Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Números Complexos e Geogebra

Leonardo de Mattos Bastos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

2013

510.07 Bastos, Leonardo de Mattos
Números Complexos e Geogebra/ Leonardo de Mattos Bastos- Rio Claro: [s.n.], 2013.
57 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso

1. Números Complexos. 2. Geogebra. 3. Ensino Médio. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Dedico a minha mãe Isabel e ao meu irmão Fred, em memória.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Ângela, amada esposa e companheira, que me acompanhou e incentivou desde o primeiro dia desta jornada, em Rio Claro e em nossa casa; sua presença e estímulo são fundamentais em todas as minhas realizações.

À nossa maravilhosa filha Ana pelo estímulo, confiança e revisão; bem como aos cunhados(as), sobrinhos(as), sogra e genro, por todo o apoio e incentivo. Em particular às minhas queridas irmãs Elisabeth e Solange, que tanto fazem para me ajudar.

Agradeço ao meu pai, meu eterno Mestre e Amigo, pelo exemplo de dignidade e idealismo.

Meus sinceros agradecimentos ao Corpo Docente da Unesp Rio Claro e todos os funcionários que viabilizaram essa conquista. Bem como à Capes pelo apoio financeiro. Em especial à professora Suzinei Aparecida Siqueira Marconato, coordenadora local do Profmat, por ter aceito o desafio de tornar realidade o programa e ter acolhido todos os alunos com tanto carinho.

Todas as palavras de agradecimento seriam insuficientes para expressar minha gratidão à professora Suzete, minha orientadora. Com ela aprendi além de Matemática, a acreditar que vale a pena prosseguir na luta; a dedicar-me com paciência e tenacidade a um objetivo maior. Ela viabilizou este projeto, compartilhando comigo sua imensa sabedoria.

Caminhante, não há caminho, o caminho se faz ao caminhar.
Antonio Machado, poeta espanhol

Resumo

Este trabalho está inserido no contexto do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e traz uma resenha de uma teoria a ser ensinada no Ensino Básico, geralmente na terceira série do Ensino Médio, a saber, a teoria dos **números complexos**. Além disso, enfoca a necessidade de diversificadas abordagens didáticas, especialmente com uso de novas Tecnologias de Informação e Comunicação, para superar algumas dificuldades com o ensino que, muitas vezes, decorrem de uma apresentação excessivamente formal do tema. A proposta de algumas atividades em ambiente computacional elaboradas com suporte do software livre (GUI) Geogebra está inclusa.

Palavras-chave: Números Complexos, Geogebra, Ensino Médio.

Abstract

This work is in the context of Professional Program Master of Mathematics in National Network - PROFMAT and brings an overview of the theory to be taught in Primary School, usually in the third grade of High School. It also focuses on the need for diverse didactic approaches, especially with the use of new Information and Communication Technologies, to overcome some difficulties with the teaching of complex numbers, which arise many times stem from an overly formal presentation of the topic. The proposal of activities in some computing environment developed with support of free software (GUI) Geogebra is included.

Keywords: Complex Numbers, Geogebra, High School.

Sumário

Introdução

No capítulo VIII do Regimento do ProfMat, consta:

"Artigo 28 - O Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula."

Dentro dessas diretrizes, este trabalho versa sobre um conteúdo que, muitas vezes, é negligenciado pelos professores do Ensino Médio, conforme alguns trabalhos de pesquisa atestam: os **Números Complexos**. Fizemos uma revisão teórica do tema, dos aspectos históricos que podem contextualizar o seu ensino, e também buscamos recursos mais atuais que possam facilitar seu aprendizado.

Na revisão teórica apresentada, merece destaque a opção pela apresentação do conjunto dos números complexos a partir da conceituação do Corpo dos Números Complexos. Parece-nos conveniente evitar começar com a definição arbitrária de unidade imaginária, como fazem vários livros didáticos e apostilas. É mais interessante abordar tal classe de números como uma extensão natural da construção matemática de conjuntos numéricos cada vez mais amplos.

A seguir, depois de apresentadas as operações na forma algébrica, passamos à forma trigonométrica, ao estudo do conjugado, do módulo e, finalmente, das fórmulas de Moivre.

Do ponto de vista pedagógico, ressaltamos que uma das maiores dificuldades no ensino dos números complexos é o fato de que o professor contando apenas com o uso de lousa e giz, além de algumas ilustrações impressas, não consegue mostrar adequadamente a interpretação geométrica dos elementos de $\mathbb{C}$, nem a dinâmica envolvida na relação entre z, $\bar{z}$, $|z|$ ou entre z e z^n (n inteiro), por exemplo. Muitas vezes, apenas os aspectos algébricos das operações com os complexos são explorados, levando o aluno a não considerar proveitoso dedicar-se a este assunto, relegando-o, infelizmente, ao rol dos "pontos obscuros" da Matemática.

Sem uma contextualização histórica e sem aplicações práticas e acessíveis na escola básica, o caminho mais promissor para o ensino deste conteúdo julgamos ser a exploração da rica interação entre Geometria e Números Complexos representados no plano de Argand-Gauss.

Felizmente, nos dias atuais, já dispomos de recursos tecnológicos que podem ser acessíveis aos professores e aos alunos através da WEB, que favorecem uma atitude investigativa do significado geométrico de muitas proposições. Nossos esforços se concentraram, então, na proposição de situações de aprendizagem que tiram proveito da facilidade que os jovens têm de manipular recursos de informática e interpretar informações digitais.

Informamos que o material didático digital desenvolvido, bem como a resenha teórica, será disponibilizado em blog, para a consulta de eventuais interessados.

1 Números Complexos

Todas as referências presentes ao final do texto foram utilizadas para a construção deste capítulo destinado ao estudo dos números complexos.

1.1 Notas históricas

Operações com raízes quadradas de números negativos apareceram já no século XVI em registros relacionados a resolução de equações de terceiro grau.

Girolamo Cardano, nascido em Pavia em 1501 e falecido em Roma em 1576, foi um cientista versátil e polêmico. É autor do livro *Liber De Ludo Aleae* (Livro dos jogos de azar), onde brilhantemente introduziu a ideia de probabilidade que se usa modernamente; ali também ensinou maneiras de se trapacear nos jogos.

Apesar de traços pessoais nada edificantes, Cardano legou à posteridade um livro que, na época, era sem dúvida o maior compêndio algébrico existente: a *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, mais conhecido por *Ars Magna*, publicado em Nuremberg, na Alemanha, em 1545. É atribuída a ele a autoria de uma fórmula de resolução de equações do tipo

$$x^3 + px^2 + q = 0,$$

embora ela tenha sido descoberta por outro personagem controvertido da história, Niccolo Fontana.

Niccolo Fontana, apelidado *Tartaglia* em razão de problemas na fala, resultantes de cicatrizes na boca adquiridas na infância, nasceu em Bréscia, em 1501. Ao longo da vida, publicou diversas obras, utilizando o codnome Tartaglia, e foi o primeiro, cerca de 100 anos antes de Galileu, a realizar cálculos na técnica da artilharia. Mas o que o colocou definitivamente nos anais da Matemática foram suas disputas com Cardano sobre as equações do terceiro grau.

Analisando a técnica desenvolvida por Tartaglia observamos como surgiram as mencionadas raízes de números negativos. Faremos isso a seguir, mas antes vamos ressaltar um detalhe da maior importância para o aluno do Ensino Médio: a fórmula de Cardano (Tartaglia!) não nos dá soluções complexas da equação do terceiro grau; ela deve ser aplicada na busca de uma **raiz real**.

Consideremos a equação geral do terceiro grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0. \tag{1.1}$$

Inicialmente, vamos anular o termo de segundo grau. Fazendo $x = y + m$, temos:

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0,$$

ou seja,

$$ay^3 + (3am + b)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + am^3 + bm^2 + cm + d = 0.$$

Agora, vamos fazer $3am = -b$, isto é, $m = -\dfrac{b}{3a}$. Note que, com isso, anulamos o termo multiplicado por y^2, obtendo a equação

$$ay^3 + \left(3a\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + 2b\left(\frac{-b}{3a}\right) + c\right)y + a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b}{3a}\right) + d = 0,$$

ou seja,

$$ay^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} = 0,$$

que é uma equação da forma

$$y^3 + py + q = 0, \tag{1.2}$$

obtida a partir da forma geral da equação de terceiro grau.

Note que se y for uma solução para a equação (1.2), $x = y + m$ será uma solução para a equação (1.1). Portanto, quando encontrou a solução das equações desse tipo, Tartaglia deu uma resposta geral e não apenas particular ao problema, o que aumenta o seu mérito.

Agora, vamos conhecer o segredo de que Cardano se apropriou. Todas as grandes descobertas sempre partem de uma ideia fundamental. No caso, a ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada era composta de duas parcelas e, assim, escreveu: $x = A + B$. Os dois lados da equação sendo iguais, seus cubos também o serão, por conseguinte, $x^3 = (A+B)^3$, ou seja,

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B).$$

Como $x = A + B$, obtemos $x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$, ou

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0. \tag{1.3}$$

Comparando as equações (1.2) e (1.3), concluímos que $3AB = -p$ ou

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27}. \tag{1.4}$$

Também temos:

$$A^3 + B^3 = -q. \tag{1.5}$$

Assim, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto.

Por (1.4) e (1.5), temos

$$A^3(-q - A^3) = -\frac{p^3}{27} \Rightarrow$$

$$\left(A^3\right)^2 + qA^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Aplicando a Fórmula de Bhaskara [1] obtemos

$$A^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}. \tag{1.6}$$

Inicialmente, vamos escolher a soma:

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}.$$

Então,

$$B^3 = -q - \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}\right) \Rightarrow B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}.$$

Finalmente, como $x = A + B$, temos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}}. \tag{1.7}$$

Escolhendo a diferença em (1.6), temos $A^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}$ e obtemos

$$B^3 = -q - \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}\right) \Rightarrow B^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}.$$

e o resultado de (1.7), conhecido como *Fórmula de Cardano*, não se altera.

Para compreensão de um aluno do Ensino Médio, é mais aconselhável ilustrar a técnica que leva à fórmula de Cardano com um exemplo numérico. Seja a equação

[1] A prova dessa fórmula conhecida como " fórmula de Bhaskara" na realidade foi feita pelo matemático hindu Sridhara

$x^3 - 6x - 9 = 0$. Aqui, $p = -6$ e $q = -9$. Logo

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{27.(-9)^2 + 4(-6)^3}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{27(-9)^2 + 4(-6)^3}{108}}}. \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} \\ &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\ &= 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Por simples verificação, constata-se que 3, realmente, é solução da equação dada e a fórmula, como esperado, funcionou.

Em 1545, Cardano deparou-se com um problema semelhante a este: "Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com base retangular, de lados $3m$ e $5m$, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal maneira que o volume do cubo seja $4m^3$ maior do que o do paralelepípedo".

Ele aplicou a fórmula para comprovar a solução $x = 4$ que ele já conhecia e obteve um resultado surpreendente. Vamos repetir seus passos.

Equacionando com a notação moderna, temos: $x^3 - 15x - 4 = 0$. Fazendo $x = A + B$, o raciocínio de Tartaglia leva a:

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx = 15x + 4.$$

Então, $A^3B^3 = 125$ e $A^3 + B^3 = 4$, de onde $A^3(4 - A^3) = 125$, ou seja:

$$\left(A^3\right)^2 - 4A^3 + 125 = 0.$$

Portanto, $A^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$. Se $A^3 = 2 + \sqrt{-121}$, então $B^3 = 2 - \sqrt{-121}$. Desse modo, temos a solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Se optarmos por $A^3 = 2 - \sqrt{-121}$, chegaremos ao mesmo resultado.

Um aluno do Ensino Médio saberia escrever a solução encontrada como $x = \sqrt[3]{2 + 11i}$ $+ \sqrt[3]{2 - 11i}$ e, por tentativa, verificar que $(2 + i)^3 = (8 + 12i - 6 - i) = 2 + 11i$, de modo que a solução do problema é $(2 + i) + (2 - i) = 4$, um número natural. Porém, a relação entre a raiz natural 4 e a raiz da equação no modo como a fórmula apresentava permaneceu intrigando os matemáticos até 1.572. Nesse ano, Rafael Bombelli gastou 74 páginas de sua *L'Algebra* para estudar as leis algébricas que regiam o cálculo com as quantidades $a + b\sqrt{-1}$. Em particular, mostrou que: as quatro operações aritméticas sobre números "sofísticos"(como tais números foram chamados na época) produzem números desse tipo.

Foi Renè Descartes, em 1637, com a obra *La Géométrie*, quem introduziu os termos *parte real* e *parte imaginária*.

A raiz quadrada de -1 só passou a ser representada pela letra i a partir de 1777, pelo gênio suíço Leonhard Euler.

A expressão *números complexos* foi usada pela primeira vez por Gauss em 1831, em uma demonstração do *Teorema Fundamental da Álgebra* - "toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos de grau $n \geq 1$, tem no campo complexo, pelo menos uma raiz" - em 1799, embora a ideia já tivera sido conjecturada anteriormente por Girard, Descartes e Jean Le Rond D'Alembert.

Jean Robert Argand e Caspar Wessel, independentemente, motivados pela geometria e pela topografia, de maneira intuitiva e prática, representaram geometricamente os complexos como pontos (e como vetores) num plano cartesiano. E Gauss definiu os números complexos na forma $a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$.

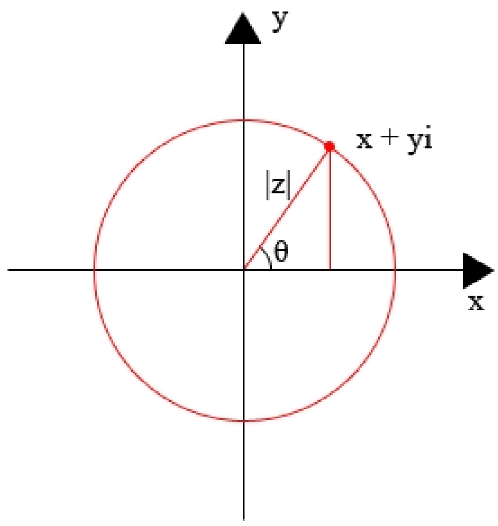
O passo decisivo no sentido de formalizar o conceito de número complexo foi a representação geométrica desses números como pontos do plano. O primeiro matemático a ter uma visão clara de tal representação e explorá-la em suas investigações foi Gauss, conforme fica claro, embora de modo implícito, em sua tese escrita em 1799. Todavia, Gauss só expôs ao público suas ideias a esse respeito em 1831, com o propósito de introduzir os inteiros gaussianos.

