

## COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Vicente dos Santos Alonso

Modelagem Fuzzy no Ensino de Matemática:  
o diagnóstico da COVID-19 e outras aplicações.

Rio de Janeiro

2022

Vicente dos Santos Alonso

Modelagem Fuzzy no Ensino de Matemática:  
o diagnóstico da COVID-19 e outras aplicações.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora Dr<sup>a</sup>. Luciana Santos da Silva Martino

Rio de Janeiro

2022

**COLÉGIO PEDRO II**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**  
**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**  
**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

A454 Alonso, Vicente dos Santos

Modelagem Fuzzy no Ensino de Matemática: o diagnóstico da COVID-19 e outras aplicações/ Vicente dos Santos Alonso. – Rio de Janeiro, 2022.

103 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Luciana Santos da Silva Martino.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Lógica Fuzzy. 3. Modelagem matemática. 4. Covid-19. 5. Base Nacional Comum Curricular. I. Martino, Luciana Santos da Silva. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Vicente dos Santos Alonso

Modelagem Fuzzy no Ensino de Matemática:  
o diagnóstico da COVID-19 e outras aplicações.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_.

Banca Examinadora:

---

Dr<sup>a</sup>. Luciana Santos da Silva Martino  
Colégio Pedro II

---

Dr<sup>a</sup>. Maria de Lourdes Rocha de Assis Jeanrenaud  
Colégio Pedro II

---

Dr<sup>a</sup>. Marilis Bahr Karam Venceslau  
Colégio Pedro II

---

Dr. Leornado Goliatt da Fonseca  
Universidade Federal de Juiz de Fora

Rio de Janeiro  
2022

Esta pesquisa é dedicada a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão da mesma: Deus, família, amigos e professores.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força, saúde e proteção para chegar até aqui.

A minha esposa Bruna por ter estado ao meu lado durante todo o curso sempre me apoiando, incentivando e ajudando em todos momentos.

Aos meus pais Andrea e Vicente, por sempre acreditarem no meu potencial e me apoiar nos meus estudos e conceber maneiras para que viesse ter esta conquista.

A minha irmã Jessica, por todo apoio e ajuda nos momentos difíceis desta caminhada.

A minha orientadora Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Luciana Santos da Silva Martino, pelas valiosas contribuições e exigências quanto à qualidade deste trabalho, paciência e todo companheirismo demonstrado durante o período de orientação.

Agradeço aos amigos que conheci no mestrado e que levarei para toda vida. Obrigado por todos os momentos de companheirismo e ajuda desde o início.

Para finalizar, agradeço à todos os professores do curso do PROFMAT - CII que tive oportunidade de ter contato, pelas trocas de experiências e conhecimentos adquiridos.

*“A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.”.*  
*(Stephen Hawking)*

## RESUMO

ALONSO, Vicente dos Santos. *Modelagem Fuzzy no Ensino de Matemática: o diagnóstico da COVID-19 e outras aplicações*. 2022. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2022.

A Lógica Fuzzy é um assunto pouco explorado nas escolas atualmente. No entanto, a mesma apresenta uma representação mais próxima do raciocínio humano. Neste trabalho busca-se trazer uma introdução de seus conceitos e aplicações que possam ser utilizados em sala de aula envolvendo assuntos do cotidiano dos alunos. Tendo a Lógica Booleana como predominante em nossa sociedade, devido a seu tempo de estudo, seus conceitos de Falso ou Verdadeiro ("0 ou 1") passaram a não atender determinadas demandas que surgiram à medida que se houve avanço no entendimento dos problemas com os quais se tinha que lidar. Com a introdução da Lógica Fuzzy problemas que envolviam incerteza passaram a ter uma base matemática trazendo assim soluções, quando puderam ser melhor desenvolvidos e aplicados em campos inacessíveis à Lógica Booleana, como o da Inteligência Artificial. Também são apresentados conceitos de Modelagem Matemática para que os alunos possam construir significado para os conceitos apresentados e ter maior entendimento durante a apresentação de outros. O Pensamento Computacional também é outro fator importante pois visa trabalhar com os alunos em conjunto com ferramentas tecnológicas disponíveis tais como computadores, celulares e outros dispositivos tecnológicos buscando o desenvolvimento do conhecimento matemático e pensamento crítico. Para apresentar o conteúdo foram desenvolvidas duas aplicações dos conceitos de Lógica Fuzzy na área médica para diagnóstico de pacientes de Covid-19, onde se utilizou Modelagem Matemática e desenvolveu-se um sistema de inferência fuzzy onde foi utilizado o software Matlab ® para obtenção dos resultados. Em seguida, são apresentadas de acordo com a Base Nacional Comum Curricular competências e habilidades que podem ser desenvolvidas durante a introdução do assunto e suas aplicações desenvolvidas neste estudo. Por fim, é sugerida uma série de atividades, relacionadas a assuntos do cotidiano, a serem desenvolvidas em conjunto com os alunos para que possam praticar os conhecimentos adquiridos durante a apresentação do assunto e fortalecê-los.

**Palavras-chave:** Lógica Fuzzy; Modelagem Matemática; Pensamento Computacional; Ensino Médio; Covid-19; Sistema de Inferência Fuzzy; Base Nacional Comum Curricular.



## ABSTRACT

ALONSO, Vicente dos Santos. *Modelagem Fuzzy no Ensino de Matemática: o diagnóstico da COVID-19 e outras aplicações*. 2022. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2022.

Fuzzy Logic is a subject little explored in schools today. However, it presents a representation closer to human reasoning. This work seeks to bring an introduction of its concepts and applications that can be used in the classroom involving everyday issues of students. Having Boolean Logic as predominant in our society, due to its time of study, its concepts of False or True ("0 or 1") started not to meet certain demands that arose as progress was made in understanding the problems with the which one had to deal with. With the introduction of Fuzzy Logic, problems involving uncertainty began to have a mathematical basis, thus bringing solutions, when they could be better developed and applied in fields inaccessible to Boolean Logic, such as Artificial Intelligence. Mathematical Modeling concepts are also presented so that students can construct meaning for the concepts presented and have greater understanding during the presentation of others. Computational Thinking is also another important factor as it aims to work with students in conjunction with available technological tools such as computers, cell phones and other technological devices seeking to develop mathematical knowledge and critical thinking. To present the content, two applications of Fuzzy Logic concepts were developed in the medical area for the diagnosis of Covid-19 patients, where Mathematical Modeling was used and a fuzzy inference system was developed where Matlab <sup>®</sup> software was used to obtain the results. Then, are presented according to the National Common Core Curriculum skills and abilities that can be developed during the introduction of the subject and its applications developed in this study. Finally, a series of activities is suggested, related to everyday matters, to be developed together with students so that they can practice the knowledge acquired during the presentation of the subject and strengthen them.

**Keywords:** Fuzzy Logic; Mathematical Modeling; Computational Thinking; High school; Covid-19; Fuzzy Inference System; Common National Curriculum Base.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo de Tales que permitiu o cálculo da altura da pirâmide. . . . .	18
Figura 2 – Folha de rosto da primeira versão inglesa dos Elementos. . . . .	19
Figura 3 – Sistema Planetário de Ptolomeu. . . . .	19
Figura 4 – Uso da Perspectiva científica por Filippo Brunelleschi - Igreja de San Lourenzo.	20
Figura 5 – Pilares do Pensamento Computacional. . . . .	24
Figura 6 – a) Função característica do conjunto “crisp” adolescente. b) Função trapezoidal característica do conjunto nebuloso adolescente. . . . .	30
Figura 7 – Singleton . . . . .	31
Figura 8 – Gráfico dos conjuntos fuzzy para Cansaço. . . . .	32
Figura 9 – Número fuzzy "em torno de 4". . . . .	37
Figura 10 – Número fuzzy Trapezoidal. . . . .	38
Figura 11 – Gráfico de Temperatura para o grau Febre . . . . .	45
Figura 12 – Variáveis linguísticas dos batimentos por minuto: escala Borg. . . . .	45
Figura 13 – Sistema Baseado em Regras Fuzzy básico . . . . .	46
Figura 14 – Sistema Baseado em Regras Fuzzy ou Sistema de Inferência Fuzzy . . . . .	47
Figura 15 – Variáveis linguísticas dos batimentos por minuto: escala Borg. . . . .	48
Figura 16 – Implicação no Grau de Gripe . . . . .	51
Figura 17 – Agregação no Grau de Gripe . . . . .	52
Figura 18 – Processo de Inferência Mamdani . . . . .	54
Figura 19 – Exemplo de Implicação fuzzy na Inferência de Mamdani . . . . .	55
Figura 20 – Exemplo de agregação fuzzy na Inferência de Mamdani . . . . .	55
Figura 21 – Resultado de diferentes métodos de defuzzificação. . . . .	56
Figura 22 – Processo de Fuzzificação. . . . .	58
Figura 23 – Aplicação da Inferência Fuzzy. . . . .	59
Figura 24 – Aplicação do método Centro de Gravidade. . . . .	60
Figura 25 – Estrutura esquemática do Vírus COVID-19 . . . . .	62
Figura 26 – Máquina de Inferência Fuzzy do Diagnóstico de COVID-19 . . . . .	65
Figura 27 – Gráfico das Funções de pertinência da Febre . . . . .	66
Figura 28 – Gráfico das Funções de pertinência da Tosse Seca . . . . .	67
Figura 29 – Gráfico das Funções de pertinência do Cansaço . . . . .	68
Figura 30 – Gráfico das Funções de pertinência da Situação de Covid-19 . . . . .	69
Figura 31 – Base de Regras no MATLAB . . . . .	72
Figura 32 – Relação entre Cansaço, Febre e Situação de COVID-19 . . . . .	74
Figura 33 – Relação entre Cansaço, Tosse Seca e Situação de COVID-19 . . . . .	74
Figura 34 – Relação entre Febre, Tosse Seca e Situação de COVID-19 . . . . .	75
Figura 35 – Sistema do Índice de Gravidade do paciente com COVID-19 . . . . .	76

Figura 36 – Gráfico das Funções de pertinência da Febre . . . . .	77
Figura 37 – Gráfico das Funções de pertinência para Tosse Seca, Cansaço, Dor Persistente no Peito, Dor de Garganta e Falta de Ar . . . . .	78
Figura 38 – Gráfico das Funções de pertinência da Oxigenação . . . . .	78
Figura 39 – Gráfico das Funções de pertinência da Gravidade do paciente com Covid-19	79
Figura 40 – Base de Regras no MATLAB . . . . .	82
Figura 41 – Relação entre Febre, Cansaço ou Tosse Seca ou Dor de Garganta e Gravidade de COVID-19 . . . . .	83
Figura 42 – Relação entre Febre, Cansaço e Gravidade de COVID-19 . . . . .	83
Figura 43 – Relação entre Cansaço, Tosse Seca e Gravidade de COVID-19 . . . . .	84
Figura 44 – Relação entre Cansaço, Oxigenação e Gravidade de COVID-19 . . . . .	84
Figura 45 – Relação entre Falta de Ar, Dor Persistente no Peito e Gravidade de COVID-19	85
Figura 46 – Mapa Mental das Competências e Habilidades a serem desenvolvidas. . . . .	86
Figura 47 – Função de pertinência da Funcionalidade e da Segurança das Informações . . . . .	91
Figura 48 – Função de pertinência da Avaliação na loja de Aplicativos . . . . .	92
Figura 49 – Função de pertinência par Sugestão de Escolha . . . . .	93
Figura 50 – Sistema de Inferência Fuzzy para a Sugestão de Escolha . . . . .	95
Figura 51 – Função de pertinência para Nota de Dificuldade . . . . .	97
Figura 52 – Função de pertinência para Nota de Execução . . . . .	98
Figura 53 – Função de pertinência para Nota Final . . . . .	99
Figura 54 – Sistema de Inferência Fuzzy para a Avaliação de um(a) ginasta olímpico . . . . .	100

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Matriz Relacional . . . . .	40
Tabela 2 – Quadro da Suspeita de Gripe . . . . .	41
Tabela 3 – Quadro com os Parâmetros e Variáveis Linguísticas Fuzzy . . . . .	64
Tabela 4 – Quadro com as Variáveis e Parâmetros Linguísticos Fuzzy . . . . .	76
Tabela 5 – Quadro com a Base de Regras para Escolha do Aplicativo . . . . .	94
Tabela 6 – Quadro com as Regras Fuzzy para Avaliação ginasta . . . . .	99

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A.E.C	Antes da Época Comum
D.E.C	Depois da Época Comum
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PC	Pensamento Computacional
SF	Sem Febre
PF	Pouca Febre
F	Febre
MF	Muita Febre
PT	Pouca Tosse
TM	Tosse Moderada
MT	Muita Tosse
SC	Sem Cansaço
C	Cansaço
MC	Muito Cansaço
CN	Covid Negativo
SemC	Sem Comentários
CP	Covid Positivo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Breve histórico</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelagem Matemática no Ensino</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Pensamento Computacional</b>	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>FUZZY</b>	<b>28</b>
<b>3.1</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS</b>	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>Operações com conjuntos fuzzy</b>	<b>33</b>
<b>3.3</b>	<b>Números Fuzzy</b>	<b>35</b>
<b>3.4</b>	<b>Lógica Fuzzy</b>	<b>38</b>
3.4.1	Relações fuzzy	39
3.4.2	Composição entre relações fuzzy binárias	41
3.4.3	Operações T-norma e T-conorma	42
3.4.4	Variáveis linguísticas	43
<b>3.5</b>	<b>Sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF)</b>	<b>46</b>
3.5.1	Fuzzificação	47
3.5.2	Base de regras	48
3.5.3	Inferência fuzzy	49
3.5.3.1	Inferência de Mamdani	53
3.5.4	Defuzzificação	56
3.5.4.1	Defuzzificação: Centro de Gravidade	57
3.5.4.2	Defuzzificação: Centro dos Máximos	60
3.5.4.3	Defuzzificação: Média dos Máximos	61
3.5.5	Banco de Dados	61
<b>4</b>	<b>UMA APLICAÇÃO DE LOGICA FUZZY NO DIAGNÓSTICO DE COVID-19</b>	<b>62</b>
<b>4.1</b>	<b>Lógica Fuzzy e Diagnósticos Médicos</b>	<b>63</b>
<b>4.2</b>	<b>Aplicando o Diagnóstico da COVID-19 com 3 Variáveis</b>	<b>63</b>
4.2.1	Sistema Baseado em Regras Fuzzy para diagnóstico da Covid-19	64
4.2.2	Fuzzificação	65
4.2.3	Base de Regras	69
4.2.4	Inferência Fuzzy	71
4.2.5	Defuzzificação	72

<b>4.3</b>	<b>Índice de Gravidade de Paciente com COVID-19</b> . . . . .	<b>75</b>
4.3.1	Sistema Baseado em Regra Fuzzy (SRBF) . . . . .	76
4.3.2	Fuzzificação . . . . .	76
4.3.3	Base de Regras . . . . .	79
4.3.4	Inferência Fuzzy . . . . .	81
4.3.5	Defuzzificação . . . . .	82
<b>5</b>	<b>COMPETÊNCIAS E HABILIDADES A SEREM DESENVOLVIDAS NO ENSINO MÉDIO RELACIONADAS NA BASE NACIONAL CO- MUM CURRICULAR</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>5.1</b>	<b>Competências Desenvolvidas</b> . . . . .	<b>86</b>
5.1.1	Competência Específica 1 . . . . .	86
5.1.2	Competência Específica 2 . . . . .	86
5.1.3	Competência Específica 3 . . . . .	87
5.1.4	Competência Específica 4 . . . . .	87
<b>5.2</b>	<b>Habilidades Desenvolvidas</b> . . . . .	<b>87</b>
5.2.1	Habilidade (EM13MAT101) . . . . .	87
5.2.2	Habilidade (EM13MAT203) . . . . .	88
5.2.3	Habilidade (EM13MAT302) . . . . .	88
5.2.4	Habilidade (EM13MAT311) . . . . .	88
5.2.5	Habilidade (EM13MAT401) . . . . .	88
5.2.6	Habilidade (EM13MAT404) . . . . .	89
<b>6</b>	<b>RECORTE COM O CONTEÚDO DO ENSINO MÉDIO E APLICAÇÕES</b>	<b>90</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>101</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>102</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Matemática se faz presente no desenvolvimento humano e o seu estudo leva diversos benefícios para a sociedade de forma geral, por promover novas formas de pensar. O avanço tecnológico em diversas áreas como na Física, Economia, Engenharia, Biologia, Medicina, processos industriais, para mencionar apenas essas áreas, tem como propulsor diversos modelos matemáticos.

Muita das vezes tem-se como apresentam Damasceno e Rabelo (2019, p. 375) "[...] a ideia pré-concebida de que a matemática é difícil é tida como normal pelos alunos, essa ideia causa insegurança e medo, não pela falta de estudo mais porque aceitaram a matemática como sendo algo realmente difícil e entendida por poucos." Devido a isso muitos alunos se afastam do ensino da Matemática por se considerarem incapazes de assimilar os conhecimentos apresentados, fazendo com que posteriormente, quando estes são exigidos, causem problemas que poderiam ser mitigados caso não houvesse esta mística.

Ao considerar que a Lógica Booleana (clássica) que varia entre Falso ou Verdadeiro ("0 ou 1"), não se adéqua a linguagem natural que tem uma grande variedade de sentidos, muitas vezes ambíguos, não óbvios e imprecisos. Podemos exemplificar com a observação da massa de um objeto e classificá-lo como "muito leve, leve, pouco leve, pouco pesado, pesado ou muito pesado". A Lógica Clássica não permite esta gradação da linguagem; já na Lógica Fuzzy o faz, atribuindo valores aos adjetivos presentes na linguagem natural. Por esta razão, se faz presente em muitas áreas da sociedade automatizando sistemas trazendo maior segurança, confiabilidade e agilidade nos processos em que é utilizada. Um importante aspecto importante é que muitos processos são computacionais e trabalham com dados imprecisos, o que poderia gerar problemas se tratados por intermédio da Lógica Clássica. A utilização da Lógica Fuzzy é reconhecida como a melhor estratégia para esta abordagem. Esta, por exemplo, é usada em ar condicionados, câmeras, carros, máquinas de lavar e elevadores.

A Modelagem Matemática é um assunto que tem se tornado mais presente no Ensino da Matemática por trazer métodos distintos ao ensino tradicionalmente. A inovação busca proporcionar maior interação do aluno nas aulas de Matemática e fazer uso de problemas que envolvam a realidade dos alunos e de assuntos que sejam de seu interesse para gerar maior interação com conceitos matemáticos. No processo de desenvolvimento de modelos matemáticos pretende-se que os alunos participem de forma ativa e busquem desenvolver modelos dentre temas de seu interesse como jogos, futebol e redes sociais.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o "pensamento computacional envolve as capacidades de compreender, analisar, definir modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções de forma metódica e sistemática, por meio de desenvolvimento de



algoritmos." (BRASIL, 2018, p. 474). Estes conceitos se enquadram perfeitamente no processo de Modelagem Matemática que busca desenvolver diversas capacidades citadas e o desenvolvimento de um algoritmo se aproxima muita das vezes de um modelo matemático.

Temos neste trabalho o propósito de interligar os conceitos de Modelagem Matemática e Pensamento Computacional, por meio de problemas que envolvam sistemas baseados em regras fuzzy. Mais especificamente, temos por objetivos principais, estudar e pesquisar o problema da determinação do diagnóstico da Covid-19, estabelecendo um modelo matemático por meio da determinação do diagnóstico da Covid-19, estabelecendo um modelo matemático por meio da Lógica Fuzzy (Sistema Baseado em Regras Fuzzy) e, adicionalmente, avaliar a possibilidade de aplicar estes conceitos no Ensino Médio.

O desenvolvimento deste trabalho é feito dividido em seis capítulos, a saber.

1. Modelagem Matemática e Pensamento Computacional (PC): Será apresentado uma breve história da Modelagem Matemática e seus conceitos gerais, definições, seu uso e seus benefícios. Por último serão abordados conceitos sobre Pensamento Computacional.
2. Lógica Fuzzy: Serão abordados conceitos e definições conjuntos fuzzy, Lógica Fuzzy e seu Sistema Baseado em Regras Fuzzy (*SBRF*) que é composto por Fuzzificação, Base de Regras, Banco de Dados, Inferência Fuzzy e Defuzzificação.
3. Aplicação de Lógica Fuzzy no Diagnóstico de Covid-19: Neste capítulo serão aplicados os conceitos de Lógica Fuzzy ao problema da determinação do diagnóstico da COVID-19 a partir da análise e quantificação de sintomas utilizando o software MATLAB®.
4. No capítulo 5: Teremos uma relação dos assuntos abordados na pesquisa com a Base Nacional Comum Curricular.
5. Já no capítulo 6: Serão desenvolvidas atividades a serem abordadas em sala de aula envolvendo os assuntos de Lógica Fuzzy com assuntos do cotidiano dos alunos.
6. E por fim no capítulo 7: É onde serão apresentados as considerações finais da pesquisa.

1

---

<sup>1</sup> MATLAB ® (do inglês *Matrix Laboratory*) é um software de computação numérica de análise e visualização de dados. Embora seu nome signifique Laboratório de Matrizes, seus propósitos atualmente são bem mais amplos. Ele nasceu como um programa para operações matemáticas sobre matrizes, mas ao longo dos anos transformou-se em um sistema computacional bastante útil e flexível.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Matemática faz parte da história da humanidade e já na Idade Antiga era utilizada na resolução de problemas, como no caso da demarcação de terras inundadas pelo rio Nilo (BOYER; MERZBACH, 2019).

Teve seus conceitos formalizados ao longo do tempo, na forma de axiomas e teoremas, que dispõem de princípios, demonstrações, e algumas vezes de aplicações, sendo a Matemática Aplicada e a Modelagem Matemática áreas que caminham sempre de mãos dadas com o desenvolvimento da sociedade e da própria Matemática (BASSANEZI, 2002).

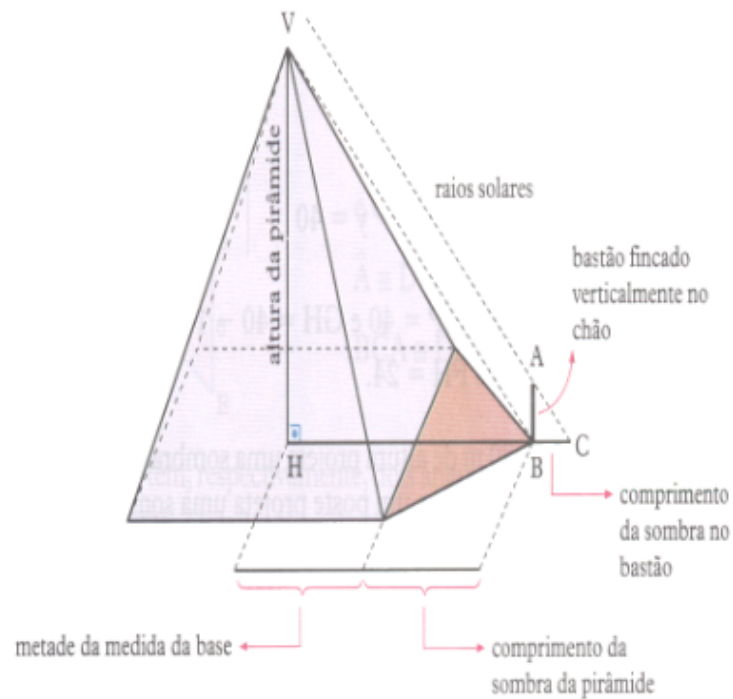
Para Biembengut e Hein (2000, p. 8) Como a Matemática está presente desde o início na sociedade, pode-se afirmar que "a Modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos."

### 2.1 Breve histórico

O trabalho de Schichl (2004) apresenta um breve resumo acerca do desenvolvimento da Modelagem Matemática na História, apresentando diversos fatos a respeito do avanço da Matemática atribuindo a Modelagem Matemática como parte primordial em seu desenvolvimento e citando o fato de que a Modelagem Matemática veio da cultura do antigo Oriente e Grega. O autor apresenta como primeiros modelos reconhecíveis os números (30.000 A.E.C.), com desenvolvimento seguinte tendo sido dado na Astronomia e na Arquitetura (4.000 A.E.C. à 2.000 A.E.C.). Cita a Babilônia, o Egito e a Índia como regiões onde usava-se a modelagem para melhorar a vida cotidiana e algoritmos para resolver problemas específicos.

Em Geometria também foram utilizados modelos. Por exemplo, Tales previu um eclipse solar em (585 A.E.C) e desenvolveu um método para calcular alturas medindo os comprimentos das sombras que se encontra apresentado na figura 1.

**Figura 1** – Modelo de Tales que permitiu o cálculo da altura da pirâmide.



Fonte: (PAULA; FERNANDES, 2009, p. 3).

Aristóteles, Eudoxo e outros matemáticos trouxeram grande desenvolvimento na Matemática nos 300 anos após Tales, culminando com Euclides que apresentou sua coleção de livros "Os Elementos", cuja capa da 1ª edição da versão inglesa se vê na figura 2. Estes livros abrigam a maior parte do conhecimento disponível na época e trouxeram consigo a primeira descrição axiomática concisa da Geometria e um tratado da Teoria dos Números. Eratóstenes de Cirene (250 A.E.C) aplicou a Matemática usando o conhecimentos disponíveis para calcular as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua, tendo seu feito mais conhecido o cálculo da circunferência da Terra por um Modelo Matemático/Geométrico (AVILA, 2004).

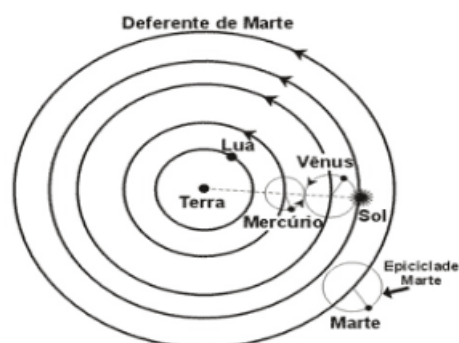
**Figura 2** – Folha de rosto da primeira versão inglesa dos Elementos.



Fonte: (ÁVILA, 2001, p. 2).

Diofanto de Alexandria (250 D.E.C.) trouxe em seus livros noções de Aritmética e desenvolveu os primórdios da Álgebra com base em simbolismo e na noção da variável. Ptolomeu (150 D.E.C.) apresentou um modelo matemático do sistema solar com círculos e epiciclos para prever o movimento do Sol, da Lua e dos planetas e este era tão preciso que só em 1619, Kepler encontrou um modelo superior e mais simples que é válido até hoje. Na figura 3 observa-se este sistema.

**Figura 3** – Sistema Planetário de Ptolomeu.

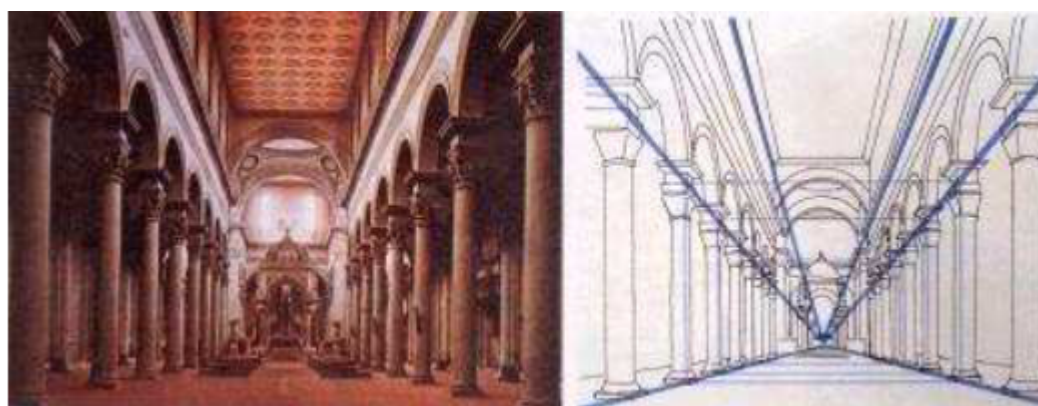


Fonte: (FERREIRA et al., 2013, p. 7).

Uma dos principais avanços na Matemática se deu pelo desenvolvimento dos números Indo-Árabicos (como são conhecidos hoje em dia) ao final do século VIII, tendo o matemático árabe Al-Khwarizmi como grande referência. Foram utilizados de forma independente na Ásia para fazer cálculos e para aplicações na vida real no comércio, agrimensura e irrigação.

Artistas como o pintor Giotto (1267 – 1336) e o arquiteto renascentista e escultor Filippo Brunelleschi (1377 – 1446) iniciaram um novo desenvolvimento de princípios geométricos, como por exemplo a perspectiva que pode ser observada na figura 4.

**Figura 4** – Uso da Perspectiva científica por Filippo Brunelleschi - Igreja de San Lourenzo.



Fonte: (PAIVA, 2015, p. 4).

Apesar do grande desenvolvimento que fora produzido por Diofanto e Al-Khwarizmi o uso sistemático de variáveis foi feito por Viète (1540 – 1603) quando ele passou a usar letras como parâmetros nas equações. No entanto, demorou mais de 300 anos até Cantor e Russel formalizarem o conceito de variáveis, quando seu verdadeiro papel na formulação de variáveis na teoria matemática foi totalmente compreendido.

A Modelagem Matemática mostra-se assim como área de suma importância que obteve contribuições não apenas para a Matemática mas permeia outras áreas como a Física, onde modela problemas de movimentos, a Biologia, na qual é útil para previsão de populações e a Economia, onde facilita previsões orçamentárias, trazendo consigo soluções que antes não eram possíveis. Com o avanço tecnológico (principalmente o computacional) novas ferramentas surgiram, possibilitando obter desempenhos superiores e cálculos mais precisos tornando a Modelagem Matemática cada vez mais presente em soluções do cotidiano mesmo que implicitamente, tornando-se uma área de constante desenvolvimento na Matemática.

