 < 7 < 9$ *então* $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ *e então* $\sqrt{7}$ *é um número decimal compreendido entre* 2 *e* 3.

3. Descreva o raciocínio utilizado no item anterior.

Espera-se, por exemplo, que o estudante aproxime a raiz a partir de raízes exatas. Contudo, como no exemplo anterior, o esperado é que o esudante tenha o insight de observar que $\sqrt{7}$ *deve ser obrigatoriamente maior do que* 2,2 *pois* $2{,}2^2 = 4{,}84$ *que é menor que* 7*. porém este pode ser um item a ser abordado pelo professor durante a aula como forma de pergunta, se, sabendo que* $\sqrt{7}$ *está entre* 2 *e* 3*, este resultado aproximado pode ser* 2,2 *e por quê?*

4. É possível que a raiz quadrada de algum número primo seja um valor inteiro? Por quê?

O professor pode intervir, caso julgue necessário, e sugerir a fatoração dos primeiros quadrados perfeitos, por exemplo, para que o estudante perceba que a propriedade de um número ser primo impede que este tenha raiz exata. Assim, é importante que o professor leve os alunos a perceber que nenhum primo é produto de dois inteiros maiores que 1, pois se o fosse, contradiria a definição de primalidade.

5. Vamos chamar de a a aproximação que vocês encontraram para $\sqrt{7}$ e vamos chamar de erro a diferença entre 7 e a^2, ou seja, $erro = |7 - a^2|$. O *erro* encontrado é menor que 0,15? Se não for, repita o processo de aproximação escolhido ou aprimore-o de modo a se obter um erro menor ou igual a 0,01. **Dica: aumente os algarismos significativos de** a.

> *Essa maneira diferente da teoria abordada na Seção 2.2 de se calcular o erro tem a vantagem de ser mais simples e assim de poder ser mais intuitiva para os estudantes do EM. Além do mais, na Atividade 4.2.1 estaremos interessados em plotar a função* $f(x) = x^2 - p$ *ou* $f(x) = p - x^2$*, de modo que o erro pode ser visualizado como* $|f(a)|$*, possuindo, portanto, uma abordagem visual. Caso o aluno sugira que* $\sqrt{7} = 2{,}9$*, o primeiro passo é verificar que* $2{,}9^2 = 8{,}41$ *que é maior que* 7*, ou seja, intuitivamente ele deve perceber que* $\sqrt{7}$ *é menor que* $2{,}9$ *e assim repetir o processo. Note também que a diferença entre* $8{,}41$ *e* 7 *é de* $1{,}41$*, de modo que o erro como definido está maior que o desejado.*

6. Agora vamos denominar b a aproximação que vocês obtiveram para $\sqrt{19}$ e de c a aproximação para $\sqrt{23}$. Melhore essas aproximações de modo que os respectivos erros sejam menores ou iguais a 0,01.

4.1.2 Atividade 2

Conteúdo base: números primos, fatoração de inteiros, aproximação de raízes irracionais

Público alvo: Alunos a partir do 9° ano do EF.

Materiais: Quadro e calculadoras.

Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- As atividades devem ser realizadas preferencialmente em duplas ou trios, a fim de se estimular uma colaboração mútua entre os estudantes.

- Nesta atividade é interessante o uso de calculadoras, objetivando-se gastar tempo com o raciocínio e não com as operações.
- Apresente um exemplo do método da bissecção. Sugestão:
  - Vamos fazer algumas aproximações para $\sqrt{11}$ usando o **Método da Bissecção**.
  - Primeiro, perceba que como $9 < 11 < 16$ então $3 < \sqrt{11} < 4$.
  - Portanto, nossa primeira aproximação para $\sqrt{11}$ será $a_1 = 3{,}5$, que é a média aritmética de 3 e 4.
  - Para verificar se 3,5 é uma boa aproximação para $\sqrt{11}$, vamos elevá-la ao quadrado. Fazendo $3{,}5^2$ obtemos 12,25 e temos um erro referente ao quadrado da raiz de $12{,}25 - 11 = 1{,}25$. Para aprimorarmos o resultado, nossa segunda aproximação a_2 será ou a média aritmética de 3 e 3,5 ou a média aritmética de 3,5 e 4. Qual escolher?

    Neste momento o professor pode pedir sugestões para a escolha da média aritmética com os discentes, justificando juntos as escolhas feitas. Neste caso como $3{,}5^2 > 11$, *temos que* $3 < \sqrt{11} < 3{,}5 < 4$ *e assim devemos escolher a média de* 3 *e* 3,5, *que é o intervalo onde se situa a raiz procurada. Logo* $a_2 = 3{,}25$ *que é a média entre* 3,25 *e* 3,5.
  - Logo $a_2 = 3{,}25$.
  - Como $3{,}25^2 = 10{,}56$, para obtermos outra aproximação verificamos primeiramente que $3{,}25 < \sqrt{11} < 3{,}5$ e assim $a_3 = 3{,}375$.
  - Agora é sua vez!

Para os alunos : A atividade a seguir deve ser feita em duplas ou trios. Discutam e elaborem juntos as respostas!

1. Com a ajuda de calculadora, calcule as aproximações a_4 e a_5 para $\sqrt{11}$.

   Pretende-se, com este item, verificar se os estudantes entenderam o processo.

2. Como vocês perceberam, cada aproximação é o ponto médio de um intervalo. Determine o comprimento de cada intervalo. Pode inferir alguma coisa?

Espera-se que os estudantes percebam que os intervalos diminuem à medida que se refina as aproximações.

3. Para cada aproximação a_n, calcule a diferença entre a_n^2 e 11, assim como foi feito no exemplo. Essa diferença é o erro de cada aproximação, e vamos chamá-lo de e_n.
4. Faça uma tabela no caderno com as aproximações obtidas (a_n), os intervalos e os erros (e_n).

O intuito é sistematizar os dados e o raciocínio de modo que facilite a construção do modelo usando planilhas, na próxima aula.

4.1.3 Atividade 3

Conteúdo base: números primos, fatoração de inteiros, aproximação de raízes irracionais

Público alvo: Alunos a partir do 9° ano do EF.

Materiais: Impressão e computadores.

Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- As atividades devem ser realizadas preferencialmente em duplas ou trios, a fim de se estimular uma colaboração mútua entre os estudantes.
- Para esta atividade é necessário o uso de planilhas.
- Pode ser interessante pedir para cada dupla ou trio fazer a aproximação da raiz de um primo diferente.

Para os alunos: A atividade a seguir deve ser feita em duplas ou trios. Vocês vão elaborar juntos uma planilha para aproximar uma raiz quadrada usando o Método da Bissecção.

1. Na última aula vocês fizeram uma tabela com as aproximações das raízes, os intervalos e os erros. Agora vocês farão uma tabela similar, porém usando planilhas eletrônicas e seus recursos para se obter aproximações para $\sqrt{29}$.

   Uma das principais vantagens do uso de planilhas é o de se comunicar os resultados obtidos anteriormente, neste caso através de processos iterativos, que se mostram em uma tela de forma organizada, além de possivelmente indicar erros e simplificar a tarefa de se fazer inúmeras operações. Logo, pode ser interessante explorar as fórmulas básicas que planilhas de cálculo possuem para facilitar os cálculos, como MÉDIA para se calcular a média aritmética simples, ABS para se determinar o valor absoluto, o operador circunflexo para se determinar o quadrado de um real, etc.

2. Uma sugestão é a planilha de vocês conter uma coluna com a quantidade de repetições, ou seja, 1,2,3, . . ., depois uma coluna com o menor valor do intervalo, outra com o maior valor do intervalo, uma coluna com o ponto médio de cada intervalo (usando fórmulas), uma com o quadrado da aproximação (também usando fórmulas) e por fim uma coluna com o erro (mais uma vez usando fórmulas).

   Essas sugestões podem ser dadas gradativamente, à medida que o professor percebe o desempenho dos estudantes. A Figura 4.1 pode servir como base para um modelo possível. Na Subseção 4.1.4 há maiores detalhes sobre a construção da planilha.

3. Calcule um grande número de iterações para ver se a dízima se repete.

4.1.4 Método da Bissecção usando planilhas

A Figura 4.1 mostra uma maneira de se usar planilhas para aplicar o Método da Bissecção. Apesar de derivar do algoritmo do método, os dados devem ser inseridos a cada iteração, atentando-se a escolha correta dos intervalos.

A Coluna A enumera as iterações; a Coluna B indica o menor extremo do intervalo, enquanto a Coluna C indica o maior; a Coluna D é opcional e mostra o "tamanho" do intervalo, induzindo a se perceber que os extremos se tornam cada vez mais próximos; A Coluna E é onde se insere o cálculo do ponto médio do intervalo, que trata-se das aproximações procuradas; a Coluna F é onde se insere o quadrado dessas aproximações; e objetivando-se verificar o quão próximo está o resultado de 11, na Coluna G calcula-se a diferença entre o quadrado da aproximação e o primo 11.

Agora vamos detalhar como se pode usar fórmulas para facilitar o processo descrevendo os dados das linhas 4, 5 e 6. Na linha 4 há os dados da primeira iteração, logo, o número de iterações dessa linha é 1. Em seguida, há o limite inferior do intervalo inicial, que é dado, 3, e o limite superior, 4. Até então os dados são inseridos manualmente nessa linha, sem fórmulas. Depois, insere-se o tamanho do intervalo, o que pode ser feito com a fórmula "=C4-B4", ou seja, o valor da coluna C linha 4, que é 4, menos o valor da coluna B linha 4, que é 3, resultando em $4 - 3 = 1$.

De agora em diante, escreveremos célula C4 por exemplo, ao invés de nos referirmos à coluna C e à linha 4 para um valor. Seguindo na célula E4, para calcularmos o ponto médio do intervalo, que é a primeira aproximação de $\sqrt{11}$, utilizando a função "MÉDIA", que recebe dois valores separados por ponto e vírgula. Assim, escrevendo-se "=MÉDIA(B4;C4)" calcula-se $(4 + 3)/2 = 3{,}5$. Em seguida, na célula F4, insere-se "$= E4\hat{}\ 2$", o que equivale a elevar o número da célula E4 ao quadrado, ou seja, $3{,}5^2 = 12{,}25$. Por fim, na célula G4, onde se insere o erro, usamos a função "ABS", que retorna o valor absoluto de um número. Como no caso estamos interessados no módulo da diferença entre 11 e o quadrado da aproximação, escevemos nesta célula "=ABS(11-F4)", que calcula $|11 - 12{,}25| = 1{,}25$. Deste modo a primeira iteração está completa.

Para a segunda iteração, que ocorre na linha 5, vamos destacar as células B5 e C5, pois as outras recebem os dados e fórmulas de modo análogo à linha 4. É importante ressaltar que a escolha dos extremos de cada intervalo, exceto do inicial, deve ser feita após a observação do resultado encontrado na coluna "F". No caso, após verificarmos que a célula F4 indica que o quadrado da primeira aproximação é maior que 11, de modo que $3{,}5 > \sqrt{11}$. Então o próximo intervalo deve ser $[3, 3.5]$, e assim inserimos manualmente os valores 3 na célula B5 e 3,5 na célula C5.

Cabe destacar que nas planilhas há a função condicional "SE" que poderia automatizar a escolha do intervalo, mas aqui preferimos fazê-lo manualmente para enfatizar essa tomada de decisão e mostrar o entendimento da teoria envolvida. De modo similar, observando-se na célula F5 que $3{,}25^2 < 11$, o próximo intervalo deverá ser [3.25,3.5], e então as céulas B6 e C6 recebem, respectivamente, os valores 3,25 e 3,5. Nas demais linhas o procedimento é análogo. Na Atividade 8, Seção 4.2.5, há outra construção possível para o Método da Bissecção através de planilhas, e as diferenças se encontram detalhadas no tópico "Método da Bissecção usando planilhas 2", ao final da referida seção.

Figura 4.1: Exemplo de um modelo possível para a construção da planilha.