O corpo dos números complexos C foi finalmente definido de modo rigoroso por Hamilton em 1837. [2]

Deve-se a *Jean-Robert Argand* (1768-1822) uma publicação, em 1806, com a atual e definitiva interpretação geométrica dos números complexos, conhecida como *Diagrama de Argand*.

O plano de Argand-Gauss é muito útil, pois através dele podemos "algebrizar" vetores bidimensionais, o que tem inúmeras aplicações em diversos campos da Matemática, da Engenharia e da Física. Também é importante do ponto de vista pedagógico por fornecer um significado concreto ao tema, além da mera manipulação algébrica.

[2] Já em 1833, Hamilton apresentou um artigo à Academia Irlandesa "em que introduziu uma álgebra formal de pares de números complexos cujas regras de combinação são as que hoje são dadas para números complexos". Veja [2].



1.2 O corpo dos números complexos e a representação algébrica

Definição 1.1. *Definimos o corpo dos números complexos como sendo o conjunto*

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ } e \text{ } y \in \mathbb{R}\},$$

com as seguintes operações de adição e multiplicação: se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ pertencerem a $\mathbb{C}$, então

$$z + w = (x + a, y + b) \quad e \quad zw = (xa - yb, xb + ya). \tag{1.8}$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são denominados **números complexos**.

Denotaremos o número complexo $(0, 0)$ simplesmente por 0 e o número complexo $(1, 0)$ simplesmente por 1.

Definição 1.2. *Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, definimos*

$$-z = (-x, -y) \text{ } e \text{ } se \text{ } z \neq 0 \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right). \tag{1.9}$$

O número z^{-1} também é denotado por $\dfrac{1}{z}$ ou $1/z$.

Decorrentes das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:*

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ *(associatividade da adição).*

(b) $z + w = w + z$ *(comutatividade da adição).*

(c) $0 + z = z$ *(elemento neutro).*

(d) $z + (-z) = 0$ *(elemento oposto).*

(e) $z(wt) = (zw)t$ *(associatividade da multiplicação).*

(f) $zw = wz$ *(comutatividade da multiplicação).*

(g) $1z = z$ *(elemento unidade).*

(h) $zz^{-1} = 1$ *se* $z \neq 0$ *(elemento inverso).*

(i) $z(w + t) = zw + zt$ *(distributividade da multiplicação em relação à adição).*

Demonstração. Sejam $z = (x, y), w = (a, b)$ e $t = (c, d)$. Então:

(a) Usando a associatividade da adição de números reais, temos:

$$\begin{aligned} z + (w + t) &= (x, y) + (a + c, b + d) \\ &= (x + (a + c), y + (b + d)) \\ &= ((x + a) + c, (y + b) + d) \\ &= (x + a, y + b) + (c, d) \\ &= (z + w) + t. \end{aligned}$$

(b) Usando a comutatividade da adição de números reais, temos:

$$\begin{aligned} z + w &= (x, y) + (a, b) \\ &= (x + a, y + b) \\ &= (a + x, b + y) \\ &= (a, b) + (x, y) \\ &= w + z. \end{aligned}$$

(c) Usando o elemento neutro da adição de números reais, temos:

$$\begin{aligned} z + 0 &= (x, y) + (0, 0) \\ &= (x + 0, y + 0) \\ &= (x, y) \\ &= z. \end{aligned}$$

(d) Usando a Definição 1.2 e o elemento oposto da adição de números reais, temos:

$$\begin{aligned} z + (-z) &= (x, y) + (-x, -y) \\ &= (x - x, y - y) \\ &= (0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(e) Como $wt = (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ e $zw = (x,y)(a,c) = (xa-yb, xb+ya)$, temos:

$$\begin{aligned} z(wt) &= (x,y)(ac-bd, ad+bc) \\ &= [x(ac-bd) - y(ad+bc),\ x(ad+bc) + y(ac-bd)] \\ &= (xac - xbd - yad - ybc,\ xad + xbc + yac - ybd) \\ &= (xac - ybc - xbd - yad,\ xbc + yac + xad - ybd) \\ &= [(xa-yb)c - (xb+ya)d,\ (xb+ya)c + (xa-by)d] \\ &= (zw)t, \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade associativa da multiplicação de números reais.

(f) Usando a comutatividade da multiplicação de números reais, temos:

$$\begin{aligned} zw &= (x,y)(a,b) \\ &= (xa-yb, xb+ya) \\ &= (ax-by, ay+bx) \\ &= wz. \end{aligned}$$

(g) Usando o elemento unidade da multiplicação de números reais, temos:

$$\begin{aligned} 1z &= (1,0)(x,y) \\ &= (1x-0y, 1y+0x) \\ &= (1x, 1y) \\ &= (x,y) \\ &= z. \end{aligned}$$

(h) Como $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ se $z \neq 0$ (veja Definição 1.2), temos:

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= (x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \left[x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right), x\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy+yx}{x^2+y^2}\right) \\ &= (1,0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(i) Usando a distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais, temos:

$$\begin{aligned}
z(w+t) &= (x,y)[(a,b)+(c,d)] = (x,y)(a+c,b+d) \\
&= (x(a+c)-y(b+d), x(b+d)+y(a+c)) \\
&= (xa+xc-yb-yd, xb+xd+ya+yc) \\
&= [(xa-yb)+(xc-yd), (xb+ya)+(xd+yc)] \\
&= (xa-yb, xb+ya)+(xc-yd, xd+yc) \\
&= (x,y)(a,b)+(x,y)(c,d) \\
&= zw+zt.
\end{aligned}$$

□

Observação 1.1. Denomina-se **corpo** um conjunto no qual estão definidas operações de adição e multiplicação que satisfazem as propriedades mencionadas na Proposição 1.1. Por esta razão é que chamamos $\mathbb{C}$ de corpo dos números complexos, assim como nos referimos a $\mathbb{R}$ como corpo dos números reais e a $\mathbb{Q}$ como corpo dos números racionais.

Tendo definido as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, definimos as operações de subtração e divisão da maneira usual:

Definição 1.3. *Dados* $z,\ w \in \mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w) \quad e \quad \frac{z}{w} = zw^{-1}, \ \ se \ \ w \neq 0.$$

Além disso, a potenciação também é definida da maneira usual:

Definição 1.4. *Dado* $z \in \mathbb{C}$,

$$z^0 = 1, \quad z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n\ vezes} \quad e \quad z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \cdots z^{-1}}_{n\ \ vezes}, \ \ se \ \ z \neq 0 \ (n \geq 1).$$

Decorre da Proposição 1.1 que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações $\dfrac{z_1}{w_1}$ e $\dfrac{z_2}{w_2}$ de números complexos podem ser obtidas pelas fórmulas:

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \text{ e } \frac{z_1}{w_1}\frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}. \tag{1.10}$$

Além disso, temos o seguinte princípio de inclusão: podemos verificar que $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja, todo número real é considerado um número complexo. Isto ocorre quando denotamos qualquer número complexo $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$, simplesmente por x. Ou seja, através dessa convenção podemos dizer que todo elemento de $\mathbb{R}$ é um elemento de $\mathbb{C}$ da forma $(x, 0)$. Estamos estendendo, portanto, a ideia já exposta em relação ao elemento neutro 0 e ao elemento unidade 1.

Observação 1.2. A soma dos números reais x e a ou a soma dos números complexos x e a leva ao mesmo resultado; analogamente com o produto dos números reais x e a e dos números complexos x e a.

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0) = x + a \text{ e}$$

$$(x, 0)(a, 0) = (xa - 0.0, x.0 + 0.a) = (xa, 0) = xa.$$

Por conseguinte, não existe ambiguidade nas notações $x + a$ e xa, com a adoção da inclusão apresentada acima.

Geralmente, no Ensino Médio, os números complexos são definidos como sendo os números da forma $x + yi$, onde x e y são números reais e i é um *algarismo imaginário*, que satisfaz $i^2 = -1$. A seguir, veremos que essa definição de números complexos vista no ensino básico pode ser obtida através da definição de números complexos apresentada no presente trabalho.

Note que

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1,$$

ou seja, o número -1 possui uma "raiz quadrada" em $\mathbb{C}$!

Definição 1.5. *Chamaremos de* ***algarismo imaginário*** *o número complexo* $(0, 1)$ *e o denotaremos por* i.

Temos, então, a propriedade básica do algarismo imaginário:

$$i^2 = -1.$$

E, dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1),$$

ou seja,

$$z = x + yi.$$

Logo, o par (x, y) e a expressão $x + yi$ representam o mesmo número complexo.

A expressão $x + yi$ é denominada **forma algébrica** de z.

Observação 1.3. Quando usamos a forma algébrica dos números complexos, as definições de $z + w$ e zw dadas em (1.8) tornam-se de simples entendimento a partir de algumas das propriedades de adição e de multiplicação em $\mathbb{C}$ já apresentadas. Com efeito, se $z = x + yi$ e $w = a + bi$ forem números complexos, então

$$z + w = (x + yi) + (a + bi) = x + a + yi + bi = (x + a) + (y + b)i$$

e

$$zw = (x + yi)(a + bi) = xa + yia + xbi + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i.$$

Definição 1.6. *Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a* ***parte real*** *e a* ***parte imaginária*** *de z por*

$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = y,$$

respectivamente.

Quando $\operatorname{Re} z = 0$, diremos que z é **imaginário puro**.

Ressaltamos que, na expressão de qualquer número complexo, suas partes real e imaginária são números reais.

1.3 Representação geométrica de z

As coordenadas de um ponto de $\mathbb{R}^2$, por exemplo (x, y), constituem a parte real e a parte imaginária de um número complexo, respectivamente. Portanto, podemos definir:

Definição 1.7. *A* ***imagem*** *do complexo $z = x + yi$ é o ponto (x, y) do plano cartesiano. Podemos, também, chamar o segmento orientado que liga a origem do plano à imagem de z de* ***vetor representativo*** *desse número complexo; vetor esse, $\overrightarrow{Oz}$, com componentes x e y.*

Neste contexto, chamaremos o plano cartesiano de **plano complexo**, o eixo das abscissas de **eixo real** e o eixo das ordenadas de **eixo imaginário.**

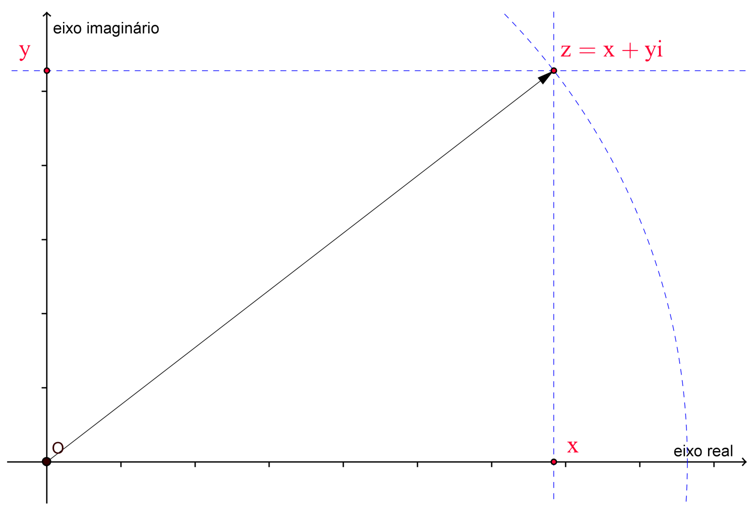


Figura 1.1: Imagem de z

1.4 Conjugado e valor absoluto

Definição 1.8. *O* ***conjugado*** *de um número complexo* $z = x + yi$ *é o número complexo* $\overline{z} = x - yi$.

Graficamente, $\overline{z}$ é o ponto do plano complexo obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real.

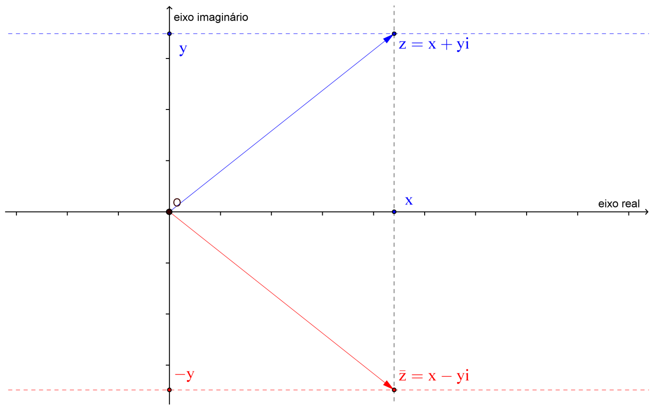


Figura 1.2: Imagem do conjugado

Proposição 1.2. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:*

(a) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ e $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

(b) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ e $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

(c) $z \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $z = \overline{z}$.

(d) z será imaginário puro se, e somente se, $z = -\overline{z}$.

Demonstração. Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$. Então $\overline{z} = x - yi$ e $\overline{w} = a - bi$. Portanto:

(a) $\overline{\overline{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$;

$\overline{z + w} = \overline{(x + a) + (y + b)i} = (x + a) - (y + b)i = (x - yi) + (a - bi) = \overline{z} + \overline{w}$;

$\overline{z - w} = \overline{(x - a) + (y - b)i} = (x - a) - (y - b)i = (x - yi) - (a - bi) = \overline{z} - \overline{w}$;

$\overline{zw} = \overline{(xa - yb) + (xb - ya)i} = (xa - yb) - (xb + ya)i = \overline{z}\,\overline{w}$.

(b) $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = (x + x) + (y - y)i = 2x + 0i = 2\operatorname{Re} z$;

$z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = (x - x) + (y + y)i = 0x + 2yi = 2i \operatorname{Im} z$.

(c) se $z \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Im} z = 0$, ou seja, $y = 0$ e $z = x + 0i$ e, portanto, $z = x = x - 0i = \overline{z}$. Reciprocamente, se $z = \overline{z}$, ou seja, se $x + yi = x - yi$, então $2yi = 0$, donde $y = 0$ e $z = x \in \mathbb{R}$.

(d) se z for imaginário puro, então $\operatorname{Re} z = 0$, ou seja, $x = 0$ e $z = 0 + yi$ e, portanto, $z = yi = -(-yi) = -\overline{z}$. Reciprocamente, se $z = -\overline{z}$, ou seja, se $x + yi = -(x - yi)$, então $2x = 0$, donde $x = 0$ e $z = yi$.

□

Através da noção de conjugado, podemos deduzir a expressão do inverso de um número complexo $z = x + yi \neq 0$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
z^{-1} &= \left(\frac{1}{x + yi}\right) \\
&= \left(\frac{1}{x + yi}\right)\left(\frac{\overline{x + yi}}{\overline{x + yi}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{x + yi}\right)\left(\frac{x - yi}{x - yi}\right) \\
&= \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2} i.
\end{aligned}$$

Definição 1.9. *Definiremos o **valor absoluto** (ou **módulo**) de um número complexo $z = x + yi$ por*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Graficamente, o número real $|z|$ nos dá o comprimento de $\overrightarrow{Oz}$.

