UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Márcio Henrique Augusto Gomes

Invariantes

RECIFE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Márcio Henrique Augusto Gomes

Invariantes

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G633i Gomes, Márcio Henrique Augusto
Invariantes / Márcio Henrique Augusto Gomes. - 2022.
80 f.

Orientador: Rodrigo Jose Gondim Neves.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2022.

1. Matemática. 2. Combinatória. 3. Invariantes. I. Neves, Rodrigo Jose Gondim, orient. II. Título

CDD 510

MÁRCIO HENRIQUE AUGUSTO GOMES

Invariantes

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 25/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves (Orientador)– UFRPE

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão – DMat-UFPE

Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior– PROFMAT/UFRPE

À minha família, meus pais, minha irmã, minha esposa e meus filhos

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me dado todas as oportunidades da minha vida, agradeço aos meus pais José Marcelo Gomes e Maria da Conceição Augusto Gomes, minha irmã Renata Augusto Gomes e também a minha esposa Angelinne Ribeiro Angelo Gomes e meus filhos Marcelinho e Maria Laís.

A todo o corpo docente do PROFMAT-Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, em especial aos professores da Universidade Federal Rural de Pernambuco-UFRPE, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao meu orientador e amigo professor Dr. Rodrigo José Gondim Neves, pela confiança e paciência que contribuiu para este trabalho.

Ao GGE por ter me dado a oportunidade de trabalhar com as turmas olímpicas, onde pude aperfeiçoar todas as técnicas para matemática olímpica.

Aos colegas do mestrado: Adolfo, Anderson, Antony, Aveílson, Bruno, Celso, Cícero, Dalvisson, Ebenézer, Igor, João Luís, Jonas, Jorge, José Marcos, Juvino, Kleivson, Loinidas, Marcelo, Neiviton, Paulo, Ricardo, Tulio e Werleson. , pelos dois anos de convivência e enriquecimento intelectual pessoas as quais me lembrarei de todos pelo resto minha vida.

Aos meus amigos e também professores, Marcos Miguel e Gustavo Duarte, que sempre estiveram juntos comigo nessa caminhada.

Aos meus alunos das turmas olímpicas de matemática, os quais sempre serão toda energia e motivação para o estudo contínuo das questões de olimpíada.

“E conhecereis a verdade,
e a verdade vos libertará”
(Bíblia Sagrada, João 8.32)

Resumo

Este trabalho vai abordar uma poderosa técnica na solução de problemas de existência em combinatória, o estudo dos invariantes. Um invariante é uma propriedade que não se altera, ou eventualmente muda previsivelmente. Esta técnica nos ajuda a resolver problemas clássicos e desafiadores das mais diversas olimpíadas de matemática.

Palavras-chave: Combinatória, Invariantes, Paridade, Jogos, Tabuleiros.

Abstract

This work will address a powerful technique in the solution of existence problems in combinatorics, the study of invariants. An invariant is a property that does not change, or eventually changes, predictably. This technique help us to solve classic and challenging problems of the most diverse mathematics Olympics.

Keywords: Combinatorics, Invariants, Parity, Games, Boards.

Lista de ilustrações

Sumário

INTRODUÇÃO

"Uma vez que o Princípio de Invariância é um princípio heurístico, é melhor aprendido pela experiência, que ganharemos estudando os exemplos resolvidos."(ENGEL, Arthur, 1995)

As olimpíadas de matemática estimulam o estudo da matemática, identificam jovens talentos e os preparam para o ingresso na universidade. Uma das mais preciosas habilidades para conseguir desenvolver os problemas mais desafiadores das olimpíadas, é a experiência. A aprendizagem se dá pela resolução de problemas. Aquilo que já foi visto, fornece o caminho para, junto com a criatividade, conseguir resolver novos problemas. Neste trabalho, estaremos apresentando técnicas aplicadas a diversos problemas para que o leitor consiga se familiarizar e ganhe o conhecimento necessário para, a partir da sua experiência e criatividade, conseguir fazer uma investigação para decidir se há invariante e ser capaz de resolver o problema.

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO - International Mathematical Olympiad) é um concurso mundial de matemática para alunos do ensino médio. Em cada ano, a IMO é realizada em um país diferente. A primeira IMO foi realizada em 1959 na Romênia, com a participação de 7 países, expandiu-se gradualmente para mais de 100 países dos 5 continentes. O Conselho da IMO garante que a competição ocorra a cada ano e que cada país anfitrião observe os regulamentos e tradições da IMO.

O Brasil participou da IMO pela primeira vez em 1979, ano que também foi criada a OBM, Olimpíada Brasileira de Matemática. O Brasil sediou a IMO em 2017 na cidade do Rio de Janeiro. Até 2021 o Brasil ja participou de 41 edições da IMO e possui 11 medalhas de ouro, 50 medalhas de prata, 81 medalhas de bronze e 33 menções honrosas, que nas olimpíadas do conhecimento é considerada o quarto prêmio.

Além da IMO, várias outras olimpíadas de matemática foram criadas com a finalidade de encontrar os novos talentos. A OBM tem como um dos seus objetivos selecionar estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de matemática através da prova da OBM e ainda dando o treinamento adequado para os estudantes brasileiros poderem participar das maiores competições de matemática ao redor do mundo.

As olimpíadas de matemática estão focadas em 04 áreas da matemática:

1. Geometria;

2. Teoria Dos Números;
3. Álgebra;
4. Combinatória.

Em combinatória existem essencialmente 2 tipos de problemas: os problemas de contagem e os problemas de existência. Dentro dos problemas de existência, temos algumas técnicas tais como: princípio da casa dos pombos, princípio do extremo e o princípio dos invariantes. Uma das grandes ferramentas para resolver os problemas de existência é a busca por um invariante.

Então, o que é um "invariante"? Naturalmente, é algo invariável, que não muda. Segundo (9) invariantes são quantidades que não mudam sob transformações específicas e, portanto, obstruem a transformação de um objeto em outro. O princípio da invariância se baseia em uma propriedade que não se altera ou se altera previsivelmente sendo aplicado em diversos problemas sejam eles de algoritmos, jogos, tabuleiros, etc. Geralmente teremos um início de algum processo, seguiremos alguns passos, e gostaríamos de saber o que acontece no final do processo. Aqui entra o invariante. Se formos capazes de determinar uma ou mais propriedades que não se alteram com o passos do processo, então achamos o invariante e com essa percepção poderemos responder as perguntas. Veremos a seguir que essa ferramenta é extremamente útil para provar que determinado estágio jamais pode ser alcançado, (mas fique atento aos falsos invariantes). Alguns problemas parecem que não conseguiremos atingir o estágio final, mas com algumas técnicas, conseguimos, sim, atingir determinado estágio.

Nesse trabalho iremos explorar algumas técnicas para facilitar a procura por um invariante. Os professores e alunos interessados em problemas desafiadores ou que querem aprofundar seus conhecimentos em matemática, seja para melhorar seus níveis ou seja para participar de olimpíadas de matemática, aproveitem a leitura para desenvolver a principal habilidade na descoberta do invariante; a experiência. Uma vez que encontramos o invariante, a resolução do problema fica elementar, mas a identificação do invariante é que torna o problema difícil.

Vamos enumerar algumas técnicas para ajudar o reconhecimento do invariante.

(I) Estudar alguns casos menores e procurar um padrão.

(II) Ficar extremamente atento as propriedades que não mudam.

(II) Verificar a Paridade.

(IV) Precaver-se Falsos invariantes.

Podemos classificar os invariantes em diversos tipos:

(I) Invariantes de estado;

(II) Paridade é o invariante;

(II) Invariantes com restos;

(IV) Semi-Invariantes;

(V) Invariantes em tabuleiros;

(VI) Invariantes em jogos;

(VII) Falsos invariantes.

O professor que deseja preparar alunos para as olimpíadas de matemática, deve estar familiarizado com as principais técnicas de resolução de problemas, pois a percepção delas vai ajudar os alunos e também ao professor a resolver os problemas olímpicos e também dar a segurança necessária ao professor para ministrar suas aulas.

1 INVARIANTES DE ESTADO

> A ideia de um invariante é muito difundida e permeia diferentes campos da ciência. Se os seus alunos estão familiarizados com os fundamentos da física, então você pode analisar como exemplos alguns corolários da lei da conservação da energia, ou o teorema da conservação do momento, etc. (FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia, 2010)

Em matemática, alguns problemas permitem que possamos aplicar algumas operações e transformações para um determinado objeto matemático. Mesmo aplicando essas transformações, algumas propriedades desse objeto permanecem inalteradas. Essa propriedade é chamada de invariante. Nos problemas de existência em combinatória, essa poderosa e simples ferramenta é essencial para podemos provar que um determinado estágio final nunca poderá ser alcançado usando apenas essas operações e transformações permitidas.

Segundo (10), devemos observar três simples regras:

a) a quantidade que obtemos deve de fato ser invariante;

b) esta invariante deve fornecer valores diferentes para dois objetos dados no enunciado de um problema;

c) devemos começar determinando a classe de objetos para os quais a quantidade será definida.

Vamos analisar os seguintes exemplos desse tipo de invariante:

(i) procure por alguma propriedade que não muda independente da operação realizada. Esse será nosso invariante;

(ii) de posse dessa informação, mesmo depois de uma sequência de operações realizadas, argumente se o estágio final pode ser alcançado ou não.

1. Escrevemos os números inteiros de 1 a 10 (inclusive) no quadro. A cada passo, escolhemos dois números quaisquer do quadro e trocamos pela soma deles. Ao final, vai sobrar somente um número. Quem é esse número?

   Solução:

   (i) Como a ordem dos fatores não altera a soma, independente de como somarmos teremos: $S = 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$. Logo a Soma é nosso invariante de estado.

(ii) De posse desse invariante concluímos que o estágio final é 55.

2. Um círculo está dividido em seis setores que estão marcados com os números $1, 0, 1, 0, 0, 0$ no sentido horário. É permitido somar 1 a dois setores vizinhos. É possível, repetindo esta operação várias vezes, fazer com que todos os números se tornem iguais?

Solução:

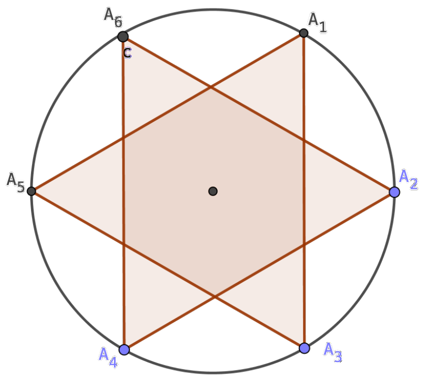

Figura 1 – Círculo em seis setores

(i) Sejam A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 os números marcados nos 6 setores do círculo. Percebe-se que a diferença da soma dos números dos vértices do triângulo (A_1, A_3 e A_5) e dos vértices do triângulo (A_2, A_4 e A_6) é constante, ou seja, $S = (A_1 + A_3 + A_5) - (A_2 + A_4 + A_6)$, não é alterada, quando se soma 1 a dois números vizinho. De fato, quando somamos 1 em (A_i e A_{i+1}) a soma S não é alterada. Logo essa soma é nosso invariante de estado.

(ii) No início temos: $S = 2 - 0 = 2$. Se todos os números forem iguais teríamos que essa soma seria 0. Logo não conseguimos obter todos os números iguais somando 1 a dois vizinhos.

3. Dado um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ podemos fazer as seguintes operações:

   (i) Trocar a com c.

   (ii) Tocar x por $x + t$ onde t é um real.

   Usando essas operações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

Solução:

(i) Perceba que o discriminante de $ax^2 + bx + c$ é $\Delta = b^2 - 4ac$, quando trocamos a com c o discriminante de $cx^2 + bx + a$ também é $\Delta = b^2 - 4ac$. Na segunda operação temos que:

$a(x+t)^2+b(x+t)+c = a((x^2+2tx+t^2))+b(x+t)+c = ax^2+(2ta+b)x+(at^2+bt+c)$. Cujo o discriminante é: $\Delta = (2ta+b)^2 - 4a(at^2+bt+c) = b^2 - 4ac$. Portanto o discriminante é o nosso invariante de estado.

(ii) Como o discriminante de $x^2 - x - 2$ é igual a 9 e discriminante de $x^2 - x - 1$ é igual a 5 não é possível fazer a transformação.

4. Um computador tem na memória números $1, 2, 3, ..., 24$. Faz-se a seguinte operação até que reste apenas 1 número: deletam-se dois números quaisquer a e b e o número $\sqrt{a^2+b^2}$ é colocado na memória. Quais os possíveis números que podem sobrar?

   Solução:

   (i) Perceba que a $\sqrt{a^2+b^2}$ substituiu os números a e b. Considere agora $\sqrt{a^2+b^2}$ e c, então esses números serão substituídos por $\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2}$ que é igual a $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Vamos provar por indução que a ordem é invariante. Suponha que a ordem seja invariante para n números. Pela hipótese indutiva, fazendo a operação com os n primeiros números, obtemos $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2}$. Agora vamos fazer a operação com o a_{n+1}. Esses números serão substituídos por: $\sqrt{(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2})^2+a_{n+1}^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{n+1}^2}$.

   Ou seja, a ordem das operações não altera o resultado final.

   (ii) nesse caso é $x = \sqrt{1^2+2^2+...+24^2}$.

5. Comece com o conjunto $(3, 4, 12)$. Em cada etapa, você pode escolher dois dos números a e b, e substituí-los por $\frac{3a-4b}{5}$ e $\frac{4a+3b}{5}$. Você pode alcançar a meta (4,6,12) podendo realizar essas etapas?

   Solução:

   (i) Perceba que a soma dos quadrados de $0,6a - 0,8b$ e $0,8a + 0,6b$ é igual a $(0,6a-0,8b)^2+$ $(0,8a+0,6b)^2 = a^2+b^2$, ou seja, essa transformação não altera a soma de todos os três quadrados. Logo a soma dos quadrados é nosso invariante de estado.

   (ii) Como $a^2+b^2+c^2 = 3^2+4^2+12^2 = 13^2$ e $4^2+6^2+12^2 = 14^2$, não conseguimos atingir $(4, 6, 12)$.

6. São escritos numa lousa os números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{100}$ Faz-se a seguinte operação até que reste apenas 1 número: apagam-se dois números quaisquer a e b e escreve-se $a+b+ab$ na lousa. Quais os possíveis números que podem sobrar?

   Solução:

(i) Note que $a+b+ab$ substitui os números a e b quando fazemos a operação com os números a e b. Considere outro número c escrito na louça. Façamos agora a operação com c e com $a+b+ab$. Obtemos: $a+b+ab+c+(a+b+ab)c = a+b+c+ab+ac+bc+abc$. Vamos provar por indução que o resultado final das operações é invariante. Suponha que seja válida para n números. Pela hipótese indutiva, fazendo a operação com os n primeiros números, obtemos $a_1+a_2+...+a_n+a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n+...+a_1a_2...a_n$. Agora vamos fazer a operação com o número a_{n+1} e então obtemos: $a_1+a_2+...+a_n+a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n+...+a_1a_2...a_n+a_{n+1} + a_{n+1}x(a_1+a_2+...+a_n+a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n+...+a_1a_2...a_n) = a_1+a_2+...+a_{n+1}+a_1a_2+a_1a_3+...+a_na_{n+1}+...+a_1a_2...a_{n+1}$, logo, por indução, fica demonstrado que independente da ordem, o resultado é sempre o mesmo. Logo a operação é nosso invariante de estado.