E4 =MÉDIA(B4:C4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	APROXIMANDO A RAIZ QUADRADA DO PRIMO PELO MÉTODO DA BISSECÇÃO						11
2–3	NÚMERO DE ITERAÇÕES	INTERVALO		TAMANHO DO INTERVALO	PONTO MÉDIO (RAIZ APROXIMADA)	QUADRADO DA APROXIMAÇÃO	ERRO
4	1	3	4	1	3.5	12.25	1.25
5	2	3	3.5	0.5	3.25	10.5625	0.4375
6	3	3.25	3.5	0.25	3.375	11.390625	0.390625
7	4	3.25	3.375	0.125	3.3125	10.97265625	0.02734375
8	5	3.3125	3.375	0.0625	3.34375	11.18066406	0.1806640625
9	6	3.3125	3.34375	0.03125	3.328125	11.07641602	0.07641601563
10	7	3.3125	3.328125	0.015625	3.3203125	11.0244751	0.02447509766
11	8	3.3125	3.3203125	0.0078125	3.31640625	10.99855042	0.001449584961
12	9	3.31640625	3.3203125	0.00390625	3.318359375	11.01150894	0.01150894165
13	10	3.31640625	3.318359375	0.001953125	3.317382813	11.00502872	0.00502872467
14							

Fonte: Criado pelo autor através do Planilhas *Google*.

4.2 Grupo 2 de atividades

O segundo grupo é composto por atividades que além de explorar o Método da Bissecção e o Método de Newton para se aproximar raízes, explora também a representação gráfica do problema através de funções quadráticas, exponenciais e logarítmicas, extrapolando o caráter calculista. Podemos pensá-las de forma independente do Grupo 1 ou como progressão das atividades desse grupo. Se isoladas, essas atividades podem ser precedidas por exemplos do uso do Método da Bissecção, como exibido na Atividade 2. Agora, se pensadas em continuidade de uma ou mais atividades do Grupo 1, há uma progressão interessante do raciocínio, uma vez que inserir o conteúdo de funções implica em aumentar as habilidades envolvidas e porntanto, a complexidade das atividades.

A Atividade 5 é precedida por comentários sobre a teoria Matemática envolvida, a fim de melhor guiar o professor, e após a Atividade 8 apresentamos sugestões para o uso de recursos da planilha para se usar o Método da Bissecção e também o de Newton.

4.2.1 Atividade 4

Conteúdo base: números primos, fatoração de inteiros, aproximação de raízes irracionais

Público alvo: Alunos a partir do 1° ano do Ensino Médio

Materiais: Computadores

Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT302): Construir modelos empregando as funções polinomiais de 2º, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- As atividades devem ser realizadas preferencialmente em duplas ou trios, a fim de se estimular uma colaboração mútua entre os estudantes.
- A Figura 4.2 mostra uma possibilidade para a representação geométrica do problema de se encontrar $\sqrt{11}$ através da função $f(x) = x^2 - 11$, onde $f(x) = 0$. Uma dúvida que pode surgir nesse momento é a possibilidade da raiz encontrada poder ser negativa. Contudo, o professor deve mostrar ao aluno a diferença entre resolver a equação $x^2 - 11 = 0$ e o cálculo de uma raiz quadrada de um inteiro positivo. É importante enfatizar que $\sqrt{p}$ com $p > 0$ é sempre um resultado positivo e resolver $x^2 - p = 0$ equivale a fazer $(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p}) = 0$ chegando a $x = \sqrt{p}$ ou $x = -\sqrt{p}$. Outras possibilidades poderiam ser as funções $g(x) = 11 - x^2$ ou $h(x) = |x^2 - 11|$. Na Figura 4.2, os pontos A e B foram gerados com o comando *Raízes* do GeoGebra, que tem como entradas uma função, no caso f, e um intervalo real, no caso $[-20{,}20]$. O comando é exibido no painel lateral esquerdo. Os pontos C, D e E possuem como abscissas as três

primeiras aproximações para $\sqrt{11}$ conforme a Figura 4.1, e como ordenadas, a função f aplicada em cada uma dessas aproximações. Desse modo, quanto mais próximo de zero o valor de $f(x)$, melhor é a aproximação.

- Outro recurso interessante e de relativo fácil uso no GeoGebra para se aproximar o resultado de raízes de funções através de seus gráficos é o *zoom.* Com o cursor do mouse ou com uma lupa disposta no canto inferior direito da tela dessse *software* é possível diminuir ou aumentar a escala do gráfico de modo que os valores em torno da taiz sejam mais facilmente visualizados. Uma vantagem sobre o comando *Raiz* é que o *zoom* é um recurso comum em variadas aplicações computacionais podendo assim ser mais facilmente assimilada pelos discentes.

Para os alunos: Façam as atividades a seguir em duplas ou trios. Utilizaremos o *software* GeoGebra para interpretar os resultados obtidos.

1. A raiz quadrada de um número $p > 0$ é um número $a > 0$ tal que $a^2 = p$. Nas aulas anteriores nós encontramos aproximações para a para alguns primos p. Determine, com seu grupo, uma função tal que uma de suas raízes seja a usando o primo da última aula (aula planilhas).

2. Use o *software* GeoGebra para plotar a função que determinaram.

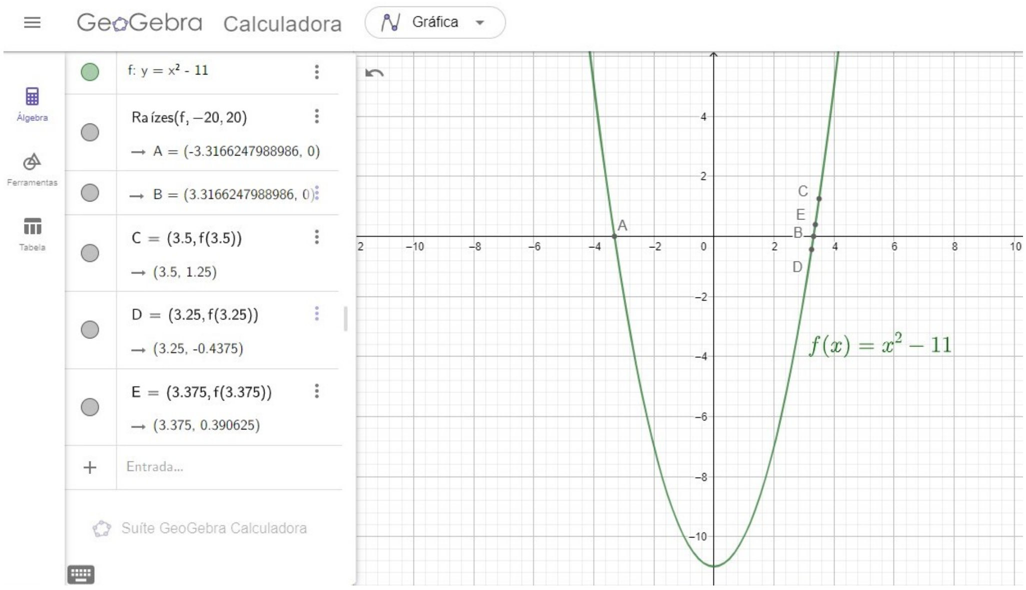
   A interface do software GeoGebra apresenta uma janela lateral chamada "janela de álgebra" onde a "fórmula" da função pode ser inserida e automaticamente o gráfico da função será plotada, a menos de algum erro de digitação.