Além disso, pode-se concluir que $|z-w|$ é a distância entre as imagens de z e w.

A figura a seguir nos mostra a interpretação geométrica da soma de dois números complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$. O vetor sobre a diagonal do paralelogramo representa a soma $z + w$.

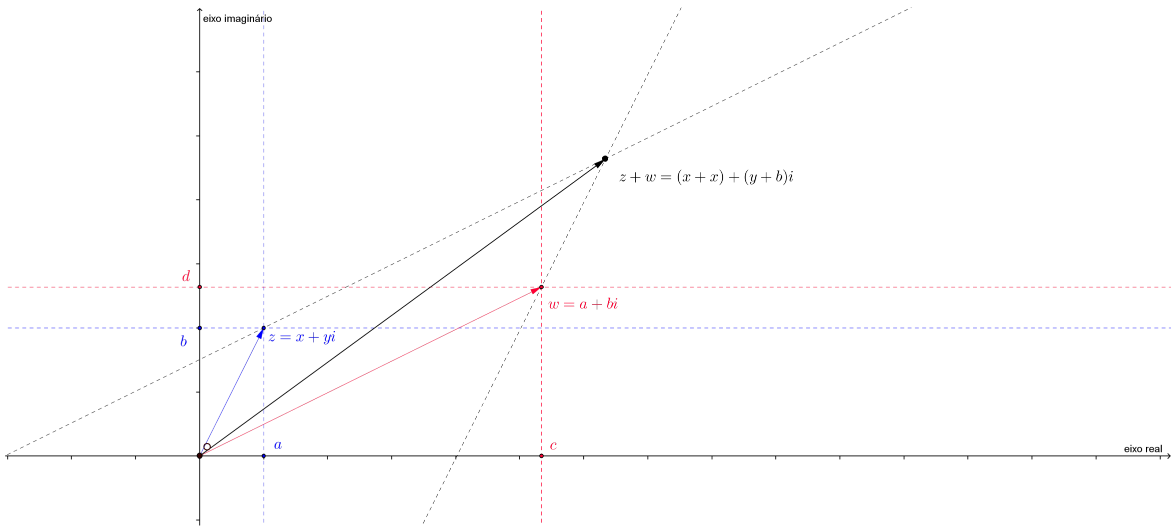


Figura 1.3: Soma de dois números complexos

Proposição 1.3. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ e $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$, $|\overline{z}| = |z|$ e $|zw| = |z||w|$.

(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(d) $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

A desigualdade (c) *é conhecida como* ***desigualdade triangular***.

Demonstração. (a) Se $z = x + yi$, então $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |\operatorname{Re} z| \geq \operatorname{Re} z$. Analogamente, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |\operatorname{Im} z| \geq \operatorname{Im} z$.

(b) Se $z = x + yi$, então

$$|z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2. \tag{1.11}$$

Por outro lado, como $\overline{z} = x - yi$, temos

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2. \tag{1.12}$$

Por (1.11) e (1.12), concluímos que $|z|^2 = z\overline{z}$.

Observe, também, que $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

Agora, se $w = a + bi$, então $zw = (xa - yb) + (xb + ya)i$. Portanto,

$$\begin{aligned}
|zw| &= \sqrt{(xa-yb)^2 + (xb+ya)^2} \\
&= \sqrt{x^2a^2 - 2xayb + y^2b^2 + x^2b^2 + 2xbya + y^2a^2} \\
&= \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2} \\
&= \sqrt{x^2(a^2+b^2) + y^2(a^2+b^2)} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{(a^2+b^2)} \\
&= |z||w|.
\end{aligned}$$

(c) Afirmamos que:

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{w} + |w|^2.$$

Com efeito,

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}.$$

Veja que

$$w\overline{z} = \overline{\overline{w}}\ \overline{z} = \overline{\overline{w}\, z} = \overline{z\,\overline{w}},$$

portanto,

$$|z+w|^2 = |z|^2 + (z\overline{w} + \overline{z\,\overline{w}}\,) + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{w} + |w|^2.$$

Como

$$\begin{aligned}
|z|^2 + 2\mathrm{Re}\ (z\overline{w}) + |w|^2 \le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 &= (|z| + |w|)^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2,
\end{aligned}$$

segue que

$$|z+w|^2 \le (|z| + |w|)^2.$$

Extraindo as raízes quadradas de ambos os lados da desigualdade acima, obtemos a desigualdade desejada.

(d) Usando a desigualdade triangular obtida no item (c), temos

$$|z| = |(z+w) - w| \le |z+w| + |-w| = |z+w| + |w|, \text{ donde } |z+w| \ge |z| - |w|.$$

Trocando os papéis de z e w na desigualdade acima, obtemos

$$|z+w| \ge |w| - |z|.$$

Como $||z| - |w|| = |z| - |w|$ se $|z| \ge |w|$ e $||z| - |w|| = |w| - |z|$ se $|w| \ge |z|$, vemos que, em qualquer caso,

$$|z+w| \ge ||z| - |w||.$$

□

Se $z \neq 0$, podemos reescrever a primeira igualdade do item (b) da seguinte forma:

$$|z|^2 = \frac{\overline{z}}{z^{-1}}, \text{ ou seja },$$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Essa identidade mostra que, representando graficamente z, z^{-1} aponta na direção de $\overline{z}$ e tem valor absoluto $1/|z|$.

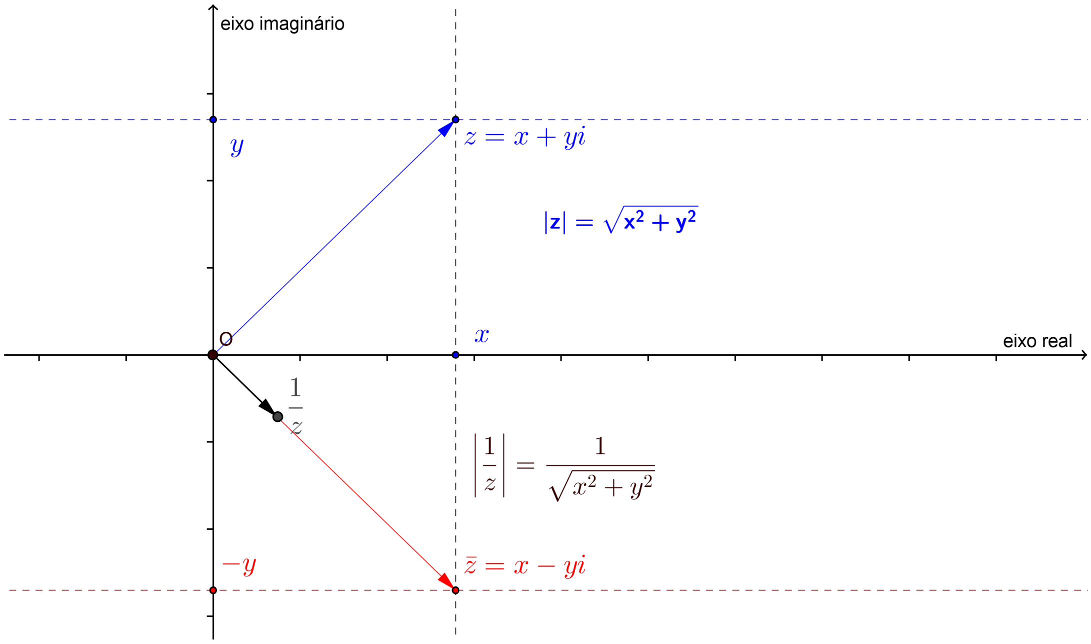


Figura 1.4: Imagem do inverso de um número complexo

1.5 Trigonometria e números complexos:forma polar

Relações trigonométricas elementares nos permitem estabelecer uma nova representação para um número complexo z.

Definição 1.10. *A* ***representação trigonométrica de*** z *é:*

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Se $\theta \in \mathbb{R}$ satisfizer a expressão acima, diremos que θ é um ***argumento*** *de z.*

Consideremos um número complexo $z = x + yi \neq 0$. Seja α o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário.

Como $\cos\alpha = \frac{x}{|z|}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{|z|}$, temos:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha).$$

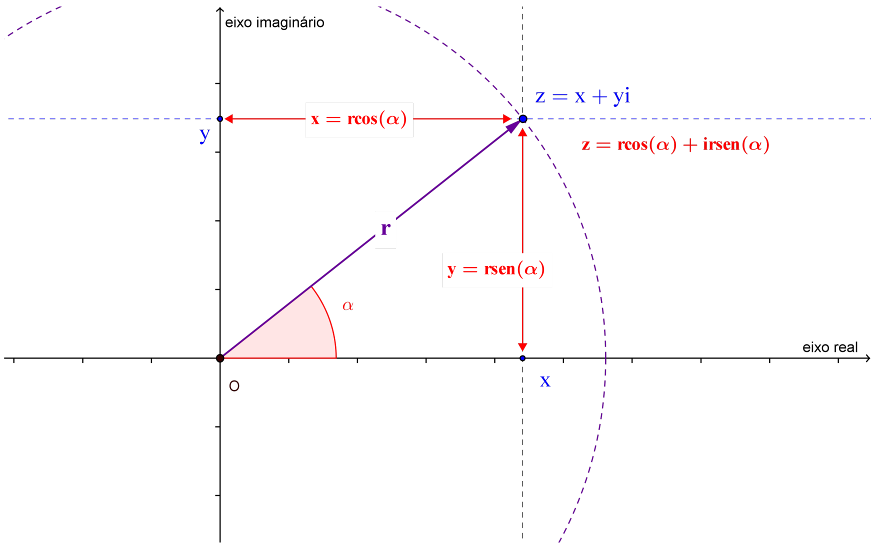


Figura 1.5: Forma polar de número complexo

Assim, é sempre possível passar da representação algébrica para a polar, e vice-versa.

Pela definição, α é um argumento de z. Entretanto, qualquer α da forma $\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz a igualdade acima, uma que vez que as funções seno e cosseno são [2] periódicas com período 2π.

Concluímos, então, que z possui infinitos argumentos. Por outro lado, se θ for tal que $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, então $\cos\theta = \cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha$, o que implica que $\theta = \alpha + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o conjunto $\arg z$ de todos os argumentos de z é dado por:

$$\arg z = \{\alpha + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é denominado **argumento principal** de z e é denotado por $\operatorname{Arg} z$.

Definição 1.11. *A identidade*

$$z = |z|[\cos(Arg\, z) + isen\,(Arg\, z)]$$

*é denominada a **forma polar** de z.*

Agora, sejam $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ dois números

[2]Lembramos que: uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica com período τ se $f(t+\tau) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

complexos não nulos. Vamos obter a representação polar para z_1z_2. Veja que:

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\,|z_2|(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\\
&= |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\\
&= |z_1||z_2|[\cos\theta_1(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1(\cos\theta_2 + i\mathrm{sen}\,\theta_2)]\\
&= |z_1||z_2|[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,i\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,i\,\mathrm{sen}\,\theta_2]\\
&= |z_1||z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\cos\,\theta_1\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)],
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$z_1z_2 =^{3} |z_1||z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2)].$$

Esta igualdade nos dá a interpretação gráfica do produto de dois números complexos. Veja a figura abaixo.

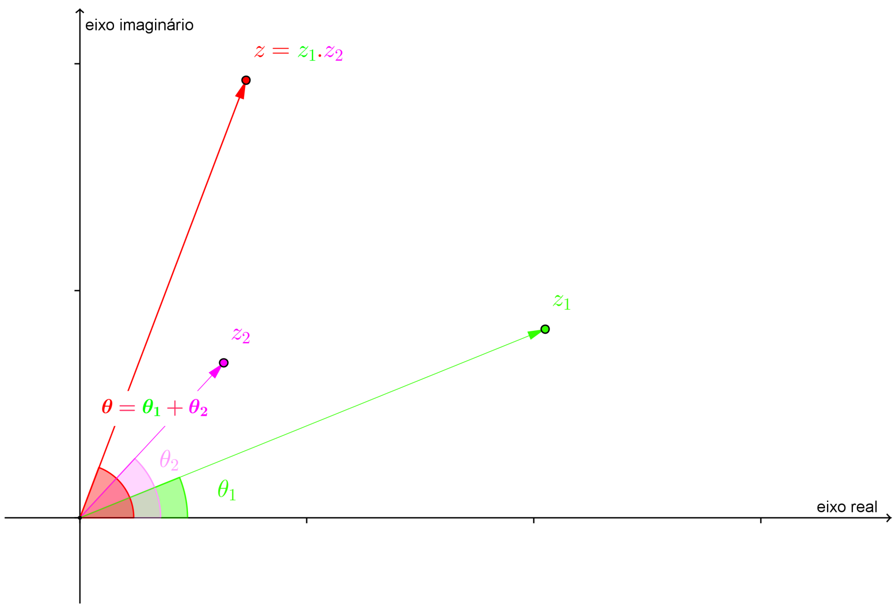


Figura 1.6: Produto de dois números complexos

[3]Para obter a igualdade, usamos as fórmulas de adição trigonométricas do Ensino Médio.

Então, $z_1 z_2$ tem valor absoluto $|z_1||z_2|$ e tem $\theta_1 + \theta_2$ como argumento.

Seja $z = |z|[\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)]$ um número complexo não nulo. Vamos, agora, obter a representação polar para z^{-1} . Sabemos que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$. Portanto, podemos escrever que $\overline{z} = |z|[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)]$.

Também já vimos que $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$; então: $z^{-1} = \dfrac{|z|[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)]}{|z|^2}$.