(ii) Sabemos que $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) = 1+a_1+a_2+...+a_n+a_1a_2+...+a_{n-1}a_n+a_1a_2a_3+...a_{n-2}a_{n-1}a_n+...+a_1a_2...a_n$, que é exatamente igual ao que procuramos. Logo temos $(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{100})-1 = (2)(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})(\frac{5}{4})...(\frac{101}{100})-1 = 101-1 = 100$

7. São escritos numa lousa os números$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, ..., \frac{n}{2n+1}$ Faz-se a seguinte operação até que reste apenas 1 número: apagam-se dois números quaisquer a e b e escreve-se $a+b-2ab$ na lousa. Quais os possíveis números que podem sobrar?

   Solução:

   (i) Vejamos o que acontece quando substituímos a e b por $a+b-2ab$ e depois pegamos esse número com c e substituímos por $a+b-2ab+c-2(a+b-2ab)c$, e ficamos com $a+b+c-2ab-2ac-2bc+4abc$ vamos provar por indução que o resultado final das operações é invariante. Considere que o resultado final das operações é invariante para n números: pegaremos o número: $a_1+a_2+...+a_n-2a_1a_2-2a_1a_3-...-2a_{n-1}a_n+...+(-1)^{n+1}2^{(n-1)}a_1a_2...a_n$ com o a_{n+1} e obtemos: $a_1+a_2+...+a_n-2a_1a_2-2a_1a_3-...-2a_{n-1}a_n+...+(-1)^{n+1}2^{(n-1)}a_1a_2...a_n+a_{n+1}$ -2 $a_{n+1}(a_1+a_2+...+a_n-2a_1a_2-2a_1a_3-...-2a_{n-1}a_n+...+(-1)^{n+1}2^{(n-1)}a_1a_2...a_n) = a_1+a_2+...+a_{n+1}-2a_1a_2-2a_1a_3-...-2a_na_{n+1}+...+(-1)^{n+2}2^{(n)}a_1a_2...a_{n+1}$, logo, por indução, fica demonstrado que independente da ordem, o resultado é sempre o mesmo. Logo a operação é nosso invariante de estado.

   (ii) Sabemos que $-2^{n-1}(\frac{1}{2}-a_1)(\frac{1}{2}-a_2)...(\frac{1}{2}-a_n) = \frac{-1}{2}+a_1+a_2+...+a_n-2a_1a_2-2a_1a_3-...-2a_{n-1}a_n+...+(-1)^{n+1}2^{(n-1)}a_1a_2...a_n$, que é exatamente igual ao que procuramos.

   Logo temos $2^{2n}(\frac{1}{2}-\frac{n}{1})(\frac{1}{2}-\frac{n}{2})(\frac{1}{2}-\frac{n}{3})...(\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1})+\frac{1}{2}$.

8. Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

Solução:

(i) Suponha que cada degrau valha a pontuação do seu degrau. Exemplo uma rã no primeiro degrau tem um ponto, no quinto degrau tem 5 pontos e no 10 degrau tem 10 pontos. Perceba que a quantidade total de pontos é nosso invariante de estado. De fato, em qualquer instante o número total de pontos é $1 + 2 + ... + 10 = 55$.

(ii) Como a média é $5,5$ e não é inteira, não podemos ter todas as 10 rãs no degrau $5,5$, pois ele não existe. Logo é impossível todas as rãs estarem no mesmo degrau.

9. Três máquinas I, R, S imprimem pares de inteiros positivos em tíquetes. Para a entrada (x, y), as máquinas I, R, S imprimem respectivamente $(x - y, y)$, $(x + y, y)$, (y, x). Iniciando com o par $(1, 2)$ podemos alcançar

    (a) $(819, 357)$?

    (b) $(19, 79)$?

    Solução:

    (i) Das propriedades do mdc temos que:
    (1) mdc(x, y)=mdc(y, x),

    (2) mdc(x, y)=mdc$(x - y, y)$

    (3) mdc(x, y)=mdc$(x + y, y)$.

    Portanto essa máquina conserva o mdc dos números da entrada e esse é nosso invariante de estado.

    (ii) Logo o par indicado no ítem a não pode ser alcançada pois o $mdc(1, 2) = 1$ e o $mdc(819, 357) = 21$. Já o par indicado no ítem b podemos fazer a seguinte sequência: (19,79)→(19,60)→(19,41)→(19,22)→(3,19)
    →(3,16)→(3,13)→(3,10)→(3,7)→(3,4)→(3,1)→(2,1)→(1,2). Essa letra b pode ser classificada como um falso invariante, pois conseguimos atingir o estágio final através da sequência mostrada acima. Estudaremos mais exemplos de falsos invariantes no capítulo 7.

10. Há um peão no ponto $(1, 1)$ da malha (x, y) com x, y inteiros positivos. Ele se move da seguinte maneira. Em qualquer movimento, ele pode dobrar uma coordenada ou pode subtrair a coordenada menor da maior. Quais pontos da malha que peão pode alcançar?

    Solução:

    (i) Perceba aqui que essas operações deixam o mdc de (x, y) invariante ou dobram seu valor.

    (i) Ou seja, os pontos da malha que podem ser alcançados são os pontos que possuem $mdc(x, y) = 2^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, dado um ponto (x, y) com

$mdc(x, y) = 2^n$ fazendo as operações inversas, conseguimos dividir por 2 até que o $mdc(x, y) = 1$ e depois com a operação de subtrair a coordenada maior pela menor, conseguimos chegar ao ponto (1,1).

11. Cada termo em uma sequêsequênciancia $1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$ começando com o sétimo é a soma dos últimos 6 termos $\pmod{10}$. Prove que o bloco $..., 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...$ nunca aparece na sequência.

    Solução:

    (i) Vamos escrever alguns termos dessa sequência:
    $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, 0, 9, 8, 5, 0, ...$
    Seja $(x_1, x_2, ..., x_6)$ Seis termos consecutivos da sequência.
    Vamos demonstrar que $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6$ é invariante. De fato, temos: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \equiv x_7 \pmod{10}$
    Começando agora com $2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 12x_7$ podemos fazer o seguinte:
    $2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 12x_7 \equiv 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \pmod{10}$
    $\equiv 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 12x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 12x_4 + 12x_5 + 12x_6 \pmod{10}$
    $\equiv 12x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 18x_4 + 20x_5 + 22x_6 \pmod{10}$
    $\equiv 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6 \pmod{10}$

    Concluímos aqui que $I(x_1, x_2, ..., x_6) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6 \pmod{10}$ é nosso invariante de estado.

    (ii) Portanto, iniciando em $I(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 8$, a meta $I(0, 1, 0, 1, 0, 1) = 4$ não pode ser alcançada.

12. (OBM/2004) Esmeralda tem uma pilha com 100 pedras. Ela divide essa pilha em duas novas pilhas e em seguida multiplica as quantidades de pedras nessas duas novas pilhas e escreve o produto em um quadro. Ela então escolhe uma pilha com mais de uma pedra e repete esse procedimento: a pilha é dividida em duas, as quantidades de pedras nessas duas pilhas são multiplicadas uma pela outra e o produto escrito no quadro. Esta operação é realizada até se obter apenas pilhas com 1 pedra cada. Quais são os possíveis valores da soma de todos os produtos escritos no quadro?

    Solução:

    (i) Imagine que há $\frac{99 \times 100}{2} = 4950$ cordas, cada uma amarrando cada par de pedras. Então, para Esmeralda separar uma pilha de $a + b$ pedras em uma pilha de a pedras e outra de b pedras, ela deve cortar $a \times b$ cordas. Então o número que Esmeralda escreve no quadro é exatamente o número de cordas cortadas naquele instante. Essa operação para obtermos apenas pilhas com 1 pedra cada é repetida e Esmeralda precisa cortar todas as cordas para chegar ao estágio final.

(ii) Como a quantidade de cordas é fixa, ela será nosso invariante. Logo a soma pedida é igual à quantidade de cordas, que é 4950.

13. (Rússia/1995) Três pilhas de pedras estão sobre uma mesa. Sisyphus pode escolher duas pilhas e transferir uma pedra de uma pilha para a outra. Para cada transferência ele recebe de Zeus o número de moedas igual a diferença entre a quantidade de pedras da pilha de onde foi retirada a pedra e a quantidade de pedras da pilha que receberá a pedra (a pedra na mão de Sisyphus não é levada em conta). Se essa diferença for negativa, Sisyphus deve pagar a Zeus o número correspondente (o generoso Zeus permite que ele pague depois se entrar em falência). Após algum tempo todas as pilhas voltaram a ter a mesma quantidade inicial de pedras. Qual o número máximo de moedas que Sisyphus pode ter neste momento?

    Solução:

    (i) Quando Sisyphus pega uma pedra na pilha a e transfere para a pilha b a receita dele aumenta em $a-b$. A quantidade de pedras na pilha a diminui em 1 unidade e a quantidade de pedras na pilha b aumenta em uma unidade. Observe o que acontece com o número: $a\frac{a-1}{2}+b\frac{b-1}{2}$ $(a-1)\frac{a-2}{2}+(b+1)\frac{b}{2}=a\frac{a-1}{2}-a+1+b\frac{b-1}{2}+b$, como a pedra na mão dele não é levada em conta, podemos subtrair 1 ao número acima: $a\frac{a-1}{2}-a+1+b\frac{b-1}{2}+b-1=a\frac{a-1}{2}-a+b\frac{b-1}{2}+b$. Logo podemos elencar como nosso Invariante o número: $S=a\frac{a-1}{2}+b\frac{b-1}{2}+c\frac{c-1}{2}+s$, onde a, b, c são os números de pedras nas três pilhas, e s é a receita líquida de Sisyphus. Para ver que este número S é invariante, perceba quando mudamos uma pedra de uma pilha com a pedras para a pilha com b pedras. A receita de Sisyphus aumenta em $a-b$, e temos:
    $(a-1)\frac{a-2}{2}+(b+1)\frac{b}{2}-1+c\frac{c-1}{2}+s+a-b$
    $=a\frac{a-1}{2}-a+b\frac{b-1}{2}+b+c\frac{c-1}{2}+s+a-b$
    $=a\frac{a-1}{2}+b\frac{b-1}{2}+c\frac{c-1}{2}+s.$

    Daí, se S_0 é o estágio inicial e e S_f é o estágio final, temos que $S_0=S_f=a_0\frac{a_0-1}{2}+b_0\frac{b_0-1}{2}+c_0\frac{c_0-1}{2}+s_0=a_f\frac{a_f-1}{2}+b_f\frac{b_f-1}{2}+c_f\frac{c_f-1}{2}+s_f.$

    como $a_f=a_0, b_f=b_0$ e $c_f=c_0$, daí podemos concluir que $s_f=s_0$

    Portanto o S é nosso invariante de estado.

    (ii) Como Sisyphus começa sem dinheiro, ele não terá dinheiro no fim, Logo a resposta é zero.

2 PARIDADE

"Diz-se que um número par tem paridade par, e um número ímpar, paridade ímpar. Este conceito, apesar de sua extrema simplicidade, surge na solução dos mais diversos tipos de questões. Ele acaba sendo útil na solução de muitos problemas, incluindo alguns que são bastante difíceis."(FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia, 2010)

Em matemática, a paridade é a propriedade de um número inteiro ser par ou ímpar. A paridade de um inteiro n é par quando n é divisível por dois, ou seja $n \equiv 0 \pmod 2$ e a paridade de um inteiro m é ímpar se o resto da divisão por 2 é igual a 1, ou seja, $m \equiv 1 \pmod 2$. Essa propriedade dos naturais é extremamente útil em vários problemas de olimpíadas de matemática. Alguns problemas tratam exatamente disso. Apesar de estar fazendo algumas transformações, a paridade de determinado núcleo do problema nunca muda e com isso temos nosso invariante.

Para encontrar a paridade como invariante, a criatividade, a experiência. O método para resolver problemas usando a paridade segue o seguinte procedimento:

(i) Encontre alguma propriedade no problema onde a paridade pode nos fornecer alguma informação.

(ii) Determine o invariante dessa propriedade em função da paridade.

(iii) Conclua se é possível chegar em determinado estado partindo desse estágio.

Geralmente a resposta é não, pois como a paridade é invariante, não conseguiremos mudar a paridade usando as propriedades dadas. Esse conceito é um dos mais usados. O conceito de paridade vai nos ajudar a resolver problemas de todos os tipos de invariantes.

Vejamos alguns exemplos onde a paridade é o invariante.

1. Suponha que o número inteiro positivo n seja ímpar. Primeiro o aluno escreve os números $1, 2, ..., 2n$ na lousa. Em seguida, ele escolhe dois números quaisquer a, b, apaga-os e escreve, em vez disso,$|a - b|$ e repete esse processo até restar um único número na lousa. Prove que tal número é ímpar.

   Solução:

(i) Perceba que a soma de todos os números escritos no quadro $S = 1 + 2 + ... + 2n = n(2n + 1)$ é impar, pois n é um número ímpar.

(ii) Sejam a e b dois números escritos na louça, sem perda de generalidade, suponha que $a < b$, sendo assim temos: $S = 1+2+...+a+...+b+2n+-a-b+|a-b| = S-2a$. Logo a paridade de S é nosso invariante.

(iii) Como inicialmente S é um número ímpar, então temos que S permanecerá ímpar até o final, ou seja, o último número será de fato ímpar.

2. Dilma comprou um caderno com 96 folhas e numeradas de 1 até 192. Temer arrancou 25 folhas do caderno de Dilma e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser 2016?

   Solução:

   (i) Como Temer arrancou 25 folhas e cada folha tem um número par e outro ímpar, temos que a soma dos números de cada folha é ímpar.

   (ii) Como a soma de 25 números ímpares é ímpar, temos que a paridade da soma é o invariante.

   (iii) Portanto essa soma jamais pode ser um número par.

3. Escrevemos abaixo os números de 1 a 10: Antes de cada um deles, coloque sinais "$+$" ou "$-$", e calcule o resultado final. É possível dispor os sinais de modo que a soma total dê zero?

   Solução:

   $$+a \to -a \to S - 2a = S - sgn(a).2a$$
   $$-a \to +a \to S - 2a = S - sgn(a).2a$$

   (i) Perceba que a soma de todos os números escritos é $S = 1 + 2 + ... + 10 = 55$ que é impar.

   (ii) A paridade dessa soma é o invariante, de fato, trocar o sinal de $a \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$ é o mesmo que subtrair $sgn(a).2a$ de S: $S \to S - sgn(a).2a$ que é par. Logo sair de S para $S - sgn(a).2a$ não muda a paridade.

   (iii) Para que a soma seja igual a zero, precisamos dividir os números em 2 grupos cujas somas sejam iguais e então termos $a + (-a) = 0$. Como a soma é ímpar, não podemos dividir nesses dois grupos, sendo então impossível dispor os sinais de forma que a soma seja zero.