3. A partir do gráfico, estime o valor da raiz da função.

   O comando "Raiz", que pode ser inserido na janela de álgebra do GeoGebra, exibe em um certo intervalo as raízes de uma função, se existirem. Assim, o comando recebe duas entradas: a função, que pode ser inserida de maneira reduzida apenas com a letra "f" por exemplo, caso já tenha sido declarada antes, e o intervalo onde se deseja calcular a raiz. Outro modo de se exibir a raiz é selecionar o menu "Ferramenta", que também se encontra no painel lateral esquerdo, escolher "Interseção de Dois Objetos" e clicar com o cursor do mouse sobre o gráfico da função e depois sobre o eixo x.

4. Plote, para cada aproximação a_n obtida na aula anterior, os pontos $(a_n, f(a_n))$ no gráfico.

Figura 4.2: Usando o GeoGebra para construir uma representação geométrica para a determinação da raiz quadrada de um primo e aproximações.



Fonte: Criado pelo autor através do GeoGebra.

A função $f(x) = x^2 - 11$ possui duas raízes reais, uma positiva e outra negativa. E cabe ao professor indicar para os alunos que estamos procurando pela aproximação da raiz positiva, de acordo com o problema inicial de se encontrar $\sqrt{11}$ ou de outro primo. De qualquer forma, como as raízes são simétricas em relação à origem, encontrar ou aproximar a raiz positiva é equivalente a encontrar ou aproximar a raiz negativa. A construção do gráfico através do *GeoGebra* permite explorar graficamente essas propriedades e também possibilita transitar do problema inicial ao problema de se encontrar raízes de funções. Mais do que representar um problema de aproximar raízes graficamente, o *GeoGebra* foi particularmente útil para estimar os intervalos onde algumas funções possuem raízes. Por exemplo, pode ser uma tarefa complexa ou no mínimo trabalhosa mostrar que a função $g(x) = e^x - 2x - 3$ possui raízes reais e em quais intervalos, mas através do *software* temos uma representação gráfica que nos poupa tempo e ajuda nas conjecturas.

4.2.2 Atividade 5

Conteúdo base: Funções logarítmicas e exponenciais, funções inversas

Público alvo: Alunos a partir do 1° Ano do Ensino Médio

Materiais: Impressão.

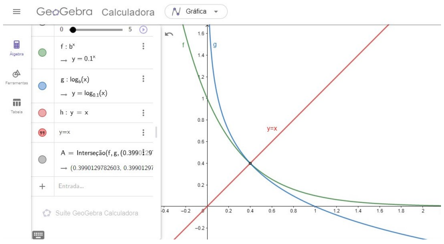
Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

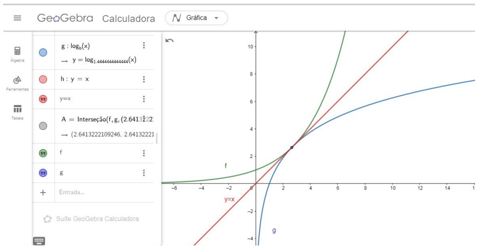
Antes de apresentarmos os planos das aulas 5 e 6, vamos discutir brevemente a teoria matemática abordada e assim contextualizar seus prerrequisitos. Sabe-se que as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$ são inversas e que funções inversas são simétricas em relação à reta $y = x$. E mais, caso $b > 1$, seus gráficos podem não se interceptar, como mostra a figura 4.5, podem possuir apenas um ponto em comum, como mostra a Figura 4.4 ou ainda, podem possuir dois pontos em comum, como mostra a figura 4.6. E caso $0 < b < 1$, as funções f e g se cortam em um ponto, o que pode ser observado pela Figura 4.3. As figuras foram construídas através do GeoGebra, o que nos motiva a pensarmos nas interessantes conjecturas que podem ser testadas a partir de recursos computacionais. E mais, essas possibilidades, especialmente para $b > 1$, podem ser um fato interessante e possivelmente desconhecido por muitos professores, destacando novamente a importância dos recursos computacionais. Por conta da simetria em relação à reta $y = x$, este ponto de intersecção deve se dar sobre esta reta. Mas, mesmo sabendo dessas informações, determinar o valor de x que satisfaz $f = g$ não é simples. Assim, na aula 5 o objetivo é que os estudantes encontrem e analisem a impossibilidade de se determinar tal ponto por tentativas de se resolver equações. Já na aula seguinte, é proposto uma aplicação do método da bissecção para resolver o problema particular de se aproximar o valor da intersecção das funções $f(x) = 0{,}1^x$ e $g(x) = \log_{0,1} x$, ou seja, de se resolver a equação $0{,}1^x = \log_{0,1} x$.

Figura 4.3: Interseção das funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$ com $0 < b < 1$.



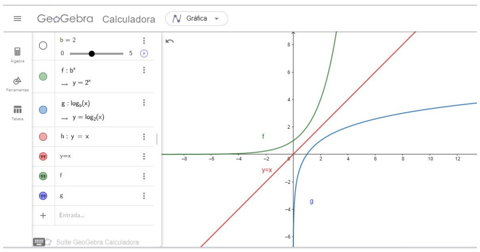
Fonte: Criado pelo autor através do GeoGebra.

Figura 4.4: Interseção das funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$ com $b > 1$.