Sendo assim, a representação polar de z^{-1} é:

$$z^{-1} = |z|^{-1}[\cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta)].$$

A partir das representações polares encontradas anteriormente, concluímos que

$$z_1\, z_2^{-1} = |z_1|\, |z_2^{-1}|[\cos(\theta_1 + (-\theta_2)) + \text{sen}(\theta_1 + (-\theta_2))],$$

o que nos dá a seguinte fórmula de divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

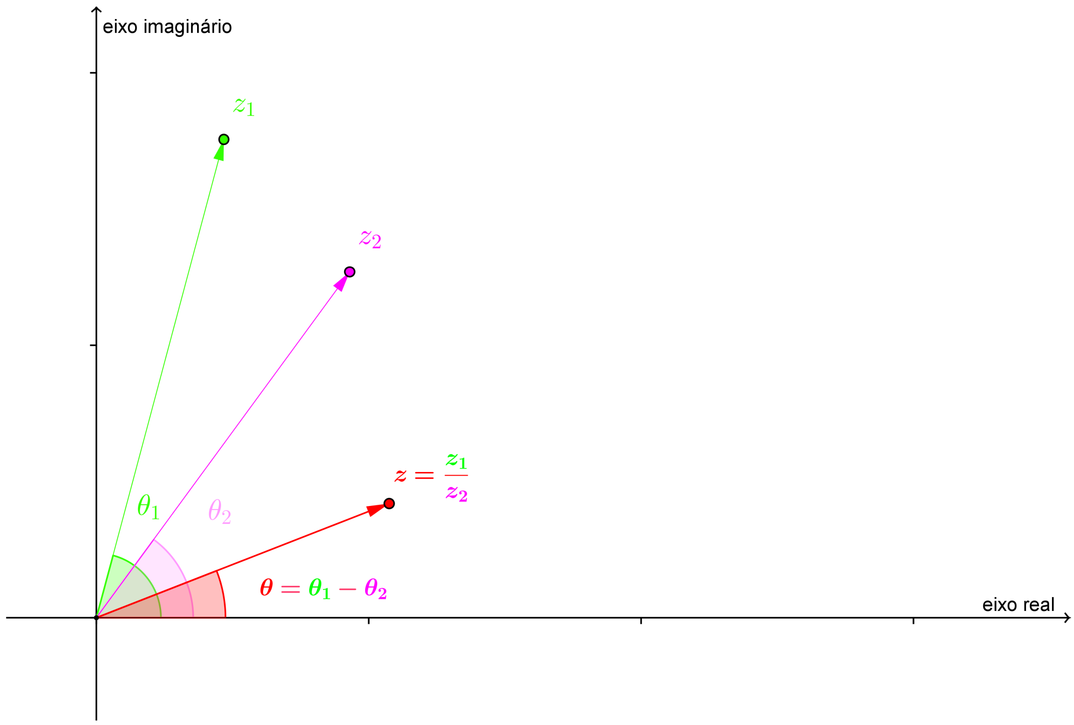


Figura 1.7: Quociente de dois números complexos

1.6 Fórmulas de Moivre

Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = \rho \neq 0$. Para $n \in \mathbb{Z}$, vale:

$$z^n = \rho^n[\cos(n.\theta) + i\,\text{sen}(n.\theta)]. \tag{1.13}$$

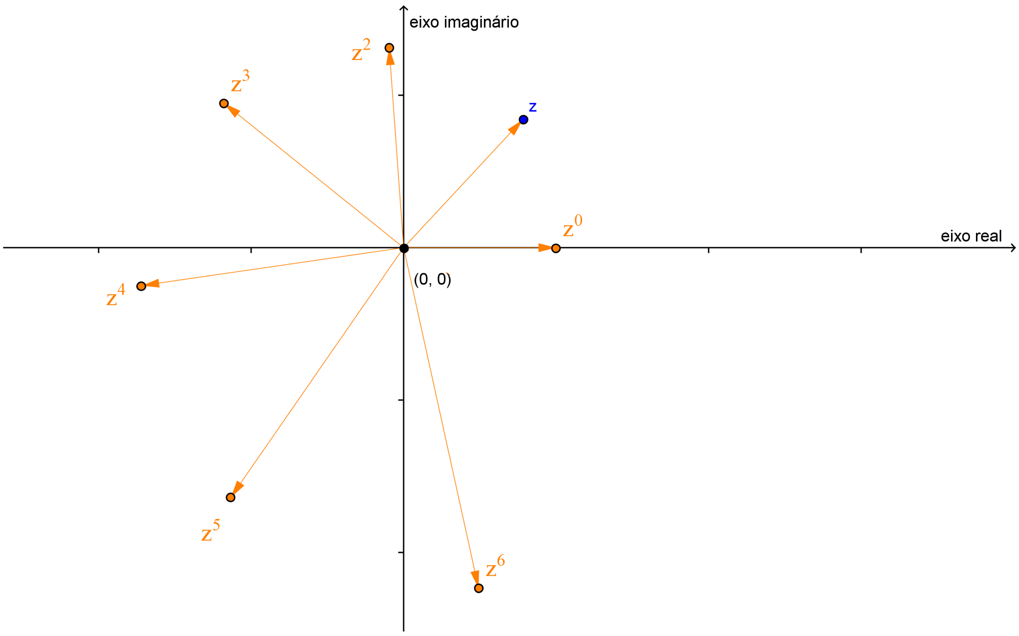


Figura 1.8: Potências de $z, |z| = 1$.

Esta igualdade é conhecida como **Primeira Fórmula de Moivre**.

Na demonstração da Fórmula de Moivre, utilizaremos o Princípio de Indução Matemática. Sendo a Indução Matemática um método ainda restrito ao ensino superior de Matemática, informamos que apresentaremos a prova desta fórmula apenas para auxiliar o professor - leitor - do Ensino Médio, já familiarizado com tal método, na revisão da teoria de números complexos. Para os interessados em (re)ver o Princípio de Indução Matemática, indicamos a referência [6], Capítulo III.

Demonstração. Vamos inicialmente provar que a igualdade (1.13) é válida para $n \in \mathbb{N}$, usando o Princípio de Indução Matemática.

(I) Se $n = 0$, $z^0 = 1 = \rho^0(\cos 0 + i \text{ sen } 0)$.

(II) Admitamos que a fórmula seja válida para $n = k$: $z^k = \rho^k[\cos(k.\theta) + i \text{ sen}(k.\theta)]$.

(III) Agora vamos provar que a igualdade é válida para $n = k + 1$. Com efeito, usando o item anterior, temos:

$$\begin{aligned}
z^k.z &= [\rho^k(\cos(k.\theta) + i \text{ sen}(k.\theta)].[\rho(\cos(\theta) + i \text{ sen}(\theta)] \\
&= (\rho^k.\rho)[\cos(k.\theta).\cos(\theta) + i^2 \text{ sen}(k.\theta)\text{sen}(\theta)] + i[(\cos(k.\theta).\text{sen}(\theta) + \text{sen}(k.\theta)\cos(\theta)] \\
&= (\rho^k.\rho)[\cos(k\theta + \theta)] + i[\text{sen}(k\theta + \theta)] \\
&= \rho^{k+1}[\cos((k+1)\theta) + i \text{ sen}((k+1)\theta)] = z^{k+1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos constatar que a igualdade (1.13) é válida para $n \in \mathbb{Z}$.

Considerando o caso de interesse $n < 0$, podemos tomar $m = -n$. Então, $z^n = z^{-m} = \dfrac{1}{z^m}$.

Como $-n = m \in \mathbb{N}$, para m, a igualdade (1.13) é verdadeira, pelo o que foi visto acima, nos levando a:

$$\begin{aligned}
z^n &= \frac{1}{\rho^m[(\cos(m.\theta) + i \text{ sen}(m.\theta)]} \\
&= \frac{1}{\rho^m}\frac{[\cos(m.\theta) - i \text{ sen}(m.\theta)]}{[\cos(m.\theta) + i \text{ sen}(m.\theta)][\cos(m.\theta) - i \text{ sen}(m.\theta)]} \\
&= \frac{1}{\rho^m}\frac{[\cos(m.\theta) - i \text{ sen}(m.\theta)]}{\cos^2(m.\theta) + \text{sen}^2(m.\theta)} \\
&= \rho^{-m}[\cos(m.\theta) - i \text{ sen}(m.\theta)] \quad \text{[1]} \\
&= \rho^{-m}[\cos((-m).\theta) + i \text{ sen}((-m).\theta)] \\
&= \rho^n[\cos(n\theta) + i \text{ sen}(n.\theta)].
\end{aligned}$$

□

1.7 Extração de raízes

Dados um número complexo w e um número natural $n \geq 1$, diremos que $z \in \mathbb{C}$ é uma **raiz n-ésima** de w se

$$z^n = w.$$

Se $w = 0$, é claro que $z = 0$ é a única solução da equação $z^n = w$. Logo, o número 0 possui uma única raiz n-ésima que é o próprio 0. A seguir, veremos que se $w \neq 0$ então existirão exatamente n soluções distintas da equação $z^n = w$.

Teorema 1.1. *Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes n-ésimas complexas distintas, a saber,*

$$\sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{Arg\ z + 2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{Arg\ z + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{1.14}$$

onde $k = 0, 2, \ldots, n-1$.

A igualdade acima é conhecida como **Segunda Fórmula de Moivre**.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja z_k o número complexo dado em (1.14). Escrevamos $w = |w|(\cos\psi + i \text{ sen } \psi)$, onde $\psi = \operatorname{Arg} z$. O nosso objetivo é procurar todos os números complexos $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ para os quais é verdade que

$$z^n = w.$$

Pela Primeira Fórmula de Moivre, a equação acima se transforma em

$$|z|^n[\cos(n\theta) + i \text{ sen } (n\theta)] = |w|(\cos\psi + i \text{ sen } \psi),$$

o que equivale a dizer que

$$|z|^n = |w|, \quad \cos(n\theta) = \cos\psi \quad \text{e} \quad \text{sen}(n\theta) = \text{sen } \psi.$$

A primeira condição é satisfeita precisamente quando $|z| = \sqrt[n]{|w|}$, enquanto as duas últimas são satisfeitas quando $n\theta = \psi + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\theta = \frac{\psi+2k\pi}{n}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, as raízes n-ésimas de w são os números z_k para $k \in \mathbb{Z}$. Fazendo $k = 0, 1, \ldots, n-1$, obtemos distintas raízes n-ésimas de w. Todavia, os demais valores de k nos dão apenas repetições das raízes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Com efeito, tomemos $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Escrevamos

$$k = qn + r \qquad \text{com } z \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 0 \leq r < n.$$

Como

$$\frac{\psi + 2k\pi}{n} = \frac{\psi + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\psi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

segue que $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$. □

A raiz n-ésima de w obtida fazendo $k = 0$ em (1.14) é denominada **raiz n-ésima principal** de w. A notação $\sqrt[n]{w}$ é reservada para esta raiz. Esta notação é coerente com a notação $\sqrt[n]{|w|}$ que indica a única raiz real positiva de $|w|$. Portanto,

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} w}{n}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{\operatorname{Arg} w}{n}\right)\right].$$

Pelo o que foi visto acima, observamos que todas as n raízes n-ésimas de z possuem o mesmo módulo, a saber, $\sqrt[n]{|z|}$. Então, elas são representadas por n pontos sobre a circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Além disso, estes pontos estão igualmente espaçados ao longo desta circunferência devido à relação de seus argumentos.

Como exemplo, consideremos as raízes cúbicas de 8. Elas são os números

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right) \text{ para } k = 0, 1, 2.$$

Calculando, obtemos $z_0 = 2, \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ e $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

As raízes z_0, z_1 e z_2 dividem a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 2 em três partes congruentes como mostra a figura abaixo.

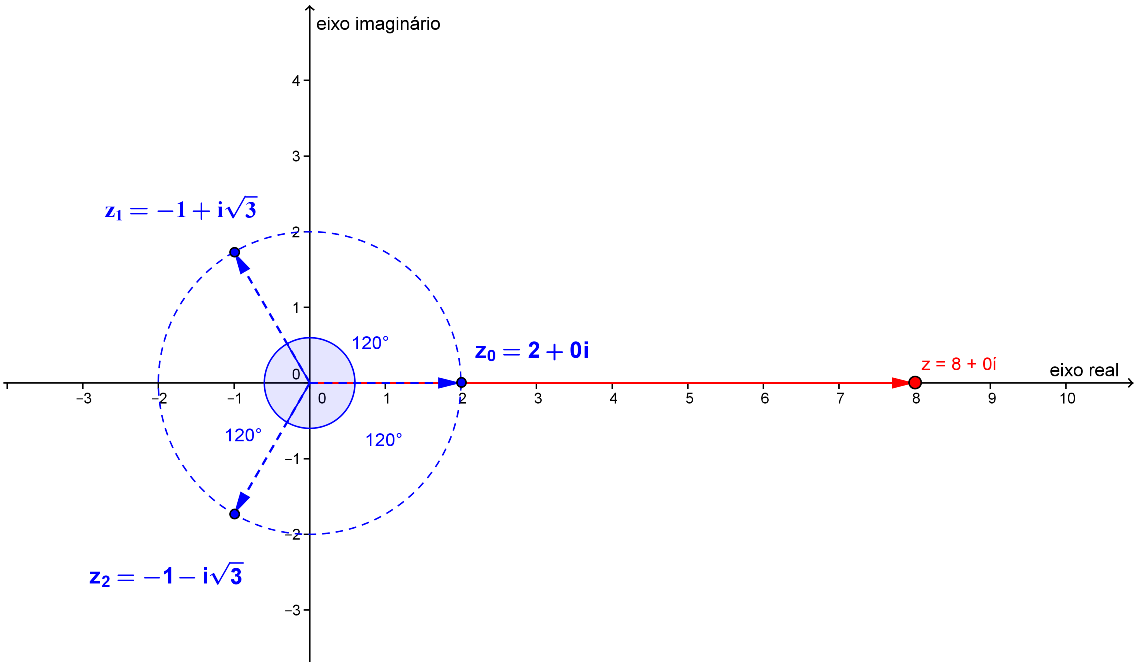


Figura 1.9: Raízes cúbicas de 8.

2 Enfoque pedagógico

"A aritmética dos números complexos não apresenta dificuldades. A conexão com a Geometria, porém é deficiente, o que é estranho pois a Geometria Analítica acabou de ser estudada ... . As aplicações geométricas das operações entre complexos (principalmente a multiplicação), tão belas como variadas, não são exploradas. Isto é imperdoável, pois todo matemático ou usuário da Matemática, ao pensar num número complexo, sempre o imagina como um ponto do plano coordenado e as operações são interpretadas como transformações geométricas". (Prof. Elon Lages Lima - [7])

Nesse sentido, valorizando a conexão entre diferentes assuntos da Matemática ensinados no Ensino Médio, estamos propondo um conjunto de atividades manipulativas que buscam motivar o aluno a estudar os números complexos.

2.1 A proposta curricular do estado de São Paulo

A referência correspondente às citações desta seção é [8].

Para os professores da Rede Estadual de São Paulo está previsto no Currículo de Matemática da Educação Básica o ensino dos números complexos no segundo bimestre do terceiro ano do Ensino Médio.

As orientações para esse propósito estão materializadas no respectivo Caderno do Professor, do qual transcreveremos alguns pontos, devido a sua importância para nossos docentes e a sua justeza pedagógica.

"A partir da Unidade 6, os números complexos entram em cena mais diretamente. Como no caso das equações, a ênfase também não será posta nos cálculos algébricos, mas sim no significado de tais números, de aparência inicialmente estranha, mas que conduzem a uma notável expansão dos conjuntos numéricos já conhecidos."