4. . O produto de 22 números inteiros é 1. Mostre que sua soma não pode ser zero.

   Solução:

   (i) Temos que os números só podem ser 1 ou -1. Como o produto é 1 temos que a quantidade de -1 tem que ser par.

   (ii) Para a soma dos 22 números ser zero, precisamos ter onze números 1 e onze números -1.

   (iii) Como a quantidade de 1 tem que ser par, essa soma não pode ser 0.

5. Um quadrado mágico é uma tabela 6 x 6 contendo um número em cada quadrado de modo que as somas dos números em qualquer linha, coluna ou diagonal principal sejam iguais. É possível formar um quadrado mágico com os 36 primeiros números primos?

   Solução:

   (i) Lembre-se que o número 2 é o único número primo que é par.

   (ii) Portanto teremos apenas uma linha e uma coluna com a soma ímpar(e no máximo mais uma diagonal) e teremos todas as outras somas sendo pares.

   (iii) Como no quadrado mágico temos que ter todos os números iguais, é impossível ter um quadrado mágico com os 36 primeiros números primos.

6. No reino da Frutilândia existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maçã. Após alguns dias(quantos dias?) restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?

   Solução:

   (i) Temos 3 situações. Vamos analisar cada um dos casos:
   1. Quando o garoto come dois tomates, nasce um tomate.
   2. Quando o garoto come duas maçãs, nasce um tomate
   3. Quando o garoto come uma maçã e um tomate, nasce uma maça.

   (ii) Observando o número de maçãs, vemos que ele permanece constante ou diminui em 2 unidades. Dessa forma a paridade do número de maçãs é invariante. Como tínhamos um número ímpar de maçãs, a quantidade delas continuará ímpar até o final.

   (iii) Como a paridade do número de maçãs continua ímpar até o final, não podemos obter 0 maças. Portanto a última fruta será a maçã. Note também que o número de frutas decresce monotonicamente em uma unidade a cada dia, logo passará $2005 + 2006 - 1 = 4010$ dias para restar apenas uma fruta.

7. Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou amarelo) dispostos da seguinte forma:

Tabela 1 – Painel Luminoso

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e os seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus oito vizinhos porém ele não. Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos amarelos?

Solução.

(i) Note que ao apertar um dos botões $1, 3, 7$ ou 9 trocamos de cor 4 botões. Apertando um dos botões $2, 4, 6$ ou 8 trocamos a cor de 6 botões. Apertando o botão do centro trocamos a cor de 8 botões.

(ii) Como $4, 6$ e 8 são pares a paridade da quantidade de botões verdes é invariante assim como a paridade da quantidade de botões amarelos.

(iii) Como começamos com 9 verdes e 0 amarelos, e a paridade é invariante não é possível obter 0 verdes e 9 amarelos.

OBS: Podemos generalizar para: existem $2n + 1$ botões verdes. Ação permitida: escolher uma quantidade par de botões e trocar a cor de cada um. Pode-se chegar a ficar tudo amarelo?

8. (Leningrado): Três cangurus estão alinhados em uma estrada. A cada segundo um dos cangurus salta. É permitido que um canguru salte por cima de um outro canguru, mas não de dois cangurus de uma só vez. Depois de 1985 segundos, os cangurus podem voltar a ocupar a posição relativa inicial?

Solução:

(i) Existem seis posições para os cangurus: $123 \leftrightarrow 132 \leftrightarrow 312 \leftrightarrow 321 \leftrightarrow 231 \leftrightarrow 213 \leftrightarrow 123 \leftrightarrow 132$

(ii) Note que as posições dos cangurus seguem esse ordenamento, por exemplo: se estamos na posição 312, só podemos ir para 321 ou para o 132, ou seja, as posições pares e ímpares são cíclicas, ocorrendo 132, 321 e 213 nos segundos ímpares e ocorrendo 123, 312 e 231 nos segundos pares.

(iii) Portanto, depois de 1985 pulos não é possível que os cangurus voltem a ocupar a posição inicial (123).

9. Há m sinais de $+$ e n sinais de $-$ escritos em uma lousa. A cada segundo podemos apagar dois sinais e, no lugar deles, escrever um sinal de $+$, se os sinais apagados eram iguais, ou um sinal $-$, se os sinais apagados eram diferentes. Para que valores de m e n, quando restar um só sinal escrito na lousa, este não dependerá da ordem em que fizemos as substituições.

   Solução:

   (i) Note que se apagarmos dois sinais de $+$, escrevemos um sinal de $+$, ou seja, a paridade do número de sinais de $+$ inverte. Se apagarmos 2 sinais de $-$, aumenta um sinal de $+$,ou seja, a paridade do número de sinais de $+$ inverte e a paridade do número de sinais de $-$ permanece a mesma. Se apagarmos um sinal de $+$ e um de $-$, escrevemos um sinal de $-$, ou seja, a paridade do número de sinais de $+$ inverte e a paridade do número de sinais de $-$ permanece a mesma

   (ii) Perceba que a paridade do número de sinais de $-$ é invariante.

   (iii) Para que o sinal escrito na lousa não dependa da ordem que fizermos as operações, então o número de sinais de $-$, que é n, deve ser ímpar e m pode ser de qualquer paridade. De fato, se n for par, então a ordem das operações vai depender pois n ou m poderão chegar em zero. E se n for ímpar essa paridade se mantém até o fim, ou seja, o último sinal terá que ser o sinal de $-$.

   OBS: Esse problema é análogo ao problema da Frutilândia, basta fazer a seguinte analogia: +(mais) = tomate e -(menos)= maçã.

10. Há a fichas brancas, b fichas pretas e c fichas vermelhas em uma mesa. Em cada etapa, você pode escolher duas fichas de cores diferentes e substituí-las por uma ficha da terceira cor. Para que valores de a, b e c podemos afirmar que a cor da ficha que restar no final, não vai depender da evolução do jogo?

    Solução:

    (i) Todos os três números a, b e c mudam sua paridade em cada passo. De fato, sempre diminuímos uma unidade em duas cores e aumentamos uma unidade na terceira cor.

    (ii) Se um dos números tiver paridade diferente dos outros dois, ele manterá essa propriedade até o final.

    (iii) Se isso acontecer, esta será a cor que ficará no final, por exemplo: a=ímpar, b=ímpar e c=par, no final, a última ficha terá a cor vermelha, pois no final teremos a=par, b=par e c= ímpar. Mas se por exemplo tivermos: a=ímpar, b=ímpar e c=ímpar, não podemos afirmar qual a cor da última ficha.

11. Sete moedas estão dispostas em círculo, todas com a face coroa para cima.

(a) Mostre que é possível, virando-se cinco moedas consecutivas de cada vez, fazer com que todas fiquem com a cara visível.

(b) Mostre que não é possível, virando-se quatro moedas consecutivas de cada vez, fazer com que todas fiquem com a cara visível.

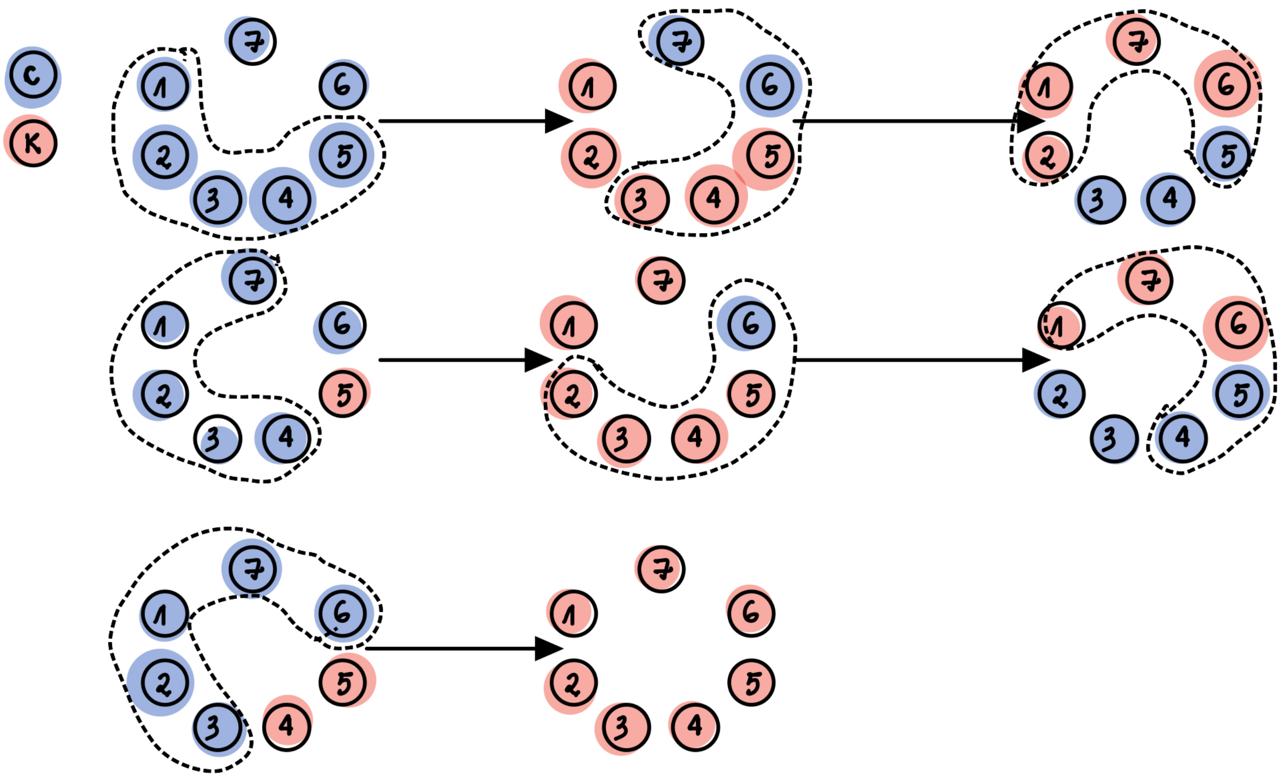

Figura 2 – Sete moedas

Solução:

(a) Faça o seguinte: Vire as moedas de 1 a 5, e depois vire as moedas de 3 até 7, depois vire as moedas de 5 até a moeda 2, depois vire as moedas de 7 a 4, depois vire as moedas de 2 a 6, depois vire as moedas de 4 a 1 e por fim depois vire as moedas de 6 a 3 coroas, conforme a figura 2. Essa questão também é um exemplo de falso invariante, que estudaremos no capítulo 7.

Solução (b)

(i) Como 4 é par, a paridade das moedas caras e coroas é invariante.

(ii) De fato, suponha que tenhamos a moedas caras e b moedas coroas com $a+b=n$. Escolhendo 4 moedas para virá-las, seriam x caras e y coroas com $y=4-x$. Após virar ficaríamos com: (1) $a-x$ caras e ganharíamos x coroas. (2) $b-y$ coroas e

ganharíamos y caras. Assim, a nova quantidade de caras e coroas são:
(1) caras: $a - x + y = a - x + 4 - x = a - 2x + 4 = a + 2(2 - x)$
(2) coroas $b - y + x = b - 4 + x + x = b - 4 + 2x = b + 2(x - 2)$,
ou seja, a paridade é invariante.

(iii) Como 7 é ímpar, não conseguimos chegar em zero coroas.

12. (OBM/2020) Sejam n e k números inteiros positivos com $k \leq n$. Em um grupo de n pessoas, cada uma ou sempre fala a verdade ou sempre mente. Arnaldo pode fazer perguntas para quaisquer dessas pessoas desde que essas perguntas sejam do tipo: "No conjunto A, qual a paridade de pessoas que falam a verdade?", onde A é um subconjunto de tamanho k do conjunto das n pessoas. A resposta só pode ser "par" ou "ímpar".

    (a) Para quais valores de n e k é possível determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem?

Solução:

(a) primeiramente vamos escolher um conjunto A com k pessoas.

Existem 2 grupos: os que sempre mentem e os que sempre falam a verdade.

em seguida Arnaldo faz a seguinte pergunta para cada um das n pessoas: "Qual a paridade de pessoas que falam a verdade no conjunto A?"

agora note que temos 2 possibilidades:

Grupo A possui x pessoas que sempre falam a verdade, e $k - x$ pessoas que sempre mentem.

1) se x for par, mentirosos responderão ímpar e pessoas que falam a verdade responderão par.
2) se x for ímpar, mentirosos responderão par e pessoas que falam a verdade responderão ímpar.

com isso conseguimos dividir todas as n pessoas em 2 grupos: grupo 0 (respondeu par) e grupo 1 (respondeu ímpar). Resta agora descobrir se quem respondeu par é mentiroso ou está falando a verdade.

vamos olhar agora apenas para a resposta das próprias pessoas do grupo A. Já sabemos quantas pessoas são do grupo 0 e quantas pessoas são do grupo 1 no conjunto A.

então, nesse momento, já sabemos a paridade do grupo 0 e do grupo 1 em A.

se k for par, então x e $k - x$ tem a mesma paridade, ou seja, mentirosos e pessoas que falam a verdade respondem de forma diferente a pergunta.

1) se x for par e $k-x$ for par

o grupo 0 é o grupo das pessoas que falam a verdade

2) se x for ímpar e $k-x$ for ímpar

o grupo 0 é o grupo dos mentirosos

Agora se k for ímpar, x e $k-x$ tem paridades distintas, mentirosos e pessoas que falam a verdade respondem da mesma foram a pergunta.

note que conseguimos descobrir com apenas n perguntas.

logo a resposta do ítem (a) n pode ser qualquer um, mas k precisa ser par.

13. (Bulgária/2004) Considere todas as palavras formadas por $a's$ e $b's$. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco *aba* por um b, trocar um bloco *bba* por um a. Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a sequência $baaaa\ldots a$ $(2003a's)$ a partir de $bbbb\ldots ba$ $(2003b's)$?

    Solução:

    (i) Perceba que a troca de um bloco *bba* por um a, diminui em 2 o número de $b's$, enquanto que a troca *aba* por um b diminui em 2 o número de $a's$.

    (ii)Logo a paridade do número de $a's$ e de $b's$ é invariante, nesse caso, esse invariante, não nos ajudou muito pois o número de $a's$ e de $b's$ continuam ímpar. Vamos procurar outro invariante.

    Não desistamos, vamos começar de novo e procurar por um novo invariante.

    (i) Observe a substituição $aba{\rightarrow}b$ seja aplicada à palavra w_1abaw_2. Na nova palavra w_1bw_2, todos os $a's$ em w_1 não mudam suas posições e todos os $a's$ em w_2 se deslocam duas posições para a esquerda. Consequentemente, esses mantêm a paridade de suas posições. A exclusão de ambos os $a's$ em aba diminui o número de $a's$ nas posições ímpares (pares) em dois. Analogamente, o mesmo é verdadeiro aplicando a operação $bba{\rightarrow}\ a$ à palavra w_1bbaw_2. Como as substituições $a \rightarrow aba$ e $a \rightarrow bba$ são inversas às anteriores, elas têm a mesma propriedade.