Fonte: Criado pelo autor através do GeoGebra.

Figura 4.5: Inexistência de interseção entre as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$ com $b > 1$.



Fonte: Criado pelo autor através do GeoGebra.

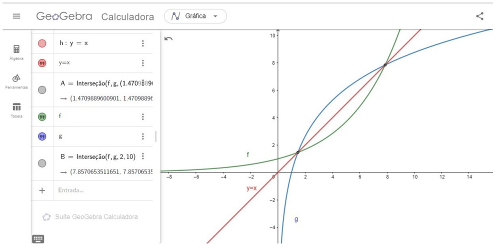
Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- As atividades devem ser realizadas preferencialmente em duplas ou trios, a fim de se estimular uma colaboração mútua entre os estudantes.

Para os alunos: Considerando as funções $f(x) = 0{,}1^x$ e $g(x) = \log_{0{,}1} x$, faça o que se pede.

1. Monte estratégias para resolver a equação $f(x) = g(x)$.

Figura 4.6: Interseções das funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$ com $b > 1$.



Fonte: Criado pelo autor através do GeoGebra.

Este exercício inicial pode ser um estímulo para os estudantes notarem que nem toda equação é de fácil resolução, com fórmulas explícitas para sua resolução. Assim, cria-se um contexto rico para aplicar um método iterativo para aproximar a solução. Entretanto, ainda resta encontrar a equação para a qual desejamos aproximar a raiz. Há várias possibilidades, que surgem das propriedades de logaritmo e do fato das funções tratadas serem inversas, das quais listamos a seguir quatro.

(a) $0{,}1^x = \log_{0,1} x \Leftrightarrow -x = \log_{10}(-\log_{10} x)$

(b) $0{,}1^x = \log_{0,1} x \Leftrightarrow 10^{10^{-x}} = x^{-1}$

(c) $0{,}1^x = \log_{0,1} x \Leftrightarrow x = \log_{0,1}(\log_{0,1} x)$

(d) $0{,}1^x = \log_{0,1} x \Leftrightarrow 0{,}1^{0{,}1^x} = x$

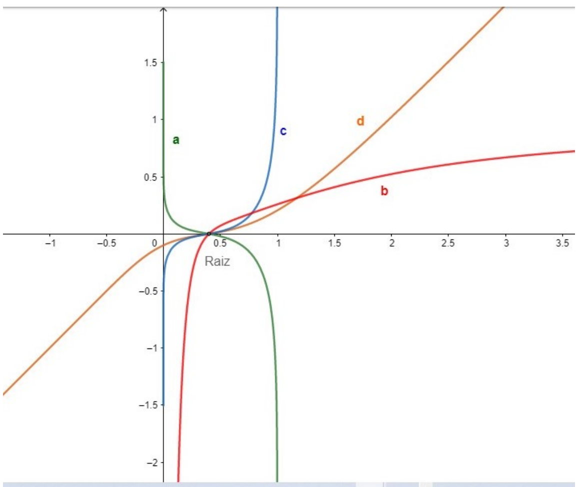
2. Usando planilhas eletrônicas na próxima aula vamos obter aproximações para o ponto de intersecção das funções f e g. Para isso, antes precisamos montar uma função a partir da equação obtida, de modo que determinar a raiz dessa função signifique resolver a equação.

Vamos explorar a equação "d" da lista anterior, ou seja, de $0{,}1^{0{,}1^x} = x$ vamos obter a função $h(x) = x - 0{,}1^{0{,}1^x}$. Assim, aproximar a raiz de h é equivalente a aproximar a intersecção das funções f e g. A abordagem para outras escolhas de h é similar, apesar de que especial atenção deva ser dada ao domínio de cada função escolhida.

3. Assim que todos finalizarem, compare a equação encontrada com a de outros grupos.

A ideia é explorar diferentes maneiras de se chegar na função h, como representado graficamente na Figura 4.7

Figura 4.7: Possibilidades para a função $h(x)$.



Fonte: Criado pelo autor através do GeoGebra.

4.2.3 Atividade 6

Conteúdo base: Funções inversas

Público alvo: Alunos do 1° Ano do Ensino Médio

Materiais: Computadores e impressão.

Tempo: Duas aulas de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- Continuação da aula anterior.
- Um dos objetivos centrais desta aula é usar o Método da Bissecção para aproximar a resolução da equação $x = 0{,}1^{0{,}1^x}$ construindo a função $h(x) = x - 0{,}1^{0{,}1^x}$ e aproximando sua raiz através de planilhas. Assim, desenvolver

habilidades relacionadas a este recurso computacional também faz parte dos objetivos da aula.

- A Figura 4.8 mostra uma possibilidade para se fazer os cálculos e se organizar os resultados obtidos. Na primeira coluna, temos o número de iterações e para cada uma delas temos o intervalo, o ponto médio m do intervalo - que é a aproximação relativa à iteração - e $h(m)$, que é a função h calculada no ponto médio.

Para os alunos: Faça o que se pede.

1. Usando planilhas eletrônicas vamos obter aproximações para o ponto de intersecção das funções f e g. Para isso, transforme a equação obtida na última aula em uma outra função, de modo que resolvê-la signifique determinar a raiz dessa função.

   Vamos explorar a equação "d" da lista anterior, ou seja, de $0{,}1^{0{,}1^x} = x$ *vamos obter a função* $h(x) = x - 0{,}1^{0{,}1^x}$*. Assim, aproximar a raiz de* h *é equivalente a aproximar a intersecção das funções* f *e* g*. A abordagem para outras escolhas de* h *é similar, apesar de que atenção especial ao domínio deve ser dada, especialmente quando se opta pelas equações "a" e "c".*

2. Usando a planilha eletrônica, calcule $h(x)$, a função encontrada na última aula, dando atenção especial ao sinal da função, para os seguintes valores de x:

   Aqui estimula-se a percepção de que f *é crescente, possui imagens negativas e positivas, portanto, dada sua continuidade, possui raiz, justificando lançar-se mão do Método da Bissecção no item seguinte. Interessante notar que a função* h *se aproxima muito da função* $y = x$ *para valores negativos de* x*, e se aproxima muito de* $y = x - 1$ *para valores positivos de* x*, pois* $0{,}1^{0{,}1^x}$ *é próximo de* 1 *.*

   -100, -10, -1, -0,1, 0, 0,1, 1, 10 e 100.