A perspectiva de mostrar aos alunos uma evolução da ideia de números, a partir dos naturais até o conjunto dos complexos, permite uma compreensão da construção da Matemática como atividade social infindável de organização do pensamento humano.

Essa perspectiva valoriza o ensino da Matemática como transmissão de um maravilhoso *patrimônio cultural da humanidade*, que transcende as inúmeras possibilidades de sua aplicação nas demais Ciências e no dia a dia.

Continuando as considerações do Currículo, vemos a ênfase nas "múltiplas possibilidades da representação geométrica de um número complexo z, que tem como imagem um ponto no plano, como um par (x, y) de números reais, ou escrito na forma $z = x+yi$. Assim, como a reta foi necessária e suficiente para acolher todos os números reais, racionais e irracionais, veremos que, com a expansão do campo numérico para incluir números que possam ser raízes quadradas de negativos, será necessário (e suficiente) todo o plano cartesiano, que servirá de inspiração para a construção do plano complexo, suporte para a representação de todos os números complexos".

Pedagogicamente, o tema é tratado a partir da seguinte perspectiva: A unidade imaginária i, que representa o novo número cujo quadrado dá -1, serve de padrão para a representação no eixo vertical de números como $2i, 6i, 7i, 4i$ etc.

Em sintonia com tal representação, veremos que o valor absoluto de um complexo z é $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, e mede a distância, no plano complexo, da imagem de z à origem do sistema de coordenadas.

O ângulo que a reta determinada pela origem e a imagem de z formam com o eixo x (medido no sentido anti-horário) é o argumento de z, representado por θ.

Para enfatizar o significado geométrico da representação dos complexos no plano, a recomendação é clara:

"As aproximações com a geometria analítica plana serão naturais: por exemplo, o conjunto de pontos do plano que representam complexos de módulo constante, digamos, $|z| = 5$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$".

Prosseguindo, é proposta a superação de uma visão estritamente algébrica das operações em $\mathbb{C}$:

"O significado das operações com números complexos será explicitado nas Unidades 7 e 8. Veremos em tais unidades que as operações com complexos correspondem à realização de certos movimentos no plano. Por exemplo, se a um número complexo z for somado o número real 4, sua representação no plano será deslocada na direção do eixo x de 4 unidades; se a z for somado o número imaginário $3i$, sua representação será deslocada na direção do eixo y de 3 unidades; se a z for somado o número $4 + 3i$, sua representação sofrerá um deslocamento horizontal (eixo real) de 4 unidades, seguido de um vertical (eixo imaginário) de 3 unidades, ou seja, o deslocamento de z terá valor igual ao módulo do complexo 4 + 3i, que é igual a 5, na direção determinada pela origem e a representação deste complexo. Ao multiplicar o complexo z pelo real 5, mostraremos que z permanece com o mesmo argumento (ângulo com o eixo x) mas a distância de z até a origem fica multiplicada por 5; se multiplicarmos z por i, o módulo de z permanecerá o mesmo e seu argumento aumentará de $\frac{\pi}{2}$; já se multiplicarmos z por $5i$, os dois efeitos são combinados: aumenta a distância até a origem, ao mesmo tempo que o argumento aumenta de $\frac{\pi}{2}$.

A exploração de tais movimentos na imagem de z, decorrentes de operações realizadas sobre z, torna o estudo dos números complexos especialmente significativo, abrindo caminho para um grande número de aplicações práticas dos mesmos."

Cabe, portanto, a todo professor da rede pública do estado de São Paulo apropriar-se de tais propostas para ensinar os números complexos sem trazer dificuldades algébricas exageradas, mas sem subestimar a importância do tema.

Mas, indo além, acreditamos que tais ideias são dignas de análise e consideração por todo professor, respeitando as especificidades da Proposta Curricular de seu Sistema de Ensino.

2.2 Atividades

Tendo em vista o que foi exposto acima, procuramos criar atividades que atendessem aos seguintes propósitos:

- ser útil à formação matemática dos estudantes.

- ser suficientemente atraente para que o estudo dos números complexos seja motivador e não sofra resistências por parecer chato ou inútil.

- estar disponível a qualquer pessoa interessada, professor ou estudante, requerendo para a realização das atividades unicamente o acesso à internet.

Com essas pretensões, fizemos as seguintes opções:

- usar o Geogebra (sobre o qual teceremos alguns comentários posteriormente) como plataforma para criação de *applets*.

- disponibilizar o material no site "GeoGebraTube" (http://www.geogebratube.org/). Trata-se de um repositório de atividades de todas as áreas da Matemática, de todos os níveis, global, de livre acesso, para visualização e interação online ou para download e modificação quando o usuário achar conveniente. As atividades podem ser acessadas diretamente por qualquer estudante interessado, ou podem ser sugeridas no plano de aula de qualquer professor.

- resolver alguns exercícios de vestibulares de importantes universidades. O tema *números complexos* foi e continua sendo cobrado nesses processos seletivos, não podendo ser, portanto, ignorado sob nenhum pretexto pelos estudantes com planos de acesso a tais instituições.

- usar o computador respeitando aquilo que os jovens desejam, seja num *game* ou num material de estudo: ter um curto texto informativo seguido de alguma ação com o mouse, realizando um movimento de z no plano, ou clicando numa alternativa, por exemplo. Nesse sentido, cada resolução foi dividida em pequenas unidades com a intencionalidade de que o estudante leia, reflita e aja autonomamente, aprendendo de forma natural.

- reforçar sempre e prioritariamente a interação entre as propriedades algébricas dos complexos e a visão geométrica deles. Embora nos vestibulares o candidato não tenha acesso a recursos tecnológicos, acreditamos que o estudo nessa perspectiva traz o aprofundamento dos conceitos e acrescenta significado às questões.

- no final de cada exercício, está feita a resolução tradicional, algébrica, para ser confrontada com a intuição geométrica estimulada e para dar exatidão formal às respostas.

2.2.1 Descrição de algumas atividades

Passamos nesta seção à descrição de algumas atividades disponíveis para execução online (ou para fazer download) no seguinte link:

http://www.geogebratube.org/user/profile/id/13931

É oportuno ressaltar que a configuração de tais atividades permite uma visualização adequada no computador, mas não estão otimizadas para a impressão.

Observamos, ainda, que a primeira atividade a seguir apresenta várias imagens das telas, além de uma descrição detalhada. A partir da segunda seremos mais sucintos, enfocando em cada atividade o ponto central a que nos propomos facilitar a aprendizagem, dentro do conteúdo de números complexos.

A ordem em que as diversas atividades serão abordadas a seguir não espelha uma proposta de sequência didática, uma vez que é através da manipulação do conjunto de exercícios que o aluno irá fixar conhecimentos e se motivar ao estudo da teoria, de acordo a nossa proposta.

Atividade 1: Questão da Fuvest 2008

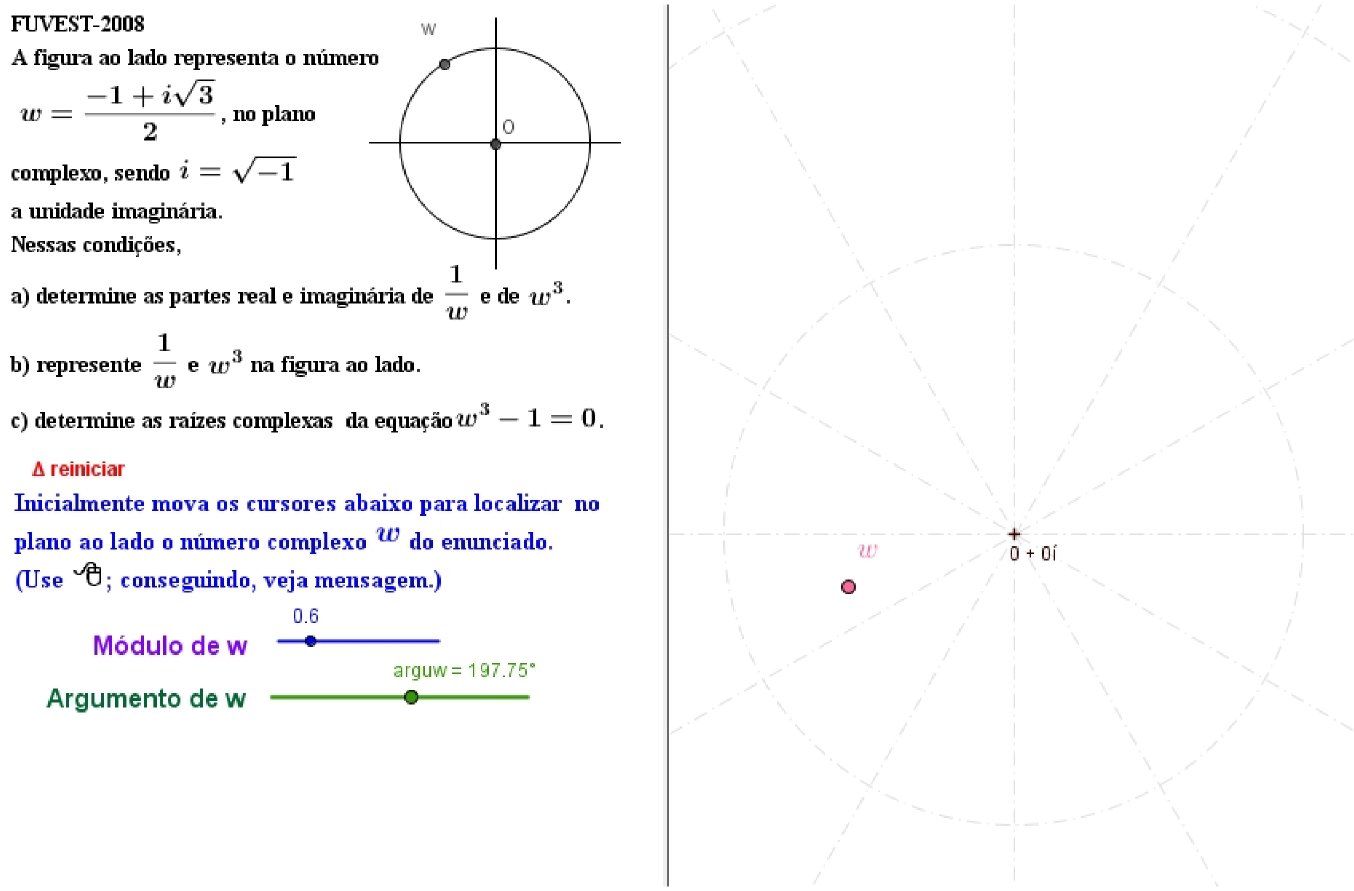


Figura 2.1: Fuvest 2008 tela 1

Na tela inicial, o aluno encontra apenas o enunciado da questão e um link para iniciar a resolução. Ao clicar, temos a tela da figura acima, na qual se vê à esquerda (janela 1, por convenção).

Há dois cursores que convidam a modificar o módulo e o argumento de um número complexo genérico w que aparece na janela da direita (janela 2). A ideia é que seja reforçada a forma trigonométrica e a visualização do número complexo no plano.

A seguir, deve-se ajustar os valores até os correspondentes à forma algébrica dada no enunciado. Aproximando-se deles o suficiente, aparece o feed back "módulo correto" ou "argumento correto"; o link "prosseguir" fica disponível.

Tanto o estudante pode saber a resposta a partir da forma algébrica do enunciado quanto chegar a ela heuristicamente. É este o sentido didático da proposta de usar um applet interativo.

Na tela seguinte (tela 2), temos um microteste com três alternativas para a forma trigonométrica do número dado. Caso o aluno ainda não tenha de antemão relacionado a e b com os respectivos valores trigonométricos, ele pode voltar à tela anterior e rever os valores de módulo e argumento corretos, de tal forma que assinalando a alternativa correta, ele recebe o feedback de acerto, e pode prosseguir.

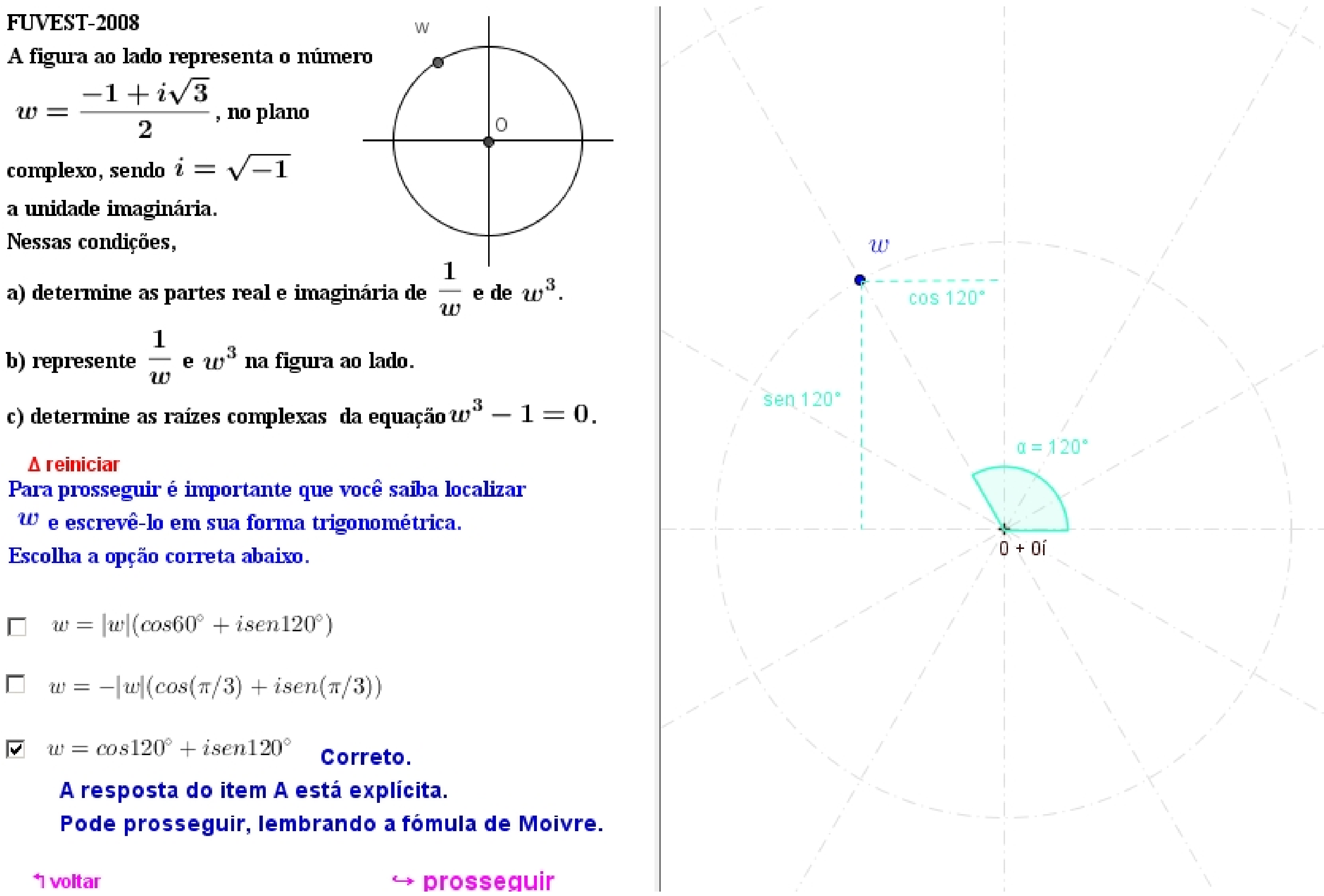


Figura 2.2: Fuvest 2008 tela 2

Na terceira tela, a escolha é entre três alternativas que testam se o aluno sabe aplicar a fórmula de Moivre para o número w em questão.