    (ii) Logo a aplicação de qualquer uma das mudanças dadas ao número de $a's$ em posições ímpares (pares) não muda sua paridade.

    (iii) Perceba agora que os números os $a's$ em posições pares nas palavras *baa...a* e *aa...ab* são 1002 e 1001, respectivamente. Então não conseguimos obter a sequência $baaaa\ldots a$ $(2003a's)$ a partir de $bbbb\ldots ba$ $(2003b's)$.

3 INVARIANTES COM RESTO

"Alguns problemas são notáveis porque o invariante em suas soluções é um módulo remanescente de algum número natural. Esta é uma situação muito comum"(FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia, 2010)

Seja S a nossa propriedade a ser analisada. Nesses casos, a congruência de S módulo m é invariante. Então em qualquer estágio a propriedade sempre será congruente a S módulo m.

Para encontrar o invariante com resto, usaremos nossa criatividade e também nossa experiência já adquirida até aqui. O método para resolver problemas que envolvam os invariantes com restos segue o seguinte procedimento:

(i) Faça algumas pequenas simulações com alguns números .

(ii) Procure por divisores. Faça algumas contas e tente achar o m e o n tais que $S \equiv n \pmod{m}$.

(iii) Conclua se é possível chegar em determinado estado partindo desse estágio.

Geralmente a resposta é não, pois como o resto na divisão por m é invariante, não podemos mudar esse resto a partir das propriedades dadas.

Vejamos alguns exemplos desse tipo de invariante.

1. (Leningrado) As moedas dos países Dillia e Dallia são o Diller e o Daller, respectivamente. Podemos trocar um Diller por dez Dallers e um Daller por dez Dillers. Zequinha possui um Diller e deseja obter a mesma quantidade de Dillers e Dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?

   Solução:

   (i)1 Diller = 10 Dallers, e 1 Daller= 10 Dillers.

   Note que se ele possui um Diller, então ele pode trocar por 10 Dallers, depois ele troca 1 Daller por 10 Diller. Veja alguns exemplos:

   (ii) Quando trocamos um Diller por 10 Dallers, diminuímos um Diller e aumentamos 10 Daller, ou seja, se temos x Dillers e y Dallers, ficamos com $x - 1$ Dillers e $y + 10$

Tabela 2 – Diferença de Diller e Daller

número de Diller	número de Daller	Dallers - Dillers
1	0	1
0	10	-10
10	9	1
9	19	-10
19	18	1

Dallers, de forma que a diferença $x-1-(y+10)=x-y-11$, ou seja, invariante módulo 11, a troca de um Daller por um Diller é análoga.

(iii)Para ele obter números iguais ele precisaria que essa diferença fosse zero, como a diferença de Dillers e Dalers sempre deixa o resto de 1 na divisão por 11, não será possível obter o mesma quantidade de Dillers e Dallers.

2. Uma calculadora tem duas teclas e o número 1 na tela. A primeira tecla adiciona 3 ao número mostrado na tela, e a segunda permite que você troque de lugar quaisquer dois dígitos do número da tela. É possível obtermos o número: 123456789123456789123456789123456789...123456789(2021 blocos de 123456789)?

   Solução:

   (i) Vamos escrever alguns números dessa sequência: 1, 4, 7, 10, 13, 31, 34, 43, 46, ...

   (ii) Pelo critério de divisibilidade por 3, basta analisar a soma dos algarismos do número, ou seja, a permutação dos dígitos não altera o resto da divisão por 3. Assim como a operação de somar 3 não altera o resto da divisão por 3. De fato, $n \equiv n+3 \pmod 3$.

   Perceba que as operações que a calculadora permite fazer não altera o resto na divisão por 3.

   Como começamos com 1, temos que qualquer número da sequência será congruente a 1 módulo 3.

   (iii) Então como $(1+2+..+9)\times 2021 = 45\times 2021$ é um múltiplo de 3 e por isso, não deixa resto 1 na divisão por 3, então essa configuração nunca pode ser alcançada.

3. Há a fichas brancas, b fichas pretas e c fichas vermelhas em uma mesa. Em uma etapa, você pode escolher duas fichas de cores diferentes e substituir cada uma por uma ficha da terceira cor. Encontre condições para que todas as fichas tenham a mesma cor após tomar várias operações. Suponha que você tenha inicialmente 13 fichas brancas, 15 pretas e 17 vermelhas, todas as fichas podem se tornar da mesma cor?

Solução:

(i) Vamos fazer algumas operações: (13, 15, 17) $\rightarrow$ (15, 14, 16) $\rightarrow$ (14, 16, 15) $\rightarrow$ (16, 15, 14).

(ii) Note que (a, b, c) será transformado em um das três triplas ordenadas (x, y, z):

(i) $(a+2, b-1, c-1)$;

(ii) $(a-1, b+2, c-1)$;

(iii) $(a-1, b-1, c+2)$.

e em qualquer um dos casos, $x-y$,$x-z$ e $y-z$ são invariantes $\pmod 3$.

(iii) Para que fichas pretas fiquem brancas teríamos que ter $a-b \equiv 0 \pmod 3$. Como temos $13-15=-2$ portanto não conseguimos mudar as cores das fichas pretas se tornarem brancas em iguais quantidades. Analogamente não conseguimos transformar as vermelhas em brancas ou pretas em vermelhas.

Como queremos as três fichas da mesma cor, precisamos que:

$$a-b \equiv a-c \equiv b-c \equiv 0 \pmod 3$$

Nesse exemplo, como $15-13$, $17-15$ e $17-13$ não são congruentes a $0 \pmod 3$. Então não teremos todas as fichas da mesma cor.

4. (Torneio das Cidades) Todo membro de uma sequência, iniciando do segundo, é igual a soma do termo anterior com a soma de seus dígitos. O primeiro número é 1. É possível que 123456 pertença à sequência?

Solução:

(i) Vamos escrever alguns termos da sequência: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$,

(ii) Temos que a_5 deixa resto 1 na divisão por 3, mas $1+6=7$ que também deixa resto 1 na divisão por 3, logo a_6 deixa resto 2 na divisão por 3 assim como $2+3$ também deixa resto 2 na divisão por 3. Isso decorre do critério de divisibilidade por 3, pois a soma dos algarismos é o resto da divisão por 3, portanto de acordo com a lei de formação da sequência, a_n sempre será um número formado pela soma de 2 números da forma: $3k_1+1+3k_2+1$ ou $3k_1+2+3k_2+2$. De fato, $a_i = a_{i-1} + j$ onde $j \equiv a_{i-1} \pmod 3$ perceba que a_i é a soma de 2 números com a mesma congruência módulo 3. Como o $a_1 = 1$ temos apenas $3k_1+1+3k_2+1 = 3k_3+2$ e o $3k_1+2+3k_2+2 = 3k_3+1$, ou seja, os números da sequência ficam se alternando sempre entre $3k+1$ e $3k+2$ e em que em ambos os casos a_n nunca será múltiplo de 3.

(iii)Logo o número 123456, que é múltiplo de 3, não estará na sequência de a_n

5. (Hong Kong/1997) Cinco números $1, 2, 3, 4, 5$ estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números a e b e escrever nos seus lugares $a + b$ e $a \times b$. Após algumas operações podemos obter a quíntupla $21, 27, 64, 180, 540$?

   Solução:

   (i) Vamos fazer algumas operações: (1, 2, 3, 4, 5) $\rightarrow$ (3, 2, 3, 4, 5)$\rightarrow$ (5, 6, 3, 4, 5) $\rightarrow$ (11, 30, 3, 4, 5).

   (ii) Observe que o número de múltiplos de 3 entre os cinco números do quadro não pode diminuir após cada operação. (De fato, se a e b são múltiplos de 3, então $a + b$ e $a \times b$ também serão múltiplos de 3). Se apenas um deles for um múltiplo de 3, então $a \times b$ também será um múltiplo de 3, porém $a + b$ não será múltiplo de 3.

   (iii) O número de múltiplos de 3 pode aumentar apenas de uma maneira, ou seja, quando a ou b é $1 \pmod 3$ e o outro é $2 \pmod 3$; então $a + b \equiv 0 \pmod 3$ e $a \times b \equiv 2 \pmod 3$: Agora observe que há um múltiplo de 3 em $(1, 2, 3, 4, 5)$ e quatro múltiplos de 3 em $(21, 27, 64, 180, 540)$ Então, quando o número de múltiplos de 3 aumenta para quatro, o quinto número deve ser congruente a $2 \pmod 3$. Como $64 \equiv 1 \pmod 3$; então $(21, 27, 64, 180, 540)$ nunca pode aparecer no quadro.

6. Cada um dos números $a_1, a_2, ..., a_n$é 1 ou -1, e temos que: $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + ... + a_na_1a_2a_3 = 0$ Prove que n é múltiplo de 4.

   Solução:

   (i) Suponha $n = 8$ (1,1,1,1,1,1,1,-1), temos que $S = 1.1.1.1 + 1.1.1.1 + 1.1.1.1 + 1.1.1.1 - 1.1.1.1 - 1.1.1.1 - 1.1.1.1 - 1.1.1.1 = 0$, se $n = 6$ teríamos: (1,1,1,1,1,-1) e $S = 1.1.1.1 + 1.1.1.1 - 1.1.1.1 - 1.1.1.1 - 1.1.1.1 - 1.1.1.1 = -2$, Perceba, nesses exemplos que qualquer a_i que eu troque de sinal, teremos exatamente 4 trocas de sinal em S.

   (ii) Se trocamos a_i por $-a_i$, teremos trocas de sinal em 04 parcelas de S resultando num saldo de S' de: +8, +4, 0, -4 ou -8. Ou seja, $0 \equiv S \equiv S' \pmod 4$ para operação de trocar a_i por $-a_i$.

   (iii) Portanto, se trocarmos todos os a_i's que forem -1 por 1 temos: $0 \equiv S' \equiv 1 + 1 + ... + 1 \equiv n \pmod 4$. Logo n é múltiplo de 4.

7. Com a calculadora KPK-1991 podemos efetuar duas operações:

   (a) elevar um número ao quadrado;

   (b) obter de um número X de n dígitos $(n > 3)$ o número $A + B$, onde A é o número formado pelos três últimos de X e B o número formado pelos $(n - 3)$ dígitos da esquerda de X.

Podemos obter o número 703 a partir de 604 usando essa calculadora?

Solução:

(i) 604 $\to$ 364816 $\to$ 364+816=1180$\to$ 1+180=181.

(ii) Perceba que a congruência da segunda operação é invariante módulo 37. De fato, para provar isso, veja que se X tem representação decimal $a_1a_2...a_{n+3}$, então a segunda operação o transforma X no número X'= $a_1a_2...a_n + a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$, e a diferença entre X e X' é igual a $1000.a_1a_2...a_n - a_1a_2...a_n = 999a_1a_2...a_n$. Note que $364816 - 1180 = 363636 = 999 \times 364$.

(iii) Como 999 é um múltiplo de 37, concluímos que $X - X'$ é divisível por 37. Então $X \equiv X' \pmod{37}$. Como o resto da divisão de 604 por 37 é igual a 12 e 703 é múltiplo de 37. Então é impossível transformar o número 604 em 703. De fato, apesar da primeira operação poder alterar o resto de X módulo 37, elevar ao quadrado não pode transformar um número que não é divisível por 37 em um múltiplo de 37. Então o invariante aqui é não ser divisível por 37.

8. Em uma fábrica de cartões existem três máquinas. A primeira recebe um cartão (a, b) e retorna um cartão $(a + 1, b + 1)$. A segunda recebe um cartão $(2a, 2b)$ e retorna um cartão (a, b). A terceira recebe dois cartões(a, b) e (b, c) e retorna o cartão (a, c). Todas as máquinas também retornam o(s) cartão(ões) dados. É possível fabricar um cartão $(1, 1988)$ se temos inicialmente apenas um cartão $(4, 18)$?

Solução:

(i) Vamos fazer algumas operações: (4,18)$\to$(5,19)$\to$(6,20)$\to$(3,10)$\to$(4,11).

(ii) Para o cartão (a, b) seja $D(a, b)$ a diferença $a - b$. Observe que $D(4, 18) = 4 - 18 = -14$. Logo, o resto da divisão de $D(4, 18)$ por 7 é zero. Suponha que depois do n-ésimo uso das máquinas, em todos os cartões temos: $D(a, b) \equiv 0 \pmod 7$. Vejamos a indução sobre n: Considere o $(n + 1)$-ésimo uso das máquinas. Existem três casos possíveis:

Usando a primeira máquina $D(a + 1, b + 1) = (a + 1) - (b + 1) = a - b \equiv 0 \pmod 7$.

Usando a segunda máquina, depois de colocar o cartão $(2(a + 1), 2(b + 1))$, obtemos o cartão $(a + 1, b + 1)$. Neste caso, $D(a + 1, b + 1) = a - b \equiv 0 \pmod 7$.

Usando a terceira máquina, depois de colocar os cartões $(a+1, b+1)$ e $(b+1, c+1)$, obtemos o cartão $(a + 1, c + 1)$. Neste caso, $D(a + 1, c + 1) = a - c \equiv 0 \pmod 7$.

Logo $D(a, b) \equiv 0 \pmod 7$.

(iii) Como $D(1, 1998) = 1 - 1998 = -1997 \equiv 5 \pmod 7$ consequentemente não é possível obter o cartão $(1, 1988)$ a partir do cartão $(4, 18)$.

9. Um dragão tem 100 cabeças. Um cavaleiro pode cortar $15, 17, 20$ ou 5 cabeças, com um golpe de sua espada. Em cada um desses casos, $24, 2, 14$ ou 17 cabeças crescem em seus ombros respectivamente. Se todas as cabeças explodirem, o dragão morre. O dragão pode morrer?

   Solução:

   (i) Note que $(24 - 15) \equiv (2 - 17) \equiv (14 - 20) \equiv (17 - 5) \equiv 0 \pmod 3$

   (ii) A congruência $\pmod 3$ do número de cabeças do dragão é invariante.

   (iii) Como começamos com $100 \equiv 1 \pmod 3$, nunca podemos chegar a 0. Concluímos que o dragão não poderá ser morto.

4 SEMI-INVARIANTES

"Um S semi-invariante para um problema é uma função numérica, definida no conjunto M de todas as posições, de forma que o valor de S sempre diminui (ou sempre aumenta) após a aplicação de cada transformação de G. Como M é um conjunto finito S tem um número finito de valores. Resulta da definição que todo semi invariante tem o menor e o maior valor."(TSVETKOVA, Iliana, 2010)

Normalmente, o conjunto das transformações, assim como as regras, não são definidas no enunciado do problema. Elas precisam ser encontrados como parte da solução.

Encontrar o conjunto de transformações que transformam cada posição de M para outra posição de M, assim como encontrar o semi-invariante, requer criatividade e experiência.

O método para resolver problemas usando semi-invariantes segue o seguinte procedimento:

1. A partir da definição do problema, encontre o conjunto M de todas as posições.

2. Determine o semi-invariante S.

3. Considerar a posição S_i em que o semi-invariante tem um valor extremo (máximo ou o mínimo).

4. Se uma transformação de pode ser aplicada a S_i levando em S_{i+1}, Se o valor de S_{i+1} for maior que o valor do extremo, temos uma contradição. Nesse caso, S_i é a posição necessária que leva à solução do problema.