3. Quais conclusões podem inferir sobre a raiz de h, baseando-se no item anterior?

Espera-se que os estudantes percebam a existência da raiz de h entre, por exemplo, 0 e 3, pois $h(0) < 0$ e $h(10) > 0$. Como h é uma composição de funções contínuas, tem-se que h é contínua, logo existe ao menos uma raiz real entre 0 e 10.

4. Agora, usando-se planilhas, vamos calcular aproximações para a raiz de h utilizando-se intervalos cada vez menores que a contém e seus pontos médios.

Aqui o Método da Bissecção será utilizado de fato. A ideia é que quando os estudantes perceberem que a raiz p de h está entre dois números reais a e b, pois $h(a) \cdot h(b) < 0$, tomaremos como aproximação para p o ponto médio m de $[a,b]$. E se $h(a) \cdot h(m) < 0$, então tomamos como segunda aproximação para p o ponto médio de $[a,m]$, e assim sucessivamente. Então, a intervenção do professor neste momento é essencial. Uma possibilidade para organizar os dados e cálculos em planilhas é mostrado na Figura 4.8, que é similar à construção da planilha da Figura 4.1. Há, ao final da Atividade 3, Seção 4.1.3, e ao final da Atividade 8, Seção 4.2.5, mais detalhes sobre como se construir planilhas para se usar o Método da Bissecção.

Figura 4.8: Aproximando a raiz de $h(x) = x - 0{,}1^{0{,}1^x}$.

	A	B	C	D	E
1	APROXIMANDO A INTERSECÇÃO DAS FUNÇÕES F E G				
2–3	NÚMERO DE ITERAÇÕES:	INTERVALO		PONTO MÉDIO (RAIZ APROXIMADA)	H CALCULADA NO PONTO MÉDIO
4	1	0	3	1,50000	0,57023
5	2	0	1,5	0,75000	0,08599
6	3	0	0,75	0,37500	-0,00371
7	4	0,375	0,75	0,56250	0,03020
8	5	0,375	0,5625	0,46875	0,01147
9	6	0,375	0,46875	0,42188	0,00361
10	7	0,375	0,42188	0,39844	-0,00009
11	8	0,39844	0,42188	0,41016	0,00175
12	9	0,39844	0,41016	0,40430	0,00083
13	10	0,39844	0,40430	0,40137	0,00037
14	11	0,39844	0,40137	0,39991	0,00014
15	12	0,39844	0,39991	0,39917	0,00002
16	13	0,39844	0,39917	0,39881	-0,00003
17	14	0,39917	0,39899	0,39908	0,00001
18					

Fonte: Criado pelo autor através do Planilhas *Google*

4.2.4 Atividade 7

Conteúdo base: Aproximação de raízes

Público alvo: Alunos a partir do 1º ano do Ensino Médio

Materiais: Computadores e impressão.

Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- As atividades desta aula são destinadas a alunos que já conhecem o Método da Bissecção. Na Atividade 4.1.1 há uma sugestão para se introduzi-lo.
- As atividades devem ser realizadas preferencialmente em duplas ou trios, a fim de se estimular uma colaboração mútua entre os estudantes.
- Para esta aula é necessário o uso de planilhas.
- A Figura 4.9 mostra uma construção possível através de planilhas para as aproximações da função pelo Método da Bissecção. Na coluna A insere-se a_n, a cada iteração, o menor extremo do intervalo, enquanto na coluna B insere-se b_n, o maior extremo. Para que o método tenha efeito, em cada iteração devemos ter $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, de modo que, a cada iteração, os alunos devem escolher quais serão os extremos. Exceto na primeira iteração, cujos extremos 2,1 e 3 são dados no primeiro exercício. Maiores detalhes sobre esta construção serão dadas nos tópicos finais da atividade seguinte, na Seção 4.2.5

Para os alunos: Façam as atividades a seguir em duplas ou trios. Considere a função $f(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x - 10$ e depois faça o que se pede.

1. Verifique que $x = 2$ é raiz de f.

2. Calcule $f(2{,}1)$ e $f(3{,}0)$.
3. Usando-se os resultados do item anterior, é possível afirmar que f possui uma raiz entre 2,1 e 3,0? Por quê?
4. Usando o Método da Bissecção, faça dez aproximações para esta raiz.

Figura 4.9: Usando planilhas para aproximar uma raiz de $f(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x - 10$ através do Método da Bissecção.

D5 =MÉDIA(B5:C5)

APROXIMANDO UMA RAIZ DA FUNÇÃO F PELO MÉTODO DA BISSECÇÃO						
NÚMERO DE ITERAÇÕES	INTERVALO		PONTO MÉDIO (RAIZ APROXIMADA)	F(A)	F(B)	F(na raiz aproximada)
	A	B				
1	2,100000000000	3,000000000000	2,550000000000	-0,201190000000	32,000000000000	4,547128437500
2	2,100000000000	2,550000000000	2,325000000000	-0,201190000000	4,547128437500	0,580785283203
3	2,100000000000	2,325000000000	2,212500000000	-0,201190000000	0,580785283203	-0,086781342468
4	2,212500000000	2,325000000000	2,268750000000	-0,086781342468	0,580785283203	0,164093888502
5	2,212500000000	2,268750000000	2,240625000000	-0,086781342468	0,164093888502	0,019735518312
6	2,212500000000	2,240625000000	2,226562500000	-0,086781342468	0,019735518312	-0,038034933241
7	2,226562500000	2,240625000000	2,233593750000	-0,038034933241	0,019735518312	-0,010304647059
8	2,233593750000	2,240625000000	2,237109375000	-0,010304647059	0,019735518312	0,004423304586
9	2,233593750000	2,237109375000	2,235351562500	-0,010304647059	0,004423304586	-0,003013278165
10	2,235351562500	2,237109375000	**2,236230468750**	-0,003013278165	0,004423304586	0,000686808331

Fonte: Criado pelo autor através de planilhas *Google*.

4.2.5 Atividade 8

Conteúdo base: Aproximação de raízes

Público alvo: Alunos a partir do 1° ano do Ensino Médio

Materiais: Computadores e impressão.

Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT510). Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Para os professores: Algumas sugestões e direcionamentos.

- As atividades desta aula são destinadas a alunos que já conhecem o Método da Bissecção. Na Aula 4.1.1 há uma sugestão para se introduzi-lo.
- As atividades devem ser realizadas preferencialmente em duplas ou trios, a fim de se estimular uma colaboração mútua entre os estudantes.
- Para esta aula é necessário o uso de planilhas.
- A Figura mostra uma construção possível através de planilhas para as aproximações da função pelo Método de Newton.

Para os alunos: Considere a função estudada na aula anterior, $f(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x - 10$.

1. Nesta aula, vamos usar o Método de Newton para aproximar a mesma raiz de f da aula anterior. Lembre-se que pelo Método da Bissecção a proximação inicial foi de 2,55, que será a mesma aproximação inicial para esta aula. As aproximações através do Método de Newton se dão através da seguinte fórmula:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

Onde $f'(x)$ é o que chamamos de derivada de f dada pelo polinômio $f(x) = 5x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 24x + 5$.

Assim, a segunda aproximação será

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 2{,}55 - \frac{f(2{,}55)}{f'(2{,}55)}.$$

Um dos propósitos desta atividade é o de mostrar aos estudantes que existe mais de um modo de se aproximar raízes e que tal modo utiliza de um importante conceito matemático, geralmente não estudado no Ensino Básico, que é a derivada. Podemos separar as propriedades usadas em duas. A primeira diz respeito à derivada de um monônio. Ou seja, se $p(x) = ax^n$ então sua derivada, $p'(x)$, é tal que $p(x)' = n \cdot ax^{n-1}$, onde $n \in \mathbb{N}$. A outra propriedade é a de que a derivada da soma de um polinômio é a soma das derivadas dos monônios que o compõem. Assim, se $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, então $p'(x) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot c_i x^{i-1}$, onde $c_i \in \mathbb{R}$.

a) Usando planilhas, calcule $f(2{,}55)$ e $f'(2{,}55)$.

Espera-se que os estudantes façam as substituições nos polinômios e encontrem $f(2.55) \approx 4.55$ *e* $f'(2.55) \approx 27.92$.

b) Usando a fórmula apresentada acima, calcule a segunda aproximação, a_2.

Usando a sequência do Método de Newton apresentada anteriormente obtém-se $a_2 \approx 1.27$.

2. Faça as 10 primeiras aproximações realizando os dados e organizando os cálculos em uma planilha.

A Figura 4.10 mostra uma maneira possível para se fazer as operações e organizar os dados em planilhas, onde na primeira coluna há a quantidade de iterações, na segunda as aproximações e na terceira, calcula-se a função em cada aproximação de modo a ser possível verificar o quão próximo da raiz cada aproximação é. Exceto pela primeira aproximação, 2.55, *que é dada, as outras aproximações são calculadas na própria planilha, usando-se a fórmula do Método de Newton.*

3. Agora faça as 10 primeiras aproximações usando o Método da Bissecção.

Esse exercício tem como propósito comparar os dois métodos, Bissecção e Newton, e se aplica caso os alunos em questão já tenham participado das aulas anteriormente propostas. A Figura 4.10 mostra uma possível construção para a planilha, similar à Figura 4.9.

4.2.6 Método de Newton e Método da Bissecção usando planilhas

No final da Atividade 3, disposta na Seção 4.1.3, descrevemos com detalhes um modo de se construir planilhas para se aplicar o Método da Bissecção, fazendo referência à planilha da Figura 4.1. Na Atividade 8, fazemos referência a outra possibilidade de construção, modelo representado na Figura 4.8. Vamos destacar as diferenças em sua construção, de maneira que recomendamos a leitura do tópico final da Atividade 3.

No caso da Atividade 8, calcula-se na coluna E4, na linha da primeira iteração, o valor da função f no menor extremo do intervalo, ou seja, $f(2.1)$. Par isto, basta inserir B4 no lugar do x na função, de modo que esta célula vai receber "$= B4\hat{}5 - 2 * B4\hat{}4 - 6 *$

Figura 4.10: Usando planilhas para aproximar uma raiz de $f(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x - 10$ através do Método de Newton.

Q5 =Q4-(Q4^5-2*Q4^4-6*Q4^3+12*Q4^2+5*Q4-10)/(5*Q4^4-8*Q4^3-18*Q4^2+24*Q4+5)

APROXIMANDO A RAIZ DA FUNÇÃO f PELO MÉTODO DE NEWTON		
NÚMERO DE ITERAÇÕES	RAIZ APROXIMADA	f(na raiz aproximada)
1	2,55000000000000	4,547128437500
2	2,38711699720932	1,270119878458
3	2,29129505335826	0,309544280067
4	2,24751055424277	0,051444285201
5	2,23673070729367	0,002809002688
6	2,23607041286592	0,000010284477
7	2,23606797753287	0,000000000140
8	2,23606797749979	0,000000000000
9	2,23606797749979	0,000000000000
10	**2,23606797749979**	0,000000000000

Fonte: Criado pelo autor através de planilhas *Google*.

$B4\hat{}3 + 12 * B4\hat{}2 + 5 * B4 - 10$". De modo análogo, a célula F4 calcula $f(3{,}0)$, recebendo "$= C4\hat{}5 - 2*C4\hat{}4 - 6*C4\hat{}3 + 12*C4\hat{}2 + 5*C4 - 10$" e a célula G4 calcula f no ponto médio do intervalo da iteração, recebendo "$= D4\hat{}5 - 2*D4\hat{}4 - 6*D4\hat{}3 + 12*D4\hat{}2 + 5*D4 - 10$".

Para a segunda iteração, devemos determinar o intervalo, assim como na Figura 4.1, mas desta vez analisando os sinais de f nos extremos e na raiz aproximada, o ponto médio 2.55. Assim, como $f(2{,}1) < 0$ e $f(2.55) > 0$, o próximo intervalo será [2.1,2.55] e as células B5 e C6 recebem, respectivamente, os valores 2.1 e 2.55, tal como o Algoritmo 2.2.1 o faz. As próximas linhas seguem de modo similar.