Mesmo que por tentativa e erro, chegando à confirmação da expressão certa, ele é solicitado a verificar a imagem de w^n para n variando de -5 a 5.

Confrontando com a fórmula correta, espera-se que o aluno entenda o significado dela. A escolha de n é feita por um controle deslizante e o argumento de w bem como sua imagem são atualizados.

Na tela 4, a proposta é arrastar dois pontos z_1 e z_3 (que estão numa posição qualquer do plano) até as imagens de w^{-1} e w^3. Quando próximos de seus alvos z_1 e z_3 são substituídos pela mensagem de acerto.

Assim está na janela da direita a resposta do item a). E também a resposta do item b) que é exatamente a representação gráfica do inverso de w e e de sua terceira potência.

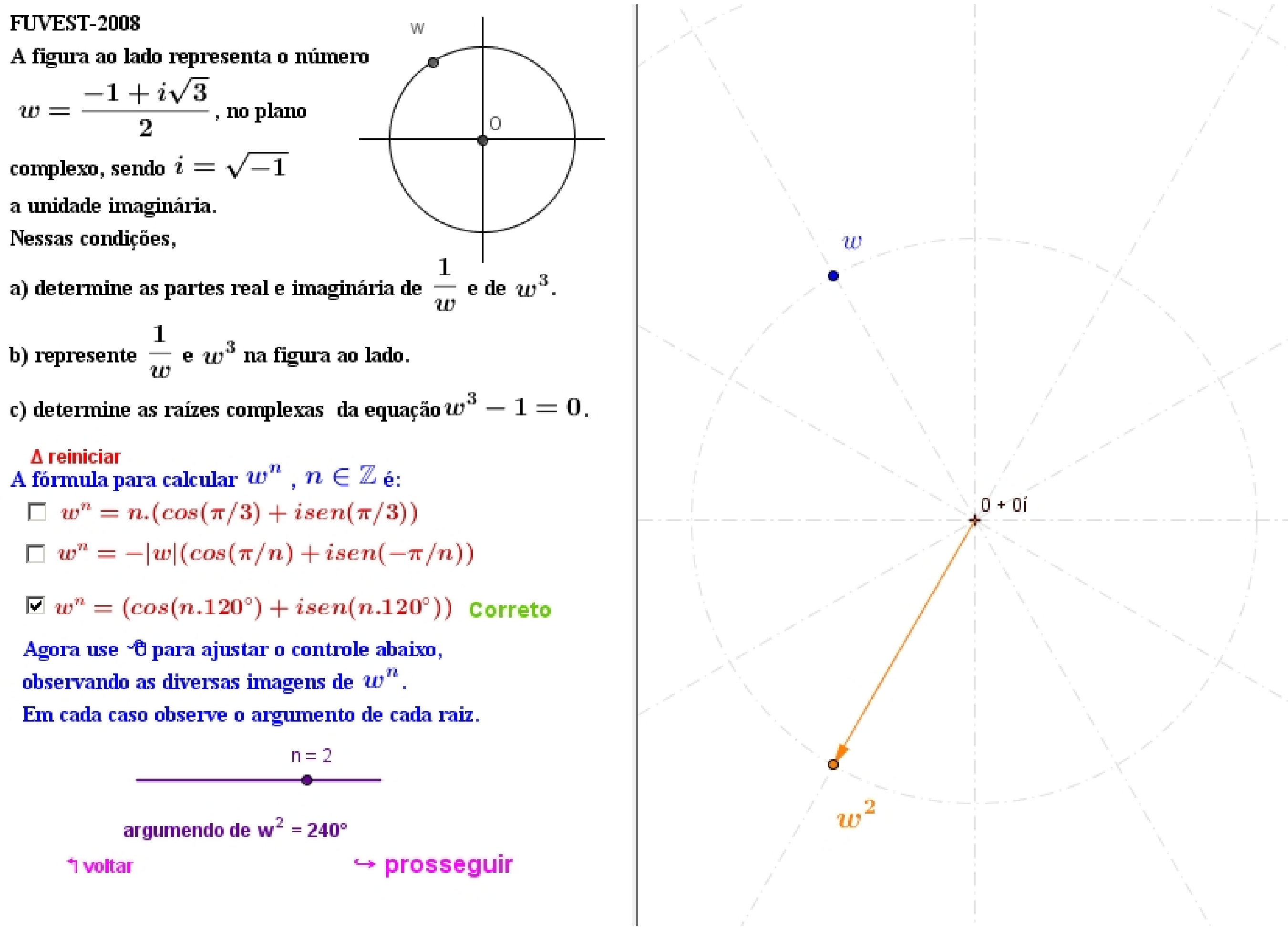


Figura 2.3: Fuvest 2008 tela 3

Finalmente, o aluno é convidado a observar que a solução algébrica do item c) leva a uma configuração geométrica já prevista: as raízes pedidas remetem às imagens já dispostas na tela anterior.

A resolução de equações algébricas explorando mais a radiciação de números complexos é tratada com mais detalhes em outra atividade, para manter o dinamismo da proposta.

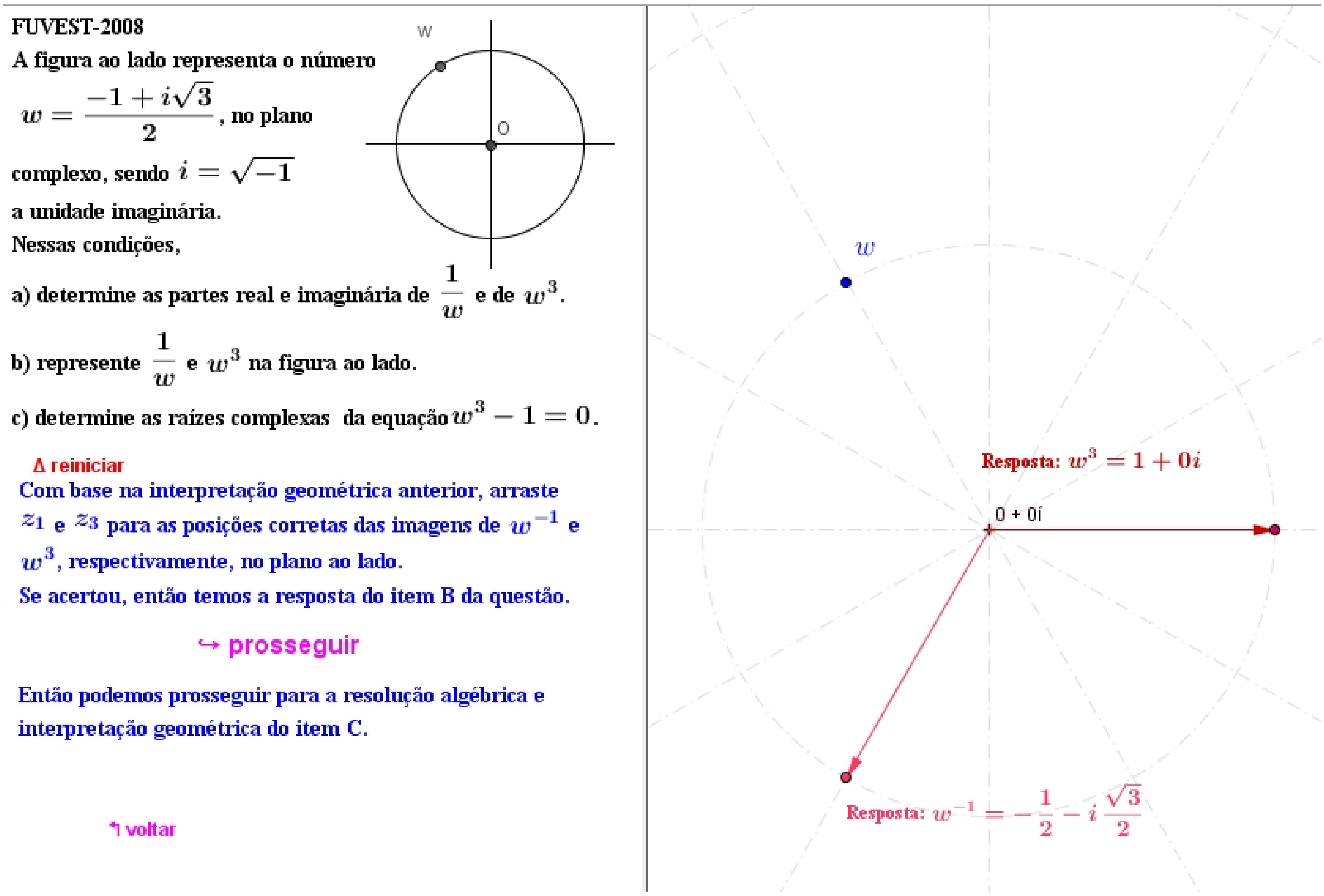


Figura 2.4: Fuvest 2008 tela 4

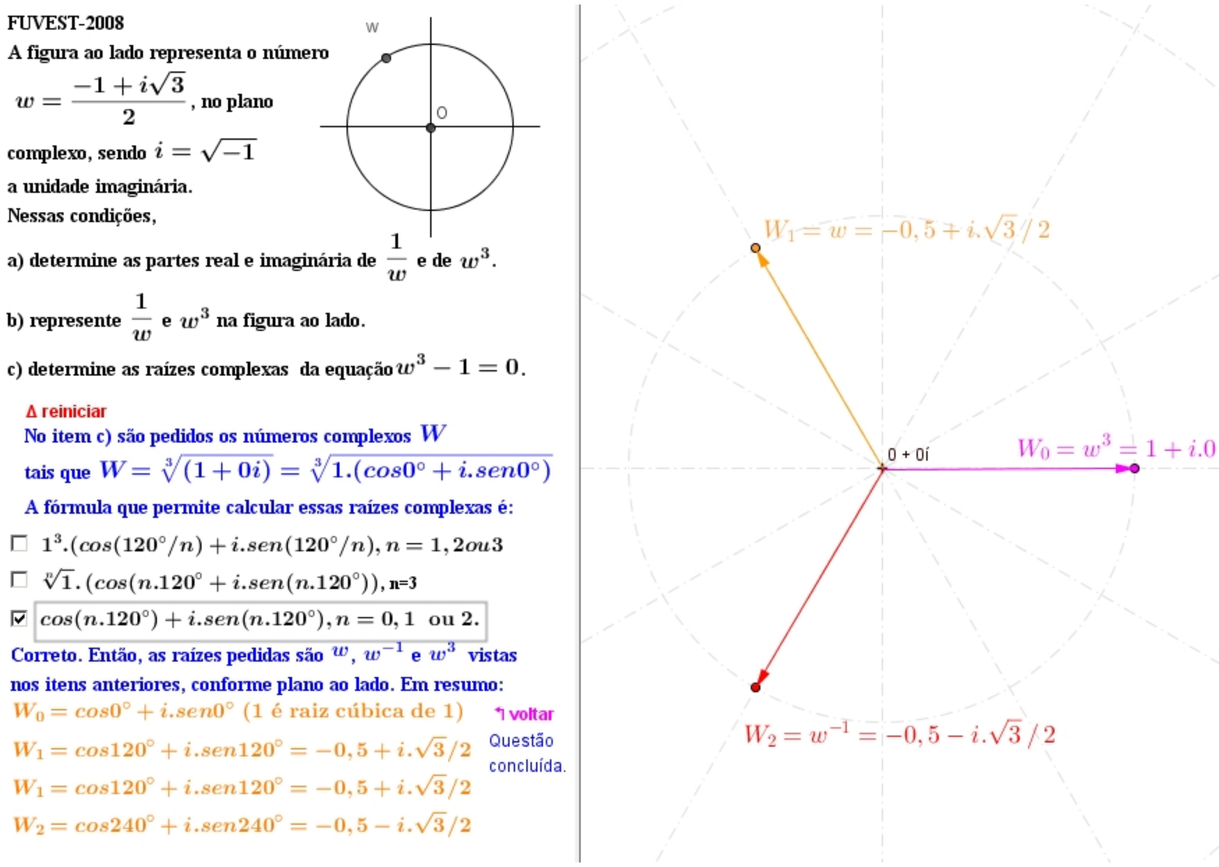


Figura 2.5: Fuvest 2008 tela 5

Atividade 2: Questão do Ita 1995

Na primeira tela, apenas é chamado a atenção para o fato de que embora z seja um ponto livre, não é possível levá-lo para o segundo ou terceiro quadrantes em virtude de restrição imposta pelo enunciado.

Na segunda tela, o aluno muda a posição do ponto z na janela 2 para observar a relação implícita na primeira parcela da equação.

Na próxima passagem (tela 3), chamamos a atenção para o fato de que a segunda parcela da equação proposta é um número real. Fazemos isso mostrando z, seu conjugado e circunferências cujos raios são os módulos da soma e do quadrado da soma de $z_c + i$.

Na sequência, tratamos do número complexo $RZ = (z+i)^2 + |\bar{z}+1|$, que corresponde ao lado esquerdo da equação. A condição buscada é $RZ = 6$.

Na tela 4, movendo z, o estudante deverá observar que apenas para certos valores RZ é um real e apenas para um único valor de z temos satisfeita a condição dada.