Vamos ver agora alguns exemplos de semi-invariante e como aplicar esses passos acima.

1. $2n$ $(n > 1)$ pontos diferentes no plano são dados. Prove que, unindo alguns desses pontos, podemos desenhar n segmentos que não se cruzam de tal forma que cada ponto seja o ponto final de apenas um segmento.

   Solução:

   (1) Considere todas as configurações que ocorrem pela combinação desses $2n$ pontos em n pares e ligue todos os pontos em cada par para formar um segmento. Qualquer configuração desse tipo é uma posição que define o conjunto M de todas as posições.

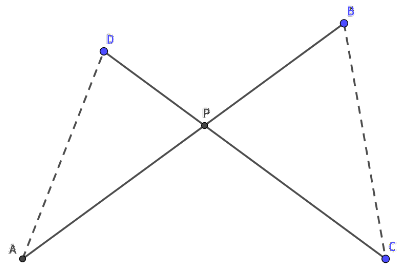

Figura 3 – Intersecção de segmentos

(2) Nos movemos de uma posição para outra da seguinte maneira: se houver uma posição α_1 na qual quatro pontos A, B, C e D estão conectados por segmentos AB e CD que se cruzam, em P, nós podemos mover para outra posição α_2 substituindo os segmentos AB e CD por AD e BC que não se cruzam conforme a figura 2 (não alteramos quaisquer outros segmentos conectando os outros pontos). Se essa mudança para α_2 alterar a configuração aumentando os números de intersecções dos segmentos, podemos repetir essa operação até acabarem todas as intersecções (figura 3). Um semi-invariante útil para este problema é a soma de todos os n segmentos em cada posição.

(3) Conhecemos as regras, o conjunto de todas as transformações e o semi-invariante S. Precisamos provar que, após a aplicação de qualquer transformação, o valor de S diminui. Isso ocorre porque $AP + PD > AD$ (ΔAPD), $BP + PC > BC$ (ΔCPB), portanto $AB + CD > AD + BC$. Como há um número finito de posições, os valores de S também são um conjunto finito.

(4) Seja S_1 o menor valor de S e é alcançado para a posição α_1. Se α_1 contém segmentos que se cruzam, podemos aplicar uma transformação G para mover α_1 para outra posição. O valor de S nesta nova posição seria menor que S_1, temos uma contradição. Portanto, α_1 consiste em n segmentos que não se cruzam unindo os pontos.

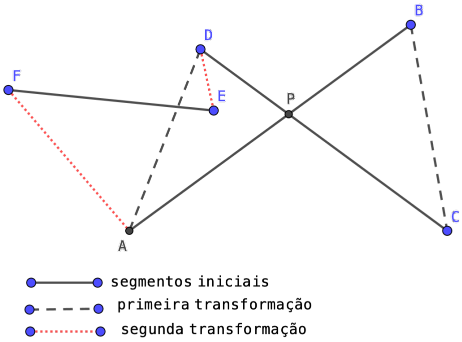

Figura 4 – Aumento de intersecções dos segmentos

2. São dados vários pontos vermelhos e vários pontos azuis. Alguns deles são conectados por segmentos. Um desses pontos é chamado de "ponto especial" se mais da metade dos pontos com os quais está conectado forem da cor oposta. Se houver "um ponto especial", ele é recolorido na cor oposta. Se houver outro "ponto especial", podemos aplicar a mesma operação (recolorir) novamente, e assim por diante. Prove que após várias aplicações desta operação (recoloração de "um ponto especial"), nenhum "ponto especial" permanece.

   Solução:

   (1) Seja M o conjunto de todos os "pontos especiais". pela definição do problema temos que M é finito.

   (2) Da definição de um "ponto especial" segue-se que, após cada aplicação de uma transformação, o número de segmentos com pontos finais de cores diferentes diminui. É fácil verificar que o número S dos segmentos com pontos finais de cores diferentes em um momento particular é um semi-invariante.

   (3) Seja S_1 o menor valor de S e é alcançado para a posição α_1.

   (4) Se α_1 contém um "ponto especial", podemos aplicar uma transformação para mover α_1 para outra posição. O valor de S nesta nova posição seria menor que S_1, o que é uma contradição. Portanto, α_1 não contém um "ponto especial".

3. Na Cidade das Flores, um jardim quadrado 5×5 é dividido em 25 jardins quadrados 1×1. Cada jardim 1×1 é cultivado por um elfo. Cada elfo é inimigo de no máximo três outros elfos. Prove que existe uma maneira de distribuir os jardins 1×1 entre os elfos de forma que dois elfos inimigos não sejam vizinhos. (Os vizinhos são elfos cujos jardins têm um lado comum.)

   Solução:

   (1) Seja M o conjuto de todas as posições dos 25 elfos.

(2) Se o elfo X for inimigo de seu vizinho Y procuraremos o elfo Z, entre os amigos de Y, quem poderia trocar seu jardim com X, sem criar um novo conflito. Dos 25 elfos X pode ir para qualquer uma dos outros 23 jardins, ele não pode ficar no seu próprio jardim e nem pode trocar de lugar com Y. Observe também que X tem, no máximo, quatro vizinhos (figura 4), cada um deles com no máximo três inimigos. Para evitar a criação de novos conflitos, Z não deve estar entre os 11 potenciais inimigos dos vizinhos. De fato, Y tem X e mais outros 2 inimigos, os outros 3 vizinhos tem no máximo mais 9 inimigos totalizando 11 jardins que devem ser evitados para a escolha de Z. Além disso, se Z for vizinho de um inimigo de X, a troca de Z por X criará um novo conflito entre X e seu inimigo. É por isso que Z não deve estar entre os 3 vizinhos de Y e dos outros 8 vizinhos dos outros dois inimigos de X totalizando 11 jardins que não se pode fazer a troca. Portanto, dos 23 jardins possíveis, Z não deve estar entre os $11 + 11 = 22$ elfos. Portanto sempre teremos, pelo menos, um elfo para fazer a troca de X por Z sem gerar novos conflitos. Vamos no início atribuir arbitrariamente os jardins 1×1 entre os elfos. Denote por S o número de casais de vizinhos que são inimigos. Após cada aplicação de uma transformação, o valor de S diminui em 1. Além disso, S tem um número finito de valores. Portanto, S é um semi-invariante.

(3) Então, para o valor mínimo de S não há um par de vizinhos que são inimigos.

(4) Porque se houver, é possível aplicar novamente uma transformação e obter um valor menor de S, o que é uma contradição. Assim, após um número finito de operações, nenhum vizinho inimigo permanece.

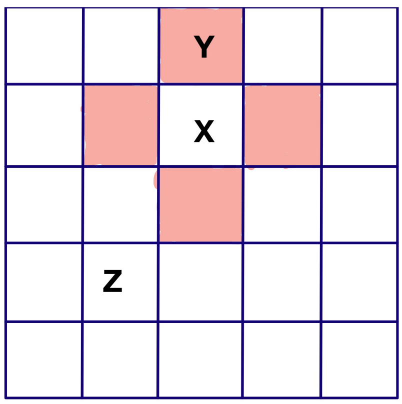

Figura 5 – Jardins dos elfos

4. (Olimpíada de Matemática Russa/1961). Em cada célula de uma matriz $m \times n$, um número arbitrário é escrito. É permitido alterar simultaneamente os sinais de todos os números em uma linha ou coluna escolhida. Prove que após a aplicação desta operação várias vezes é possível obter uma posição em que a soma dos números em cada linha e em cada coluna é não negativa.

   Solução:

   (1) Seja M o conjunto de todas as matrizes.

   (2) Seja S a soma de todos os números da matriz. Escolha uma linha (ou coluna) B que tenha uma soma negativa dos números, $b < 0$. A mudança dos sinais dos números de B muda a soma de S para $S + 2|b|$. Portanto, a soma de todos os números na matriz aumenta. Para cada célula, há duas possibilidades para o sinal do número escrito nela: uma positiva ou uma negativa. Todas as matrizes possíveis que podem ser obtidas são 2^{mn}, ou seja, um número finito. Então S é um semi-invariante.

   (3) Seja S_1 o maior valor possível de S.

   (4) Se a matriz para a qual S_1 é obtido contém uma linha ou uma coluna com uma soma negativa dos números, então podemos aplicar a operação novamente e isso aumentará o valor de S, que é uma contradição. Logo podemos obter uma posição em que a soma dos números em cada linha e cada coluna é não negativa.

5. No parlamento da PROFMAT-lândia, cada pessoa tem no máximo 3 inimigos. Mostre que as pessoas desse parlamento podem ser colocadas em duas salas, de modo que cada pessoa dentro de uma sala tem no máximo um inimigo dentro de sua própria sala. Lembre-se: se A é inimigo de B, então B é inimigo de A.

   Solução:

   (1) Seja M todas as configurações para colocarmos todos os n pessoas do parlamento em 2 salas.

   (2) Coloque as pessoas em duas salas aleatoriamente. Suponha que essa divisão não satisfaça o problema, então considere a soma da quantidade de inimigos que cada pessoa tem em sua própria sala. Note que tal soma é um semi-invariante S,

   (3) Considere uma posição inicial com a soma S.

   (4) Perceba que S sempre decresce fazendo a seguinte operação: Se existe uma pessoa com 2 inimigos ou 3 inimigos dentro da sua sala, quando trocarmos essa pessoa de sala, ela vai ter no máximo um inimigo na outra sala. Com isso, a soma S diminui. Como S é um inteiro positivo, não pode ficar diminuindo indefinidamente e em algum momento vai atingir seu valor mínimo. Neste momento, é porque todo mundo tem no máximo um inimigo na sua sala.

6. (Leningrado) Existem $n \geq 2$ números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números a e b e trocá-los por $a + \frac{b}{2}$ e $b - \frac{a}{2}$. Prove que após feito um movimento não podemos obter os números iniciais novamente.

   Solução:

   (1) Seja M o conjunto de todos os números não-nulos escritos no quadro.

   (2) Observe que $S = (a + \frac{b}{2})^2 + (b - \frac{a}{2})^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > a^2 + b^2$ é nosso semi-invariante, pois a soma dos quadrados dos números sempre aumenta.

   (3) Seja S_1 o primeiro semi-invariante, como os números são não-nulos, o conjunto inicial não possui zeros.

   (4) Aplicando a transformação temos que o semi-invariante sempre aumenta. Portanto o conjunto obtido não podemos obter os números iniciais novamente.

7. Suponha que nem todos os quatro inteiros a, b, c, d sejam iguais. Comece com (a, b, c, d) e substitua repetidamente (a, b, c, d) por $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Mostre que, pelo menos um número do quádruplo eventualmente se tornará arbitrariamente grande.

   Solução:

   (1) Vamos representar o conjunto M por uma sequência $S_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$ que é a quádrupla depois de n iterações.

   (2) Note que: $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ para $n \geq 1$.

   seja $q_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$ nosso possível semi-invariante.

   Então vejamos o que acontece com $q_{n+1} = a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2$

   $= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n.(1)$

   temos que $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ então, elevando ao quadrado:

   $0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2a_nb_n + 2a_nd_n + 2b_nc_n + 2c_nd_n.(2)$

   De (1) e (2) temos:

   $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)$

   logo $q_{n+1} \geq q_n$ e com isso temos nosso semi-invariante.

(3) A partir desta relação de desigualdade invariante, concluímos que, para $n \geq 2$,

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2^{n-1}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2).$$

(4) Portanto q_n aumenta indefinidamente, o que significa que pelo menos um componente deve se tornar arbitrariamente grande.

8. Há 12 anões morando numa floresta, em casas pintadas de azul ou verde. Em cada mês do ano, um dos anões visita todos os seus amigos (não necessariamente todos os outros 11) e, se vir que mais da metade deles vive em casas de cor diferente da sua, muda a cor da sua casa. É possível que, a partir de algum momento, nenhum anão precise mudar mais a cor de sua casa?

   Solução:

   (1) Amizades são simétricas (então se A conhece B, B também conhece A)

   Vamos chamar de amizade colorida quando dois anões são amigos e moram em casas com cores diferentes. Seja M o conjunto de todas as possíveis configurações das pinturas das casas dos 12 anões.

   (2) Seja c_{12} a soma da quantidade de amizades coloridas dos 12 anões. Suponha que um determinado anão tem n amigos, destes k possuem a mesma cor de suas casas e $n - k$ cores distintas (amizade colorida). Se um anão vir que mais da metade dos amigos mora em casa de cor diferente ($n - k \geq k$), ele muda a cor da sua casa. Ele passa agora a ter k amizades coloridas e $n - k$ amigos que moram em casas da mesma cor. O número de amizades coloridas desse anão diminuiu. Logo esse é nosso semi-invariante.

   (3) Mas não é possível diminuir para sempre porque o número de amizades coloridas não é infinito.

   (4) Então uma hora esse número deve parar de diminuir. Nessa hora nenhum anão vai mais mudar a cor da sua casa.

9. Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, enquanto todas não estejam em um mesmo quarto, uma pessoa anda para um quarto com um número igual ou maior de pessoas do que o quarto que ocupava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

   Solução:

   (1) Seja M o conjunto de todas as disposições das 2000 pessoas em 115 quartos.

   (2) Seja a_i a quantidade de pessoas no quarto i, $1 \leq i \leq 115$.

Considere a soma dos quadrados das quantidades de pessoas em cada quarto: $S = {a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_{115}}^2$.

Se um quarto possui i possui m pessoas e outro quarto j possui n pessoas com $(m \geq n)$, então uma pessoa vai sair de um quarto j para o outro quarto i, pois possui uma quantidade maior de pessoas no outro quarto . A variação de S é: $\Delta S = ((m+1)^2 + (n-1)^2) - (m^2 + n^2) = 2(m - n + 1) > 0$

(3) Assim, toda vez que uma pessoa troca de quarto o valor de S cresce (tendência de crescimento invariante). Entretanto note que o valor de S não pode crescer indefinidamente, uma vez que o número total de pessoas é finito (2000 pessoas).

(4) Então em algum instante todas as pessoas estarão em um mesmo quarto.

5 INVARIANTES EM TABULEIROS

"...Muitos problemas envolvendo invariantes podem ser resolvidos usando um tipo particular de invariante: uma chamada "coloração"..." (FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia, 2010)

Alguns Problemas versam sobre a possibilidade de cobrir um tabuleiro com determinadas peças, ou ainda, perguntam se fazendo algumas operações podemos obter determinado estágio. Nesses casos iremos procurar por colorações, simetrias ou até mesmo a paridade para poder determinar algum invariante.

Para resolver esses tipos de invariante, vamos seguir as seguinte regras:

(i) Procure uma determinada coloração para pintar o tabuleiro. A coloração xadrez pode ser a mais utilizada, mas não é a única. Use sua criatividade.

(ii) Determine o invariante nesses tabuleiro. procure alguma propriedades sempre observando as cores que você pintou.

(iii) Conclua se é possível chegar em determinado estado partindo desse estágio.