## 2.2 Modelagem Matemática no Ensino

Em sua forma tradicional, no ensino de Matemática o professor é visto como detentor do conhecimento e o aluno como receptor. E, sem a conexão do conteúdos vistos em sala de

aula com o cotidiano, tornam-se frequentes indagações como: "para que serve isso?", "onde irei aplicá-los?".

A Modelagem Matemática vem de forma concreta para contribuir neste aspecto trazendo problemas reais para discussão em sala de aula, escolhidos pelos professores ou sugeridos pelos Alunos trazendo assim maior imersão nas aulas.

É importante ressaltar a visão de (STILLMAN, 2007, p. 465) que

"[...] para os professores que romperam com o método tradicional, a elaboração de experiências didáticas envolve a escolha de situações de modelagem adequadas. Nem todas as situações precisam ser reais e nem todas as situações reais são bons modelos. Há também o risco de que os alunos venham a acreditar que tudo o que é real é bom e tudo o que é teórico é ruim. Além disso, com modelos do mundo real, é importante que sensibilizemos os alunos para as suposições que fazemos na realidade das situações gerais".

A partir disso Burak (2010) caracteriza algumas etapas do processo de Modelagem Matemática e sugere também as seguintes etapas para a abordagem:

- Escolha do tema;
- Pesquisa exploratória;
- Levantamento dos problemas;
- Resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo Matemático no contexto do tema;
- Análise crítica das soluções.

Tendo estas etapas papel substancial para o desenvolvimento do assunto, este, quando bem escolhido, se possível fazendo parte da realidade dos alunos, pode gerar maior imersão deles na proposta.

Já Arseven (2015), apresenta alguns motivos para aplicar Modelagem Matemática no ensino. Modelos Matemáticos existem ao nosso redor, especialmente é possível encontrá-los em dispositivos tecnológicos. Se faz necessário uma forma de Modelagem adequada as qualificações dos alunos durante sua preparação como cidadãos responsáveis que passam a fazer parte da sociedade. Tendo como características principais:

- Ajudar os alunos a compreender melhor o mundo;
- Suportar Aprendizagem Matemática (fornecendo motivação, justificando a necessidade dos conceitos e dando significado à aprendizagem.);

- Assegura o desenvolvimento de vários conceitos matemáticos qualificações e atitudes precisas;
- Fornece suporte suficiente para a estrutura de Matemática.

Entretanto, proporcionar um processo de ensino calcado na Modelagem Matemática, Bassanezi (2002) traz uma série de diretrizes com diversos aspectos relevantes:

- Dar condições aos professores para mudanças no conceito de prática educativa, liberando-os de alguns mitos com respeito ao uso de calculadoras, rigor matemático, encadeamento de assuntos, avaliação etc;
- Desenvolver motivações para ações inovadoras que despertem a criatividade;
- Valorizar o conhecimento matemático no contexto global e seu poder de atuação em situações particularizadas;
- Valorizar os recursos humanos disponíveis, explorar e desenvolver o talento dos educadores para que se sintam capazes de contribuir com a comunidade em que trabalham;
- Ter em mente a interdisciplinaridade, aliando a matemática às outras ciências para que sirva como instrumento de compreensão e de possíveis modificações da realidade;
- Inter-relacionar fatores experimentais e teóricos, isto é, não perder de vista a própria essência da "atitude matemática";
- Levantar em conta as realidades específicas de cada região e os interesses dos estudantes, visando uma maior motivação e uma participação efetiva destes na comunidade ou meio mais amplo do qual fazem parte como cidadãos. Isto não significa adotar a tese popular de que "a Ciência de um país em desenvolvimento deva ser regional" o que seria um erro uma vez que a Ciência ou busca explicações universais, a partir de dados observáveis, ou não é Ciência.

Vale ressaltar que alguns aspectos são necessários para que sejam bem desenvolvidas as atividades e alguns obstáculos são encontrados no Modelo Educacional atual. Em seu livro Bassanezi (2002) elenca alguns aspectos:

- Obstáculos instrucionais – Os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A Modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo. Por outro lado, alguns professores têm dúvida se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino de Matemática, salientando que tais componentes tendem a distorcer a estética, a beleza e a universalidade da Matemática. Acreditam, talvez por comodidade, que a Matemática deva preservar sua

"precisão absoluta e intocável sem qualquer relacionamento com o contexto Sócio-Cultural e Político." Bassanezi *apud* (D'AMBROSIO, 1993).

- Obstáculos para os estudantes – O uso de Modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. Os alunos estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos e quando são colocados no centro do processo de Ensino-Aprendizagem, sendo responsáveis pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, a aula passa a caminhar em ritmo mais lento.
- A formação heterogênea de uma classe pode ser também um obstáculo para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo. Também o tema escolhido para Modelagem pode não ser motivador para uma parte dos alunos provocando desinteresse.

Sendo Modelagem Matemática é um campo no qual atribui soluções a diversos problemas no mundo real e tem se tornado cada vez mais constante em áreas da Sociedade/Acadêmicas tais como Crescimento Populacional, Física, Biologia, Química, Computação e Economia. Ao abordamos, através da Modelagem Matemática, um problema real não podemos pretender encontrar uma solução exata e definitiva. Temos que aceitar que as respostas aproximadas são as que teremos e que por isso devemos desenvolver métodos que nos forneçam as melhores aproximações, em cada caso. Vale ressaltar que um modelo pode ser muito bom para um determinado problema, mas não prestar para outro problema, com características diferentes.

Historicamente, a Modelagem Matemática vem se desenvolvendo por meio de novas tecnologias e tornando os modelos mais próximos da realidade. O uso de computadores e celulares que estão cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas, possuem diversos aplicativos que fazem uso de modelos matemáticos robustos que descrevem por meio de algoritmos uma série de informações para as pessoas e empresas tais como: Mapas interativos, softwares de reconhecimento facial e digital, algoritmos de buscas tais como (*Google, Yahoo*), de Músicas e Vídeos (*Youtube, Spotify, TikTok*) que absorvem informações e mapeiam os gostos sugerindo os de seu gosto e também os de Interação Social (*Facebook, Instagram, Telegram e Whatsapp*) que utilizam algoritmos parecidos com o anterior.

Atualmente, há uma preocupação com diversas questões sobre o modelo educacional aplicado nas escolas, sendo assim diversos pesquisadores tem buscado formas de imersão e desenvolvimento que possam trazer melhor imersão nas aulas. Em relação à Matemática surgiam propostas para implementar aulas que pudessem integrar disciplinas e trazer problemas mais reais para que os alunos desenvolvam uma conexão entre o cotidiano e o conhecimento escolar.



## 2.3 Pensamento Computacional

Figura 5 – Pilares do Pensamento Computacional.



Fonte: (RIBEIRO; FOSS; CAVALHEIRO, 2017, p. 4).

Esta seção busca trazer uma abordagem sobre Pensamento Computacional (PC), área que tem se desenvolvido de forma acelerada nos últimos anos na figura 5 podemos ver algumas das áreas que estão diretamente relacionadas ao PC. PC é definido por (WING, 2011) uma pesquisadora relevante neste campo como "O Pensamento Computacional é o processo de pensamento envolvido na formulação de problemas e suas soluções, de modo que as soluções sejam representadas de uma forma que possam ser efetivamente realizadas por um agente de processamento de informações". Sendo de maneira informal apresentado que o Pensamento Computacional descreve a atividade mental na formulação de um problema para admitir uma solução computacional. A solução pode ser realizada por um humano ou máquina, ou mais geralmente, por combinações de humanos e máquinas.

Em sua tese (BRACKMANN, 2017, p.29) aborda diversos pesquisadores e define o PC como:

O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente.

A Base Nacional Comum Curricular (2018) traz uma abordagem de pensamento computacional ligada ao ensino, sendo assim necessário trazer uma abordagem sobre tendo em

vista que este trabalho visa contribuir para a educação brasileira, esta apresenta PC como área a ser desenvolvida por meio da Matemática, nas áreas da Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística. Salientando a importância dos algoritmos e fluxogramas do PC que podem ser explorados como objetos de estudo dessa. Frisa também a importância da habilidade relativa a Álgebra que é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. Também diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores a serem desenvolvidos por PC:

- **Pensamento Computacional:** envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos, e
- Utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade.

Sendo PC uma área que pode ser integrada com outras, Barcelos e Silveira (2012), baseando-se no trabalho de Wing (2006), propõe agrupar competências específicas sob o nome de pensamento computacional, definido através das seguintes características:

- *Conceituar ao invés de programar.* Resolver um problema aplicando o pensamento computacional significa reduzir problemas grandes e aparentemente insolúveis em problemas menores e mais simples de resolver. Isso exige a capacidade de pensar de forma abstrata e em múltiplos níveis, e não a mera aplicação de técnicas de programação;
- *É uma habilidade fundamental e não utilitária.* O pensamento computacional não é uma habilidade mecânica ou utilitária, mas algo que permite a resolução de problemas diversos utilizando um recurso oblíquo na sociedade atual – os computadores – e por isso deveria ser desenvolvido por todos os estudantes;
- *É a maneira na qual pessoas pensam, e não os computadores.* A resolução de problemas através do pensamento computacional é um tratamento específico do problema de forma que ele possa ser resolvido por computadores, e não uma redução do raciocínio para simular o processamento do computador;
- *Complementa e combina a Matemática e a Engenharia.* A definição de Wing considera o aporte da Matemática e da Engenharia para a Computação, e reconhece as particularidades trazidas pelo enfoque computacional;
- *Gera ideias e não artefatos.* O pensamento computacional não deve ter necessariamente como resultado final a produção de software e hardware, e reconhece que os conceitos fun-

damentais da Computação estarão presentes para resolver problemas em vários contextos do cotidiano;

- *Para todos, em qualquer lugar.* Por fim, o pensamento computacional pode ser útil para todas as pessoas, em diversas aplicações.

Ela argumenta que introduzir o pensamento computacional no ensino básico também significa fomentar o interesse pela área de Computação, mostrando sua versatilidade e relevância na resolução de problemas do mundo atual.

Outra importante abordagem é dada à cerca da integração que Pensamento Computacional é trazida por de Souza e Javaroni (2019) em seu artigo baseado em *et al* Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) que PC pode ser desenvolvido nos processos de ensino e aprendizagem de diversas áreas de conhecimento, logo, tendo o intuito de vinculá-lo com a Modelagem Matemática, visto que nas aulas práticas de Matemática pode haver uma contextualização da Matemática, cuja compreensão possa ser "como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o "fazer" Matemática em sala de aula".

Em seu artigo Wing (2006) define 4 pilares para o pensamento computacional:

1. Decomposição: dividir um problema complexo em pequenas partes, a fim de solucioná-las com mais facilidade;
2. Reconhecimento de padrões: como a própria expressão define, ajuda na identificação de aspectos comuns nos processos;
3. Abstração: analisa elementos que têm relevância, diferenciando-os daqueles que podem ser deixados de lado;
4. Algoritmos: reúne todos os pilares já citados e envolve a criação de um grupo de regras para a solução de problemas.

Isto é, a ideia de reformular problemas que aparentam ser complexos e transformá-los em algo capaz de ser compreendido, focando, para isso em cada uma de suas fases a fim de lidar com as incertezas que muitas vezes os cercam.

Outra visão importante é dada por Brackmann (2017) em sua tese que se baseia no trabalho de Wing (2006), na qual a abstração "é o conceito mais importante do Pensamento Computacional, pois o processo de abstrair é utilizado em diversos momentos", tais como:

- Na escrita do algoritmo e suas iterações;
- Na seleção dos dados importantes;
- Na escrita de uma pergunta;

- Na alteridade de um indivíduo em relação a um robô;
- Na compreensão e organização de módulos em um sistema".

Vale ressaltar a gama de benefícios que Pensamento Computacional pode gerar na vida das pessoas, tais como emprego, compreensão do mundo, transversalidade em diferentes áreas, alfabetização digital, produtividade, programação ajuda no aprendizado de outras disciplinas, inclusão de minorias, diminuição de limitações físicas e trabalho em equipe.

Dessa forma Pensamento Computacional e Modelagem Matemática andam juntos e desempenham um papel importante no desenvolvimento do aprendizado de diversas disciplinas e contribuem com o despertar do interesse do aluno.

### 3 CONJUNTOS E LÓGICA FUZZY

Neste capítulo serão abordados conceitos matemáticos, aplicados explorando os conjuntos e Lógica Fuzzy que dão base a todas as aplicações abordadas nos capítulos seguintes.

#### 3.1 CONCEITOS BÁSICOS

A incerteza é algo comum ao ser humano, tendo em vista que o raciocínio lhe é inerente. Com isso, o uso da Lógica Booleana (binária) baseada em valores de "falso ou verdadeiro" e em computação como "0 ou 1", se torna limitada para ser usada em aspectos de certeza ou incerteza gradativa. Por exemplo, ao classificar a altura de uma pessoa com 1,75 m, ao fazer uso da Lógica Booleana só poderíamos classificá-la como "Alta ou Baixa" já em Lógica Fuzzy poderia ser classificada como "Muito Baixa, Baixa, Um pouco Baixa, Alta e Muito Alta".

Para (TOLEDO; COSENZA, 2004, p. 2):

[...] seres humanos assimilam e usam dados fuzzy, regras difusas (fuzzy) e informações imprecisas, pois é justamente como se tornam aptos a tomar decisões sobre situações que se mostram governadas pela casualidade. O cérebro humano raciocina em um ambiente aonde os fatos são conhecidos apenas parcialmente, baseando suas decisões em informações imprecisas, ambíguas ou incompletas, como por exemplo: a velocidade é elevada ou o ar está muito quente.

A medida que houve desenvolvimento tecnológico, sistemas inteligentes passaram a ser criados tendo por base os conceitos da Lógica Fuzzy. No campo da Matemática Zadeh (1965) desenvolveu os conceitos de conjuntos e lógica fuzzy, dando assim uma abordagem não binária diferente do que é feito na lógica convencional. Dando assim suporte para grandes desenvolvimentos nos campos da indústria e saúde.

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função: sua função característica, cuja definição é dada a seguir.

**Definição 3.1.** *Seja  $U$  um conjunto e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Desta forma,  $\chi$  é uma função cujo domínio é  $U$  e a imagem está contida no conjunto  $\{0, 1\}$ , com  $\chi_A(x) = 1$  indicando que o elemento  $x$  está em  $A$ , enquanto  $\chi_A(x) = 0$  indica que  $x$  não é elemento de  $A$ . Assim, a função característica descreve completamente o conjunto  $A$

já que tal função indica quais elementos do conjunto universo  $U$  são elementos também de  $A$ . Entretanto, existem casos em que a pertinência entre elementos e conjuntos não é precisa, isto é, não sabemos dizer se um elemento pertence efetivamente a um conjunto ou não. Por exemplo, consideremos o subconjunto dos números reais "próximos de 10".

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ próximo de } 10\}.$$

Atribuindo os seguintes valores 1000 e 10,01 pode-se afirmar que estes pertencem a  $A$ ? A resposta para esta pergunta é incerta pois não é possível afirmar objetivamente quando número é próximo de 10, isso vai depender da norma utilizada para definir "próximo".

**Definição 3.2.** *Seja  $U$  um conjunto (clássico)  $F$  um subconjunto fuzzy de  $U$  conhecido também como conjunto nebuloso é caracterizado pela existência de uma função*

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1],$$

*pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ . O índice  $F$  na função de pertinência é usado em analogia à função característica de subconjunto clássico, conforme Definição 3.1.*

O valor  $\varphi_F(x) \in [0, 1]$  indica o grau com que o elemento  $x$  de  $U$  está no conjunto fuzzy  $F$ ;  $\varphi_F(x) = 0$  e  $\varphi_F(x) = 1$  indicam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de  $x$  ao conjunto fuzzy  $F$ .

Do ponto de vista formal, a definição de subconjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra-domínio da função característica, que é o conjunto  $\{0, 1\}$ , para o intervalo  $[0, 1]$ . Nesse sentido, podemos dizer que um conjunto clássico é um caso particular de um dado conjunto fuzzy, cuja função de pertinência  $\varphi_F$  é sua função característica  $\chi_F$ . Um subconjunto clássico, na linguagem fuzzy, costuma ser denominado por subconjunto crisp.

**Exemplo 3.1.1.** *Para observarmos a diferença entre os conjuntos fuzzy e crisp, consideremos que a idade em que uma pessoa é considerada adolescente varia dos 13 aos 17 anos. Podemos observar esta idade sendo abordada por conjuntos crisp e fuzzy:*

*Ao ser abordado por conjuntos clássicos (crisp)  $A$ , sua função característica é descrita por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 13 \leq x \leq 17 \\ 0, & \text{se } 13 < x \text{ ou } x < 17. \end{cases}$$

*Por outro lado, e para melhorar a compreensão do conceito "adolescente", é razoável considerar também que indivíduos com 11 anos ou que acabaram de completar 19 anos não*

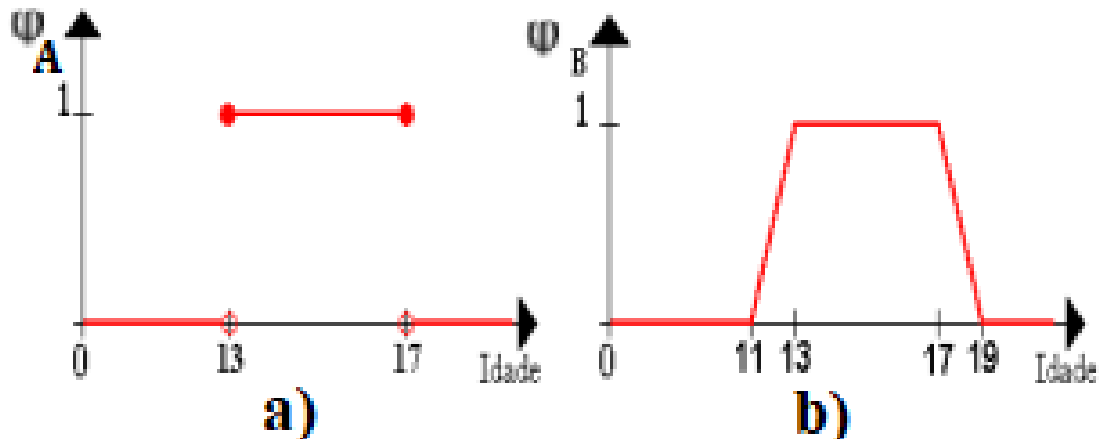
estão muito longe do conceito em questão. Assim, para descrever esse conjunto por conjunto fuzzy  $B$ , podemos descrever a função de pertinência da seguinte forma

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 13 < x \leq 17 \\ \frac{x-11}{2} & \text{se } 11 < x \leq 13 \\ \frac{19-x}{2} & \text{se } 17 < x \leq 19 \\ 0, & \text{se } x \leq 11 \text{ ou } x > 19 \end{cases}.$$

Para observar esse novo aspecto, um critério menos rigoroso poderia ser observado, de modo que diferentes indivíduos não pertenceriam ao conjunto com a mesma intensidade, ou seja, haverá pessoas que pertenceriam mais ao conjunto dos adolescentes que outros. Quanto mais afastada do intervalo  $[13,17]$ , menor será seu grau de pertencimento ao grupo dos "adolescentes" teríamos assim "quase adolescente, adolescente, muito adolescente e não tão adolescente".

Observe que no caso  $B$  a pertinência da pessoa com idade entre  $[11, 13]$  este conjunto varia de forma crescente no intervalo de  $[0,1]$  e a pessoa com idade entre  $[17, 19]$  varia de forma decrescente no intervalo  $[0,1]$  como pode ser observado na "Figura 7" item  $b$ .

**Figura 6** – a) Função característica do conjunto "crisp" adolescente. b) Função trapezoidal característica do conjunto nebuloso adolescente.



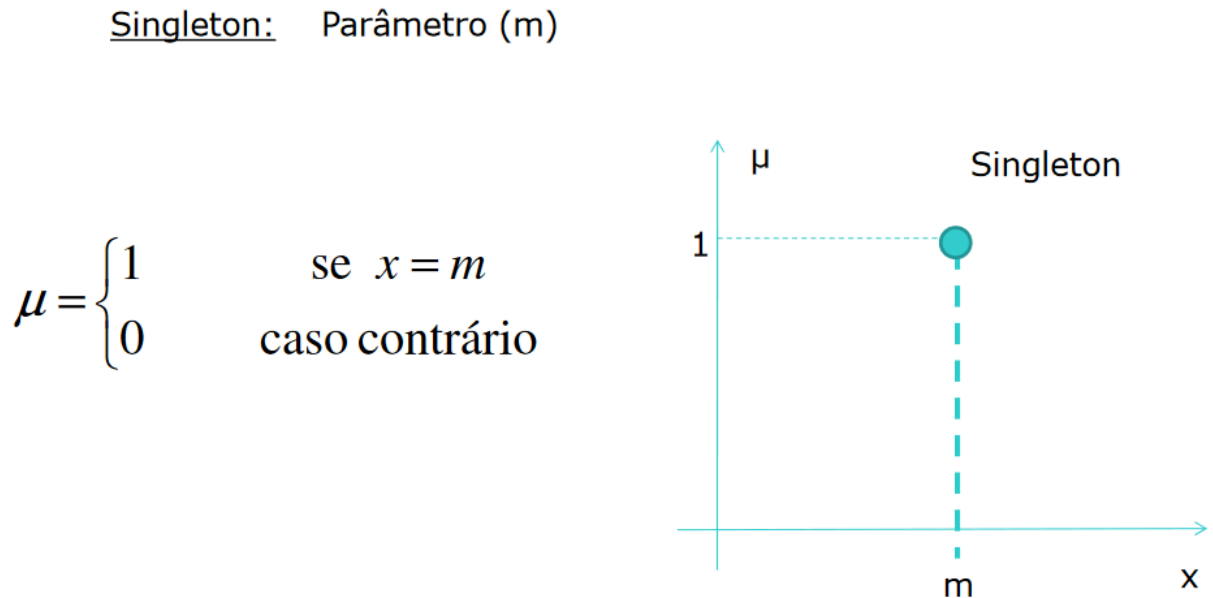
Fonte: (PINHEIRO, 2004, p. 8).

Um subconjunto Fuzzy  $F$  é composto de elementos  $x$  de um conjunto clássico  $U$ , providos de um valor de pertinência a  $F$ , dado por  $\varphi_F(x)$ . Podemos dizer que um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é dado por um conjunto (clássico) de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{ com } x \in U\}.$$

Onde cada par  $(x, \varphi_F(x))$  é chamado de singleton e tem  $x$  primeiro, seguido por sua pertinência em  $F$ ,  $\varphi_F(x)$ . Em conjuntos crisp o singleton é simplesmente o elemento  $x$  por si só. Em conjuntos fuzzy um singleton é duas coisas:  $x$  e  $\varphi_F(x)$ .

Figura 7 – Singleton



Fonte: (KERSCHBAUMER, 2018, p. 15)

O subconjunto clássico de  $U$  definido por

$$\text{supp}F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

é denominado suporte de  $F$  e tem papel fundamental na interrelação entre as teorias de conjuntos clássica e fuzzy.

O suporte de um conjunto nebuloso são os elementos cuja pertinência é maior do que zero.

**Exemplo 3.1.2.** O conceito de suporte vamos utilizar o exemplo abaixo que trata do cansaço de uma pessoa. Considerando três conjuntos fuzzy  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , que representam o conceito sem cansaço, cansaço e muito cansaço, respectivamente, apresentados na Figura 8.

As funções de pertinência que definem esses três conjuntos, definidos no intervalo  $[0, 10]$ , são dadas por:

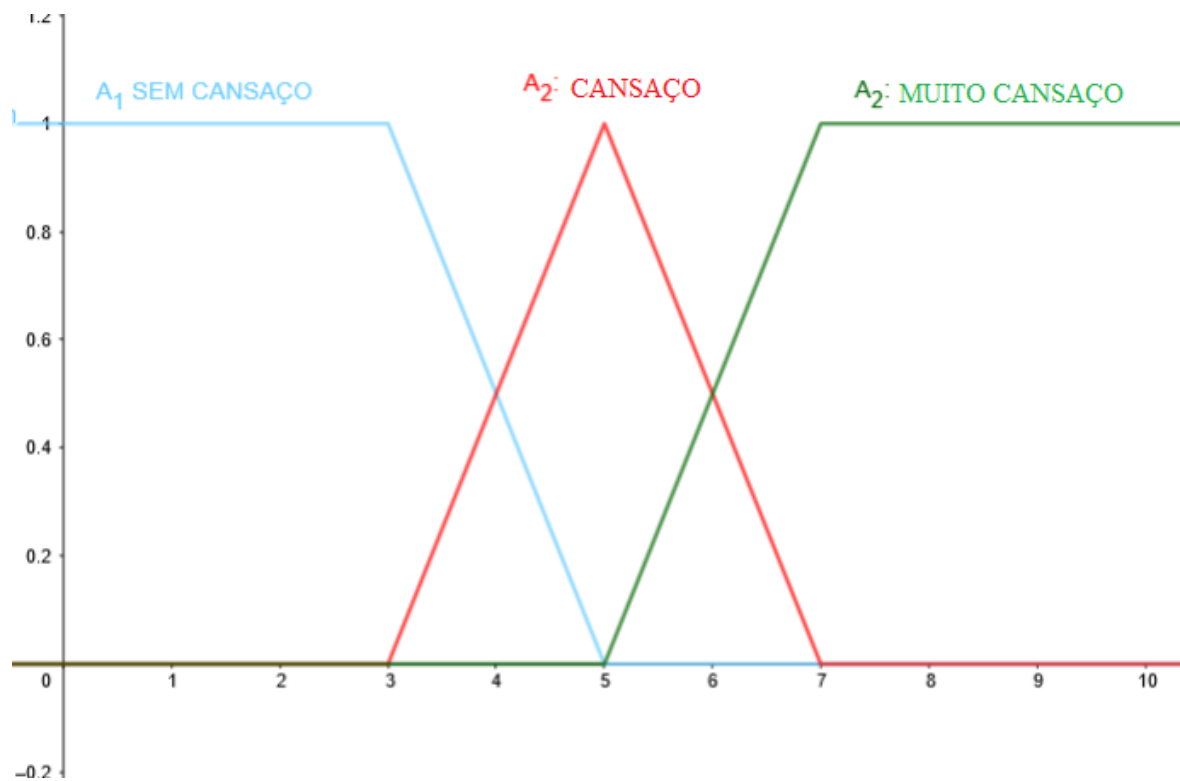


$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{se } x > 5 \end{cases},$$

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 3 \\ \frac{x-3}{2} & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ \frac{7-x}{2} & \text{se } 5 < x \leq 7 \\ 0, & \text{se } x > 7 \end{cases},$$

$$\varphi_{A_3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 5 \\ \frac{x-5}{2} & \text{se } 5 < x \leq 7 \\ 1, & \text{se } x > 7 \end{cases},$$

**Figura 8** – Gráfico dos conjuntos fuzzy para Cansaço.



Fonte: Autor, 2022.

Assim, os conjuntos suportes dos conjuntos fuzzy  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  são:

$$\begin{aligned} \text{supp}A_1 &= \{x \in [0, 10] | x < 5\} = [0, 5[, \\ \text{supp}A_2 &= \{x \in [0, 10] | 3 < x < 7\} = ]3, 7[, \\ \text{supp}A_3 &= \{x \in [0, 10] | x > 5\} = ]5, 10]. \end{aligned}$$

Outro conceito importante será abordado a seguir.

**Definição 3.3.** *Seja  $A$  um subconjunto fuzzy de  $U$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de  $A$  é o subconjunto clássico de  $U$  definido por*

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_F(x) \geq \alpha\}, \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O nível zero de um subconjunto fuzzy  $A$  é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de  $U$  que contém o conjunto suporte de  $A$ . Numa linguagem matemática,  $[A]^0$  é o fecho do suporte de  $A$  e é indicado por  $\overline{\text{supp}A}$ . É importante ressaltar que o conjunto  $\{x \in U : \varphi_A(x) \geq 0\} = U$  não é necessariamente igual a  $[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$ .

A partir da figura 8, podemos tomar um elemento  $x$  de  $[A]^\alpha$  que pertence ao conjunto  $A$ . Tomando o valor de  $\alpha = 0, 4$ , temos os seguintes conjuntos.

$$\begin{aligned} [A_1]^{0,4} &= \{x \in [0, 10] | x \leq 4, 2\}, \\ [A_2]^{0,4} &= \{x \in [0, 10] | 3, 8 \leq x \leq 6, 2\} \\ [A_3]^{0,4} &= \{x \in [0, 10] | x \geq 5, 8\}. \end{aligned}$$

Tomando  $\alpha = 0, 8$ , teremos os seguintes conjuntos a partir dos conjuntos fuzzy da Figura 7.

$$\begin{aligned} [A_1]^{0,7} &= \{x \in [0, 10] | x \leq 3, 6\}, \\ [A_2]^{0,7} &= \{x \in [0, 10] | 4, 4 \leq x \leq 5, 6\} \\ [A_3]^{0,7} &= \{x \in [0, 10] | x \geq 6, 4\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} [A_1]^{0,7} &\subset [A_1]^{0,4} \\ [A_2]^{0,7} &\subset [A_2]^{0,4} \\ [A_3]^{0,7} &\subset [A_3]^{0,4}. \end{aligned}$$

Logo, ao considerar um conjunto  $[A]^\alpha$  e um conjunto  $[A]^\beta$  tal que  $\alpha \leq \beta$  então  $[A]^\alpha \subset [A]^\beta$ .

### 3.2 Operações com conjuntos fuzzy

Como nos conjuntos crisp (clássicos), pode-se definir operações com conjuntos fuzzy, como união, interseção e complementação. Dados dois subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de  $U$ , tais que suas funções de pertinência são  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  respectivamente, podemos definir as operações de união, interseção e complementar a seguir.