Chega-se assim no plano da janela 2 à solução geométrica da equação

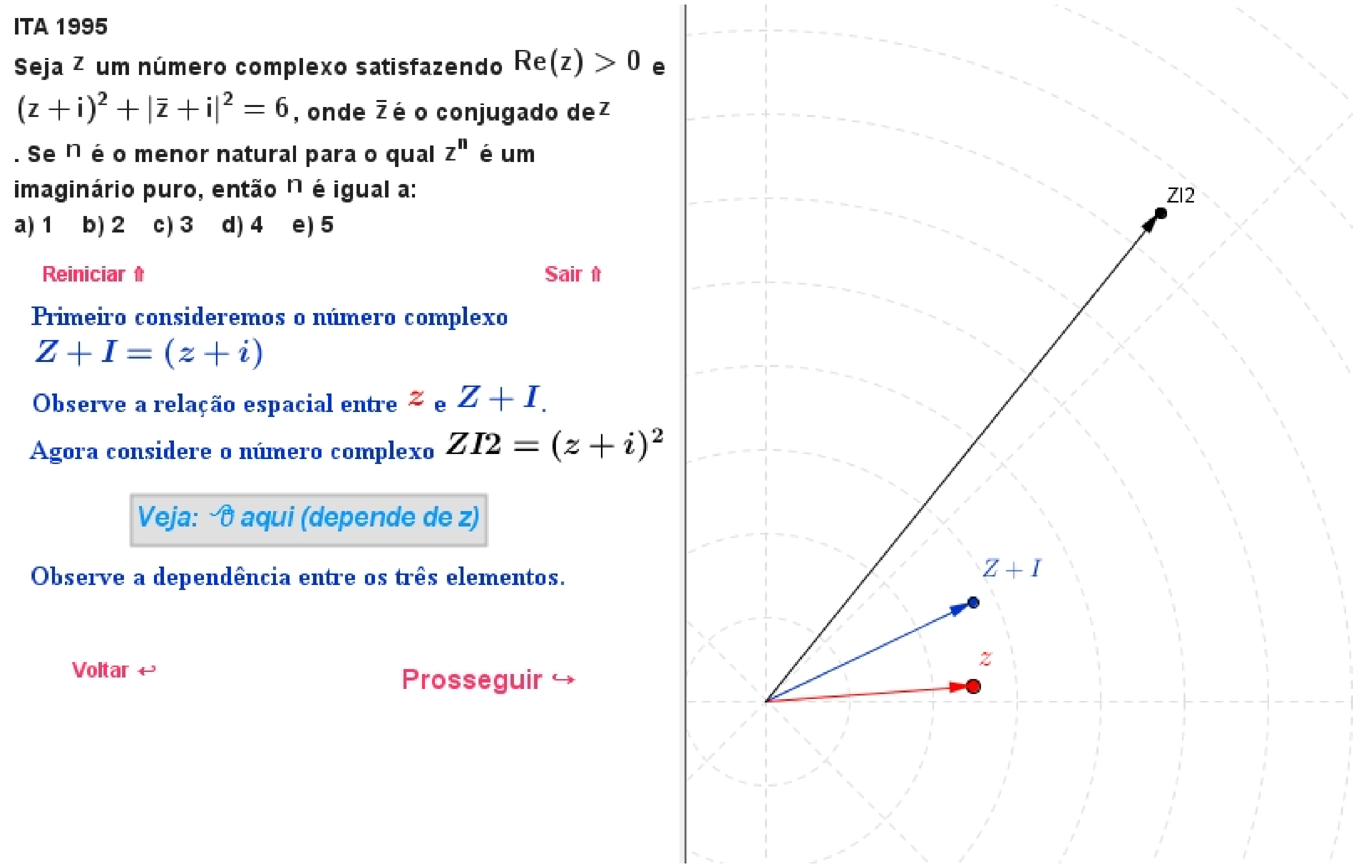


Figura 2.6: Ita 2005 tela 2

O que vem na tela 5 é a busca da resposta à pergunta: qual é o menor natural n para o qual z^n (z já encontrado e fixado) é um imaginário puro?

Em dois microtestes, recapitulamos a Fórmula de Moivre, dando subsídios ao aluno para terminar a questão.

Respondendo corretamente, vai ser possível, na tela 6, manipular um cursor em que n varia de 0 a 5 e as potências vão sendo vistas na janela 2. A opção $n = 2$ surge naturalmente porque o próximo expoente que torna z^n imaginário puro é 5.

A resolução algébrica convencional vem nas próximas duas telas, confirmando os resultados vistos e consolidando os conhecimentos.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

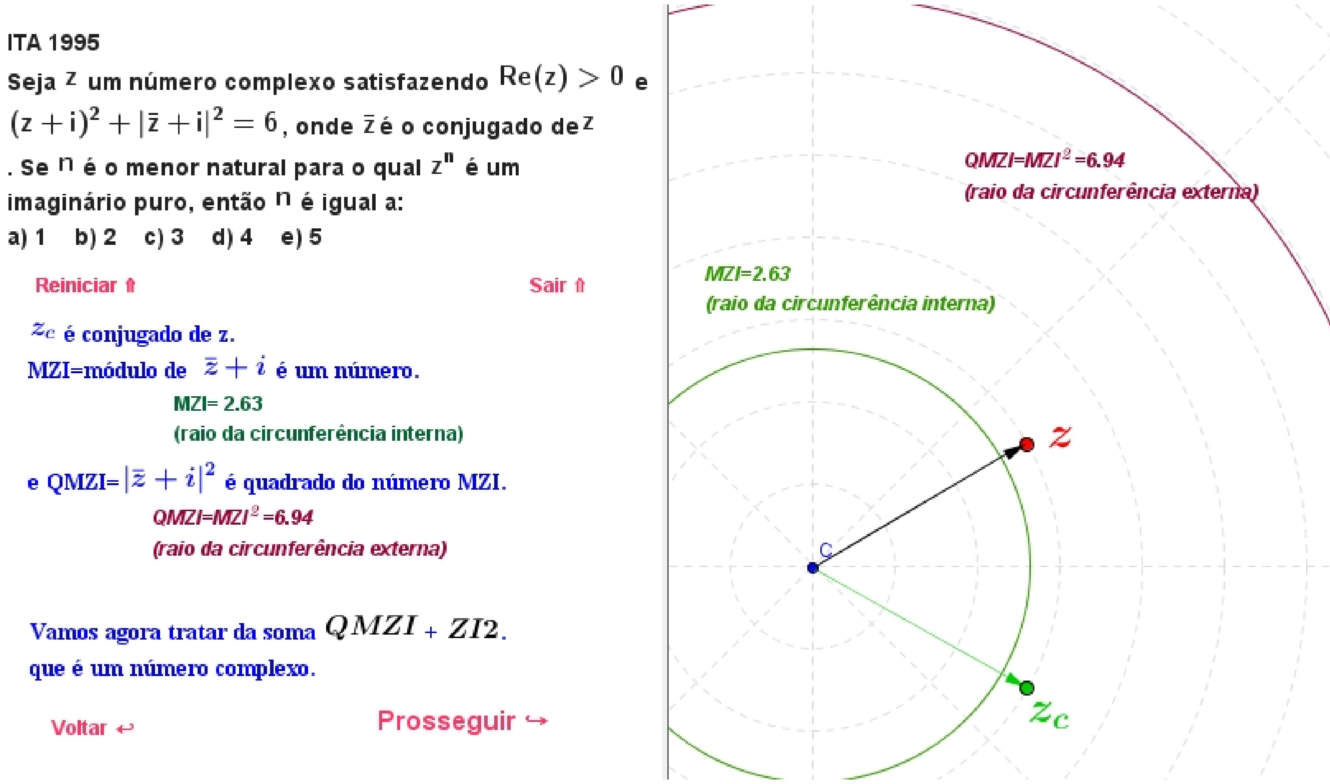


Figura 2.7: Ita 2005 tela 3

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

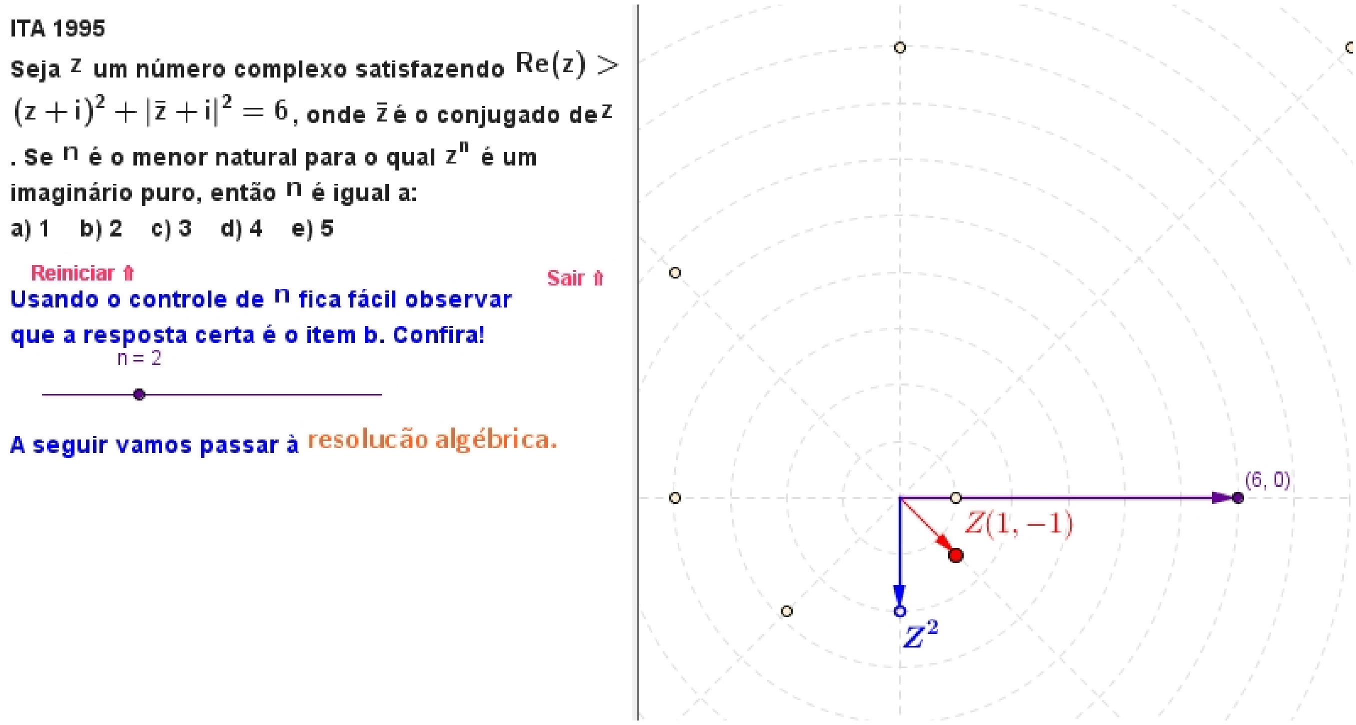


Figura 2.8: Ita 2005 tela 6

Atividade 3: Questão da Vunesp 2003

Nessa questão, propomos que o aluno estude separadamente os elementos da equação dada. Para tanto, é proposto:

"Consideremos dois números complexos: $W = z - a$ e seu conjugado $W_{conj} = \bar{z} - a$. O produto $R = W * W_{conj}$ é um número complexo cujo argumento é 0 e cujo módulo é $|R| = |W|^2$. Usando o mouse, mova os controles abaixo e observe o produto R."

A ideia é reforçar o conceito do produto de um complexo pelo seu módulo, através no uso do mouse e da observação do plano.

Na tela 2, a proposta é resolver uma equação do tipo $z.\bar{z} = k$ e entender sensorialmente que a solução é uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{k}$. Para isso, um microteste ajuda a fixar o ponto.

Nas próximas fases o encaminhamento é o seguinte:

Agora vamos estudar a relação entre W e z. Sabemos que $z = W + a$ onde a é um parâmetro variável.

Use o controle a seguir para observar a posição de z e de $\bar{z}$ para diversos valores de a. (W continua variável).

A relação entre W_{conj} e $\bar{z}$ é análoga.

Como você descreve a influência de somar a?

Experimentalmente é possível entender a translação horizontal, de uma forma mais eficiente que a memorização.

Para chegar à resolução da questão, o caminho é o seguinte: Agora considere a

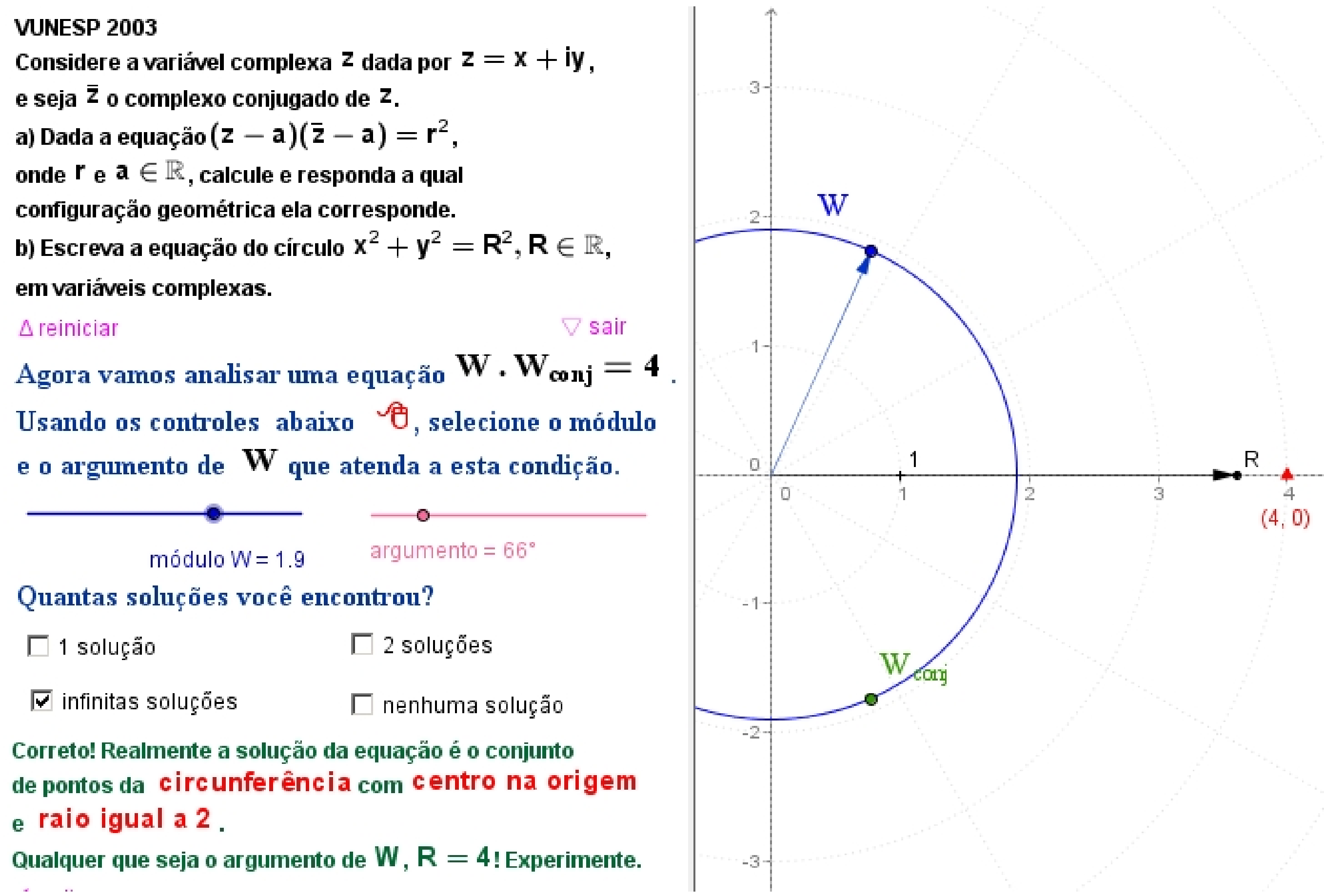


Figura 2.9: Vunesp 2003 tela 2

equação $W.W_{conj} = 4$, já vista. Sabemos que sua solução é uma circunferência de centro na origem e raio 2. Mudando o argumento de W, pode-se visualizar os pontos que são imagem de z tal que $(z - a).(\bar{z} - a) = 4$?