Já a Figura 4.10 mostra uma maneira de se aplicar o Método de Newton através de planilhas. Na linha 4, onde há a primeira iteração, insere-se manualmente na célula Q4, a primeira aproximação, que é dada, e no caso vale 2.55. Na céula R4 calcula-se o valor da função na aproximação, ou seja, $f(2.55)$, de maneira similar ao tópico anterior, de modo que deve-se inserir nesta céula a fórmula "$= B4\hat{}5 - 2*B4\hat{}4 - 6*B4\hat{}3 + 12*B4\hat{}2 + 5*B4 - 10$". Já na iteração 2, cujos dados estão dispostos na linha 5, a célula Q5 recebe a fórmula do Método de Newton, ou seja $a_2 = a_1 - f(a_1)/f'(a_1)$ para calcular a segunda aproximação. Inserindo na célula Q5 a fórmula "$= Q4 - (Q4\hat{}5 - 2 * Q4\hat{}4 - 6 * Q4\hat{}3 + 12 * Q4\hat{}2 + 5 * Q4 - 10)/(5 * Q4\hat{}4 - 8 * Q4\hat{}3 - 18 * Q4\hat{}2 + 24 * Q4 + 5)$" obtemos 2.38711699720932. As outras células são preenchidas de forma similar.

5 Conclusão

Durante a construção deste trabalho, o estudo de métodos iterativos se mostrou relevante para nós por muitos motivos, como o conhecimento adquirido dos conceitos matemáticos envolvidos e aplicados em uma importante área da Matemática. Mas arriscamos afirmar que a principal relevância deste trabalho é a de ser uma ponte para se conectar a Matemática acadêmica com a Educação Básica.

Assim, entre muitos outros aspectos que podemos destacar da dissertação, acreditamos que as atividades propostas no Capítulo 4 e apresentadas aqui como o produto do trabalho são relevantes para se explorar o ensino de Matemática através da ótica do pensamento computacional. Isso porque, apesar de não proporem diretamente a construção de um algoritmo em uma linguagem de programação, as atividades consideram a compreensão do problema de se aproximar uma raiz, fazer a análise, modelá-lo, abordá-lo e apresentá-lo através do uso de planilhas, comparando as diversas soluções (aproximações) e automatizando alguns dos procedimentos relacionados (usando-se fórmulas na planilha), compreendendo, assim, passos e tomadas de decisões que poderiam não ser trabalhados caso o processo fosse totalmente automatizado. Essa abordagem, combinada com o uso do aplicativo GeoGebra, a nosso ver, podem melhorar o ensino/ aprendizagem de Matemática pois exploram diferentes possibilidades de se desenvolver habilidades relacionadas, como descritas na seção "A BNCC" do Capítulo 3, e que incluem diferentes registros (no caderno, nas planilhas e no GeoGebra) e diferentes formas de pensar o mesmo problema (algebricamente, geometricamente, algoritmicamente). São também atividades que estimulam o uso de ferramentas tecnológicas, como planilhas, o *software GeoGebra* e calculadoras, potencializando a aprendizagem e o ensino de Matemática conforme discutido na Seção 3.2.

Além de levar em consideração as potencialidades que ambientes informatizados podem propor, para compor as atividades da Sequência Didática também realizamos uma análise de dissertações relacionadas ao mesmo tema (cálculo numérico) do PROFMAT, feita na Seção 3.3. Consideramos de fundamental importância analisar como essas dissertações produzem para a Educação Básica, especialmente para um mestrando de um programa voltado para professores de Matemática dessa etapa de ensino. Conhecer o contexto em que se está inserido, como mestrando, foi fundamental para decidir o que e como produzir. Mesmo que o recorte aqui feito tenha sido pequeno, seus resultados convergem aos do estudo do artigo "Criptografia na educação básica: um cenário das pesquisas do PROFMAT" [8], portanto amplificados, de modo que a análise se tornou decisiva para a construção da Sequência Didática. Isso porque compreendemos melhor a importância de a produção necessitar ter impacto na EB.

A análise desencadeou reflexões sobre o que se almejava produzir, fazendo-nos notar que, como professores de matemática da EB em um contexto de um mestrado voltado para tais, um dos principais objetivos é o de se obter um retorno para essa etapa da educação. Dito de outra forma, após verificarmos que muitas das dissertações do PROFMAT não produzem adequadamente como preveem as diretrizes desse programa de mestrado, seja não propondo atividades para a Educação Básica, seja não realizando pesquisas e/ou leituras sobre o Ensino de Matemática, optamos por construir um trabalho que levasse em conta o papel do professor de Matemática, materializado não apenas na Sequência Didática, Capítulo 4, como também nas pesquisas, análises e reflexões que permeiam toda a dissertação e que ganham destaque no Capítulo 3. Desse modo, na composição das atividades a busca por aplicabilidade na Educação Básica ganhou mais destaque que o viés acadêmico da Matemática, de modo que acreditamos propor um material com impacto significativo em sala de aula.

Portanto, este trabalho de conclusão de curso finaliza com êxito um processo de estudos e reflexões que têm influência positiva e direta na prática de um professor de Matemática.

Referências

1 BARCELOS, T. S.; SILVEIRA, I. F. Pensamento computacional e educação matemática: Relações para o ensino de computação na educação básica. v. 2, p. 23, 2012.

2 BURDEN, R. L.; FAIRES, J. Análise numérica. McGraw Hill, Rio de Janeiro, 2001.

3 GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo, vol. 4 . Grupo Gen-LTC, 2000.

4 NETO, A. C. M. Fundamentos de cálculo. SBM, Rio de Janeiro, p. 561, 2015.

5 GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. *Informática na educação: teoria e prática. Porto Alegre. Vol. 1, n. 2 (abr. 1999), p. 73-88*, 1999.

6 ROCHA, J. M. A planilha eletrônica como recurso didático: Um exemplo com multiplicação de matrizes. 2014.

7 KALILE, P. A. Algoritmos como ferramenta no ensino de matrizes. 2020.

8 SERAFIM, T. d. M.; FERREIRA, F. A.; AMORIM, E. S. C. Criptografia na educação básica: um cenário das pesquisas do profmat. 2021.

9 BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 26 de julho de 2022.