**Definição 3.4.** A união entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{(A \cup B)}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U$$

Observamos que esta definição é uma extensão do caso clássico. De fato, quando  $A$  e  $B$  são subconjuntos clássicos de  $U$  temos:

$$\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases}.$$

Assim,

$$\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cup B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases} \longrightarrow \chi_{(A \cup B)} = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

**Definição 3.5.** A interseção entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{(A \cap B)}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U$$

Como no item anterior, temos uma extensão do caso clássico. Descrita da forma

$$\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ e } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases}$$

Assim,

$$\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cap B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases} \longrightarrow \chi_{(A \cap B)} = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

**Definição 3.6.** O complementar de  $A$  é o subconjunto fuzzy  $A'$  de  $U$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), x \in U$$

**Definição 3.7.** Os subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de  $U$  são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se  $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$  para todo  $x \in U$ .

Para mostrar as operações apresentadas acima com conjuntos fuzzy, usaremos o exemplo na figura 8 que representam os conceitos de sem cansaço, cansado e muito cansado para uma pessoa. Considerando uma pessoa  $X$  com nível de cansaço em 3, 5, temos que a pertinência

ao grupo sem cansaço é dado por  $\varphi_{A_1}(x) = 0,75$  e a pertinência ao grupo cansado é dada por  $\varphi_{A_2}(x) = 0,25$ . Utilizando as definições de operações de conjuntos, podemos realizar as seguintes operações

$$\varphi_{A_1 \cup A_2}(x) = \max\{0,25; 0,75\} = 0,75$$

$$\varphi_{A_1 \cap A_2}(x) = \min\{0,25; 0,75\} = 0,25$$

$$\varphi_{A_1'}(x) = 0,25$$

$$\varphi_{A_2'}(x) = 0,75.$$

Se faz necessário listar algumas propriedades principais envolvendo operações em subconjuntos fuzzy.

**Proposição 3.1.** *As operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:*

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$  e  $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap U = A$  e  $A \cup U = U$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$  e  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

### 3.3 Números Fuzzy

Números em geral descrevem uma quantidade, medida ou ordem. E por isso são muito utilizados por apresentarem uma informação qualitativa precisa. Já o valor numérico nem sempre é tão preciso pois depende dos instrumentos de medida, dos indivíduos que tomaram a medida e do objeto a ser mensurado.

**Definição 3.8.** *Um subconjunto fuzzy  $A$  é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual  $\varphi_A$  está definida é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e satisfaz às condições:*

- (i) todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são não vazios, com  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;
- (ii) todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ , e
- (iii)  $\text{supp}A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$  é limitado.

Denotamos os  $\alpha$ -níveis do número fuzzy  $A$  por

$$[A]^\alpha = [\alpha_1^\alpha, \alpha_2^\alpha], \forall \alpha \in [0, 1]$$

em que  $\alpha_1^\alpha$  e  $\alpha_2^\alpha$  correspondem respectivamente ao extremo inferior (um valor mínimo) e superior (valor máximo) do intervalo. Resumindo, todos os seus  $\alpha$ -níveis são intervalos fechados, limitados e não vazios.

Observa-se assim que todo número real  $r$  é um número fuzzy particular cuja função de pertinência é a sua função característica:

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases}$$

Sendo a família dos números fuzzy indicada por  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , logo o conjunto de números reais  $\mathbb{R}$  é um subconjunto (clássico ou crisp) de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

A seguir serão tratados dois dos números fuzzy mais comuns os números fuzzy triangulares e trapezoidais.

**Definição 3.9.** Um número fuzzy  $A$  é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{b-x}{b-u} & \text{se } u < x < b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O gráfico da função de pertinência de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo  $[a, b]$  e, como único vértice fora desta base, o ponto  $(u, 1)$ .

Deste modo, os números reais  $a, u$  e  $b$  definem o número fuzzy triangular  $A$  que será denotado pela terna ordenada  $(a; u; b)$  ou por  $a/u/b$ . Os  $\alpha$ -níveis desses números fuzzy têm a seguinte forma simplificada

$$[\alpha_1^\alpha, \alpha_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b] \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1]$$

Note que um número fuzzy triangular não é necessariamente simétrico já que  $b-u$  pode ser diferente de  $u-a$ , porém,  $\varphi_A(u) = 1$ . Podemos dizer que o número fuzzy  $A$  é um modelo matemático razoável para a expressão linguística "perto de  $u$ ". Para a expressão "em torno de

u" espera-se uma simetria. A imposição de simetria acarreta uma simplificação na definição de número fuzzy triangular. De fato, seja  $u$  simétrico em relação a  $a$  e  $b$ , isto é,  $u - a = b - u = \delta$ . Neste caso,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-u|}{\delta} & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

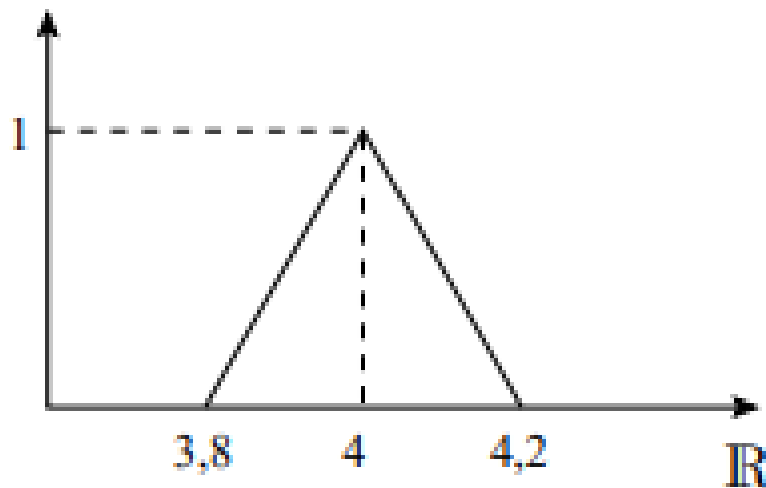
Para exemplificar um número fuzzy simétrico, tomemos um número "em torno de 4" que é representado na figura 9, e com a seguinte função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-4|}{0,2} & \text{se } 3,8 \leq x \leq 4,2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obteremos os  $\alpha$ -níveis desse subconjunto fuzzy, que são os indicados pelos intervalos  $[\alpha_1^\alpha, \alpha_2^\alpha]$ , onde

$$\alpha_1^\alpha = 0,2\alpha + 3,8 \quad e \quad \alpha_2^\alpha = -0,2\alpha + 4,2.$$

**Figura 9** – Número fuzzy "em torno de 4".



Fonte: (BASSANEZI; BARROS, 2010, p. 45).

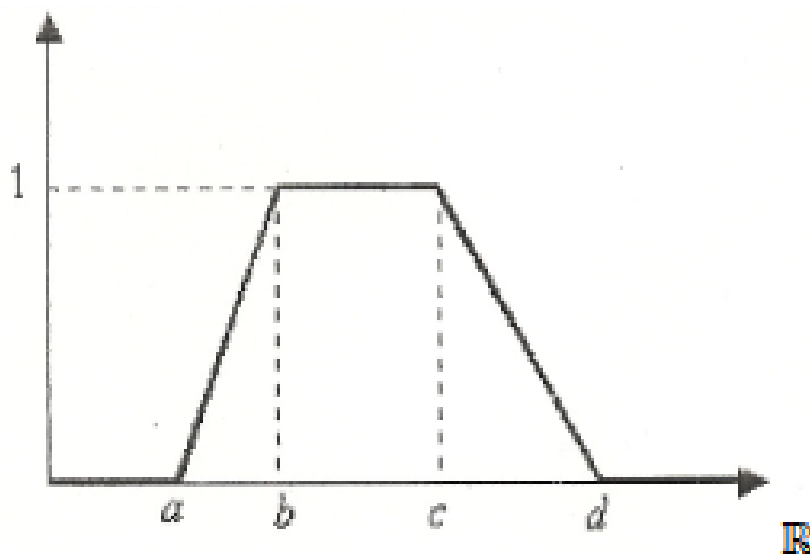
**Definição 3.10.** Um número fuzzy  $A$  é dito trapezoidal se  $\varphi_A$  for da forma

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x < d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os  $\alpha$  - níveis desses números fuzzy têm a seguinte forma simplificada

$$[\alpha_1^\alpha, \alpha_2^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d] \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1]$$

**Figura 10** – Número fuzzy Trapezoidal.



Fonte: Autor, 2022.

### 3.4 Lógica Fuzzy

A Lógica Clássica (Aristotélica) e a Lógica Booleana estão baseadas fundamentalmente nos princípios da identidade, princípio da não contradição e no terceiro excluído. Sendo assim, toda proposição é idêntica a si mesmo, uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo e toda proposição é verdadeira ou falsa sendo estas as únicas condições possíveis.

De outra forma na Lógica Fuzzy as proposições tem como valor de verdade um subconjunto fuzzy que pode ser linguisticamente considerado como falso, bastante falso, não completamente falso, verdadeiro, dentre outras possibilidades.

Sendo assim, se faz necessário uma abordagem ampla sobre os conjuntos fuzzy e suas aplicações no que consideraríamos como Lógica Fuzzy. Nas próximas seções serão abordados alguns aspectos importante sobre esse assunto.

### 3.4.1 Relações fuzzy

Para introduzirmos o assunto de relações fuzzy. Vamos abordar os conceitos em conjuntos clássicos que serão importantes para o entendimento do conteúdo a ser apresentado: Produto Cartesiano e Relação entre conjuntos.

**Definição 3.11.** *O produto cartesiano entre dois conjuntos clássicos  $U$  e  $V$  é dado pelo conjunto de pares ordenados  $(u, v)$  tal que  $u \in U$  e  $v \in V$ , ou seja*

$$U \times V = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}.$$

Note que  $U \times V \neq V \times U$ .

Assim, o produto cartesiano entre  $n$  conjuntos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  é dado pelo conjunto de  $n$ -tuplas ordenadas  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  com  $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n$ .

**Definição 3.12.** *Uma relação (clássica)  $\mathcal{R}$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ , é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ . Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos  $U_1 \times U_2$ , a relação é denominada relação binária sobre  $U_1 \times U_2$ . Se  $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$ , diz-se que  $\mathcal{R}$  é uma relação sobre  $U$ .*

Como a relação  $\mathcal{R}$  é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser representada por sua função característica

$$\chi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow \{0, 1\},$$

com

$$\chi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin \mathcal{R} \end{cases}.$$

O conceito matemático de relação fuzzy é formalizado a partir do produto cartesiano usual entre conjuntos, estendendo a função característica de uma relação clássica para uma função de pertinência.

No exemplo, abaixo, é possível verificar este conceito.

**Exemplo 3.4.1.** *Seja  $U = \mathbb{R}$  e  $V = \mathbb{R}$ , então  $U \times V = \mathbb{R}^2$ . Uma relação de um subconjunto qualquer de  $\mathbb{R}^2$ , por exemplo*

$$\mathcal{R}(U, V) = \{(x, y) | x \in U, y \in V, x \geq y\}$$

*que pode ser representado pela função característica*



$$\chi_{\mathcal{R}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Exemplo 3.4.2.** Seja  $U = \{1, 2\}, V = \{1, 4\}, U \times V = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4)\}$ . Uma relação possível é o subconjunto de  $U \times V$  em que o primeiro elemento é menor do que o segundo

$$\mathcal{R}(U, V) = \{(1, 4), (2, 4)\}.$$

No caso de conjuntos discretos, como os deste exemplo, a função característica pode ser representada como uma "matriz relacional".

**Tabela 1 – Matriz Relacional**

	1	4
1	0	1
2	0	1

Fonte: Autor, 2022

Dado que relações são conjuntos também, é possível estabelecer os operadores entre relações. Logo, as propriedades que valem para os operadores clássicos de conjuntos também se estendem para relações.

**Definição 3.13.** Uma relação fuzzy  $\mathcal{R}$ , sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ , é qualquer subconjunto fuzzy do produto cartesiano, dessa maneira, uma relação fuzzy  $\mathcal{R}$  é definida pela função de pertinência  $\varphi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$ .

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos,  $U_1 \times U_2$ , a relação é chamada de fuzzy binária sobre  $U_1 \times U_2$ .

Temos ainda que  $\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n)$  indica o grau com que os elementos da n-upla  $(x_1, \dots, x_n)$  se relacionam pela relação  $\mathcal{R}$ .

**Definição 3.14.** O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , é a relação fuzzy  $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  cuja função de pertinência é

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x) \wedge \varphi_{A_2}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde  $\wedge$  representa o mínimo dos mínimos das funções de pertinência, sendo  $\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o menor grau de pertinência dentre as funções de pertinência  $(\varphi_{A_1}(x), \dots, \varphi_{A_n}(x))$ .

**Exemplo 3.4.3.** Para diagnosticar um paciente, o médico parte de certas avaliações de sintomas (ou sinais) que são característicos de cada doença. Para gripe, por exemplo, são observadas características de "febre" e "cansaço", dentre outros sintomas, que variam de intensidade indicando o sintoma ou não da doença. Ao pegarmos dados de um hospital com quatro pacientes podemos avaliá-los segundo o quadro de febre e cansaço, como na tabela abaixo.

**Tabela 2** – Quadro da Suspeita de Gripe

Paciente	Febre ( $F$ )	Cansaço ( $C$ )
1	0,2	0,6
2	0,5	0,8
3	1	1
4	0,7	0,3

Fonte: Autor, 2022

Para o diagnóstico do paciente com gripe, será analisado o grau de pertinência ao conjunto do sintoma febre e ao conjunto cansaço em que ele se encontra. O paciente 2 Na tabela 2, por exemplo, tem uma temperatura  $x$  cuja função de pertinência ao conjunto febre é  $\varphi_F = 0,5$  e tem um valor  $y$  para cansaço que faz com que  $\varphi_C = 0,8$ . Sendo assim o diagnóstico do paciente 2 para a doença gripe é dado por:

$$\varphi_{gripe}(x, y) = \varphi_F(x) \wedge \varphi_C(y) = 0,5 \wedge 0,8 = 0,5.$$

Logo, o paciente 2 está no subconjunto dos febris e cansados, tendo o grau de pertinência 0,5, que coincide com o grau de pertinência de seu diagnóstico para gripe. Este número dá suporte ao profissional da área tome a melhor decisão para o tratamento.

Observe que caso adotássemos o conjunto clássico (crisp), teríamos por meio do produto cartesiano, apenas o paciente 3 estaria com gripe não levando em consideração os níveis da doença, o que mostra a vantagem para conjuntos fuzzy para este tipo de caso.

### 3.4.2 Composição entre relações fuzzy binárias

**Definição 3.15.** Considere  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  duas relações fuzzy binárias em  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente. A composição  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  é uma relação fuzzy binária em  $U \times W$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}(x, z) = \sup_{y \in V} [\min(\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_{\mathcal{S}}(y, z))]$$

Quando os conjuntos  $U, V$  e  $W$  são finitos, então a forma matricial da relação  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ , dada pela composição  $[max - min]$ , é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo. De fato, suponha que

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}; V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad e \quad W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$$

e que

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad e \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

De acordo com a Definição 3.15, a relação fuzzy binária dada pela composição  $[max - min]$  tem a forma matricial

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mp} \end{bmatrix}_{m \times p}$$

onde

$$t_{ij} = \sup_{1 \leq k \leq n} [\min(\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j))] = \sup_{1 \leq k \leq n} [\min(r_{ik}, s_{kj})]$$

### 3.4.3 Operações T-norma e T-conorma

Nas operações com conjuntos fuzzy utilizam-se os conceitos de norma triangular (T-norma) e co-norma triangular (T-conorma).

**Definição 3.16.** (T-norma) O operador  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\Delta(x, y) = x \Delta y$ , é uma t-norma, se satisfizer as seguintes condições:

- $t_1)$  elemento neutro :  $\Delta(1, x) = 1 \Delta x = x$ ;
- $t_2)$  comutativa :  $\Delta(x, y) = x \Delta y = y \Delta x = \Delta(y, x)$ ;
- $t_3)$  associativa :  $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$ ;
- $t_4)$  monotonicidade : se  $x \leq u$   $y \leq v$ , ento  $x \Delta y \leq u \Delta v$ ;

A operação t-norma estende o operador  $\wedge$  que modela o conectivo "e".

**Definição 3.17.** (*T-conorma*) O operador  $\nabla(x, y) = x \nabla y$  é uma *t-conorma*, se satisfizer as seguintes condições:

- $t_1)$  elemento neutro :  $\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$ ;
- $t_2)$  comutativa :  $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$ ;
- $t_3)$  associativa :  $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ ;
- $t_4)$  monotonicidade : se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , ento  $x \nabla y \leq u \nabla v$ ;

O operador *t-conorma*  $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  estende o operador  $\vee$  que modela o conectivo "ou".

Para representar a união e interseção de conjuntos fuzzy, utilizam-se respectivamente normas triangulares (T-nomas) e co-normas triangulares (T-conormas). Assim, utilizando-se os operadores mínimo como T-norma e máximo como T-conorma, têm-se:

- União de  $A$  e  $B$

$$\varphi_{(A \cup B)}(x) = \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x)$$

- Interseção de  $A$  e  $B$

$$\varphi_{(A \cap B)}(x) = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x)$$

#### 3.4.4 Variáveis linguísticas

Variáveis linguísticas são variáveis que possuem valores através de nomes de um conjunto fuzzy. Para exemplificar temos variável altura que pode ser expressa como alta, não muito alta, bastante alta e muito alta. Sendo assim bastante útil quando se lida com dados imprecisos.

Em seu livro Zimmermann (2011, p. 141) afirma que "ao recuar da precisão diante da complexidade avassaladora, é natural explorar o uso do que poderíamos chamar de variáveis linguísticas, ou seja, variáveis cujos valores não são números, mas palavras ou frases em uma linguagem natural ou artificial".

A motivação para o uso de palavras ou frases em vez de números é que as caracterizações linguísticas são, em geral, menos específicas do que as numéricas (ZADEH, 1975).

**Definição 3.18.** Uma variável linguística é caracterizada por uma *quíntupla*  $(x, T(x), U, G, M)$  na qual  $x$  é o nome da variável;

$T(x)$  (ou simplesmente  $T$ ) denota o conjunto de termos de  $x$ , que é, o conjunto de nomes de valores linguísticos de  $x$ , com cada valor sendo uma variável difusa denotada genericamente por  $X$  e abrangendo um universo de discurso  $U$  que tem a variável  $u \in U$ ;

$G$  é uma regra sintática (que geralmente tem a forma de uma gramática) para gerar o nome,  $X$ , de valores de  $x$ ; e

$M$  é uma regra semântica para associar a cada  $X$  seu significado,  $M(X)$ , que é um subconjunto difuso de  $U$ .

Um determinado  $X$  isto é, um nome gerado por  $G$  é chamado de termo.

Para facilitar o simbolismo a seguir, alguns símbolos terão dois significados sempre que a clareza permitir isso:  $x$  denotará o nome da variável ("o rótulo") e o nome genérico de seus valores. O mesmo será verdade para  $X$  e  $M(X)$ .

**Exemplo 3.4.4.** Seja  $X$  uma variável linguística com o rótulo "Febre" (ou seja, o rótulo dessa variável é "Febre", e os valores dela também serão chamados de "Febre") com  $U = [30, 40]$ .

Os termos desta variável linguística, que são novamente conjuntos fuzzy, poderiam ser chamados de "Sem Febre", "Pouca Febre", "Febre" e assim por diante. A variável base  $u$  é a temperatura em °C.  $M(X)$  é a regra que atribui um significado, ou seja, um conjunto fuzzy, ao termos

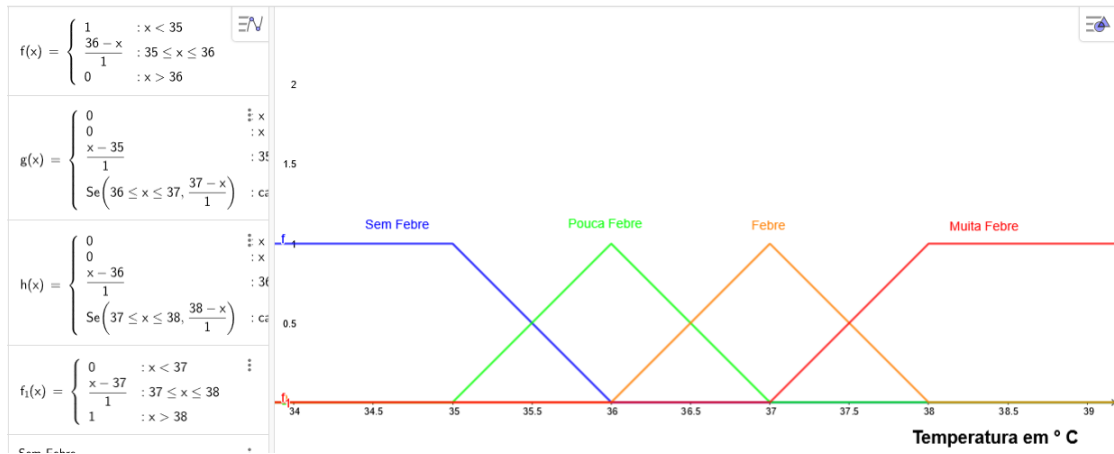
$$M_{Febre} = \{(u, \varphi_{Febre}(u)) | u \in [30, 45]\}$$

$T(x)$  definirá o conjunto de termos da variável  $x$ , por exemplo, no caso  $T_{Febre} = \{ Sem Febre, Pouca Febre, Febre, Muita Febre \}$  onde  $G(x)$  é uma regra que gera os (rótulos de) termos no conjunto de termos.

Temos então:

- $X$  : Temperatura para febre;
- Universo  $U$  :  $[0, 200]$ ;
- Variável Base  $x \in U$ , e
- Conjunto de termos:  $T_{Febre} = \{ Sem Febre, Pouca Febre, Febre, Muita Febre \}$

**Figura 11** – Gráfico de Temperatura para o grau Febre

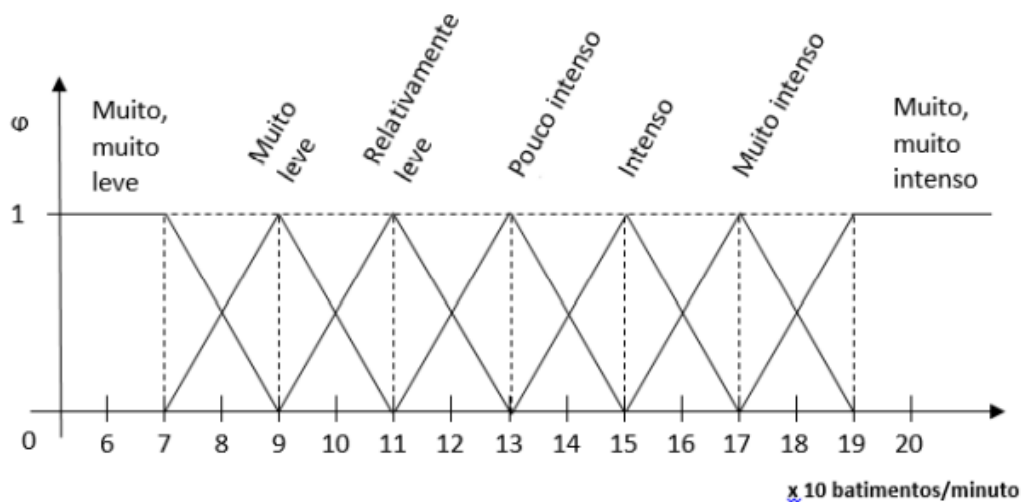


Fonte: Autor, 2022.

**Exemplo 3.4.5.** Em sua dissertação Gayer (2017, p. 34) traz o seguinte exemplo que mostra uma ferramenta para exemplificar variáveis linguísticas utilizando a escala Borg, um instrumento para analisar a percepção do esforço de uma pessoa ao realizar uma atividade física, com quantidade de batimentos cardíacos por minuto.

A escala Borg descreve as variáveis linguísticas de "muito, muito leve", "muito leve", "relativamente leve", "pouco intenso", "intenso", "muito intenso" "muito, muito intenso". Essas variáveis linguísticas estão representadas na Figura 15 a seguir.

**Figura 12** – Variáveis linguísticas dos batimentos por minuto: escala Borg.

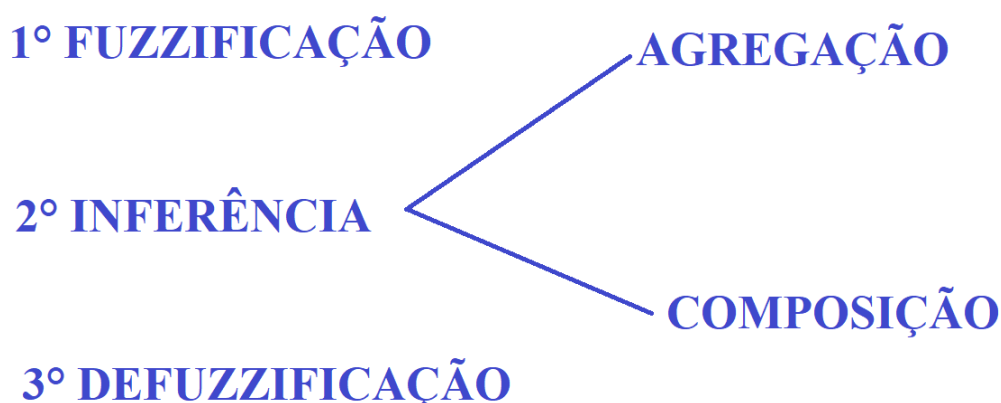


Fonte: (GAYER, 2017, p. 34).

### 3.5 Sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF)

Um sistema baseado em regras fuzzy, *SBRF*, é o que utiliza lógica fuzzy para tomar decisões utilizando dados, tendo como aspecto fundamental as funções de pertinência, gerando uma saída para cada entrada do sistema. Assim, possuem a habilidade de codificar conhecimento de forma próxima ao especialista, agilizando processos e diagnósticos.

**Figura 13** – Sistema Baseado em Regras Fuzzy básico



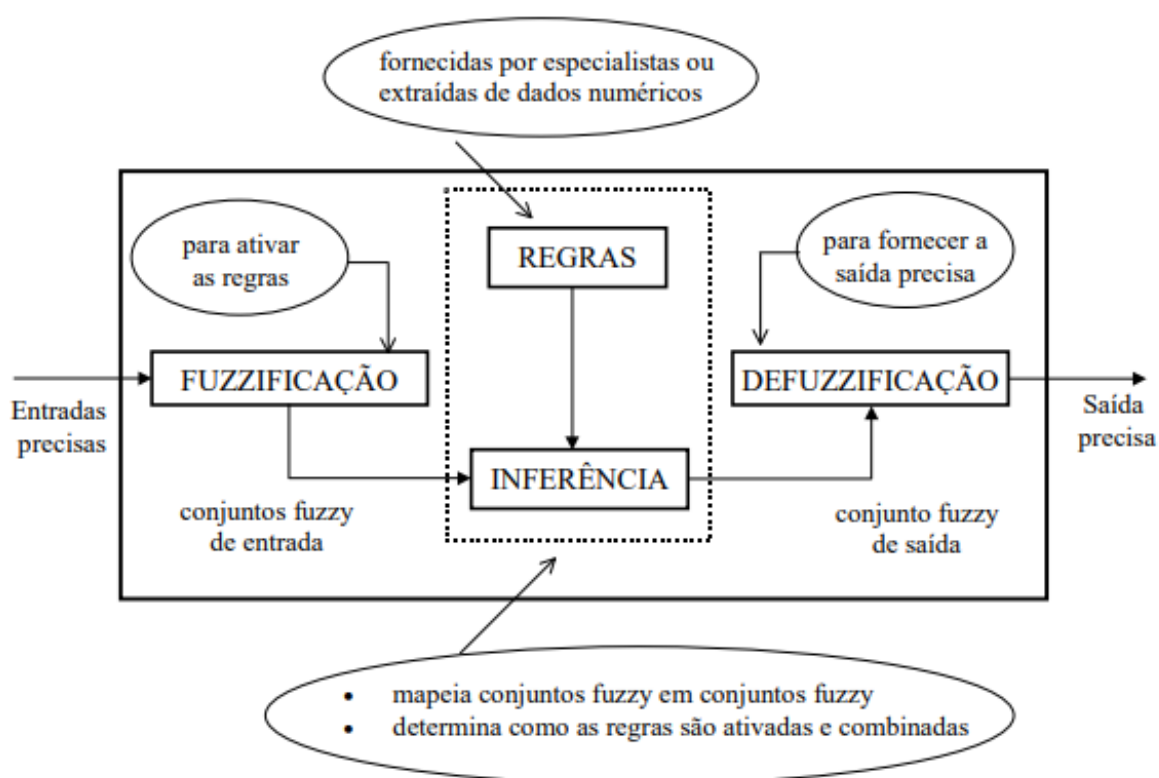
Fonte: Autor, 2022.

Na figura 13 podemos observar a estrutura de pensamento do SBRF, que segue os seguintes "passos" de raciocínio aproximado:

- O processo de "fuzzificação", ocorre na conversão da entrada crisp numa variável linguística usando as funções de pertinência armazenadas na base de conhecimento difuso.
- Na "inferência fuzzy" a base de regras (proposições) difusas do tipo SE-ENTÃO são definidas e analisadas paralelamente. Neste processo também ocorre a agregação onde é calculada a importância de uma determinada regra para a situação corrente (Parcela SE) e o processo de composição onde se calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída (Parcela ENTÃO). Após essa análise, há conversão da entrada difusa para uma saída difusa.
- Já a "defuzzificação" consiste em converter os dados fuzzy em valores numéricos precisos, utilizando vários métodos para encontrar a saída do sistema.

Na figura 14, Tanscheit (2004, p. 26), podemos ver de forma mais completa as etapas do SBRF.

**Figura 14** – Sistema Baseado em Regras Fuzzy ou Sistema de Inferência Fuzzy



Fonte: (TANSCHKEIT, 2004, p. 26).

O elemento Constantes na figura 14 introduzem de forma geral as etapas do *SBRF*, buscando gerar uma compreensão inicial sobre o assunto. A seguir serão dedicadas seções para tratar de forma específica cada processo em que se baseia o SBRF: fuzzificação, base de regras, inferência fuzzy e defuzzificação. Como pré-requisito para o que seguirá, abordaremos ainda o conceito de Banco de Dados.