Manipulando controles do módulo e do argumento de z agora (e não mais de w), pode-se observar que a resposta é uma circunferência transladada de a unidades e com raio r.

Terminando, o aluno observa a solução algébrica convencional, já com uma visão geométrica da situação.

Atividade 4: Questão da Ufscar 2006

No item *b*) desta questão temos uma oportunidade de explorar bastante a Geometria.

Inicialmente, o aluno irá ter contato com vários inversos de potências de z, observando-os conforme z varia no plano. Em seguida, irá focar na soma $z^{-1} + z^{-2}$.

É uma oportunidade de praticar a regra do paralelogramo; "arrastando" as paralelas aos vetores, determina-se o complexo da soma. Isso é feito para um z genérico e depois para a situação do enunciado, com $z = -i$.

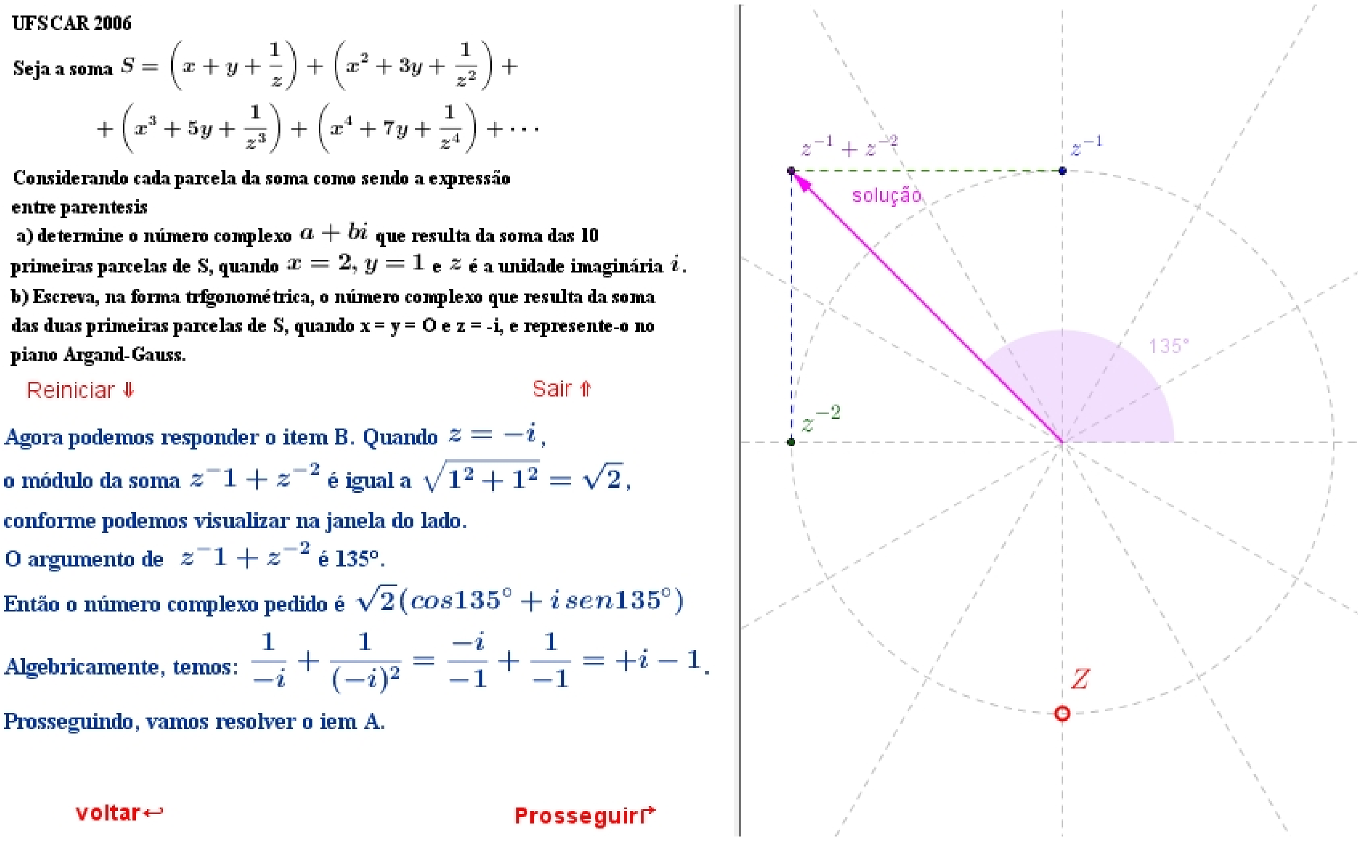


Figura 2.10: Ufscar 2006 tela 2

A representação no plano e a parte real e imaginária pedida estarão evidentes.

O item a) exige que o aluno entenda que a soma de dez números complexos é a soma das partes reais e imaginárias. E em função disso, a soma de PA e de PG serão necessárias. Microtestes lembram ao aluno as fórmulas.

Também nesse item a), é necessária a compreensão de que i^n tem comportamento periódico e as oito primeiras parcelas da soma i^{-k} se anulam.

Atividade 5 : Questão do Ita 2004

Esta é a última atividade descrita neste trabalho, embora outras estejam disponíveis para o estudante acessar ou baixar no link anterior. Acreditamos que o conjunto delas poderá trazer uma convivência mais harmoniosa com os números complexos.

Alguns conceitos se repetirão em contextos diversos, explorando as possibilidades que o uso de TICs nos facultam.

Essa questão tem forte apelo geométrico. A elipse é construída passo a passo. O aluno irá posicionar os eixos e depois os focos até a figura se formar.

A circunferência solução de $|z| = K$ também aparece através de manipulação de elementos.

O produto de complexos simétricos completa a abordagem.

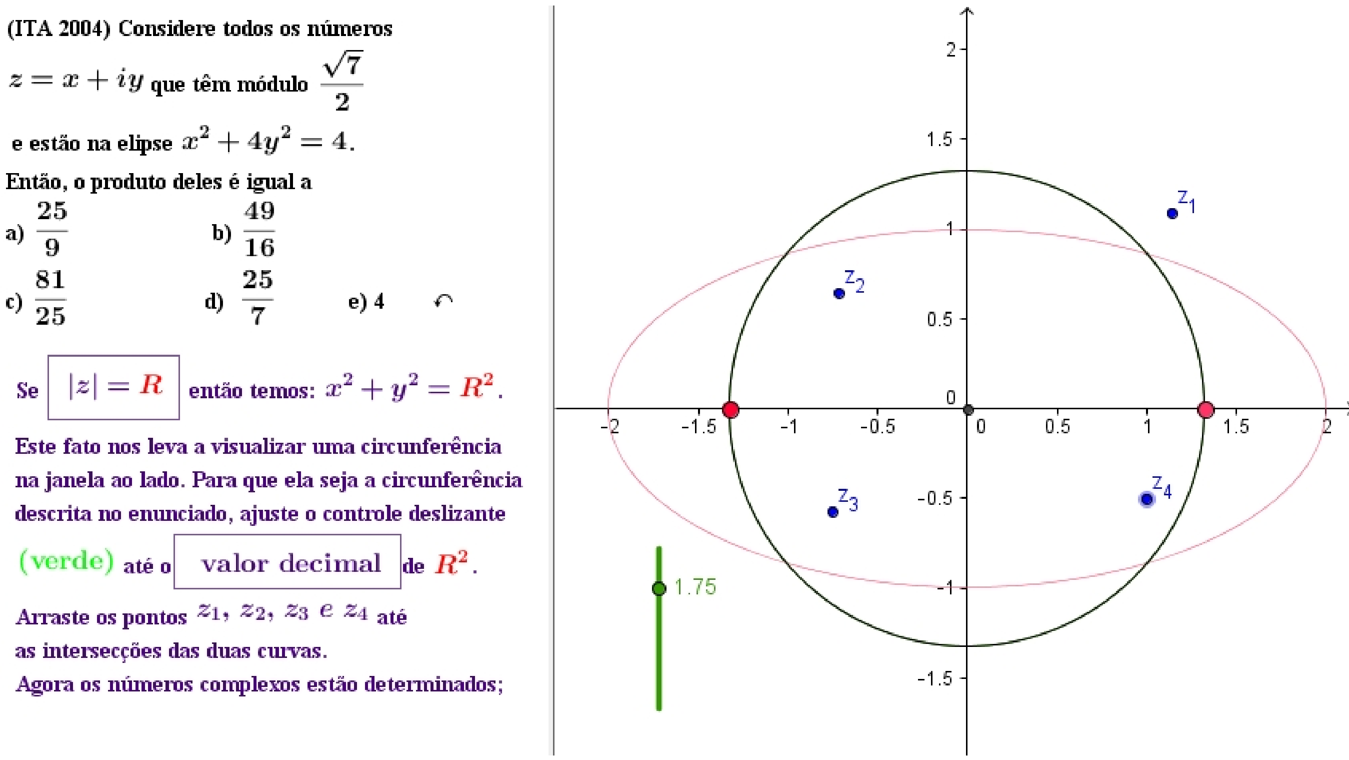


Figura 2.11: Ita 2004 tela 2

Apêndice

Tabela de enunciados e links de atividades:

- INÍCIO

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/43434

  Formulário e exemplos geométricos das operações com complexos que serão usadas nas resoluções de vestibulares.

- VUNESP 2009

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/43617

  O número complexo $z = a + bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura. Sabendo que a área do triângulo é igual a $36\sqrt{3}$, determine z^2 (figura: triângulo equilátero com base horizontal de medida 2a, z no vértice oposto a ela, altura b).

- VUNESP 2003

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/44026

  Considere a variável complexa z dada por $z = x + iy$, e seja $\bar{z}$ o complexo Conjugado de z. a) Dada a equação$(z - a)(\bar{z} - a) = r^2$, onde r e $a \in \mathbb{R}$, calcule e responda a qual configuração geométrica ela corresponde. b) Escreva a equação do círculo $x^2 + y^2 = R^2, R \in \mathbb{R}$, em variáveis complexas.

- FUVEST 2013

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/42272

  Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 1$. a) Ache todas as raízes complexas de $p(x)$.

- FUVEST 2008

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/43381

  A figura ao lado representa o número $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. Nessas condições, a) determine as partes real e imaginária de $\frac{1}{w}$ e de w^3. b) represente $\frac{1}{w}$ e w^3 na figura ao lado. c) determine as raízes complexas da equação $w^3 - 1 = 0$. (figura: apenas circunferência com z no segundo quadrante)

- FUVEST 2000

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/41038

  a) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação $\bar{z} = i.z^2$, *onde* i *é a unidade imaginária, isto é,* $i^2 = -1$ *e* $\bar{z}$ *é o conjugado de* z. *b) Represente essas soluções no plano complexo, usando um sistema de coordenadas.*

- ITA 1995

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/42903

  Seja z *um número complexo satisfazendo* $Re(z) > 0$ *e* $(z+i)^2 + |\bar{z}+i|^2 = 6$, *onde* $\bar{z}$ *é o conjugado de* z *. Se* n *é o menor natural para o qual* z^n *é um imaginário puro, então* n *é igual a: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5.*

- ITA 2004

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/43356

  Considere todos os números $z = x + iy$ *que têm módulo* $\frac{\sqrt{7}}{2}$ *e estão na elipse* $x^2 + 4y^2 = 4$. *Então, o produto deles é igual a: a)* $\frac{25}{9}$ *b)* $\frac{49}{16}$ *c)* $\frac{81}{25}$ *d)* $\frac{25}{7}$ *e) 4.*

- UFSCAR 2006

  http://www.geogebratube.org/material/edit/id/43408

  Seja a soma $S = \left(x + y + \frac{1}{z}\right) + \left(x^2 + 3y + \frac{1}{z^2}\right) + \left(x^3 + 5y + \frac{1}{z^3}\right) + \left(x^4 + 7y + \frac{1}{z^4}\right) + \cdots$ *Considerando cada parcela da soma como sendo a expressão entre parêntesis a) determine o número complexo a+bi que resulta da soma das 10 primeiras parcelas de S, quando* $x = 2, y = 1$ *e* z *é a unidade imaginária* i. *Escreva, na forma trigonométrica, o número complexo que resulta da soma das duas primeiras parcelas de S, quando x = y = 0 e z = -i, e represente-o no plano Argand-Gauss.*

- UFMG 2007

  http://www.geogebratube.org/material/show/id/43618

  Seja S *o conjunto de números complexos* z *tais que* $|z - 2 + 4i)| = 2$. *1) No plano complexo, faça o esboço de* S, *sendo* $z = x + iy$, *com* x *e* y *números reais. 2) determine o ponto de* S *mais próximo da origem.*

Referências

[1] N. C. Bernardes; C. S. Fernandez, *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2006.

[2] C. B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1994.

[3] M. P. do Carmo; A. C. Morgado; E. Wagner, *Trigonometria e Números Complexos*, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2005.

[4] G.G. Garbi, *O Romance das Equaçãoes Algébricas*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

[5] G. Iezzi, *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 6*, Atual Editora Ltda, São Paulo, 1985.

[6] E.L. Lima, *Análise Real - Volume 1*, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2001.

[7] E.L. Lima, *Revista do Professor de Matemátiva - Volume 46*, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2001.

[8] N.J. Machado; e outros, *Caderno do Professor de Matemática - 3a série - Volume 2*, SEE, São Paulo, 2009.