Vejamos alguns exemplos desse tipo de invariante.

1. É possível mover um cavalo em um tabuleiro de xadrez 5×5 para que ele retorne à sua posição original após ter visitado cada casa do tabuleiro exatamente uma vez?

   Solução:

   (i) Pinte o tabuleiro de xadrez de maneira usual. Sem perda de generalidade, suponha que temos 12 peças brancas e 13 peças pretas.

   (ii) Como o cavalo anda em L, ele sempre vai de uma casa branca para uma casa preta, ou vice-versa. Note que o cavalo precisa começar numa casa preta e terminar numa casa preta para percorrer as $5 \times 5 = 25$ casas do tabuleiro.

   (iii) Depois disso ele teria que sair da última casa e voltar para a primeira casa, ou seja, sair de uma casa preta e ir para uma casa preta. Portanto, não pode terminar onde começou.

2. (OBM/2004) Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo num tabuleiro $2 \times n$: As peças do jogo são dominós 2×1. Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente. Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde.

   Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:

   (a) $n = 2004$?

   (b) $n = 2005$?

   Solução:

   (i) Use a coloração xadrez usual.

   (ii) Perceba que o tabuleiro é simétrico se n for par, em relação ao centro, e no caso de n ímpar, o primeiro jogador pode jogar a primeira peça na vertical no centro do tabuleiro para dividí-lo em dois tabuleiros iguais. Usando a simetria sempre que o jogador jogar em um lado basta o outro jogador imitar sua jogada. Essa imitação é nosso invariante.

   (iii) Logo para n par Bernaldo vence e para n ímpar Arnaldo tem a estratégia vencedora.

3. (Ucrânia/1997) Um tabuleiro 8×8 é colorido de branco e preto da maneira usual, e cada casa contém um inteiro. Sabemos que a soma dos números em cada coluna e a soma dos números em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

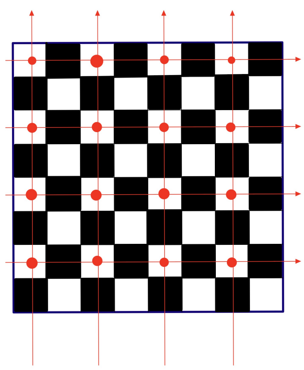

Figura 6 – Linhas e colunas ímpares do tabuleiro

Solução:

(i) Coloração usual do xadrez conforme o enunciado, suponhamos apenas que a primeira casa é branca conforme a figura.

(ii) Seja S a soma de todas as linhas ímpares e todas as colunas ímpares. S é par, pois é formada pela soma de números pares.

(iii) Perceba na figura 5, que S é formado pela soma de todos os quadrados pretos mais duas vezes a soma de alguns dos quadrados brancos (cada quadrado branco foi somado nas linha e colunas) $S = P + 2B$. Como S é par, a soma dos números nos quadrados pretos também é par.

4. Considere um tabuleiro de xadrez 8×8 com a coloração usual. Uma jogada consiste em escolher uma linha ou uma coluna e inverter as cores de todos os quadrados da linha ou coluna selecionada (o que é branco fica preto e o que é preto fica branco. O objetivo é ficar apenas com um único quadrado preto). A quantidade de jogadas é ilimitada. Você consegue atingir esse objetivo?

   Solução:

   (i) Considere um tabuleiro de xadrez 8×8 com a coloração usual.

   (ii) Escolhendo uma linha ou coluna com x quadrados pretos e $8 - x$ quadrados brancos e invertendo as suas cores você obtém $(8 - x)$ quadrados pretos e x brancos. O número de quadrados pretos varia de $|(8 - x) - x| = |8 - 2x|$, que é um número par. A paridade do número de quadrados pretos não muda.

   (iii) Como a paridade era par, não podemos obter um único quadrado preto no final.

5. Considere um tabuleiro 8×8. Temos uma peça na extremidade superior esquerda do tabuleiro. Com movimentos da peça para casas vizinhas da atual (que tenham uma aresta em comum), devemos percorrer todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e terminar no canto inferior direito. É possível fazer isso?

   Solução:

   (i) Pinte o tabuleiro como um tabuleiro de xadrez.

   (ii) Suponha que a casa inicial seja preta. Se percorrermos todas as 64 casas com essa peça, alternamos as cores das casas: preta, branca, preta, branca... branca. Mas a casa do canto inferior direito é preta, pois a diagonal é toda preta por nossa suposição inicial.

   (iii) Logo, não é possível percorrer todas as casas exatamente uma vez e terminar no canto oposto.

6. Nove casas 1×1 de um tabuleiro 10×10 estão infectadas pelo vírus *quadriculado*. A cada segundo, uma casa que possui duas casas vizinhas (com um lado em comum) infectadas também se torna infectada. É possível todas as casas se tornarem infectadas?

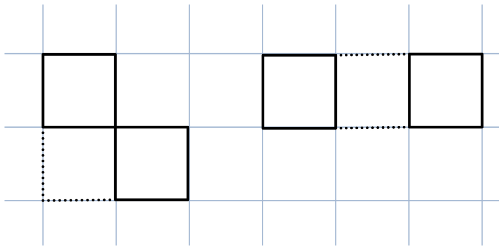

Figura 7 – Tipos de infecção

Solução:

(i) Nesse exemplo não precisamos de uma pintura no tabuleiro.

(ii) Note que o perímetro da área infectada nunca aumenta. Conforme a figura 6 se temos 2 quadrados infectados note que o perímetro permanece constante. De fato, o novo quadrado infectado aumenta 2 lados do perímetro, mas em compensação cada quadrado que estava infectado perde um lado do seu perímetro. O perímetro da figura infectada é o invariante.

(iii) Inicialmente, temos um perímetro que é no máximo $4 \times 9 = 36$ e o perímetro do tabuleiro todo é $4 \times 10 = 40$. Logo, é impossível que o tabuleiro fique todo infectado.

7. (IMO/2018) Uma casa é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20. Inicialmente, cada uma das 400 casas está vazia. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana começando. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha numa casa vazia tal que a distância entre quaisquer duas casas ocupadas por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer casa vazia (uma casa ocupada por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outra casa ocupada). Eles param quando um dos jogadores não podem mias colocar uma pedra. Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.

Solução:

Primeiramente observe, na figura 8, os pontos que distam $\sqrt{5}$.

Portanto a paridade da soma das coordenadas de dois pontos que distam $\sqrt{5}$ é distinta (figura 8). De fato, $x + y$ e $x + y + 3$ tem paridade distintas.

Ana pode chegar a pelo menos 100 jogando apenas em casas para os quais $x + y$ é par. Existem 200 dessas casas, nenhum está a uma distância $\sqrt{5}$ um do outro e Beto

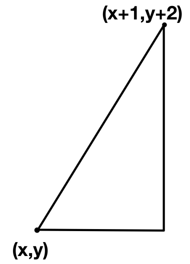

Figura 8 – Ana e Beto

pode ocupar no máximo metade deles. Por outro lado, Beto pode evitar que Ana chegue a mais de 100 usando a seguinte estratégia:

(i) Imagine as casas como um tabuleiro de 20×20 e divida-os em 25 quadrados não sobrepostos de 4×4. Rotulamos cada casa no quadrado de acordo com a tabela 3:

Tabela 3 – Tabuleiro 4x4

1	2	3	4
5	6	7	8
8	7	6	5
4	3	2	1

(ii) Sempre que Ana joga em um quadrado, Beto joga no mesmo quadrado e na casa com o mesmo rótulo. Em cada quadrado Ana pode colocar no máximo 2 pedras em casas rotuladas $1, 4, 6, 7$ (nenhum das três casas com rótulos deste conjunto está livre à distância $\sqrt{5}$ e Ana pode jogar uma pedra em cada rótulo, já que Beto joga no outro). Da mesma forma para as casas identificadas como $2, 3, 5, 8$.

(iii) Portanto, no total, Ana pode colocar no máximo 4 pedras em cada um dos 25 quadrados, para um total de 100 pedras. O máximo é $K = 100$.

8. (IMO SHORT LIST) Construa um tetrominó anexando dois dominós 2×1 ao longo de seus lados mais longos, de forma que o ponto médio do lado mais longo de um dominó seja um canto do outro. Esta construção produz dois tipos de tetrominós com orientações opostas. Vamos chamá-los de S-tetrominós e Z-tetrominós, respectivamente (figura 9). Suponha que um polígono P seja a união de algumas casas de um tabuleiro de xadrez infinito e pode ser coberto com S-tetrominós. Prove que, independentemente de como cobrimos P (sem sobreposição) usando apenas S-tetrominós e Z-tetrominós, sempre usamos um número par de Z-tetrominós.

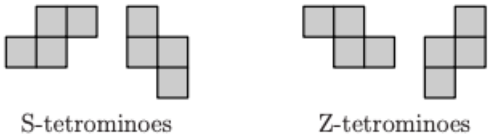

Figura 9 – Tetrominos

Solução:

(i) Podemos assumir que o polígono P é a união de algumas casas de um tabuleiro de xadrez infinito. Pinte os quadrados do tabuleiro de xadrez com duas cores como a figura 9.

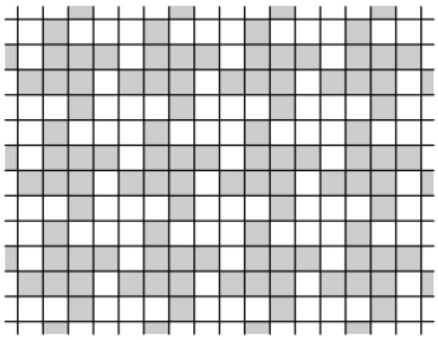

Figura 10 – Pintura do tabuleiro

(ii) Observe que não importa como colocamos P, qualquer S-tetrominó cobre um número par de quadrados pretos, enquanto qualquer Z-tetrominó cobre um número ímpar deles. Como P pode ser coberto exclusivamente por S-tetrominós, ele contém um número par de quadrados pretos. Mas se alguns S-tetrominós e alguns Z-tetrominós cobrem um número par de quadrados pretos,

(iii) Então o número de Z-tetrominós deve ser par.

Uma segunda solução:

(i) Pintamos o tabuleiro usando as duas cores da figura 11, que talvez sejam um pouco mais naturais:

(ii) Sejam s_1 e s_2 o número de S-tetrominós do primeiro e segundo tipo (como mostrado na figura acima) , respectivamente, que são usados em um mosaico de P. Da mesma forma, sejam z_1 e z_2 o número de Z-tetrominós do primeiro e segundo tipo, respectivamente. A primeira coloração mostra que $s_1 + z_2$ é invariante módulo 2 (invariante com resto), a segunda coloração mostra que $s_1 + z_1$ é invariante módulo 2 (invariante com resto). Adicionando essas duas condições, descobrimos que $z_1 + z_2$ é invariante módulo 2,

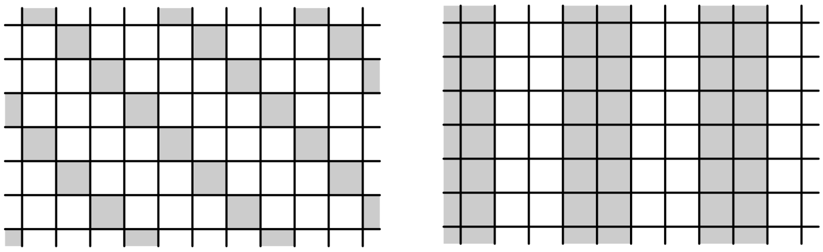

Figura 11 – Pinturas mais naturais

(iii) Então o número de Z-tetrominós deve ser par. Na verdade, a soma das duas colorações (considerando o branco como 0 e o preto como 1 e aplicando o módulo 2) é a coloração mostrada na solução.

6 INVARIANTES EM JOGOS

> Existem muitos tipos de jogos em matemática e muitos tipos de teorias de jogos. Vamos considerar apenas um tipo. Em cada um desses jogos, há dois jogadores que se revezam para fazer as jogadas, e um jogador não pode recusar a jogada. O problema é sempre o mesmo: descobrir qual jogador (o primeiro ou o segundo) tem uma estratégia vencedora (FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia, 2010).

Alguns jogos podem ser resolvidos com as posições vencedoras, ou estratégias vencedoras, procurar invariantes pode nos ajudar a encontrar a estratégia vencedora.

Podemos usar as 3 regras a seguir para classificar todas as posições como vencedoras ou perdedoras, dependendo se o jogador a se mover acabará vencendo ou perdendo com um jogo perfeito de ambos os lados.

(i) O jogador que realiza o último movimento é declarado vencedor do jogo. Essa posição é uma posição vencedora. De fato, após o último movimento o oponente não pode mais realizar nenhum movimento e é declarado perdedor.

(ii) Uma posição será considerada uma posição vencedora se pelo menos uma das posições que podem ser obtidas nesta posição por um único movimento for uma posição perdedora.

(iii) Uma posição é uma posição perdedora se cada posição que pode ser obtida dessa posição por um único movimento for uma posição vencedora.

Devido à natureza determinística do jogo, pode-se mostrar por indução reversa que cada posição pode ser caracterizada exclusivamente como uma posição vencedora ou perdedora. A regra (ii) também nos diz, em termos gerais, como nos mover de maneira ótima quando estamos em uma posição vencedora: movemos para uma posição que é uma posição perdedora. Portanto, isso nos fornece um algoritmo muito simples para entender como esses jogos são jogados:

Seguiremos a seguinte estratégia de resolução de problemas para jogos combinatórios:

(i). Analise posições iniciais simples, para construir uma biblioteca de posições vencedoras e perdedoras básicas, sejam elas no começo do jogo ou sejam elas no final do jogo.

(ii). Conjecture uma descrição geral das posições vencedoras e perdedoras, com base nos exemplos.

(iii). Prove a conjectura (geralmente por indução): mostre que uma posição vencedora sempre pode mover-se para uma posição perdedora, e que uma posição perdedora só pode mover-se para uma posição vencedora.

Vejamos agora alguns exemplos que usam essa terminologia e estratégia.

1. A professora desafia André e Thiago com o seguinte jogo, em que eles jogam alternadamente. Ela escreve no quadro-negro os inteiros de 1 a 50. Uma jogada consiste em escolher dois dos números escritos, apagar esses números, substituindo-os pela soma (Por exemplo, se André escolheu 8 e 23, apagam-se os dois e escreve-se 31). Depois de algum tempo, vai restar no quadro negro um único número. Se esse número é par, o ganhador é André, caso contrário, o ganhador é Thiago. Quem vence o jogo: André ou Thiago?

   Solução:

   (i) No final do jogo, teremos apenas 2 números. Precisamos analisar a paridade desses números.

   (ii) Como a ordem dos fatores não altera a soma, ela é invariante.

   (iii) Temos que o último número será: $1 + 2 + ... + 50 = (1 + 50) \times 25$, que é ímpar logo Thiago é o vencedor.