### 3.5.1 Fuzzificação

A fuzzificação é uma parte importante do sistema pois é nela que ocorre a determinação dos valores de pertinência das variáveis de entrada e transformação de entradas crisp em valores difusos. Neste processo podem ser utilizadas funções de pertinência distintas para cada variável, sendo as mais usadas a triangular, trapezoidal e sino, podendo estas serem valoradas de acordo com a escala de Borg.

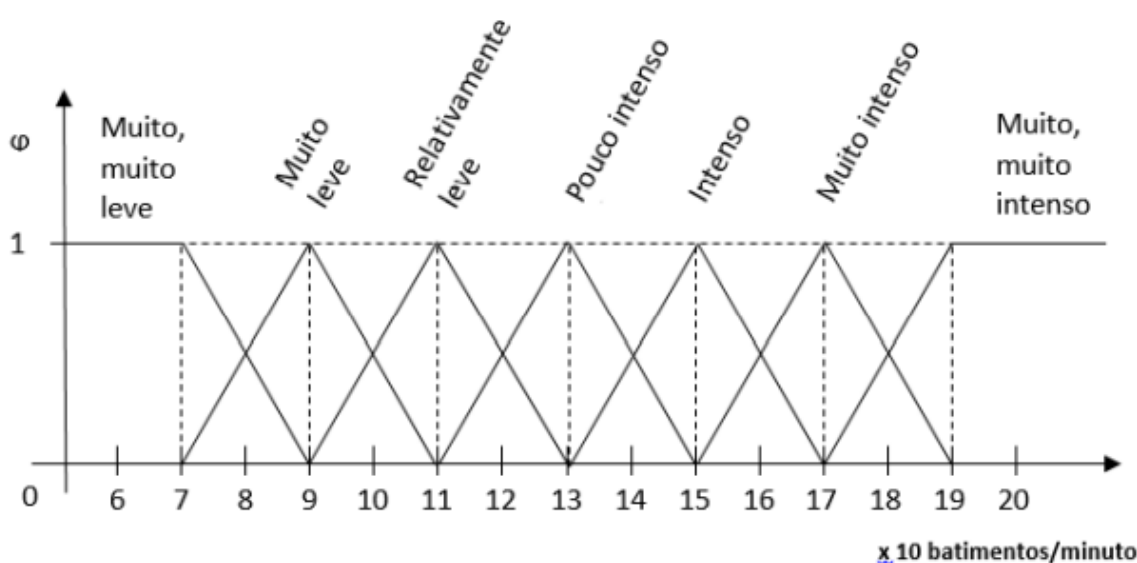
É na etapa de fuzzificação que se utilizam os dados do especialista e onde ocorre também a ativação das regras relevantes para uma situação específica.



### 3.5.2 Base de regras

Com a participação dos especialistas da área a ser modelada, é criada a base de regras que representa o conhecimento do controlador sobre as entradas. Dessa forma, as proposições fuzzy serão a parte central do controlador que indicará as "respostas" possíveis de acordo com a entrada apresentada. Para exemplificar, retomemos o exemplo da figura 15 que utiliza a escala Borg. Imaginando um exercício físico no paciente, um especialista poderia definir as seguintes regras:

**Figura 15** – Variáveis linguísticas dos batimentos por minuto: escala Borg.



Fonte: (GAYER, 2017, p. 34).

$R_1$ : **Se** exercício simples e esforço é muito, muito leve **então**, condição física do paciente é normal.

$R_2$ : **Se** exercício simples e esforço é muito leve **então**, condição física do paciente é normal.

$R_3$ : **Se** exercício simples e esforço é relativamente leve **então**, condição física do paciente é regular.

$R_4$ : **Se** exercício simples e esforço é pouco intenso **então**, condição física do paciente é regular.

$R_5$ : **Se** exercício simples e esforço é intenso **então**, condição física do paciente é irregular.

$R_6$ : **Se** exercício simples e esforço é muito intenso **então**, condição física do paciente é irregular.

$R_7$ : **Se** exercício simples e esforço é muito, muito intenso **então**, condição física do paciente é irregular.

### 3.5.3 Inferência fuzzy

Em seu livro Bassanezi e Barros (2010, p. 118) define que inferência fuzzy "é neste módulo que cada proposição fuzzy é "traduzida" matematicamente por meio das técnicas da lógica fuzzy. É onde se define quais t-normas, t-conormas e regras de inferência (que podem ser implicações fuzzy) serão utilizadas para se obter a relação fuzzy que modela a base de regras".

Outra definição interessante é apresentada por Charri, Junior e Silva (2011, p. 10) *et al* Wang (1996) em seu artigo:

[...] nesta etapa, as proposições (regras) são definidas e depois são examinadas paralelamente. No processo de inferência fuzzy, os princípios da lógica fuzzy são usados para combinar as regras fuzzy "SE-ENTÃO" (proposições condicionais) existentes na base de regras com os dados fuzzy de entrada. E o resultado final desta combinação é a região fuzzy de saída que está relacionada com a saída do processo.

Em notas de aula de Tedesco e Vasconcelos (2017) podem ser encontrados os seguintes passos da inferência fuzzy ativação do antecedente, implicação e agregação:

1. Ativação do antecedente: utiliza os graus de pertinência das condições difusas, determinados na fuzzificação e aplica os operadores difusos para obter o grau de verdade das regras.
2. Implicação: Obtém-se os valores de saída de cada regra e a obtenção de um conjunto difuso de saída para cada regra.
  - a) Mínimo:  $C_1 = \min(\varphi_{regra}, C)$ , onde  $C_1$  é o conjunto difuso de saída determinado pela aplicação da implicação e  $\varphi_{regra}$  é o grau de verdade da regra;
  - b) Produto:  $C_1 = \varphi_{regra} \times C$ , onde  $C$  é o conjunto difuso de saída existente no consequente da regra.
3. Agregação: Agrega os conjuntos difusos obtidos na implicação e obtém um único conjunto difuso que descreve a saída do sistema;
  - Pra quê?  
Porque se espera que o sistema difuso produza uma única decisão;
  - Como?  
Normalmente se utiliza o operador de união máximo descrita por

$$\varphi(x) = \max(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

- Mas, também pode ser utilizado, outro operador, o operador de união soma limitada

$$\varphi(x) = \min(1, \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x)).$$

**Exemplo 3.5.1.** Considerando, o exemplo 3.4.3 de um paciente com gripe usemos os gráficos das funções de pertinência nas figuras 8 e 11 que representam o cansaço e a febre de um paciente com suspeita de gripe. Tome para cansaço o seguinte valor 5,6 e para febre 35,6 °C, teremos então:

1. Ativação do antecedente (Passo 1):

- A Febre é Sem Febre com grau de pertinência 0,4;
- A Febre é Pouca Febre com grau de pertinência 0,6;
- A Febre é Febre com grau de pertinência 0;
- O Cansaço é Sem Cansaço com grau de pertinência 0;
- O Cansaço é Cansaço com grau de pertinência 0,3, e
- O Cansaço é Muito Cansaço com grau de pertinência 0,7;

Aplicando o operador difuso  $\varphi_{Febre \wedge Cansaço}(x_i) = \min[\varphi_{Febre}(x_i), \varphi_{Cansaço}(x_i)]$ . nas composição das proposições temos

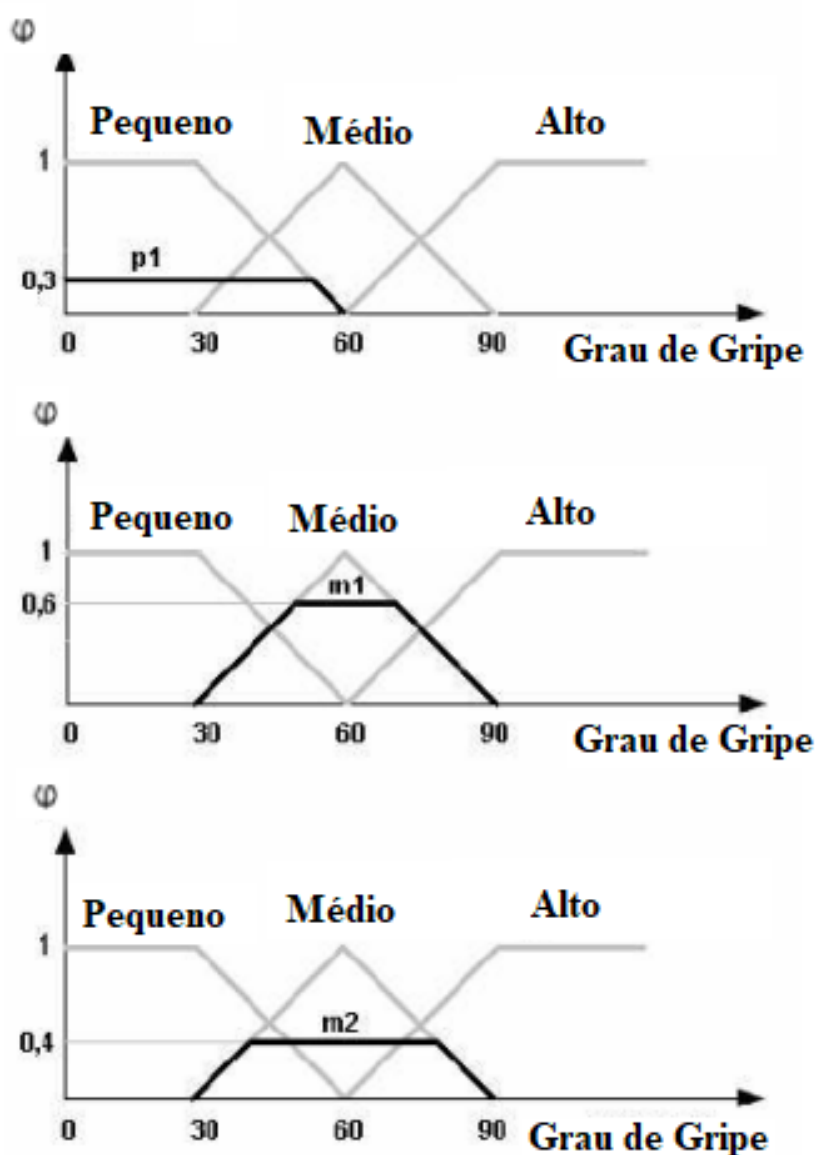
- Se a Febre é Sem Febre (0,4) e o Cansaço é Cansaço (0,3) então o grau de Gripe é Pequeno = 0,3 ( $P_1$ );
- Se a Febre é Pouca Febre (0,6) e o Cansaço é Muito Cansaço (0,7) então o grau de Gripe é Médio = 0,6 ( $M_1$ );
- Se a Febre é Sem Febre (0,4) e o Cansaço é Muito Cansaço (0,7) então o grau de Gripe é Médio = 0,4 ( $M_2$ ), e
- Se a Febre é Febre (0) e o Cansaço é Muito Cansaço (0,7) então o grau de Gripe é Alto = 0;

2. Implicação (Passo 2):

Realizando o cálculo dos valores difusos de cada, obtemos os seguintes resultados da implicação que podem ser vistos na figura 16.

- 0,3 pequeno identificado como  $P_1$ ;
- 0,6 médio identificado como  $M_1$ ;
- 0,4 médio identificado como  $M_2$ , e
- 0 é Alto mas, não participará do processo de inferência.

Figura 16 – Implicação no Grau de Gripe

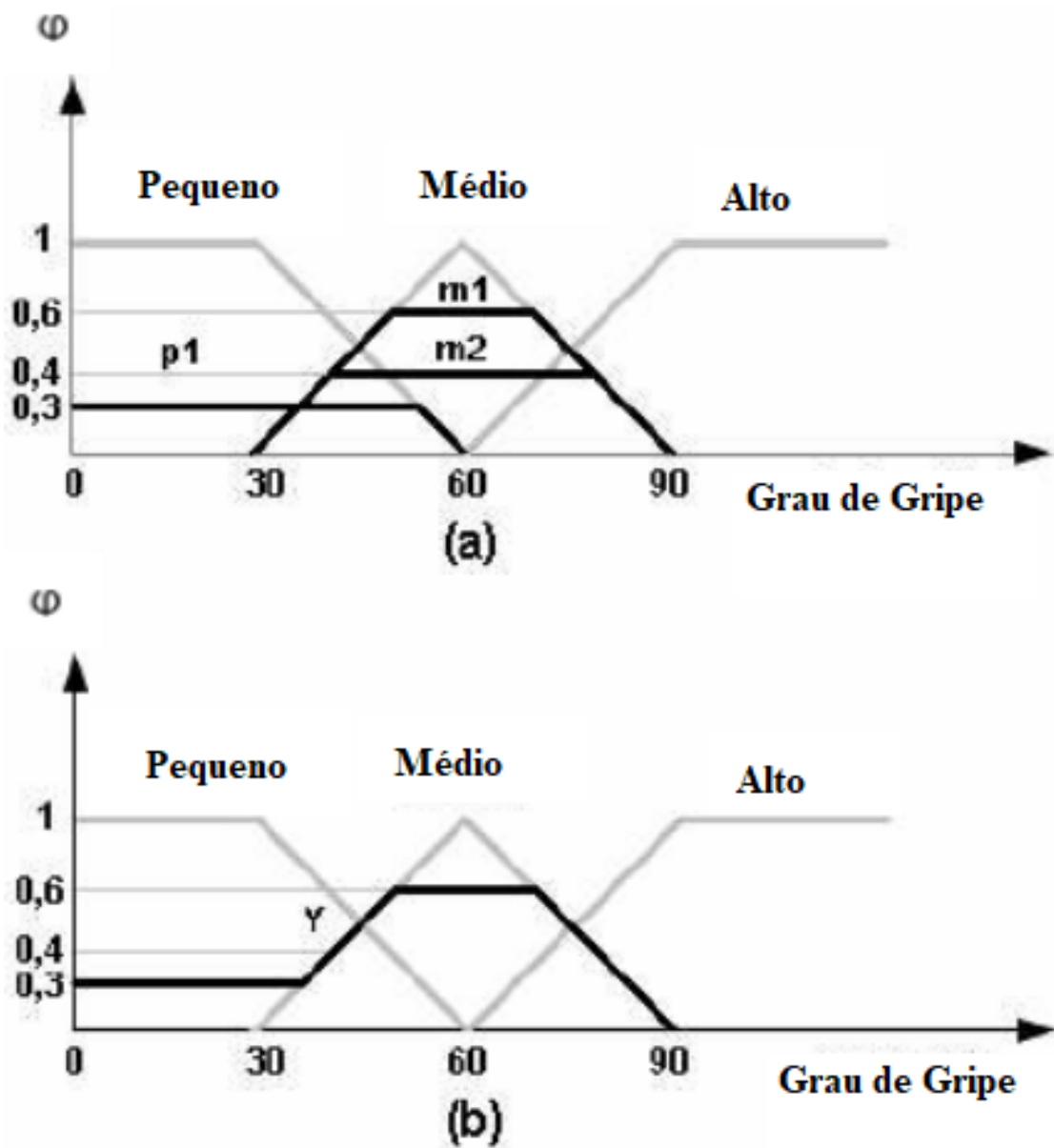


Fonte: Autor, 2022.

### 3. Agregação (Passo 3):

Por fim, iremos agregar os conjuntos difusos obtidos, gerando um único conjunto difuso que irá descrever a saída do sistema que pode ser visto na figura 17. No item (a) temos a agregação dos conjuntos obtidos e em (b) o resultado final com os "conjuntos" agregados gerando um único conjunto difuso.

Figura 17 – Agregação no Grau de Gripe



Fonte: Autor, 2022.

Vale ressaltar que quando se utiliza o *min* na etapa de implicação e o *max* na etapa de agregação, diz-se que foi utilizada a técnica *min* – *max* de inferência e quando se utilizam os operadores de soma limitada, diz-se que foi utilizada a técnica aditiva (ou cumulativa) de inferência.

Neste trabalho o método utilizado será o método de inferência de Mamdani, que será apresentado adiante.

### 3.5.3.1 Inferência de Mamdani

Por ser um dos métodos mais utilizados para se obter resultados a partir de regras fuzzy, o método de inferência Mamdani é amplamente aceito por capturar o conhecimento dos especialistas e conseguir sintetizar um conjunto de regras linguísticas Se-Então, além de nos permitir a descrição da experiência de forma mais intuitiva e humana.

De acordo com Bassanezi e Barros (2010, p. 121), do ponto de vista teórico, "Mamdani propõe uma relação fuzzy binária  $M$  entre  $x$  e  $u$  para modelar matematicamente a base de regras, por meio da regra de composição de inferência  $max - min$ " conforme o exemplo 3.5.1 especifiquemos:

- Em cada regra  $R_j$ , da base de regras fuzzy, a condicional "Se  $x$  é  $A_j$  Então  $u$  é  $B_j$ " é modelada pela aplicação  $\wedge$  (mínimo) que, erroneamente, costuma ser denominada por implicação de Mamdani;
- Adota-se a t-norma  $\wedge$  (mínimo) para o conectivo lógico "e". É possível observar graficamente no item (II) da figura 18 o processo ocorrendo da mesma forma que no exemplo 3.5.1, lembrando que sua função pode ser descrita por

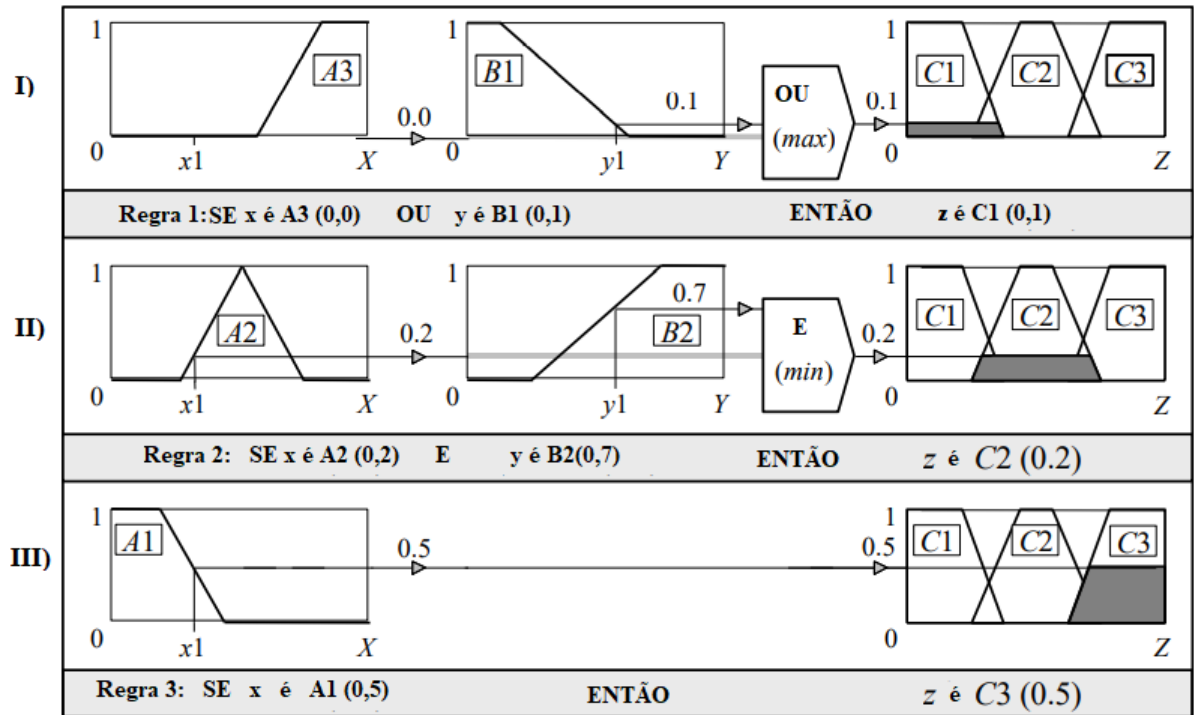
$$\varphi_{(A \cap B)} = \min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)]$$

- Para o conectivo lógico "ou" adota-se a t-conorma  $\vee$  (máximo) que conecta as regras fuzzy da base de regras. Neste caso o processo é visto no item (I) da figura 18 e descrito por:

$$\varphi_{(A \cup B)} = \max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)]$$

o item (III), temos somente uma variável de entrada.

Figura 18 – Processo de Inferência Mamdani



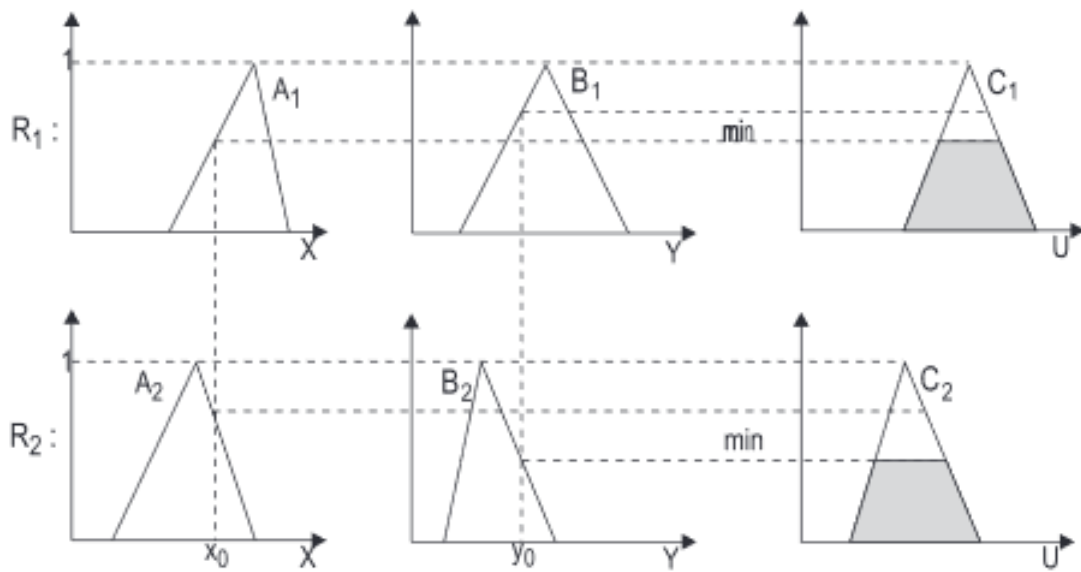
Fonte: (WILHELM, 2009, p. 24).

Formalmente, a relação fuzzy  $M$  é o subconjunto fuzzy  $X \times U$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_M(x, y) = \max_{1 \leq j \leq r} (\varphi_{R_j}(x, y)) = \max_{1 \leq j \leq r} [\varphi_{A_j}(x) \Delta \varphi_{B_j}(y)],$$

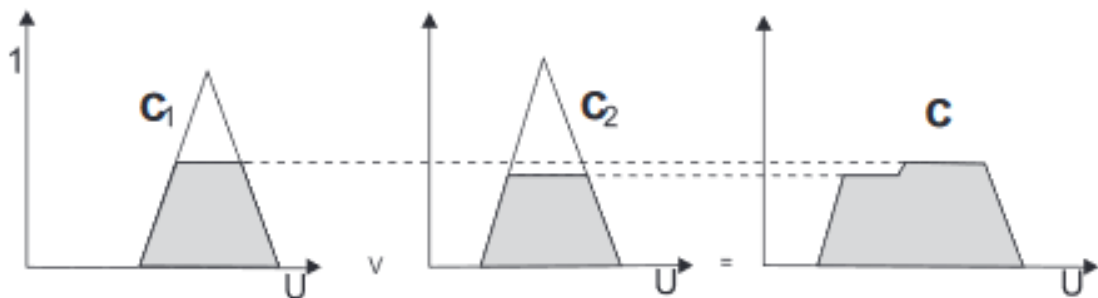
onde  $r$  é o número de regras que compõem a base de regras e,  $A_j$  e  $B_j$  são os subconjuntos fuzzy da regra  $j$ . Os valores  $\varphi_{A_j}(x)$  e  $\varphi_{B_j}(u)$  são interpretados como os graus com que  $x$  e  $u$  estão nos subconjuntos fuzzy  $A_j$  e  $B_j$ , respectivamente, de maneira que  $M$  nada mais é que a união dos produtos cartesianos fuzzy entre os antecedentes e os consequentes de cada regra.

**Figura 19** – Exemplo de Implicação fuzzy na Inferência de Mamdani



Fonte: (SILVA et al., 2011, p.26).

**Figura 20** – Exemplo de agregação fuzzy na Inferência de Mamdani



Fonte: (SILVA et al., 2011, p.26).

Para conclusão do *SBRF* é necessário após a inferência fuzzy que neste caso será usada a Mamdani realize-se o processo de Defuzzificação que irá trabalhar após a agregação dos resultados difusos, o que será visto na próxima subseção.



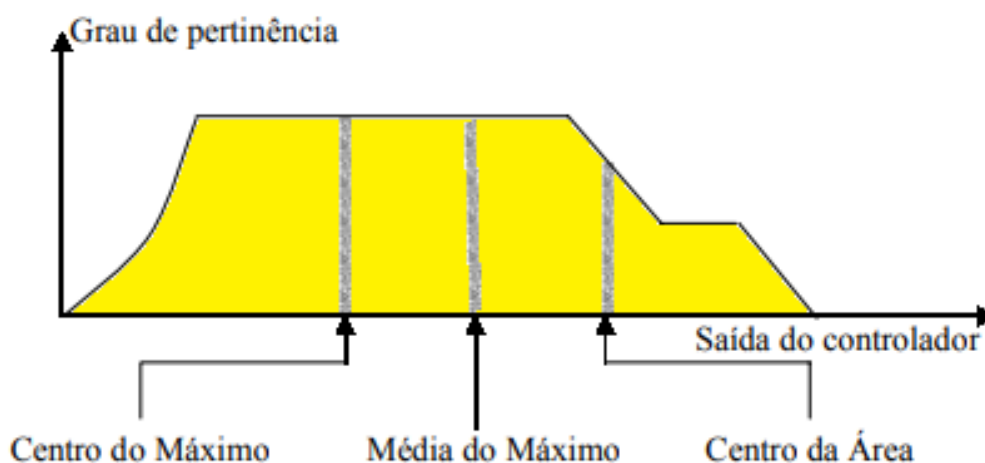
### 3.5.4 Defuzzificação

Na defuzzificação, tem-se o processo de se traduzir um conjunto fuzzy que foi inferido por regras fuzzy par um valor real.

Para Shaw e Simões (1999, p. 52) "O objetivo é obter um único valor numérico discreto que melhor represente os valores inferidos da variável linguística de saída, ou seja, a distribuição de possibilidades. Assim, a defuzzificação é uma transformação inversa que traduz a saída do domínio fuzzy para o domínio crisp".

O valor crisp a ser escolhido geralmente deve ser um elemento dos suportes dos conjuntos fuzzy a serem defuzzificados. No entanto, os critérios que são usados para encontrar esse elemento podem depender de bases muito diferentes: podem ser o tipo de inferência do qual o conjunto fuzzy é resultado, podem ser pontos especiais da pertinência das funções (por exemplo, máximos ou mínimos), podem ser a área abaixo das funções de pertinência ou pode ser outros indicadores. Na figura 21 a seguir é possível ver alguns desses casos.

**Figura 21** – Resultado de diferentes métodos de defuzzificação.



Fonte: (IVANQUI, 2005, p. 23).

Sendo assim o defuzzificador é um mapeamento de um conjunto nebuloso para um único ponto no universo de discurso. Ele é o elemento em um sistema nebuloso que nos permite transformar a saída de um banco de regras em um único ponto (valor numérico).

Temos como principais métodos de defuzzificação

- Centro de gravidade (centroide ou centro de área);

- Centro dos máximos, e
- Média dos máximos.

que serão vistos a seguir.

#### 3.5.4.1 Defuzzificação: Centro de Gravidade

Este método de defuzzificação é semelhante à média aritmética para uma distribuição de frequências de uma dada variável, com a diferença que os pesos aqui são os valores  $\varphi_B(u_i)$ , que indicam o grau de compatibilidade do valor  $u_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $B$ . O centro de gravidade dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy,

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)}$$

**Exemplo 3.5.2.** *O exemplo a seguir foi extraído das Notas de Aula de (ARAÚJO, 2013).*

*Um analista de projetos de uma empresa quer determinar o risco de um determinado projeto.*

*Possui os seguintes parâmetros:*

- *Quantidade de dinheiro, e*
- *Quantidade de pessoas envolvidas no projeto.*

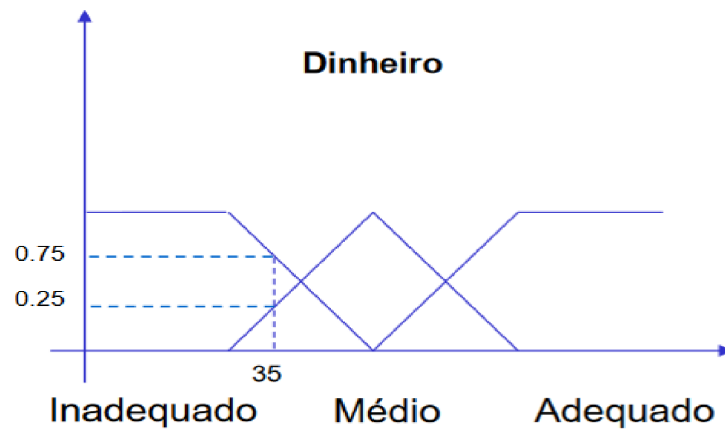
*E sua base de Regras:*

- 1. Se o dinheiro é adequado ou o número de pessoas é pequeno, então risco é pequeno (baixo).*
- 2. Se dinheiro é médio e o número de pessoas é alto, então risco é normal.*
- 3. Se dinheiro é inadequado, então risco é alto.*

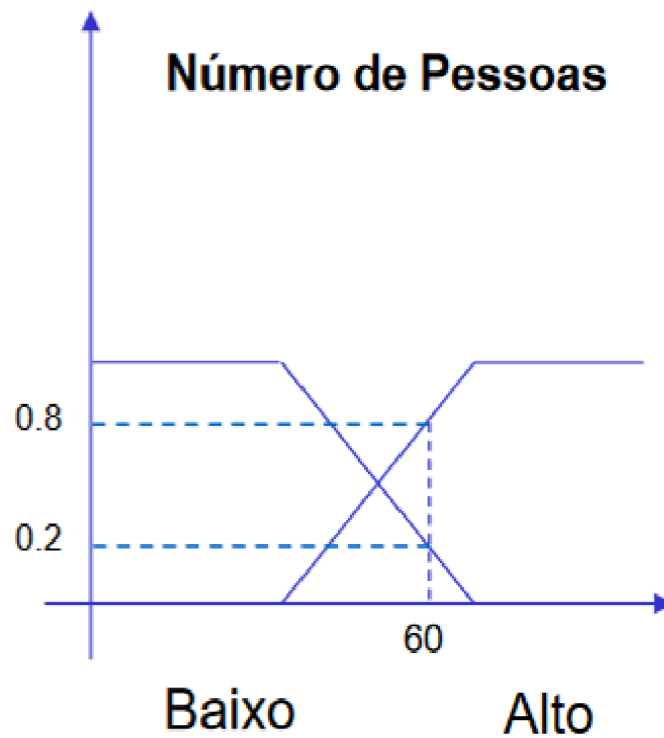
*- Problema a ser resolvido: Para dinheiro = 35% e pessoal = 60% , determinar o Risco.*

Figura 22 – Processo de Fuzzificação.

## □ Passo 1: Fuzzificar



$$\mu_i(d) = 0,75 \text{ \& } \mu_m(d) = 0,25$$



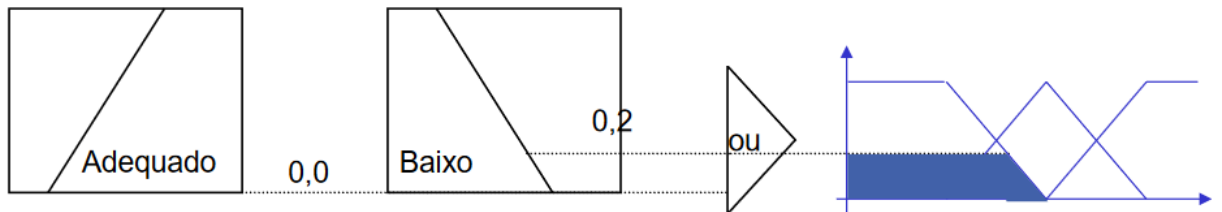
$$\mu_b(p) = 0,2 \text{ \& } \mu_a(p) = 0,8$$

Figura 23 – Aplicação da Inferência Fuzzy.

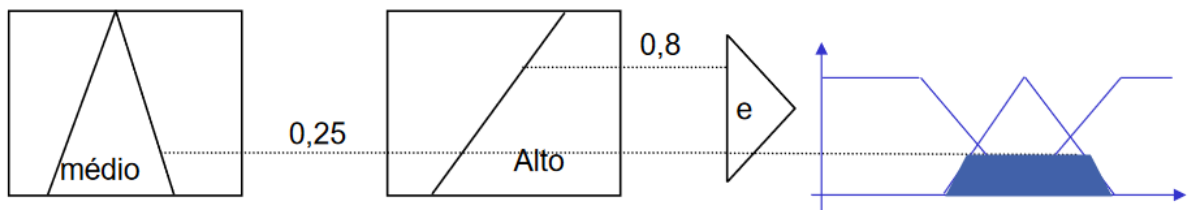
## □ Passo 2: Avaliação das regras

- Ou  $\rightarrow$  máximo e  $\rightarrow$  mínimo

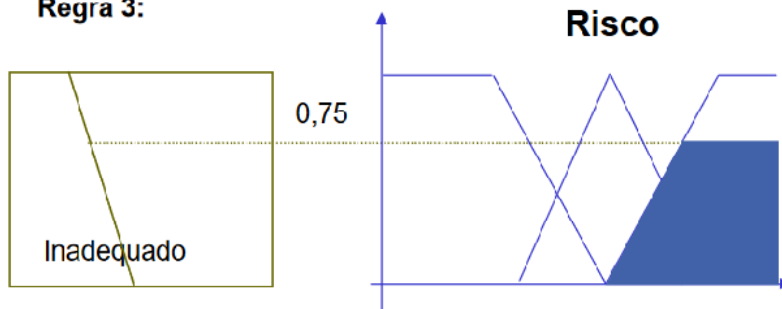
Regra 1:



Regra 2:

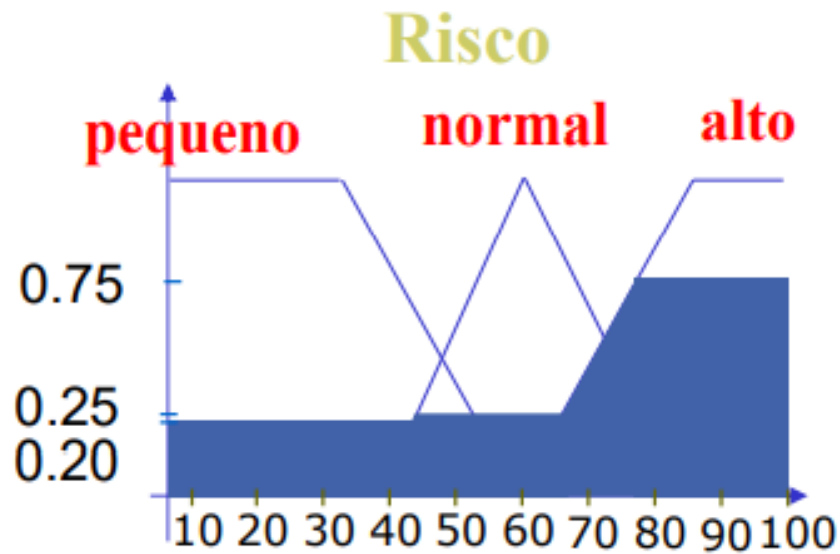


Regra 3:



Fonte: (ARAÚJO, 2013, p. 39).

**Figura 24** – Aplicação do método Centro de Gravidade.



Fonte: (ARAÚJO, 2013, p. 40).

*O cálculo de Centro de Gravidade do gráfico após a inferência fuzzy da figura 24, é dado por*

$$G(B) = \frac{(10 + 20 + 30 + 40) \times 0,2 + (50 + 60 + 70) \times 0,25 + (80 + 90 + 100) \times 0,75}{0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,75 + 0,75 + 0,75}$$

$$G(B) = \frac{267,5}{3,8} = 70,4.$$

Para Bassanezi e Barros (2010, p. 126), o método do centro de gravidade, "Entre todos os métodos de defuzzificação ele é o preferido, mesmo sendo talvez o mais complicado."

#### 3.5.4.2 Defuzzificação: Centro dos Máximos

Este é um procedimento radical, no sentido que são levados em conta apenas as regiões de maior possibilidade entre os possíveis valores da variável que modela o conceito fuzzy em questão. Neste caso tem-se:

$$C(B) = \frac{i + s}{2}, \quad (3.1)$$

onde

$$i = \inf\{u \in \mathbb{R} : \varphi_{(B)}(u) = \min_u \varphi_{(B)}(u)\}$$

e

$$s = \sup\{u \in \mathbb{R} : \varphi_{(B)}(u) = \max_u \varphi_{(B)}(u)\}$$

#### 3.5.4.3 Defuzzificação: Média dos Máximos

Quando se tem o domínio discreto é comum usar como defuzzificador a média dos máximos cuja definição é dada por:

$$M(B) = \frac{\sum u_i}{n}$$

onde  $n$  é dado e  $u_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , são os elementos de maior pertinência ao conjunto fuzzy  $B$ .

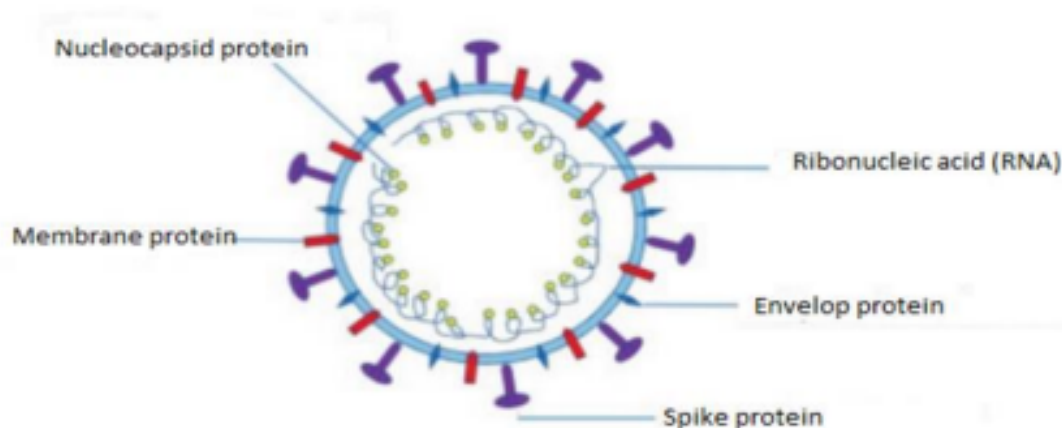
#### 3.5.5 Banco de Dados

Para El Masri (2005, p.3) "Um banco de dados é uma coleção de dados relacionados. Os dados são fatos que podem ser gravados e que possuem um significado implícito. Por exemplo, considere nomes, números telefônicos e endereços de pessoas que você conhece".

Banco de Dados é local onde dados a serem utilizados ficam armazenados para que possam ser trabalhados de acordo com cada fase do sistema em Lógica Fuzzy. Ele define as funções de pertinência dos conjuntos difusos utilizados nas regras difusas.

#### 4 UMA APLICAÇÃO DE LOGICA FUZZY NO DIAGNÓSTICO DE COVID-19

Figura 25 – Estrutura esquemática do Vírus COVID-19



Fonte: (ZHOU et al., 2019, p.3).

A pandemia da COVID-19 teve início em dezembro de 2019. Inicialmente surgiu em Wuhan na China e ainda está em curso até o presente momento no mundo. Trata-se de uma doença que tem gerado grandes preocupações na sociedade. No primeiro momento, devido à falta de informações sobre a doença e estrutura necessária para combatê-la ou prestar auxílio aos contaminados, a facilidade de contágio gerou milhões de pessoas infectadas e mortes em todo mundo. Para combatê-la, praticou-se durante um bom tempo o distanciamento social e uso constante de máscaras.

Em busca do controle da pandemia, diversos testes foram efetuados para verificar a eficácia de remédios disponíveis para outras doenças, e conforme a pandemia foi se agravando, diversas nações adotaram o isolamento total que ficou conhecido como *lockdown*. À medida que o tempo foi passando os números de casos passaram a diminuir devido as medidas adotadas e desenvolvimento de vacinas eficazes.

No entanto, a falta de profissionais, recursos, vacinas, o alto grau de transmissão e até mesmo a insatisfação com as medidas de prevenção proporcionaram o desenvolvimento de novas variantes que continuam propagando a doença. Estes fatores fizeram com que a pandemia ainda se encontre entre nós.

Visando contribuir com a sociedade quanto à predição de casos de infecção e determinação de diagnósticos da doença, diversas pesquisas da área de Matemática Aplicada em conjunto com médicos e especialistas, desenvolveram parâmetros com auxílio da Lógica Fuzzy e modelos matemáticos para a indicação do diagnóstico da COVID-19 a partir de sintomas apresentados por possíveis infectados.

Neste capítulo iremos abordar de forma direta o diagnóstico da COVID-19 com auxílio da Lógica Fuzzy.

#### **4.1 Lógica Fuzzy e Diagnósticos Médicos**

A decisão diagnóstica por um médico depende normalmente de sua experiência, perícia e de sua habilidade e raciocínio para uso do método adequado. Assim, a área de diagnósticos médicos é um campo da Medicina que, a depender da situação, possui alta complexidade. Como fator agregador, o uso de tecnologia tornou-se um facilitador neste processo decisório. Softwares específicos foram desenvolvidos com o uso da Lógica Fuzzy, Inteligência Artificial e algoritmo genético.

A Lógica Fuzzy é um método que possui um raciocínio lógico poderoso e que pode lidar muito bem com a incerteza dos dados, algo muito comum na área de diagnósticos, tornando possível sua aplicação na área dos diagnósticos médicos.

Algumas, razões importantes para o uso da Lógica Fuzzy como método para modelar a COVID-19 são dadas abaixo:

- Os conceitos matemáticos por trás da lógica fuzzy são muito simples. Sua simplificação da complexidade com uma abordagem de naturalidade é um fator importante.
- Cria um ambiente flexível para lidar com problemas oferecendo diferentes expressões.
- Oferece uma abordagem tolerante para dados imprecisos. Nada é certo, tudo pode ser expresso em valores relativos fazendo abordagens diferentes.
- Pode modelar funções não lineares complexas. Assim, a COVID-19 ser expressa como um sistema fuzzy adequado combinando entrada-saída dados.
- Constrói um sistema usando a experiência e o conhecimento de especialistas de alto nível.
- As técnicas convencionais conhecidas não precisam ser negligenciadas. Na maioria das aplicações, fuzzy lógica e técnicas tradicionais são facilmente usadas concomitantemente.

#### **4.2 Aplicando o Diagnóstico da COVID-19 com 3 Variáveis**

A questão do diagnóstico da COVID-19 é abordada por Hossain e Hossain (2021, p. 4) por meio de um sistema de inferência fuzzy e usando o método Mamdani considerando três variáveis: Febre, Saturação de Oxigênio, Cansaço. A análise das variáveis pode resultar em: diagnóstico positivo para a COVID-19, diagnóstico negativo para a COVID-19 ou nenhum comentário.

Neste trabalho serão usadas as variáveis Febre, Cansaço e Tosse Seca que são considerados por Fu (2020, p. 7) como principais sintomas de pessoas com Covid-19.



São utilizadas funções de pertinências para os parâmetros "Febre", "Tosse Seca" e "Cansaço" que são encontradas no trabalho de Uysal e Utku (2021, p. 6-7).

A seguir, a descrição de tais parâmetros é vista na tabela 3:

**Tabela 3** – Quadro com os Parâmetros e Variáveis Linguísticas Fuzzy

Parâmetros	Variáveis linguísticas	Alcance
1. Febre	Sem Febre (SF), Pouca Febre (PF), Febre (F), Muita Febre (MF)	34-39 °C
2. Tosse Seca	Pouca Tosse (PT), Tosse Moderada (TM), Muita Tosse (MT)	0-10
3. Cansaço	Sem cansaço (SC), Cansaço (C), Muito Cansaço (MC)	0-10
4. Situação de COVID-19	Covid Negativo (CN), Sem comentários (SemC), Covid Positivo (CP)	0-10

Fonte: Autor, 2022.

Utilizaremos aqui Inferência Mamdani e defuzzificação por Centro de Gravidade.

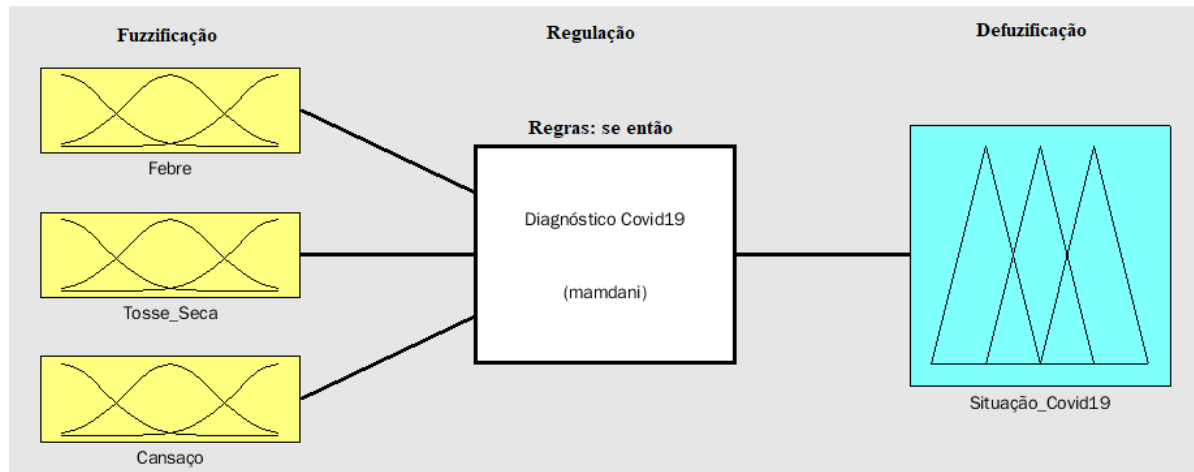
#### 4.2.1 Sistema Baseado em Regras Fuzzy para diagnóstico da Covid-19

Na figura 26 pode-se observar o *SBRF* que foi desenvolvida no software MATLAB ®, onde temos os conjuntos fuzzy (parâmetros) "Febre", "Tosse Seca" e "Cansaço" que estão no processo de fuzzificação. A inferência é a unidade principal deste sistema. O seu trabalho é tomar decisões e ,para isso, são utilizadas regras "se-então", para implicar isso as regras são utilizados os conectivos "ou" ou "e". E por fim na defuzzificação que é representada pela "situação de Covid-19" converte os valores difusos em valores reais.

Dividindo o *SBRF* em blocos, temos:

1. Unidade de interface de fuzzificação - converte as os valores reais em valores difusos.
2. Base de regras - contém regras fuzzy do tipo se-então.
3. Banco de dados - define as funções de pertinência de conjuntos fuzzy usados em regras fuzzy.
4. Unidade de Tomada de Decisão (Inferência) - Realiza operação sobre regras.
5. Unidade de interface de defuzzificação - converte os valores difusas em valores reais.

**Figura 26** – Máquina de Inferência Fuzzy do Diagnóstico de COVID-19



Fonte: Autor, 2022.

#### 4.2.2 Fuzzificação

Considerando os fatores que identificam a COVID-19 definiu-se os conjuntos fuzzy, Febre, Tosse Seca e Cansaço, como parâmetros de entrada e o parâmetro de saída que é "Situação de COVID-19". Para eles foram atribuídas variáveis linguísticas e funções de pertinência dos tipos triangular ou trapezoidal.

A função de pertinência para o parâmetro de entrada Febre possui quatro variáveis linguísticas que são: Febre (F), Sem Febre (SF), Febre (F) e Muita Febre (MF). As funções de pertinência das variáveis linguísticas para Febre são:

$$\text{Febre (Sem_Febre)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 35 \\ \frac{36-x}{1} & \text{se } 35 \leq x \leq 36 \\ 0, & \text{se } x > 36 \end{cases}$$

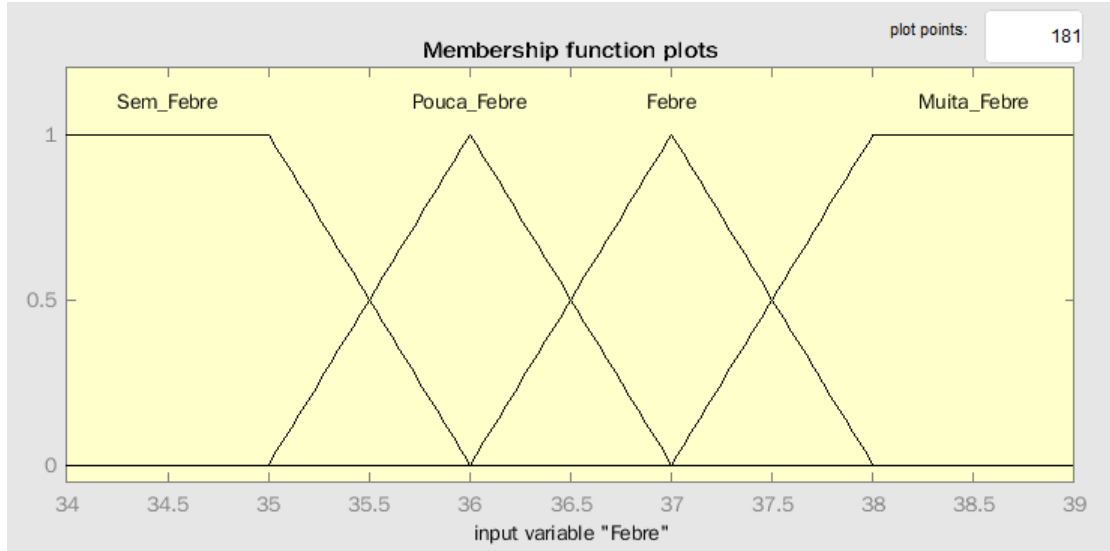
$$\text{Febre (Pouca_Febre)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 35 \text{ ou } x > 36 \\ \frac{x-35}{1} & \text{se } 35 \leq x \leq 36 \\ \frac{37-x}{1} & \text{se } 36 < x \leq 37 \end{cases}$$

$$\text{Febre (Febre)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 36 \text{ ou } x > 38 \\ \frac{x-36}{1} & \text{se } 36 \leq x \leq 37 \\ \frac{38-x}{1} & \text{se } 37 < x \leq 38 \end{cases}$$

$$\text{Febre (Muita_Febre)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 37 \\ \frac{x-37}{1} & \text{se } 37 \leq x \leq 38 \\ 1, & \text{se } x > 38 \end{cases}$$

A seguir, o gráfico de cada uma das funções:

**Figura 27** – Gráfico das Funções de pertinência da Febre



Fonte: Autor, 2022.

A função de pertinência do parâmetro de entrada Tosse Seca possui as seguintes variáveis linguísticas: Pouca Tosse (PT), Tosse Moderada (TM) e Muita Tosse (MT). As funções de pertinência para esta variável são:

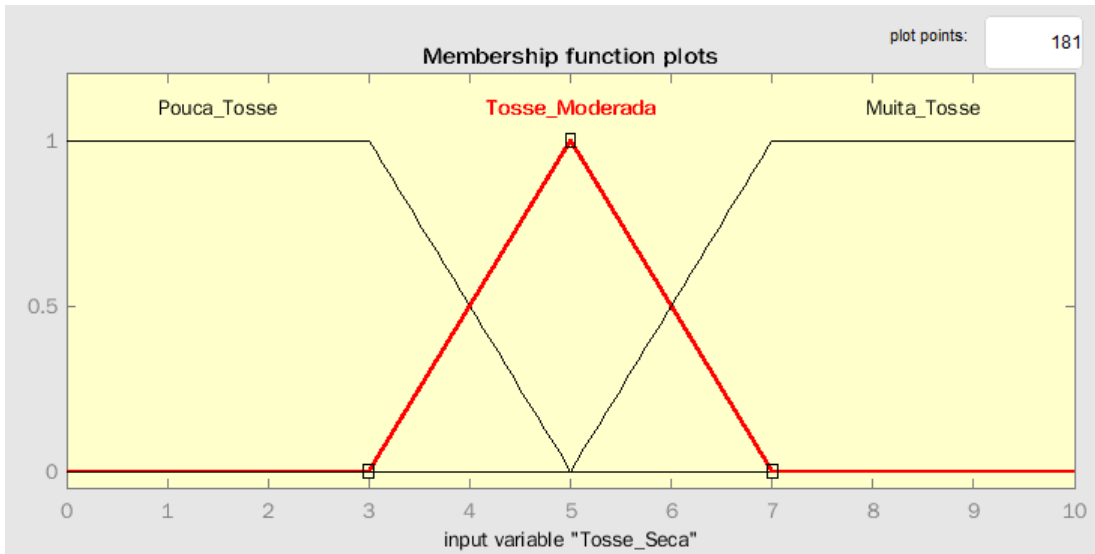
$$\text{Tosse\_Seca (Pouca\_Tosse)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 3 \\ \frac{3-x}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$\text{Tosse\_Seca (Tosse\_Moderada)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 3 \text{ ou } x > 7 \\ \frac{x-3}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{7-x}{1} & \text{se } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Tosse\_Seca (Muita\_Tosse)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 5 \\ \frac{x-5}{1} & \text{se } 5 \leq x \leq 7 \\ 1, & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

A seguir o gráfico de tais funções:

**Figura 28** – Gráfico das Funções de pertinência da Tosse Seca



Fonte: Autor, 2022.

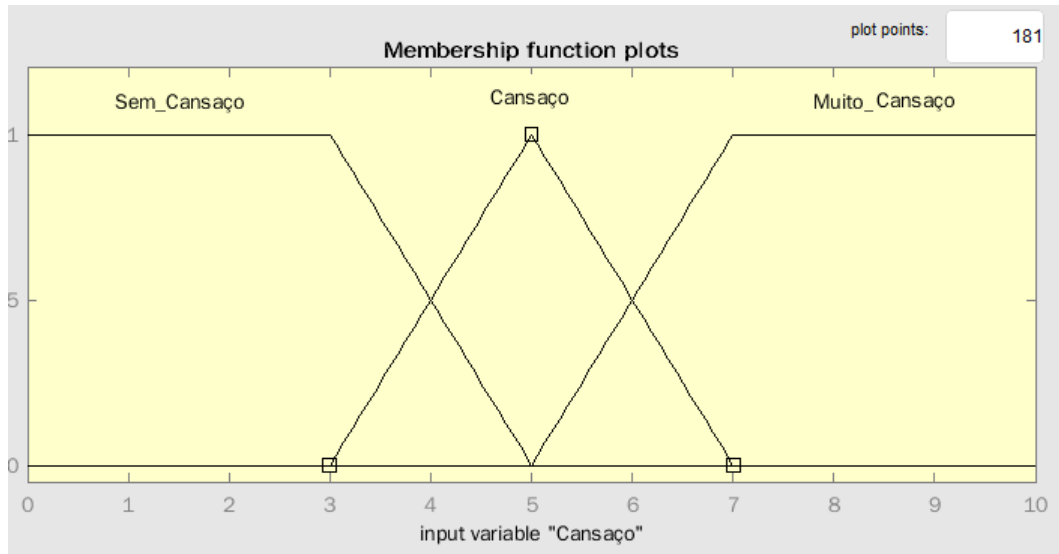
Seguindo os mesmos passos das funções anteriores, temos que a função de pertinência para o parâmetro de entrada Cansaço possui três variáveis linguísticas: Sem Cansaço (SC), Cansaço (C), Muito Cansaço (MC). Serão apresentadas as funções de pertinência das variáveis linguísticas para o Cansaço e na figura 29 tem-se o gráfico de cada função de pertinência para este parâmetro:

$$\text{Cansaço (Sem_Cansaço)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 3 \\ \frac{3-x}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$\text{Cansaço (Cansaço)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 3 \text{ ou } x > 7 \\ \frac{x-3}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{7-x}{1} & \text{se } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Cansaço (Muito_Cansaço)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 5 \\ \frac{x-5}{1} & \text{se } 5 \leq x \leq 7 \\ 1, & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

**Figura 29** – Gráfico das Funções de pertinência do Cansaço



Fonte: Autor, 2022.

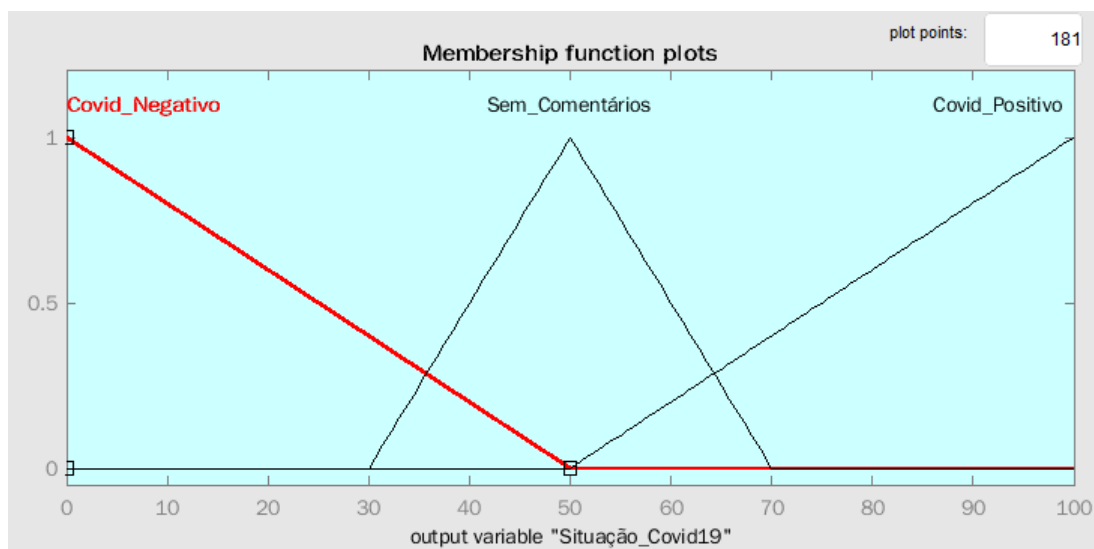
A função de pertinência para o parâmetro de saída Situação de COVID-19 está dividida em três variáveis linguísticas: Covid Negativo (CN), Sem comentários (SemC) e Covid Positivo (CP). Concluindo, serão apresentadas as funções de pertinência das variáveis linguísticas para o Situação de COVID-19 e na figura 30 tem-se o gráfico de cada função de pertinência para este parâmetro:

$$\text{Situação de Covid-19 (Covid_Negativo)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ \frac{50-x}{50} & \text{se } 0 \leq x \leq 50 \\ 0, & \text{se } x > 50 \end{cases}$$

$$\text{Situação de Covid-19 (Sem_Comentários)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 30 \text{ ou } x > 70 \\ \frac{x-30}{20} & \text{se } 30 \leq x \leq 50 \\ \frac{70-x}{20} & \text{se } 50 < x \leq 70 \end{cases}$$

$$\text{Situação de Covid-19 (Covid_Positivo)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 50 \\ \frac{x-50}{50} & \text{se } 50 \leq x \leq 100 \\ 1, & \text{se } x > 100 \end{cases}$$

**Figura 30** – Gráfico das Funções de pertinência da Situação de Covid-19



Fonte: Autor, 2022.

#### 4.2.3 Base de Regras

Para o diagnóstico da COVID-19 tomou-se como relevantes as seguintes 27 regras fuzzy das 36 possíveis. Estas representam algumas variáveis linguísticas para cada parâmetro de entrada e resultam em uma saída possível.

1. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é SemC).
2. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CP).
3. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).
4. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é CN).
5. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CP).
6. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).
7. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é SemC).

8. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CN).
9. Se (Febre é SF) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CN).
10. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é NT), então (Consequência de COVID-19 é CP).
11. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é T), então (Consequência de COVID-19 é CP).
12. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).
13. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é CN).
14. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CP).
15. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).
16. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é CN).
17. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CP).
18. Se (Febre é F) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).
19. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é SemC).
20. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CP).
21. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é MT) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).
22. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é CN).
23. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CP).

24. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é TM) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).
25. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é SC), então (Consequência de COVID-19 é CN).
26. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é C), então (Consequência de COVID-19 é CP).
27. Se (Febre é MF) e (Tosse Seca é PT) e (Cansaço é MC), então (Consequência de COVID-19 é CP).

Na próxima subseção, estas regras serão utilizadas no processo de inferência onde será utilizado o método de inferência de Mamdani.

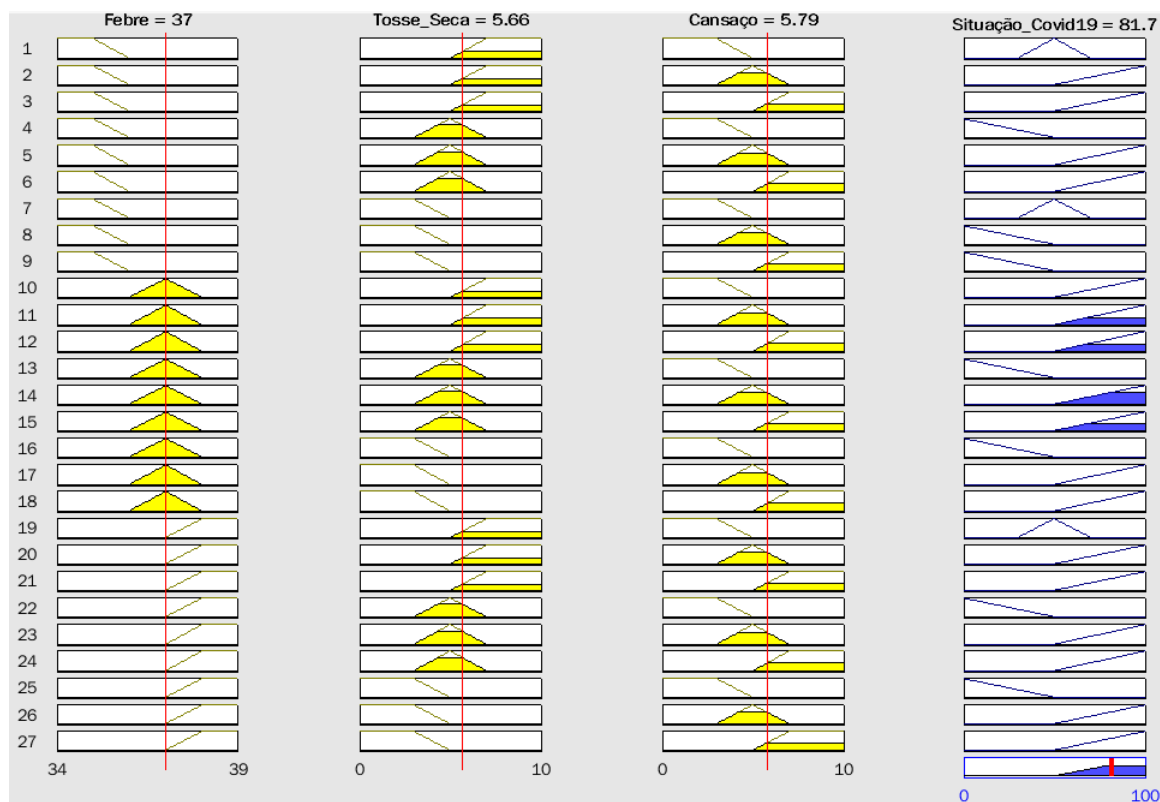
#### 4.2.4 Inferência Fuzzy

Nesta seção, ocorrerem os mesmos processos (Ativação do Antecedente, Implicação e Agregação) indicados na seção 3.5.3 e subseção 3.5.3.1. No entanto, o processo será automatizado fazendo uso de números fuzzy triangulares e a caixa de ferramentas do software MATLAB ®.

Em seu artigo Uysal e Utku (2021, p. 8) descrevem que o visualizador de regras exibe o roteiro que abrange todo o processo de inferência difusa. Para o nosso modelo a base de regras pode ser vista na figura 31.



**Figura 31** – Base de Regras no MATLAB



Fonte: Autor, 2022.

Os gráficos da primeira linha na figura mostram as entradas e saídas da primeira regra. Da mesma forma, a segunda linha mostra a segunda regra e assim sucessivamente até vigésima sétima linha que mostra a vigésima sétima regra.

Os gráficos mostrados em amarelo nas primeiras três colunas mostram as funções de pertinência que pertencem às entradas das regras, enquanto os gráficos azuis na última coluna mostra as funções de pertinência com base nos valores de resultados da saída.

O gráfico na última linha da coluna de saída expressa o resultado da decisão ponderada integrada do sistema de inferência fuzzy a partir dos valores, a linha em vermelho indica o valor do resultado da defuzzificação pelo método Centro de Gravidade.

#### 4.2.5 Defuzzificação

Para traduzirmos os valores difusos obtidos na seção 4.2.4, será utilizado o método de defuzzificação Centro de Gravidade. Vale lembrar que este método tem o resultado da média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy.

Pode-se observar as resultantes de todas as regras apresentadas na figura 31. Embora nosso estudo envolva três variáveis de entrada e uma saída não é possível a representação em um

gráfico de superfície que envolvam todas elas, pois o gráfico só admite duas entradas e uma saída. Tomando dois parâmetros de entrada combinados entre si (Cansaço x Febre; Cansaço x Tosse Seca; Tosse Seca x Febre) temos o resultado de saída (Situação de COVID-19) nos gráficos de superfície das figuras 32, 33 e 34.

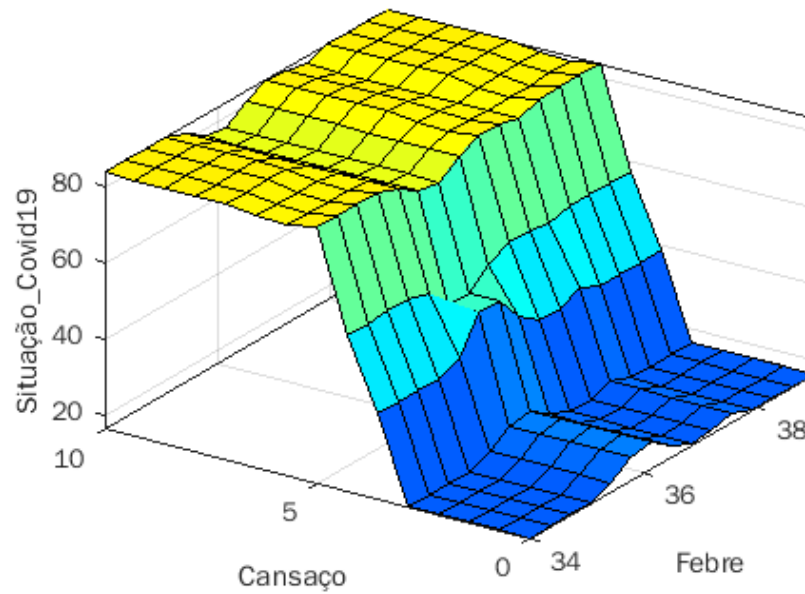
Porém, destacando que, quando há mais de dois parâmetros envolvidos os dados obtidos podem não ser tão precisos quanto se envolve apenas dois parâmetros, algo que pode ser notado em nossos gráficos, devido ao modelo levar em conta três parâmetros.

No entanto, na figura 33, observa-se a variação não-linear da Situação de COVID-19, como função de pertinência para o Cansaço e da Tosse Seca, que foi gerada a partir da base de regras estabelecidas. Desta forma, verifica-se que os valores de Cansaço e Tosse Seca apresentam como resultado da inferência de um valor, no intervalo  $[0,100]$  onde dentro deste pode ocorrer resultados de COVID-19 positivo, negativo ou Sem comentários. Foi possível inferir pela figura 33 que para o Cansaço de "5" e Tosse Seca sendo "6" após a defuzzificação, o índice da situação de Covid-19 médio próximo de "50" que seria a situação "Sem Comentários", que é mostrado no gráfico de superfície.

Já na figura 32 podemos observar a superfície gerada interpolando os parâmetros Febre e Cansaço para obtermos valores para a Situação de COVID-19. Podemos observar que se atribuindo o valor "10" para o Cansaço e "38" para Febre obtemos o valor de "80" para COVID-19, resulta em COVID-19 Positivo.

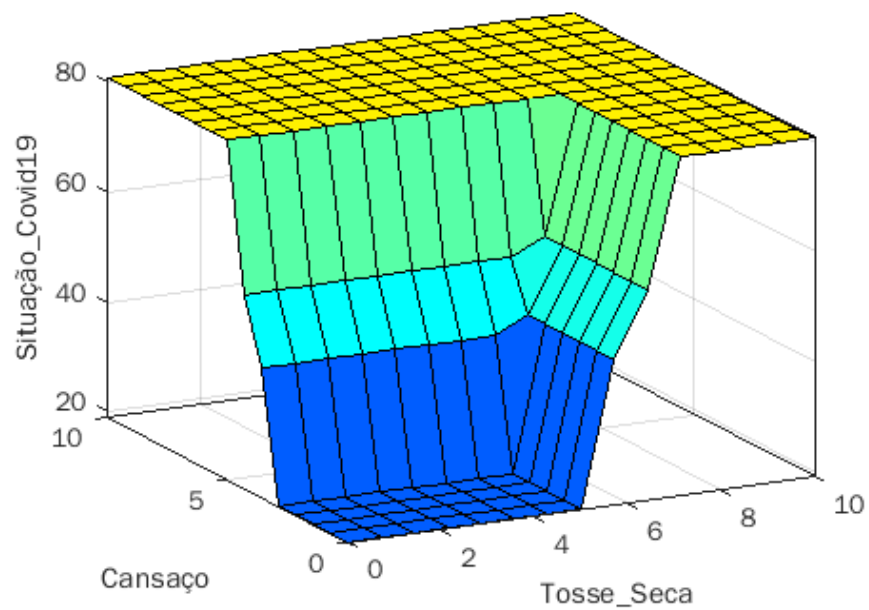
E por fim, obtemos na figura 34 a superfície relacionando os parâmetros Febre e Tosse Seca. Ao considerar o valor para Febre "35" e "3" para Tosse Seca temos um próximo de "10", que corresponde a Situação de COVID-19 negativo.

**Figura 32** – Relação entre Cansaço, Febre e Situação de COVID-19

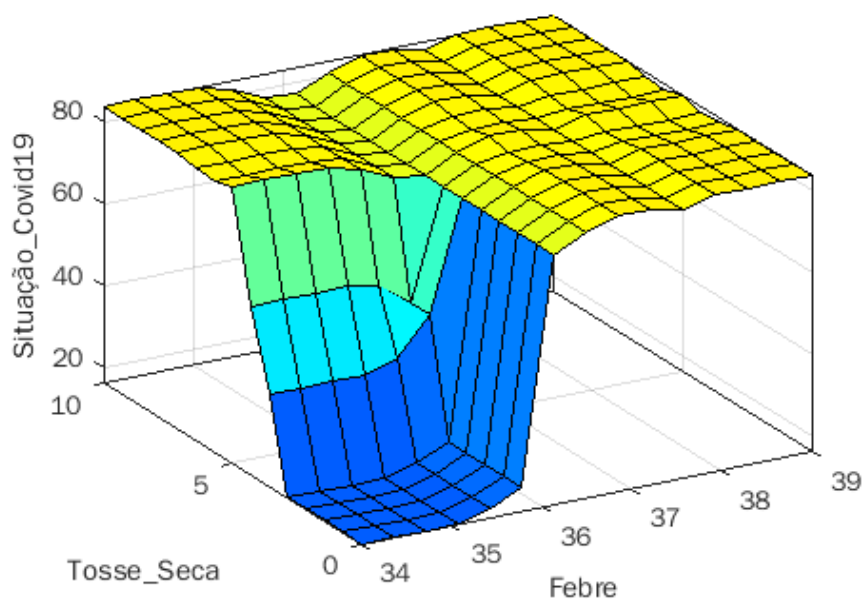


Fonte: Autor, 2022.

**Figura 33** – Relação entre Cansaço, Tosse Seca e Situação de COVID-19



Fonte: Autor, 2022.

**Figura 34** – Relação entre Febre, Tosse Seca e Situação de COVID-19

Fonte: Autor, 2022.

Este modelo é uma forma utilizada para a predição de diagnóstico da COVID-19, tendo em vista que muitas vezes não é possível conseguir exames de imediato em uma unidade hospitalar, ou, quando esses exames são realizados, há uma demora na liberação dos resultados.

### 4.3 Índice de Gravidade de Paciente com COVID-19

Nesta seção, iremos usar os parâmetros disponibilizados pelo Ministério da Saúde do Brasil por meio da 4ª edição de seu guia orientador para o enfrentamento da pandemia na rede de atenção à saúde, onde temos dados disponíveis para definir o índice de gravidade do paciente com COVID-19, gerado por um modelo de inferência Fuzzy usando o MATLAB (BRASIL, 2021). Essa abordagem, via modelagem por lógica fuzzy constitui-se como uma alternativa que para agilizar o tratamento do paciente. Os parâmetros de entrada e de saída são vistos na Tabela 4 suas funções de pertinência nas figuras 36, 37, 38 e 39.

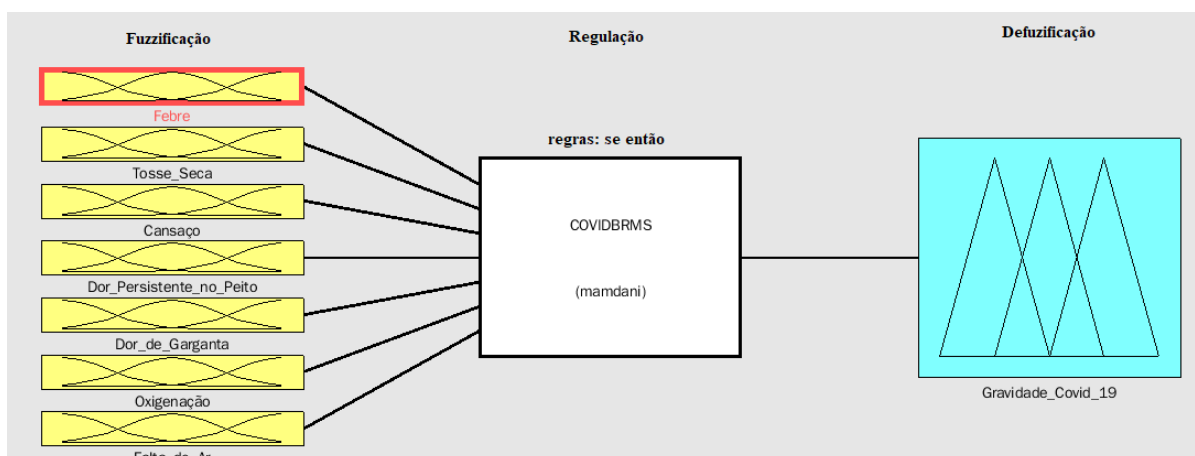
**Tabela 4** – Quadro com as Variáveis e Parâmetros Linguísticos Fuzzy

Parâmetros	Variáveis linguísticas	Alcance
1. Febre	Baixa, Moderada, Alta, Muito Alta	34-39 °C
2. Tosse Seca	Baixa, Média, Alta	0-10
3. Cansaço	Baixo, Médio, Alto	0-10
4. Dor Persistente no Peito	Baixa, Média, Alta	0-10
5. Dor de Garganta	Baixa, Média, Alta	0-10
6. Oxigenação	Muito Baixa, Baixa, Normal	88-100%
7. Falta de Ar	Baixa, Média, Elevada	0-10
8. Gravidade de COVID-19	Leve, Moderado, Grave	0-10

Fonte: Autor, 2022.

#### 4.3.1 Sistema Baseado em Regra Fuzzy (SRBF)

Como apresentado na seção 4.2, usaremos o *SBRF* que é apresentado na figura 35 através do Software MATLAB®. Será usado o método de inferência de Mamdani e para defuzzificação será usado o método do Centro de Gravidade. Em sequência serão apresentadas as funções de pertinência envolvidas, a base de regras do sistema, os resultados da inferência e o de defuzzificação. Para complementar, serão apresentadas as superfícies obtidas após a defuzzificação.

**Figura 35** – Sistema do Índice de Gravidade do paciente com COVID-19

Fonte: Autor, 2022.

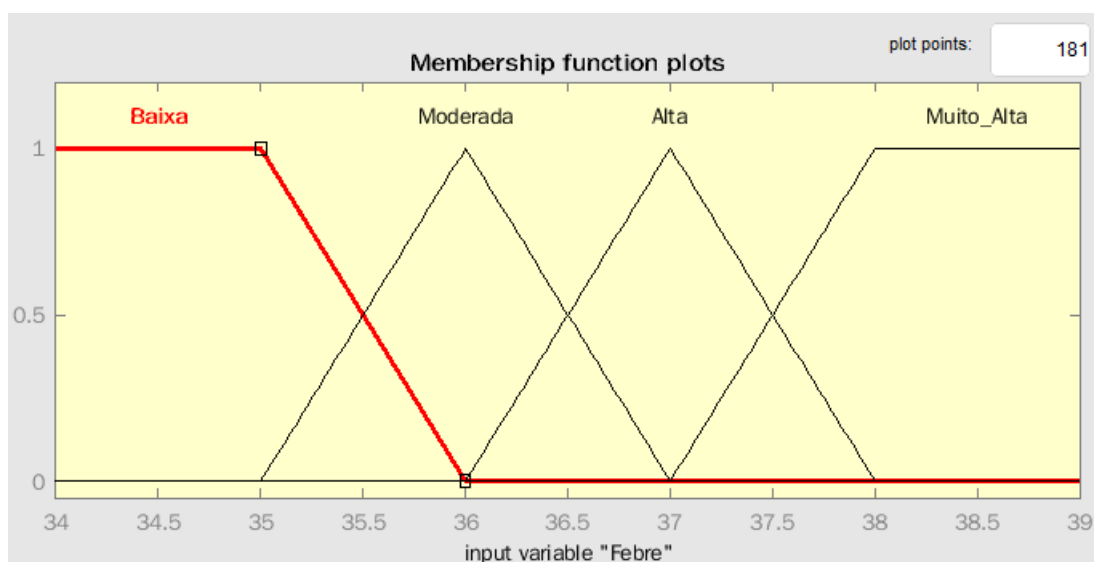
#### 4.3.2 Fuzzificação

Ao considerar fatores para identificar a Gravidade da doença em paciente com COVID-19 foram definidos como parâmetros de entrada *Febre*, *Tosse Seca*, *Cansaço*, *Dor Persistente no Peito*, *Dor de Garganta*, *Oxigenação* e *Falta de Ar*. Também definiu-se o parâmetro de saída Gravidade de COVID-19. As funções de pertinência para a variável de entrada Febre em quatro

categorias linguísticas são: Baixa, Moderada, Alta e Muito Alta, o que pode ser visto na figura 36. As funções de pertinência para a variável de entrada Oxigenação em três categorias linguísticas são: Muito Baixa, Baixa e Normal, se encontram na figura 38. As funções de pertinência para as variáveis de entrada Tosse Seca, Cansaço, Dor Persistente no Peito, Dor de Garganta e Falta de Ar em três categorias linguísticas são: Baixo(a)/Pouca, Médio e Alto(a)/Elevada, o que pode ser visto na figura 37. Também a função de pertinência para o parâmetro de saída Situação de COVID-19 em três categorias linguísticas: Leve, Moderado e Grave, pode ser vista na figura 39.

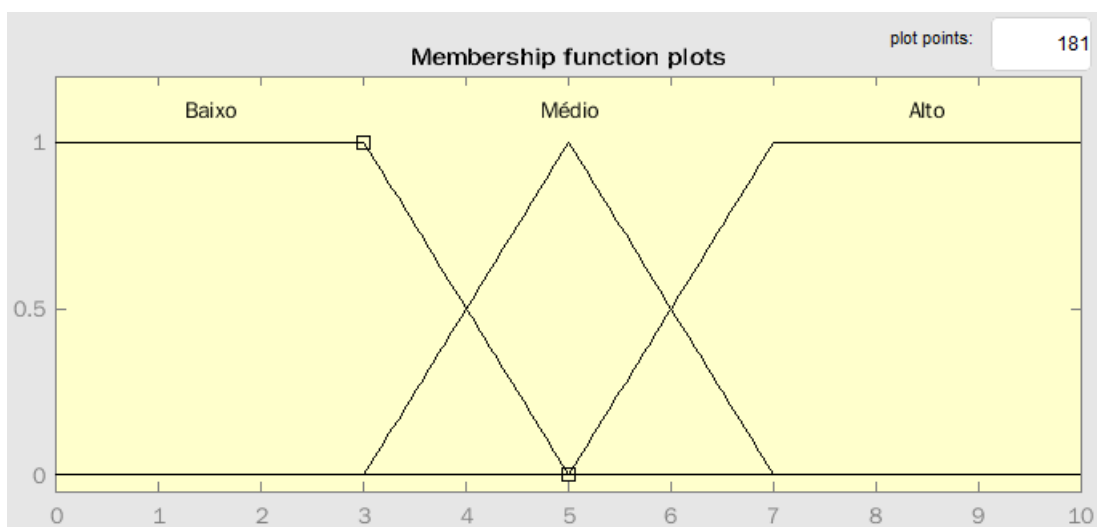
Ao usar o número fuzzy triangular e a caixa de ferramentas MATLAB® do Mamdani, os seguintes gráficos são obtidos:

**Figura 36** – Gráfico das Funções de pertinência da Febre



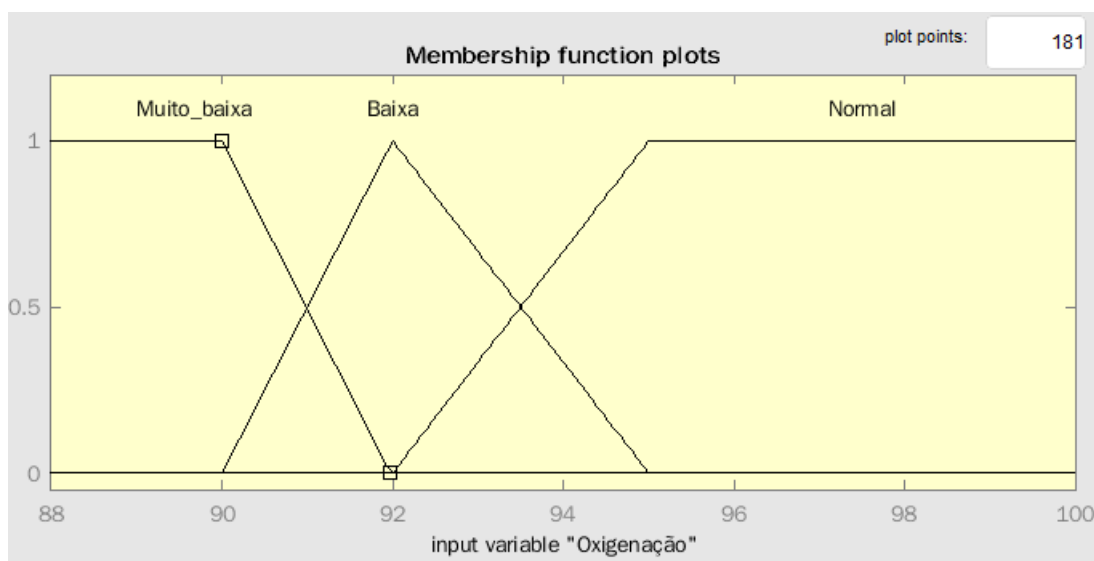
Fonte: Autor, 2022.

**Figura 37** – Gráfico das Funções de pertinência para Tosse Seca, Cansaço, Dor Persistente no Peito, Dor de Garganta e Falta de Ar



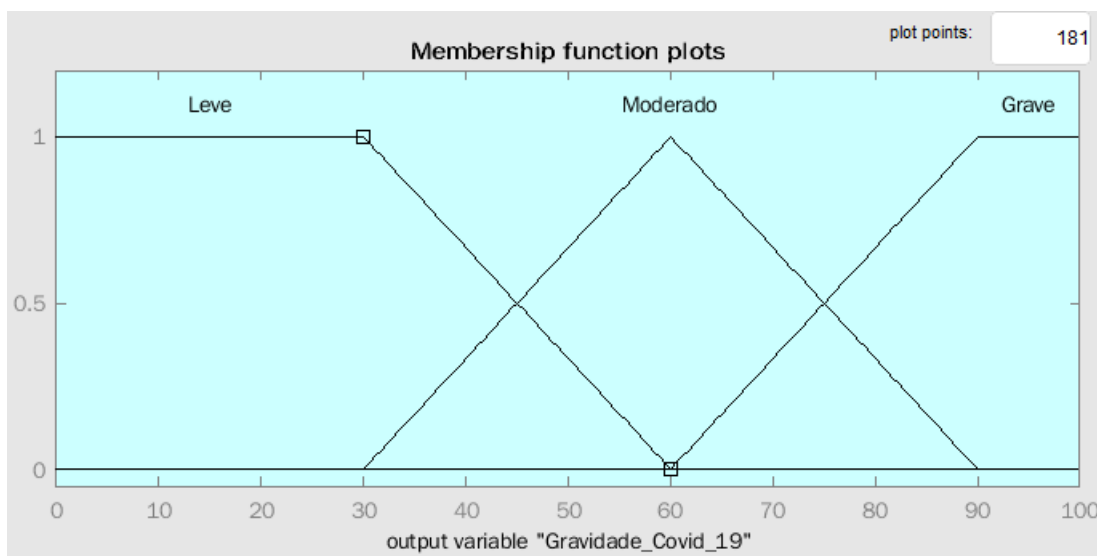
Fonte: Autor, 2022.

**Figura 38** – Gráfico das Funções de pertinência da Oxigenação



Fonte: Autor, 2022.

**Figura 39** – Gráfico das Funções de pertinência da Gravidade do paciente com Covid-19



Fonte: Autor, 2022.

#### 4.3.3 Base de Regras

Para o índice de gravidade do paciente com COVID-19 tomou-se como relevantes as seguintes 25 regras fuzzy das 8.748 possíveis. Estas representam algumas variáveis linguísticas para cada parâmetro de entrada e resultam em uma saída possível para gravidade de Covid-19.

1. Se (a Febre é Baixa) e (a Tosse Seca é Baixa) e (o Cansaço é Baixo) e (a Dor de Garganta é Baixa) então (a Gravidade de COVID-19 é Leve) .
2. Se (a Febre é Baixa) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Baixo) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Leve).
3. Se (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Baixa) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Baixa) então (a Gravidade de COVID-19 é Leve).
4. Se (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Baixo) e (a Dor de Garganta é Baixa) então (a Gravidade de COVID-19 é Leve).
5. Se (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Baixa) e (o Cansaço é Baixo) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Leve).
6. Se (a Febre é Baixa) e (a Tosse Seca é Baixa) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Leve).
7. Se (a Febre é Baixa) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Baixa) então (a Gravidade de COVID-19 é Leve).



8. Se (a Febre é Baixa) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado).
9. Se (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Baixa) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado).
10. (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Baixo) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado) .
11. (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Baixa) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado) .
12. (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado) .
13. (a Febre é Alta) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado).
14. (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Alta) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado).
15. (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Alto) e (a Dor de Garganta é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado).
16. (a Febre é Moderada) e (a Tosse Seca é Média) e (o Cansaço é Médio) e (a Dor de Garganta é Alta) então (a Gravidade de COVID-19 é Moderado).
17. (a Febre é Alta) e (a Tosse Seca é Alta) e (o Cansaço é Alto) e (a Dor de Garganta é Alta) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).
18. Se (a Febre é Moderada) ou (a Tosse Seca é Média) ou (o Cansaço é Médio) ou (a Dor Persistente no Peito é Média) ou (a Dor de Garganta é Médio) ou (a Oxigenação é Baixa) ou (a Falta de Ar é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).
19. Se (a Febre é Moderada) ou (a Tosse Seca é Média) ou (o Cansaço é Médio) ou (a Dor Persistente no Peito é Alta) ou (a Dor de Garganta é Médio) ou (a Oxigenação é Baixa) ou (a Falta de Ar é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).
20. Se (a Febre é Moderada) ou (a Tosse Seca é Média) ou (o Cansaço é Médio) ou (a Dor Persistente no Peito é Média) ou (a Dor de Garganta é Médio) ou (a Oxigenação é Muito Baixa) ou (a Falta de Ar é Média) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).
21. Se (a Febre é Moderada) ou (a Tosse Seca é Média) ou (o Cansaço é Médio) ou (a Dor Persistente no Peito é Média) ou (a Dor de Garganta é Médio) ou (a Oxigenação é Baixa) ou (a Falta de Ar é Elevada) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).

22. Se (a Febre é Moderada) ou (a Tosse Seca é Média) ou (o Cansaço é Médio) ou (a Dor Persistente no Peito é Alta) ou (a Dor de Garganta é Médio) ou (a Oxigenação é Baixa) ou (a Falta de Ar é Elevada) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).
23. Se (a Dor Persistente no Peito é Alta) ou (a Oxigenação é Muito Baixa) ou (a Falta de Ar é Elevada) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).
24. Se (a Febre é Alta) ou (a Dor Persistente no Peito é Alta) ou (a Oxigenação é Muito Baixa) ou (a Falta de Ar é Elevada) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).
25. Se (o Cansaço é Alto) ou (a Dor Persistente no Peito é Alta) ou (a Oxigenação é Muito Baixa) ou (a Falta de Ar é Elevada) então (a Gravidade de COVID-19 é Grave).