2. Tic e Tac jogam um jogo com 2010 cartas. Em cada carta está escrito um número inteiro positivo. As cartas são colocadas em fila, de modo que os números nas cartas estejam visíveis. Cada jogada consiste em escolher uma carta que esteja em uma das duas extremidades da fila e retirá-la. Tic começa o jogo e o jogo termina quando Tac retira a última carta da fila. A pontuação de cada jogador é a soma dos números nas cartas retiradas por ele. Demonstre que Tic pode sempre obter uma soma maior ou igual à de Tac.

   Solução:

   (i) No início, ou em cada jogada, Tic sempre tem 2 opções de carta para retirar. Mas o somatório das 1005 cartas é que garante a vitória.

   (ii) Pinte as cartas alternadamente de azul e vermelho começando com uma carta azul (figura 12). Seja S_v a soma dos valores de todas as cartas vermelhas e seja S_a a soma dos valores de todas as cartas azuis, compare os dois valores. O primeiro jogador deve escolher a cor que tiver a maior soma e então sempre escolher sua cor de modo que o segundo jogador só possa escolher a outra cor. Dessa forma, ele pode certificar-se de que, por exemplo, se for a cor azul, após ele retirar a primeira carta azul restarão duas cartas vermelhas. Dessa forma o outro jogador nunca será capaz de escolher uma carta azul. O que garante que o Tic sempre vencerá o jogo.

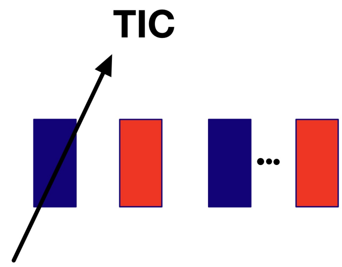

Figura 12 – Tic Tac

3. O jogo começa com o número 1000. Na sua vez, cada jogador pode subtrair do número atual qualquer número que seja uma potência de 2 menor ou igual ao número atual. O jogador que obtiver o número 0 vence. Quem sempre pode garantir a vitória?

   Solução:

   (i) Perceba que os múltiplos de 3 são as posições perdedoras.

   (ii) De fato, como $2^n \equiv \pm 1 \pmod 3$ então $3k - 2^n = 3k + 1$ ou $3k - 2^n = 3k + 2$ então o segundo jogador nunca poderá obter o zero e o primeiro jogador sempre vai poder retirar 1 ou 2 para deixar o jogador 2 em uma posição perdedora.

   (iii) Portanto basta o primeiro jogador retirar 1 e colocar o segundo jogador numa posição perdedora.

4. O jogo começa com o número 1000. Na sua vez, cada jogador pode subtrair do número atual qualquer número do conjunto $(1, 2, 3, 4, 5)$. O jogador que obtiver o número 0 vence. Se existem dois jogadores, quem sempre pode garantir a vitória?

   Solução:

   (i) Perceba que os múltiplos de 6 são as posições perdedoras, pois numa casa múltiplo de 6 não podemos mandar o oponente para outra múltipla de 6 e em qualquer outra casa podemos mandar o oponente para uma casa múltipla de 6.

(ii) De fato, basta o primeiro jogador retirar 4 e colocar o segundo jogador numa posição perdedora. Daí em diante o primeiro jogador deve sempre passar múltiplos de 6 para o oponente.

(iii) Assim ele é o único que pode passar o zero.

5. (O jogo de Wythoff) Dois jogadores jogam alternadamente removendo pedras de duas pilhas sobre uma mesa. Na sua vez, cada jogador pode remover qualquer quantidade de pedras de uma pilha ou igual número de pedras de ambas as pilhas. O ganhador é aquele que retirar a última pedra. Se no início as pilhas possuem 5 e 7 pedras, qual dos jogadores pode sempre ganhar? Determine todas posições perdedoras.

   Solução:

   (i) Vamos procurar as posições vencedoras e vamos usar o fato que toda jogada que leva a uma posição perdedora é vencedora.

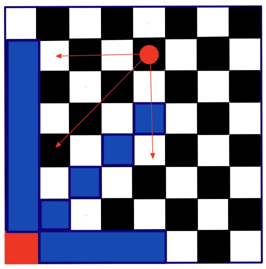

Figura 13 – Posições vencedoras inciais

   (ii) Vamos fazer um gráfico onde as abcissas são as quantidades de pedras na pilha 1 e as ordenadas as quantidades de pedras na pilha 2. Perceba na figura 13, que o objetivo desse jogo é sair da casa $(5,7)$ e chegar na casa $(1,1)$ onde os seguintes movimentos são permitidos: (1) andar na paralela do eixo das abcissas(retirar pedra da pilha 1); (2) andar na paralela das ordenadas(retirar pedra da pilha 2); (3)andar na diagonal(retirar pedras em quantidades iguais das duas pilhas). Dessa forma, a posição $(1,1)$ é uma posição vencedora, pois se for sua vez de jogar e você estiver nela você vence o jogo. Então as posições $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)$, bem como as posições $(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,7)$ e as posições $(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$, também são posições vencedoras. Com isso perceba que a as posições $(2,3)$ e $(3,2)$ são perdedoras pois elas só conseguem movimentar-se para posições vencedoras, os que a tornam perdedoras.

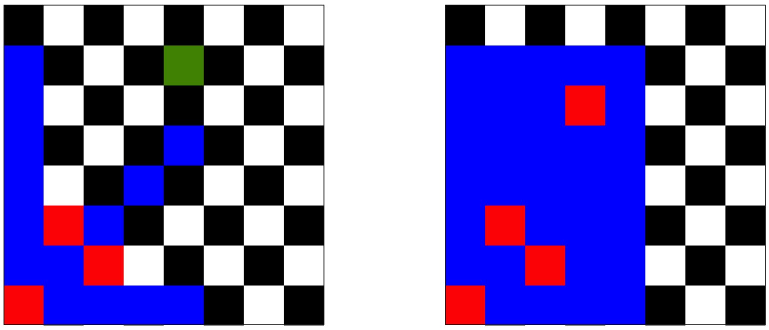

Figura 14 – Todas as posições vencedoras

(iii) Continuando esse procedimento (figura 14) chegamos que as únicas posições perdedoras são: $(3, 2), (2, 3)$ e $(6, 4)$, Como no início começamos na posição (5,7), a posição verde na figura 14, o primeiro jogador vence o jogo.

6. Duas pessoas jogam um jogo. O número 2 está escrito em um quadro negro no início. Cada jogador, por sua vez, muda o número atual N no quadro-negro para o número $N + d$, onde d é um dos fatores de N e $d < N$. O jogador que deve escrever um número maior que 19.891.989(19.881.988) perde o jogo. Quem vai ganhar se os dois jogadores jogarem perfeitamente?

   Solução 1(considerando o número 19.891.989)

   (i) Se primeiro jogador sempre somar 1 a sua jogada, ele sempre entrega um número ímpar para seu oponente e sempre excede em 1 o número anterior. Já o oponente sempre terá que entregar um número par, pois $\acute{\imath}mpar + \acute{\imath}mpar = par$.

   (ii) Como 19.891.989 é ímpar, isso significa que o primeiro jogador vai somando $+1$ até chegar em 19.891.989, então o jogador 2, na sua jogada, passa um número superior a 19.891.989.

   (iii) Logo o segundo jogador perde o jogo.

   Solução 2 (considerando o número 19.891.988):

   (i) O início do jogo é estritamente determinado: $2 \to 3 \to 4$.

   (ii) Suponha, por absurdo, que o segundo jogador ganhe o jogo. Então todos os movimentos do primeiro jogador estão em casas perdedoras, enquanto que todos os movimentos do segundo jogador estão em casas vencedoras. O 4 é uma casa perdedora, então o primeiro jogador pode fazer o movimento $4 \to 5$. Então, o segundo jogador deve jogar $5 \to 6$ isso significa que o 6 é uma casa perdedora. Mas o primeiro jogador poderia ter colocado o segundo jogador diretamente na casa 6 jogando $4 \to 6$ o que tornaria a o 6 uma posição vencedora. Chegamos numa contradição. De fato, a casa 6 não pode ser perdedora e ganhadora ao mesmo tempo.

   (iii) Supusemos que o jogador 2 era o vencedor e chegamos em uma contradição. Então podemos concluir que o primeiro jogador ganha o jogo.

7 FALSOS INVARIANTES

> Às vezes, um invariante pode ser aplicado não para provar que algum objeto não pode ser obtido de um dado, mas para aprender quais objetos podem ser obtidos daquele dado.(FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia, 2010)

No Capítulo 1, vimos que há problemas envolvendo um conjunto S de estados e regras, de acordo com as quais pode-se passar de um estado para outro. Então, dado um estado inicial $s_0 \in S$ e seguindo as regras, é possível atingir um outro estado (estado final) $s_n \in S$. Este trabalho, procurou, até aqui, mostrar a poderosa técnica de resolução de problemas de existência em combinatória, que são os invariantes. Procurávamos alguma propriedade que permanecia constante independente das operações realizadas, quando conseguimos, provamos que tal estado final $s_n \in S$ não poderia ser alcançado.

Nesse capítulo, vamos ver alguns exemplos que, à primeira vista, por se tratar de problemas que fazem repetições de algumas propriedade e podendo fazer essas operações, podemos achar, que devemos procurar o invariante. Mas na verdade, o estado final $s_n \in S$ pode ser alcançado. Nesses casos, precisaremos mostrar o algoritmo de como alcançar o estado final.

(i) Procure por um algoritmo que nos permite achar o estado final.

(ii) Mostre como chegar no estado final e conclua o problema.

Vejamos alguns desses exemplos:

1. Um tabuleiro quadrado 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2?

   Solução:

   (i) O tabuleiro 5×5 possui 25 casas (quantidade ímpares de casas) e n dominós (2×1) possui $2n$ casas, que é uma quantidade par de casas.

   (ii) Logo não conseguimos cobrir as 25 casas do tabuleiro 5×5.

2. (Leningrado) Vinte números estão escritos em um círculo. Podemos escolher uma tripla de números consecutivos (x, y, z) e trocá-la pela tripla $(x + y, -y, z + y)$, na mesma ordem. Usando essa transformação é possível obter a sequência $[10, 9, 8, ..., 2, 1, -10, -9, ..., -2, -1]$ a partir da sequência $[1, 2, ..., 9, 10, -1, -2, ..., -9, -10]$? (os números são dados no sentido horário).

Solução:

(i) Escreva no círculo 20 inteiros $x_1, x_2, ..., x_{20}$ de modo que as diferenças $x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_{20} - x_{19}, x_1 - x_{20}$ forneçam exatamente o conjunto inicial $(1, 2, ..., 9, 10, -1, -2, ..., -9, -10)$. Note que isso pode ser feito, desde que a soma dos números neste conjunto seja igual a zero ($S = x_1 + x_2 + ... + x_{20} = 0$). Além disso, seja a quádrupla $(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3})$ de 4 números seguidos dos 20 números escolhidos no círculo. Essa quádrupla gera as seguintes tripla das diferenças: $a = x_{k+1} - x_k, b = x_{k+2} - x_{k+1}, c = x_{k+3} - x_{k+2}$. Trocando de posição o x_{k+1} e x_{k+2} obtemos a quádrupla $(x_k, x_{k+2}, x_{k+1}, x_{k+3})$ que gera a tripla $x_{k+2} - x_k, x_{k+1} - x_{k+2}, x_{k+3} - x_{k+1}$, que coincide com $(a + b, -b, c + b)$ das transformações permitidas. De fato, $a + b = x_{k+1} - x_k + x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+2} - x_k$, $-b = -(x_{k+2} - x_{k+1}) = x_{k+1} - x_{k+2}$ e $b + c = x_{k+2} - x_{k+1} + x_{k+3} - x_{k+2} = x_{k+3} - x_{k+1}$. Assim, começando com o círculo 20 inteiros $x_1, x_2, ..., x_{20}$ quando trocamos de posição o x_{k+1} e x_{k+2} é mesma coisa de fazer a operação $x+y, -y, z+y$ no conjunto inicial $(1, 2, ..., 9, 10, -1, -2, ..., -9, -10)$.

(ii) Então, podemos obter o arranjo $x_1, x_{20}, x_{19}, ..., x_2$. Isso nos leva ao conjunto de diferenças $x_{20} - x_1, x_{19} - x_{20}, ..., x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2$, que na verdade coincide com a coleção $(10, 9, ..., 2, 1, -10, -9, ..., -2, -1)$.

3. O número 123 está na tela do computador de Teddy. A cada minuto o número escrito na tela é somado com 102. Teddy pode trocar a ordem dos dígitos do número escrito na tela quando ele quiser. Ele pode fazer com que o número escrito na tela seja sempre um número de três dígitos?

Solução:

(i) Considere a sequência: $123 \to 225 \to 327 \to 429 \to 531 \Rightarrow 135 \to 237 \Rightarrow 327 \to 429$ ... , onde $\to$ denota a operação de computador e $\Rightarrow$ uma operação feita por Teddy. Dessa forma mostramos um ciclo fechado.

(i) Com esse algoritmo mostrado acima podemos garantimos que Teddy sempre pode ter um número de três dígitos na tela.

4. Colocamos os números de 1 a 16 (inclusive) em uma reta na ordem crescente. Podemos escolher dois números e trocá-los de lugar. Podemos obter uma configuração em que a soma de quaisquer dois vizinhos seja um quadrado perfeito?

Solução:

(i) Sabemos que utilizando apenas transposições, podemos obter qualquer permutação, portanto segue o exemplo dos 16 números onde a soma de quaisquer 2 vizinhos sempre é um quadrado perfeito.

$8 - 1 - 15 - 10 - 6 - 3 - 13 - 12 - 4 - 5 - 11 - 14 - 2 - 7 - 9 - 16$

(ii) Logo podemos obter uma configuração em que a soma de quaisquer dois vizinhos seja um quadrado perfeito.

5. (OBM) A sequência de algarismos $1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, ...$ é construída da seguinte maneira: cada elemento, a partir do quinto, é igual ao último algarismo da soma dos quatro anteriores.

   (a) Os algarismos $2, 0, 0, 4$, juntos e nesta ordem, aparecem na sequência?

   (b) Os algarismos iniciais $1, 2, 3, 4$, juntos e nesta ordem, aparecem novamente na sequência?

   Solução:

   (a)

   (i) Suponha por absurdo que apareçam $2, 0, 0, 4$ nessa ordem. Então, escrevendo os termos anteriores da sequência obtemos $2, 2, 0, 0, 4, 6, 2, 2, 0, 0, 4...$ e só obtemos números pares.

   (ii) Chegamos num absurdo, pois começamos com $1, 2, 3, 4$.

   (b)

   (i) Note que a sequência vai se repetir em algum momento, pois ela não é infinita. Pelo princípio da casa dos pombos temos que $10^4 + 1$ termos teremos algum grupo de 4 termos repetido, assim como qualquer recursão linear homogênea ela é periódica.

   (ii) Então eventualmente a sequência voltará para o valor de $1, 2, 3, 4$.

6. (OBM) Esmeralda escolhe um número inteiro positivo qualquer e realiza a seguinte operação com ele: cada um de seus algarismos é trocado pelo seu sucessor, com exceção do 9, que é trocado por 0. Em seguida, os eventuais zeros que aparecem à esquerda são eliminados. Por exemplo, ao se realizar a operação no número 990003953 obtém-se 1114064 (note que os dois zeros à esquerda gerados pelos dois primeiros algarismos 9 foram eliminados). A operação é repetida até que se obtenha 0. Por exemplo, começando com 889, obtemos a sequência de números $889, 990, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$

   (a) Apresente a sequência de números quando o primeiro número é 2008.