Na próxima subseção, estas regras serão utilizadas no processo de inferência onde será utilizado o método de inferência de Mamdani.

#### 4.3.4 Inferência Fuzzy

Nesta subseção, bem como ocorreu na subseção 4.2.4, irá ocorrer o mesmo processo (Ativação do Antecedente, Implicação e Agregação) indicados na seção 3.5.3 e na subseção 3.5.3.1. No entanto, o processo será automatizado fazendo uso dos números fuzzy triangulares e sua caixa de ferramentas do software MATLAB®.

O roteiro que abrange todo o processo de inferência difusa. É dado na figura 40.

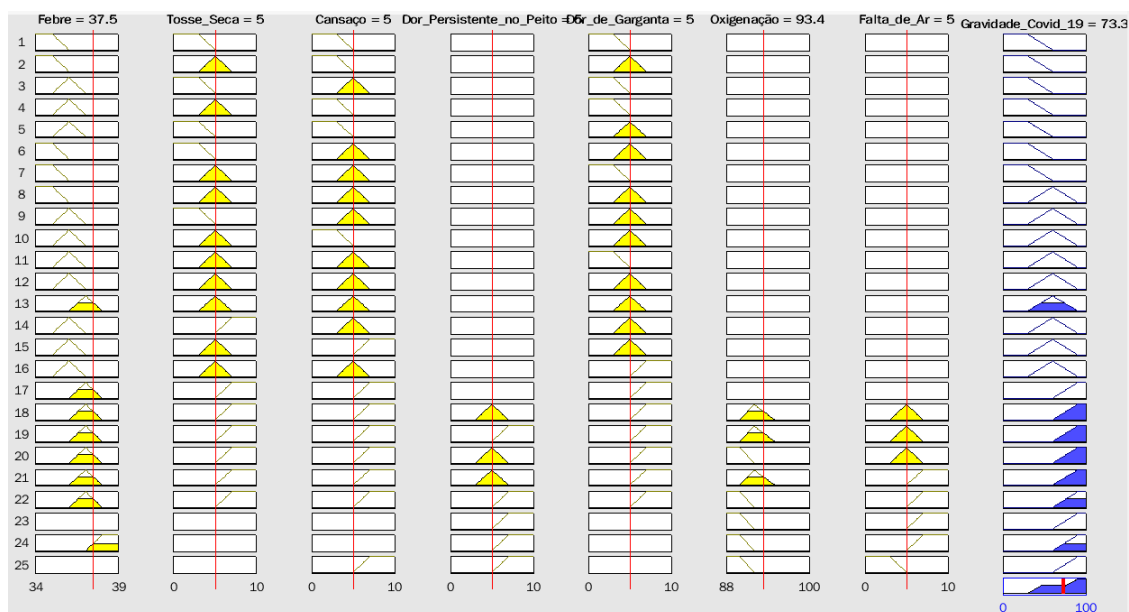
Sendo que os gráficos da primeira linha na figura mostram as entradas e saídas da primeira regra. Da mesma forma, a segunda linha mostra a segunda regra e assim sucessivamente até vigésima quinta linha que mostra a vigésima quinta regra.

Os gráficos mostrados em amarelo nas primeiras 7 colunas mostram as funções de pertinência que pertencem às entradas das regras, enquanto os gráficos azuis na última coluna mostra as funções de pertinência com base nos valores de resultado da saída.

Já o gráfico na última linha da coluna de saída expressa o resultado da decisão ponderada integrada do sistema de inferência fuzzy a partir dos valores e a linha em vermelho indica o valor de "81,7" que é o resultado da defuzzificação pelo método Centro de Gravidade, para os valores escritos em preto na parte superior da figura 31 nas funções de pertinência.

Ao usar o número fuzzy triangular e a caixa de ferramentas MATLAB® do Mamdani, os seguintes gráficos são obtidos:

**Figura 40** – Base de Regras no MATLAB



Fonte: Autor, 2022.

#### 4.3.5 Defuzzificação

Para traduzirmos os valores difusos obtidos na subseção 4.3.4, vale lembrar que para esta subseção, devido a quantidade de possibilidades, foram selecionadas apenas algumas a fim de desenvolver a aplicação do modelo.

Pode-se observar as resultantes de todas as regras apresentadas na figura 40. Embora, nosso estudo envolva sete parâmetros de entrada e uma saída não é possível a representação em um gráfico de superfície que envolvam todas elas, pois o gráfico só admite duas entradas e uma saída. Sendo assim alguns gráficos podem apresentar distorções.

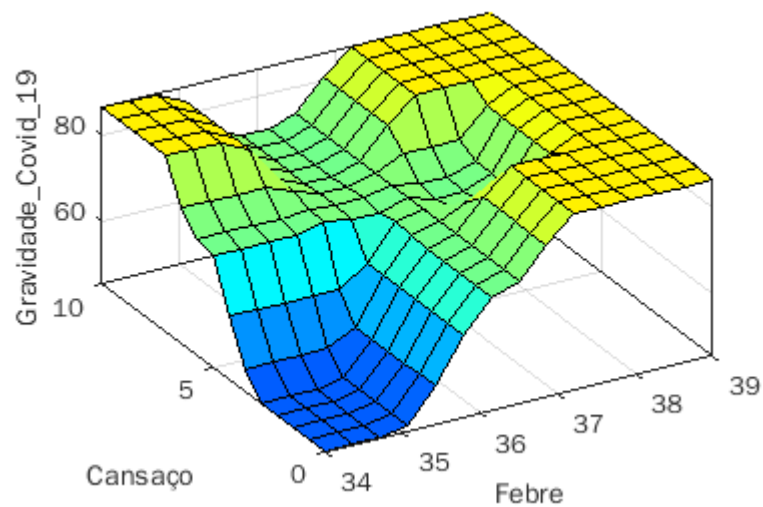
Na figura 41, observa-se a variação não-linear da Gravidade de COVID-19, que é gerada a partir da base de regras tomando como parâmetro as funções de pertinência para Cansaço e Febre. Desta forma, verifica-se que os valores de Cansaço e Febre apresentam como resultado da inferência um valor, no intervalo  $[0, 100]$  onde pode ocorrer os seguintes resultados para Gravidade de COVID-19: leve, moderado e grave. Foi possível inferir pela figura 41 que para o Cansaço de "3" e Febre "35" após a defuzzificação, o índice da gravidade de COVID-19 médio próximo de "10" que teria gravidade "leve".

Já para os gráficos das figuras 43 podemos observar a superfície gerada interpolando os parâmetros Tosse Seca e Cansaço. Para obtermos valores para a Situação de COVID-19, podemos observar que de atribuindo o valor "5" para o Tosse Seca e valor "5" para Cansaço obtemos o valor de "70" para Gravidade COVID-19 que resulta em Covid-19 Moderada.

E por fim, obtemos nas figuras 42, 44 e 45 que a superfície relacionada com seus

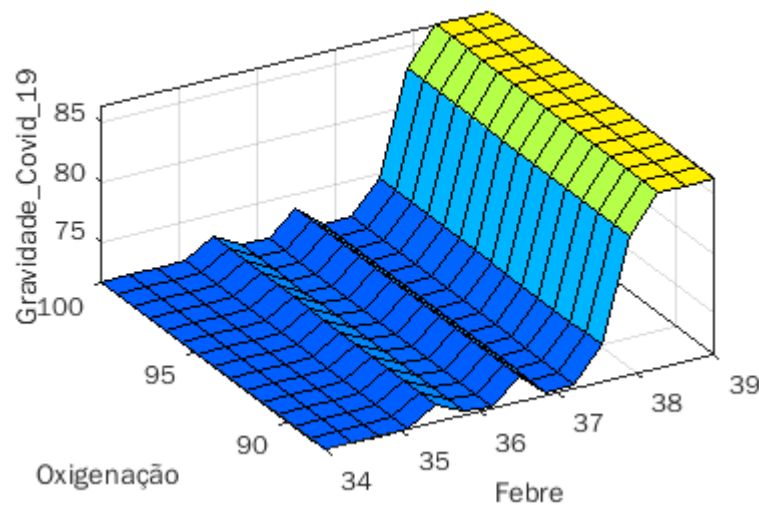
parâmetros não apresentam informações conclusivas sobre a Gravidade de COVID-19. Este é um problema para o modelo. Por exemplo, na figura 42, foram utilizadas poucas regras associando Febre e Oxigenação. Assim o seu gráfico não se altera muito, só ao final, quando os valores estão próximos de "38" para a febre. Já para os outros dois a base de regras não consegue informar com precisão a relação entre a seus parâmetros e a Gravidade de COVID-19.

**Figura 41** – Relação entre Febre, Cansaço ou Tosse Seca ou Dor de Garganta e Gravidade de COVID-19



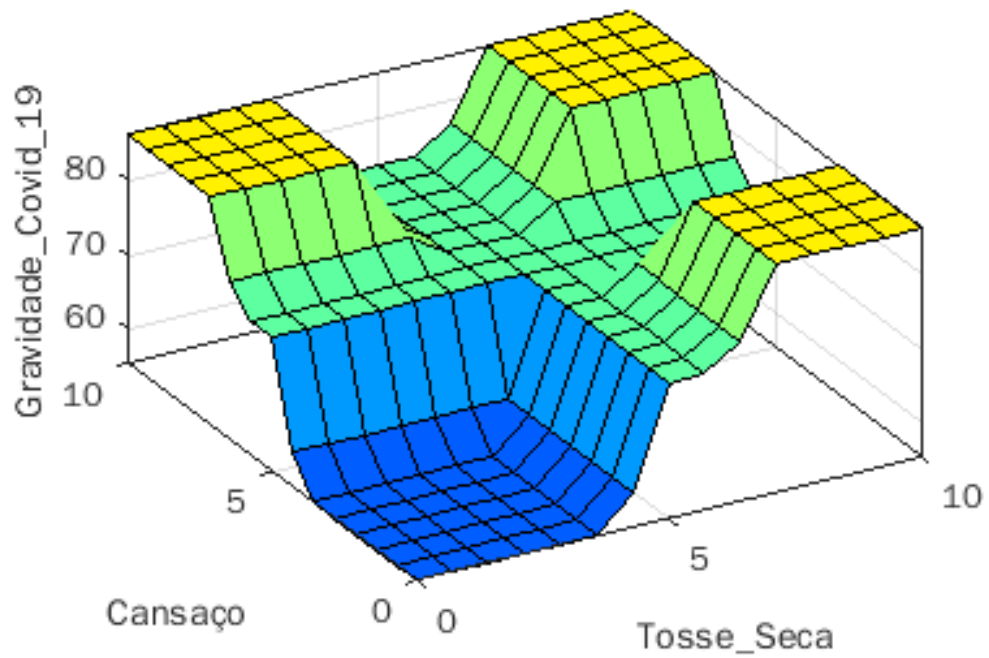
Fonte: Autor, 2022.

**Figura 42** – Relação entre Febre, Cansaço e Gravidade de COVID-19



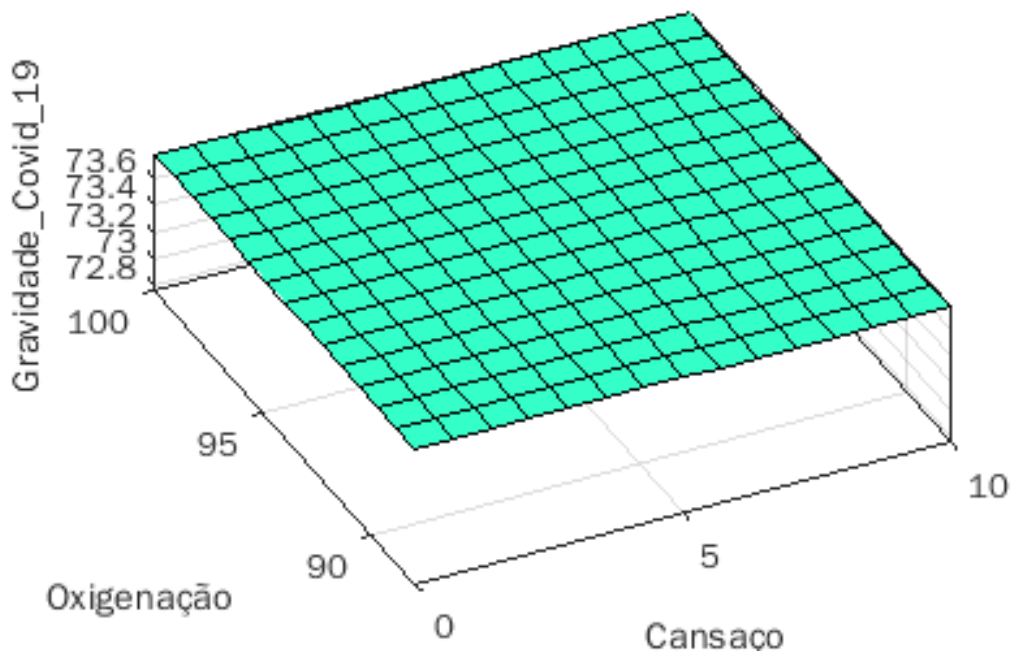
Fonte: Autor, 2022.

**Figura 43** – Relação entre Cansaço, Tosse Seca e Gravidade de COVID-19



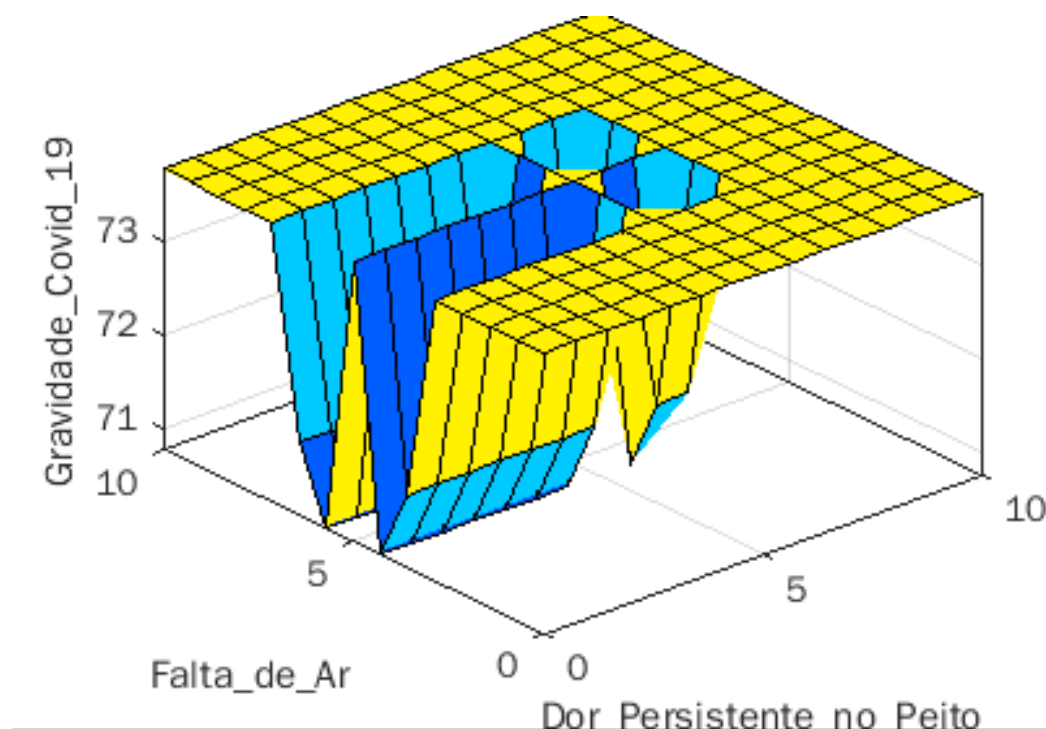
Fonte: Autor, 2022.

**Figura 44** – Relação entre Cansaço, Oxigenação e Gravidade de COVID-19



Fonte: Autor, 2022.

**Figura 45** – Relação entre Falta de Ar, Dor Persistente no Peito e Gravidade de COVID-19



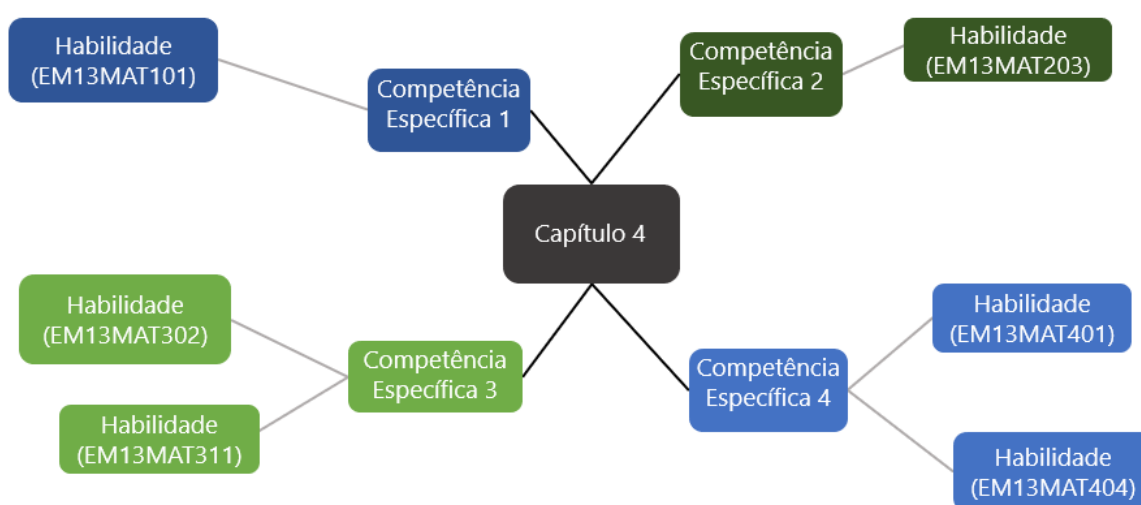
Fonte: Autor, 2022.

O modelo fuzzy apresentado nesta seção é uma boa ferramenta para que os especialistas tomem certas decisões baseando-se nas informações disponíveis. Vale ressaltar que para se obter uma maior precisão de resultados deve ser usado o sistema de inferência apresentado na figura 40, onde é possível alterar os dados para os parâmetros de entrada, facilitando a obtenção dos valores de saída de forma melhor que as superfícies apresentadas nas figuras 41, 42, 43, 44 e 45.

## 5 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES A SEREM DESENVOLVIDAS NO ENSINO MÉDIO RELACIONADAS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Este capítulo trará uma abordagem sobre as competências e habilidades que podem ser desenvolvidas por meio da adequação do problema apresentado no capítulo 4 com fins de aplicação durante as aulas no Ensino Médio. Na figura 46 é possível observar as competências e habilidades que serão tratadas a seguir.

**Figura 46** – Mapa Mental das Competências e Habilidades a serem desenvolvidas.



Fonte: Autor, 2022.

### 5.1 Competências Desenvolvidas

#### 5.1.1 Competência Específica 1

*Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.*

Esta competência é cumprida no Capítulo 4 e suas seções, onde apresenta-se, no problema estudado, uma situação de saúde abordada por meio de conceitos, procedimentos e linguagem matemática.

#### 5.1.2 Competência Específica 2

*Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como*

*os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.*

Esta competência é cumprida no Capítulo 4 e suas seções, onde apresenta-se, no problema estudado, uma situação de saúde abordada por meio de conceitos, procedimentos e linguagem matemática. Quanto aos resultados do modelo fuzzy aplicado ao problema em questão, o diagnóstico sobre a doença, é gerado por meio de tecnologia.

### 5.1.3 Competência Específica 3

*Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.*

O problema proposto é tratado via um processo de Modelagem Matemática, cujo desenvolvimento engloba desde a escolha dos sintomas para os quais serão atribuídos pesos, que indicam sua importância para o diagnóstico da doença até, a análise dos resultados obtidos, para verificar se estão de acordo com o esperado e consequente reflexão acerca dos que não alcançaram tal expectativa.

### 5.1.4 Competência Específica 4

*Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.*

Nesta competência, pode-se observar que com o problema proposto e a utilização da Modelagem Matemática para abordá-lo, tem-se a oportunidade de trabalhar muitos aspectos matemáticos desde gráficos de funções no plano  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , tratamento de dados, uso de tabelas e também o uso de representações computacionais, quando da aplicação do sistema de inferência fuzzy em sua modelagem com o MATLAB®.

## 5.2 Habilidades Desenvolvidas

### 5.2.1 Habilidade (EM13MAT101)

*Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.*

Esta habilidade está relacionada a competência 5.1.1 e é desenvolvida no método e resultados apresentados por meio de análise crítica das figuras de 27 a 30 e 36 a 39. Podem ser



utilizadas em sala de aula afim de desenvolver os conceitos de função e taxas de variação em cada função de pertinência apresentada.

#### 5.2.2 Habilidade (EM13MAT203)

*Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.*

Já esta habilidade esta relacionada a competência 5.1.2 e é possível observá-la, no desenvolvimento das aplicações no e no uso do aplicativo (software) MATLAB ® onde é possível tomar uma decisão a partir de conceitos matemáticos.

#### 5.2.3 Habilidade (EM13MAT302)

*Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.*

A competência 5.1.3 engloba esta habilidade que pode ser desenvolvida no modelo apresentado no que engloba funções polinomiais de 1º grau nas funções de pertinência.

#### 5.2.4 Habilidade (EM13MAT311)

*Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.*

Esta habilidade também está relacionada a competência 5.1.3 como no item anterior, e pode ser desenvolvida tomando como referência a quantidade de de possibilidades das regras a serem desenvolvidas na Base de Regras (SE-ENTÃO) dos modelos apresentados.

#### 5.2.5 Habilidade (EM13MAT401)

*Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.*

Aqui é possível ser desenvolvido por meio dos gráficos das funções de pertinência das figuras 27 a 30 e 36 a 39 que possuem algumas funções com o mesmo coeficiente angular. É possível fazer a sobreposição de um gráfico sobre o outro para o parâmetro Febre. Nas figuras 27 ou 36 as varáveis "Médio e Alta" onde pode ser utilizado por exemplo o software Geogebra para os alunos possam acompanhar a sobre posição. Vale ressaltar que esta habilidade está relacionada a competência 5.1.4.

### 5.2.6 Habilidade (EM13MAT404)

*Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.*

Neste, iremos mostrar a parte algébrica das funções descritas nos gráficos das figuras de 27 a 30 e 36 a 39 para que se possa ter maior entendimento e/ou utilização durante as aulas. Vale lembrar que esta habilidade também está relacionada a competência 5.1.4.

Funções descritas para Tosse Seca que pode ser usada para as funções Cansaço, Dor Persistente no Peito, Dor de Garganta e Falta de Ar.

$$\text{Tosse Seca (Baixa)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 3 \\ \frac{3-x}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$\text{Tosse Seca (Média)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 3 \text{ ou } x > 7 \\ \frac{x-3}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{7-x}{1} & \text{se } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Tosse Seca (Alta)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ \frac{x-5}{1} & \text{se } 5 \leq x \leq 7 \\ 1 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

As demais funções podem ser descritas pelo mesmo processo, que pode ser realizado em conjunto com os alunos.

## 6 RECORTE COM O CONTEÚDO DO ENSINO MÉDIO E APLICAÇÕES

Neste capítulo, serão apresentadas atividades usando conceitos de Lógica Fuzzy que possam ser utilizadas no ensino da Matemática em nível de Ensino Médio. Será utilizado o software MATLAB<sup>®</sup> com o objetivo de obter maior agilidade na aplicação dos conceitos, vale ressaltar que por ser um software pago pode-se usar o software Octave<sup>®</sup> usando a função *toolkit* que detém as mesmas funções da *talkbox* que foi utilizada para realização deste trabalho. Essas atividades trazem consigo aspectos da Lógica Fuzzy, diferentes dos da lógica tradicional, que se aplicam a coisas do dia-a-dia dos alunos sobre as quais não se tinha essa visão matemática. Como por exemplo: ar condicionado, máquina de lavar, a idade, o peso e aspectos de inteligência artificial. A seguir serão trabalhadas duas atividades que podem ser utilizadas em sala de aula.

**Atividade 1** – (Escolha de Aplicativo) Um aluno procurava um aplicativo para edição de fotos e gravar vídeos em seu celular e buscou ajuda de sua turma para avaliar aplicativos utilizando os seguintes parâmetros: funcionalidade, segurança das informações e classificação na loja de aplicativo.

Este tema de grande interesse dos jovens nos dias atuais, e se torna ideal esta possibilidade para introduzir conceitos de raciocínio matemático através Lógica Fuzzy.

A partir disso pretende-se que os mesmos criem variáveis para cada parâmetro citado anteriormente, limitando os valores ao intervalo  $[0, 5]$  devido a classificação da loja geralmente estar dentro desses valores. Por sugestão como para os parâmetros de entrada e saída. Temos:

- Funcionalidade: ruim, regular e ótima que pode ser observado na função de pertinência da figura 47.
- Segurança das informações: baixa, regular e alta que se encontram na função de pertinência da figura 47.
- Avaliação na loja de aplicativos: baixa, regular e alta, o que pode ser visto na figura 48.
- De saída, Sugestão de escolha: baixa, boa e muito boa, o que pode ser visto na figura 49.

Espera-se que os alunos consigam criar os gráficos das funções de pertinência, a partir das equações das funções pré definidas e que o inverso também seja possível. Vale ressaltar que estes parâmetros não são obrigatórios. É possível gerar novas funções de pertinência com valores que eles sugeriram, tornando assim a aula mais participativa.

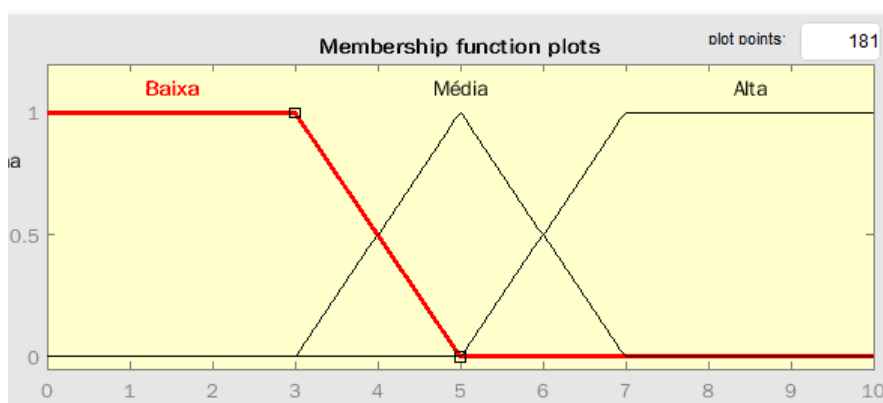
A discriminação a seguir, pode ser usada tanto para as funções de pertinência dos parâmetros de entrada: Funcionalidade (que terá seu nome atribuído nas equações abaixo) e Segurança das Informações que são representadas pelo gráfico da figura 47.

$$\text{Funcionalidade (Baixa)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 3 \\ \frac{3-x}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$\text{Funcionalidade (Média)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 3 \text{ ou } x > 7 \\ \frac{x-3}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{7-x}{1} & \text{se } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Funcionalidade (Alta)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ \frac{x-5}{1} & \text{se } 5 \leq x \leq 7 \\ 1 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

**Figura 47** – Função de pertinência da Funcionalidade e da Segurança das Informações



Fonte: Autor, 2022.

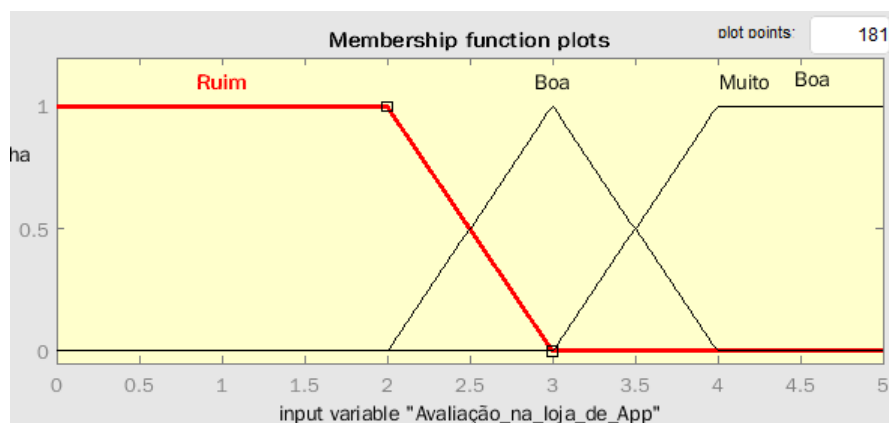
Para a função de pertinência da Avaliação na loja de Aplicativos, teremos:

$$\text{Avaliação na loja de Aplicativos (Baixa)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 2 \\ \frac{3-x}{1} & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

$$\text{Avaliação na loja de Aplicativos (Média)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \text{ ou } x > 4 \\ \frac{x-2}{1} & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{4-x}{1} & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Avaliação na loja de Aplicativos (Alta)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 3 \\ \frac{x-3}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

**Figura 48** – Função de pertinência da Avaliação na loja de Aplicativos



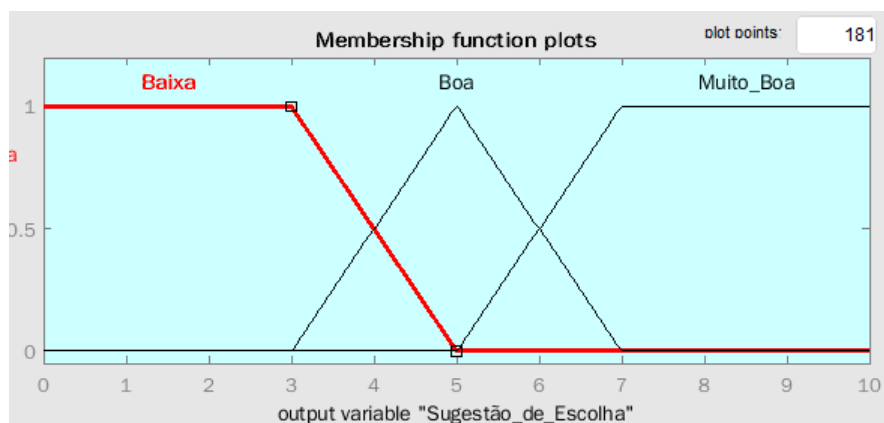
Fonte: Autor, 2022.

Já para o parâmetro de Saída: Sugestão de Escolha, teremos:

$$\text{Sugestão de Escolha (Baixa)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 3 \\ \frac{3-x}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$\text{Sugestão de Escolha (Boa)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 3 \text{ ou } x > 7 \\ \frac{x-3}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{7-x}{1} & \text{se } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Sugestão de Escolha (Muito Boa)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ \frac{x-5}{1} & \text{se } 5 \leq x \leq 7 \\ 1 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

**Figura 49** – Função de pertinência par Sugestão de Escolha

Fonte: Autor, 2022.

Para a escolha do aplicativo teremos a base de regras apresentada na Tabela 5 que pode ser usada como modelo a ser aplicado para as funções de pertinência citadas anteriormente. No entanto é possível criar essa base de regras em conjunto com os alunos no caso de serem definidas as outras funções de pertinência para os parâmetros e posteriormente verificar seus resultados no MATLAB®.

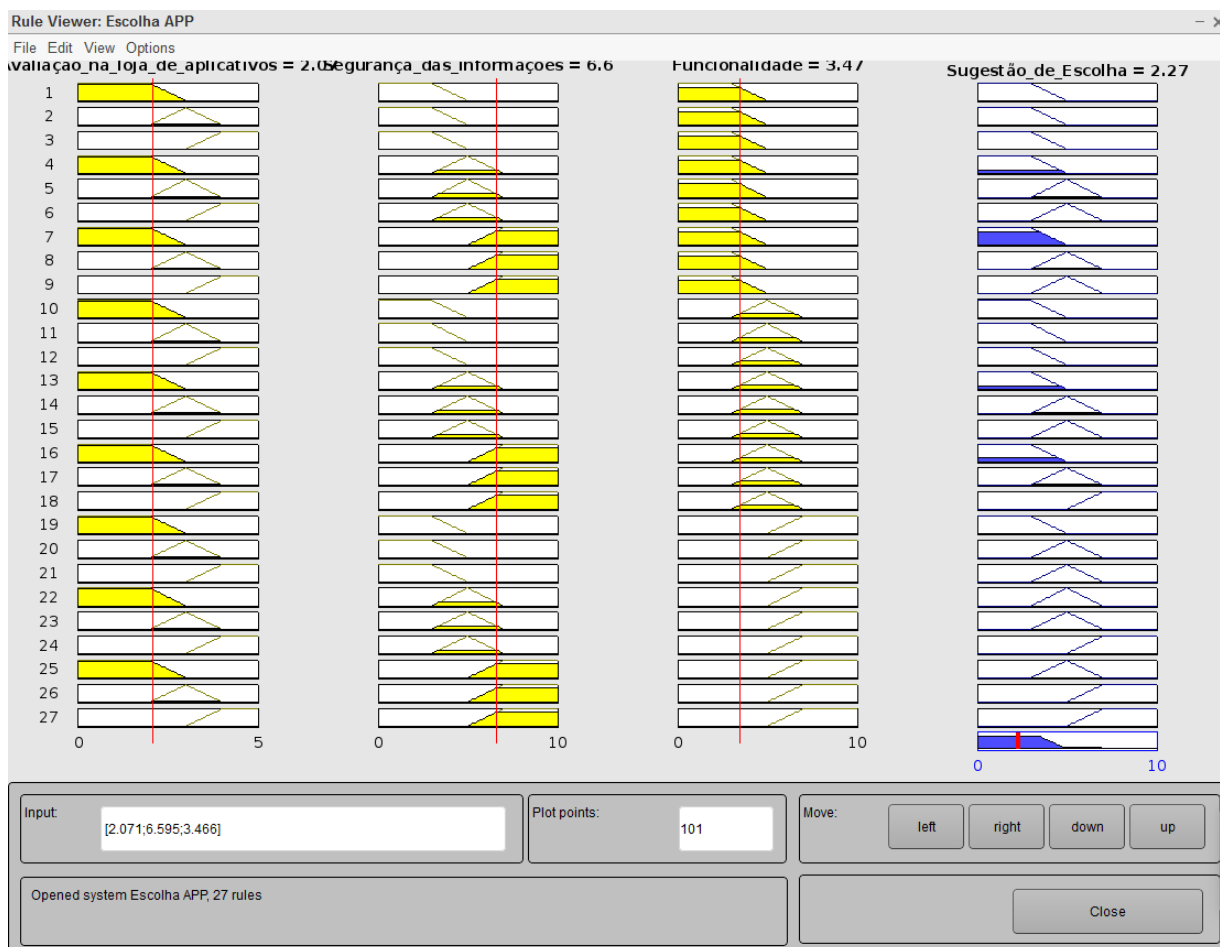
**Tabela 5** – Quadro com a Base de Regras para Escolha do Aplicativo

Se	Funcionalidade	Segurança das Informações	Avaliação na loja de App	então	Sugestão de Escolha
R1	Baixa	Baixa	Ruim	então	Baixa
R2	Baixa	Baixa	Boa	então	Baixa
R3	Baixa	Baixa	Muito Boa	então	Baixa
R4	Baixa	Média	Ruim	então	Baixa
R5	Baixa	Média	Boa	então	Boa
R6	Baixa	Média	Muito Boa	então	Boa
R7	Baixa	Alta	Ruim	então	Baixa
R8	Baixa	Alta	Boa	então	Boa
R9	Baixa	Alta	Muito Boa	então	Boa
R10	Média	Baixa	Ruim	então	Baixa
R11	Média	Baixa	Boa	então	Baixa
R12	Média	Baixa	Muito Boa	então	Baixa
R13	Média	Média	Ruim	então	Baixa
R14	Média	Média	Boa	então	Boa
R15	Média	Média	Muito Boa	então	Boa
R16	Média	Alta	Ruim	então	Baixa
R17	Média	Alta	Boa	então	Boa
R18	Média	Alta	Muito Boa	então	Muito Boa
R19	Alta	Baixa	Ruim	então	Baixa
R20	Alta	Baixa	Boa	então	Boa
R21	Alta	Baixa	Muito Boa	então	Boa
R22	Alta	Média	Ruim	então	Boa
R23	Alta	Média	Boa	então	Boa
R24	Alta	Média	Muito Boa	então	Muito Boa
R25	Alta	Alta	Ruim	então	Boa
R26	Alta	Alta	Boa	então	Muito Boa
R27	Alta	Alta	Muito Boa	então	Muito Boa

Fonte: Autor, 2022.

Por fim podemos ver as regras funcionando pelo método inferência de Mamdani e o resultado que pode ser vista na figura 50, aqui é possível inserir o princípio multiplicativo para saber a quantidade de regras que teremos que neste caso era  $3 \times 3 \times 3 = 27$  possibilidades .

**Figura 50** – Sistema de Inferência Fuzzy para a Sugestão de Escolha



Fonte: Autor, 2022.

Na figura 50 é o momento onde os alunos podem observar o processo de Inferência Mamdani, onde é possível ver as regras do sistema se relacionando através dos parâmetros, produzindo novos valores de saída e que por fim geram um valor crisp ao final deste processo, determinando a Sugestão de Escolha.

Por exemplo, para a Avaliação na Loja de Aplicativos com o grau de pertinência "2,071", Segurança das informações com o grau de pertinência de "6,6" e Funcionalidade com grau de pertinência de "3,47" geram um grau de pertinência de "2,27" para Sugestão de Escolha que é "Baixa".

Seguindo estes passos é possível, fazer com que os alunos entendam melhor e desenvolvam seus conhecimentos em Lógica Fuzzy. Assim, esta atividade pode ser interessante uma abordagem em sala de aula.

A seguir será tratada a atividade 2 que possui as mesmas características apresentadas nesta atividade.



**Atividade 2–** (Avaliando um(a) Atleta de Ginástica Artística) Para avaliar a nota de uma ginasta artística na Olimpíada de Tóquio durante sua apresentação no solo, utilizaremos os seguintes critérios: Nota de Dificuldade, Nota de Execução e Nota Final.

Esta atividade tem a intenção de aproveitar a grande quantidade de informações referentes a atletas olímpicos que possa ser de interesse dos alunos.

Utilizando os parâmetros de entrada da função de pertinência e suas variáveis linguísticas. Temos:

- Nota de Dificuldade: Regular, Difícil e Muito difícil. Vista na figura 51.
- Nota de Execução: Regular, Boa e Muito Boa. Observada na figura 52.

Por fim, como parâmetro de saída. Teremos:

- Nota Final: Regular, Boa e Excelente. Que se encontra na figura 53

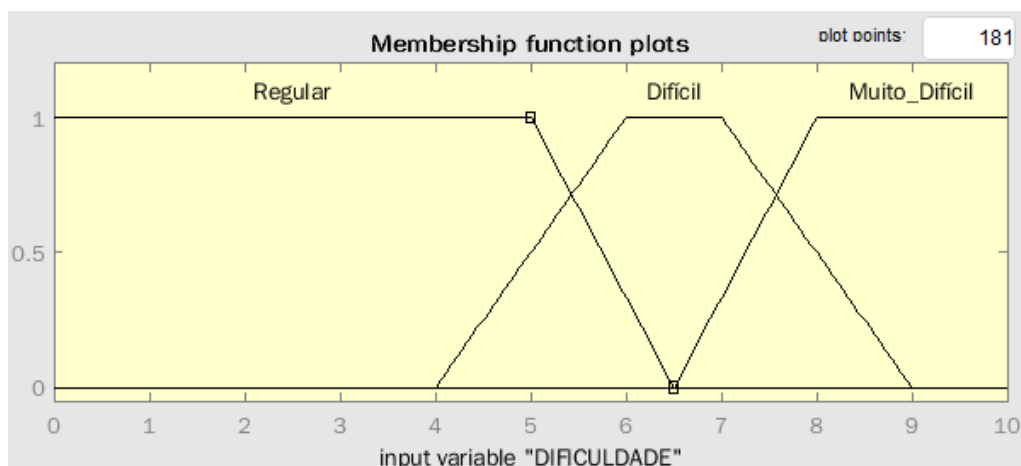
É importante frisar que esta etapa está na fase de fuzzificação no SBRF.

O gráfico da função de pertinência Nota de dificuldade é dado pela figura 51 e suas variáveis linguísticas são descritas por:

$$\text{Nota de Dificuldade (Regular)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 5 \\ \frac{13-2x}{3} & \text{se } 5 \leq x \leq 6,5 \\ 0 & \text{se } x > 6,5 \end{cases}$$

$$\text{Nota de Dificuldade (Difícil)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 4 \text{ ou } x > 9 \\ \frac{x-4}{2} & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{se } 6 < x \leq 7 \\ \frac{9-x}{2} & \text{se } 7 < x \leq 9 \end{cases}$$

$$\text{Nota de Dificuldade (Muito Difícil)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 6,5 \\ \frac{2x-13}{3} & \text{se } 6,5 \leq x \leq 8 \\ 1 & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

**Figura 51** – Função de pertinência para Nota de Dificuldade

Fonte: Autor, 2022.

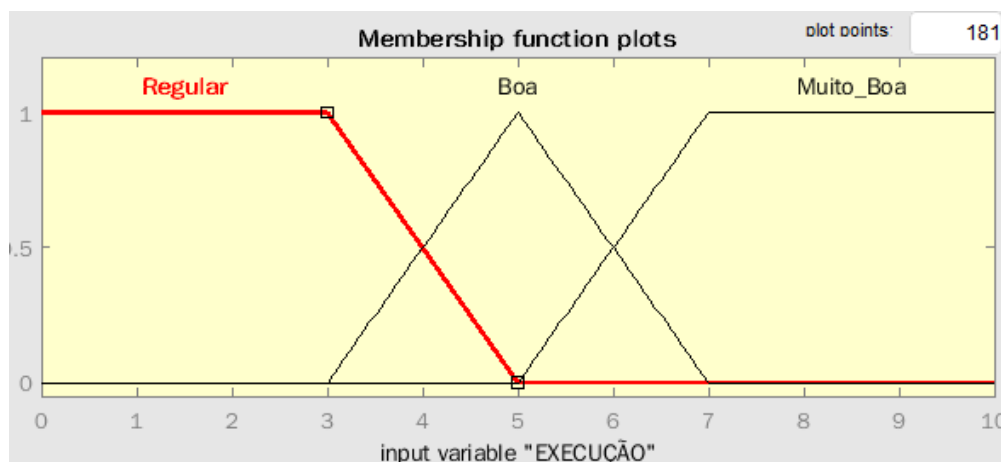
Para a função de pertinência para a Nota de Execução que é representada pela figura 52 e teremos suas variáveis linguísticas descritas por:

$$\text{Nota de execução (Regular)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 3 \\ \frac{3-x}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$\text{Nota de execução (Boa)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 3 \text{ ou } x > 7 \\ \frac{x-3}{1} & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{7-x}{1} & \text{se } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Nota de execução (Muito Boa)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ \frac{x-5}{1} & \text{se } 5 \leq x \leq 7 \\ 1 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

**Figura 52** – Função de pertinência para Nota de Execução



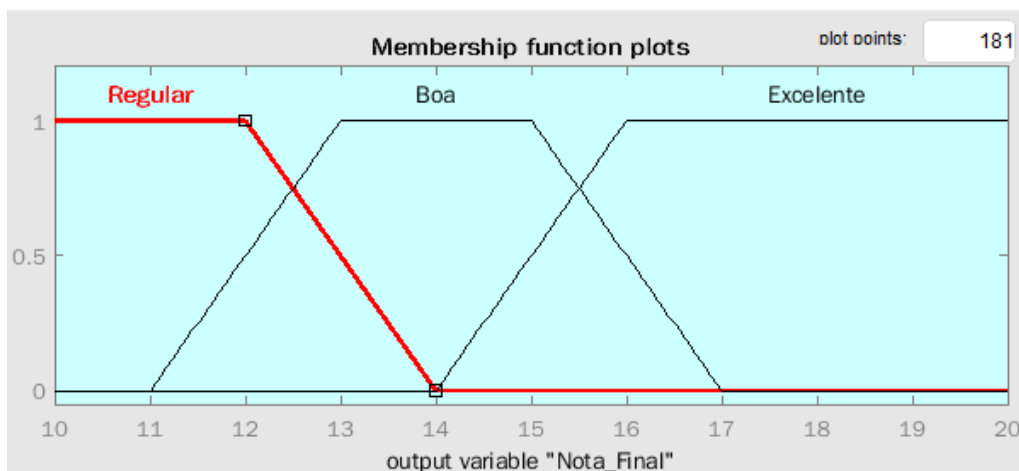
Fonte: Autor, 2022.

Por fim teremos para função de pertinência para o parâmetro de saída descrito pela figura 53 descrevendo a Nota Final e com as variáveis linguística descritas abaixo:

$$\text{Nota Final (Regular)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 12 \\ \frac{14-x}{2} & \text{se } 12 \leq x \leq 14 \\ 0 & \text{se } x > 14 \end{cases}$$

$$\text{Nota Final (Boa)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 11 \text{ ou } x > 17 \\ \frac{x-11}{2} & \text{se } 11 \leq x \leq 13 \\ 1 & \text{se } 13 < x \leq 15 \\ \frac{17-x}{2} & \text{se } 15 < x \leq 17 \end{cases}$$

$$\text{Nota Final (Excelente)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 14 \\ \frac{x-14}{2} & \text{se } 14 \leq x \leq 16 \\ 1 & \text{se } x > 16 \end{cases}$$

**Figura 53** – Função de pertinência para Nota Final

Fonte: Autor, 2022.

Para avaliação de um atleta de ginástica artística teremos a seguinte base de regras apresentada na tabela 6 que pode ser usada como modelo a ser aplicado para as funções de pertinência citadas anteriormente. No entanto é possível criar essa base de regras em conjunto com os alunos como no anterior e por ter menos parâmetros envolvidos se torna mais fácil a sua elaboração.

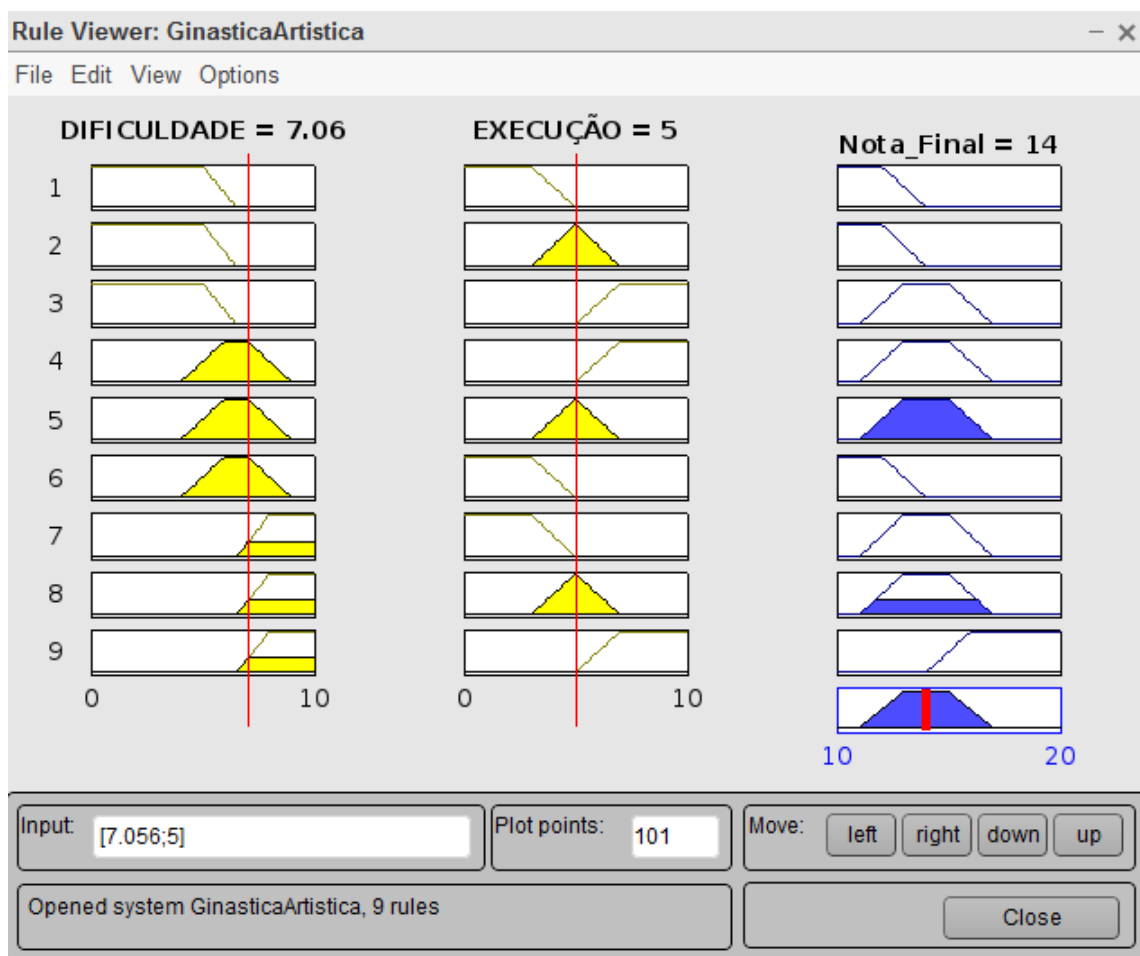
**Tabela 6** – Quadro com as Regras Fuzzy para Avaliação ginasta

Se	Nota de Dificuldade	Nota de Execução	então	Nota Final
R1	Regular	Regular	então	Regular
R2	Regular	Boa	então	Regular
R3	Regular	Muito Boa	então	Boa
R4	Difícil	Regular	então	Regular
R5	Difícil	Boa	então	Boa
R6	Difícil	Muito Boa	então	Boa
R7	Muito Difícil	Regular	então	Boa
R8	Muito Difícil	Boa	então	Boa
R9	Muito Difícil	Muito Boa	então	Excelente

Fonte: Autor, 2022.

Aqui pode-se ver as regras funcionando pelo método de inferência de Mamdani e o resultado que pode ser visto na figura 54. Nesta também é possível inserir o princípio multiplicativo para saber a quantidade de regras que teremos que neste caso é  $3 \times 3 = 9$  possibilidades.

**Figura 54** – Sistema de Inferência Fuzzy para a Avaliação de um(a) ginasta olímpico



Fonte: Autor, 2022.

Na figura 54 é o momento onde os alunos podem observar o processo de Inferência Mamdani, onde é possível ver as regras do sistema se relacionando através dos parâmetros, produzindo novos valores de saída e que por fim geram um valor crisp ao final deste processo, determinando a Nota Final.

Por exemplo, para a Nota de dificuldade o grau de pertinência "7,06", Nota de Execução com o grau de pertinência de "5" gerando, pelo método centro de gravidade, um grau de pertinência de "14" para Nota Final que é "Boa".

Sendo assim, esta atividade pode ser interessante uma abordagem em sala de aula para como forma de mostrar aplicação da Lógica Fuzzy em diversas áreas do cotidiano.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa apresentou o estudo de uma proposta de modelo matemático fuzzy para o diagnóstico da Covid-19 através de um sistema baseado em regras Fuzzy (SBRF) que usou os conceitos de conjuntos fuzzy, números fuzzy, método de inferência fuzzy "Inferência de Mamdani" e o método de defuzzificação "Centro de gravidade"; além das ferramentas disponíveis no software MATLAB <sup>®</sup>.

Inicialmente fez-se uma abordagem sobre Modelagem Matemática e Pensamento Computacional para introduzir seus conceitos e complementar os motivos pelos quais foi escolhido o assunto Lógica Fuzzy e aplicá-los.

Os resultados obtidos na aplicação do modelo ao problema da determinação do diagnóstico da COVID-19 foram possíveis por meio do sistema de regras fuzzy. Desenvolvido para este modelo que apresentou dados que ajudam a dar agilidade ao processo para o diagnóstico de um especialista sobre a doença. No entanto, como foi realizada uma abordagem inicial não é possível confirmar que todos os resultados obtidos no modelo são realmente válidos. Na subseção 4.3.4, pode ser observado que algumas superfícies apresentam dados imprecisos como podem vistos nas figuras 42 onde a superfície começa a demonstrar uma variação elevada a partir da temperatura de 37 °C; na figura 43 apresenta vales em pontos próximos ao valor "5" para Cansaço e Tosse Seca algo que gera dados inclusivos para esta situação; já na figura 44 não apresenta qualquer conclusão pois todos os pontos na superfície estão na parte superior e por fim a figura 45 apresenta um superfície onde poucos dados conseguem ser definidos.

Em seguida, é apresentado uma série de competências e habilidades que se encontram na Base Nacional Comum Curricular e podem ser desenvolvidas a partir do assuntos abordados na pesquisa mostrando assim que é possível trabalhar com este conteúdo no ensino de Matemática no Ensino Médio.

Por fim, é sugerido uma série de atividades que visa uma interação dos alunos de forma que seja respeitado os passos da Modelagem Matemática no desenvolvimento da resolução das atividades sugeridas baseando-se no conceito da incerteza e imprecisão que são encontrados na Lógica Fuzzy. Devido ao assunto ser desconhecido faz-se necessária uma aula introdutória para que os conceitos sejam apresentados antes das atividades.

Assim, é possível desenvolver os conhecimentos de Lógica Fuzzy em sala de aula, trazendo novas formas de saber matemático para os alunos, mesmo que este não seja um assunto tratado específica pela BNCC.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. F. R. D. **Inteligência Artificial: Representação do Conhecimento (Lógica Fuzzy)**. 1. ed. Paraná: UFCG, 2013. Acesso em: 15 jun 2021. 57, 58, 59, 60
- ARSEVEN, A. Mathematical modelling approach in mathematics education. **Universal Journal of Educational Research**, ERIC, v. 3, n. 12, p. 973–980, 2015. 21
- ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. **Revista do professor de matemática**, v. 45, 2001. 19
- AVILA, G. Aristarco e as dimensões astronômicas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 55, p. 1–10, 2004. 18
- BARCELOS, T. S.; SILVEIRA, I. F. Pensamento computacional e educação matemática: Relações para o ensino de computação na educação básica. In: **XX Workshop sobre Educação em Computação, Curitiba. Anais do XXXII CSBC**. [S.l.: s.n.], 2012. v. 2, p. 23. 25
- BASSANEZI, R. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática**. [S.l.: s.n.], 2002. ISBN 85-7244-207-3. 17, 22
- BASSANEZI, R.; BARROS, L. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 85-87185-05-5. 37, 49, 53, 60
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. [S.l.]: Editora Contexto, 2000. 17
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. 17
- BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. 2017. 24, 26
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 08 jan 2022. 16, 24
- BRASIL. **Guia Orientador para o enfrentamento da pandemia covid-19 na Rede de Atenção à Saúde. 4ª edição**. 4. ed. Brasília: Ministério da Saúde, 2021. Acesso em: 27 jul 2021. 75
- BURAK, D. Modelagem matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 10–27, 2010. 21
- CHERRI, A. C.; JUNIOR, D. J. A.; SILVA, I. N. d. Inferência fuzzy para o problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis de material. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 31, n. 1, p. 173–195, 2011. 49
- DAMASCENO, L. N.; RABELO, J. C. R. Matemática: Nos dias atuais ainda existe um nível alto de rejeição? **Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 13, n. 1, 2019. 15
- D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 5–11, 1993. 23

- ELMASRI, R. et al. *Sistemas de banco de dados*. Pearson Addison Wesley São Paulo, 2005. 61
- FERREIRA, G. P. et al. A modelagem matemática ao longo da história e o surgimento da modelação matemática no Brasil. **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, v. 11, 2013. 19
- FU, L. et al. Clinical characteristics of coronavirus disease 2019 (COVID-19) in China: a systematic review and meta-analysis. **Journal of Infection**, Elsevier, v. 80, n. 6, p. 656–665, 2020. 63
- GAYER, F. A. M. *A matemática está em tudo: modelagem fuzzy para um problema da indústria e uma proposta de aplicação no ensino médio*. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2017. 45, 48
- HOSSAIN, M. A.; HOSSAIN, M. S. Mathematical approach to identify coronavirus disease (COVID-19) using fuzzy logic inference system. 2021. 63
- IVANQUI, J. **Esteira eletrônica com velocidade controlada por lógica fuzzy**. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, 2005. 56
- KERSCHBAUMER, R. **SISTEMAS INTELIGENTES 1**. 1. ed. Parana: UTFPR, 2018. Acesso em: 15 jan 2022. 31
- MEYER, J.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. d. S. *Modelagem em educação matemática*. **Belo Horizonte: Autêntica**, 2011. 26
- PAIVA, R. *Projeto arquitetônico e meios de representação: uma relação dialética*. PPGAU/UFRN, 2015. 20
- PAULA, E. de; FERNANDES, F. C. *Educação matemática pela contextualização da astronomia*. **XIII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica, UNIVAP, São José dos Campos, SP**, v. 15, 2009. 18
- PINHEIRO, C. *Estratégia de controle fuzzy para suspensão ativa automobilística*. p. 1–6, 2004. 30
- RIBEIRO, L.; FOSS, L.; CAVALHEIRO, S. A. d. C. *Entendendo o pensamento computacional*. **arXiv preprint arXiv:1707.00338**, 2017. 24
- SCHICHL, H. Models and the history of modeling. In: **Modeling languages in mathematical optimization**. [S.l.]: Springer, 2004. p. 25–36. 17
- SHAW, I. E. S.; SIMÕES, E. *Mg controle e modelagem fuzzy*. **Editores Edgard Blücher Ltda., São Paulo**, 1999. 56
- SILVA, F. F. B. et al. *Desvendando a lógica fuzzy*. Universidade Federal de Uberlândia, 2011. 55
- SOUZA, P. H. G. de; JAVARONI, S. L. *Modelagem matemática, pensamento computacional e suas relações*. **Modelagem Matemática, Pensamento Computacional e suas relações**, p. 1–388, 2019. 26
- STILLMAN, G. Upper secondary perspectives on applications and modelling. In: **Modelling and applications in mathematics education**. [S.l.]: Springer, 2007. p. 463–468. 21
- TANSCHKEIT, R. *Sistemas fuzzy*. **Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro**, p. 338–353, 2004. 46, 47



- TEDESCO, P.; VASCONCELOS, G. **Logica Difusa (Fuzzy)**. 1. ed. Pernambuco: UFPE, 2017. Acesso em: 02 set 2021. 49
- TOLEDO, O. M.; COSENZA, C. A. N. Metodologia de avaliação de desempenho baseada em lógica fuzzy. In: **Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia Cobenge**. [S.l.: s.n.], 2004. 28
- UYSAI, İ.; UTKU, K. Fuzzy logic-based decision support system for covid-19 emergency state determination. **Scientific Journal of Mehmet Akif Ersoy University**, v. 4, n. 2, p. 58–67, 2021. 64, 71
- WANG, L.-X. **A course in fuzzy systems and control**. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1996. 49
- WILHELM, V. **TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I (Conjuntos Difusos –Inferência)**. 1. ed. Paraná: UFPR, 2009. Acesso em: 05 mai 2021. 54
- WING, J. Research notebook: Computational thinking—what and why. **The link magazine**, v. 6, p. 20–23, 2011. 24
- WING, J. M. Computational thinking. **Communications of the ACM**, ACM New York, NY, USA, v. 49, n. 3, p. 33–35, 2006. 25, 26
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. In: **Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh**. [S.l.]: World Scientific, 1965. p. 394–432. 28
- ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. **Information sciences**, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 199–249, 1975. 43
- ZHOU, Y. et al. Advances in mers-cov vaccines and therapeutics based on the receptor-binding domain. **Viruses**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 1, p. 60, 2019. 62
- ZIMMERMANN, H.-J. **Fuzzy set theory—and its applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. 43