   (b)Mostre que, independente do número inicial, após uma quantidade finita de operações Esmeralda obtém 0.

   Solução:

   a)

(i) A sequência é $2008, 3119, 4220, 5331, 6442, 7553, 8664, 9775, 886, 997, 8, 9, 0$

b)

(i) Independente do dígito que ocupa a primeira posição do número, após uma certa quantidade de operações, ele chegará a 9 e, basta mais uma operação para ele chegar a 0, que desaparecerá, e o número ficará assim com um dígito a menos. Em seguida, independente do dígito que agora ocupa a 2 posição, após uma certa quantidade de operações ele também chegará a 9 e, logo depois, a 0, que também desaparecerá, e o número terá assim outro dígito a menos.

(ii) Continuando esse processo até o número ter um único dígito, esse dígito também chegará a 9 e, depois, a 0, encerrando o processo.

8 PROBLEMA PROPOSTOS

> "O tema 'Invariantes' tem um caráter bastante abstrato e mesmo seu próprio princípio muitas vezes permanece vago e complicado para os alunos. Assim, deve-se prestar atenção especial à análise da lógica de aplicação de invariantes na resolução de problemas. É especialmente importante analisar os problemas mais simples do tópico para que cada aluno resolva pelo menos um problema independentemente."(FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia, 2010)

Nesse capítulo deixaremos para o leitor aplicar as técnicas expostas nesse trabalho. Tente resolver os problemas usando alguma técnica apresentada: invariantes de estado, paridade, invariantes com restos, semi-invariantes, invariantes em tabuleiros, invariantes em jogos ou até mesmo um falsos invariantes. caso o leitor tenha alguma dificuldade o próximo capítulo traz as soluções ou algumas dicas para que o leitor consiga concluir o problema.

1. Três números são escritos em um quadro negro. Podemos escolher um deles, digamos c, e substituí-lo por $2a + 2b - c$, onde a e b são os outros dois números. Podemos alcançar o trio $(11, 12, 13)$ começando com o trio $(20, 21, 24)$?

2. Os lados do polígono são coloridos nas cores: vermelho, amarelo e azul. Inicialmente, suas cores são lidas no sentido horário: vermelho, azul, vermelho, azul, . . . , vermelho, azul, amarelo. Podemos mudar a cor de um lado, mas temos que garantir que nenhum lado adjacente tenha a mesma cor. É possível que após algumas operações, as cores dos lados fiquem no sentido horário: vermelho, azul, vermelho, azul, . . . , vermelho, amarelo, azul?

3. Existe uma pedra em cada vértice de um quadrado. Podemos mudar o número de pedras de acordo com a seguinte regra: podemos retirar qualquer número de pedras de um vértice e adicionar o dobro de pedras à pilha em um dos vértices adjacentes. É possível obter pedras de $1989, 1988, 1990$ e 1989 em vértices consecutivos após um número finito de movimentos?

4. Nos quadrados de um tabuleiro de xadrez 3×3 (figura 14) estão escritos os sinais $+$ e $-$ conforme mostrado na figura 14-(a). Considere as operações nas quais é permitido alterar simultaneamente todos os sinais em alguma linha ou coluna. É possível mudar a configuração dada para aquela na figura 14-(b) aplicando um número finito dessas operações?

(a)

+	+	−
+	+	−
−	−	+

(b)

−	−	+
+	−	−
−	−	+

Figura 15 – Tabuleiro + ou -

5. (OBM) Considere uma barra de chocolate 3×4 que tem um amendoim apenas num pedaço, em um dos cantos. Elias e Fábio querem repartir o chocolate, mas nenhum deles gosta de amendoim. Então combinam dividir o chocolate quebrando-o ao longo das linhas verticais ou horizontais da barra, um depois do outro e retirando o pedaço escolhido, até que alguém tenha que ficar com o pedaço do amendoim. Por sorteio, coube a Elias começar a divisão, sendo proibido ficar com mais da metade do chocolate logo no começo. Qual deve ser a primeira divisão de Elias para garantir que Fábio fique com o amendoim ao final?

6. (Cone Sul) Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais. Inicialmente há sobre a mesa só uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.

7. (IMO) É atribuído um inteiro a cada um dos vértices de um pentágono regular, de tal forma que a soma dos cinco números seja positiva. Se três vértices consecutivos recebem os números x, y, z, respectivamente, e $y < 0$ então a seguinte operação é permitida: os números x, y, z são trocados por $x + y, -y, z + y$, respectivamente. Tal operação é repetida enquanto houver um número negativo entre os cinco atribuídos. Determine se este processo necessariamente se encerra após um número finito de aplicações de tal operação.

8. Existem apenas duas letras no alfabeto do idioma $Ao - Ao$: A e O. Além disso, o idioma satisfaz as seguintes condições: se você excluir duas letras AO vizinhas de qualquer palavra, obterá uma palavra com o mesmo significado. Da mesma forma, o significado de uma palavra não mudará se você inserir as combinações OA ou $AAOO$ em qualquer lugar de uma palavra. Podemos ter certeza de que as palavras AOO e OAA têm o mesmo significado?

9. Existem seis pardais sentados em seis árvores, um pardal em cada árvore. As árvores ficam em uma linha, com 10 metros entre quaisquer duas árvores vizinhas. Se um

pardal voa de uma árvore para outra, então, ao mesmo tempo, algum outro pardal voa de alguma árvore para outra à mesma distância, mas na direção oposta. É possível que todos os pardais se juntem em uma árvore? E se houver sete árvores e sete pardais?

10. Em uma tabuleiro 3×3, o quadrados da primeira linha e primeira coluna é preto e todos os outros são brancos. Prove que não é possível tornar todas os quadrados brancos recolorindo as linhas e colunas. "Recolorir"é a operação de mudar a cor de todos os quadrados em uma linha ou em uma coluna.

11. Dr. Gizmo inventou uma máquina de troca de moedas que pode ser usada em qualquer país do mundo. Qualquer que seja o sistema de cunhagem, a máquina pega qualquer moeda e, se possível, retorna exatamente cinco outras com o mesmo valor total. Prove que não importa como o sistema de moedas funcione em um determinado país, você nunca pode começar com uma única moeda e terminar com 26 moedas.

12. O número 8^n está escrito em um quadro negro. A soma dos seus dígitos é calculada, então a soma dos dígitos do resultado é calculada e assim por diante, até obtermos um único dígito. Qual é este dígito se $n = 1989$?

13. Existem amebas marcianas de três tipos (A, B e C) em um tubo de ensaio. Duas amebas de quaisquer dois tipos diferentes podem se fundir em uma ameba do terceiro tipo. Depois de várias dessas fusões, apenas uma ameba permanece no tubo de ensaio. Qual é o seu tipo, se inicialmente havia 20 amebas do tipo A, 21 amebas do tipo B e 22 amebas do tipo C?

9 SOLUÇÕES E DICAS

1. Invariantes de estado: A expressão $a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca)$ é invariante sob a operação, e leva valores diferentes para nossos dois trios. Ou poderia ser o semi-invariante: $a + b + c \pmod 2$.

2. Invariantes de estado: Cada vértice pertence a dois lados de cores diferentes. Se essas cores são, no sentido horário, vermelho e azul ou azul e amarelo ou amarelo e vermelho, atribuímos 1 a esse vértice, caso contrário, atribuímos 2 a esse vértice. Agora suponha que mudamos a cor de um lado $[AB]$ da cor 1 para a cor 2. Inferimos que o outro lado contendo A não deve ser nem da cor 1 nem da cor 2, portanto tem da cor 3. O mesmo acontece com o outro lado que contém B. Então, antes do movimento, os lados que contêm A tinham as cores 1 e 2, enquanto os lados que contém B tem as cores 2 e 1 (sentido horário), então A e B recebem números diferentes. Analogamente, deduzimos que A e B terão números diferentes atribuído após a mudança. Os números atribuídos aos outros vértices não mudam, de forma que, o número total de 1 e 2 atribuídos é invariável. Resta notar que, inicialmente, os números atribuídos foram $1, 2, 1, 2...1, 2, 1, 1, 1$ enquanto no estado final eles são $1, 2, 1, 2,$ ..., $1, 2, 2, 2, 2$, portanto, uma configuração que não pode ser alcançada.

3. Semi-invariantes: Observe que a diferença entre o número do conjunto de pedras no primeiro e terceiro vértices e o número do conjunto de pedras no segundo e quarto vértices muda em um múltiplo de 3 sob a operação dada. Assim, é natural escolher como invariante o resíduo desta diferença $\pmod 3$. Visto que a configuração $(1, 1, 1, 1)$ tem o invariante igual a 0 e a configuração $(1989, 1988, 1990, 1989)$ tem o invariante igual a 2. Não se pode transformar o primeiro no segundo.

4. O invariante é a paridade do número de sinais de "$+$" no quadrado inferior esquerdo 2×2. Na primeira configuração, essa paridade é par, enquanto na segunda é ímpar. Portanto, a primeira configuração não pode ser transformada na segunda aplicando as operações especificadas.

5. Invariantes em jogos: A estratégia de Elias é sempre devolver um quadrado para Fábio (o invariante é essa estratégia). Note que Fábio nunca poderá devolver um quadrado para Elias.

6. Paridade: Seja n o número de discos e p o número de pilhas. Cada movimento diminui n em uma unidade e aumenta p em uma unidade, logo $n + p$ é invariante. Inicialmente, $n + p = 1001$, que é ímpar, e na situação desejada, $n + p = 3p + p = 4p$, que é par. Então não é possível.

7. Semi-invariante: Sendo (a, b, c, d, e) os números, considere o semi-invariante $S = (a-c)^2 + (b-d)^2 + (c-e)^2 + (d-a)^2 + (e-b)^2$. Aplique a operação (a, b, c) por $(a+b, -b, b+c)$. Então S muda para $S' = (a-c)^2 + (b+d)^2 + (b+c-e)^2 + (d-a-b)^2 + (e+b)^2 = S + 2b(a+b+c+d+e) < S$, e S é um semi-invariante que diminui sempre. Mas $S > 0$, então o processo termina.

8. Paridade: Observe que, para qualquer exclusão ou inserção permitida de alguma combinação de letras, o número de $A's$ na combinação é igual ao número de $O's$. Isso significa que a diferença entre o número de $A's$ e o número de $O's$ é invariante. Essa diferença na palavra AOO é (-1), e na palavra OAA é 1. Portanto, não podemos obter a palavra OAA da palavra AOO usando as operações permitidas e não podemos afirmar que essas palavras são sinônimos.

9. Invariante de estado: Podemos usar a seguinte quantidade como invariante: a cada pardal é atribuído um índice especial igual ao número da árvore em que está sentado (contando da esquerda para a direita). Então, a soma S desses índices é nosso invariante. De fato, após os voos de quaisquer dois pássaros, apenas seus índices mudam: um aumenta um número x e outro diminui no mesmo número x. Assim, a soma S é invariante. Inicialmente, o valor de S é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, e se todos os pardais estiverem na mesma árvore com o número k, então o valor de S é $6k$. Visto que 21 não é divisível por 6, podemos concluir que os pardais não podem se reunir em uma árvore. Por outro lado, se houver sete pardais e sete árvores, inicialmente $S = 28$, que é divisível por 7, e não podemos excluir a possibilidade de todos os pardais se reunirem em uma árvore. Na verdade, o leitor pode construir facilmente uma sequência de voos que resulta na situação desejada: todos os pardais estão juntos na árvore do meio.

10. Basta provar que a paridade do número de caixas pretas entre as quatro caixas de canto é invariante sob recolorações.

11. Visto que após cada operação da máquina do Dr. Gizmo o número de moedas aumenta em 4, então o restante do número de moedas quando dividido por 4 é invariante. Mas 26 e 1 têm restos diferentes quando divididos por 4. Portanto, não podemos terminar com 26 moedas.

12. A resposta é 8. Como os restos de um número natural e da soma de seus dígitos quando dividido por 9 são iguais, o resto de 8^{1989} coincide com o resto do resultado final x. Portanto, x tem resto 8 módulo 9, e sabemos que x tem apenas um dígito. Concluímos que $x = 8$.

13. Seu tipo é B. Considere as paridades das diferenças $N(A) - N(B)$, $N(B) - N(C)$ e $N(C) - N(A)$, onde $N(X)$ é o número de amebas do tipo X. Essas paridades não

mudam no decorrer do processo de fusão. Isso significa, em particular, que no final (quando há apenas uma ameba no tubo) os números das amebas A e C têm a mesma paridade, o que é possível apenas se a única ameba restante pertencer ao tipo B.

CONCLUSÃO

Diante de diversos problemas que envolvem o tema das olimpíadas, destaca-se a importância do princípio da invariância para professores e alunos do ensino médio. As olimpíadas de matemática estimulam os alunos e professores a aprimorarem e desenvolverem seus os conhecimentos em matemática, além de descobrir novos talentos e colocá-los em contato com matemáticos profissionais de instituições de pesquisa de alto nível. As olimpíadas também, podem ser uma forma de ingresso em algumas universidades no Brasil e no exterior.

É importante salientar, que para montar uma turma olímpica, a preparação do professor e dos alunos é o ingrediente principal. Afinidade com a matemática ajuda muito, mas são as horas de dedicação em diversos temas, que produzem os melhores resultados. Ganha-se experiência nesses temas resolvendo os problemas, tais como nesse trabalho.

Referências

1 ENGEL, Arthur. Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics). Springer, 1995.

2 BOYVALENKOV, Peter et al. Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006. 2007.

3 Li, Kim. Math Problem Book I. Hong Kong Mathematical Society IMO (HK) Committee, 2001.

4 ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming (Ed.). Mathematical Olympiads 1998-1999: Problems and Solutions from Around the World. Cambridge University Press, 2000.

5 ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming; LEE JR, George (Ed.). Mathematical olympiads 2000-2001: problems and solutions from around the world. MAA, 2003.

6 ANDREESCU, ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming (Ed.). Mathematical Olympiads 1999-2000: Problems and Solutions from Around the World. Cambridge University Press, 2002.

7 ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming; LOH, Po-Shen (Ed.). USA and International Mathematical Olympiads 2004. MAA, 2005.

8 FOMIN, Dmitrii Vladimirovich; FOMIN, Dmitry; KIRICHENKO, Aleksei. Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991. MathPro Press, 1994.

9 ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. Mathematical olympiad challenges. Springer Science & Business Media, 2008.

10 FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. Círculos Matemáticos: A experiência russa. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

11 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em https://www.poti.impa.br/. Acesso em: 01 mai 2021.

12 Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em https://www.obm.org.br/. Acesso em: 01 mai 2021.

13 TSVETKOVA, Iliana. Applications of Semi-Invariants in Solving Math Competition Problems. WORLD FEDERATION OF NATIONAL MATHEMATICS COMPETITIONS, p. 55, 2010.